وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
BADJI MOKHTAR UNIVERSITY ANNABA

جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2016

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option
Mathématiques Appliquées

Titre

Sur quelques problèmes aux limites fractionnaires

Par

Salima BENSEBAA

DIRECTRICE DE THESE : Assia GUEZANE-LAKOUD Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT:	Rabah KHALDI	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEURS :	Fateh ELLAGOUNE	Prof.	U. GUELMA
	Abdelhak DJEBABLA	M.C.A	U.B.M ANNABA
	Abderrezak CHAOUI	M.C.A	U. GUELMA
	Khaled BOUKERRIOUA	M.C.A	U. GUELMA

Remerciements

La rédaction de ce manuscrit constitua l'une des étapes les plus longues et difficile de mes cinq années de thèse. Et cette page fut sans aucun doute celle qui aura nécessité le plus d'éfforts et d'attention de ma part, tant je tenais à remercier comme il se doit les personnes ayant participé, directement ou indirectement, à l'achèvement de ce travail.

Mes premiers remerciements vont à Madame **Assia GUEZANE-LAKOUD** *qui fut pour moi une* directrice de thèse attentive et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris.

Je tiens également à remercier Monsieur ***Rabah KHALDI*** *qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que messieurs* ***Fateh ELLAGOUNE, Abdelhak DJEBABLA, Abderrezak CHAOUI et Khaled BOUKERRIOUA*** *pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.*

Je remercie infiniment mes amies qui étaient présentes à mes côtés lorsque j'en avais besoin. Merci donc à Assia, Nadia et Lynda.

Merci enfin à ma famille, pour son soutien et ses encouragements, pour le havre qu'a représenté le domicile familial en ces moments de doute que connaît tout doctorant. Merci pour tout !

A mes parents.

A mon mari.

A mes deux fils.

ملخص

الهدف من هذه الرسالة يكمن في دراسة وجود حلول لبعض المسائل الحدية الكسرية.

نهتم في المرحلة الأولى على إثبات وجود و وحدانية الحلول بالإضافة إلى وجود الحلول الموجبة للمعادلات التفاضلية الكسرية مع شرط المشتقة الكسرية و الشروط الحدية عند ثلاث نقاط وذلك باستخدام أو الإعتماد على نظرية المتناوبة الغير خطية للاري- شودار، مبدأ التقلص لبناخ و نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسلسكي و آفرى بترسون ، أما في المرحلة الثانية فنبحث على وجود الحلول الموجبة لمسألة كسرية ذات الشروط الحدية عند نقطتين و ذلك عن طريق نظرية المؤشر للنقطة الصامدة.

الكلمات المفتاحية : نظرية المتناوبة الغير خطية للاري- شودار، مبدأ التقلص لبناخ، نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسلسكي و آفرى بترسون، مؤشر النقطة الصامدة.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux problèmes aux limites fractionnaires. Dans la première partie, nous commençons par étudier des équations différentielles fractionnaires soumises à une condition au dérivée fractionnaire et aux conditions aux limites en trois points. L'existence, l'unicité ainsi que la positivité de la solution sont établies via l'alternative non linéaire de Leray- Schauder , le principe de contraction de Banach, le théorème de Guo- Krasnosel.skii et d'Avery Peterson d'expansion et de compression d'un cône. Dans la deuxième partie, nous traitons les questions d'existence des solutions positives d'un autre problème fractionniare avec des conditions aux limites en deux point, en utilisant la théorie de l'indice du point fixe.

Mots clés : L'alternative non linéaire de Leray- Schauder, principe de contraction de Banach, théorème de Guo-Krasnosel'skii, théorème d'Avery-Peterson dans un cône, fonction de Green, l'indice du point fixe.

Abstract

In this thesis, we focus on the fractional boundary value problems. In the first step, we study fractional differential equations with fractional derivative condition and boundary conditions at three point. Uniqueness and the existence of positive solutions are established by using some fixed point theorems notably, Leray- Schauder nonlinear alternative, the Banach contraction principle, Guo-Krasnosel'skii and Avery-Peterson theorms on compression and expansion of cones. Then, in the second step, we invistigate the questions of existence of positive solutions of a boundary value problem with boundary conditions at two point using index fixe point theory.

Secondly, the multiplicity of the solution for a boundary value probem has been proved by Guo-Krasnosel'skii and Avery-Peterson theorems on compression and expansion of cones.

Finally, we invistigated the questions of existence of at least one positive solution of a nonlinear fractionniare boundary value problem using index fixe point theory.

Keywords and phrases : Leray -Schauder nonlinear alternative, Banach contraction principle, Guo-Krasnoselskii fixed point theorem in cone, Avery-Peterson theorem, Green function, index fixe point theory.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente [11], la question des dérivées fractionnaires fût abordée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre à L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande qu'elle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x, Leibnitz répond que cela mêne à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc. Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques « pures » sans intérêt pour l'ingénieur. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides [27] montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. La dérivée d'ordre un demi étant introduite, on doit être vigilant quant à sa définition précise dans les situations les plus générales. Il en est de même pour la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire α où α est typiquement un nombre réel entre zéro et un. Pendant longtemps plusieurs définitions, suite aux travaux de Joseph Liouville et Bernhard Riemann au milieu du XIX e siècle, ont coexisté sans qu'il y ait une parfaite compatibilité entre elles.

Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept du calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous. Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques, thermiques et viscoélastiques sont régis par des équations différentielles à dérivées non entières. Pour plus de connaissances et d'amples details voir [3,12,16,23,29,32]. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non entières ont, à cet effet, été développés. La raison principale de l'usage des modèles d'ordre entier était l'absence des méthodes de solution pour des équations fractionnaires ou d'ordre non entier.

Pendant ces trois dernières décennies, un fort engouement a été porté au calcul fractionnaire et ces applications. Le premier mérite revient à B. Ross qui a organisé une conférence à l'université de New Haven en Juin 1974 sous le titre " Le calcul fractionnaire et ses applications". Pour la première monographie le mérite est attribué à K. B. Oldham et J. Spanier [32], leur collaboration a permis de publier en 1974 un ouvrage consacré au calcul fractionnaire.

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [33] a montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Il propose une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Le groupe CRONE, fondé par Oustaloup dans les années 70, applique ces méthodes à de nombreux systèmes industriels : spectroscope, suspension de voitures, robot-cueilleur, charrue éléctro-hydrolique, batterie pour voitures, etc.

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations d'opérateurs non linéaires. De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach, Brouwer et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème de Brouwer intervient moins souvent que le thèorème du point fixe de Banach, mais il reste un outil précieux pour résoudre des équations aux dérivées partielles non linéaires. Ce théorème de point fixe est très fort : l'hypothèse sur la fonction est plutôt faible, on a juste sa continuité et qu'elle laisse stable la boule unité, ainsi on obtient l'existence d'un point fixe.

En 1930, Schauder a établi une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des conditions sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach.

Dans les dernières années, le théorème de Krasnoselskii [25] est apparu. Sa version générale est un outil pour obtenir l'existence de multiples solutions positives pour des problèmes aux limites différents, notamment dans les équations différentielles ordinaires. Krasnoselskii lui-même dans [25] a appliqué son résultat pour l'étude des solutions périodiques pour un système périodique d'équations différentielles ordinaires. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence de la solution.

Les équations différentielles fractionnaires constituent un domaine de recherche d'actualité. En effet, de nombreux articles sont apparus traitant les questions d'existence, d'unicité ainsi que la multiplicité des solutions positives de ce type d'équations. D'une manière générale, nous ne disposons d'aucune méthode d'investigation assez puissante pour répondre à ces questions. Les méthodes existantes sont de plusieurs sortes, nous citerons à titre d'exemples la méthode du degré topologique [30], la méthode du point fixe [9], et la méthode des sur et sous-solutions [8]. D'autre part on trouve des théorèmes importants qui donnent l'existence et la multiplicité des solutions, par exemple le théorème de Krasnosel'skii [25] et le théorème de Avery et Peterson [4].

Nous rencontrons dans la littérature différentes techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe pour la résolution des équations différentielles fractionnaires.

Citons sur ce sujet le travail de A. Guezane-Lakoud et R. Khaldi dans [14] où ils ont considéré l'équation différentielle fractionnaire :

$$^{c}D_{0+}^{q}u(t) = f\left(t, u(t), ^{c}D_{0+}^{\sigma}u(t)\right), 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u'(1) = ^{c}D_{0+}^{\sigma}u(1),$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $^{c}D_{0+}^{\sigma}$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $1 < q < 2$ et $0 < \sigma < 1$.

Des résultats d'existence sont obtenus moyennant l'alternative de Leray Schauder et le théoreme du point fixe de Banach.

De son côté Zhoujin dans [45], a établi des résultats d'existence de la solution en utilisant le théorème du point fixe de Schauder du problème aux limites fractionnaire suivant

$$^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t) + f\left(t, u(t), ^{c}D_{0+}^{\beta}u(t)\right) = 0, 0 < t < 1, 3 < \alpha \leq 4,$$

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, u(1) = u(\xi), 0 < \xi < 1,$$

où $^{c}D_{0+}^{\sigma}$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo, $\beta > 0$,$\alpha - \beta \geq 1$.

Dans [43], Zhang a proposé l'étude du problème fractionnaire suivant :

$$^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2$$

$$u(0) + u'(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0.$$

Les résultats d'existence et multiplicité des solutions positives sont basés sur les théorèmes du point fixe dans un cône.

En se basant sur le théorème du point fixe de Schauder et la théorie de l'indice du point fixe, Bai [5] a étudié l'existence et la positivité de la solution du problème fractionnaire suivant

$$^{c}D_{0^+}^{\alpha} u(t) + f(t, u(t)) = 0, 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2$$

$$u(0) = 0, \beta u(\eta) = u(1).$$

Motivés par la diversité de ces travaux, nous proposons dans cette thèse un ensemble de résultats contribuant au développement de cette thématique.

Notre objectif principal est d'adapter les outils classiques de l'analyse à l'étude de certains problèmes aux limites fractionnaires.

Cette thèse est structurée comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma et la fonction Bêta qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Deux approches (Riemann-Liouville et Caputo) généralisant les notions de dérivation sont ensuite considérées. Enfin, nous évoquons quelques théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude du problème fractionnaire :

$$^{c}D_{0^+}^{q} u(t) = f\left(t, u(t), {}^{c}D_{0^+}^{\sigma} u(t)\right), 0 < t < 1,$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u''(0) = 0, u'(1) = {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(1).$$

Suite à une introduction, nous présentons dans la section 2 l'équivalence entre ce problème et une équation intégrale. Dans la section 3 et 4 des résultats d'existence et d'unicité de la solution sont établis en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Schauder. Nous concluons ce chapitre par des exemples illustratifs qui valident les résultats obtenus. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale :

A. Guezane lakoud, S. Bensebaa. Solvability of a fractional boundary value problem with fractional derivative condition, Arab J Math. 3 : 39–48, 2014.

A travers le troisième chapitre, nous proposons d'étudier le problème aux limites fractionnaires suivant :

$${}^{c}D_{0+}^{q} u(t) + f(t, u(t)) = 0, 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = u(\xi).$$

Tout d'abord, dans la section 2 nous transformons notre problème en un problème de point fixe. Par la suite, nous établissons la fonction de Green et ses propriétés ainsi que le cône approprié. Dans la section 3, et en se basant sur les théorèmes de Krasnoselskii et d'Avery Peterson des résultats d'existence de solutions positives ont pu être prouvé. Enfin, nous terminons par deux exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

A. Guezane lakoud, S. Bensebaa. Multiple positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation , journal of applied functional analysis. 9 (1-2) : 87-98, 2014.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème fractionnaire

$$^{c}D_{0+}^{q}u(t)+a\left(t\right)f(u(t))=0,0<t<1,$$

avec les conditions aux limites

$$u(0)=u''(0)=0,u(1)=0.$$

Après avoir formulé le problème de point fixe équivalent et déterminer les propriétés de la fonction de Green, des résultats d'existence des solutions positives sont assurées via la thèorie de l'indice du point fixe. Deux exemples ilustratifs sont donnés pour cloturer ce chapitre. Notons que les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale :

S. Bensebaa, A. Guezane lakoud. Existence of positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation , Appl. Math. Inf. Sci. 10 (2) : 519-525, 2016.

Chapitre 2

Préliminaires

Résumé

Le but de ce chapitre est de présenter, d'une manière synthétique et unifiée, les éléments sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans ce mémoire.

2.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base de la dérivation non entière. Nous avons repertorié quelques notions de cet outil mathématique, deux approches des dérivées fractionnaires sont introduites à savoir, l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo ainsi que leurs propriétés et quelques exemples de calcul.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons particulièrement à définir des notions fondamentales et à rappeler quelques théorèmes importants dans la théorie du point fixe, notamment le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le théorème de Krasnosels'kii et le théorème d'Avery Peterson ainsi leurs extentions, pour plus de détails voir [4,9,25]

2.2 Espaces fonctionnels

Tout d'abord, nous présentons les espaces fonctionnels concernés par notre travail.

2.2.1 Espaces L^p

Soit Ω un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$. On désigne par $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$ l'espace des fonctions sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que f est mesurable et $\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty$, muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.2.2 Espaces $AC^n(\Omega)$

Soient $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolûment continues, pour $n \geq 2$, nous notons par $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, telles que $f^{(k)} \in C(\Omega)$, $k = 1, ..., n-1$ et $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.

2.3 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans ce qui suit, nous présentons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Fonction Gamma

La fonction gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 2.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0,$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

en particulier

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fonction Bêta

La fonction Bêta est donnée par

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\omega-1}, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\omega) > 0.$$

Remarque 2.1 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit :*

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Re}(\omega) > 0.$$

2.4 Diverses approches de la dérivation fractionnaire

Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

- La limite du taux d'accroisement d'une fonction se généralise sous la forme de la formule de Grunwald-Letnikov, très utile numériquement,

- L'intégration, opération inverse de la dérivation, mène, via la formule intégrale de Liouville, aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo,

- Enfin les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(i\omega)^\alpha$ ou p^α avec α non entier.

Mais ces différentes définitions ne sont pas toujours équivalentes.

2.4.1 Théorie de Riemann-Liouville

Nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville. On peut commencer par examiner une formule (unique) qui donne des primitives successives d'une fonction continue par exemple.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. Une primitive de f est donnée par

$$\left(I_a^1 f\right)(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\,dt\right) ds.$$

Par le théorème de Fubini l'intégrale double se ramène à une intégrale simple

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x (x-t)\, f(t)\, dt.$$

Puis une itération donne

$$\left(I_a^n f\right)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!} f(t)\, dt.$$

Définition 2.2 *Soit $f \in L^1([a,b])$ and $\alpha > 0$. On appelle intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann -Liouville d'ordre α l'intégrale suivante*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,$$

et l'intégrale

$$I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,$$

est appelé intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Exemple 2.1 *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. Alors*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta\, dt,$$

En effectuant le changement de variable $t = a + (x-a)\tau$ et en utilisant la fonction

Bêta il résulte que

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}\,dt \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},
\end{aligned}$$

donc

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = (x-a)^{\beta+\alpha}\,\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Lemme 2.1 *[23] Soient $p,\ q \geq 0,\ f \in L^1([a,b])$, alors l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe suivante*

$$I_a^p I_a^q f(t) = I_a^{p+q} f(t) = I_a^q I_a^P f(t).$$

2.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.3 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $D^p f(t)$ d'ordre $p > 0$, est définie par :*

$$\begin{aligned}
D^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\,d\tau \\
&= \frac{d^n}{dt^n} I^{n-p} f(t),\, n = [p]+1.
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $p = n \in \mathbb{N}$, nous obtenons :

$$D^0 f(t) = f(t),\, D^{(n)} f(t) = f^{(n)}(t),$$

où $f^{(n)}(t)$ *désigne la dérivée usuelle d'ordre* n *de* $f(t)$.

Exemple 2.2 *En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'exemple si* $p > 0$ *est non entier alors*

$$D^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}.$$

Considérons maintenant la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$, *Soit* $p \geq 0$ *et* $\alpha > -1$, *alors on a :*

$$D^p (t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (t-a)^{\alpha} d\tau,$$

il s'ensuit que si $p - \alpha \in \{1, 2, ..., n\}$, *alors*

$$D^p f(t) = 0,$$

et si $p - \alpha \notin \{1, 2, ..., n\}$, *on trouve*

$$D^p f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}.$$

Propriétés

Nous présentons maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville.

Lemme 2.2 *[23] Soient* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$. *Si* $f \in AC^n[a,b]$, *alors la dérivée fractionnaire* $D^{\alpha} f$ *existe presque partout sur* $[a,b]$ *; en plus, elle est donnée par*

$$D^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds.$$

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire comme c'est le cas de la dérivation usuelle.

Théorème 2.1 *[23] Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, D^{\alpha}(\lambda f + \mu g)$ existe, et l'on a*

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t).$$

Lemme 2.3 *[23] Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$, alors on a :*

$$D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = f(t), \forall t \in [a,b].$$

Ce qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann- Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

En générale, on a

$$D_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = I_a^{\beta-\alpha} f(t), \forall t \in [a,b],$$

si $\beta - \alpha > 0$ et

$$D_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = D_a^{\alpha-\beta} f(t), \forall t \in [a,b],$$

pour $\beta - \alpha < 0$.

Théorème 2.2 *[23] Soient $\alpha, \beta > 0$, tels que $n - 1 \leq \alpha < n$*

et $m - 1 \leq \beta < m \, (n, m \in \mathbb{N}^*)$, alors on a :

1. Si $f \in L^1([a,b])$ et $I_a^{n-\alpha} f \in AC^n[a,b]$, alors on a la relation suivante

$$I_a^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^{n-k}\left[I_a^{n-\alpha} f\right](a)}{\Gamma(1-k+\alpha)} (t-a)^{\alpha-k}.$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, si les dérivées fractionnaires $D_a^{\alpha} f$ et $D_a^{\alpha+k} f$ existent, alors

$$D^k(D^{\alpha} f(t)) = D^{\alpha+k} f(t), \forall t \in [a,b].$$

3. Pour $f \in L^1([a,b])$ *, si* $I_a^{m-\alpha} f \in AC^m[a,b]$ *et* $\alpha+\beta<n$*, alors on a*

$$D^{\alpha}\left(D^{\beta} f(t)\right)=\left(D^{\alpha+\beta} f\right)(t)-\sum_{k=1}^{m} \frac{\left(D^{\beta-k} f\right)(a)}{\Gamma(1-k-\alpha)}(t-a)^{-\alpha-k}, \forall t \in[a, b]$$

2.4.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a); f'(a)$, etc.... Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (voir par exemple solutions données dans [38]), la solution de ce problème a été proposée par M.Caputo (dans les années soixante) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélastiques [41]. Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 2.4 *Soit* $\alpha \geq 0$ *tel que* $n=[\alpha]+1$*. La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre* $\alpha \geq 0$ *sur* $[a,b]$*, est défine par*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha} f(t)=D^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right],$$

où $n=[\alpha]+1$*, pour* $\alpha \notin \mathbb{N}, n=\alpha$*, pour* $\alpha \in \mathbb{N}$*.*

Exemple 2.3 *Soit* $\alpha>0$ *tel que* $n-1 \leq \alpha<n$ *et soit* $f(t)=(t-a)^{\beta}$ *avec* $\beta>-1$*, alors on a :*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds.$$

Si $\beta \in\{0,1,2, \ldots, n-1\}$ *alors*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha} f(t)=0.$$

Si $\beta > n-1,$ *alors*

$$f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(s-a)^{\beta-n}.$$

En effectuant le changement de variabe $s = a + \tau(t-a), (0 \leq \tau \leq 1)$ *on aura*

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha_{a^+}f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta-n}d\tau \\ &= \frac{B(n-\alpha,\beta-n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle

$${}^cD^\alpha_{a^+}C = 0.$$

Théorème 2.3 *[23] Soit* $\alpha \geq 0, n = [\alpha]+1.$ *Si* $f \in AC^n[a,b],$ *la dérivée fractionnaire au sens de Capito existe presque partout sur* $[a,b]$.

a) si $\alpha \notin \mathbb{N},$ *alors*

$${}^cD^\alpha_{a^+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds.$$

b) si $\alpha = n \in \mathbb{N},$ *on obtient*

$${}^cD^\alpha_{a^+}f(t) = f^{(n)}(t).$$

En particulier

$${}^cD^0_{a^+}f(t) = f(t).$$

Quelques propriétés

Dans ce qui suit, nous donnons quelques propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Lemme 2.4 *([23]) Soient $\beta > \alpha > 0$, alors pour toute $f \in L^1([a,b])$, on a :*

$$^cD_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(t) = I_{0^+}^{\beta-\alpha} f(t),$$

ainsi

$$^cD_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f(t) = f(t), \forall t \in [a,b].$$

Théorème 2.4 *[23] Soit $\alpha > 0$. si $f \in AC^n[a,b]$, alors on a*

$$I_{a^+}^{\alpha c} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \forall t \in [a,b]$$

Lemme 2.5 *([23]) Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, ainsi les relations suivantes sont vérifiées :*

$$^cD_{a^+}^{\alpha} t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$$

et

$$^cD_{a^+}^{\alpha} t^k = 0, k = 0, 1, 2, \ldots.., n-1.$$

Lemme 2.6 *([23]) Soit $\alpha > 0$ et $g(t) \in C([a,b])$, alors l'équation différentielle fractionnaire*

$^cD_{a^+}^{\alpha} g(t) = 0$, *admet la solution*

$$g(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots + c_n t^{n-1},$$

où, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, et $n = [\alpha] + 1$.

2.4.4 Exemples d'applications des systèmes fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, ce qui simplifie leurs usages pour résoudre des problèmes appliquées dans plusieurs champs de la science. Cependant, il a fallut plus de 300 ans au calcul fractionnaire pour avoir une interprétation physique et géométrique acceptable. En effet, il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématiques d'ordre non entier.

Nous citons ci dessous quelques exemples d'applications.

Equation de la chaleur

L'exemple d'application classique de la dérivation fractionnaire est l'équation de la chaleur où la dérivée d'ordre un demi s'introduit naturellement quand on cherche à calculer un flux de chaleur à l'aide de la loi de fourier.

On rappelle que l'équation de la chaleur est donnée par l'équation aux dérivées partielles :

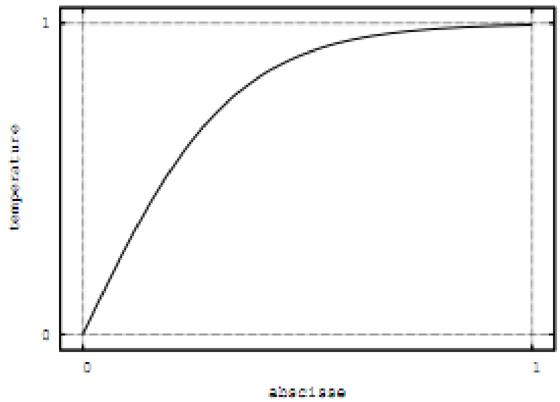
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t), t > 0, y \geq 0, \tag{2.1}$$

où t est une variable positive symbolisant le temps, μ est une constante de diffusivité strictement positive et f une fonction qui pour cet exemple ne dépend que du temps. La variable d'espace $y \in [0, +\infty[$ est typiquement une direction orthogonale à une direction principale x d'un écoulement fluide.

Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(y,t) &\to 0 \text{ si } y \to +\infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Fig.1 : Profil typique de couche limite thermique.



Un profil typique $u(y,t)$ (à t fixé) est représenté par la fig. 1. La température est fixée (arbitrairement) à 0 pour une ordonnée y nulle. Elle a un gradient qui tend vers 0 si l'ordonnée y tend vers $+\infty$.

Le flux de chaleur $\Phi(t)$ est donné par

$$\Phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}(0,t), t > 0,$$

est représenté graphiquement par la tangente en $y = 0$ à la courbe de la figure. 1.

Nous supposons que u est une fonction intégrable. Ainsi, le problème peut être résolu à l'aide de la transformation de Fourier en temps.

Soit

$$u(y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(y,\omega) \exp(i\omega t)\, dw,$$

où $\widehat{u}(y,\omega)$ la transformée de Fourier de la fonction u.

En dérivant par rapport à t, nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \widehat{u}(y,\omega) \exp(i\omega t)\, dw,$$

ainsi

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = i\omega \widehat{u}.$$

Par conséquent l'équation (2.1) devient

$$i\omega\widehat{u}-\mu\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial y^2}=\widehat{f}\left(t\right),$$

dont la solution est

$$\widehat{u}\left(y,\omega\right)=\frac{1}{i\omega}\widehat{f}+\alpha\exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}}y\right)+\beta\exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}}y\right).$$

En tenant compte des conditions aux limites (2.2), nous obtenons

$$\widehat{u}\left(y,\omega\right)=\frac{1}{i\omega}\widehat{f}\left[1-\exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}}y\right)\right],$$

ainsi la transformée de Fourier du flux est donnée par

$$\widehat{\Phi}\left(\omega\right)=-\sqrt{\frac{\mu}{i\omega}}\widehat{f}.$$

Maintenant si nous posons

$$\rho\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}Y\left(t\right),$$

avec $Y\left(t\right)$ la fonction de Heaviside définie par

$$Y\left(t\right)=\begin{cases}0 \text{ si } t<0\\ 1 \text{ si } t>0,\end{cases}$$

nous arrivons à

$$\widehat{\rho}=\sqrt{\frac{\pi}{i\omega}},$$

d'où

$$\widehat{\Phi}=-\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\widehat{\rho}\widehat{f}.$$

Grace à la relation classique

$$\widehat{\rho * f} \equiv \widehat{\rho}\widehat{f},$$

on trouve

$$\widehat{\Phi}(t) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_0^t f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}.$$

Nous venons de faire apparaître l'intégrale d'ordre un demi de la fonction f. Ce qui permet d'établir que le flux de chaleur est donc un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

Modèle viscoélastique à dérivées fractionnaires

La modélisation de certains phénomènes physiques, dits à mémoire longue peut s'effectuer par l'introduction de termes intégro-différentiels à noyau faiblement singuliers (c'est-à-dire localement intégrables, mais pas nécessairement continus, comme $t^{\alpha-1}$ lorsque $0 < \alpha < 1$) dans les équations de la dynamique des matériaux ; ceci est très fréquent en viscoélasticité linéaire à mémoire longue par exemple, où une relation contrainte–déformation dynamique fractionnaire peut être proposée.

En mécanique l'exemple du comportement contrainte-déformation d'un solide pour lequel l'equation de mouvement dans le cas d'un modèle entier est donnée par

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^{M} b_m \frac{d^m \sigma}{dt^m} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^{N} E_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} \tag{2.3}$$

où σet ε désignent respectivement la contrainte et la déformation, b_m, E_n, E_0, N,et M sont des paramètres du modèle.

Ce modèle rhéologique présente l'inconvénient d'introduire un nombre de constantes important qu'il faut ensuite recaler sur les courbes de caractérisation mécanique. Les dérivées fractionnaires ont ainsi été introduite pour pallier cette inconvénient.

En faisant intervenir des puissances non entières, l'équation (2.3) peut être généralisée.

Cela conduit à l'équation differentielle fractionnaire :

$$\left(1 + bD_t^{\alpha}\right) \sigma\left(t\right) = \left(E_0 + E_1 D_t^{\alpha}\right) \varepsilon\left(t\right).$$

Electricité

Schmidt and Drumheller [36] ont examiné le Lithium Hydrazinium Sulfate (LiN2H5SO4) et ont pu constater que sous sur une large gamme de températures et de fréquences, les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique sont très grandes ($\varepsilon^{'} = \varepsilon^{''} = 10^6$) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance $\frac{1}{2}$.

Soit la fonction diélectrique

$$\varepsilon = \varepsilon^{'} + j\varepsilon^{''},$$

d'apès les résultats expérimentales nous trouvons l'équation suivante

$$\varepsilon = \varepsilon^{'} w^{\frac{-1}{2}} \left(1 - j\right) = \varepsilon^{'} \sqrt{2} \left(jw\right)^{\frac{-1}{2}}, \text{ avec } j = \sqrt{-1}.$$

Comme la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance est donnée par

$$Z = \frac{1}{jwC_c\varepsilon}, \text{ où } C_c \text{ est une constante,}$$

alors, on arrive à

$$Z = \frac{1}{jwC_c\varepsilon' \sqrt{2} \left(jw\right)^{\frac{-1}{2}}},$$

ou

$$Z = \frac{K}{\left(jw\right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ avec } K = \frac{1}{C_c\varepsilon' \sqrt{2}}.$$

En utilisant la variable de Laplace s nous obtenons

$$Z = \frac{K}{\left(s\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi on définit une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques.

2.5 Quelques résultats de la théorie du point fixe

Dans cette section, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et krasnoselskii. Etant donnés un ensemble E et une application $T : E \to E$ on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et E pour que T ait un point fixe. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple trouver les zéros d'un polynôme, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Définition 2.5 *Soit T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.*

Définition 2.6 *Soit (E, d) un espace métrique complet et l'application $T : E \to E$, On dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments (x, y) de E, l'inégalité*

$$d\left(T\left(x\right), T(y)\right) \leq k\left(d\left(x, y\right)\right).$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorème de Banach

Le théorème du point fixe de Banach est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe, il donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe.

Théorème 2.5 *[37](Principe de contraction de Banach) Soit* (E, d) *un espace métrique complet et soit* $T : E \to E$ *une contraction. Alors* T *admet un unique point fixe.*

Dans tout le paragraphe, f est une application (au moins) continue de U dans $\mathbb{R}$.

Théorème du point fixe de Brouwer

En mathématiques, et plus précisément en topologie algébrique, le théorème du point fixe de Brouwer fait partie de la grande famille des théorèmes de point fixe, qui énoncent que si une fonction continue f vérifie certaines propriétés, alors il existe un point x_0 tel que $f(x_0) = x_0$. La forme la plus simple du théorème de Brouwer est que la fonction f soit définie dans un intervalle fermé borné non vide I et à valeurs dans I. Sous une forme plus générale, la fonction est définie sur un convexe compact K d'un espace euclidien et à valeurs dans K.

Théorème 2.6 *(Théorème du point fixe de Brouwer) Soit* $f : \overline{B_N} \to \overline{B_N}$ *une application continue avec* B_N *boule unité de* $\mathbb{R}^N$ *Alors il existe* $y \in \overline{B_N}$ *tel que* $f(y) = y$*, c- à-d,* $\overline{B_N}$ *possède la propriété du point fixe. Plus généralement tout sous-ensemble compact convexe de* $\mathbb{R}^N$ *possède un point fixe.*

Théorème de Schauder

Le théorème de Schauder, est l'analogue du théorème de Brouwer, transposé en dimension infinie. Les conclusions sont les mêmes, cependant les hypothèses sont différentes. Il intervient dans la démonstration de l'existence de solutions des équations différentielles.

Théorème 2.7 *[42](Théorème de point fixe de Schauder) Soit* E *un espace de Banach,* K *un convexe et compact de* E *et* $T : K \to K$ *une application continue, alors* T *admet au moins un point fixe dans* K*.*

Définition 2.7 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* U *un ouvert de* E*. L'opérateur continu* $T : U \to F$ *est complètement continu s'il transforme tout borné de* E *en* *une partie relativement compacte dans F. Il est dit compact si $T\left(\overline{U}\right)$ est relativement compacte.*

Théorème 2.8 *(Arzela-Ascoli) Soient K un espace compact et $X = C(K)$ l'espace des fonctions continues dans K. Un sous ensemble $F \subset X$ est relativement compact si et seulement s'il est uniformément borné et équicontinu.*

Théorème 2.9 *(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)[10]. Soit U un ensemble ouvert borné d'un espace de Banach E tel que $0 \in U$ et $T : \overline{U} \rightarrow E$ un opérateur complètement continu. Alors*

1) T a un point fixe sur $\overline{U}$ ou bien

2) il existe $\lambda \in (0, 1)$ et $u \in \partial U$ tel que : $x = \lambda T(x)$

Théorème de Krasnoselskii

Krasnoselskii a combiné le théorème de point fixe de Banach et celui de Schauder et a établi un nouveau théorème de point fixe qui a porté son nom. Ce théorème a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède de nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire

Théorème 2.10 *(Théorème de Guo-krasnosel'skii)[25]. Soit K un cône définie dans un espace de Banach E. Supposons que Ω_1 et Ω_2 deux sous ensembles ouverts de E*

avec $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Supposons que

$A : K \cap (\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1) \rightarrow K$ est un opérateur complètement continu tel que :

i)$\|Au\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$, ou bien

ii)$\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Au\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors, A admet un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1)$.

Théorème d'Avery et Peterson

Le théoreme d'Avery et Peterson est un théorème qui généralise le théorème de Leggett et Williams [25] qui est un cas général de celui de Krasnoselskii's, donc il est autour de la notion du point fixe pour les opérateurs complètement continues et en plus il donne l'ordre de multiplicité des solutions. Pour cela soient les fonctions : φ, Φ, Λ et Ψ définies dans un cône P d'un espace de Banach, et des nombres positifs a, b, c, d tels que les ensembles suivants sont définis de cette manière :

$P(\varphi, d) = \{u \in P, \varphi(u) < d\}$,

$P(\varphi, \Lambda, b, d) = \{u \in P, b \leq \Lambda(u), \varphi(u) \leq d\}$,

$P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, c, d) = \{u \in P, b \leq \Lambda(u), \Phi(u) \leq c, \varphi(u) \leq d\}$,

$R(\varphi, \Psi, a, d) = \{u \in P, a \leq \Psi(u), \varphi(u) \leq d\}$.

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 2.11 *(Avery-Peterson)[4] Soient P le cône dans un espace de Banach E et φ, Φ, Λ et Ψ des fonctions définies dans P. Supposons que φ et Φ sont convexes et Λ est concave. Si de plus Ψ satisfait $\Psi(ku) \leq k \|u\|$ pour $0 \leq k \leq 1$ et pour des nombres positifs M et d tels que :*

$$\Lambda(u) \leq \Psi(u) et \|u\| \leq M\varphi(u), \forall u \in \overline{P(\varphi, d)}.$$

Soit $T : \overline{P(\varphi, d)} \to \overline{P(\varphi, d)}$ un opérateur complètement continu et supposons qu'ils existent des nombres positifs a, b et c avec $a < b$, tels que

$(S_1) : \{u \in P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, c, d), \Lambda(u) > b\} \neq \emptyset$ et $\Lambda(Tu) > b$ pour $u \in P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, c, d)$.

$(S_2) : \Lambda(Tu) > b$ pour $u \in P(\varphi, \Lambda, b, d)$ avec $\Phi(Tu) > c$.

$(S_3) : 0 \notin R(\varphi, \Psi, a, d)$ et $\Psi(Tu) < a$ pour $u \in R(\varphi, \Psi, a, d)$ avec $\Psi(u) = a$.

Alors T admet au moins trois points fixes $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\varphi, d)}$ tels que

$$\varphi(u_i) \leq d, pour i = 1, 2, 3.$$

$$b < \Lambda(u_1), a < \Psi(u_2), \text{ avec } \Lambda(u_2) < b$$

et

$$\Psi(u_3) < a.$$

En introduisant la théorie de l'indice du point fixe, une autre forme du théorème de Guo-krasnosel'skii est donnée par :

Théorème 2.12 *[15] Soit K un cône définie dans un espace de Banach X. Supposons que D est un sous ensemble ouvert de X avec $D_K = D \cap K \neq \emptyset, \overline{D}_k \neq K$ et $A : \overline{D}_k \to K$ est un opérateur complètement continu tel que $x \neq A(x)$ pour $x \in \partial D_k$, ainsi les relations suivantes sont satisfaites :*

(1) Si $\|Ax\| \leq \|x\|$, $x \in \partial D_k$, alors

$$i(A, D_k) = 1.$$

(2) Si $\|Ax\| \geq \|x\|$, $x \in \partial D_k$, alors

$$i(A, D_k) = 0.$$

(3) Soit U un ensemble ouvert de K tel que $\overline{U} \subset D$. Si $i(A, D_k) = 1$ et $i(A, U_k) = 0$, alors A admet un point fixe dans $D_k \backslash \overline{U}_k$. Le même résultat est obtenu si $i(A, D_k) = 0$ et $i(A, U_k) = 1$.

Chapitre 3

Problème aux limites fractionnaires avec une condition au dérivée fractionnaire

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solutions du problème aux limites fractionnaire (P1) suivant :

$$^{c}D_{0+}^{q}u\left(t\right)=f\left(t,u\left(t\right),^{c}D_{0+}^{\sigma}u\left(t\right)\right),0<t<1,$$

avec les conditions non locales

$$u\left(0\right)=u''\left(0\right)=0,u'\left(1\right)=^{c}D_{0+}^{\sigma}u\left(1\right),$$

où $f:[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction donnée, $^{c}D_{0+}^{\sigma}$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $2<q<3$ et $0<\sigma<1$.

On établit l'existence et l'unicité de la solution par application de l'alternative de Leray Schauder et le théorème du point fixe de Banach.

3.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents champs de recherches. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces équations et les applications en sciences de l'ingénieur restent encore peu développées. On peut noter que pour la majeure partie des domaines (automatique, electricité, ...etc), les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire. Mentionnons les ouvrages Hilfer [16] qui regroupent diverses applications du calcul fractionnaire.

Récemment, l'étude des équations différentielles fractionnaires a fait l'objet de plusieurs travaux où différents concepts de solutions sont apparus, pour plus de détails voir [6, 13, 17, 19, 2, 22, 23]. Bien que diverses contributions ont participé dans le développement de cette théorie porteuse, de nombreux aspects restent sans solutions.

Les résultats présentés dans ce chapitre, sont développés en vu d'étudier des problèmes au limites fractionnaires relatifs à la dérivée de Caputo où nous allons introduire de nouvelles conditions sur le terme non linéaire f. Dans la première section, nous citons les principales notations, définitions et lemmes qui seront utilisés par la suite, dans la deuxième section nous prouvons l'existence de la solution de notre problème. Enfin, nous fournissons à la dernière section les hypothèses sous lesquelles l'unicité de la solution est établie. La validité des résultats obtenus, est justifiée par des exemples adéquats.

3.2 Propriétés et définitions

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (3.1)-(3.2).

Soit E l'espace de Banach constitué par les fonctions $u \in C[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ avec ${}^{c}D_{0+}^{\sigma}u \in C([0,1],\mathbb{R}), 0 < \sigma < 1$, muni de la norme

$$\|y\| = \max_{t\in[0,1]} |y(t)| + \max_{t\in[0,1]} |{}^{c}D_{0+}^{\sigma}y(t)| .$$

Lemme 3.1 *Soient $2 < q < 3$ et $0 < \sigma < 1$.L'unique solution du problème fractionnaire (P0)*

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0+}^{q}u(t) = y(t), 0 < t < 1 \\ u(0) = u''(0) = 0, u'(1) = {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(1), \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds,$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{\Gamma(2-\sigma)t(1-s)^{q-2}}{\Gamma(2-\sigma)-\Gamma(2)} \left(\frac{(1-s)^{1-\sigma}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(q-1)} \right), 0 \le s \le t \le 1 \\ \frac{\Gamma(2-\sigma)t(1-s)^{q-2}}{\Gamma(2-\sigma)-\Gamma(2)} \left(\frac{(1-s)^{1-\sigma}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(q-1)} \right) ,0 \le t \le s \le 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Preuve. Par application du théorème 2.4, on obtient

$$u(t) = I_{0+}^{q}y(t) + C + Bt + At^2, \tag{3.2}$$

et d'après les conditions $u(0) = u''(0) = 0$, on trouve $C = A = 0$. La dérivation des deux membres de (3.2) donne

$$u'(t) = I_{0^+}^{q-1}y(t) + B,$$

d'autre part on a

$${}^{c}D_{0+}^{\sigma}u(t) = I_{0^+}^{q-\sigma}y(t) + B\,{}^{c}D_{0+}^{\sigma}t.$$

La condition $u'(1) =^{c} D_{0+}^{\sigma} u(1)$ implique que

$$B = \frac{\Gamma(2-\sigma)}{\Gamma(2-\sigma)-\Gamma(2)} \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{q-\sigma-1}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right) y(s)\, ds,$$

ainsi $u(t)$ peut s'écrir sous la forme

$$u(t) = I_{0+}^{q} y(t) + \frac{\Gamma(2-\sigma)\, t}{\Gamma(2-\sigma)-\Gamma(2)} \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{q-\sigma-1}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right) y(s)\, ds, \qquad (3.3)$$

ainsi

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds,$$

où G est défine par (3.1). Ce qui achève la démonstration. ■

Considèrons l'operateur $T : E \to E$ défini par

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f\left(s, u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(s)\right) ds, \forall t \in [0,1].$$

Lemme 3.2 *Soit $f \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, La fonction $u \in E$ est solution du problème fractionnaire (P1) si et seulement si $Tu(t) = u(t), \forall t \in [0,1]$.*

Preuve. Soit u la solution du problème (P1), alors, en appliquant le théorème (2.4), on touve

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, f\left(s, u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(s)\right) ds.$$

Inversement, nous supposons que u satisfait

$$\begin{aligned} u(t) &= I_{0+}^{q} f\left(t, u(t), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(t)\right) + \\ & \frac{\Gamma(2-\sigma)t}{\Gamma(2-\sigma)-\Gamma(2)} \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{q-\sigma-1}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \right) f\left(s, u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(s)\right) ds, \end{aligned}$$

Par application du lemme 2.4, on obtient

$$\begin{aligned} {}^{c}D_{0^+}^{q}u(t) &= {}^{c}D_{0^+}^{q}I_{0^+}^{q}f\left(t,u(t),{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u(t)\right)+ \\ &\frac{\Gamma(2-\sigma){}^{c}D_{0^+}^{q}t}{\Gamma(2-\sigma)-\Gamma(2)}\int_0^1\left(\frac{(1-s)^{q-\sigma-1}}{\Gamma(q-\sigma)}-\frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\right)f\left(s,u(s),{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u(s)\right)ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la dérivée de Caputo ${}^{c}D_{0^+}^{q}t$ est nulle, nous obtenons

$${}^{c}D_{0^+}^{q}u(t)=f\left(t,u(t),{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u(t)\right).$$

Ainsi, $u(t)$ est la solution du problème (P1). ■

3.3 Existence de la solution

Afin d'établir notre résultat principal concernant l'existence de la solution du (P1) dans l'espace de Banach E, nous donnons des conditions appropriées sur les fonctions impliquées dans ce problème.

Notons par A_1 et A_2 les quantités suivantes :

$$A_1=\frac{1}{\Gamma(q)}+\frac{\Gamma(2-\sigma)}{\Gamma(2)-\Gamma(2-\sigma)}\left(\frac{1}{\Gamma(q-\sigma)}+\frac{1}{\Gamma(q-1)}\right),$$
$$A_2=\frac{1}{\Gamma(q-1)}+\frac{\Gamma(2-\sigma)}{\Gamma(2)-\Gamma(2-\sigma)}\left(\frac{1}{\Gamma(q-\sigma)}+\frac{1}{\Gamma(q-1)}\right).$$

Théorème 3.1 *Supposons que $f(t,0,0)\neq 0$, il existe des fonctions positives $k,h,g\in L^1([0,1],\mathbb{R}_+)$,*

$\phi,\psi\in C(\mathbb{R}_+,(0,+\infty))$ croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $r>0$, tels que

$$|f(t,x,\overline{x})|\leq k(t)\,\psi(|x|)+h(t)\,\phi(|\overline{x}|)+g(t), \tag{3.4}$$

$$(\psi(r)+\phi(r)+1)\left(C_1+\frac{C_2}{\Gamma(2-\sigma)}\right)<r, \tag{3.5}$$

alors le problème aux limites (P1) a au moins une solution non triviale $u^* \in E$, où

$$C_1 = max\left\{C_k, C_h, C_g\right\}, C_2 = max\left\{A_k, A_h, A_g\right\},$$

avec les constantes $C_k,\ C_h,\ C_g, A_g,\ A_k$ et A_h sont définies par

$$\begin{aligned}
C_k &= A_1\left\|k\right\|_{L^1},\ C_h = A_1\left\|h\right\|_{L^1}, C_g = A_1\left\|g\right\|_{L^1},\\
A_g &= A_2\left\|g\right\|_{L^1},\ A_k = A_2\left\|k\right\|_{L^1}, A_h = A_2\left\|h\right\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Preuve. Commençons tout d'abord par démontrer que T est complètement continu. Comme f et G sont continues alors, l'opérateur T est continu. Soit $B_r = [u \in E, ||u|| \leq r\}$ un sous ensemble borné de E. On a $T(B_r)$ est relativement compact, en effet

(i) Pour $u \in B_r$, en utilisant (3.4) et le fait que ϕ et ψ sont croissantes, on obtient

$$|Tu(t)| \leq \int_0^1 |G(t,s)|\left(k(s)\psi(|u(s)|) + h(s)\phi(|^cD_{0+}^{\sigma}u(s)|) + g(s)\right)ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \psi(r)\int_0^1 |G(t,s)|\,k(s)\,ds + \phi(r)\int_0^1 |G(t,s)|\,h(s)\,ds + \int_0^1 |G(t,s)|\,g(s)\,ds\\
&\leq \psi(r)\,A_1\left(\int_0^1 k(s)\,ds\right) + \phi(r)\,A_1\left(\int_0^1 h(s)\,ds\right) + A_1\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)\\
&\leq \psi(r)\,C_k + \phi(r)\,C_h + C_g,
\end{aligned}$$

d'où

$$|Tu(t)| \leq C_1\left(\psi(r) + \phi(r) + 1\right).$$

D'autre part on a,

$$\begin{aligned}
\left|(Tu)'(t)\right| \leq\ & \psi(r)\int_0^1 \left|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right| k(s)ds +\\
& \phi(r)\int_0^1 \left|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right| h(s)\,ds + \int_0^1 \left|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right| g(s)\,ds.
\end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\left|{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tu\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}\left(\psi(r)\,A_2\int_0^1 k(s)\,ds+\phi(r)\,A_2\int_0^1 h(s)ds)+A_2\int_0^1 g(s)ds\right)\\
&\leq \frac{C_2}{\Gamma(2-\sigma)}\left(\psi(r)+\phi(r)+1\right),
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &\leq \left(C_1+\frac{C_2}{\Gamma(2-\sigma)}\right)\left(\psi(r)+\phi(r)+1\right)\\
&< r,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $T(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) Pour tout $t_1,\, t_2\in[0,1]$, $t_1<t_2$ et $u\in B_r$ on a

$$\left|Tu(t_1)-Tu(t_2)\right|=\left|\int_{t_1}^{t_2}(Tu)'(t)\,dt\right|\leq\int_{t_1}^{t_2}\left|(Tu)'(t)\right|dt,$$

puisque

$$\begin{aligned}
\left|(Tu)'(t)\right| &= \left|\int_0^1\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}f(s,u(s),{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u(s))ds\right|\\
&\leq \left(\psi(r)+\phi(r)+1\right)C_2
\end{aligned}$$

on trouve

$$\left|Tu(t_1)-Tu(t_2)\right|\leq\left(\psi(r)+\phi(r)+1\right)C_2\left(t_2-t_1\right). \tag{3.6}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tu(t_1)-{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tu(t_2)\right|\\
=&\left|\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\left(\int_0^{t_1}\frac{(Tu)'(s)}{(t_1-s)^{\sigma}}ds-\int_0^{t_2}\frac{(Tu)'(s)}{(t_2-s)^{\sigma}}ds\right)\right|\\
\leq&\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\left(\int_0^{t_1}\left((t_1-s)^{-\sigma}-(t_2-s)^{-\sigma}\right)\left|(Tu)'(s)\right|ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-\sigma}\left|(Tu)'(s)\right|ds)\right),
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}Tu\left(t_{1}\right)-{}^{c}D_{0+}^{\sigma}Tu\left(t_{2}\right)\right| \\
\leq \; & \frac{\left(\psi\left(r\right)+\phi\left(r\right)+1\right)C_{2}}{\Gamma\left(1-\sigma\right)}\left(\int_{0}^{t_{1}}\left(\left(t_{1}-s\right)^{-\sigma}-\left(t_{2}-s\right)^{-\sigma}\right)ds+\int_{t_{1}}^{t_{2}}\left(t_{2}-s\right)^{-\sigma}ds\right) \\
\leq \; & \frac{\left(\psi\left(r\right)+\phi\left(r\right)+1\right)C_{2}}{\Gamma\left(2-\sigma\right)}\left(\left({t_{1}}^{1-\sigma}-{t_{2}}^{1-\sigma}\right)+2\left(t_{2}-t_{1}\right)^{1-\sigma}\right). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité (3.6) et (3.7) tend vers zéro, par conséquent $T\left(B_r\right)$ est equicontinu.

D'après le théorème d'Ascoli - Arzela, il s'ensuit que T est complètement continu.

Dans ce qui suit, on établit les résultats d'existence de la solution du problème (P1) en utilisant l'alternative nonlineaire de Leray-Schauder.

Soit $\Omega = \{u \in E : \|u\| < r\}$ et soit $u \in \partial\Omega$, telle que $u = \lambda Tu$,

$0 < \lambda < 1$,

nous avons

$$\left|u\left(t\right)\right| = \lambda\left|Tu\left(t\right)\right| \leq \left|Tu\left(t\right)\right| \leq \left(\psi\left(r\right)+\phi\left(r\right)+1\right)C_{1}, \qquad (3.8)$$

et

$$\left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\left(t\right)\right| = \lambda\left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}Tu\left(t\right)\right| \leq \left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}Tu\left(t\right)\right| \leq \frac{C_{2}}{\Gamma\left(2-\sigma\right)}\left(\psi\left(r\right)+\phi\left(r\right)+1\right). \qquad (3.9)$$

En tenant compte de (3.5), (3.8) et (3.9), on déduit que

$$\|u\| \leq \left(\psi\left(r\right)+\phi\left(r\right)+1\right)\left(C_{1}+\frac{C_{2}}{\Gamma\left(2-\sigma\right)}\right) < r,$$

ceci contredit le fait que $u \in \partial\Omega$. Nous concluons alors que T a un point fixe $u^{*} \in \overline{\Omega}$ qui est une solution du problème(P1). ■

3.4 Unicité de la solution

Dans la présente section nous nous intéressons à l'étude de l'unicité de la solution dans l'espace de Banach E.

Théorème 3.2 *Supposons qu'il existe deux fonctions positives $g,\ h \in L^1\ ([0,1], \mathbb{R}_+)$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$ on a*

$$|f(t,x,\overline{x}) - f(t,y,\overline{y})| \leq g(t)\,|x-y| + h(t)\,|\overline{x}-\overline{y}| \tag{3.10}$$

et

$$A_1\left(\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}\right) < \frac{1}{2},\, A_2\left(\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}\right) < \frac{\Gamma(2-\sigma)}{2}, \tag{3.11}$$

alors, le problème fractionnaire (P1) admet une solution unique $u \in E$.

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, on a besoin de vérifier tout d'abord que T est une contraction.

Soit $u, v \in E$, nous avons

$$Tu(t) - Tv(t) = \int_0^1 G(t,s)\left(f\left(s, u(s), {}^c D_{0^+}^{\sigma} u(s)\right) - f\left(s, v(s), {}^c D_{0^+}^{\sigma} v(s)\right)\right) ds,$$

en vertu de la formule (3.10), on trouve

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| \ &\leq \ \int_0^1 g(s)\,|G(t,s)|\,|u(s)-v(s)|\,ds \\ &\quad + \int_0^1 h(s)\,|G(t,s)|\,\left|{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(s) - {}^c D_{0^+}^{\sigma} v(s)\right| ds \end{aligned}$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1} |u(t)-v(t)| \int_0^1 |G(t,s)|\,g(t)\,dt + \max_{0\leq t\leq 1} \left|{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(t) - {}^c D_{0^+}^{\sigma} v(t)\right| \int_0^1 |G(t,s)|\,h(t)\,dt.$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_0^1 |G(t,s)|\, g(s)\, ds &= \int_0^t |G(t,s)|\, g(s)\, ds + \int_t^1 |G(t,s)|\, g(s)\, ds \\ &\leq \int_0^t A_1 g(s)\, ds + \int_t^1 A_0 g(s)\, ds \\ &\leq A_1 \|g\|_{L_1}\end{aligned}$$

où

$$A_0 = \frac{\Gamma(2-\sigma)}{\Gamma(2) - \Gamma(2-\sigma)} \left(\frac{1}{\Gamma(q-\sigma)} + \frac{1}{\Gamma(q-1)} \right),$$

il s'ensuit que

$$|Tu - Tv| \leq A_1 \left(\|g\|_{L_1} + \|h\|_{L_1} \right) \|u - v\|. \tag{3.12}$$

D'autre part, on a

$${}^cD_{0^+}^{\sigma} Tu - {}^c D_{0^+}^{\sigma} Tv = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^t \frac{(Tu)'(s) - (Tv)'(s)}{(t-s)^{\sigma}} ds,$$

où

$$(Tu)'(t) = \int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f\left(s, u(s), {}^c D_{0^+}^{\sigma} u(s)\right) ds$$

et

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} + \frac{\Gamma(2-\sigma)(1-s)^{q-2}}{\Gamma(2-\sigma)-\Gamma(2)} \left(\frac{(1-s)^{1-\sigma}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(q-1)} \right), 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{\Gamma(2-\sigma)(1-s)^{q-2}}{\Gamma(2-\sigma)-\Gamma(2)} \left(\frac{(1-s)^{1-\sigma}}{\Gamma(q-\sigma)} - \frac{1}{\Gamma(q-1)} \right), 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$${}^cD_{0^+}^{\sigma} Tu - {}^c D_{0^+}^{\sigma} Tv = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \times$$

$$\int_0^t \int_0^1 (t-s)^{-\sigma} \frac{\partial G(s,r)}{\partial s} \left(f\left(r, u(r), {}^c D_{0^+}^{\sigma} u(r)\right) - f\left(r, v(r), {}^c D_{0^+}^{\sigma} v(r)\right) \right) dr ds.$$

En utilisant (3.10), nous obtenons

$$\left|{}^cD_{0^+}^{\sigma} Tu - {}^c D_{0^+}^{\sigma} Tv\right| \leq \frac{\max_{0 \leq t \leq 1} |u - v|}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^t \int_0^1 (t-s)^{-\sigma} \left| \frac{\partial G(s,r)}{\partial s} \right| g(r)\, dr ds$$

$$+\frac{\max_{0\leq t\leq 1}\left|{}^{c}D_{0^{+}}^{\sigma}u-{}^{c}D_{0^{+}}^{\sigma}v\right|}{\Gamma(1-\sigma)}\int_{0}^{t}\int_{0}^{1}(t-s)^{-\sigma}\left|\frac{\partial G(s,r)}{\partial s}\right|h(r)\,drds,$$

ainsi

$$\left|{}^{c}D_{0^{+}}^{\sigma}Tu-{}^{c}D_{0^{+}}^{\sigma}Tv\right|\leq\|u-v\|\frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}A_{2}\left(\|g\|_{L^{1}}+\|h\|_{L^{1}}\right). \tag{3.13}$$

D'après (3.12) et (3.13), on en déduit que

$$\begin{aligned}\|Tu-Tv\| &\leq \left(A_{1}\left(\|g\|_{L_{1}}+\|h\|_{L_{1}}\right)+\frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}A_{2}\left(\|g\|_{L^{1}}+\|h\|_{L^{1}}\right)\right)\|u-v\|\\ &\leq k\|u-v\|.\end{aligned}$$

Compte tenu des conditions (3.11) le nombre $k\in(0,1)$. Il s'ensuit que T est une contraction dés lors, elle admet un unique point fixe $u\in E$ qui est l'unique solution du problème (P1). ∎

3.5 Exemples

Dans cette partie, nous donnons deux exemples illustratifs.

Exemple 3.1 *Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0^{+}}^{\frac{14}{5}}u=\frac{t^{4}}{90}u+\frac{1}{10}\left(\frac{1-t}{3}\right)^{4}{}^{c}D_{0^{+}}^{\frac{4}{5}}u+\cos t,\ \ 0<t<1,\\ u(0)=u''(0)=0,u'(1)={}^{c}D_{0^{+}}^{\frac{4}{5}}u(1).\end{cases}$$

où

$$f(t,x,y)=\frac{t^{4}}{9}x+y\left(\frac{1-t}{3}\right)^{4}+\cos t,2<q=\frac{14}{5}<3,\sigma=\frac{4}{5}<1.$$

Nous avons

$$|f(t,x,\overline{x})-f(t,y,\overline{y})|\leq\frac{t^{4}}{9}|x-y|+\left(\frac{1-t}{3}\right)^{4}|\overline{x}-\overline{y}|,$$

ainsi

$$|f(t,x,\overline{x})-f(t,y,\overline{y})|\leq g(t)|x-y|+h(t)|\overline{x}-\overline{y}|,\forall x,y\in\mathbb{R},t\in[0,1],$$

avec $g(t) = \frac{t^4}{90}$ *et* $h(t) = \frac{1}{10}\left(\frac{1-t}{3}\right)^4$. *Un calcul simple donne*

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^1} &= 0,0025, \|h\|_{L^1} = 0,00024, A_1 = 23,8716, A_2 = 24,3489 \\
A_1\left(\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}\right) &= 0,06540 < \frac{1}{2}, \\
A_2(\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^1}) &= 0,06671 < \frac{\Gamma(2-\sigma)}{2} = 0.45905.
\end{aligned}$$

Alors d'après le théorème 3.1, notre problème admet une solution unique u^* *dans E.*

Exemple 3.2 *Soit le problème aux limites fractionnaire suivant*

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^{\frac{14}{5}}u = \frac{\exp(-t)}{90}\frac{u^2}{120} + \left(\frac{1-t}{3}\right)^4\left(\frac{{}^cD_{0^+}^{\frac{4}{5}}u}{10}\right)^3 + \frac{1-t}{100},\ 0 < t < 1, \\ u(0) = u''(0) = 0, u'(1) = {}^cD_{0^+}^{\frac{4}{5}}u(1), \end{cases}$$

nous avons

$$f(t, x, \overline{x}) = \frac{\exp(-t)}{90}\frac{x^2}{120} + \frac{\overline{x}^3}{1000}\left(\frac{1-t}{3}\right)^4 + \frac{1-t}{100}, 2 < q = \frac{14}{5} < 3, \sigma = \frac{4}{5} < 1,$$

et

$$f(t, 0, 0) \neq 0$$

par conséquent

$$|f(t, x, \overline{x})| \leq \frac{\exp(-t)}{90}\left(\frac{|x|^2}{120} + 1\right) + \left(\frac{|\overline{x}|^3}{1000} + 1\right)\left(\frac{1-t}{3}\right)^4 + \frac{1-t}{100},$$

avec $g(t) = \frac{\exp(-t)}{90}$, $h(t) = \left(\frac{1-t}{3}\right)^4, k(t) = \frac{1-t}{100}, \psi(x) = \frac{x^2}{120} + 1x, \phi(\overline{x}) = \frac{(\overline{x})^3}{1000} + 1.$*Estimons la quantité suivante*

$$\left[(\psi(r) + \phi(r) + 1)\left(C_1 + \frac{C_2}{\Gamma(2-\sigma)}\right) - r\right],$$

par un simple calcul on obtient

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1} &= 0,00702, \|h\|_{L^1} = 0,0024, \|k\|_{L^1} = 0.005, A_1 = 23,8716,\\ A_2 &= 24,3489, C_1 = 0.1671, C_2 = 0.17044.\end{aligned}$$

D'où pour $r = 2$ on a

$$\left[(\psi(r) + \phi(r) + 1)\left(C_1 + \frac{C_2}{\Gamma(2-\sigma)}\right) - r\right] = 0.352\,73\left(\frac{r^2}{120} + \frac{r^3}{1000} + 3\right) - r < 0,$$

Ce qui montre que le problème fractionnaire a au moins une solution non triviale.

Chapitre 4

Existence et multiplicité des solutions positives pour un problème fractionnaire non linéaire

Résumé

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites fractionnaire (P2) :

$$^{c}D_{0^+}^{q}u(t) + a\,(t)\,f(u(t)) = 0, 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = u(\xi).$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, $2 < q < 3$ et $0 < \xi < 1$. Nous introduisons quelques conditions suffisantes pour montrer l'existence de solutions positives du problème aux limites fractionnaire. Notre approche est basée sur les théorèmes de point fixe de Guo-krasnosel'skii et d'Avery-Peterson.

4.1 Introduction

Dans les dernières décennies, beaucoup de contributions ont affirmé que l'usage des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires est souhaitable pour la description des propriétés de plusieurs matériaux et processus. En effet on rencontre des applications du calcul fractionnaire en traitement d'image, en géophysique, en économie etc...

Il existe une vaste littérature dans laquelle de nombreux auteurs ont prouvé des résultats d'existence et multipicité des solutions positives pour les équations différentielles fractionnaires sous diverses méthodes telles que la théorie du degré topologique et les théorèmes du point fixe dans les cônes. Citons sur ce sujet les travaux de Ahmad et al.[1], où ils ont proposé l'étude d'une équation fractionnaire

$$^{c}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2$$

assujettie aux conditions

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = ... = u^{m-2}(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta),$$

avec $q \in (m-1, m]\,, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Le résultat d'existence est basé sur l'application contractante et le théorème de Krasnoselskii.

Dans [39] les auteurs ont proposé l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites fractionnaire suivant :

$$^{c}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = h(t)f(t, u(t)), 0 < t < 1, 3 < \alpha \leq 4$$

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0,$$

en utilisant la théorie de l'indice du point fixe.

Dans [7] Bing Liu a étudié l'existence des soutions positives du problème aux limites en trois points

$$y''(t) + a(t) f(y(t)) = 0, 0 < t < 1,$$

$$y(0) = 0, y(1) = \beta y(\eta),$$

où $0 < \eta < 1, 0 < \beta < \frac{1}{\eta}$.

Motivéé par les travaux précédents, notre objectif et de disposer des éléments théoriques nécessaires à l'étude de l'existence et la multiplicité de solutions positives d'un problème aux limites fractionnaire.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans le deuxième paragraphe, nous introduisons quelques lemmes utiles dans notre travail, dans le troisième nous présentons nos résultats, et finalement nous donnons des exemples d'applications.

4.2 Lemmes préliminaires

Dans cette section, en se servant de la fonction de Green et ses propriétés on établira la positivité de la solution du problème (P2), pour cela nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Lemme 4.1 *Soit $y \in C([0,1])$ et $2 < q < 3$. L'unique solution u du problème linéaire*

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^q u(t) + y(t) = 0, \ 0 < t < 1 \\ u(0) = u''(0) = 0, u(1) = u(\xi), 0 < \xi < 1, \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s) y(s) ds,$$

où

$$G(t,s)=\begin{cases} \frac{t(1-s)^{q-1}}{1-\xi}-\frac{t(\xi-s)^{q-1}}{1-\xi}-(t-s)^{q-1}, 0\leq s\leq \min(t,\xi)\leq 1\\ \frac{t(1-s)^{q-1}}{1-\xi}-(t-s)^{q-1}, \xi\leq s\leq t\\ \frac{t(1-s)^{q-1}}{1-\xi}-\frac{t(\xi-s)^{q-1}}{1-\xi}, t\leq s\leq \xi\\ \frac{t(1-s)^{q-1}}{1-\xi}, \max(t,\xi)\leq s\leq 1.\end{cases}$$

Lemme 4.2 *Pour tout* $s,t\in[0,1]$, *la fonction de Green* $G(t,s)$ *est positive, continue et satisfait*

i) $G(t,s)\leq \frac{(1-s)^{q-1}}{(1-\xi)}$,

ii) $G(t,s)\geq t(\zeta-\zeta^{q-1})\frac{(1-s)^{q-1}}{(1-\xi)}$.

Preuve. Il est facile de vérifier que $G(t,s)$ est positive, continue satisfaisant (i). D'autre part, pour $0\leq s\leq \min(t,\xi)\leq 1$ on trouve

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{t(1-s)^{q-1}}{1-\xi}-\frac{t(\xi-s)^{q-1}}{1-\xi}-(t-s)^{q-1}\\ &\geq t(\zeta-\zeta^{q-1})\frac{(1-s)^{q-1}}{(1-\xi)}\end{aligned}$$

En procédant de la même façon, on peut conclure que pour tout $s,t\in[0,1]$

$$G(t,s)\geq t(\zeta-\zeta^{q-1})\frac{(1-s)^{q-1}}{(1-\xi)}.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

4.3 Existence des solutions positives

On considère l'espace de Banach $E=C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|u\|=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$. Définissons l'opérateur $T:E\to E$ par

$$Tu(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds,\ \forall t\in[0,1].$$

Lemme 4.3 *Soit* $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *et* $a \in C([0,1],\mathbb{R})$ *La fonction* $u \in E$ *est solution du problème fractionnaire (P2) si et seulement si* $Tu(t) = u(t), \forall t \in [0,1]$.

Preuve. Soit u la solution du problème (P2), alors, en appliquant le théorème (2.4), on touve

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, a(s)\, f(u(s))\, ds.$$

Inversement, nous supposons que u satisfait

$$\begin{aligned} u(t) &= -I_{0+}^{q} a(t) f(u(t)) + \\ & \frac{t}{\Gamma(q)(1-\xi)} \left(\int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s) f(u(s))\, ds - \int_0^{\xi} (\xi-s)^{q-1} a(s) f(u(s))\, ds \right), \end{aligned}$$

Par application du lemme 2.4, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} {}^{c}D_{0+}^{q} u(t) &= -{}^{c}D_{0+}^{q} I_{0+}^{q} a(t) f(u(t)) + \\ & \frac{{}^{c}D_{0+}^{q} t}{\Gamma(q)(1-\xi)} \left(\int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s) f(u(s))\, ds - \int_0^{\xi} (\xi-s)^{q-1} a(s) f(u(s))\, ds \right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la dérivée de Caputo ${}^{c}D_{0+}^{q} t$ est nulle, nous obtenons

$${}^{c}D_{0+}^{q} u(t) + a(t) f(u(t)) = 0.$$

Ainsi, $u(t)$ est solution du problème fractionnaire (P2). ■

Introduisons les quantités A_0 et A_∞ :

$A_0 = \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u}$, $A_\infty = \lim_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u}$.

On dit que f est superlinéaire respectivement sublinéaire lorsque $A_0 = 0$ et $A_\infty = \infty$ respectivement $A_0 = \infty$ et $A_\infty = 0$.

Lemme 4.4 *Soit* $f \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ *et* $a \in C([0,1],\mathbb{R}_+)$, *si* u *une solution du problème fractionnaire* $(P2)$ *alors*

$$\min_{t \in [\tau,1]} u(t) \geq \tau(\xi - \xi^{q-1}) \|u\|.$$

Preuve. En vertu du lemme 4.2, u peut être exprimé par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s)) ds \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{(1-\xi)} a(s) f(u(s)) ds$$

il en résulte que

$$\|u\| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{(1-\xi)} a(s) f(u(s)) ds.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{\xi - \xi^{q-1}}{(1-\xi)} t \int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s) f(u(s)) ds \\ &\geq t(\xi - \xi^{q-1}) \|u\|, \end{aligned}$$

d'où

$$\min_{\tau \leq t \leq 1} u(t) \geq \tau(\xi - \xi^{q-1}) \|u\|.$$

■

Théorème 4.1 *Si* $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ *et* $\int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s) ds \neq 0$,*alors, le problème (P2) admet au moins une solution positive dans les cas super et sous linéaires.*

Preuve. La démonstration est basée sur le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii dans un cône, pour cela on définit le cône P par
$P = \left\{ u \in E, u(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1, \min_{\tau \leq t \leq 1} u(t) \geq \tau(\xi - \xi^{q-1}) \|u\| \right\}.$
Il est facile de vérifier que P est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de E, donc c'est un cône.

Soit $u \in P$, comme G et $f$sont positives et continues, on déduit que $Tu \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, continu et $T(P) \subset P$.

i) Soit $r > 0$ et $B_r = \{u \in P, \|u\| \leq r\}$ un ensemble borné. Comme f et a sont continues, alors, il existe une constante k tel que

$$k = \max\left\{|a(t)f(u(t))| : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq r\right\}.$$

Par application du Lemme 4.2, on a pour tout $u \in B_r$

$$|Tu(t)| \leq \frac{k}{\Gamma(q+1)(1-\xi)}$$

d'où $T(B_r)$ est uniformément borné.

Nous allons établir l'équicontinuité de $T(B_r)$.

Comme G (t,s) est continue sur $[0,1] \times [0,1]$, alors, elle est uniformément continuue sur $[0,1] \times [0,1]$.

Soit $s \in [0,1]$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta\left(\frac{\varepsilon\Gamma(q)}{k}\right) > 0$,

tel que pour t_1, $t_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| < \delta$, on a

$$|G(t_1, s) - G(t_2, s)| \leq \frac{\varepsilon\Gamma(q)}{k},$$

du fait que

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)|\, a(s)f(u(s))ds,$$

on obtient

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \varepsilon.$$

Par suite $T(B_r)$ est équicontinu.

En vertu du théorème d'Arzela-Ascoli nous concluons que T est complètement continu.

Dans un premier temps, considérons le cas superlinéaire.

Comme $A_0 = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, telle que

$$f(u) \leq \varepsilon u,$$

pour tout $0 < u \leq \delta$

Soit $\Omega_1 = \{u \in E : \|u\| < \delta\}$, pour $u \in P \cap \partial\Omega_1$ nous avons

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds \\ &\leq \frac{\varepsilon \|u\|}{\Gamma(q)(1-\xi)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s)ds, \end{aligned}$$

en prenant

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(q)(1-\xi)}{\int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s)ds},$$

alors

$$\|Tu\| \leq \|u\|.$$

Dans le cas $A_\infty = \infty$, nous avons pour tout $A > 0$, il existe $\gamma > 0$, telle que

$$f(u) \geq Au$$

pour $u \geq \gamma$.

Posant $R = \max\left\{2\delta, \frac{1}{\tau(\xi-\xi^{q-1})}\gamma\right\}$ et notant par Ω_2 l'ensemble ouvert défini par

$$\Omega_2 = \{u \in E : \|u\| < R\},$$

ainsi $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et pour $u \in P \cap \partial\Omega_2$ on a

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds \\ &\geq \frac{\tau}{\Gamma(q)}(\xi - \xi^{q-1})^2 A \|u\| \int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s)ds, \end{aligned}$$

En prenant $A = \frac{\Gamma(q)}{\tau(\xi-\xi^{q-1})^2 \int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s)ds}$, on obtient $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour $u \in P \cap \partial\Omega_2$. Nous déduisons d'après le théorème 2.9 que T admet un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$, d'où l'existence de la solution positive du problème (P2) dans $P \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$. Pour prouver le cas sous linéaire on procède d'une façon similaire au cas précédant. ■

Afin d'établir un autre résultat d'existence des solutions positives du problème (P2) nous définissons les fonctions : φ, Φ, Λ et Ψ dans le cône P par :

$\Lambda(u) = \min_{t\in[\tau,1]} u(t)$ qui est une fonction positive, continue et concave,

$\varphi(u) = \Phi(u) = \|u\|$ qui sont des fonctions positives, continues et convexes dans P, et la fonction positive et continue Ψ dans P par $\Psi(u) = \|u\|$.

Soient les nombres positifs a, b, c, d tels que les ensembles suivants sont définis de cette manière :

$P(\varphi, d) = \{u \in P, \varphi(u) < d\}$,

$P(\varphi, \Lambda, b, d) = \{u \in P, b \leq \Lambda(u), \varphi(u) \leq d\}$,

$P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, c, d) = \{u \in P, b \leq \Lambda(u), \Phi(u) \leq c, \varphi(u) \leq d\}$,

$R(\varphi, \Psi, a, d) = \{u \in P, a \leq \Psi(u), \varphi(u) \leq d\}$.

Théorème 4.2 *Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $a \in (C[0,1], \mathbb{R}_+)$. Supposons qu'ils existent des constantes positives a, b, c, d,μ et L telles que*

$$\begin{aligned} a &< b, \mu > \frac{1}{\Gamma(q)(1-\xi)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s) ds, \\ L &< \frac{\tau(\xi - \xi^{q-1})}{\Gamma(q)(1-\xi)} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s) ds \text{ et} \end{aligned}$$

i) $f(u) \leq \frac{d}{\mu}$ pour $u \in [0, d]$

ii) $f(u) \geq \frac{b}{L}$ pour $u \in [b, \frac{b}{\tau(\xi - \xi^{q-1})}]$

iii) $f(u) \leq \frac{a}{\mu}$ pour $u \in [0, a]$.Alors le Problème (P2) admet au moins trois solutions positives $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\varphi, d)}$ telles que $\varphi(u_i) \leq d$, pour $i = 1, 2, 3$,

vérifiants $b < \Lambda(u_1), a < \Psi(u_2)$, $\Lambda(u_2) < b$ et $\Psi(u_3) < a$.

Preuve. Nous appliquons le théorème d'Avery Peterson pour montrer l'existence des trois solutions positives.

Notons qu'en procédant de la même façon que dans la preuve du théoreme 4.1, on démontre que T est un opérateur complètement continu dans $\overline{P(\varphi, d)}$.

1)Soit $u \in \overline{P(\varphi, d)}$, alors pour $\|u\| \leq d$, nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(Tu) &= \|Tu\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{(1-\xi)} a(s)f(u(s))ds \\
&\leq \frac{d}{\mu} \frac{1}{\Gamma(q)(1-\xi)} \int_0^1 (1-s)^{q-1}a(s)ds \leq d,
\end{aligned}$$

d'où $T\left(u\right) \in \overline{P(\varphi, d)}$.

2) Nous montrons que

$$\left\{ u \in P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, \frac{b}{\tau(\xi - \xi^{q-1})}, d), \Lambda(u) > b \right\} \neq \emptyset$$

et $\Lambda(Tu) > b$ pour $u \in P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, \frac{b}{\tau(\xi-\xi^{q-1})}, d)$, en effet, il est facile de vérifier que $u(t) = \frac{b}{\tau(\xi-\xi^{q-1})} \in P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, \frac{b}{\tau(\xi-\xi^{q-1})}, d)$ et
$\Lambda(u) = \min\limits_{t\in[\tau,1]} u(t) = \frac{b}{\tau(\xi-\xi^{q-1})} > b$,
par conséquent $\left\{ u \in P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, \frac{b}{\tau(\xi-\xi^{q-1})}, d), \Lambda(u) > b \right\} \neq \emptyset$.
Ainsi si $u \in P(\varphi, \Phi, \Lambda, b, \frac{b}{\tau(\xi-\xi^{q-1})}, d)$, alors $b \leq u(t) \leq \frac{b}{\tau(\xi-\xi^{q-1})}, \forall t \in [\tau, 1]$ et

$$\begin{aligned}
\Lambda(Tu) &= \min_{t\in[\tau,1]} Tu\left(t\right) \geq \frac{\tau}{\Gamma(q)} \frac{(\xi - \xi^{q-1})}{(1-\xi)} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1}a(s)f(u(s))ds \\
&\geq \frac{\tau}{\Gamma(q)} \frac{(\xi - \xi^{q-1})}{(1-\xi)} \frac{b}{L} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1}a(s)ds > b, \\
&\geq \frac{\tau}{\Gamma(q)} \frac{(\xi - \xi^{q-1})}{(1-\xi)} \frac{b}{L} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1}a(s)ds > b,
\end{aligned}$$

d'où (S_1).

3)Pour $u \in P(\varphi, \Lambda, b, d)$ avec $\Phi(Tu) = \|Tu\| > \frac{b}{\tau(\xi-\xi^{q-1})}$, on a l'estimation suivante

$$\Lambda(Tu) = \min_{t\in[\tau,1]} Tu(t) \geq \tau(\xi - \xi^{q-1}) \|Tu\| > b,$$

ainsi (S_2) est vérifiée.

Finalement pour la preuve de (S_3), nous supposons que pour $u \in R(\varphi, \Psi, a, d)$ avec $\Psi(u) = \|u\| = a$, compte tenu de la condition (iii) on a

$$\begin{aligned}\Psi(Tu) &= \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{(1-\xi)} a(s)f(u(s))ds \\ &\leq \frac{a}{\mu} \frac{1}{\Gamma(q)(1-\xi)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s)ds < a,\end{aligned}$$

il s'ensuit que (S_3) est satisfaite.

En conclusion, toutes les hypothèses du théorème 2.11 sont vérifiées, donc le problème (P2) admet au moins trois solutions positives u_1, u_2 et $u_3 \in \overline{P(\varphi, d)}$ telles que $\varphi(u_i) \leq d$, pour $i = 1, 2, 3$,vérifiants $b < \Lambda(u_1), a < \Psi(u_2)$, $\Lambda(u_2) < b$ et $\Psi(u_3) < a$.

Ceci achève la démonstration. ■

Afin de valider les résultats précédents nous présentons les exemples suivants

4.4 Exemples

Exemple 4.1 *Considérons le problème aux limites suivant :*

$${}^cD_{0^+}^{\frac{8}{3}} u(t) + (1-t)\frac{u^2}{4} = 0, 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = u(\xi).$$

Comme $\int_0^1 (1-s)^{\frac{8}{3}} ds = \frac{3}{11} \neq 0$, $\lim\limits_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u^2}{4u} = 0$ *et* $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{u^2}{4u} = \infty$, *d'après le théorème 4.1, on déduit qu'il existe aux moins une solution positive.*

Exemple 4.2 *Etudions le problème fractionnaire aux limites suivant :*

$${}^cD_{0^+}^{\frac{9}{4}} u(t) + a(t)f(u(t)) = 0, 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = u(\xi).$$

où $a(t) = 1 - t$ *et*

$$f(u) = \begin{cases} u^2, 0 \leq u \leq 1, \\ 125u - 124, 1 \leq u \leq 2, \\ 126, u \geq 2. \end{cases}$$

Il est clair que $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *et* $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$. *Vérifions maintenant les hypothèses du théorème 4.2, pour* $\tau = \frac{11}{12}$ *et* $\xi = \frac{1}{2}$ *nous avons*

$$\begin{aligned} \mu &> \frac{1}{\Gamma(\frac{9}{4})(1-\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-s)^{\frac{9}{4}} ds = 0.1604 \text{ et} \\ L &< \frac{\frac{11}{12}(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{\frac{5}{4}})}{\Gamma(\frac{9}{4})(1-\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-s)\frac{9}{4} ds = 0.0234. \end{aligned}$$

En choisissant $\mu = 1, L = 0.02, a = 1, b = 2, d \geq 126$ *et* $c = 27.426$, *alors les hypothèses du théorème 4.2 sont satisfaites, ainsi ils existent aux moins trois solutions positives* u_1, u_2 *et* $u_3 \in \overline{P(\varphi, d)}$ *telles que* $\|u_i\| \leq 126$, *pour* $i = 1, 2, 3$. $2 < \min_{t \in [\frac{11}{12}, 1]} u_1(t), 1 < \|u_2\|$, *avec* $\min_{t \in [\frac{11}{12}, 1]} u_2(t) < 2$ *et* $\|u_3\| < 1$.

Chapitre 5

Existence des solutions positives d'un problème non linéaire fractionnaire

Résumé

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence des solutions positives par application de la théorie de l'indice du point fixe pour le problème aux limites fractionnaire (P3) suivant :

$$ {}^{c}D_{0^+}^{q}u(t) + a\,(t)\,f(u(t)) = 0, 0 < t < 1, $$

$$ u(0) = u''(0) = 0, u(1) = 0. $$

avec $f \in C\,([0,\infty[\,,[0,\infty[)$, $a\,(t) \in C\,([0,1]\,,[0,\infty[)$ et $2 < q < 3$.

5.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Ils peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées entières. En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention.

Sous certaines conditions et en se basant sur la théorie de l'indice du point fixe, une série de travaux traitant l'existence des solutions positives des problèmes aux limites fractionnaires a été élaborée dans [5, 7, 44]. Dans ce contexte notre contribution consiste à établir des théorèmes d'existence permettant donc de prouver l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème (P3). Nos preuves sont essentiellement basées sur le théorème 2.15.

5.2 Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe on va étudier quelques propriétés de la fonction de Green.

Lemme 5.1 *Soit* $y \in C([0,1])$, *et* $2 < q < 3$, *l'unique solution du problème fractionnaire*

$$\begin{cases} {}^cD^q_{0^+}u(t) + y(t) = 0, \ \ 0 < t < 1 \\ u(0) = u''(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)y(s)ds,$$

avec

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s)^{q-1} - (t-s)^{q-1}, 0 \le s \le t, \\ t(1-s)^{q-1}, t \le s \le 1. \end{cases}$$

Lemme 5.2 *Pour tout $s, t \in [0,1]$, la fonction de Green $G(t,s)$ est positive, continue et possède les propriétés suivantes*

i) $G(t,s) \leq (1-s)^{q-1}$,

ii) $\min\limits_{t\in[\tau_1,\tau_2]} G(t,s) \geq \tau_1 \left(1-(\tau_2)^{q-2}\right)(1-s)^{q-1}$ *où* $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$.

Preuve. D'après l'expression de G(t, s), il est évident que $G(t,s) \in C([0,1]\times[0,1))$, $G(t,s) \geq 0$ et $G(t,s) \leq (1-s)^{q-1}$pour $s, t \in [0,1]$. Montrons la deuxième propriété. Soient

$$g_1(t,s) = t(1-s)^{q-1} - (t-s)^{q-1}, s \leq t,$$

et

$$g_2(t,s) = t(1-s)^{q-1}, t \leq s.$$

Pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$, on a

$$g_1(t,s) \geq \tau_1 \left(1-(\tau_2)^{q-2}\right)(1-s)^{q-1}, t \in [\tau_1, \tau_2].$$

En tenant compte de la monotonie de g_2 par rapport à t, on aura

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} g_2(t,s) = \tau_1(1-s)^{q-1} \geq \tau_1 \left(1-(\tau_2)^{q-2}\right)(1-s)^{q-1},$$

ainsi

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} G(t,s) \geq \tau_1 \left(1-(\tau_2)^{q-2}\right)(1-s)^{q-1}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.. ■

Lemme 5.3 *La solution du problème $(P3)$ vérifie l'inégalité suivante*

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} u(t) \geq \tau_1 \left(1-(\tau_2)^{q-2}\right)\|u\|.$$

Preuve. A partir du lemma 5.1, on trouve

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 G(t,s)a\left(s\right)f(u(s))ds\leq\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}a\left(s\right)f(u(s))ds$$

alors

$$\begin{aligned}\|u\| &= \max_{0\leq t\leq 1}|u(t)|=\max_{0\leq t\leq 1}\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 G(t,s)a\left(s\right)f(u(s))ds\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}a\left(s\right)f(u(s))ds.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}u(t) &\geq \frac{t\left(1-t^{q-2}\right)}{\Gamma(q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}a\left(s\right)f(u(s))ds\\ &\geq t\left(1-t^{q-2}\right)\|u\|,\end{aligned}$$

d'où

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]}u(t)\geq\tau_1\left(1-(\tau_2)^{q-2}\right)\|u\|.$$

■

5.3 Résultats principaux

Soit $E=C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ l'espace de Banach muni de la norme $\|u\|=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$.
Définissons l'operateur intégral $T:E\rightarrow E$ par

$$Tu(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds,\forall t\in[0,1].$$

Lemme 5.4 *La fonction $u\in E$ est solution du problème fractionnaire (P3) si et seulement si $Tu\left(t\right)=u\left(t\right),\forall t\in[0,1]$.*

Preuve. Soit u la solution du problème (P3), alors, en appliquant le théorème (2.4), on touve

$$u(t)=\int_0^1 G\left(t,s\right)a\left(s\right)f\left(u\left(s\right)\right)ds.$$

Inversement, supposons que u satisfait

$$\begin{aligned} u\left(t\right) &= -I_{0^+}^q a\left(t\right)f\left(u\left(t\right)\right)+ \\ & \frac{t}{\Gamma\left(q\right)}\int_0^1 (1-s)^{q-1}a\left(s\right)f\left(u\left(s\right)\right)ds, \end{aligned}$$

Par application du lemme 2.4, on obtient

$$\begin{aligned} {}^cD_{0^+}^q u\left(t\right) &= -{}^cD_{0^+}^q I_{0^+}^q a\left(t\right)f\left(u\left(t\right)\right)+ \\ & \frac{{}^cD_{0^+}^q t}{\Gamma\left(q\right)\left(1-\xi\right)}\int_0^1 (1-s)^{q-1}a\left(s\right)f\left(u\left(s\right)\right)ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la dérivée de Caputo ${}^cD_{0^+}^q t$ est nulle, nous obtenons

$${}^cD_{0^+}^q u\left(t\right)+a\left(t\right)f\left(u\left(t\right)\right)=0.$$

Ainsi, $u\left(t\right)$ est la solution du problème (P3). ∎

Soit P le cône défini par :

$$P=\left\{u\in E, u(t)\geq 0, 0\leq t\leq 1, \min_{\tau\leq t\leq 1} u(t)\geq \tau_1\left(1-(\tau_2)^{q-2}\right)\|u\|\right\}.$$

Introduisons les quantités $\delta=\tau_1\left(1-(\tau_2)^{q-2}\right)$, $\alpha=\frac{\Gamma(q)}{\int_0^1 a(s)(1-s)^{q-1}ds}$, $\beta=\frac{\Gamma(q)}{\delta^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)(1-s)^{q-1}ds}$.

Théorème 5.1 *Soit $\int_{\tau_1}^{\tau_2}(1-s)^{q-1}a(s)ds\neq 0$ et admettant que les hypothèses suivantes sont vérifiées.*

(H_1) $f_0=f_\infty=\infty$.

(H_2) *Il existe des constantes $r>0$ et $A\in\left]0,\alpha\right[$ telles que*

$$f\left(u\right)\leq Ar, u\in\left[0,r\right].$$

Alors le problème aux limites (P3) admet au moins deux solutions positives y_1 et y_2 telles que

$$0 < \|y_1\| < r < \|y_2\|.$$

Preuve. Pour montrer l'existence de solutions positives du problème (P3) il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 2.16. En effet, comme $f_0{=}\infty$, alors on a pour tout $A_1 \in \left]\beta, \infty\right[$, il existe $r_1 \in \left]0, r\right[$ tel que

$$f(u) \geq A_1 u, u \in [0, r_1]$$

Soit $\Omega_{r_1} = \{u \in P : \|u\| < r_1\}$. Si $u \in \partial\Omega_{r_1} \subset P$, on a $\min\limits_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2} u(t) \geq \delta \|u\|$. Il en résulte que pour $u \in \partial\Omega_{r_1}$

$$\begin{aligned}
Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s)) ds \\
&\geq \frac{A_1}{\Gamma(q)} \int_0^1 a(s) G(t,s) u(s) ds \\
&\geq \frac{A_1}{\Gamma(q)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s) G(t,s) u(s) ds \\
&\geq \frac{A_1 \delta^2}{\Gamma(q)} \|u\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s) (1-s)^{q-1} ds,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Tu(t)\| \geq \|u\|, \text{ pour } u \in \partial\Omega_{r_1}.$$

D'après le théorème 2.16 on obtient

$$i(T, \Omega_{r_1}, P) = 0.$$

D'autre part, puisque $f_\infty{=}\infty$, on déduit que pour tout $A_2 \in \left]\beta, \infty\right[$, il existe $r_2 > r$ tel que

$$f(u) \geq A_2 u, u \geq \delta r_2.$$

Soit $\Omega_{r_2} = \{u \in P : \|u\| < r_2\}$. Si $u \in \partial\Omega_{r_2} \subset P$, on a $\min\limits_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2} u(t) \geq \delta \|u\| = \delta r_2$, ainsi pour tout $u \in \partial\Omega_{r_2}$, on trouve

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s)) ds \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(t,s) a(s) f(u(s)) ds \\ &\geq \frac{A_2}{\Gamma(q)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s) G(t,s) u(s) ds \\ &\geq \frac{A_2 \delta^2}{\Gamma(q)} \|u\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s) (1-s)^{q-1} ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\|Tu(t)\| \geq \|u\|, for u \in \partial\Omega_{r_2}.$$

Par conséquent

$$i(T, \Omega_{r_2}, P) = 0.$$

Soit $\Omega_r = \{u \in P : \|u\| < r\}$. Pour tout $u \in \partial\Omega_r$, on a

$$\begin{aligned} Tu(t) &\leq \frac{Ar}{\Gamma(q)} \int_0^1 a(s) G(t,s) ds \\ &\leq \frac{Ar}{\Gamma(q)} \int_0^1 a(s) (1-s)^{q-1} ds \\ &\leq r = \|u\|, \end{aligned}$$

il s'ensuit que $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in \partial\Omega_r$.

Compte tenu du théorème 2.16, nous obtenons

$$i(T, \Omega_r, P) = 1.$$

Nous concluons que T admet un point fixe $y_1 \in \Omega_r \diagdown \overline{\Omega}_{r_1}$ et un point fixe $y_2 \in \Omega_{r_2} \diagdown \overline{\Omega}_r$ avec $0 < \|y_1\| < r < \|y_2\|$ .Ce qu'il fallait démontrer. ∎

Théorème 5.2 *Soit* $\int_{\tau_1}^{\tau_2} (1-s)^{q-1} a(s) ds \neq 0$ *et admettant que les hypothèses suivantes* *sont vérifiées.*

Théorème 5.3 (H_3) $f_0 = 0.$

(H_4) *Il existe des constantes* $\rho > 0$ *et* $B \in]\beta, \infty[$ *telles que*

$$f(u) \geq B\rho, u \in [\delta\rho, \rho].$$

Alors le problème aux limites (P3) admet au moins une solution positive y_1 *avec*

$$0 < \|y_1\| < \rho.$$

Preuve. Raisonnons de la même manière que dans la preuve du théorème précédent. D'après (H_3), on a pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha[$, il existe $r_1 \in]0, \rho[$ tel que

$$f(u) \leq \varepsilon u, u \in [0, r_1].$$

Soit $\Omega_{r_1} = \{u \in P : \|u\| < r_1\}$. Pour tout $u \in \partial\Omega_{r_1}$ nous avons

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s)) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(q)} \int_0^1 a(s) G(t,s) u(s) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(q)} \|u\| \int_0^1 a(s) (1-s)^{q-1} ds \\ &\leq \|u\|, \end{aligned}$$

ainsi

$$\|Tu(t)\| \leq \|u\|, for u \in \partial\Omega_{r_1}.$$

Nous déduisons que

$$i(T, \Omega_{r_1}, P) = 1.$$

D'un autre côté, soit $\Omega_\rho = \{u \in P : \|u\| < \rho\}$. Comme $u \in \partial\Omega_\rho \subset P$, on a $\min\limits_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2} u(t) \geq \delta \|u\| = \delta\rho$. Par conséquent, pour tout $u \in \partial\Omega_\rho$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)a(s)\,f(u(s))ds \\
&\geq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(t,s)a(s)\,f(u(s))ds \\
&\geq \frac{B\rho}{\Gamma(q)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)\,G(t,s)ds \\
&\geq \frac{B\rho\delta^2}{\Gamma(q)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)\,(1-s)^{q-1}\,ds \\
&\geq \rho = \|u\|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|Tu(t)\| \geq \|u\|, foru \in \partial\Omega_\rho.$$

Ce qui implique que

$$i\,(T, \Omega_\rho, P) = 0.$$

Nous concluons que pour $r_1 < \rho$ que T admet un point fixe $y_1 \in \Omega_\rho \diagdown \overline{\Omega}_{r_1}$.Ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 5.4 *Si les hypothèses (H_2) et (H_4) sont satisfaites et $r \neq \rho$, alors le problème (P3) admet au moins une solution positive y vérifiant $r < \|y\| < \rho$ ou $\rho < \|y\| < r$.*

Preuve. Supposons que $r < \rho$.

Soit $\Omega_r = \{u \in P : \|u\| < r\}$ et supposons que $r < \rho$. En appliquant l'hypoythèse (H_2) on obtient

$$\begin{aligned}
Tu(t) &\leq \frac{Ar}{\Gamma(q)} \int_0^1 a(s)\,G(t,s)ds \\
&\leq \frac{Ar}{\Gamma(q)} \int_0^1 a(s)\,(1-s)^{q-1}ds \\
&\leq r = \|u\|,
\end{aligned}$$

il en résulte que, $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in \partial\Omega_r$.

Par conséquent

$$i\left(T,\Omega_r,P\right)=1.$$

Finalement, soit $\Omega_\rho=\{u\in P:\|u\|<\rho\}$. Si $u\in\partial\Omega_\rho$ on a $\min\limits_{\tau_1\leq t\leq\tau_2}u(t)\geq\delta\|u\|=\delta\rho$, compte tenu de l'hypothèse (H_4) nous déduisons que

$$\begin{aligned}
Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 G(t,s)a\left(s\right)f(u(s))ds \\
&\geq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} G(t,s)a\left(s\right)f(u(s))ds \\
&\geq \frac{B\rho}{\Gamma(q)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} a\left(s\right)G(t,s)ds \\
&\geq \frac{B\rho\delta^2}{\Gamma(q)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} a\left(s\right)\left(1-s\right)^{q-1}ds \\
&\geq \rho=\|u\|,
\end{aligned}$$

il s'ensuit

$$\|Tu(t)\|\geq\|u\|, for u\in\partial\Omega_\rho.$$

D'où

$$i\left(T,\Omega_\rho,P\right)=0.$$

Toutes les hypothèses du théorème 2.16 sont vérifiées, donc le problème (P3) admet au moins une solution positive $y\in\Omega_\rho\diagdown\overline{\Omega}_r$. ■

5.4 Exemples

Exemple 5.1 *Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant*

$${}^cD_{0^+}^{\frac{11}{4}}u(t)+(1-t)\left(\exp\left(u\right)+u^2\right)=0, 0<t<1,$$

$$u(0)=u''(0)=0, u(1)=0.$$

où $q = \frac{11}{4}$, $a(t) = 1 - t$, *et*

$$f(u) = \exp(u) + u^2.$$

Il est facile de vérifier que $f_0 = f_\infty = \infty$, *d'où* (H_1).*Nous avons* $(q+1)\Gamma(q) = 9.559$, *comme* $f(u)$ *est une fonction croissante pour* $u \geq 0$,

en prenant $r = \frac{1}{2}$ *et* $A = 2\exp\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \in]0, 9.559[$, *on obtient*

$$f(u) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(2\exp\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = Ar, \text{ pour } u \in [0, r].$$

Ainsi (H_2) *est vérifiée. D'après le théorème 5.1, il existe aux moins deux solutions positives* y_1 *et* y_2 *telles que*

$$0 < \|y_1\| < \frac{1}{2} < \|y_2\|.$$

Exemple 5.2 *Examinons le problème aux limites fractionnaire suivant*

$$^cD_{0^+}^{\frac{9}{4}}u(t) + 10^{35}u^{\frac{9}{8}}\exp(-u)(1-t) = 0, 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = 0.$$

où $q = \frac{9}{4}, f(u) = 10^{35}u^{\frac{9}{8}}\exp(-u), a(t) = 1 - t, \delta = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{q-2}\right) = 0.017,$

$\beta = 33394, \Gamma\left(\frac{9}{4}\right) = 1.133.$

Il est clair que (H_3) *est vérifiée. Comme* $f(u)$ *est une fonction décroissante pour* $u \geq \frac{9}{8}$, *en choisissant*

$\rho = 70, B = \frac{4732800}{70} \in]33394, \infty[$, *il en résulte que*

$$f(u) \geq f(70) = 4732800 = B\rho, \text{ pour } u \in [\delta\rho, \rho],$$

par conséquent, (H_4) *est satisfaite. D'après le théorème 5.2, il existe aux moins une solution positive* y_1 *tel que*

$$0 < \|y_1\| < \rho.$$

Exemple 5.3 *Reprenons l'exemple précédent.*

Comme (H_4) *est vérifiée il suffit de vérifier la condition* (H_2). *En effet, comme* f *est croissante sur* $\left[0, \frac{9}{8}\right]$, *donc pour* $r = 10^{-290}$ *et* $A = 0.0562 \in]0, 3.682[$, *nous arrivons à*

$$f(u) \leq f\left(10^{-290}\right) = Ar, \text{ pour } u \in [0, r],$$

Nous concluons d'après le théorème 5.3 que notre problème admet aux moins une solution positive y *satisfaisant* $r < \|y\| < \rho$ *ou* $\rho < \|y\| < r$.

Conclusion et perspectives

Cette étude s'inscrit dans la démarche de l'application des outils d'analyse aux équations différentielles d'ordres fractionnaires. Le premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec l'outil fractionnaire et a fourni quelques résultats, élémentaires certes, mais utiles pour notre étude.

Le deuxième chapitre de cette thèse est dédié à l'étude des problèmes aux limites fractionnaires relatifs à la dérivée de Caputo dans des espaces de Banach, nous avons établie des résultats d'existence et d'unicité de la solution. La dépendance de solutions par rapport aux données initiales a été également discutée. Une synthèse de ces résultats a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale.

Enfin, dans le troisième et quatrième chapitre, nous nous intéréssons à la question d'existence des solution positives avec leurs multiplicité par l'application du Théorème de Krasnoselskii's et d'Avery Peterson pour certains problèmes aux limites fractionnaires. Ces résultats ont fait l'objet de deux publications.

Actuellement, ce travail soulève un certain nombre de questions qui méritent d'être approfondies par la suite. Par exemple, il serait judicieux de penser à l'application de la dérivée de Riemman-Liouville à la place de la dérivée de Caputo pour la résolution de ces problèmes fractionnaires, étudier la stabilité de la solution. Enfin, nous pouvons développer d'éventuels modèles numériques correspondant aux problèmes aux limites fractionnaires présentés dans ce travail.

Publications internationales

A. Guezane lakoud, S. Bensebaa. Solvability of a fractional boundary value problem with fractional derivative condition, Arab J Math. 3 : 39–48, 2014.

A. Guezane lakoud, S. Bensebaa. Multiple positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation , journal of applied functional analysis. 9 (1-2) : 87-98, 2014.

S. Bensebaa, A. Guezane lakoud. Existence of positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation , Appl. Math. Inf. Sci. 10 (2) : 519-525, 2016.

Communications internationales

A. Guezane-Lakoud, S. Bensebaa , Existence results for a fractional boundary value problem, International conference on applied mathematics and approximation theory, AMAT 2012, May 17-20,2012, Ankara, Turkey.

A. Guezane-Lakoud, S. Bensebaa, Positive solutions for a fractional boundary value problem with fractional derivative condition, Algerian-Turkish International days on Mathematics 2012 ATIM'2012, 9-11 October 2012 in Annaba, Algeria.

A. Guezane-Lakoud, S. Bensebaa , Solvability of a fractional boundary value problem with fractional derivative condition, International conference : Mathematical Science and Applications, December 26-31, 2012, Abu Dhabi.

A. Guezane-Lakoud, S. Bensebaa , Multiple positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation , The first workshop on fractional calculus and its applications, April 25-26, 2013, Al Ain, United Arab Emirates.

A. Guezane-Lakoud, S. Bensebaa , Study of a nonlinear fractional differential equation with fractional derivative condition, The 11 th UAE Math day, April 27,2013, Al Ain, United Arab Emirates.

A. Guezane-Lakoud, S. Bensebaa , Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, International conference and workshop on mathematical analysis, ICWOMA 2014, May 27-30, Putrajaya, Malayzia.

A. Guezane-Lakoud, S. Bensebaa Multiple positive solution for a fractional boundary value problem, International conference on applied analysis and mathematica modeling, ICAAMM 2015 , June 8-12, Istanbul Turkey.

Bibliographie

[1] B. Ahmad, J. J. Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, Abstract and applied analysis, 2009, ID 494720, 9 pages, doi :10.1155/2009/494720.

[2] B. Ahmad, S. Sivasundaram, On four-point nonlocal boundary value problems of nonlinear integro-differential equations of fractional order. Appl. Math. Comput. 217(2010), 480–487.

[3] G.A. Anastassiou, On right fractional calculus. Chaos Solitons Fract. 42(2009), 365–376.

[4] R.I. Avery, A.C. Peterson, Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Comput. Math. Appl. 42(2001), 313-322.

[5] Z. Bai, On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem, Nonlinear Analysis, 72(2010), 916–924.

[6] M. Benchohra, S. Hammani, S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Anal. 71(2009), 2391–2396.

[7] L. Bing, Positive solutions of a nonlinear three point boundary value problem, Comput. Math. Appl. 44(2002), 201-211.

[8] C.De Coster and P.Habets, Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary values problems : classical and recent results, Nonlinear Analysis and Boundary

Value Problems for Ordinary Differential Equations, F.Zanolin, ed., CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, New York 371(1996) 1-79.

[9] J.Cronin, Fixed Points and Topological Degree in nonlinear Analysis, Mathematical Surveys, no. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1964.

[10] k. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[11] S. Dugowson. Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation, Université Paris 13, Villetaneuse, France, 1994.

[12] N. Engheta, On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, IEEE Trans. 44 (4)(1996), 554-556.

[13] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, Positive solution to a higher order fractional boundary value problem with fractional integral condition, Romanian Journal of Mathematics and Computer Sciences, 2(2012), 28–40.

[14] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, Solvability of a three-point fractional nonlinear boundary value problem, Differ Equ Dyn Syst 20(4) (2012), 395–403.

[15] D. Guo, V. Lakshmikantham, Nonlinear problems in abstract cones, Academic Press, San Diego, 1988.

[16] R. Hilfer. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific Publ.Co (2000). 4, 9

[17] D. Jiang and C. Yuan, The positive properties of the Green function for Dirichlet-type boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and its application, Nonlinear Analysis, 72(2010), 710–719.

[18] Q. Jinliang, Positive solutions for a nonlinear periodic boundary value problem with a parameter, Electronic Journal of Differential Equations, 133(2012) 1–10.

[19] E. R. Kaufmann and N. Kosmatov, A Second-Order Singular Boundary Value Problem, Comput. Math. Appl. 47(2004), 1317–1326.

[20] E. R. Kaufmann and N. Kosmatov, Singular Conjugate Boundary Value Problems on a Time Scale, J. Difference Equ. Appl. 10 (2004), No. 2, 119–127.

[21] R.A. Khan, Existence and approximation of solutions of nonlinear problems with integral boundary conditions, Dynam. Systems Appl. 14(2005), 281-296.

[22] R.A. Khan, M.R Rehman, J 5. Henderson, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, Fractional Diff. eq. 1 (1)(2001), 29–43.

[23] A. Kilbas, Hari M. Srivastava, juan j. Trujillo, Theory and applicaions of fractional differential equations, in : North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science, B.V. Amsterdam, 2006.

[24] M. A. Krasnosel'skii, The Operator of translation Along the Trajectories of Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1968.

[25] M. A. Krasnosel'skii, "Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators,", Soviet Mathematics, Doklady, 1(1960), 1285-1288.

[26] R.W. Leggett,Williams,L.R., Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Indiana Univ. Math. J. 7 (2000), 133-154.

[27] A. Lion. On the thermodynamics of fractional damping elements, Continuum Mechanics and Thermodynamics. 9(1997), 83–96.

[28] F. Mainardi, Fractals and fractional calculus in Continuum Mechanics, Springer, New York, 1997.

[29] R. Magin, Fractional calculus in bioengineering, Crit. rev. Biom. Eng. 32 (1)(2004), 1-104.

[30] J.Mawhin-M.Willem, Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, Springer Verlag, New York, 1989.

[31] K. Nishimoto, Fractional calculus and its applications, Nihon University, Koriyama, 1990.

[32] K. B. Oldham, Fractional Differential Equations in Electrochemistry, Advances in Engineering Software, 2009.

[33] I. Podlubny, Fractional Differential Equations Mathematics in Sciences and Engineering, Academic Press, New York, London, Toronto, 1999.

[34] M. Rehman, R. A. Khan, Existence and uniqueness of solutions for multipoint boundary value problem for fractional differential equations, Appl. Math. Lett. 23(2010), 1038–1044.

[35] J. Sabatier, O.P Agrawal, J. A.T. Machado, Advances in Fractional calculus, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[36] V. H. Schmidt and J. E. Drumheller. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. Phys. Rev. B. 4(1971), 4582-4597.

[37] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974. Burnaby, BC, Canada, 2003.

[38] S.Tara, " Brouwer's fixed point theorem : methods of proof and applications," M.S. thesis, Simon Fraser University, 2003.

[39] J. Xu and Z. Yang, Multiple Positive Solutions of a Singular Fractional Boundary Value Problem, Applied Mathematics E-Notes, 10(2010), 259-267.

[40] X. Xu, Positive Solutions for Singular Semi-positone Boundary Value Problems, J. Math.Anal. Appl. 237(2007), 480–491.

[41] X. Xu, D. Jiang and C. Yuan, Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation, Nonlinear Analysis, 71(2009), 4676–4688.

[42] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[43] X. M. Zhang, X. Y. Huang, Z. H. Liu, The existence and uniqueness of mild solutions for impulsive fractional equations with nonlocal conditions and infinite delay, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 4(2010), 775–781.

[44] S. Q. Zhang, Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, Electronic Journal of Differential Equations, 36(2006), 1–16.

[45] Zhoujin Cui, Pinneng Yu and Zisen Mao, Existence of Solutions for Nonlocal Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations, Advances in Dynamical Systems and Applications ISSN 0973-5321, 7 (2012), 31-40.