وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba
Badji Mokhtar University
Annaba

جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences

Année : 2015/2016

Département de Mathématiques

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation et de Statistique

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

TITRE

Analyse numérique de quelques problèmes issus de mathématiques financières

Spécialité
Analyse numérique

Présentée par
Benchettah Djaber Chemseddine

DIRECTEUR DE THÈSE : Haiour Mohamed **Pr** **U.B.M.ANNABA**

Devant le jury:

PRÉSIDENT :	**Boutabia Hacène**	**Pr**	**U.B.M.ANNABA**
EXAMINATEUR :	**Remita Riad**	**Pr**	**U.B.M.ANNABA**
EXAMINATEUR :	**Maouni Messaoud**	**M.C.A**	**U.SKIKDA**
EXAMINATEUR:	**Boulaaras Salah**	**M.C.A**	**U.Q.ARABIE SAOUDITE**

ملخص

الهدف من هذ ه الأطروحة هو دراسة سلوك التقارب للمتراجح المتغيرة المكافئية المرتبطة بمشكلة الخيار الامريكي في نموذج بلاك سكولز مع معاملات ثابتة باستخدام منهجين مختلفين، وهما (مقاربة لوغاريتمية، مقاربة الحلول الفرعية). بتعبير أدق، نعطي مشكلة الخيار الامريكي في شكل متراجح متغيرة تطورية، حيث قمنا بدراسة وجود ووحدانية الحل و حصلنا على تقدير لسلوك التقارب في النظيم L^{∞} للمتراجح المتغيرة المكافئية المرتبطة بمشكلة الخيار الامريكي باستعمال طريقة الفروق المحدودة و طريقة العناصر المحدودة. ما سيسمح لنا بتحديد الحدود الحرة شيء هام في الخيار الامريكي.

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est l'étude du comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle d'évolution issue du problème de l'option américaine dans un modèle de black-scholes à coefficients constants moyennant deux approches différentes, à savoir (l'approche algorithmique, l'approche sous solutions). Plus précisément, nous donnons le problème de l'option américaine sous forme d'inéquation variationnelle parabolique, où nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution et obtenu une estimation du comportement asymptotique en norme uniforme de l'inéquation variationnelle parabolique issue du problème de l'option américaine en utilisant la méthode des différences finies en temps associée à une approximation par la méthode des éléments finis en espace, Cela nous permet d'avoir une vision sur la frontière libre chose cruciale dans la pratique des options américaines.

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to study the asymptotic behavior of the variational inequality related to American options problem in a black scholes model with constant coefficients using two different approaches, namely (Algorithmic approach, Sub-solutions approach). Specifically, we give the problem of American options in the form of parabolic variational inequality, where we studied the existence and uniqueness of the solution and proved the asymptotic behavior in uniform norm of the parabolic variational inequality related to American options problem using the semi-implicit time scheme combined with a finite element spatial approximation, which enables us to locate free boundary thing crucial in practice of the American options.

Mots clés : option américaine, éléments finis, différences finies, inéquation variationnelle parabolique, point fixe, θ-schéma, comportement asymptotique.

Keywords : american option, finite elements, finite differences, parabolic variational inequality, fixed point, θ-scheme, asyptotic behavior.

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Professeur Haiour Mohamed. Si j'ai mené cette thèse à terme, c'est grâce à lui. Il a su me transmettre sa motivation et son intérêt pour la recherche mathématique.

Je tiens également à remercier Monsieur Boutabia Hacène, Professeur à l'université Badji-Mokhtar Annaba, qui me fait l'honneur de présider le jury ainsi que Monsieur Remita Mohamed Riad, Professeur à l'université Badji-Mokhtar Annaba d'avoir accepté de faire partie du jury et d'y consacrer une partie de son temps.

Je remercie vivement Monsieur Maouni Messaoud, Maitre de conférence à l'université de Skikda et Monsieur Boulaaras Salah, Maitre de conférence à l'université Al-Qassim Arabie Saoudite d'avoir accepté de juger ce travail et d'y consacrer une partie de leur temps.

Je remercie Mon oncle Benchettah Azzedine pour ses conseils précieux et le Professeur Paul Raynaud de fitte pour son aide, sa disponibilité lors de mon séjour au sein du laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem Université de Rouen-France.

Au cours de ces cinq années, j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail au sein du Laboratoire L.A.N.O.S de l'université de Badji-Mokhtar Annaba pour mener à bien ce projet. Un grand merci à tous les membres du Laboratoire L.A.N.O.S.

Je remercie également tous les membres du département de Mathématiques et de la faculté des sciences, pour toute l'aide qui m'a été accordée.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier Mes amis et amies pour leur soutien moral.

Dédicaces

A ma très chère mère

Tu as fait plus qu´une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t´accorder santé, longue vie et bonheur.

A la mémoire de mon Père

Aucune dédicace ne saurait exprimer l´amour, l´estime, le dévouement et le respect que j´ai toujours eu pour toi. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A ma très chère tante Tahiri Samia

En témoignage de l´attachement, de l´amour et de l´affection que je porte pour toi. Malgré la distance, tu es toujours dans mon coeur. Je te remercie pour tes précieux conseils et toute ton aide. Je te dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur et de santé.

A mes très chères soeurs Nesrine et Djihene et le mari de ma soeur Wassim

Qui n´ont cessé d´être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité. Je vous dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur, de santé et de réussite.

A ma très chère fiancée Boutaleb Hanifa

Sans ton aide, tes conseils et tes encouragements ce travail n´aurait vu le jour. Que dieu réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit témoignage de ma reconnaissance et de mon amour sincère.

A mes grands parents

Veuillez trouver dans ce modeste travail l´expression de mon affection.

A la nouvelle petite fille de ma soeur qui va bientôt venir au monde

Puisse ce merveilleux bébé remplir nos coeurs d’amour et de bonheur inchallah.

Publication découlant de cette Thèse

✓ Djaber Chemseddine Benchettah and Mohamed Haiour.
⌈ *L^∞ Asymptotic Behavior of the Variational Inequality Related to American Options Problem*⌋
Applied Mathematics (**2014**), 5, 1299-1309.

– Received : 12 March 2014
– Revised : 12 April 2014
– Accepted : 19 April 2014
– Published online : May 2014
– Article doi : http ://dx.doi.org/10.4236/am.2014.58122.

✓ Djaber Chemseddine Benchettah and Mohamed Haiour.
⌈ *Sub-solution approach for the Asymptotic Behavior of a Parabolic Variational Inequality Related to American Options Problem*⌋
Global Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 11, Number 4 (**2015**), pp. 1727-1745.

Applied Mathematics, 2014, 5, 1299-1309
Published Online May 2014 in SciRes. http://www.scirp.org/journal/am
http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.58122

L^∞-Asymptotic Behavior of the Variational Inequality Related to American Options Problem

Djaber Chemseddine Benchettah, Mohamed Haiour

Department of Mathematics, Faculty of Science, Badji-Mokhtar-Annaba University, P.O. Box 12, Annaba, Algeria
Email: james.0022@hotmail.com, haiourm@yahoo.fr

Received 12 March 2014; revised 12 April 2014; accepted 19 April 2014

Abstract

We study the approximation of variational inequality related to American options problem. A simple proof to asymptotic behavior is also given using the theta time scheme combined with a finite element spatial approximation in uniform norm, which enables us to locate free boundary in practice.

Keywords

American Options, Finite Elements, Parabolic Variational Inequalities, Fixed Point, Asymptotic Behavior

1. Introduction

Since the work of Black-Scholes in 1973 see [1], the financial markets have expanded considerably and traded products are increasingly numerous and sophisticated. Most widespread of these products are the options. The basic options are the options to sell and purchase, respectively called put and call. If option can be exercised at any time until maturity, we speak about American option otherwise it is a European option.

The two researchers provide a method of evaluation of European options by solving a partial derivative equation called (black-Scholes's equation). However, we cannot get explicit formula for pricing of American options, even the most simple. The formalization of the problem of pricing American options as variational inequality, and its discretization by numerical methods, appeared only rather tardily in the article of Jaillet, Lamberton and Lapeyre see [2]. A little later, the book of Wilmott, Dewynne and Howison see [3] has made it much more accessible the pricing by L.C.P from American Option problem. For the problems at free boundary several numerical results have was obtained for parabolic and elliptic variational and quasi-variational inequality see [4]-[8].

How to cite this paper: Benchettah, D.C. and Haiour, M. (2014) L^∞-Asymptotic Behavior of the Variational Inequality Related to American Options Problem. *Applied Mathematics*, **5**, 1299-1309. http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.58122

Global Journal of Pure and Applied Mathematics.
ISSN 0973-1768 Volume 11, Number 4 (2015), pp. 1727–1745

http://www.ripublication.com

Sub-solution approach for the Asymptotic Behavior of a Parabolic Variational Inequality Related to American Options Problem

Djaber Chemseddine Benchettah and Mohamed Haiour

Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Badji-Mokhtar-Annaba University,
P.O. Box 12, 23000 Annaba, Algeria
E-mail: benchettah097@gmail.com, haiourm@yahoo.fr

Abstract

The paper deals with the semi-implicit time scheme combined with a finite element spatial approximation for a parabolic variational inequality related to American options problem. The convergence of the iterative scheme is established and a optimal L^{∞}-asymptotic behavior is given. Furthermore, the proposed approach is based on a Sub-solutions method.

AMS subject classification:
Keywords: Sub-solution approach, Semi-implicit scheme, Finite elements approximation, Parabolic variational inequality, American option, Asymptotic behaviour.

1. Introduction

The American options problem in a black scholes model with constant coefficients and without dividend may be solved by considering the following parabolic variational inequality (P.V.I) see [21]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + AU \geq 0,\ U \geq \Psi & \text{for } (t,x) \in (0,T] \times \Omega \\ \left(\dfrac{\partial U}{\partial t} + AU\right)(U - \Psi) = 0 & \text{for } (t,x) \in (0,T] \times \Omega \\ U(t,x) = \Psi(x) & \text{for } (t,x) \in (0,T] \times \Gamma \end{cases} \tag{1.1}$$

Table des matières

Introduction Générale **vi**

1 Quelques définitions de base et résultats **1**
1.1 Préliminaires 1
1.2 Quelques notions élémentaires de mathématiques financières 2
1.2.1 Les marchés financiers 2
1.2.2 Les produits financiers 3
1.2.3 Rappel de calcul stochastique 5
1.3 Le modèle de Black-Scholes 8
1.3.1 Présentation du Modèle 8
1.3.2 Stratégie de Portefeuille Auto-Finançant, et hypothèse d'**A.O.A** 9
1.3.3 Probabilité Risque Neutre et Marché Complet 11
1.3.4 L'Équation de Black-Scholes 14
1.4 Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques 18
1.4.1 Le problème continu 18
1.4.2 Caractérisation de la Solution Continue comme Enveloppe de Sous-Solutions Continues 19
1.4.3 Propriétés de Monotonie de la Solution Continue 20
1.4.4 Propriété de Dépendance Lipschitzienne de la Solution Continue 21
1.4.5 Régularité de la solution de l'I.V 21

2 Comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle issue du problème de l'option américaine. **22**
2.1 Introduction 22
2.2 Formulation du problème de l'option américaine comme inéquation variationnelle 23
2.2.1 Le problème continu 23
2.3 Étude du problème discret 25
2.3.1 Discrétisation 25
2.3.2 Analyse de stabilité du $\theta-$schéma pour l'I.V.P 26
2.4 Existence et unicité de la solution de l'I.V discrète. 30

2.4.1 L'application point fixe associé au problème discret (2.22) 30
2.4.2 Algorithme itératif discret 32
2.5 Comportement asymptotique de l'I.V issue du problème de l'option américaine 33

3 L'approche sous-solution pour le comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle issue du problème de l'option américaine. 35
3.1 Introduction 35
3.2 Étude du problème continu 37
3.2.1 Discrétisation en temps 37
3.2.2 Existence et unicité de l'I.V continue 38
3.3 Étude du problème discret 42
3.3.1 Discrétisation 42
3.3.2 Existence et unicité de l'I.V discrète 43
3.4 Analyse d'erreur en norme L^∞ 45
3.4.1 Deux problèmes auxiliaires 45
3.5 Comportement asymptotique en norme L^∞ du problème de l'option américaine 51

Bibliographie 53

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Depuis les travaux de Black-scholes en 1973 voir [9], les marchés financiers ont connu une expansion considérable et les produits échangés sont de plus en plus nombreux et sophistiqués, les plus répandus de ces produits sont les options. Une option d'achat ou de vente, appelée respectivement (Call ou Put) est un instrument financier qui donne le droit, mais non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'actifs financiers dit risqués à un prix (prix d'exercice ou Strike) et à une date (Maturité) convenus au préalable. Si l'option peut être exercée à tout moment jusqu'à la maturité, on parle d'option américaine, si l'option peut être exercée qu'à la maturité, on parle d'option européenne. Pour obtenir ce droit, l'acheteur de l'option paie au vendeur une prime ou valeur de l'option. Une question importante de la théorie des options est de détermine cette prime à chaque instant t précédant la maturité appelée problème de pricing.
Cette question a été résolue pour les options européennes voir [9] portant sur des actifs dont la valeur suit un modèle simple, le modèle de Black-Scholes. Cependant, nous ne pouvons pas obtenir de formule explicite pour le prix d'une option américaine, même dans un modèle si simple.

■ PROBLÈME DE L'OPTION AMÉRICAINE

Pour évaluer le prix d'une option américaine, nous devons avoir une modélisation mathématique du marché financier. Nous utilisons dans notre thèse le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage développé dans le cadre du concept des martingales par Harrison et Pliska [29]. La propriété fondamentale de cette théorie affirme que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité objective sous laquelle les processus de prix des actifs risqués sont des martingales. Dans un marché complet, une telle probabilité est unique, on l'appelle la probabilité risque neutre. On suppose dans notre thèse que $X_t^{(i)} = \log\left(S_t^{(i)}\right)$ pour $i = 1, \dots, N$, et que l'équation différentielle stochastique suivante est satisfaite par la transformation logarithmique des prix des actifs risqués :

$$\left\{ \begin{array}{c} X_0^{(i)} = x_0^{(i)} \text{ pour } i = 1, \dots, N \\ dX_t^{(i)} = \left(r - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}^2\right)dt + \sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}dW_t^{(j)}, i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \tag{1}$$

où $r > 0$ est le taux d'intérêt, la matrice $\left(\sigma_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,N}$ est supposé inversible pour assurer la complétude du marché et $\left(W_t^{(j)}\right)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien standard de dimension N définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}^*)$. La théorie moderne des options américaines due à Bensoussan [8] et à Karatzas [31] relie la valeur d'une option américaine à un problème de temps d'arrêt optimal. Dans un marché complet, la valeur à l'instant t d'une option américaine de maturité T et de fonction payoff $\psi\left(X_t^{(i)}\right)$ est donnée dans un modèle de diffusion (1) par :

$$\begin{aligned} u^*(t,x) &= \sup_{\tau\in\Theta_{0,T-t}} E\left(e^{-r\tau}\psi\left(X_\tau^{0,x}\right)\right), \\ &= E\left(e^{-r\tau^*}\psi\left(X_{\tau^*}^{0,x}\right)\right). \end{aligned}$$

Où, $\Theta_{0,T-t}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0,T-t]$. Le temps d'arrêt optimal est donnée par :

$$\tau^* = \inf\left\{s\in[0,T-t];\ u^*(t+s,X_s^{0,x}) = \psi\left(X_s^{0,x}\right)\right\}.$$

D'autres par, on sait caractériser la valeur d'une option américaine comme la solution d'une inéquation variationnelle d'évolution voir Bensoussan-Lions [6] , Jaillet-Lamberton-Lapeyre [30]. Ces deux approches font apparaître une région de coïncidence :

$$\varepsilon = \left\{(t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^N;\ u^*(t,x) = \psi(x)\right\},$$

appelée région d'exercice de l'option. Dans l'étude des options américaines, le problème de localisation de cette région de coïncidence suscite un grand intérêt dans la mesure où, il fait partie du problème de l'évaluation du prix de l'option américaine et aussi permet de déterminer la stratégie que le détenteur de l'option doit suivre pour optimiser ses gains. On peut constater que si l'ensemble ε est vide, on se ramène à l'évaluation d'une option européenne.

■ Les inéquations variationnelles

L'origine des inéquations variationnelles remonte aux années soixante. G. Stampacchia [42] a été motivé par la théorie du potentielle et G. Fichera [25] a été motivé par la mécanique (problèmes dans l'élasticité avec contraintes unilatérales).
On cherche $u\in\mathbb{V}=H^1(\Omega)$ où $H_0^1(\Omega)$ la solution de l'inéquation variationnelle suivante $\big($en abrégé I.V.$\big)$:

$$\begin{cases} a(u,v-u)\geq\left(f,v-u\right) \quad \forall v\in\mathbb{V} \\ u\leq\psi;\ v\leq\psi \end{cases}$$

Moins de vingt années plus tard, avec P.L. Lions [35] et Ph. Clodio Baiochi [3], la théorie des inéquations variationnelles est devenue une source riche d'inspiration dans les mathématiques pures et appliquées.
La théorie des inéquations variationnelles a été utilisée dans une variété de questions en mécanique, physique, optimisation et contrôle, programmation linéaire, mathématique financière, etc... ; Aujourd'hui, elle est considérée comme un outil indispensable dans plusieurs secteurs de mathématiques appliquées.

■ Motivation économique

L'étude des options américaines dans un modèle multi-dimensionnel s'inscrit tout à fait dans l'évolution des marchés financiers et se trouve doublement motivée, d'une part, par l'existence sur les marchés organisés de contrats impliquant de telles options (options d'échange, options sur indices), d'autre part en permettant l'élargissement de l'offre de produits dérivés sur les marchés de gré à gré.

Pour notre part, on s'intéresse au comportement asymptotique de l'I.V.P issu du problème de l'option américaine moyennant des méthodes numériques plus précisément, on va utiliser la méthode des éléments finis en espace combiné avec la méthode des différences finies en temps.
L'estimation du comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle d'évolution associé au problème de l'option américaine a été obtenue par deux approches différentes :
- l'approche algorithmique.
- l'approche des sous-solutions.

Contenu de la Thèse

■ Notre thèse est composée de trois chapitres et une conclusion.

■ le premier chapitre est un rappel de quelques définitions de base et résultats sur les inéquations variationnelles et les mathématiques financières.

■ Le deuxième chapitre, il est consacré à l'étude du comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle d'évolution associée au problème de l'option américaine obtenue par l'approche algorithmique. En effet, ayant formulé le problème de l'option américaine en une inéquation variationnelle parabolique, la discrétisation par la méthode des éléments finis, nous a permis d'étudier la stabilité du θ-schéma pour notre I.V.P. Aussi, nous avons pu adapter à notre problème quelques résultats obtenus pour des problèmes similaires voir [14] ; [12]. En effet, nous avons défini une application de contraction associée à notre problème qui nous permet de définir un algorithme de type Bensoussan-lions [7]. Enfin, nous avons pu établir une estimation du comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle d'évolution associée au problème de l'option américaine en norme uniforme. Si $\theta \geq \frac{1}{2}$,on a

$$\left\| u_h^{\theta,n} - u^\infty \right\|_\infty \leq C \left[h^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \right)^n \right],$$

et si, $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$,on a

$$\left\| u_h^{\theta,n} - u^\infty \right\|_\infty \leq C \left[h^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta(1-2\theta)} \right)^n \right].$$

■ Dans le troisième chapitre, nous avons trouvé une estimation du comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle parabolique issue du problème de l'option américaine, en utilisant le schéma semi-implicite en temps combiné avec une approximation par la méthode des éléments finis en espace et la méthode des sous-solutions. Cette méthode introduite dans [15] ,[21] s'appuie d'une part sur la caractérisation de la solution du problème continu (Resp. discret) comme étant la plus grande des sous-solutions. D'autre part, l'existence de similitude entre les propriétés de la solution du problème continu et son analogue discret. La méthode d'approximation développée dans ce chapitre est basée sur la construction d'une suite de sous-solutions continues notée $\left(\beta^k\right)_{k\geq 1}$ telle que

$$\beta^k \leq u^k \text{ et } \left\| \beta^k - u_h^k \right\|_\infty \leq Ch^2 \left|\ln h\right|^2, \; \forall k = 1, ..., n,$$

et la construction d'une suite de sous-solutions discrètes notée $\left(\alpha_h^k\right)_{k\geq 1}$ telle que

$$\alpha_h^k \leq u_h^k \text{ et } \left\|\alpha_h^k - u^k\right\|_\infty \leq Ch^2 \left|\ln h\right|^2, \ \forall k = 1, ..., n,$$

ainsi, nous établissons l'estimation suivante

$$\left\|u^k - u_h^k\right\|_\infty \leq Ch^2 \left|\ln h\right|^2, \ \forall k = 1, ..., n.$$

Plus précisément, nous transformons l'inéquation variationnelle parabolique en une inéquation variationnelle elliptique non-coercive par le schéma semi-implicite en temps, ensuite, nous associons à l'I.V elliptique une application contractante, qui nous permet de prouver l'existence et l'unicité de la solution continue de notre I.V. et quelques propriétés qualitatives de la solution continue de notre problème. Comme l'étude du problème discret est analogue à celle du problème continue, nous introduisons ainsi deux problèmes auxiliaires, qui vont nous permettre de définir des suites de sous-solutions continues et discrètes, pour prouver le résultat important à savoir le comportement asymptotique en norme L^∞ de l'inéquation variationnelle d'évolution associée au problème de l'option américaine :

$$\left\|u_h^n - u^\infty\right\|_\infty \leq C \left[h^2 \left|\ln h\right|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)^n\right].$$

Enfin, nous terminons par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

Quelques définitions de base et résultats

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Préliminaires

Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ et $\Gamma = \partial\Omega$: sa frontière.
$C(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues définies sûr Ω.
$C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ est l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.
$C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact, $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, où

$$C_0^\infty(\Omega) = \left\{f \in C^\infty(\Omega) \text{ à support compact dans } \Omega\right\},$$

$L^p(\Omega) = \left\{f \text{ mesurables} ; \int_\Omega \left|f\right|^p d\mu(x) < +\infty,\ 1 \leq p < \infty\right\}$, muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega \left|f(x)\right|^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}},$$

$L^\infty(\Omega) = \left\{f \text{ mesurables} ; \exists\, c \text{ telle que } \left|f(x)\right| \leq c \text{ p.p dans } \Omega\right\}$, muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\left\{c \leq 0;\ \left|f(x)\right| \leq c \text{ p.p dans } \Omega\right\}.$$

Notons l'espace de Sobolev par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ où } 0 \leq |\alpha| \leq m,\ m \in N\right\},$$

où les dérivées $D^\alpha f$ sont comprises au sens faible (des distributions), muni de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^P}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = 2$, alors $W^{m,2}$ est noté par H^m.
Notons

$$H_0^m(\Omega) = \left\{f \in H^m(\Omega) ; f = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}$$

et son dual est noté $H^{-m}(\Omega)$, $(H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))')$.
Notation

$$(.,.) \text{ dénote le produit scalaire dans } L^2(\Omega).$$

$$\|.\|_{L^\infty} = \|.\|_\infty, \|.\|_{H^1} = \|.\|_1 \text{ et } \|.\|_{L^2} = \|.\|_2.$$

1.2 Quelques notions élémentaires de mathématiques financières

1.2.1 Les marchés financiers

Le marché est le lieu où se rencontre l'offre et la demande d'un certain bien. Les marchés financiers (financial markets) sont les marchés où sont effectuées les transactions sur des actifs financiers, ainsi, que leurs produits dérivés. Les principales fonctions d'un marché sont :
- la transmission des ordres, c'est-à-dire les annonces d'une intention d'acheter ou de vendre.
- l'exécution des ordres, c'est-à-dire leur transformation en transactions.
- la diffusion de l'information : connaissance des quantités d'actifs disponibles à un prix donné, connaissance des prix, ...

On distingue deux types de marché, selon le comportement des participants :

Les marchés organisés d'actifs dérivés Ce sont des marchés sur lesquels sont échangés des contrats standardisés, élaborés par les autorités de marché, et qui font l'objet de contrôles publics. Au départ, l'objectif essentiel était de standardiser quantités et qualités de produits échangés. Quelques années plus tard, le premier contrat futures a été mis en place puis rapidement les spéculateurs ont trouvé plus attractif de spéculer sur le contrat que sur le produit lui-même. Alors que, traditionnellement, les membres de marché négociaient en un lieu unique, à la criée, à l'aide d'un jeu de signes complexes, l'évolution technologique a conduit à l'émergence de la négociation (trading) électronique qui est la norme aujourd'hui.
Les marchés de gré à gré
Ils sont généralement notés OTC pour Over The Counter. Ces marchés constituent une alternative importante en matière de volumes de transactions. Les échanges sont conclus par téléphone ou par l'intermédiaire des réseaux informatiques entre deux institutions financières ou entre une institution et l'un de ses clients. Les transactions sur le marché OTC sont en général d'un montant moyen plus important que sur le marché organisé et les conversations téléphoniques sont enregistrées pour régler les litiges éventuels. L'avantage essentiel du marché OTC réside dans la possibilité de traiter des produits sur mesure, la

contrepartie étant qu'une des deux parties puisse faire défaut. Les marchés organisés ont, par contre, définit des règles de fonctionnement qui rendent ce risque pratiquement nul.

1.2.2 Les produits financiers

Ce sont des titres ou contrats dont certains sont négociables en bourse. Ils comptent deux catégories : les actifs financiers traditionnels et les produits dérivés.

1.2.2.1 Les actifs financiers traditionnels

Action : est un titre de propriété délivré par une société de capitaux. Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. Le détenteur d'actions est qualifié d'actionnaire et l'ensemble des actionnaires constitue l'actionnariat.

Obligation : est une valeur mobilière constituant un titre de créance représentatif d'un emprunt. Donnant droit à des rendements obligataires, l'obligation est cessible et peut donc faire l'objet d'une cotation sur une bourse ou un marché secondaire. Dans la pratique, les volumes échangés se négocient principalement de gré à gré. La crise financière de 2007 à 2011 a vu les rendements des obligations atteindre des plus bas historiques.

Taux de change d'une devise (une monnaie) : est le cours (autrement dit le prix) de cette devise par rapport à une autre. Le taux de change est déterminé par l'offre et la demande de chacune des deux monnaies : si la demande dépasse l'offre, le cours augmente.

Matière première : est un produit à l'état brut (matière extraite de la nature : notion de ressources naturelles), ou ayant subi une première transformation sur le lieu de production pour la rendre propre à l'échange international, utilisé dans la production de produits finis ou comme source d'énergie. Par exemple : or, argent, diamant, pétrole, produits agricoles (blés, riz, maïs), gaz naturel, minerais et métaux, sable (pour le verre ou le silicium pour circuit intégré), potasse, caoutchouc, etc.

1.2.2.2 Les produits dérivés

En finance, un produit dérivé ou contrat dérivé ou encore derivative product, est un contrat entre deux parties, un acheteur et un vendeur, qui fixent des flux financiers futurs fondés sur ceux d'un actif sous-jacent, réel ou théorique, généralement financier. On distingue notamment les swaps, warrants, forwards, futures et options.

Un actif sous-jacent est un actif sur lequel porte une option ou plus largement un produit dérivé. Il peut être financier (actions, obligations, bons du Trésor, contrats à terme, devises, indices boursiers...) ou physique (matières premières agricoles ou minérales...).

options Les options sont échangées sur les deux types de marché. Il en existe de deux types. Une option d'achat (call), donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu. On précise qu'ait appelé actif sous-jacent, tout actif sur lequel porte une option ou plus largement un produit dérivé. Une option de vente (put), donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu.
Ce prix est appelé prix d'exercice ; la date maximale à laquelle le droit peut-être exercé est la date d'échéance. Si l'exercice peut être effectué à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite américaine. Par contre, si l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance, elle est dite européenne.
Une option d'achat (call) est dans la monnaie, en jeu, ou in the money en anglais, lorsque le prix d'exercice est inférieur au cours du sous-jacent (je peux acheter ce sous-jacent moins cher en exerçant mon Call que si je l'achetais sur le marché). Elle est à la monnaie, à parité, ou at the money en anglais, quand le prix d'exercice est égal au cours du sous-jacent (cela m'est égal d'exercer ou non mon Call). Elle est hors la monnaie, hors jeu, ou out of the money en anglais, si le prix d'exercice est supérieur au cours du sous-jacent (je n'ai pas intérêt à exercer mon droit d'achat).
À l'inverse, une option de vente (put) est dans la monnaie lorsque le prix d'exercice est supérieur au cours du sous-jacent (je peux vendre ce sous-jacent plus cher en exerçant mon put que si je le vendais sur le marché).

Les composantes du prix d'une option La valeur de l'option est communément partagée en valeur intrinsèque et valeur temps.
La valeur intrinsèque : Elle représente le gain qui serait obtenu si l'option était exercée immédiatement. Elle est toujours positive ou nulle, car une option est un droit et non une obligation.
Lorsque l'option est dans la monnaie, sa valeur intrinsèque est positive.
Lorsque l'option est à la monnaie ou hors la monnaie, sa valeur intrinsèque est nulle.
La valeur temps : est en quelque sorte la valeur d'espoirs de l'option. Valeur temps = Valeur de l'option - Valeur intrinsèque. Cette valeur décroît avec le temps.

Les déterminants du prix d'une option L'évaluation d'une option (un droit d'acheter ou de vendre) est l'estimation de la prime à débourser pour l'acquérir qui représente la probabilité d'exercer celle-ci : plus l'exercice est probable, plus l'option sera chère.
Cette valeur théorique dépend de divers facteurs, notamment :
- la différence entre le prix d'exercice et le prix courant (cours de bourse) de l'actif sous-jacent ;
- la durée restant à courir avant l'échéance de l'option (maturité) ;
- le taux d'intérêt applicable à cette durée ;
- la volatilité de ce cours (et aussi du cours de l'option elle-même) ;

- le type d'options.

Swaps, warrants, forwards et futures

Swaps Il s'agit d'un contrat d'échange de flux financiers entre deux parties, qui sont généralement des banques ou des institutions financières.

Warrants Un Warrant est un contrat transférable qui confère à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une quantité donnée d'un actif spécifique, à un prix déterminé d'avance (le prix d'exercice ou strike), à la date d'échéance (ou maturité) du contrat (Warrant européen) ou à tout moment jusqu'à cette date (Warrant américain). Il appartient à la famille des produits listés, comme les obligations, les actions ou les certificats.

Forwards Il s'agit d'un accord d'acheter ou de vendre un actif à un prix et une date future précisée dans le contrat. les contrats forwards sont négociés de gré à gré, entre banques et institutions financières, de plus, ils sont des contrats à terme non standardisés.

Futures La définition des contrats futures est identique à celle des contrats forwards la seule différence, c'est qu'ils sont négociés sur un marché organisé, localisé à un endroit bien précis.

1.2.3 Rappel de calcul stochastique

Définition 1.2.1 *Un processus (aléatoire) X sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille de v.a. aléatoires* $(X_t)_{t\in[0,T]}$. *C'est donc une fonction de 2 variables :*

$$X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}.$$

Définition 1.2.2 *Soient E et F des espaces mesurables munis de leurs tribus respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.*
Une fonction $f : E \to F$ est dite $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-mesurable si la tribu image réciproque par f de la tribu $\mathcal{F}$ est incluse dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire si :

$$\forall B \in \mathcal{F}, \, f^{-1}(B) \in \mathcal{E}.$$

Définition 1.2.3 *Une filtration est une suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ $\forall s \leq t$.*

Remarque 1.2.4 *$\mathcal{F}_t$ représente la quantité d'information disponible à l'instant t ; il est logique que cette quantité augmente avec le temps.*

Définition 1.2.5 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *une suite de variables aléatoires. On dit que* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *définie par* $\mathscr{F}_t = \sigma(X_t,\ t\geq 0)$ *est la filtration naturelle de la suite* $(X_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.2.6 *On dit que le processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* $\mathscr{F}_t-$*adapté si, pour tout* t, *la variable aléatoire* X_t *est* $\mathscr{F}_t-$*mesurable.*

Définition 1.2.7 *Un processus aléatoire* M *est une* $\mathscr{F}_t-$*martingale si*
1) M *est* $\mathscr{F}_t-$*adapté.*
2) pour tout $t\leq T$, $M_t\in\mathscr{L}^1(\Omega)$, *i.e* $\mathbb{E}[|M_t|]\leq\infty$.
3) $\mathbb{E}[M_t/\mathscr{F}_s]=M_s$ *pour tout* $s\leq t$.
Une sur-martingale et une sous-martingale sont des processus qui vérifient les deux premières propriétés et pour tout $s\leq t$ *respectivement* $\mathbb{E}[M_t/\mathscr{F}_s]\leq M_s$ *et* $\mathbb{E}[M_t/\mathscr{F}_s]\geq M_s$.

Définition 1.2.8 *Un processus stochastique* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est appelé mouvement brownien (standard) si ses trajectoires sont continues,* $B_0=0$ *et*
1) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0=t_0<t_1<...<t_n$, *la suite* $\left(B_{t_1};B_{t_2}-B_{t_1};...;B_{t_n}-B_{t_{n-1}}\right)$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes.*
2) pour tout $0<s<t$, *la loi de* B_t-B_s *est la loi* $\mathcal{N}(0,t-s)$.

Théorème 1.2.9 *Le Mouvement Brownien existe.*
Preuve. *Ce résultat non évident est admis. La plus grosse difficulté réside dans l'obtention de la continuité du Mouvement Brownien. Le Mouvement Brownien peut être vu comme limite de marches aléatoires sur des pas de temps de plus en plus courts.* ∎

Définition 1.2.10 *On appelle processus d'Itô, un processus* $X=(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t,$$

avec
1) $K=(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $H=(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *sont des processus* $\mathscr{F}_t-$*adaptées.*
2) $\mathbb{P}\left(\int_0^T |K_s|\,ds<\infty\right)=1.$
3) $\mathbb{P}\left(\int_0^T |H_s|^2\,ds<\infty\right)=1.$

Lemme 1.2.11 ***(d'Itô)*** *Soit* X *un processus d'Itô, c'est à dire tel que* $dX_t=K_tdt+H_tdB_t$ *et* $f\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. *Alors* $\forall 0\leq t\leq T$,

$$df(t,X_t)=\left(\frac{\partial f}{\partial X}(t,X_t)\ K_t+\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t,X_t)\ H_t^2\right)dt+\frac{\partial f}{\partial X}(t,X_t)\ H_t\ dB_t. \tag{1.1}$$

Lemme 1.2.12 ***(de Fatou)*** *Soit* $(E,\mathscr{A},\mu)$ *un espace mesuré. Pour toute suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions mesurables sur* E *à valeurs dans* $[0,+\infty[$, *la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a :*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Lemme 1.2.13 *Une martingale locale minorée est une sur-martingale.*

Preuve. Soit X une martingale locale minorée c'est à dire pour laquelle il existe une constante $c \geq 0$ telle que $X_t \geq -c$. Nous supposons que X est positive. Soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite localisante pour X. On a, si $0 \leq s \leq t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme X^{τ_n} est une martingale,

$$\mathbb{E}\left(X_{t\wedge\tau_n} \mid \mathscr{F}_s\right) = X_{s\wedge\tau_n},$$

et le lemme 1.2.12 donne, puisque $\tau_n \to +\infty$,

$$\mathbb{E}\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_{t\wedge\tau_n} \mid \mathscr{F}_s\right) = \liminf_{n\to\infty} X_{s\wedge\tau_n} = X_s,$$

ce qui montre que X est une sur-martingale. ■

Théorème 1.2.14 ***(de Radon-Nikodym)*** *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ deux probabilités sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F})$ alors $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}^*$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$) ssi il existe une variable aléatoire $Z \geq 0, \mathscr{F}$ −intégrable vérifiant :*

$$E_{\mathbb{P}}[Z] = 1 \text{ tel que } \forall A \in \mathscr{F},\ \mathbb{P}^*(A) = E_{\mathbb{P}}[Z 1_A].$$

On appelle Z la densité de Radon Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{P}^*$, elle est généralement notée :

$$Z = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}.$$

i.e

$$\mathbb{P}^*(A) = \int_A Z d\mathbb{P}.$$

Théorème 1.2.15 ***(de Girsanov)*** *Soit $\left(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ un espace probabilisé, muni de la filtration naturelle par rapport au mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$. Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté tel que :*

$$\int_0^t Y_s^2 ds < \infty, \mathbb{P} - ps.$$

Et soit le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ défini par :

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t Y_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds\right).$$

Si $\mathbb{P}^* = Z_t \mathbb{P}$ est une mesure de probabilité.
Alors, le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ défini par :

$$W_t = B_t - \int_0^t Y_s ds,$$

est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{P}^*$.

1.3 Le modèle de Black-Scholes

1.3.1 Présentation du Modèle

Le modèle de Black-Scholes voir[9] est, à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué, l'autre pas. Typiquement, l'actif risqué est une action (l'action sous-jacente à l'option) tandis que l'actif non risqué s'apparente à une obligation. À l'instant t, le prix de l'obligation est R_t et le prix de l'action est S_t. L'évolution de l'obligation est relativement simple puisque l'on suppose que

$$dR_t = r_t R_t dt \quad \text{où} \quad R_t = R_0 e^{\int_0^t r_s ds}, \tag{1.2}$$

$r_t > 0$ représente le taux d'intérêt instantané. Nous supposerons toujours que $R_0 = 1$.
Le prix de l'action, $\{S_t\}_{t\geq 0}$, est régi par l'équation différentielle stochastique (EDS en abrégé)

$$dS_t = S_t\left(\mu_t dt + \sigma_t dB_t\right). \; S_0 > 0 \text{ donné,} \tag{1.3}$$

où μ_t est un paramètre réel, et $\sigma_t \geq 0$; le paramètre σ s'appelle la volatilité. $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et nous notons $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. En ce qui concerne les hypothèses, nous supposerons dans la suite que les processus r, μ et σ sont progressivement mesurables et que, pour tout $T \geq 0$,

$$\mathbb{P} - \text{p.s.}, \qquad \int_0^T \left\{r_t + |\mu_t| + \sigma_t^2\right\} dt < +\infty.$$

En outre, nous supposons également le processus σ borné.
On obtient à l'aide de la formule d'Itô,

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right\} \exp\left\{\int_0^t \mu_s ds\right\}. \tag{1.4}$$

Dans le modèle de Black-Scholes originel, les paramètres r, μ et σ sont des constantes. On a dans ce cas

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right). \; S_0 > 0 \text{ donné.} \tag{1.5}$$

En posant $f(S_t, t) = \ln S_t$, On obtient grâce à la formule d'Itô (1.1)

$$d(\ln S_t) = \frac{1}{S_t} S_t \mu dt - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2} S_t^2 \sigma^2 dt + \frac{1}{S_t} S_t \sigma dB_t,$$

puis, nous avons

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t.$$

Finalement, nous obtenons

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}.$$

1.3.2 Stratégie de Portefeuille Auto-Finançant, et hypothèse d'A.O.A

Une stratégie de portefeuille consiste à l'investissement à tout instant $t \in [0,T]$ dans une quantité notée ϕ_t d'actifs sans risque R et d'une quantité ψ_t d'actifs risqué S. La valeur du portefeuille est donnée par :

$$\pi_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t.$$

On suppose que le processus (ϕ,ψ) est progressivement mesurable. Le fait que (ϕ_t,ψ_t) soit adapté signifie que l'agent, pour déterminer la stratégie qu'il va adopter, n'anticipe pas sur le futur : il ne dispose que de l'information jusqu'à l'instant t qui est véhiculée par $\mathscr{F}_t$. Signalons d'autre part que dans ce modèle ϕ_t et ψ_t sont des réels ; lorsqu'ils sont négatifs, l'agent contracte une dette libéllée dans l'actif correspondant.
Un tel couple de processus s'appelle une stratégie de financement. En fait, nous ne considèrerons que des stratégies auto-financées c'est à dire pour lesquelles nous avons :

$$d\pi_t = \phi_t dR_t + \psi_t dS_t.$$

La signification de l'auto-financement est la suivante : à l'instant $t = 0$, l'agent investit la somme π_0 dans le marché puis au cours du temps, il fait évoluer la répartition des titres dans son portefeuille. Il n'y a ni apport de fonds ni retrait d'argent pour consommation. L'équation d'auto-financement nécessite une petite hypothèse technique.

Définition 1.3.1 *Une stratégie auto-financée est un couple de processus (ϕ,ψ) progressivement mesurable vérifiant $\mathbb{P}$-p.s.*

$$\int_0^T \left\{r_t\left|\phi_t\right| + \sigma_t^2\left|\psi_t\right|\right\} dt < +\infty$$

et tel que le processus $\pi_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t$ satisfait

$$d\pi_t = \phi_t dR_t + \psi_t dS_t, \quad t \geq 0.$$

Définition 1.3.2 *Une stratégie de portefeuille **auto-finançant** est une stratégie dans laquelle il n'y a pas d'ajout ou de retrait d'argents dans le portefeuille entre le temps t et $t+1$.*

On utilise la notation suivante : si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est un processus adapté, on note X_t^a la valeur actualisée soit $X_t^a = \frac{X_t}{R_t}$. On note a_t le coefficient d'actualisation à l'instant t soit $a_t = \frac{1}{R_t}$.La formule d'intégration par parties donne

$$d\pi_t^a = -r_t\pi_t^a dt + a_t d\pi_t, \qquad dS_t^a = -r_t S_t^a dt + a_t dS_t = -r_t a_t S_t dt + a_t dS_t.$$

On a alors, comme $\pi_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t$,

$$\psi_t dS_t^a = -r_t a_t \left(\pi_t - \phi_t R_t\right) dt + a_t \psi_t dS_t = -r_t \pi_t^a dt + a_t \left(\phi_t dR_t + \psi_t dS_t\right).$$

On en déduit immédiatement le lemme suivant

Lemme 1.3.3 *Soit (ϕ,ψ) une stratégie. (ϕ,ψ) est autofinancée si et seulement si $d\pi_t^a = \psi_t dS_t^a$.*

Ce petit lemme possède une conséquence importante : une stratégie autofinancée est entièrement caractérisée par la valeur initiale du portefeuille π_0 et le processus ψ_t.En effet, une stratégie est autofinancée si et seulement si

$$\pi_t^a = \pi_0 + \int_0^t \psi_u dS_u^a.$$

On obtient alors ϕ_t via la relation

$$\phi_t = \pi_t^a - \psi_t S_t^a = \pi_0 + \int_0^t \psi_u dS_u^a - \psi_t S_t^a. \tag{1.6}$$

En vertu de ce lemme, une stratégie autofinancée sera désignée par le couple (x,ψ), x représentant la valeur initiale du portefeuille associée via la relation (1.6). Si besoin, nous noterons $\pi_t^{x,\psi}$ la valeur du portefeuille correspondant à la stratégie autofinancée (x,ψ) mais la plupart du temps la référence à (x,ψ) sera omise.

Définition 1.3.4 *Une stratégie autofinancée, (x,ψ), est dite admissible si pour tout $t \geq 0$, $\pi_t^{x,\psi} \geq 0$. Elle est dite minorée, s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que*

$$\forall t \geq 0, \quad \pi_t^a \geq -c.$$

Une opportunité d'arbitrage ou plus simplement un arbitrage est un moyen de gagner de l'argent sans prendre aucun risque en particulier sans mise initiale. Cela se traduit par la définition suivante.

Définition 1.3.5 *Un **arbitrage** sur la période $[0,T]$ est un portefeuille auto-finançant π de valeur nulle en $t=0$ dont la valeur π_T en T est supérieure ou égale à 0 avec une probabilité strictement positive.*

$$\pi_0 = 0, \quad \pi_T \geq 0 \ \text{ et } \ \mathbb{P}(\pi_T > 0) > 0.$$

La première condition signifie que l'on part de rien, la seconde que l'on est sûr de ne pas perdre d'argent et la troisième qu'avec une probabilité strictement positive, on fait un réel profit.
On imagine sans peine que les gens qui tentent de réguler le marché cherchent à tout prix à proscrire les opportunités d'arbitrage. En effet, si de telles opportunités sont admises le marché ne tarde pas à exploser . Une hypothèse communément faite est donc celle d'absence d'opportunité d'arbitrage désigné par (**A.O.A**) dans la suite.

Définition 1.3.6 *l'hypothèse fondamentale appelée absence d'opportunité d'arbitrage (**A.O.A**) suppose qu'il est impossible de gagner de l'argent sans prendre de risque à l'instant initial.*

$$\{\pi_0 = 0 \ \ et \ \ \pi_T \geq 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(\pi_T > 0) = 0.$$

Définition 1.3.7 *Considérons un marché dans lequel l'hypothèse d'**A.O.A** est vérifiée. On peut en déduire deux résultats*
1) Si deux actifs financiers X et Y ont le même flux terminal $X_T = Y_T$, alors $\forall\, t \leq T$ on a $X_t = Y_t$.
2) Si $X_T \leq Y_T$, alors $\forall\, t \leq T$ on a $X_t \leq Y_t$.

1.3.3 Probabilité Risque Neutre et Marché Complet

Pour les modèles financiers discrets , il y a un résultat très important qui dit que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$. Rappelons qu'une probabilité risque neutre est une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathscr{F}_T$ et telle que $\left\{S_t^a, 0 \leq t \leq T\right\}$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale. Ce résultat est-il encore vrai pour les modèles continus ? Comme nous allons le voir, l'existence d'une probabilité risque neutre entraîne toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage mais la réciproque est fausse. Il faut renforcer l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage pour parvenir à construire une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ Je vous renvoie aux travaux de F. Delbaen et W. Schachermayer [22],[23].Contentons-nous de prouver la première implication et d'essayer de percevoir la difficulté de la seconde.
Supposons donc l'existence d'une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$. Si on considère une stratégie minorée ψ telle que $\pi_0 = 0$. On a $\pi_t^a = \int_0^t \psi_u dS_u^a$; sous $\mathbb{P}^*$, S_t^a (la valeur actualisé de S_t) est une martingale et donc π_t^a est une martingale locale comme intégrale stochastique par rapport à une martingale. De plus, π_t^a reste minorée par une constante. Or une martingale locale minorée est une sur-martingale (c'est une conséquence du lemme 1.2.12. Par suite, nous avons

$$\mathbb{E}^*\left[\pi^a(T)\right] \leq \mathbb{E}^*\left[\pi^a(0)\right] = \pi_0 = 0.$$

Pour un arbitrage, on a $\pi^a(T) \geq 0$ $\mathbb{P}^*$ p.s. et donc $\mathbb{E}^*[\pi^a(T)] = 0$ puis $\pi^a(T) = 0$ $\mathbb{P}^*$ p.s. Ceci contredit le fait que $\mathbb{P}[\pi_T > 0] > 0$. Il n'y a donc pas d'arbitrage.
Essayons de percevoir la difficulté de l'implication réciproque. Soit $\mathbb{P}^*$ une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_T$ et donc sur $\mathscr{F}_t$ pour tout $t \in [0, T]$. Si on note Z_t la densité de $\mathbb{P}^*$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_t$, Z_t (densité de Radon-Nikodym voir théorème 1.2.14 est une $\mathbb{P}$-martingale strictement positive. Il existe donc un processus $\{h_t\}_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurable tel que

$$\int_0^T h_s^2 ds < +\infty, \qquad \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = Z_t = \exp\left\{\int_0^t h_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2 ds\right\}$$

D'après le théorème 1.2.15, le processus $W_t = B_t - \int_0^t h_s ds$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$. D'autre part, nous avons

$$dS_t^a = S_t^a \left\{ \left(\mu_t - r_t\right) dt + \sigma_t dB_t \right\} = S_t^a \left\{ \left(\mu_t - r_t + \sigma_t h_t\right) dt + \sigma_t dB_t \right\}.$$

Si donc $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre, S_t^a est une $\mathbb{P}^*$-martingale, et l'unicité de la décomposition des processus d'Itô, donne

$$\mu_t - r_t + \sigma_t h_t$$

C'est précisément ce que fournit l'absence d'opportunité d'arbitrage : un processus θ tel que $\sigma_t \theta_t = \mu_t - r_t$. Mais en supposant que $\sigma_t > 0$, on a nécessairement $\theta_t = -h_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$ et l'absence d'opportunité d'arbitrage ne donne pas d'information sur ce dernier processus. Or notre hypothèse de départ, $\mathbb{P}^*$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, ce qui est équivalent à

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^T h_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T h_s^2 ds\right\}\right] = 1,$$

puisqu'une sur-martingale d'espérance constante est une martingale.
Nous venons de voir qu'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, si et seulement si il existe un processus progressivement mesurable θ tel que

$$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \quad \int_0^T \theta_s^2 ds < +\infty, \quad \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right\}\right] = 1.$$

où, $W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$.
Dans le modèle de Black-Scholes originel, les paramètres r, μ et σ sont des constantes.
En utilisant la prime de risque $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ dans le modèle de Black-Scholes (1.5), on voit que la dynamique du prix de l'actif risqué s'écrit :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t \left(\theta dt + dB_t\right).$$

On prenons

$$dW_t = \theta dt + dB_t,$$

nous obtenons

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

On note S_t^a la valeur actualisée de S_t

$$S_t^a = \frac{S_t}{R_t} = e^{-rt} S_t.$$

On obtient

$$dS_t^a = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t,$$

puis, en remplaçant dS_t par sa valeur, on a :

$$dS_t^a = -re^{-rt}S_t dt + re^{-rt}S_t dt + \sigma e^{-rt}S_t dW_t.$$

Finalement, nous obtenons la dynamique du prix actualisé S_t^a sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$:

$$dS_t^a = \sigma S_t^a dW_t, \text{ i.e. } S_t^a = S_0 \exp\left\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}. \quad (1.7)$$

Ceci signifie que le prix actualisé S_t^a est une intégrale stochastique par rapport au $\mathbb{P}^*$-mouvement brownien W_t et est donc une $\mathbb{P}^*$-martingale. On dit que $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre ou probabilité martingale.
De manière générale, on introduit alors la définition suivante.

Définition 1.3.8 *Une probabilité $\mathbb{P}^*$ est appelée probabilité risque-neutre ou probabilité martingale si $\mathbb{P}^*$ est équivalente à $\mathbb{P}$ et si le prix actualisé $S_t^a = e^{-rt}S_t$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.*

On vient ainsi de voir l'existence d'une probabilité risque-neutre dans le modèle de Black-Scholes. Ce résultat d'existence est en fait trés général dans les modèles en temps continu et découle comme pour les modèles discrets de la condition d'A.O.A. Il est connu sous le nom de premier théorème fondamental de la finance et souligne l'importance du concept de probabilité martingale.

(A.O.A) Il existe une probabilité risque-neutre.

Remarque 1.3.9 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on se convainc aisément, qu'il n'y a qu'une manière de rendre le processus de prix actualisé martingale, en faisant de $W_t = B_t + \theta t$ un mouvement Brownien. Ceci implique l'unicité d'une probabilité risque-neutre, à savoir la probabilité $\mathbb{P}^*$.*

Maintenant, nous allons transformer l'équation différentielle stochastique du prix de l'action $\{S_t\}_{t\geq 0}$:

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right).$$

On supposons la transformation logarithmique des prix des actifs risqués

$$X_t = f(S_t, t) = \log(S_t),$$

alors, on obtient grâce à la formule d'Itô (1.1)

$$dX_t = \frac{1}{S_t}S_t \mu dt - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}S_t^2\sigma^2 dt + \frac{1}{S_t}S_t\sigma dB_t,$$

puis, nous avons

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t. \tag{1.8}$$

On prenons

$$dW_t = \theta dt + dB_t, \text{ où } \theta = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Ensuite, en remplace dans (1.8), nous obtenons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t.$$

Définition 1.3.10 *Un produit financier est dit réplicable, ou atteignable, s'il existe une stratégie de portefeuille auto-finançant de couverture de ce produit. En d'autres termes, le produit financier S est dit réplicable si l'on peut construire un portefeuille qui dépend des autres produits du marché et qui a chaque instant t vaut S_t. Pour construire ce portefeuille, on achète une certaine quantité de différents produits et on vend, une certaine quantité d'autres produits dans le but d'avoir une valeur de portefeuille égale à S.*

Définition 1.3.11 *Considérons un marché dans lequel l'hypothèse d'**A.O.A** est vérifiée. Ce marché est dit complet si tout produit financier est réplicable. Dans la suite le marché sera supposé complet.*

Comme dans les modèles discrets, nous avons le résultat général suivant : s'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, le marché est $\mathbb{P}^*$–complet si et seulement si $\mathbb{P}^*$ est l'unique probabilité risque neutre. Je vous renvoie à l'article de J. Harrison et R. Pliska [29].

1.3.4 L'Équation de Black-Scholes

On s'intéresse à une option européenne, qui rapporte à son détenteur $H = h(S_T)$ à l'échéance T (où h est la fonction pay-off). Par exemple, dans le cas d'un Call européen ont à $h(x) = (x-K)^+$.
Le prix de cette option à l'instant t est $E_t, 0 \leq t \leq T$. On a bien sûr $E_T = h(S_T)$.
Il existe une application $V \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, on ait

$$E_t = V(t, S_t). \tag{1.9}$$

Pour obtenir l'équation de Black-Scholes, certaines hypothèses doivent être faites voir[30] :
- le marché est complet,
- le temps est continu,
- le sous-jacent est infiniment divisible (par exemple, on peut acheter 1/1000 de sous-jacent),
- les ventes à découvert sont autorisées,
- il n'y a pas de coup de transaction,

- il existe un taux d'intérêt constant,
- il n'y a pas de dividende (bénéfices distribués aux détenteurs d'actions).

On peut donc appliquer la formule d'Itô à (1.5) , ce qui nous donne :

$$dE_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t,S_t) \; + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t,S_t) \; dB_t. \tag{1.10}$$

Considérons un agent qui investit dans ce marché. Désignons par ϕ_t et ψ_t les nombres respectifs d'obligations et d'actions détenues par l'agent à l'instant t. La valeur du portefeuille de cet investisseur est

$$\pi_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t. \tag{1.11}$$

La richesse π_T associée à l'instant final T est

$$\pi_T = h(S_T), \;\; \text{où } h \text{ est la fonction pay-off,}$$

alors nécessairement

$$\pi_t = E_t, \; 0 \le t \le T,$$

et la condition d'auto-financement s'écrit en temps continu

$$d\pi_t = \phi_t dR_t + \psi_t dS_t. \tag{1.12}$$

D'après (1.2) et (1.5) on en déduit :

$$d\pi_t = \left(r\phi_t R_t + \mu\psi_t S_t \right) dt + \sigma\psi_t S_t dB_t. \tag{1.13}$$

D'après les équations (1.10) et (1.13) on a égalité entre les coefficients de B_t et de dt. D'où,

$$\sigma\psi_t S_t = \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t,S_t). \tag{1.14}$$

Soit encore

$$\psi_t = \frac{\partial V}{\partial S}(t,S_t), \tag{1.15}$$

et en outre

$$r\phi_t R_t + \mu\psi_t S_t = \frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t,S_t) \; + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S_t). \tag{1.16}$$

Et on tire de (1.11) et (1.15) que

$$\phi_t = R_t^{-1} \left(V(t,S_t) - S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t,S_t) \right). \tag{1.17}$$

Donc, la relation (1.16) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) \; + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S_t) + rS_t \frac{\partial V}{\partial S}(t,S_t) - rV(t,S_t) = 0. \tag{1.18}$$

Il s'agit de l'équation différentielle de Black-Scholes.
On suppose la transformation logarithmique des prix des actifs risqués :

$$X_t = \log(S_t), \tag{1.19}$$

alors, on a

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S} = \frac{1}{S}\frac{\partial V}{\partial X},$$

et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial V}{\partial S}\right] = \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{1}{S}\frac{\partial V}{\partial X}\right] = -\frac{1}{S^2}\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial S}\frac{\partial V}{\partial X}.$$

$$= -\frac{1}{S^2}\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}.$$

Donc, l'équation (1.18) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(t,X_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial X}(t,X_t) - rV(t,X_t) = 0. \tag{1.20}$$

1.3.4.1 Inéquation de Black-Scholes pour les options américaines

Contrairement aux options européennes qui ne donne le droit à son d´etenteur de n'exercer qu'à maturité T et de recevoir ainsi un flux terminal $h(S_T)$, une option américaine permet à son détenteur de l'exercer à toute date t avant la maturité T et de recevoir alors le flux $h(S_t)$. Bien entendu, le prix d'une option américaine est supérieure au prix d'une option européenne puisqu'il donne plus de droits.
Dans le cas d'une option américaine, il y a des moments où il est optimal d'exercer. Le simple argument d'arbitrage utilisé pour les options européennes ne conduit plus à une unique valeur pour la rentabilité du portefeuille, mais à un ensemble de valeurs. On peut seulement dire que la rentabilité du portefeuille ne peut pas être supérieure à la rentabilité d'un dépôt en banque, donc $d\pi_t - r\pi_t dt \leq 0$.
Comme une option américaine ne satisfait pas une égalité mais une inégalité, alors nous aurons :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S_t) + rS_t\frac{\partial V}{\partial S}(t,S_t) - rV(t,S_t) \leq 0. \tag{1.21}$$

D'autre part, puisque le détenteur de l'option peut à toute date t, obtenir le flux $h(S_t)$ s'il exerce à cette date, on a

$$V(t,S_t) \geq h(S_t). \tag{1.22}$$

On appelle région de continuation, noté $\mathscr{C}$, l'ensemble des valeurs de date et prix (t,S_t) pour lesquels il n'est pas optimal d'exercer l'option lorsque (t,S_t) est dans cette région. De manière similaire, on appelle région d'exercice, l'ensemble complémentaire noté ε, i.e. l'ensemble des valeurs de date et prix (t,S_t) pour lesquels il est optimal d'exercer l'option.

Intuitivement il sera optimal d'exercer l'option pour les valeurs de (t, S_t) pour lesquels le prix de l'option est égal au payoff en cas d'exercice immédiat, i.e. lorsque $V(t,x) = h(x)$, où $x = S_t$. Autrement dit,

$$\mathscr{C} = \{(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R} \quad : V(t,x) > h(x)\},$$

$$\varepsilon = \{(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R} \quad : V(t,x) = h(x)\}.$$

Ceci signifie que si $(t,x) \in \mathscr{C}$, alors l'EDP de Black-Scholes est valable dans la région de continuation :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) - rV(t,x) = 0.$$

D'autre part, si $(t,x) \in \varepsilon$, on considère seulement l'inégalité de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) - rV(t,x) < 0.$$

Les relations (1.21) , (1.22) s'écrivent sous forme d'inéquation variationnelle :

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rx\frac{\partial V}{\partial x} + rV \geq 0, \quad V \geq h, \\ \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rx\frac{\partial V}{\partial x} + rV\right)(V-h) = 0. \end{cases}$$

.

Avec une condition terminale :

$$V(T,x) = h(x).$$

On peut l'écrire sous une forme plus simple :

$$\min\left[-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rx\frac{\partial V}{\partial x} + rV, V-h\right] = 0, \tag{1.23}$$

auquel il faut rajouter la condition terminale suivante :

$$V(T,x) = h(x).$$

C'est un problème dit à frontière libre où la frontière est la courbe séparant la région d'exercice de la région de continuation. Elle est dite libre car elle est inconnue et fait partie de la solution du problème. Il n'y a pas de formule explicite pour le prix d'une option américaine et on a recours à des méthodes numériques pour résoudre l'inéquation variationnelle (1.23).

Remarque 1.3.12 *Le prix d'un Call américain est égal au prix d'un Call européen, i.e. il n'est jamais optimal d'exercer un Call avant sa maturité. L'exercice prématuré du Call n'est donc pas optimal. On s'intéresse généralement alors au cas du Put américain qui est différent du Put européen.*

Pour plus de détails, voici des références à la littérature [33],[45].

1.4 Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques

1.4.1 Le problème continu

1.4.1.1 Notations et Hypothèses

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ suffisamment régulière. Pour $u, v \in \mathbb{V}$, l'espace $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$, on pose :

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + a_0(x)\, uv \right) dx. \tag{1.24}$$

La forme bilinéaire associée à l'opérateur A est définie par

$$Au = -\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)\, u. \tag{1.25}$$

Les coefficients $a_{i,j}(x)$, $a_j(x)$ et $a_0(x)$ sont supposés être suffisamment réguliers, et

$$a_0(x) \geq \beta > 0; \; (\forall x \in \Omega). \tag{1.26}$$

On suppose que la forme bilinéaire est continue et fortement coercive :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(v,v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbb{V}}^2. \tag{1.27}$$

De plus, on considère un second membre f tel que :

$$f \in L^\infty(\Omega). \tag{1.28}$$

et un obstacle

$$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \text{ tel que } \psi > 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{1.29}$$

1.4.1.2 Problème d'inéquation variationnelle continue

On cherche u la solution de l'inéquation variationnelle suivante (en abrégé I.V.) :
Trouver $u \in \mathbb{V}$ tel que :

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f, v-u), \; \forall v \in \mathbb{V} \\ u \leq \psi; \; v \leq \psi \end{cases}. \tag{1.30}$$

1.4.1.3 Existence et unicité

Théorème 1.4.1 (*cf* **[32]**) *Sous les hypothèses et notations précédentes le problème* (1.30)*admet une solution unique.*

Nous allons étudier quelques propriétés de la solution du problème en commençant par l'introduction de la notion de sous-solutions.

1.4.2 Caractérisation de la Solution Continue comme Enveloppe de Sous-Solutions Continues

Définition 1.4.2 *Soit* $\mathbb{X}$ *l'ensemble des sous- solutions pour l'I.V., c'est -à-dire l'ensemble des* $z \in \mathbb{V}$ *tel que :*

$$\begin{cases} a(z,v) \leq (f,v),\ \forall v \in \mathbb{V},\ v \geq 0 \\ z \leq \psi;\ v \leq \psi \end{cases}. \tag{1.31}$$

Théorème 1.4.3 (*cf* **[21]**) *Sous les hypothèses précédentes , la solution* u *de l'I.V.* (1.30)*est le plus grand élément de* $\mathbb{X}$*.*

Preuve. On a

$$\begin{cases} a(u,\tilde{v}-u) \geq (f,\tilde{v}-u),\quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{V} \\ u \leq \psi;\ \tilde{v} \leq \psi \end{cases},$$

avec

$$\tilde{v} = u - v \text{ où } v \geq 0.$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f,v),\ v \geq 0, \forall v \in V \\ u \leq \psi;\ v \leq \psi \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$u \in X.$$

Par ailleurs, soit $z \in X$ telle que $u \leq z$. Ainsi z est une sous-solution

$$\begin{cases} a(z,v) \leq (f,v),\ v \geq 0, \forall v \in V \\ z \leq \psi;\ v \leq \psi \end{cases},$$

posons

$$v = z - u \geq 0.$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} a(z,z-u) \leq (f,z-u) \\ u \leq \psi, \forall z \in V \end{cases},$$

d'autre part

$$\begin{cases} a(u,z-u) \geq (f,z-u) \\ u \leq \psi, \forall z \in V \end{cases}.$$

Alors, on a

$$a(u,z-u) \geq (f,z-u) \geq a(z,z-u),$$

donc

$$a(z-u,z-u) \leq 0.$$

Comme $a(.,.)$ est une forme bilinéaire coercive, on conclue que

$$z \leq u.$$

■

1.4.3 Propriétés de Monotonie de la Solution Continue

Soient f, $\tilde{f} \in L^{\infty}(\Omega)$ deux second membre et $u = \partial\left(f,\psi\right)$, $\tilde{u} = \partial\left(\tilde{f},\tilde{\psi}\right)$ les solutions respectives de l'I.V. continue (1.30).

Proposition 1.4.4 *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution de l'I.V. est croissante par rapport à l' obstacle ψ et au second membre f , i.e,*

$$\textit{Si } f \leq \tilde{f} \textit{ et } \psi \leq \tilde{\psi} \textit{ alors } \partial\left(f,\psi\right) \leq \partial\left(\tilde{f},\tilde{\psi}\right). \tag{1.32}$$

Preuve. Soient $f \leq \tilde{f}$ et $\psi \leq \tilde{\psi}$, posons $u = \partial(f,\psi)$ d'aprés le théorème 1.4.3, on a :

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f,v) \quad, \forall v \in V,\ v \geq 0 \\ u \leq \psi \leq \tilde{\psi}, v \leq \psi \leq \tilde{\psi}. \end{cases}.$$

Et comme

$$(f,v) \leq (\tilde{f},v),$$

on trouve

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (\tilde{f},v) \quad, \forall v \in V,\ v \geq 0 \\ u \leq \tilde{\psi}, v \leq \tilde{\psi}. \end{cases}.$$

Alors u est une sous-solution pour $\tilde{u} = \partial(\tilde{f},\tilde{\psi})$.
Comme $\tilde{u}$ est la plus grande des sous-solutions, on a :

$$u \leq \tilde{u}.$$

D'où :

$$\partial\left(f,\psi\right) \leq \partial\left(\tilde{f},\tilde{\psi}\right).$$

■

1.4.4 Propriété de Dépendance Lipschitzienne de la Solution Continue

Proposition 1.4.5 *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons*

$$\left\|\partial\left(f,\psi\right)-\partial\left(\tilde{f},\tilde{\psi}\right)\right\|_{\infty}\leq\left\|f-\tilde{f}\right\|_{\infty}. \tag{1.33}$$

Preuve. Posons $\phi=\left\|f-\tilde{f}\right\|_{\infty}$, alors
On a

$$\begin{aligned} f &\leq \tilde{f}+\left\|f-\tilde{f}\right\|_{\infty}, \\ &\leq \tilde{f}+\phi, \end{aligned}$$

et

$$\psi\leq\tilde{\psi}.$$

En utilisant le proposition 1.4.4, nous avons

$$\begin{aligned} \partial\left(f,\psi\right) &\leq \partial\left(\tilde{f}+\phi,\tilde{\psi}\right), \\ &\leq \partial\left(\tilde{f}+\phi,\tilde{\psi}+\phi\right)=\partial\left(\tilde{f},\tilde{\psi}\right)+\phi, \\ \tilde{\psi} &\leq \tilde{\psi}+\phi. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\partial\left(f,\psi\right)\leq\partial\left(\tilde{f},\tilde{\psi}\right)+\phi.$$

Donc

$$u\leq\tilde{u}+\phi.$$

Échangeant les rôles de f et $\tilde{f}$, on obtient de la même façon

$$\tilde{u}\leq u+\phi.$$

Par conséquent,

$$\|u-\tilde{u}\|_{\infty}\leq\left\|f-\tilde{f}\right\|_{\infty}.$$

Et donc on a le résultat désiré. ■

1.4.5 Régularité de la solution de l'I.V

Inégalité de Levy-Stampacchia

Lemme 1.4.6 (cf [6, 7]) *Soient $\psi\in H^1(\Omega)$ telle que $\psi\geq 0$ sur Γ, A un opérateur différentiel associé à la forme bilinéaire $a(.,.)$ et u la solution du problème (1.30) vérifiants*

$$Au\geq g,\ \text{où } g\in L^2(\Omega),\ (\text{au sens de } H^{-1}(\Omega)), \tag{1.34}$$

alors, on a

$$f\geq A\psi\geq f\wedge g=\min\left\{f,g\right\}. \tag{1.35}$$

Théorème 1.4.7 (cf [7, 28]) *D'après les hypothèses du lemme 1.4.6, on a que $u\in W^{2,p}(\Omega)$; $2\leq p<\infty$, $Au\in L^{\infty}(\Omega)$.*

CHAPITRE 2

Comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle issue du problème de l'option américaine.

2.1 Introduction

La formalisation du problème de l'option américaine en une inéquation variationnelle d'évolution, et sa discrétisation par des méthodes numériques, n'est apparu qu'assez tardivement dans l'article de Jaillet, Lamberton et Lapeyre voir [30]. Peu après, les livres de Wilmott, Dewynne et Howison voir [45],[46] ont rendu beaucoup plus accessible la tarification par P.C.L du problème de l'option américaine. Pour les problèmes à frontière libre plusieurs résultats numériques ont été obtenus pour les inéquations variationnelles et quasi variationnelles elliptiques et d'évolutions voir [11],[12],[14],[15]. Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au comportement asymptotique de l'I.V issue du problème d'option américaine où l'on a discrétisé l'espace $H^1(\Omega)$ par un espace $V^h \in H^1(\Omega)$ construit à partir des polynômes de degré 1 et le temps par le θ-schéma, puis on a donner une estimation d'erreur entre la solution du problème continue et la solution du problème discret donnée par :
Si $\theta \geq \frac{1}{2}$, on a

$$\left\| u_h^{\theta,n} - u^{\infty} \right\|_{\infty} \leq C \left[h^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \right)^n \right],$$

et si, $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, on a

$$\left\| u_h^{\theta,n} - u^{\infty} \right\|_{\infty} \leq C \left[h^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta(1-2\theta)} \right)^n \right].$$

On a utilisé la norme uniforme puisque c'est une norme réaliste, qui nous donne l'approximation ci-dessus. Cela nous permet d'avoir une vision sur la frontière libre chose cruciale dans la pratique des options américaines.

2.2 Formulation du problème de l'option américaine comme inéquation variationnelle

Dans cette section, nous rappelons le contexte de notre problème. Une option américaine est un contrat qui donne le droit à son détenteur de recevoir une prime $h\left(S_t^{(i)}\right)$ à tout moment $t \in [0,T]$, où $T < +\infty$. Cette prime est alors donnée en fonction des prix $\left(S_t^{(i)}\right)_{i=1,\dots,N}$ à l'instant t de N produits financiers constituant l'actif sous-jacent. Étant donné que ces prix sont strictement positifs, nous supposons que

$$X_t^{(i)} = \log\left(S_t^{(i)}\right) \text{ pour } i = 1,\dots,N, \tag{2.1}$$

et nous exprimons la prime sous la forme suivante :

$$h\left(S_t^{(i)}\right) = \psi\left(X_t^{(i)}\right), \tag{2.2}$$

où

$$\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ est une fonction régulière donnée.}$$

Nous supposons que l'équation différentielle stochastique suivante est satisfaite par la transformation logarithmique des prix :

$$dX_t^{(i)} = \left(r - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}^2\right)dt + \sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}dW_t^{(j)}, i = 1,\dots,N, \tag{2.3}$$

où $r > 0$ est le taux d'intérêt,$(\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ est une matrice inversible appelée matrice de volatilité et $\left(W_t^{(j)}\right)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien standard de dimension N définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}^*)$.

2.2.1 Le problème continu

Sous certaines hypothèses sur les marchés financiers (absence d'opportunité d'arbitrage) voir [30],[33] et les hypothèses précédentes, $U(x,t)$ est une solution de l'inéquation variationnelle parabolique suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N}\left(r - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}^2\right)\frac{\partial U}{\partial x_i} - rU \le 0, \\ U(x,t) \ge \psi(x), \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N}\left(r - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}^2\right)\frac{\partial U}{\partial x_i} - rU\right)\left(\psi(x) - U(x,t)\right) = 0, \\ U(x,T) = \psi(x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.4}$$

Maintenant, nous allons donner l'inéquation variationnelle associée au problème de l'option américaine sous une forme plus compacte, où l'on commence par donner de nouvelles notations et imposer certaines conditions.
Par le changement de variable $U(t,x) = u(T-t,x)$, le problème (2.4) devient : trouver $u \in K$ solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au \geq f \quad \text{pour } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.5}$$

où K est un ensemble convexe fermé défini comme suit :

$$\mathbb{K} = \left\{ v(t,x) \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right),\ v(t,x) \geq \psi(x),\ v(0,x) = \psi(x) \text{ dans } \Omega \right\}, \tag{2.6}$$

avec

$$\psi(x) \in H^1(\Omega), \tag{2.7}$$

et Ω un domaine borné régulier dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, avec frontière Γ.
A est un opérateur défini dans $H^1(\Omega)$ par :

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u, \tag{2.8}$$

et dont les coefficients : $a_{i,j}, b_j, a_0$, où $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq N$ satisfaisaient les conditions suivantes :

$$a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ik} \sigma_{jk};\ a_0 = r \geq \beta > 0, \text{ où } \beta \text{ est une constante.} \tag{2.9}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j \geq \gamma |\varepsilon|^2,\ \ \varepsilon \in \mathbb{R}^N,\ \gamma > 0. \tag{2.10}$$

$$b_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}^2 - r. \tag{2.11}$$

f est une fonction artificielle.
On peut reformuler le problème (2.5) par l'inéquation variationnelle parabolique suivante :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u \right) + a(u, v-u) \geq \left(f, v-u \right),\ \ v \in \mathbb{K}, \tag{2.12}$$

où $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue associée à l'opérateur A défini dans (2.8), à savoir

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0 uv \right) dx. \tag{2.13}$$

Théorème 2.2.1 (*cf* **[36]**) *Si* $\psi \in H^1(\Omega)$, *le problème* (2.12) *admet une unique solution* $u \in K$, *telle que*

$$u \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \text{ and } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.14}$$

2.3 Étude du problème discret

Nous décomposons Ω en triangles et τ_h dénote l'ensemble de tous les éléments, avec $h > 0$ la taille du maillage. Nous supposons que la famille τ_h est régulière et quasi uniforme. Soit V^h l'espace d'éléments finis conformes, et $\mathbb{A}$ la matrice avec des coefficients génériques $a(\varphi_i, \varphi_j)$ où φ_i, $i = \{1, ..., m(h)\}$, sont les fonctions de base de l'espace $\mathbb{V}^h$, définie par $\varphi_i\left(M_j\right) = \delta_{ij}$, où, M_j est un sommet de la triangulation.
Nous introduisons l'espace discret $\mathbb{V}^h$ d'éléments finis construits à partir des polynômes de degré 1 :

$$\mathbb{V}^h = \left\{v_h \in L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right) \cap C\left(0, T; H^1(\Omega)\right), \text{ telle que } v_h\vdots_k \in P_1, k \in \tau_h\right\}, \tag{2.15}$$

et

$$\mathbb{K}^h = \left\{v_h \in \mathbb{V}^h, v_h \geq r_h\psi,\ v_h(0,x) = r_h\psi \text{ dans } \Omega\right\}. \tag{2.16}$$

Nous considérons r_h l'opérateur d'interpolation définie par

$$v_h \in L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right) \cap C\left(0, T; H^1(\Omega)\right),\ r_h v = \sum_{j=1}^{m(h)} v\left(M_j\right)\varphi_j(x). \tag{2.17}$$

Le principe du maximum discret (d.m.p) [cf **[19]**] **:** Nous supposons que la matrice dont les coefficients sont $a(u_i, u_j)$ est une M-matrice.

Théorème 2.3.1 **(**cf **[40])** *Supposons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est faiblement coercive dans $\mathbb{V}^h \subset H^1(\Omega)$. Alors, il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\mu > 0$ telle que*

$$a(u_h, u_h) + \mu \|u_h\|_2 \geq \alpha \|u_h\|_1. \tag{2.18}$$

2.3.1 Discrétisation

Nous discrétisons l'espace $H^1(\Omega)$ par un espace de dimension finie $\mathbb{V}^h \in H^1(\Omega)$ construit à partir des polynômes de degré 1 et pour la régularité de la solution voir [10]. Dans la seconde étape, on discrétise le problème par rapport au temps en utilisant le $\theta-$schéma. Par conséquent, nous recherchons une séquence d'éléments $u_h^k \in \mathbb{K}^h$ qui approche $u_h(t_k)$, $t_k = k\Delta t$, avec donnée initiale $u_h^0 = u_{0h}$.
Nous appliquons la méthode des éléments finis à l'inéquation (2.12), et l'I.V.P semi-discrétisé prend la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h - u_h\right) + a\left(u_h, v_h - u_h\right) \geq \left(f, v_h - u_h\right),\quad v_h \in \mathbb{K}^h. \tag{2.19}$$

Maintenant, nous appliquons le $\theta-$schéma sur le problème semi-discrétisé (2.19) : pour tout $\theta \in [0,1]$ et $k = 1, ..., n$, nous avons

$$\left(\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\Delta t}, v_h - u_h^{\theta,k}\right) + a\left(u_h^{\theta,k}, v_h - u_h^{\theta,k}\right) \geq \left(f^{\theta,k}, v_h - u_h^{\theta,k}\right),\quad v_h \in \mathbb{K}^h, \tag{2.20}$$

où

$$u_h^{\theta,k} = \theta u_h^k + (1-\theta)\, u_h^{k-1},$$
$$f^{\theta,k} = \theta f(t_k) + (1-\theta)\, f(t_{k-1}).$$

Nous avons que $u_h^{\theta,k}$ est admissible car

$$u_h^{\theta,k} = \theta u_h^k + (1-\theta)\, u_h^{k-1} \geq \theta r_h \psi + (1-\theta)\, r_h \psi = r_h \psi.$$

Ainsi, nous pouvons réécrire (2.20) : pour $u_h^{\theta,k} \in \mathbb{K}^h$ et $v_h \in \mathbb{K}^h$

$$\left(\frac{u_h^{\theta,k}}{\theta \Delta t}, v_h - u_h^{\theta,k} \right) + a\left(u_h^{\theta,k}, v_h - u_h^{\theta,k}\right) \geq \left(f^{\theta,k} + \frac{u_h^{k-1}}{\theta \Delta t}, v_h - u_h^{\theta,k} \right). \tag{2.21}$$

Ainsi, notre problème (2.19) est équivalent à l'inéquation variationnelle discrète coercive suivante :

$$b\left(u_h^{\theta,k}, v_h - u_h^{\theta,k}\right) \geq \left(f^{\theta,k} + \mu u_h^{k-1}, v_h - u_h^{\theta,k}\right),\ v_h \in \mathbb{K}^h, \tag{2.22}$$

telle que

$$b\left(u_h^{\theta,k}, v_h - u_h^{\theta,k}\right) = a\left(u_h^{\theta,k}, v_h - u_h^{\theta,k}\right) + \mu\left(u_h^{\theta,k}, v_h - u_h^{\theta,k}\right), \tag{2.23}$$
$$\mu = \frac{1}{\theta \Delta t} = \frac{n}{\theta T}.$$

2.3.2 Analyse de stabilité du $\theta-$schéma pour l'I.V.P

L'étude de la stabilité du $\theta-$schéma pour le problème de l'option américaine est une adaptation de [12]. Avant d'analyser le cas général où $\theta \in [0,1]$, nous introduisons la définition suivante.

Définition 2.3.2 *On dit que le nombre λ est une valeur propre de la forme bilinéaire $a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ et que $\omega \in V$ est la fonction propre correspondante si*

$$a(\omega, v) = \lambda(\omega, v).$$

Si la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique et coercive, elle a un nombre infini de valeurs propres réelles positives qui forment une suite non bornée ; en outre, ses fonctions propres forment une base pour l'espace V.
Dans le cas discret, les valeurs propres de $a(.,.)$ sont celles qui correspondent aux fonctions propres qui appartiennent au sous-espace $\mathbb{V}^h$, c'est-à-dire que λ_h et ω_h sont liées par la relation :

$$\omega_h \in \mathbb{V}^h \ \ a(\omega_h, v_h) = \lambda_h (\omega_h, v_h),\ \ \forall v_h \in \mathbb{V}^h.$$

Ces valeurs propres sont toutes positives et elles sont au nombre de $m(h)$, où $m(h)$ est la dimension du sous-espace $\mathbb{V}^h$. Les fonctions propres correspondantes forment une base pour le sous-espace $\mathbb{V}^h$ et elles peuvent être choisies de façon à être orthonormales. Cela signifie que, si l'on indique par ω_{ih} la fonction propre qui correspond à la valeur propre λ_{ih}, on a $\left(\omega_h^i, \omega_h^j\right) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, ..., m(h)$. Donc, tout $v_h \in \mathbb{V}^h$ peut être représentée comme suit :

$$v_h = \sum_{i=1}^{m(h)} v_i \omega_h^i. \tag{2.24}$$

Soit $\{\omega_h^i\}$ les vecteurs propres (orthonormales) de $a(.,.)$. Puisque $u_h^k \in \mathbb{K}^h$ nous pouvons écrire :

$$u_h^k = \sum_{i=1}^{m(h)} u_i^k \omega_h^i. \tag{2.25}$$

De plus, soit f_h^k la projection orthogonale de $f^{\theta,k}$ dans $\mathbb{V}^h$, alors

$$f_h^k = \sum_{i=1}^{m(h)} f_i^k \omega_h^i. \tag{2.26}$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la stabilité pour $0 \le \theta < \frac{1}{2}$, choisissant dans (2.21) $v_h = 0$. Anisi, nous avons pour $u_h^{\theta,k} \in \mathbb{K}^h$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_h^k - u_h^{k-1}, u_h^{\theta,k}\right) + a\left(u_h^{\theta,k}, u_h^{\theta,k}\right) \le \left(f^{\theta,k}, u_h^{\theta,k}\right). \tag{2.27}$$

l'inéquation (2.27) est équivalente à

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=1}^{m(h)}\left[u_i^k - u_i^{k-1}\right]\left(\omega_h^i, \omega_h^i\right) + \sum_{i=1}^{m(h)}\left[\theta u_i^k + (1-\theta)\, u_i^{k-1}\right]\ a\left(\omega_h^i, \omega_h^i\right) \le f_i^k. \tag{2.28}$$

Pour tout $i = 1, ..., m(h)$, on a

$$a\left(\omega_h^i, \omega_h^i\right) = \lambda_{ih}\left(\omega_h^i, \omega_h^i\right) = \lambda_{ih}, \tag{2.29}$$

et donc, pour tout $i = 1, ..., m(h)$,

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} + \left[\theta u_i^k + (1-\theta)\, u_i^{k-1}\right]\ \lambda_{ih} \le f_i^k. \tag{2.30}$$

Si l'on résout maintenant par rapport à u_i^k, on trouve :

$$u_i^k \le \frac{1-(1-\theta)\,\lambda_{ih}\Delta t}{1+\theta\lambda_{ih}\Delta t}\ u_i^{k-1} + \frac{\Delta t}{1+\theta\lambda_{ih}\Delta t}\ f_i^k. \tag{2.31}$$

Nous pouvons conclure que pour garantir la stabilité absolue du $\theta-$schéma, l'inégalité suivante doit être satisfaite :

$$\left|\frac{1-(1-\theta)\,\lambda_{ih}\Delta t}{1+\theta\lambda_{ih}\Delta t}\right| < 1. \tag{2.32}$$

c'est-à-dire :

$$-1-\theta\lambda_{ih}\Delta t < 1-(1-\theta)\,\lambda_{ih}\Delta t < 1+\theta\lambda_{ih}\Delta t.$$

Donc,

$$-\frac{2}{\lambda_{ih}\Delta t}-\theta<\theta-1<\theta.$$

La deuxième inégalité est toujours vraie, tandis que la première peut être récrite comme :

$$2\theta-1>-\frac{2}{\lambda_{ih}\Delta t}.$$

Si $\theta\geq\frac{1}{2}$, le terme de gauche est positif ou nul, tandis que celui de droite est toujours négatif ; donc, l'inégalité est vraie pour tout Δt. Si par contre $\theta<\frac{1}{2}$, l'inégalité est satisfaite et, par conséquent, la méthode est stable ssi

$$\Delta t<\frac{2}{(1-2\theta)\,\lambda_{ih}}. \tag{2.33}$$

Puisque cette relation doit être satisfaite par toutes les valeurs propres λ_{ih} de la forme bilinéaire, il suffit de demander qu'elle soit vraie pour la valeur maximale $\lambda_{\max}$.

Lemme 2.3.3 *- Si $\theta\geq\frac{1}{2}$, la θ-méthode est inconditionnellement stable (c-à-d elle est stable pour tout Δt),*
- Si $\theta<\frac{1}{2}$, la θ-méthode est stable seulement pour

$$\Delta t<\frac{2}{(1-2\theta)\,\lambda_{\max}}. \tag{2.34}$$

On peut montrer que

$$\lambda_{\max}\simeq Ch^{-2}. \tag{2.35}$$

et, alors, on peut conclure que si $\theta<\frac{1}{2}$, la méthode est absolument stable ssi

$$\Delta t<\frac{2C}{(1-2\theta)}h^{2}. \tag{2.36}$$

Notez que cette condition est toujours satisfaite si $0\leq\theta<\frac{1}{2}$. Ainsi, en prenant la valeur absolu dans (2.31), nous avons

$$\left|u_i^n\right|\leq\left|u_i^0\right|+\frac{\Delta t}{1+\theta\lambda_{ih}\Delta t}\sum_{k=1}^{n}\left|f_i^k\right|,\quad k=1,\dots,n.$$

Proposition 2.3.4 (cf [40]) *Nous supposons que l'hypothèse de coercivité* (2.18) *est satisfaite avec $\lambda=0$, et pour chaque $k=1,\dots,n$, nous trouvons*

$$\left\|u_h^n\right\|_2^2+\alpha\Delta t\sum_{k=1}^{n}\left\|u_h^k\right\|_1^2\leq C(n)\left(\left\|u_h^0\right\|_2^2+\sum_{k=1}^{n}\Delta t\left\|f^{\theta,k}\right\|_2^2\right), \tag{2.37}$$

où

$$f^{\theta,k}=\theta f(t_k)+(1-\theta)f(t_{k-1}).$$

Preuve. En prenons $v=0$ dans (2.20), on trouve

$$\left(\frac{u_h^k-u_h^{k-1}}{\Delta t},u_h^{\theta,k}\right)+a\left(u_h^{\theta,k},u_h^{\theta,k}\right)\leq\left(f^{\theta,k},u_h^{\theta,k}\right),$$

puis, on a

$$\left(u_h^k,u_h^{\theta,k}\right)+\Delta t a\left(u_h^{\theta,k},u_h^{\theta,k}\right)\leq\Delta t\left(f^{\theta,k},u_h^{\theta,k}\right)+\left(u_h^{k-1},u_h^{\theta,k}\right). \tag{2.38}$$

De la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, on a

$$a\left(u_h^{\theta,k},u_h^{\theta,k}\right)\geq\alpha\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_1^2,$$

et des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on trouve

$$\left(u_h^k,u_h^{\theta,k}\right)\leq\frac{1}{2}\left\|u_h^k\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_2^2,\quad\left(u_h^{k-1},u_h^{\theta,k}\right)\leq\frac{1}{2}\left\|u_h^{k-1}\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_2^2.$$

Donc, l'inéquation (2.38) devient

$$\frac{1}{2}\left\|u_h^k\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_2^2+\alpha\Delta t\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_1^2\leq\Delta t\left(f^{\theta,k},u_h^{\theta,k}\right)+\frac{1}{2}\left\|u_h^{k-1}\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_2^2.$$

On applique maintenant l'inégalité de Young aux termes du second membre, ce qui donne

$$\left(f^{\theta,k},u_h^{\theta,k}\right)\leq\frac{\varepsilon}{2}\left\|f^{\theta,k}\right\|_2^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_2^2.$$

et

$$\left\|u_h^k\right\|_2^2+2\alpha\Delta t\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_1^2\leq\varepsilon\Delta t\left\|f^{\theta,k}\right\|_2^2+\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_2^2+\left\|u_h^{k-1}\right\|_2^2,\qquad k\geq1.$$

Par l'inégalité de Poincaré on a que

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_2^2\leq\frac{\Delta tC_p^2}{\varepsilon}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_1^2$$

Donc en choisissant $\varepsilon=\frac{C_p^2}{\alpha}$ on obtient

$$\left\|u_h^k\right\|_2^2+\alpha\Delta t\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_1^2\leq\left\|u_h^{k-1}\right\|_2^2+\frac{C_p^2\Delta t}{\alpha}\left\|f^{\theta,k}\right\|_2^2,\quad k=1,\ldots,n.$$

Après sommation sur k on tire le résultat cherché.

$$\left\|u_h^n\right\|_2^2+\alpha\Delta t\sum_{k=1}^{n}\left\|u_h^{\theta,k}\right\|_1^2\leq C(n)\left(\left\|u_h^0\right\|_2^2+\Delta t\sum_{k=1}^{n}\left\|f^{\theta,k}\right\|_2^2\right).$$

où $C(n)$ est une constante indépendante de h et Δt, ainsi, nous avons prouvé que le schéma est inconditionnellement stable pour $\theta\geq\frac{1}{2}$. ■

2.4 Existence et unicité de la solution de l'I.V discrète.

Nous considérons que u^∞ et u_h^∞ sont respectivement les solutions stationnaires de l'inéquation variationnelle continue et discrète suivante :

$$b\left(u^\infty, v - u^\infty\right) \geq \left(f + \mu u^\infty, v - u^\infty\right), \ \forall v \in \mathbb{K}, \tag{2.39}$$

$$b\left(u_h^\infty, v_h - u_h^\infty\right) \geq \left(f + \mu u_h^\infty, v_h - u_h^\infty\right), \ \forall v_h \in \mathbb{K}^h. \tag{2.40}$$

où la forme bilinéaire $b(.,.) = a(.,.) + \lambda(.,.)$ satisfaite la condition de coercivité, avec λ une constante arbitraire positive.

Théorème 2.4.1 **(cf [21])** *Sous les hypothèses précédentes, et le principe du maximum discret, il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\left\| u^\infty - u_h^\infty \right\|_\infty \leq C h^2 \left|\log h\right|^2. \tag{2.41}$$

2.4.1 L'application point fixe associé au problème discret (2.22)

$$\begin{aligned} T_h : L_+^\infty(\Omega) &\to \mathbb{K}^h \\ w &\to T_h(w) = \xi_h, \end{aligned} \tag{2.42}$$

où ζ_h est l'unique solution de I.V discrète suivante : Trouver $\xi_h \in \mathbb{K}^h$ telle que

$$b(\xi_h, v_h - \xi_h) \geq \left(f^{\theta,k} + \mu w, v_h - \xi_h\right), \ \forall v_h \in \mathbb{K}^h. \tag{2.43}$$

Lemme 2.4.2 **(cf [14])** *Sous le principe du maximum discret, nous avons si $F \geq \tilde{F}$ et $r_h\psi \geq r_h\tilde{\psi}$, alors, $\xi_h \geq \tilde{\xi}_h$.*

Proposition 2.4.3 *Sous les hypothèses et notations précédentes, si $\theta \geq \frac{1}{2}$, l'application T_h est contractante dans $L^\infty(\Omega)$*

$$\| T_h(w) - T_h(\tilde{w}) \|_\infty \leq \frac{1}{1 + \beta\theta\Delta t} \| w - \tilde{w} \|_\infty. \tag{2.44}$$

Par conséquent, T_h admet un unique point fixe qui coïncide avec la solution de l'I.V (2.22) .

Preuve. Pour $w \in L^\infty(\Omega)$ et $\tilde{w} \in L^\infty(\Omega)$, nous considérons $\xi_h = T_h(w) = \partial_h\left(F^{\theta,k}, r_h\psi\right)$ (respectivement $\tilde{\xi}_h = T_h(\tilde{w}) = \partial_h\left(\tilde{F}^{\theta,k}, r_h\tilde{\psi}\right)$) solution de I.V discrète (2.22) avec le second membre $F^{\theta,k} = f^{\theta,k} + \mu w$ (respectivement $\tilde{F}^{\theta,k} = f^{\theta,k} + \mu\tilde{w}$).
Nous prenons

$$\Phi = \frac{1}{\mu + \beta} \left\| F^{\theta,k} - \tilde{F}^{\theta,k} \right\|_\infty.$$

En outre, nous avons

$$\begin{aligned} F^{\theta,k} &\leq \tilde{F}^{\theta,k} + \left\| F^{\theta,k} - \tilde{F}^{\theta,k} \right\|_\infty, \\ &\leq \tilde{F}^{\theta,k} + \frac{a_0+\mu}{\mu+\beta} \left\| F^{\theta,k} - \tilde{F}^{\theta,k} \right\|_\infty, \end{aligned}$$

$\left(\text{comme } a_0 \geq \beta > 0\right)$

$$F^{\theta,k} \leq \tilde{F}^{\theta,k} + \left(a_0+\mu\right)\Phi.$$

en utilisant le lemme 2.4.2, cela donne

$$\partial_h\left(F^{\theta,k}, r_h\psi\right) \leq \partial_h\left(\tilde{F}^{\theta,k} + \left(a_0+\mu\right)\Phi, r_h\tilde{\psi}\right).$$

D'autre part, on a

$$\partial_h\left(\tilde{F}^{\theta,k}, r_h\tilde{\psi}\right) + \Phi = \partial_h\left(\tilde{F}^{\theta,k} + \left(a_0+\mu\right)\Phi, r_h\tilde{\psi} + \Phi\right).$$

En effet, $\tilde{\xi}_h + \Phi$ est solution de

$$b\left(\tilde{\xi}_h + \Phi, v_h + \Phi - \left(\tilde{\xi}_h + \Phi\right)\right) \geq \left(\tilde{F}^{\theta,k} + \left(a_0+\mu\right)\Phi, v_h + \Phi - \left(\tilde{\xi}_h + \Phi\right)\right),$$

$$\tilde{\xi}_h + \Phi \leq r_h\tilde{\psi} + \Phi,\ v_h + \Phi \leq r_h\tilde{\psi} + \Phi, \forall v_h \in K^h,$$

ainsi,

$$\partial_h\left(F^{\theta,k}, r_h\psi\right) \leq \partial_h\left(\tilde{F}^{\theta,k} + \left(a_0+\mu\right)\Phi, r_h\tilde{\psi}\right) \leq \partial_h\left(\tilde{F}^{\theta,k} + \left(a_0+\mu\right)\Phi, r_h\tilde{\psi} + \Phi\right).$$

Donc

$$\xi_h \leq \tilde{\xi}_h + \Phi.$$

De même, en échangeant les rôles de w et w_h nous avons aussi

$$\tilde{\xi}_h \leq \xi_h + \Phi.$$

Par conséquence,

$$\begin{aligned} \| T_h(w) - T_h(\tilde{w}) \|_\infty &\leq \frac{1}{\mu+\beta} \left\| F^{\theta,k} - \tilde{F}^{\theta,k} \right\|_\infty, \\ &\leq \frac{1}{\mu+\beta} \left\| f^{\theta,k} + \mu w - f^{\theta,k} - \mu\tilde{w} \right\|_\infty, \\ &\leq \frac{\mu}{\mu+\beta} \| w - \tilde{w} \|_\infty, \end{aligned}$$

$$\| T_h(w) - T_h(\tilde{w}) \|_\infty \frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \| w - \tilde{w} \|_\infty.$$

Qui est le résultat souhaité. ■

Remarque 2.4.4 *Si nous posons* $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$*, l'application* T_h *est une contraction dans* $L^{\infty}(\Omega)$

$$\| T_h(w) - T_h(\tilde{w}) \|_{\infty} \frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta(1-2\theta)} \| w - \tilde{w} \|_{\infty}. \tag{2.45}$$

Par conséquent, T_h *admet un unique point fixe qui coïncide avec la solution de l'I.V* (2.24).

Preuve. Dans des conditions de stabilité, nous avons montré que le θ-schéma est stable si et seulement si $\Delta t < \frac{2C}{(1-2\theta)} h^2$.
Ainsi, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \| T_h(w) - T_h(\tilde{w}) \|_{\infty} &\leq \frac{1}{1 + \beta\theta\Delta t} \| w - \tilde{w} \|_{\infty} \leq \frac{1}{1 + \beta\theta\left(\frac{1-2\theta}{2Ch^2}\right)} \| w - \tilde{w} \|_{\infty}, \\ &= \frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta(1-2\theta)} \| w - \tilde{w} \|_{\infty}, \end{aligned}$$

Par conséquence,

$$\| T_h(w) - T_h(\tilde{w}) \|_{\infty} \leq \frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta(1-2\theta)} \| w - \tilde{w} \|_{\infty}.$$

Qui est le résultat souhaité. ■

2.4.2 Algorithme itératif discret

Soit u_h^0 solution de l'équation discrète suivante :

$$b\left(u_h^0, v_h\right) = \left(g^0, v_h\right), \; v_h \in \mathbb{K}^h, \tag{2.46}$$

où, g^0 est une fonction régulière donnée.
Maintenant, nous donnons l'algorithme discret suivant :

$$u_h^{\theta,k} = T_h u_h^{k-1}, \; k = 1, \dots, n, \; u_h^{\theta,k} \in \mathbb{K}^h, \tag{2.47}$$

où, $u_h^{\theta,k}$ est la solution du problème (2.22).

Remarque 2.4.5 *Si nous prenons* $\theta = 1$ *dans* (2.47)*, nous obtenons l'algorithme de Bensoussan-Lions.*

Proposition 2.4.6 *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons l'estimation de la convergence suivante :*
Si $\theta \geq \frac{1}{2}$

$$\left\| u_h^{\theta,k} - u_h^{\infty} \right\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{1 + \beta\theta\Delta t} \right)^k \| u_h^0 - u_h^{\infty} \|_{\infty}, \tag{2.48}$$

et si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$

$$\left\| u_h^{\theta,k} - u_h^{\infty} \right\|_{\infty} \leq \left(\frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta(1-2\theta)} \right)^k \| u_h^0 - u_h^{\infty} \|_{\infty}. \tag{2.49}$$

Preuve. Nous avons pour, $\theta \geq \frac{1}{2}$

$$u_h^\infty = T_h u_h^\infty,$$

$$\left\| u_h^{\theta,1} - u_h^\infty \right\|_\infty = \| T_h u_h^0 - T_h u_h^\infty \|_\infty \leq \frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \| u_h^0 - u_h^\infty \|_\infty .$$

Nous supposons que

$$\left\| u_h^{\theta,k} - u_h^\infty \right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \right)^k \| u_h^0 - u_h^\infty \|_\infty ,$$

comme

$$\left\| u_h^{\theta,k+1} - u_h^\infty \right\|_\infty = \left\| T_h u_h^k - T_h u_h^\infty \right\|_\infty \leq \frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \left\| u_h^k - u_h^\infty \right\|_\infty ,$$

alors, on a

$$\left\| u_h^{\theta,k+1} - u_h^\infty \right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \right)^{k+1} \| u_h^0 - u_h^\infty \|_\infty .$$

Et pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, on peut facilement montrer que

$$\left\| u_h^{\theta,k} - u_h^\infty \right\|_\infty \leq \left(\frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta\,(1-2\theta)} \right)^k \| u_h^0 - u_h^\infty \|_\infty .$$

Qui est le résultat souhaité. ■

2.5 Comportement asymptotique de l'I.V issue du problème de l'option américaine

Cette section est consacrée à la preuve du résultat principal de la présente étude, où nous prouvons le théorème du comportement asymptotique en norme uniforme de I.V parabolique issu du problème de l'option américaine.
Maintenant, nous évaluons la variation en norme L^∞ entre $u_h^\theta(T,x)$, la solution discrète calculée au moment $T = n\Delta t$ et u^∞, la solution continue de (2.39).

Théorème 2.5.1 *Sous les conditions du théorème 2.4.1 et de la proposition 2.4.6, nous avons, pour* $\theta \geq \frac{1}{2}$

$$\left\| u_h^{\theta,n} - u^\infty \right\|_\infty \leq C \left[h^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \right)^n \right],$$

et nous avons, pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$

$$\left\| u_h^{\theta,n} - u^\infty \right\|_\infty \leq C \left[h^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta\,(1-2\theta)} \right)^n \right].$$

où C est une constante indépendante de h et n.

Preuve. Nous avons

$$u_h^{\theta,k} = u_h(t,x) \quad \text{pour } t \in \left](k-1)\Delta t; k\Delta t\right[,$$

et aussi, on a

$$u_h^{\theta,n} = u_h(T,x).$$

alors, nous obtenons

$$\left\| u_h^{\theta}(T,x) - u^{\infty} \right\|_{\infty} = \left\| u_h^{\theta,n} - u^{\infty} \right\|_{\infty} \leq \left\| u_h^{\theta,n} - u_h^{\infty} \right\|_{\infty} + \left\| u_h^{\infty} - u^{\infty} \right\|_{\infty}.$$

En utilisant le théorème 2.4.1 et la proposition 2.4.6, nous avons pour $\theta \geq \frac{1}{2}$

$$\left\| u_h^{\theta,n} - u^{\infty} \right\|_{\infty} \leq C \left[h^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\theta\Delta t} \right)^n \right],$$

et pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, nous avons

$$\left\| u_h^{\theta,n} - u^{\infty} \right\|_{\infty} \leq C \left[h^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{2Ch^2}{2Ch^2 + \beta\theta(1-2\theta)} \right)^n \right].$$

■

CHAPITRE 3

L'approche sous-solution pour le comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle issue du problème de l'option américaine.

3.1 Introduction

Le problème de l'option américaine dans un modèle de Black-Scholes à coefficients constants et sans dividende peut être résolu en considérant l'inéquation variationnelle parabolique suivante (P.V.I), voir [45] :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + AU \geq 0, \quad U \geq \Psi, & \text{pour } (t,x) \in (0,T] \times \Omega \\ \left(\frac{\partial U}{\partial t} + AU\right)(U - \Psi) = 0, & \text{pour } (t,x) \in (0,T] \times \Omega \\ U(t,x) = \Psi(x), & \text{pour } (t,x) \in (0,T] \times \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

avec la condition initiale

$$U(0,x) = \Psi(x), \quad \Psi \in \Omega, \tag{3.2}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$, avec une frontière régulière Γ. $\Psi(x)$ dénoter le payoff.
L'opérateur A est donné par :

$$AU = -\sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ik}\sigma_{jk}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ij}^2 - r\right) \frac{\partial U}{\partial x_j} + rU. \tag{3.3}$$

Pour discrétiser (3.1) par la méthode des éléments finis, nous écrivons l'inéquation variationnelle parabolique liée au problème de l'option américaine sous une forme plus compacte. En supposant qu'il existe une fonction $\hat{\psi}$ qui est C^2, telle que $\hat{\psi} = \Psi$ dans Γ et que $u = U - \hat{\psi}$, nous pouvons reformuler le problème (3.1) par l'I.V.P suivante :
trouver $u \in \mathbb{K}$ solution de

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u\right) + a(u, v - u) \geq \left(f, v - u\right), \quad \forall v \in \mathbb{K}, \tag{3.4}$$

où $\mathbb{K}$ est un ensemble convexe fermé défini comme suit :

$$\mathbb{K} = \left\{ v(t,x) \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\ v(t,x) \geq \psi(x),\ v(0,x) = \psi(x) \text{ dans } \Omega,\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}. \quad (3.5)$$

$$f \text{ est une fonction régulière, } f = -A\hat{\psi} \text{ dans } L^2(\Omega).$$

$$\psi \text{ est un obstacle positif de } W^{1,2}(\Omega), \text{ où } \psi = \Psi - \hat{\psi},$$

la fonction ψ à la même régularité que Ψ, et $\hat{\psi}$ est une fonction suffisamment régulière.
La forme bilinéaire associée à l'opérateur A défini dans (3.3) est donnée par :

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_{,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0 uv \right) dx, \quad (3.6)$$

et les coefficients : $a_{i,j}, b_j, a_0$, où $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$ satisfaisaient les conditions suivantes :

$$a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ik}\sigma_{jk};\ a_0 = r \geq \beta > 0, \text{ où } \beta \text{ est une constante.} \quad (3.7)$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\varepsilon_i\varepsilon_j \geq \gamma |\varepsilon|^2;\ \gamma > 0. \quad (3.8)$$

$$b_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ij}^2 - r. \quad (3.9)$$

La formalisation du problème d'option américaine en une inéquation variationnelle et sa discrétisation par des méthodes numériques, n'est apparu qu'assez tardivement dans l'article de Jaillet, Lamberton et Lapeyre voir [30]. Un peu plus tard, les livres de Wilmott, Dewynne et Howison voir [45],[46] ont rendu beaucoup plus accessible la tarification par P.C.L du problème de l'option américaine. Puis, l'article de Xiao lan Zhang voir [47], et l'article de Feng, Linetsky, Morales, Nocedal voir [24]. Pour les problèmes à frontière libre plusieurs résultats numériques ont été obtenus pour les inéquations variationnelles paraboliques et elliptiques et inéquations quasi variationnelles voir [11],[12],[14],[15]. Dans ce chapitre, nous établissons le comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle liée au problème de l'option américaine en utilisant le schéma semi-implicite combiné avec une approximation par éléments finis et la méthode des sous-solutions. Cette méthode est introduite dans P. Corty-dumont [21], M.Boulbrachene [16], et M.Boulbrachene, P. Corty-dumont [15], qui caractérise la solution continue (Resp. la solution discrète) comme la plus grande des sous-solutions continues (Resp. sous-solutions discrètes) sera cruciale pour prouver le comportement asymptotique en norme uniforme de l'inéquation variationnelle parabolique issue du problème de l'option américaine. La méthode d'approximation développé dans ce chapitre se base sur la construction d'une suite de sous-solutions continues notée $\left(\beta^k\right)_{k\geq 1}$ telle que

$$\beta^k \leq u^k \text{ et } \left\| \beta^k - u_h^k \right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h|^2,\ \forall k = 1,...,n, \quad (3.10)$$

et la construction d'une suite de sous-solutions discrètesnotée $\left(\alpha_h^k\right)_{k\geq 1}$ telle que

$$\alpha_h^k \leq u_h^k \text{ et } \left\|\alpha_h^k - u^k\right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h|^2, \ \forall k = 1,\dots,n, \tag{3.11}$$

ainsi, nous établissons l'estimation suivante

$$\left\|u^k - u_h^k\right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h|^2, \ \forall k = 1,\dots,n. \tag{3.12}$$

Et l'estimation de la convergence du schéma itératif continu et discret

$$\left\|u^k - u^\infty\right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)^k \|u^0 - u^\infty\|_\infty, \tag{3.13}$$

$$\left\|u_h^k - u_h^\infty\right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)^k \|u_h^0 - u_h^\infty\|_\infty. \tag{3.14}$$

Dans cette situation, nous obtenons l'estimation du comportement asymptotique du problème de l'option américaine :

$$\|u_h^n - u^\infty\|_\infty \leq C\left[h^2 |\ln h|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)^n\right]. \tag{3.15}$$

Il est à noter que la construction du second membre f et la méthode d'approximation présentée dans ce chapitre sont tout à fait différentes de celle développée dans le deuxième chapitre.

3.2 Étude du problème continu

3.2.1 Discrétisation en temps

Maintenant, nous appliquons le schéma semi-implicite à l'inéquation variationnelle continue (3.4), nous avons pour $u^k \in \mathbb{K}$, pour tout $k = 1,\dots,n$

$$\left(\frac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t}, v - u^k\right) + a\left(u^k, v - u^k\right) \geq \left(f, v - u^k\right), \ \forall v \in \mathbb{K}, \tag{3.16}$$

où, $\Delta t = \frac{T}{n}$, $t_k = k\Delta t$.
L'inéquation (3.16) est équivalente à

$$b\left(u^k, v - u^k\right) \geq \left(f + \lambda u^{k-1}, v - u^k\right), \ \forall v \in \mathbb{K}, \tag{3.17}$$

telle que

$$\begin{cases} b\left(u^k, v - u^k\right) = \lambda\left(u^k, v - u^k\right) + a\left(u^k, v - u^k\right), \\ \lambda = \frac{1}{\Delta t} = \frac{n}{T}. \end{cases} \tag{3.18}$$

3.2.2 Existence et unicité de l'I.V continue

En utilisant les hypothèses précédentes, nous allons prouver l'existence d'une solution unique pour le problème (3.17) à l'aide du théorème de point fixe de Banach.

3.2.2.1 L'application du point fixe associé à l'I.V continue (3.17)

Nous définissons l'application suivante

$$T : L_{+}^{\infty}(\Omega) \to L_{+}^{\infty}(\Omega) \tag{3.19}$$

$$w \to T(w) = \xi,$$

telle que, ξ est la solution de l'inéquation variationnelle suivant

$$b(\xi, v-\xi) \geq \left(f + \lambda w, v - \xi\right), \quad \forall v \in \mathbb{K}, \tag{3.20}$$

où, $L_{+}^{\infty}(\Omega)$ est le cône positif de $L^{\infty}(\Omega)$.

3.2.2.2 Algorithme itératif continu

Nous choisissons u^0 solution de l'équation continue suivante

$$b\left(u^0, v\right) = (F, v), \quad \forall v \in \mathbb{K}, \tag{3.21}$$

où, F est une fonction régulière donnée.
Maintenant, nous donnons l'algorithme continu suivante :

$$u^k = Tu^{k-1}, \ \ k = 1, \ldots, n, \ \ u^k \in \mathbb{K}, \tag{3.22}$$

où, u^k est solution de l'I.V continue (3.17).

3.2.2.3 Propriété de Monotonie de la Solution Continue

Soient $F = f + \lambda u^{k-1}, \tilde{F} = f + \lambda \tilde{u}^{k-1}$ deux second membre et $u^k = \partial\left(F, \psi\right)$, $\tilde{u}^k = \partial\left(\tilde{F}, \tilde{\psi}\right)$ les solutions respectives de I.V continue (3.17).

Lemme 3.2.1 *Si $F \geq \tilde{F}$ et $\psi \geq \tilde{\psi}$, alors $u^k \geq \tilde{u}^k$.*

Preuve. Cette preuve est une adaptation de [14].
A partir de u^0 et $\tilde{u}^0$ solutions de l'équation (3.21), avec second membre F et $\tilde{F}$, respectivement. Alors $u^0 \geq \tilde{u}^0$ implique $f + u^0 \geq f + \tilde{u}^0$ et $\psi \geq \tilde{\psi}$.
Donc, on applique le résultat de comparaison standard pour l'I.V coercive voir [18], nous obtenons

$$u^1 \geq \tilde{u}^1.$$

Supposons maintenant que

$$u^{k-1} \geq \tilde{u}^{k-1},$$

il s'ensuit que

$$f + u^{k-1} \geq f + \tilde{u}^{k-1},$$

et

$$\psi \geq \tilde{\psi}.$$

Enfin, nous obtenons

$$u^k \geq \tilde{u}^k.$$

■

3.2.2.4 Propriété de Dépendance Lipschitzienne de la Solution continue

Proposition 3.2.2 *Sous les notations précédentes et les conditions du lemme 3.2.1, nous avons*

$$\left\| u^k - \tilde{u}^k \right\|_\infty \leq \left\| F - \tilde{F} \right\|_\infty . \tag{3.23}$$

Preuve. Cette preuve est une adaptation de [14].
Soit

$$\Phi = \left\| F - \tilde{F} \right\|_\infty .$$

Il est facile de voir que

$$F \leq \tilde{F} + \left\| F - \tilde{F} \right\|_\infty ,$$

$$F \leq \tilde{F} + \Phi,$$

et

$$\psi \leq \tilde{\psi}.$$

En utilisant le lemme 3.2.1, nous avons

$$\partial\left(F, \psi\right) \leq \partial\left(\tilde{F} + \Phi, \tilde{\psi}\right).$$

$$\leq \partial\left(\tilde{F} + \Phi, \tilde{\psi} + \Phi\right) = \partial\left(\tilde{F}, \tilde{\psi}\right) + \Phi.$$

$$\tilde{\psi} \leq \tilde{\psi} + \Phi.$$

Ainsi,

$$\partial\left(F, \psi\right) \leq \partial\left(\tilde{F}, \tilde{\psi}\right) + \Phi.$$

Donc

$$u^k \leq \tilde{u}^k + \Phi.$$

Échangeant les rôles de F et $\tilde{F}$, on obtient de la même façon

$$\tilde{u}^k \leq u^k + \Phi.$$

Par conséquent,

$$\left\| u^k - \tilde{u}^k \right\|_\infty \leq \left\| F - \tilde{F} \right\|_\infty .$$

■

Proposition 3.2.3 *Sous les conditions du lemme 3.2.1 et l'hypothèse* (3.7)*, l'application T est une contraction dans $L^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$\| T(w) - T(\tilde{w}) \|_\infty \leq \frac{1}{1+\beta\Delta t} \| w - \tilde{w} \|_\infty . \tag{3.24}$$

Par conséquent, T admet un unique point fixe, qui coïncide avec la solution de l'I.V continue (3.17).

Preuve. Pour $w, \tilde{w}$ dans $L^\infty(\Omega)$, nous considérons $\xi = T(w) = \partial\left(f + \lambda w, \psi\right)$ et $\tilde{\xi} = T(\tilde{w}) = \partial\left(f + \lambda \tilde{w}, \tilde{\psi}\right)$ deux solutions de l'I.V continue (3.17), avec second membres $F = f + \lambda w$, $\tilde{F} = f + \lambda \tilde{w}$.

Maintenant, nous prenons

$$\phi = \frac{1}{1+\beta\Delta t} \left\| F - \tilde{F} \right\|_\infty .$$

Ensuite, il est clair que

$$\begin{aligned} F &\leq \tilde{F} + \left\| F - \tilde{F} \right\|_\infty , \\ &\leq \tilde{F} + \frac{a_0 + \lambda}{\beta + \lambda} \left\| F - \tilde{F} \right\|_\infty , \end{aligned}$$

$\left(\text{car } a_0 \geq \beta > 0\right)$.

$$\leq \tilde{F} + (a_0 + \lambda)\,\phi .$$

En utilisant le lemme 3.2.1, il s'ensuit que

$$\partial\left(F, \psi\right) \leq \partial\left(\tilde{F} + (a_0 + \lambda)\,\phi, \tilde{\psi}\right).$$

D'autre part, on a

$$\partial\left(\tilde{F}, \tilde{\psi}\right) + \phi = \partial\left(\tilde{F} + (a_0 + \lambda)\,\phi, \tilde{\psi}\right).$$

En effet, $\tilde{\xi} + \phi$ est solution de

$$b\left(\tilde{\xi} + \phi, \left(v + \phi\right) - \left(\tilde{\xi} + \phi\right)\right) \geq \left(\tilde{F} + (a_0 + \lambda)\,\phi, \left(v + \phi\right) - \left(\tilde{\xi} + \phi\right)\right)$$

$$\tilde{\xi} + \phi \geq \psi + \phi,\ v + \phi \geq \psi + \phi,\ \forall v \in \mathbb{K}.$$

Ainsi

$$\partial\left(F, \psi\right) \leq \partial\left(\tilde{F} + (a_0 + \lambda)\,\phi, \tilde{\psi}\right) \leq \partial\left(\tilde{F} + (a_0 + \lambda)\,\phi, \tilde{\psi} + \phi\right),$$

d'où

$$\xi \leq \tilde{\xi} + \phi .$$

De même, en échangeant les rôles de w et $\tilde{w}$, nous obtenons

$$\tilde{\xi} \leq \xi + \phi.$$

finalement, nous avons

$$\begin{aligned}
\|T(w) - T(\tilde{w})\|_\infty &\leq \frac{1}{\lambda+\beta}\left\|F - \tilde{F}\right\|_\infty, \\
&\leq \frac{1}{\lambda+\beta}\left\|f + \lambda w - f - \lambda\tilde{w}\right\|_\infty, \\
&\leq \frac{\lambda}{\lambda+\beta}\|w - \tilde{w}\|_\infty, \\
\|T(w) - T(\tilde{w})\|_\infty &\leq \frac{1}{1+\beta\Delta t}\|w - \tilde{w}\|_\infty.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.4 *Sous les conditions de la proposition 3.2.3 et les hypothèses précédentes, nous avons l'estimation de convergence géométrique suivante*

$$\left\|u^k - u^\infty\right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)^k \|u^0 - u^\infty\|_\infty, \tag{3.25}$$

où, u^∞ est la solution stationnaire de I.V continue suivante

$$b\left(u^\infty, v - u^\infty\right) \geq \left(f + \lambda u^\infty, v - u^\infty\right), \ \forall v \in \mathbb{K}. \tag{3.26}$$

Preuve. Pour $k = 1$, nous avons

$$u^\infty = Tu^\infty,$$

et

$$\left\|u^1 - u^\infty\right\|_\infty = \left\|Tu^0 - Tu^\infty\right\|_\infty \leq \frac{1}{1+\beta\Delta t}\left\|u^0 - u^\infty\right\|_\infty.$$

Nous supposons que, pour l'étape k

$$\left\|u^k - u^\infty\right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)^k \|u^0 - u^\infty\|_\infty,$$

ensuite, nous utilisons l'algorithme de Bensoussan-Lions

$$\left\|u^{k+1} - u^\infty\right\|_\infty = \left\|Tu^k - Tu^\infty\right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)\left\|u^k - u^\infty\right\|_\infty,$$

ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|u^{k+1} - u^\infty\right\|_\infty &\leq \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)\left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)^k \|u^0 - u^\infty\|_\infty, \\
&\leq \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t}\right)^{k+1} \|u^0 - u^\infty\|_\infty.
\end{aligned}$$

■

3.2.2.5 La Notion de Sous-Solution Continue

Définition 3.2.5 *$w^k \in \mathbb{K}$ est dite sous-solution pour l'I.V continue* (3.17) *si*

$$b\left(w^k, v\right) \leq \left(f + \lambda w^{k-1}, v\right), \ \forall v \in \mathbb{K}. \tag{3.27}$$

Soit $\mathbb{X}$ l'ensemble des sous-solutions continues.

Théorème 3.2.6 *La solution de l'I.V continue* (3.17) *est le maximum de l'ensemble* $\mathbb{X}$.

Preuve. C'est une adaptation facile de [21]. ■

3.3 Étude du problème discret

Nous avons décomposé Ω en triangles et soit τ_h l'ensemble de tous ces éléments, où $h > 0$ est la taille des mailles. Nous supposons que la famille τ_h est régulière et quasi uniforme. Nous considérons la base habituelle de fonctions affines $\varphi_i, \ i = \{1,...,m(h)\}$ définie par $\varphi_i\left(M_j\right) = \delta_{ij}$, où M_j est un sommet de la triangulation. Nous introduisons l'espace discret suivant $\mathbb{V}^h$ des éléments finis construits à partir des polynômes de degré 1.

$$\mathbb{V}^h = \left\{v_h \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left(0, T; H_0^1\left(\bar{\Omega}\right)\right), \text{ tel que } v_h\,|_k \in P_1, \ k \in \tau_h\right\}, \tag{3.28}$$

et

$$\mathbb{K}^h = \left\{v_h \in \mathbb{V}^h, \ v_h \geq r_h\psi, \ v_h(0,x) = r_h\psi \text{ dans } \Omega, \ v_h = 0 \text{ dans } \Gamma\right\}. \tag{3.29}$$

Nous considérons r_h l'opérateur d'interpolation d'habitude défini par

$$v_h \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left(0, T; H_0^1\left(\bar{\Omega}\right)\right), \ r_h v = \sum_{i=1}^{m(h)} v(M_i)\,\varphi_i(x). \tag{3.30}$$

Le Principe du Maximum Discret (**P.M.D**) [cf[19]] : Nous supposons que la matrice dont les coefficients génériques sont $a\left(\varphi_i, \varphi_j\right)$ est une M-matrice.

Théorème 3.3.1 *Supposons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est faiblement coercive dans $\mathbb{K}^h \subset H_0^1(\Omega)$, il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ telle que :*

$$a(u_h, u_h) + \lambda \|u_h\|_2 \geq \alpha \|u_h\|_1. \tag{3.31}$$

3.3.1 Discrétisation

Nous discrétisons l'espace $H_0^1(\Omega)$ par un espace de dimension finie $\mathbb{K}^h \subset H_0^1(\Omega)$ construits à partir de polynômes de degré 1. Ensuite, nous discrétisons le problème par rapport au temps en utilisant le schéma semi-implicite. Pour cela, nous cherchons une séquence d'éléments $u_h^k \in \mathbb{K}^h$ qui approches $u^k(t_k)$, $t_k = k\Delta t$, avec donnée initiale $u_h^0 = u_{0h}$.

Nous appliquons la méthode des éléments finis à l'inéquation (3.4), et l'I.V semi-discrètisé prend la forme suivante

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h - u_h\right) + a\left(u_h, v_h - u_h\right) \geq \left(f, v_h - u_h\right), \ \ \forall v_h \in \mathbb{K}^h, \tag{3.32}$$

Maintenant, nous appliquons le schéma semi-implicite au problème semi-discrètisé (3.32) ; pour tout $k = 1, ..., n$, nous avons $v_h \in \mathbb{K}^h$

$$\left(\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\Delta t}, v_h - u_h^k\right) + a\left(u_h^k, v_h - u_h^k\right) \geq \left(f, v_h - u_h^k\right). \tag{3.33}$$

Ensuite, le problème (3.33) peut être reformulé par l'I.V discrète suivante :

$$b\left(u_h^k, v_h - u_h^k\right) \geq \left(f + \lambda u_h^{k-1}, v_h - u_h^k\right), \ \ \forall v_h \in \mathbb{K}^h, \tag{3.34}$$

telle que

$$\begin{cases} b\left(u_h^k, v_h - u_h^k\right) = \lambda\left(u_h^k, v_h - u_h^k\right) + a\left(u_h^k, v_h - u_h^k\right), \\ \lambda = \frac{1}{\Delta t} = \frac{n}{T}. \end{cases} \tag{3.35}$$

3.3.2 Existence et unicité de l'I.V discrète

D'une manière similaire à celle de la section 2, nous allons prouver l'existence d'une solution unique pour le problème (3.34) à l'aide du théorème de point fixe de Banach. À cette fin, nous avons besoin d'un résultat de monotonie et une propriété de dépendance Lipschitzienne pour l'I.V discrète.

3.3.2.1 L'application du point fixe associé à l'I.V discrète (3.34)

Nous définissons l'application suivant

$$T_h : L_+^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}^h \tag{3.36}$$

$$w \to T_h(w) = \xi_h,$$

telle que, ξ_h est la solution de l'inéquation variationnelle suivante

$$b\left(\xi_h, v_h - \xi_h\right) \geq \left(f + \lambda w, v_h - \xi_h\right), \ \ \forall v_h \in \mathbb{K}^h, \tag{3.37}$$

où, $L_+^\infty(\Omega)$ est le cône positif de $L^\infty(\Omega)$.

3.3.2.2 Algorithme itératif discret

Nous choisissons u_h^0 solution de l'équation discrète suivante :

$$b\left(u_h^0, v_h\right) = (F, v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{K}^h, \tag{3.38}$$

où, F est une fonction régulière donnée.
Maintenant, nous donnons l'algorithme discret suivant :

$$u_h^k = T_h u_h^{k-1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad u_h^k \in \mathbb{K}^h, \tag{3.39}$$

où, u_h^k est solution de l'I.V discrète (3.34).

Remarque 3.3.2 *Sous le **P.M.D**, les propriétés qualitatives et les résultats établis dans la section 2 sont conservés dans le cas discret. Leurs preuves respectives seront omises, car ils sont très semblables à ceux de leur analogue continue.*

3.3.2.3 Propriété de Monotonie de la Solution Discrète

Soient $F = f + \lambda u_h^{k-1}, \tilde{F} = f + \lambda \tilde{u}_h^{k-1}$ deux second membre et $u_h^k = \partial\left(F, r_h\psi\right)$, $\tilde{u}_h^k = \partial\left(\tilde{F}, r_h\tilde{\psi}\right)$ les solutions respectives de I.V discrète (3.34).

Lemme 3.3.3 (cf [14]) *Sous le **P.M.D**, Si $F \geq \tilde{F}$ et $r_h\psi \geq r_h\tilde{\psi}$, alors $u_h^k \geq \tilde{u}_h^k$.*

3.3.2.4 Propriété de Dépendance Lipschitzienne de la Solution Discrète

Proposition 3.3.4 (cf [14]) *Sous les notations précédentes et les conditions du lemme 3.3.3 nous avons*

$$\left\| u_h^k - \tilde{u}_h^k \right\|_\infty \leq \left\| F - \tilde{F} \right\|_\infty. \tag{3.40}$$

Proposition 3.3.5 (cf [4]) *Sous les conditions du lemme 3.3.3 et l'hypothèse* (3.7)*, l'application T_h est une contraction dans $L^\infty(\Omega)$,c'est-à-dire*

$$\| T_h(w) - T_h(\tilde{w}) \|_\infty \leq \frac{1}{1+\beta\Delta t} \| w - \tilde{w} \|_\infty. \tag{3.41}$$

Par conséquent, T_h admet un unique point fixe, qui coïncide avec la solution de l'I.V discrète (3.34).

Proposition 3.3.6 (cf [4]) *Sous les conditions de la proposition 3.3.5 et les hypothèses précédentes, nous avons l'estimation de convergence géométrique suivante*

$$\left\| u_h^k - u_h^\infty \right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t} \right)^k \| u_h^0 - u_h^\infty \|_\infty, \tag{3.42}$$

où, u_h^∞ est la solution stationnaire de I.V discrète suivante

$$b\left(u_h^\infty, v_h - u_h^\infty\right) \geq \left(f + \lambda u_h^\infty, v_h - u_h^\infty\right), \ \forall v_h \in \mathbb{K}^h. \tag{3.43}$$

3.3.2.5 La notion de sous-solution discrète

Définition 3.3.7 $w_h^k \in \mathbb{K}^h$ *est dite sous-solution pour l'I.V discrète* (3.34) *si*

$$b\left(w_h^k, \varphi_i\right) \leq \left(f + \lambda w_h^{k-1}, \varphi_i\right), \ \forall i \in \{1, ..., m(h)\}. \tag{3.44}$$

Soit $\mathbb{X}_h$ l'ensemble des sous-solutions discrètes.

Théorème 3.3.8 *Sous le **P.M.D**, la solution de l'I.V discrète* (3.34) *est le maximum de l'ensemble* $\mathbb{X}_h$.

3.4 Analyse d'erreur en norme L^∞

Dans cette section, nous introduisons deux problèmes auxiliaires qui nous permettent de définir des suites de sous-solutions continues et discrètes.

3.4.1 Deux problèmes auxiliaires

Nous définissons la suite $\{\bar{u}^k\}_{k\geq 1}$ telle que $\bar{u}^k$ résout l'I.V continue suivante

$$b\left(\bar{u}^k, v - \bar{u}^k\right) \geq \left(f + \lambda u_h^{k-1}, v - \bar{u}^k\right), \ \ \forall v \in \mathbb{K}, \tag{3.45}$$

où, u_h^{k-1} est définie dans (3.39), et la suite $\{\bar{u}_h^k\}_{k\geq 1}$ telle que $\bar{u}_h^k$ résout l'I.V discrète suivante

$$b\left(\bar{u}_h^k, v_h - \bar{u}_h^k\right) \geq \left(f + \lambda u^{k-1}, v_h - \bar{u}_h^k\right), \ \ \forall v_h \in \mathbb{K}^h, \tag{3.46}$$

où, u^{k-1} est définie dans (3.22).

Lemme 3.4.1 (cf [21]) *Il existe une constante C indépendante de h et k telle que*

$$\left\|\bar{u}^k - u_h^k\right\|_\infty \leq Ch^2 \left|\ln h\right|^2, \tag{3.47}$$

et

$$\left\|\bar{u}_h^k - u^k\right\|_\infty \leq Ch^2 \left|\ln h\right|^2. \tag{3.48}$$

Maintenant, nous allons estimer l'erreur en norme L^∞ entre u^k et u_h^k définie dans (3.17) et (3.34), respectivement.

Théorème 3.4.2

$$\left\|u^k - u_h^k\right\|_\infty \leq Ch^2 \left|\ln h\right|^2. \tag{3.49}$$

Le lemme suivant joue un rôle crucial pour prouver le théorème 3.4.2.

Lemme 3.4.3 *Il existe une suite de sous-solutions continues* $\{\beta^k\}_{k\geq 1}$ *telle que*

$$\beta^k \leq u^k,\ \forall k = 1,...,n, \tag{3.50}$$

et

$$\left\|\beta^k - u_h^k\right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h|^2, \tag{3.51}$$

et une suite de sous-solutions discrètes $\{\alpha_h^k\}_{k\geq 1}$ *telle que*

$$\alpha_h^k \leq u_h^k,\ \forall k = 1,...,n, \tag{3.52}$$

et

$$\left\|\alpha_h^k - u^k\right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h|^2. \tag{3.53}$$

Preuve. Considérons l'I.V continue suivante

$$b\left(\bar{u}^1, v - \bar{u}^1\right) \geq \left(f + \lambda u_h^0, v - \bar{u}^1\right),\ \ \forall v \in \mathbb{K},$$

puis, comme $\bar{u}^1$ est la solution de l'I.V continue, c'est aussi une sous-solution, c-à-d

$$b\left(\bar{u}^1, v\right) \leq \left(f + \lambda u_h^0, v\right),\ \ \forall v \in \mathbb{K},$$

et

$$b\left(\bar{u}^1, v\right) \leq \left(f + \lambda u_h^0 + \lambda u^0 - \lambda u^0, v\right),\ \ \forall v \in \mathbb{K},$$

nous avons

$$\left\| u_h^0 - u^0 \right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h| \quad \text{(voir [37])}. \tag{3.54}$$

Alors

$$b\left(\bar{u}^1, v\right) \leq \left(f + \lambda \left\| u_h^0 - u^0 \right\|_\infty + \lambda u^0, v\right),\ \ \forall v \in \mathbb{K},$$

et en utilisant (3.54), nous obtenons

$$b\left(\bar{u}^1, v\right) \leq \left(f + \lambda Ch^2 |\ln h| + \lambda u^0, v\right),\ \ \forall v \in \mathbb{K}.$$

Alors, $\bar{u}^1$ est une sous-solution pour l'I.V continue, dont la solution est $\bar{U}^1 = \partial\left(f + \lambda Ch^2 |\ln h| + \lambda u^0\right)$.Puis, $u^1 = \partial\left(f + \lambda u^0\right)$ faisant usage de la proposition 3.2.2, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \bar{U}^1 - u^1 \right\|_\infty &\leq \left\| f + \lambda Ch^2 |\ln h| + \lambda u^0 - f - \lambda u^0 \right\|_\infty, \\ &\leq Ch^2 |\ln h|, \end{aligned}$$

et en raison du théorème 3.2.6, nous avons

$$\bar{u}^1 \leq \bar{U}^1 \leq u^1 + Ch^2 |\ln h|.$$

maintenant, choisissons

$$\beta^1 = \bar{u}^1 - Ch^2 |\ln h|$$

nous obtenons

$$\beta^1 \leq u^1 \tag{3.55}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|\beta^1 - u_h^1\right\|_\infty &\leq \left\|\bar{u}^1 - Ch^2 |\ln h| - u_h^1\right\|_\infty, \\ &\leq \left\|\bar{u}^1 - u_h^1\right\|_\infty + Ch^2 |\ln h|, \\ &\leq Ch^2 |\ln h|^2 + Ch^2 |\ln h|, \\ &\leq Ch^2 |\ln h|^2. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Considérons l'I.V discrète suivante

$$b\left(\bar{u}_h^1, v_h - \bar{u}_h^1\right) \geq \left(f + \lambda u^0, v_h - \bar{u}_h^1\right), \quad \forall v_h \in \mathbb{K}^h,$$

puis, comme $\bar{u}_h^1$ est la solution de l'I.V discrète, c'est aussi une sous-solution, c-à-d

$$b\left(\bar{u}_h^1, \varphi_s\right) \leq \left(f + \lambda u^0, \varphi_s\right), \quad \forall \varphi_s, s = 1, ..., m(h),$$

et

$$b\left(\bar{u}_h^1, \varphi_s\right) \leq \left(f + \lambda u^0 + \lambda u_h^0 - \lambda u_h^0, \varphi_s\right), \quad \forall \varphi_s, s = 1, ..., m(h),$$

alors

$$b\left(\bar{u}_h^1, \varphi_s\right) \leq \left(f + \lambda \left\|u^0 - u_h^0\right\|_\infty + \lambda u_h^0, \varphi_s\right), \quad \forall \varphi_s, s = 1, ..., m(h),$$

et en utilisant (3.54), nous obtenons

$$b\left(\bar{u}_h^1, \varphi_s\right) \leq \left(f + \lambda Ch^2 |\ln h| + \lambda u_h^0, \varphi_s\right), \quad \forall \varphi_s, s = 1, ..., m(h).$$

Alors, $\bar{u}_h^1$ est une sous-solution pour la I.V discrète, dont la solution est $\bar{U}_h^1 = \partial_h\left(f + \lambda Ch^2 |\ln h| + \lambda u_h^0\right)$.Puis, $u_h^1 = \partial\left(f + \lambda u_h^0\right)$ faisant usage de la proposition 3.3.4, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\bar{U}_h^1 - u_h^1\right\|_\infty &\leq \left\|f + \lambda Ch^2 |\ln h| + \lambda u_h^0 - f - \lambda u_h^0\right\|_\infty, \\ &\leq Ch^2 |\ln h|,\end{aligned}$$

et en raison du théorème 3.3.8, nous avons

$$\bar{u}_h^1 \leq \bar{U}_h^1 \leq u_h^1 + Ch^2 |\ln h|.$$

maintenant, choisissons

$$\alpha_h^1 = \bar{u}_h^1 - Ch^2 |\ln h|$$

nous obtenons

$$\alpha_h^1 \leq u_h^1 \tag{3.57}$$

et

$$\left\|\alpha_h^1 - u^1\right\|_\infty \leq \left\|\bar{u}_h^1 - Ch^2 |\ln h| - u^1\right\|_\infty,$$

$$\leq \left\| \bar{u}_h^1 - u^1 \right\|_\infty + Ch^2 |\ln h|,$$

$$\leq Ch^2 |\ln h|^2 + Ch^2 |\ln h|,$$

$$\leq Ch^2 |\ln h|^2. \tag{3.58}$$

Ainsi, en combinant (3.55), (3.56) et (3.57), (3.58), nous obtenons

$$u^1 \leq \alpha_h^1 + Ch^2 |\ln h|^2,$$

$$\leq u_h^1 + Ch^2 |\ln h|^2,$$

$$\leq \beta^1 + Ch^2 |\ln h|^2,$$

$$\leq u^1 + Ch^2 |\ln h|^2,$$

donc

$$\left\| u^1 - u_h^1 \right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h|^2. \tag{3.59}$$

Étape k, nous supposons que

$$\left\| u^{k-1} - u_h^{k-1} \right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h|^2, \tag{3.60}$$

et nous prouvons que

$$\left\| u^k - u_h^k \right\|_\infty \leq Ch^2 |\ln h|^2. \tag{3.61}$$

Pour cela, nous considérons l'I.V continue suivante

$$b\left(\bar{u}^k, v - \bar{u}^k\right) \geq \left(f + \lambda u_h^{k-1}, v - \bar{u}^k\right), \quad \forall v \in \mathbb{K},$$

puis, comme $\bar{u}^k$ est la solution de l'I.V continue, c'est aussi une sous-solution, c-à-d

$$b\left(\bar{u}^k, v\right) \leq \left(f + \lambda u_h^{k-1}, v\right), \quad \forall v \in \mathbb{K},$$

et

$$b\left(\bar{u}^k, v\right) \leq \left(f + \lambda u_h^{k-1} + \lambda u^{k-1} - \lambda u^{k-1}, v\right), \quad \forall v \in \mathbb{K},$$

alors

$$b\left(\bar{u}^k, v\right) \leq \left(f + \lambda \left\| u_h^{k-1} - u^{k-1} \right\|_\infty + \lambda u^{k-1}, v\right), \quad \forall v \in \mathbb{K},$$

et en utilisant (3.60), nous obtenons

$$b\left(\bar{u}^k, v\right) \leq \left(f + \lambda C h^2 |\ln h|^2 + \lambda u^{k-1}, v\right), \quad \forall v \in \mathbb{K}.$$

Alors, $\bar{u}^k$ est une sous-solution pour la I.V continue, dont la solution est $\bar{U}^k = \partial\left(f + \lambda Ch^2 |\ln h| + \lambda u^{k-1}\right)$.Puis, $u^k = \partial\left(f + \lambda u^{k-1}\right)$ faisant usage de la proposition 3.2.2, nous avons

$$\left\|\bar{U}^k - u^k\right\|_\infty \leq \left\|f + \lambda Ch^2 |\ln h|^2 + \lambda u^{k-1} - f - \lambda u^{k-1}\right\|_\infty ,$$
$$\leq Ch^2 |\ln h|^2 ,$$

et en raison du théorème 3.2.6, nous avons

$$\bar{u}^k \leq \bar{U}^k \leq u^k + Ch^2 |\ln h|^2 ,$$

maintenant, choisissons

$$\beta^k = \bar{u}^k - Ch^2 |\ln h|^2 ,$$

nous obtenons

$$\beta^k \leq u^k, \tag{3.62}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|\beta^k - u_h^k\right\|_\infty &\leq \left\|\bar{u}^k - Ch^2 |\ln h|^2 - u_h^k\right\|_\infty , \\ &\leq \left\|\bar{u}^k - u_h^k\right\|_\infty + Ch^2 |\ln h|^2 , \\ &\leq Ch^2 |\ln h|^2 + Ch^2 |\ln h|^2 , \\ &\leq Ch^2 |\ln h|^2 .\end{aligned} \tag{3.63}$$

Considérons l'I.V discrète suivante

$$b\left(\bar{u}_h^k, v_h - \bar{u}_h^k\right) \geq \left(f + \lambda u^{k-1}, v_h - \bar{u}_h^k\right), \ \ \forall v_h \in \mathbb{K}^h,$$

puis, comme $\bar{u}_h^k$ est la solution de l'I.V discrète, c'est aussi une sous-solution, c-à-d

$$b\left(\bar{u}_h^k, \varphi_s\right) \leq \left(f + \lambda u^{k-1}, \varphi_s\right), \ \ \forall \varphi_s, s = 1, ..., m(h),$$

et

$$b\left(\bar{u}_h^k, \varphi_s\right) \leq \left(f + \lambda u^{k-1} + \lambda u_h^{k-1} - \lambda u_h^{k-1}, \varphi_s\right), \ \ \forall \varphi_s, s = 1, ..., m(h),$$

alors

$$b\left(\bar{u}_h^k, \varphi_s\right) \leq \left(f + \lambda \left\|u^{k-1} - u_h^{k-1}\right\|_\infty + \lambda u_h^{k-1}, \varphi_s\right), \ \ \forall \varphi_s, s = 1, ..., m(h),$$

et en utilisant (3.60) ; nous obtenons

$$b\left(\bar{u}_h^k, \varphi_s\right) \leq \left(f + \lambda Ch^2 |\ln h|^2 + \lambda u_h^{k-1}, \varphi_s\right), \ \ \forall \varphi_s, s = 1, ..., m(h).$$

Alors, $\bar{u}_h^k$ est une sous-solution pour la I.V discrète, dont la solution est $\bar{U}_h^k = \partial_h\left(f + \lambda Ch^2 |\ln h|^2 + \lambda u_h^{k-1}\right)$.Puis, $u_h^k = \partial\left(f + \lambda u_h^{k-1}\right)$ faisant usage de la proposition 3.3.4, nous avons

$$\left\|\bar{U}_h^k - u_h^k\right\|_\infty \leq \left\|f + \lambda C h^2 |\ln h|^2 + \lambda u_h^{k-1} - f - \lambda u_h^{k-1}\right\|_\infty,$$

$$\leq C h^2 |\ln h|^2,$$

et en raison du théorème 3.3.8, nous avons

$$\bar{u}_h^k \leq \bar{U}_h^k \leq u_h^k + C h^2 |\ln h|^2.$$

maintenant, choisissons

$$\alpha_h^k = \bar{u}_h^k - C h^2 |\ln h|^2,$$

nous obtenons

$$\alpha_h^k \leq u_h^k, \tag{3.64}$$

et

$$\left\|\alpha_h^k - u^k\right\|_\infty \leq \left\|\bar{u}_h^k - C h^2 |\ln h|^2 - u^k\right\|_\infty,$$

$$\leq \left\|\bar{u}_h^k - u^k\right\|_\infty + C h^2 |\ln h|^2,$$

$$\leq C h^2 |\ln h|^2 + C h^2 |\ln h|^2,$$

$$\leq C h^2 |\ln h|^2. \tag{3.65}$$

Ainsi, en combinant (3.62), (3.63) et (3.64), (3.65), nous obtenons

$$u^k \leq \alpha_h^k + C h^2 |\ln h|^2,$$

$$\leq u_h^k + C h^2 |\ln h|^2,$$

$$\leq \beta^k + C h^2 |\ln h|^2,$$

$$\leq u^k + C h^2 |\ln h|^2.$$

Par conséquent

$$\left\|u^k - u_h^k\right\|_\infty \leq C h^2 |\ln h|^2. \tag{3.66}$$

■

3.5 Comportement asymptotique en norme L^∞ du problème de l'option américaine

Cette section est consacrée à la preuve du résultat principal de la présente étude, où nous prouvons le théorème du comportement asymptotique en norme L^∞ de l'I.V parabolique liée au problème de l'option américaine. Plus précisément, nous évaluons la variation en norme L^∞ entre $u_h(T,x)$, la solution discrète calculée au moment $T = n\Delta t$ et u^∞, la solution stationnaire de l'I.V continue (3.26).

Théorème 3.5.1 *Sous les conditions du proposition 3.2.4 et de la théorème 3.4.2, nous avons*

$$\left\| u_h^n - u^\infty \right\|_\infty \leq C \left[h^2 |\ln h|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t} \right)^n \right], \tag{3.67}$$

où C est une constante indépendante de h et n.

Preuve. Nous avons

$$u_h^k = u_h(t,x) \quad \text{pour } t \in](k-1)\Delta t; k\Delta t[,$$

et on a aussi

$$u_h^n = u_h(T,x).$$

Puis, nous avons

$$\left\| u_h(T,x) - u^\infty \right\|_\infty = \left\| u_h^n - u^\infty \right\|_\infty \leq \left\| u_h^n - u^n \right\|_\infty + \left\| u^n - u^\infty \right\|_\infty.$$

En utilisant le théorème 3.4.2 et la proposition 3.2.4, nous obtenons

$$\left\| u_h^n - u^\infty \right\|_\infty \leq C \left[h^2 |\ln h|^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\Delta t} \right)^n \right].$$

■

Conclusion et Perspectives

Dans notre thèse, nous avons étudié l'approximation par la méthode des éléments finis de l'inéquation variationnelle liée au problème de l'option américaine. Nous avons établi une estimation du comportement asymptotique de l'inéquation variationnelle d'évolution associée au problème de l'option américaine par deux approches :
- l'approche algorithmique.
- l'approche des sous-solutions.

Le type d'estimation que nous avons obtenue, nous permet de localiser la frontière libre, chose essentielle, pour avoir une vision sur le Put et le Call. Comme perspective, nous allons d'une part consolider nos résultats théoriques par des simulations numériques sur des modèles réalistes adaptés, d'autre part, on va appliquer la méthode multigrilles qui a donné de bons résultats pour des modèles similaires à notre problème.

Bibliographie

[1] Achdou Y., *An inverse problem for a parabolic variational inequality arising in volatility calibration with American options*, SIAM J. Control Optim., 43, (2005), no5, p. 1583 – 1615.

[2] Achdou Y., Pironneau O., *Numerical Procedure for Calibration of Volatility with American Options*, Applied Mathematical Finance, (2005),12,201 – 241.

[3] Baiocchi C., Capelo A., *Variational and quasivariational inequalities : Applications to free boundary problems* , Wiley, (1984) .

[4] Benchettah D.C., Haiour M., L^∞ *Asymptotic Behavior of the Variational Inequality Related to American Options Problem*, Applied Mathematics, (2014),5,1299 – 1309.

[5] Benchettah D.C., Haiour M., *Sub-solution approach for the Asymptotic Behavior of a Parabolic Variational Inequality Related to American Options Problem*, à paraître dans Global Journal of Pure and Applied Mathematics.

[6] Bensoussan A., Lions J.L., *Impulse control and quasi-variational inequalities*, Gauthier Villars, Paris (1984).

[7] Bensoussan A., Lions J.L., *Applications of variational inequalities in stochastic control*, North-Holland, (1982).

[8] Bensoussan A., *On the theory of option pricing, Acta Applicandae Mathematicae,* 2,139 – 158 (1984).

[9] Black F. and Scholes M. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81, 637 – 654 (1973).

[10] Blanchet, A., Dolbeault, J. and Monneau, R. *Formulation de monotonie appliquées à des problèmes à frontiére libre et de modélisation en biologie*. Thése de Doctorat, Université Paris Dauphine, (2005).

[11] Boulaaras S., Haiour M., *The theta time scheme combined with a finite-element spatial approximation in the evolutionary Hamilton-Jacobi-Bellman equation with linear source terms*, Computational Mathematics and Modeling. Vol. 25, No. 3, July, (2014).

[12] Boulaaras S., Haiour M., L^∞*-Asymptotic Bhavior for a Finite Element Approximation in Parabolic Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problem*, Applied Mathematics and Computation, 217, 6443 – 6450 (2011).

[13] Boulaaras S., Haiour M., *The Finite Element Approximation in Parabolic Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problem with Mixed Boundary Conditions*, Journal of Taibah University for Science, 7, 105 – 113 (2013).

[14] Boulbrachene M., *The noncoercive quasi-variational inequalities related to impulse control problems, computersMath,Applic*, 101 – 108(1998).

[15] Boulbrachene M., Cortey-Dumont P., *Optimal* L^∞*-Error Estimate of a Finite Element Method for Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 30 : 5, 421 – 435, (2010).

[16] Boulbrachene M., *On variational inequalities with vanishing zero term*, Journal of Inequalities and Applications, 2013 : 438 (2013).

[17] Boulbrachene M., *Sur quelques questions d'approximation de problème à frontière libre, de sous-domaines et d'erreurs d'arrondi*, Thèse de Doctorat de l'université de Franche-comté Besançon, France (1987).

[18] Brezis H., *Problemes unilateraux*, J. Math. Pures et Appl. 50, $1-168$, (1971).

[19] Ciarlet P.G., Raviart P.A., *Maximum principle and uniform convergence for the finite element method*, Comp. Meth. in Appl.Mech and Eng. 2, $1-20$ (1973).

[20] Cortey-Dumont P., *On the finite element approximation in the L^∞ norm of variational inequalities*, Numer. Math, 47, $45-57$ (1985).

[21] Cortey-Dumont P., *Sur les inéquations variationnelles à opérateurs non coercif*, RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 19, $n^0 2$,p. $195-212$ (1985).

[22] Delbaen F., Schachermayer W., *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Math. Ann., 300, $no.3$, $463-520$, (1994).

[23] Delbaen F., Schachermayer W., *The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes*, Math. Ann., 312, $no.2$, $215-250$, (1998).

[24] Feng L., Linetsky V., Morales J. L., Nocedal J., *On the solution of complementarity problem arising in American options pricing*, Optimization Methods and Software, (2010).

[25] Fichera G., *Boundary value problems of Elasticity with unilateral constraints*, in Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin, $42-391$ (1972).

[26] Friedman A., *Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary*, J. Functional Analysis, 18, $151-176$ (1975).

[27] Friedman A., *Variational principles and free-boundary problems*, second éd., Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL,(1988).

[28] Hannouzet J. and Joly P., *Convergence uniforme des iteres definissant la solution d'une in´equation quasi-variationnelle*, C.R.Acad, Sci, Paris , Serie A, 286 (1978).

[29] Harrison J.M., Pliska S.R., *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Processus and their applications 11, $215-260$ (1981).

[30] Jaillet P., Lamberton D. and Lapeyre B., *Variational Inequalities and the Pricing of American Options*, Acta Applicandae Mathematicae, 213, $263-289$ (1990).

[31] Karatzas I., *On the pricing of American options*, Applied Math. Optimization, 17, $37-60$ (1990).

[32] Kinderlehrer D., Stampacchia G., *An introduction to Variational Inequalities and their applications*. Academic Press (1980).

[33] Lamberton, D., Lapeyre, B., *Introduction au calcul stochastique applique a la finance*. Ellipses, (1991).

[34] Lamberton D., Villeneuve S., *Critical Price near Maturity for an American Option on a Dividend-Paying Stock*. The Annals of Applied Probability, $47-70$ (1989).

[35] Lions P.L., *On the Schwarz alternating method*. II. Stochastic interpretation and order properties, Domain Decomposition Methods, SIAM, Philadelphia, ,13, $800-815$, (2003).

[36] Lions J.L., Stampacchia G., *Variational inequalities*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 20, pp. $493-519$, (1967).

[37] Nitsche J., L^{∞} *- convergence of finite element approximations,* Mathematical aspects of finite element methods, Lect. Notes Math, 606, $261-274$ (1977).

[38] Nystrom K., *On the Behaviour near Expiry for Multi-Dimensional American Options*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 339, $644-654$,(2008).

[39] Oliver P., *Numerical Simulation of American Options*, Thèse Allemande, (2004).

[40] Quarteroni A., Valli A., *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, Berlin and Heidelberg, (1994).

[41] Rapuch G., *American option and the free boundary exercise region : a pde approach*, Interfaces Free Bound, 7, no. 1,p. $79-98$,(2005).

[42] Stampacchia G., *Variational Inequalities, in Theory and App1ications of Monotone Operators* (Proc. NATO Advanced Study Institute, Venice,1968), Gubbio, "Oderisi," pp. $101-192$, (1969).

[43] Trabelsi F., *Asymptotic Behavior of Random Maturity American Options*, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 41,$112-121$ (2011).

[44] Villeneuve S., *Options américaines dans un modèle de black-scholes multidimensionnel*, Thèse, Université De Marne la Vallée, (1999).

[45] Wilmott P., Dewyne J., and Howison S., *Options Pricing : Mathematical Model and Computation*, . Oxford Financial Press (1993).

[46] Wilmott P., Dewyne J., and Howison S., *The Mathematics of Financial Derivatives : A Student Introduction*, Cambridge University Press, (1995).

[47] Zhang X.L., *Numerical analysis of American option pricing in a jump-diffusion model*, Mathematics of Operations Research, 22(3) : $668-690$, (1997).