

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2007

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme
de DOCTORAT

Etude des Comportements complexes des transformations polynomiales bidimensionnelles

Option

Systèmes dynamiques

Présentée par :

CHOUT SOUAD

DIRECTEUR DE THESE: ILHEM.DJELLIT Prof. Univ. Badji-Mokhtar

Devant le jury :

PRESIDENT :	F.Rebbani	Prof. Univ. Annaba
EXAMINATEURS :	N. Akroune	M.C Univ. Bejaia
	N.Hamri	Prof. U. Constantine
	S. Saadi	M.C Univ. Annaba
	R. Amiar	M.C Univ. Annaba

Table des matières

Table des matières	1
Liste des tableaux	4
Table des figures	5
Introduction	9
0.1 Introduction :	9
1 Notions générales :	12
1.1 Introduction :	12
1.1.1 Singularités :	13
1.1.2 Bifurcations fondamentales :	14
1.1.3 structure de bifurcation boîtes-emboîtées	16
1.2 Structure feuilletée d'un plan paramétrique :	17
1.2.1 Zone de communication entre feuillets :	18
1.3 Définitions, propriétés et bifurcations fondamentals	20
1.3.1 Définitions :	20
1.3.2 Bassins et domaines attractifs	22
1.3.3 Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins	22
2 Etude de difféomorphisme bidimensionnel	27
2.1 Introduction :	27
2.1.1 Rappels et définitions :	27

2.2	Hénon généralisées :	30
2.2.1	Point fixe :	31
2.2.2	La stabilité	31
2.3	Bifurcation homocline et hétérocline :	33
2.3.1	Frontière des bassins d'attraction -courbes invariantes :	35
3	Caractérisation des lignes critiques dans le plan de phases et le plan paramétrique :	43
3.1	Introduction :	43
3.2	Feuilletage de l'espace de phases :	43
3.2.1	Définitions des antécédents :	44
3.2.2	Lignes critiques	45
3.2.3	Classification des transformations non inversibles (TNI) :	46
3.3	Détermination des lignes critiques dans le plan paramétrique :	49
3.3.1	Définition de la transformation T'	49
3.3.2	Condition nécessaire et suffisante d'existence d'un point cusp sur LC de T :	51
3.4	Résultats numériques et exemples :	54
3.4.1	Exemple1 :	54
3.4.2	Exemple2 :	56
3.4.3	Exemple3 :	59
3.5	Etude des singularités dans le plan de phase :	62
4	Etude de bifurcation d'un endomorphisme de type (Z_1, Z_3, Z_1)	66
4.1	Introduction :	66
4.2	Définitions et bifurcation :	67
4.2.1	Bifurcation de $W^i(P)$:	68
4.2.2	Bifurcation d'une courbe invariante fermée :	70
4.2.3	Bifurcations des bassins spécifiques à la transformations cubique :	74
4.2.4	Généralité pour une transformation de type (Z_1, Z_3, Z_1) :	74

4.2.5	Plan de phase -bassin d'attraction :	77
4.2.6	Bifurcation du bassin d'attraction :	79
4.2.7	Résultats :	85

Bibliographie		98
----------------------	--	-----------

*A mon marie Talbi foued , mes filles hadjer et kaoutar, a mes parents , mes frères et
sœurs , ma belle famille
Ainsi que mes proches amis pour tout leur soutien matériel et morale
A tous, j'offre cet humble travail*

ملخص:

, : \mathbb{R}^2
i Z_i \mathbb{R}^2 Z_i
LC
:
" () :
" HENON
"
:
 \mathbb{R}^2
 \mathbb{R}^2
(Z_1, Z_3, Z_1) ()
.

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement **Madame Fouzia Rebbani**, Professeur à L'université Badji Mokhtar Annaba, d'avoir accepté la présidence du jury de ma thèse de Doctorat. Je lui exprime mes profonds respects et toute ma gratitude.

Je remercie profondément **Monsieur Nasreddine Hami**, Professeur à l'université de Constantine, d'avoir pris la peine d'examiner ma thèse et m'honorer par sa présence parmi les membres du jury.

Je remercie également **Monsieur N. Akroune**, Maître de Conférence à l'université de Béjaia pour l'intérêt qu'il témoigne à mon travail en acceptant de l'examiner et de faire partie du jury de ce mémoire.

J'exprime mes profonds sentiments de reconnaissance et de remerciements à **Madame Ilhem Djellit**, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour son assistance et son aide permanente. Je dois lui afficher mon immense respect pour ses encouragements incessants, ses conseils fructueux. Je la remercie d'avoir accepté la direction de ma thèse de Doctorat.

Je tiens à remercier sincèrement **Mademoiselle Samira Saadi** et **Madame Rachida Amiar**, Maîtres de Conférence à l'université Badji Mokhtar Annaba, elles me font le grand honneur d'accepter de participer à mon Jury de Thèse, je leur exprime ma gratitude.

RESUME

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude des systèmes dynamiques modélisés par des transformations ponctuelles bidimensionnelles et polynomiales T . Une notion très importante est introduite c'est l'inversibilité. Une transformation est inversible si tout point de l'espace de phase admet un antécédent unique. Le caractère de non inversibilité se traduit par le fait qu'il existe des zones notées Z_i dans le plan de phases pour lesquelles, un point peut posséder zéro, un ou plusieurs antécédents de rang un. Ces différentes régions sont séparées par des singularités appelées Lignes Critiques (LC). Du point de vue de la transformation inverse, le plan de phase apparaît alors comme feuilleté. Chaque feuillet est associé à une détermination bien définie de T^{-1} . Les Lignes Critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent.

Dans une première partie, on rappelle quelques propriétés des transformations ponctuelles inversibles de type Hénon généralisées plus particulièrement aux cas conservatifs pour un difféomorphisme cubique et ensuite on procède à l'étude des bifurcations homocline et hétérocline.

Dans la deuxième partie, on procède à une classification des transformations non inversibles sur la base de différentes structures de la courbe LC , on les trace dans le plan de phase et dans le plan paramétrique. Une ligne critique correspond à une bifurcation fold pour une transformation T' associée à T . On fait ensuite apparaître les changements qualitatifs de comportements de solutions par variation de paramètres de T , de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ en s'appuyant sur l'outil des Lignes Critiques et les courbes invariantes fermées. Ces bifurcations considérées concernent les ensembles invariants tels que les variétés stables ou instables de points fixes ou cycles de type col, et leurs bassins d'attraction. Cette étude nous a permis de faire une généralisation de certains types d'endomorphismes.

Abstract

In this thesis, we are interested by the study of dynamical systems modelled by two-dimensional and polynomial transformations.

A significant concept is introduced it is the inversibility, a transformation is invertible if any point of the space of phase admits a single antecedent. The character of noninversibility results in the fact that regions noted Z_i in the plane of phases for which, a point can have zero, one or more antecedents of rank one. These various areas are separated by singularities called Critical Lignes (LC).

In a first part, we give a description of some properties of specific generalized Hénon transformations in the conservative cases for a cubic diffeomorphism and we proceed to the study of homoclinic and hétéroclinic bifurcations.

In the second part, we proceed to a classification of noninvertible transformations on the basis of various structures of curves LC . We then reveals qualitative changes of behaviors by variation of parameters of a transformation T , of type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ using the tool of the Critical Lines and the closed invariants curves. This study enabled us to make a generalization of the certain kinds of endomorphisms.

0.1 Introduction :

Depuis quelques années, l'étude des systèmes dynamiques non linéaires discrets a fait l'objet d'un nombre considérable de travaux menés par plusieurs scientifiques. La non linéarité du système devient le siège de comportement dynamique complexe, le phénomène le plus caractéristique est l'apparition du comportement chaotique. Nous savons que des bifurcations et des phénomènes chaotiques peuvent apparaître dans des systèmes lors de la variation d'un ou de plusieurs paramètres et lorsqu'un élément non linéaire est présent.

La théorie des systèmes dynamiques est un domaine réellement pluridisciplinaire en raison de ces antécédents historiques. Quelle autre discipline aurait permis à un ingénieur en électronique d'engager un débat scientifique avec un biologiste sur la dynamique des battements du coeur humain, avec un mathématicien sur la dimension de l'ensemble de Cantor, avec un économiste sur le comportement chaotique du marché ou avec un musicien sur la technique utilisée pour jouer de la clarinette en introduisant le doublement de période?. Cette pléiade d'applications possibles explique pourquoi depuis une trentaine d'années le nombre de chercheurs de tous les pays s'intéressent à ce type de travaux est de plus en plus important, conduisant les systèmes dynamique à devenir aujourd'hui un pôle d'intérêt majeur dans plusieurs disciplines telles que les mathématiques pures ou appliquées, la mécanique, la physique des particules, la biologie, l'économie.

L'objet de cette thèse consiste en une étude de la dynamique complexe générée par des systèmes non linéaires régis par des équations aux récurrences appelés également transformations ponctuelles notées T . Ces transformations peuvent être réparties en deux classe principales, les transformations inversibles (appelé aussi difféomorphisme) et les transformations non inversibles TNI (endomorphisme). La deuxième classe joue un rôle important du point de vue fondamental et appliqué. Les transformations non inversibles se différencient des transformations dites inversibles par le fait qu'un point de l'espace de phases ne possède pas un antécédent unique mais peut en avoir zéro, un ou plusieurs suivant la région de l'espace considérée.

Dans cette thèse, on distingue deux parties : la première est consacrée à une analyse des spécificités des transformations inversibles. La seconde partie étudie les propriétés relatives aux transformations non inversibles (TNI) qui sont caractérisées par la présence des singularités de l'espace de phase appelées lignes critiques LC . Cet outil joue un rôle important dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, qui permet d'expliquer les bifurcations globales des attracteurs et leurs bassins d'attractions. Parmi les bifurcations où les lignes critiques interviennent, on distingue la bifurcation de type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe", "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe" [32, 33, 34], ainsi que la fractalisation des bassins d'attractions [31, 34].

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

Le chapitre 1 consiste à rappeler quelques notions de base concernant les singularités des transformations ponctuelles de dimension un et deux, et leur propriétés qui ont une grande importance dans la compréhension des comportements complexes qui apparaissent dans les systèmes non linéaires. Nous étudions notamment la notion de bifurcation, de singularités et de bassins d'attraction. Nous parlerons ensuite de deux mécanismes importants, la fractalisation des bassins d'attraction et l'apparition des comportements chaotiques .

Dans le chapitre 2 : On présente une description de quelques propriétés spécifiques aux transformations ponctuelles inversibles (difféomorphismes) polynomiales avec un jacobien constant. Ces transformations sont conjuguées à des compositions d'applications de Hénon généralisées de la forme suivantes :

$$h(x, y) = (y + p(x), -cx)$$

Une étude détaillée relative aux cas conservatifs c -à- d dans les cas où $c = \pm 1$ est considérée. Les courbes invariantes stables et instables issues de point fixe ou cycle de type col et la propriété de symétrie pour un difféomorphisme cubique sont étudiées. La bifurcation liée aux interactions des variétés stables et instables de points col conduisant à la création d'orbites homoclines et hétéroclines est mise en évidence.

Dans le chapitre 3 : On a procédé à une classification et une caractérisation d'une large classe de transformations non inversibles (endomorphismes) bidimensionnelles dans

le plan de phases et dans le plan paramétrique par la considération de lignes critiques. On montre qu'une ligne critique peut correspondre à une bifurcation fold pour une autre transformation. On se référera aux travaux de Carcasses sur les courbes de bifurcation, un programme est établi

Dans le **chapitre4** : On citera d'abord les travaux de Gardini, Millerioux et Mira sur le rôle des lignes critiques sur les variétés invariantes, sur le bassin d'attraction et sur les bifurcations concernant les variétés invariantes de type col et les courbes invariantes fermées en présence des lignes critiques. Cette étude nous a permis une généralisation pour une classe d'endomorphismes bidimensionnels polynomiaux. Quelques résultats sont donnés pour une transformation de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ et s'étendent à des transformations de degrés supérieurs. Enfin, on met en évidence la modification des bassins d'attraction due à la présence des lignes critiques.

Chapitre 1

Notions générales :

1.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous rappelons les principaux résultats relatifs à la théorie des systèmes dynamiques non linéaires et plus particulièrement ceux qui concernent les transformations ponctuelles d'ordre un et deux [24, 33]. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux transformations ponctuelles (ou récurrences) de type autonome, définies par :

$$\begin{cases} X_{n+1} = TX_n = F(X_n, \Lambda) \\ X_n \in R^p, p = 1, 2, \Lambda \in R^m, m = 1, 2, . \end{cases} \quad (1.1)$$

où F est au moins de classe C^1 par morceaux, par rapport à la variable X et au paramètre Λ . La dimension de l'équation (1.1) est p , et R^p est appelé espace de phase de (1.1).

Une solution de (1.1) est formée par suite de points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ où X_0 est appelée condition initiale, les points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ formant la trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.

Le point X_{n+1} de la récurrence (1.1) est le point conséquent de *rang un* du point X_n , le point X_n étant appelé point antécédent de *rang un* du point X_{n+1} . La transformation inverse T^{-1} exprime X_n en fonction de X_{n+1} . Lorsque T^{-1} est unique, la transformation (1.1) est appelée inversible, ou *difféomorphisme*. X_{n+1} peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédants de rang un. Lorsque T^{-1} a ainsi un nombre de déterminations différent de

un, on dit que la transformation T est non inversible, elle est appelée *endomorphisme*. Un point qui admet plusieurs antécédents de rang un confondus est appelé *un point critique*. Pour notre étude, nous introduisons les notions usuelles qui seront utilisées pour décrire les propriétés relatives à la transformation (1.1).

1.1.1 Singularités :

On distingue deux types pour la transformation T de singularités de dimension 0 : les points fixes et les cycles, encore appelés orbites périodiques.

Point fixe

Un point fixe est un point de l'espace de phase vérifiant :

$$T(X^*) = X^* \quad (1.2)$$

Cycle d'ordre k

C'est la généralisation d'un point fixe lorsqu'on considère la récurrence obtenue après k applications de T notée T^k . Les k points $i = 1, \dots, k$ avec $k > 1$, appartenant à un cycle d'ordre k vérifient les deux relations :

$$\begin{aligned} T^k(X_i^*) &= X_i^* \\ T^l(X_i^*) &\neq X_i^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les points fixes et les cycles d'ordre k sont des singularités dites de dimension zéro.

Il peut également apparaître des singularités dites de dimension un. Ce sont des courbes invariantes par l'application de la transformation T ou T^k . Ces courbes décrites dans le plan de phase par $G(X) = \text{constante}$ satisfont l'équation fonctionnelle :

$$G(X_{n+1}) = G(X_n)$$

Multiplicateurs et type de singularité

La notion de multiplicateur permet de caractériser la stabilité des singularités définies plus haut. Les multiplicateurs sont définis lorsque F est différentiable au point considéré.

1. Pour une récurrence de dimension $N = 1$, on définit le multiplicateur d'un point fixe X^* comme le nombre de dérivée de F au point X^* , on note :

$$S = T'(X^*)$$

2. Pour un cycle d'ordre k , on définit le multiplicateur comme la dérivée T^k en un point quelconque du cycle. C'est également le produit des dérivées de T en chaque point du cycle, on note :

$$S = \prod_{i=1}^k T'(X^*)$$

Caractérisations des singularités

Un cycle ou un point fixe est dit *attractif* ou *asymptotiquement stable* si $|S| < 1$, il est *répulsif* ou *instable* si $|S| > 1$.

Transformation bi-dimensionnelle ($N = 2$) :

un cycle d'ordre k possède deux multiplicateurs notés S_1 et S_2 , valeurs propres de la matrice Jacobienne ou matrice des dérivées partielles de T^k .

Selon les valeurs de S_1 et S_2 on peut définir plusieurs types de cycles (respect. de points fixes). Ces types caractérisent la dynamique du système au voisinage des points de cycle (respect du point fixe).

” Si S_1 et S_2 sont complexes conjugués, le cycle est dit de type foyer.

Il est stable si $|S_1| < 1$ et $|S_2| < 1$ et instable si $|S_1| > 1$ ou $|S_2| > 1$.

” Si $|S_1| < 1$ et $|S_2| < 1$ le cycle est de type noeud stable.

” Si $|S_1| > 1$ et $|S_2| > 1$ le cycle est de type noeud instable.

” Si $|S_1| < 1$ et $|S_2| > 1$ le cycle est de type col.

1.1.2 Bifurcations fondamentales :

On appelle bifurcation tout changement qualitatif des propriétés d'une transformation par variation des paramètres. Par exemple déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur.

On expose dans ce paragraphe quelques bifurcations fondamentales concernant les singularités énumérées ci-dessus.

1-la bifurcation fold ou pli :

Deux points fixes (cycles d'ordre k) apparaissent : l'un stable et l'autre instable. Ces deux points fixes (cycles d'ordre k) sont confondus à la valeur de bifurcation pour laquelle S_1 et S_2 est égal à 1. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\begin{aligned} \emptyset &\longleftrightarrow N_s^k + C^k & (a) \\ \emptyset &\longleftrightarrow N_i^k + C^k & (b) \end{aligned} \tag{1.4}$$

\emptyset signifie absence de cycle, N_s^k cycle noeud d'ordre k stable, C^k cycle col d'ordre k , N_i^k cycle noeud d'ordre k instable.

2-la bifurcation de Neimark-Hopf :

Un point fixe (cycle d'ordre k) de type foyer change de stabilité (lorsque $S_1 = \overline{S_2} = \rho e^{i\phi}$ vérifient $\rho = 1$) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe (cycle) d'origine. On a le schéma :

$$\begin{aligned} F_s^k &\longleftrightarrow F_i^k + CFI_s & (a) \\ F_i^k &\longleftrightarrow F_s^k + CFI_i & (b) \end{aligned} \tag{1.5}$$

F_s^k signifie cycle foyer d'ordre k stable, F_i^k cycle foyer d'ordre k instable, CFI_s courbe fermée invariante stable, CFI_i courbe fermée invariante instable.

3-la bifurcation flip :

Un point fixe (rep. cycle d'ordre k) de type noeud change de stabilité lorsque S_1 ou S_2 est égal à -1 et donne naissance à un cycle d'ordre 2 (resp. cycle d'ordre $2k$) qui a la même stabilité que le point fixe (resp. cycle d'ordre k) d'origine.

Cette bifurcation est représentée par le schéma suivant :

$$\begin{aligned} N_s^k &\longleftrightarrow N_i^k + N_s^{2k} & (a) \\ N_i^k &\longleftrightarrow N_s^k + N_i^{2k} & (b) \end{aligned} \tag{1.6}$$

N_s^k signifie cycle noeud d'ordre k stable, N_i^k signifie cycle noeud d'ordre k instable, N_s^{2k} signifie cycle noeud d'ordre $2k$ stable, N_i^{2k} signifie cycle noeud d'ordre $2k$ instable.

1.1.3 structure de bifurcation boîtes-empoîtées

La structure de bifurcation "boîtes-empoîtées" a été mise en évidence en 1975, cette structure est un autre type d'organisation fractal pour l'ensemble de bifurcation dans le plan paramétrique d'un système dynamique donné. Rappelons que le terme bifurcation désigne des changements qualitatifs du système sous l'effet des variations des paramètres. Ici le terme fractal indique que les boîtes sont autosimilaires c'est à dire que l'ensemble est semblable aux parties (boîtes) et ceci reste vrai même quand ces parties sont infinitésimales. Cette structure fractale donne une route vers le chaos pour un grand nombre de systèmes dynamiques. La cascade de Merberg ou cascade de doublement de période constitue une partie de la structure de bifurcation "boîtes-empoîtée" les détails concernant cette structure peuvent être trouvés dans [24, 33].

Appelons Ω_1 l'intervalle $[\lambda_{(1)_0}, \lambda_1^*]$ de l'axe paramétrique contenant toutes les structures de bifurcations "boîtes-empoîtées". A l'intérieur de cette boîte Ω_1 , on distingue deux sous-intervalles (boîtes) sur l'axe paramétrique figure 1.1 notés ω_1 et Δ_1 . En général, l'indice k utilisé désigne les boîtes ω_k et Δ_k qui forment la boîte Ω_k , cette dernière traduit la même organisation des bifurcations que la boîte Ω_1 mais par rapport à la transformation T^k . La figure 1.1 donne une représentation de la disposition de ces boîtes.

Dans [30] une structure de bifurcation "boîtes-empoîtées" de type cubique a été décrite pour la transformation définie par :

$$x_{n+1} = -x_n^3 + \mu x_n^2 + \lambda x_n \quad (1.7)$$

Ce type de structure constitue une propriété caractéristique des endomorphismes à une dimension définis par une fonction à deux extrema, vérifiant des conditions de régularité suffisantes pour assurer l'existence d'un attracteur au voisinage de chaque extremum.

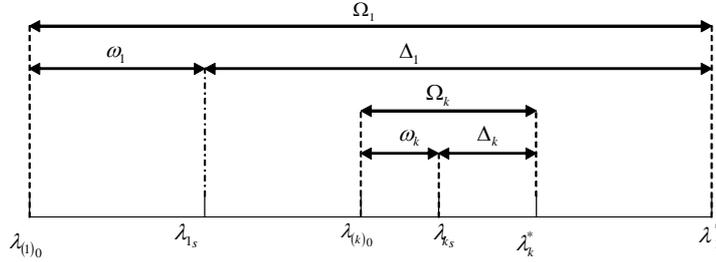


figure1.1

1.2 Structure feuilletée d'un plan paramétrique :

L'étude de la structure de bifurcation de (1.1) dans le plan de paramètres $\Lambda^* = (\lambda_1, \lambda_2)$ montre que pour un point de ce plan, il peut exister plusieurs cycles d'ordre et de stabilité différents. Cette remarque induit le caractère feuilleté du plan des paramètres. Chaque feuillet est alors associé à un cycle bien défini par son ordre k , l'ordre d'échange de ses points j , et les valeurs propres de la transformation linéaire associée S_1 et S_2 , les feuillets pouvant se joindre en des points ou courbes particuliers. Soit $|z|$ une norme qualitative associée à un cycle, l'espace $(|z|, \lambda_1, \lambda_2)$ donne une représentation tridimensionnelle qualitative de la structure de ces feuillets. Les courbes $\Lambda_{(k)0}^j$ désignent les courbes correspondant à une bifurcation fold. Elles sont la jonction de deux feuillets, l'un lié au cycle né stable, l'autre lié au cycle né instable.

Des communications plus complexes entre feuillets peuvent apparaître par des singularités de codimension deux comme les points cuspidaux.

1.2.1 Zone de communication entre feuillets :

Des zones de communication entre feuillets du plan des paramètres peuvent apparaître [5, 31]. Ces zones sont caractérisées par l'existence d'un point cuspidal C_k^j sur une courbe de bifurcation de type fold associée à des courbes de bifurcation de type flip. Il existe trois schémas distincts d'association de la courbe fold avec courbes flip qui correspondent à trois zones de communication.

Zone échangeur :

Dans le plan de paramètres (λ_1, λ_2) , une zone échangeur met en jeu une courbe de type fold $\Lambda_{(k)_0}^j$ formant un point cuspidal C_k^j , des courbes de types flip $\Lambda_k^j, \Lambda_k^{j'}, \Lambda_k^l$ et soit une courbe de bifurcation fold $\Lambda_{(k)_0}^l$, soit une courbe de bifurcation flip $\Lambda_{k/2}^l$, donnant naissance à un cycle d'ordre double (k, l) à partir d'un cycle $(k/2, l)$ figures 1.2(a) et 1.2(b). Ces zones échangeurs sont respectivement désignées par $ZEK[l_0, j]$, $ZEK[l, j]$.

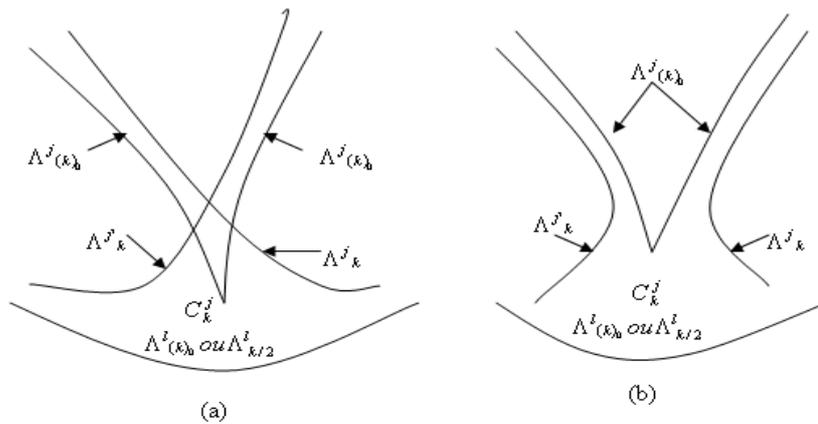


figure1.2 : Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2)

Zone col :

Cette zone met en jeu deux courbes de type fold $\Lambda_{(k)_0}^j$ et $\Lambda_{(k)_0}^{j'}$ et deux courbes flip Λ_k^j et $\Lambda_k^{j'}$ figure1.3. Le principe de cette communication est que le cycle col (k, j) ($S > 1$) qui naît au cours de la bifurcation $\Lambda_{(k)_0}^j$ ($S = +1$) est le cycle de base qui définit aussi la courbe de bifurcation $\Lambda_{(k)_0}^{j'}$ présentant un point cuspidal $C_k^{j'}$ dans le plan des paramètres. La zone col est désignée par le formalisme $ZCK[j, j']$.

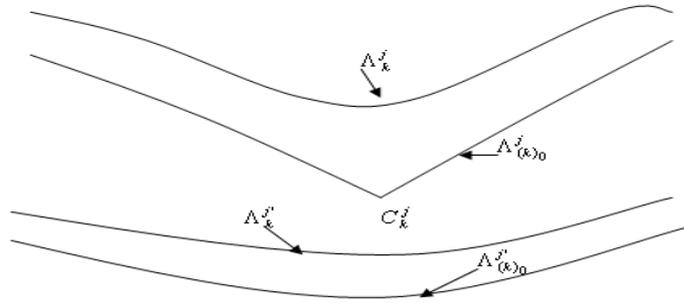


figure1.3 : Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2)

Zone source :

Cette zone met en jeu sept courbes de bifurcation :

- la courbe de type fold $\Lambda_{(k)_0}^j$ présentant un point cuspidal C_k^j ,
- la courbe de type flip Λ_k^j formant une boucle qui entoure le point cuspidal,
- la courbe de type flip Λ_k^l située sur le même feuillet que Λ_k^j ,
- les deux courbes de type fold $\Lambda_{(2k)_0}^m$ et $\Lambda_{(2k)_0}^{m'}$ se terminant sur Λ_k^j par les deux points C_{2k} et C'_{2k} ,
- les deux courbes de type flip Λ_{2k}^m et $\Lambda_{2k}^{m'}$, chacune d'elles résultant d'un doublement d'ordre d'une branche de Λ_k^j et venant aussi des cycles $(2k, m)$ et $(2k, m')$ générés par les deux courbes fold précédentes. Cette zone est désignée par le formalisme $ZSK[l, j, (m, m')]$

Ces différentes zones de communications correspondent, lorsqu'elles sont associées à des cycles stables, à des zones de multistabilité dans l'espace des paramètres. Plusieurs études dont [5, 33] ont mis en évidence plusieurs scénarios concernant les transitions d'une zone source ou d'une zone col avec une zone échangeur lors de la variation d'un troisième paramètre.

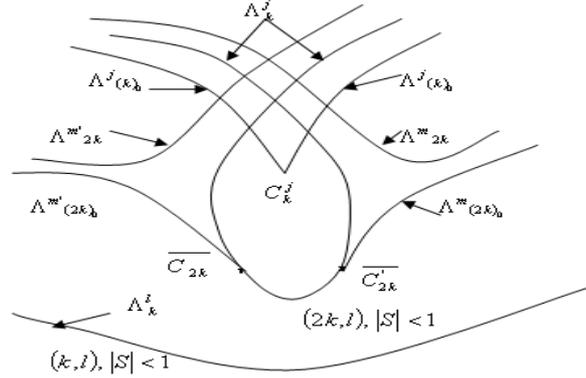


figure 1.4 : Représentation d'une zone source dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2)

1.3 Définitions, propriétés et bifurcations fondamentals

Dans cette partie, on rappelle des définitions essentielles à la description des changements qualitatifs sur le plan paramétrique et dans le plan phase, ainsi que certaines bifurcations de base qui sont à l'origine des bifurcations plus complexes étudiés aux chapitre 3 et 4.

1.3.1 Définitions :

Nous allons donner des définitions aux quelles nous nous référons par la suite [33].

Soit la transformation T définie IR^2 dans IR^2 .

L'ensemble A est dit invariant par T si $T(A) = A$

L'ensemble A est dit inversement invariant par T si $T^{-1}(A) = A$ où T^{-1} représente tous les antécédents de rang un de T .

Variétés stable et instable

Soit P^* un point fixe répulsif (instable), soit U un voisinage de P^* .

- La variété locale instable (c'est à dire dans U) de P^* est définie par l'ensemble des points de U dont la suite d'antécédent converge vers P^* .

- La variété globale instable est constituée par tous points du domaine par lequel il existe une suite d'antécédent converge vers P^* .

Elle peut être obtenue en construisant les images des variétés locales instables.

Définition 1.3.1.1 :

La variété locale instable $W_l^i(P^*)$ de P^* , et la variété globale instable de P^* , $W^i(P^*)$ sont données par :

$$W_l^i(P^*) = \{x \in U : x_{-n} \in T^{-n}(x) \rightarrow P^* \text{ et } x_{-n} \in U, \forall n\}.$$

$$W^i(P^*) = \{x \in IR^2 : x_{-n} \in T^{-n}(x) \rightarrow P^*\} = \cup_{n \geq 0} T^n(W_l^i(P^*)).$$

$W^i(P^*)$ vérifie les propriétés suivantes :

P1 : $T(W^i(P^*)) = W^i(P^*)$ invariante

P2 : $T^{-1}(W^i(P^*)) \supseteq W^i(P^*)$.

En général, dans le cas d'une transformation non inversible T , la variété instable n'est pas invariante par son inverse T^{-1}

La variété locale stable $W_l^s(P^*)$ de P^* en U et la variété globale $W^s(P^*)$ sont définies par :

$$W_l^s(P^*) = \{x \in U : x_n \in T^n(x) \rightarrow P^* \text{ et } x_n \in U, \forall n\}.$$

$$W^s(P^*) = \{x \in IR^2 : x_n \in T^n(x) \rightarrow P^*\} = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(W_l^s(P^*)).$$

$W^s(P^*)$ vérifie les propriétés suivantes :

P1 : $T^{-1}(W^s(P^*)) = W^s(P^*)$ invariante

P2 : $T(W^s(P^*)) \subseteq W^s(P^*)$.

P3 : Lorsque T est inversible, un point fixe instable (noeud ou foyer) ne possède pas d'ensemble stable excepté lui même. En revanche si T est non inversible, l'ensemble stable local de P^* est le point P^* lui même et l'ensemble stable globale est constitué de tous les antécédent de P^* on a : $W^s(P^*) = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(P^*)$.

1.3.2 Bassins et domaines attractifs

Définition 1.3.2.2 :

L'ensemble invariant fermé A est dit attractif, s'il existe un voisinage U de A suffisamment petit tel que $T(U) \subset U$ et $T^n(X) \rightarrow A$, quand $n \rightarrow \infty$, ceci pour tout $X \in U$.

Nous appellerons attracteur tout ensemble attractif qui est topologiquement transitif, ce qui signifie que pour tous couples d'ensembles ouverts $U_1, U_2 \subset A$, il existe un entier positif k tel que $T^k(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$, ou de façon équivalente, il existe un point $P \in A$ dont l'orbite (la séquence itérée à partir de P) est dense dans A .

Définition 1.3.2.3 :

Le bassin d'attraction $D(A)$ (ou bassin) d'un ensemble attractif A est l'ensemble ouvert de tous les points P tels que $T^n(X) \rightarrow A$, quand $n \rightarrow \infty$.

Remarque : Pour un système, c'est le domaine constitué par l'ensemble des conditions initiales qui convergent vers le même état d'équilibre. La frontière de ces bassins peut être constituée par des singularités de dimension $d = 1, 2, \dots, N - 1$. Ces singularités sont appelées séparatrices. Elles jouent un rôle fondamental du fait qu'elles séparent des domaines (bassins) dont le comportement est qualitativement différent.

Définition 1.3.2.4 :

Le domaine chaotique d , est un domaine invariant, dont les points génèrent des séquences itérées sensibles aux conditions initiales. Le domaine d est limité par des sous-ensembles de variétés critiques.

1.3.3 Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d'un domaine D , situé dans le plan de phase qu'on appellera bassin d'un attracteur A . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection de D avec une ligne critique LC d'une transformation non inversible. On notera ∂D la frontière de D , D_0 le bassin immédiat de l'attracteur A et ∂D_0 sa frontière.

a)-bassin connexe → bassin non connexe ($\lambda = \lambda_1$) :

Cette bifurcation apparaît lorsque ∂D_0 a un contact avec LC au point $a = c$. Cette situation génère une séquence de points $T^{-n}(a) = T^{-n}(c)$ constituant le germe d'une séquence de N "îlots" naissant à partir de $a = c$ et de ses antécédents. Dans le cas de la figure 1.5a, $N = 1$ car $D_1 = T^{-1}(D_0)$ appartient à la région Z_0 qui ne possède pas d'antécédents, c'est donc une séquence finie.

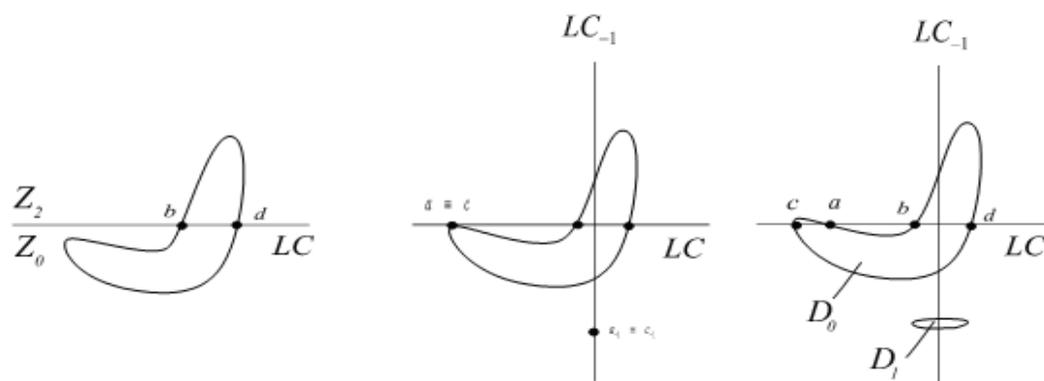


figure 1.5a : Bifurcation d'un domaine D_0 connexe \rightarrow non connexe donnant un îlot D_1

b)-bassin non connexe → bassin connexe ($\lambda = \lambda_2$) :

C'est la bifurcation inverse de la précédente. Elle intervient lorsque ∂D_0 entre en contact tangent avec LC de telle sorte que $a = b$ (figure 1.5b) induisant un contact entre $D_1 = T^{-1}(D_0)$ et D_0 en $a_{-1} = b_{-1}$. (contact non tangentiel).

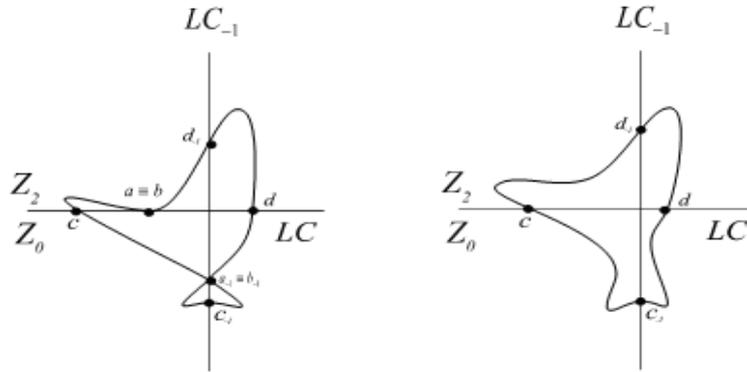


figure1.5b : Bifurcation d'un domaine D_0 non connexe \rightarrow connexe

De manière générale, les bifurcations a) et b) surviennent lorsque l'intersection entre D et LC est formée de segments non connexes.

c)-bassin simplement connexe \rightarrow bassin multiplement connexe ($\lambda = \lambda_3$) :

Cette bifurcation est illustrée sur la figure1.6. Pour $\lambda = \lambda_3$, $\partial D_0 \cap LC = a = b$. Pour $\lambda > \lambda_3$, il se crée une "baie" H_0 qui donne naissance à un "lac" H_1 , antécédent de rang 1 de H_0 après application de la transformation inverse de T , $H_1 = T^{-1}(H_0)$.

La séquence arborescente $T^{-n}(a = b)$, $n = 1, 2, ..$ constitue le germe de la séquence $H_{n+1} = T^{-n}(H_1)$ $n = 1, 2, ..$ la présence de "lacs" rend le bassin D multiplement connexe. Le passage d'un bassin multiplement connexe à un bassin connexe se fait au travers de la bifurcation inverse, c'est-à-dire lorsque la "baie" H_0 se réduit au point $a = b$ pour $\lambda = \lambda_4$

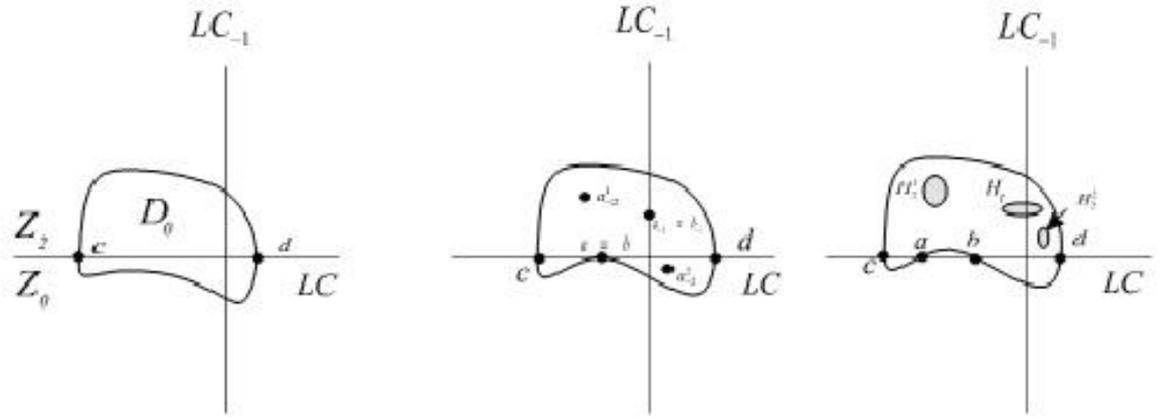


figure1.6: Création d'une baie H_+ limitée par l'arc (ab) et LC à partir de la tangence $a=b$.
 Naissance d'une arborescence $H_1 = T^{-1}(H_0)$, $H_1' = T^{-1}(H_1)$ et $H_1'' = T^{-1}(H_1')$

d)- modification du nombre d'îlots de D ou apparition d'une nouvelle arborescence :

On raisonne sur la figure1.7a. Considérons seulement l'antécédent de rang i de D_0 noté D_i . Avant la bifurcation, $\lambda < \lambda_5$, $D_i \subset Z_0$ et $D_i \cap LC = \emptyset$. Pour $\lambda = \lambda_5$, $D_i \cap LC = \alpha$ constituant le germe de l'arborescence $T^{-n}(\alpha)$ $n = 1, 2, \dots$ avec $T^{-1}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$ à partir de laquelle naît une arborescence "d'îlots" $D_{i+n} = T^{-n}(D_1)$

L'apparition d'une nouvelle arborescence est représentée sur la figure1.7b. Pour $\lambda < \lambda_6$, $D_i \cap LC = \beta$, nouveau contact tangentiel entre D_i et LC . On a $T^{-1}(\beta) = \beta_{-1} \in LC_{-1}$ et $D_{i+1} \cap LC_{-1} = \beta_{-1}$. A partir de $\lambda = \lambda_6$, D_{i+1} se divise, au point β_{-1} , en deux "îlots" situés de part et d'autre de LC_{-1} dans les régions respectives R_1 et R_2 de telle sorte que $D_{i+1} = D_{i+1}^1 \cup D_{i+1}^2$ avec $D_{i+1}^1 \subset R_1$, $D_{i+1}^2 \subset R_2$ et pour $\lambda > \lambda_6$, $D_{i+1} \cap LC_{-1} = \emptyset$.

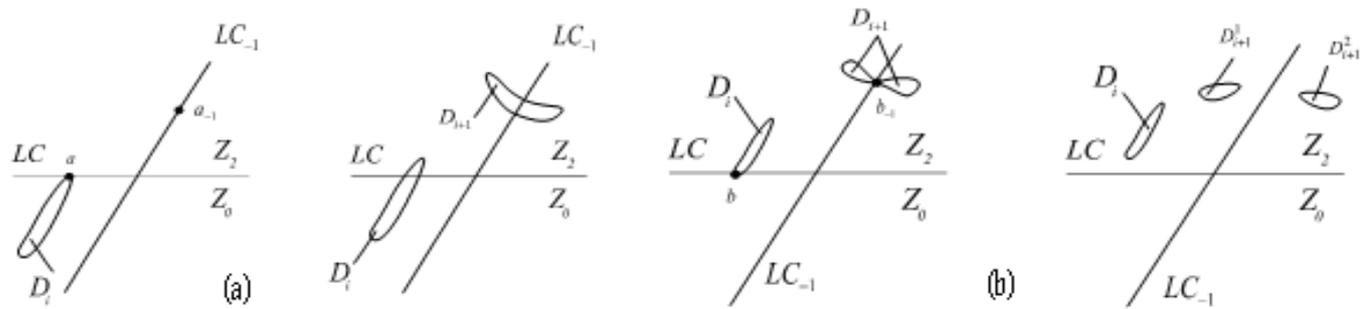


figure 1.7: a) Modification du nombre d'îlots lorsque $D_i \cap Z_1 = \emptyset$ qui provoque la formation $D_{i+1} = F^{-1}(D_i)$.

b) Apparition d'une nouvelle séquence d'îlots lorsque $D_i \subset Z_1$ provoquant la formation de arborescences nées de D_{i+1}^1 et D_{i+1}^2 de part et d'autres de LC_{-1} .

e)-destruction d'une zone chaotique notée (d) :

Une zone chaotique (d) subit une bifurcation pour une valeur de paramètre $\lambda = \lambda^*$ lorsque sa frontière ∂d constituée de segments de lignes critiques entre en contact avec la frontière ∂D_0 de son bassin immédiat.

Après la bifurcation, (d) est détruite en donnant naissance à un répulseur étrange ou à une modification qualitative des propriétés de (d). Ce répulseur est constitué d'une infinité de cycles instables, de leurs points limites et de leurs antécédents, appartenant à (d) avant la bifurcation. Ce points sont responsables du transitoire chaotique qu'il en résulte, faisant évaluer les trajectoires discrètes du plan de phase soit vers l'infini, soit vers un autre attracteur à distance finie.

Chapitre 2

Etude de difféomorphisme bidimensionnel

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous étudions les bifurcations homoclines et hétéroclines génériques d'une famille de difféomorphismes polynomiaux à deux dimensions au voisinage d'un cas conservatif. La détermination de ces bifurcations qui ont comme conséquence la présence des points homoclines et hétéroclines est intéressante. Nous considérons le plus simple exemple dans les systèmes dynamiques non triviale : c'est la famille d'application de Hénon définie par :

$$(x', y') = (y + x^2 + a, -cx)$$

Cette application, avec le Jacobien constant et égal à c , est un difféomorphisme quand $c \neq 0$.

2.1.1 Rappels et définitions :

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques définitions et propositions sur ces difféomorphismes qui peuvent modéliser des systèmes dynamiques. Ces applications ont été étudiées en détail par Friedland et Milnor pour leurs propriétés génériques. En effet, ils ont mon-

tré qu'en général les difféomorphismes polynomiaux du plan avec Jacobien constant, sont conjugués à des compositions d'applications généralisées de Hénon [11] définis par :

$$h(x, y) = (y + p(x), -cx)$$

où $p(x)$ est un polynôme et $c \neq 0$, s'appellent applications de Hénon généralisées.

Ce résultat est une déduction du théorème de Jung [11]. Les hypothèses de ce théorème nécessitent que l'on rappelle d'abord les définitions des ensembles suivants :

Définitions :

On appelle ensemble de Keller, noté K : l'ensemble des applications polynomiales du plan avec le Jacobien non nul et constant.

L'ensemble de Keller contient deux sous ensembles particuliers. Le premier sous ensemble, noté A , est celui des applications *affines*

$$A = \{a \in K : a(x, y) = (\xi, \eta) + L(x, y)\}$$

où L est une application linéaire non singulière.

A est un groupe pour la composition d'applications.

Le deuxième sous ensemble, noté E , est celui des applications dites *élémentaires*, défini par

$$E = \{e \in K : e(x, y) = (\alpha x + \xi, \beta y + p(x))\}$$

où $p(x)$ est un polynôme de degré arbitraire, et $\alpha, \beta \neq 0$.

E est aussi un groupe pour la composition d'applications.

Dans les systèmes dynamiques, les applications affines et élémentaires sont triviales ; mais il existe des applications intéressantes dynamiquement dans l'ensemble de Keller K , ceux sont les applications de Hénon généralisées.

Une application de Keller est un difféomorphisme. Si l'inverse d'une application de Keller est polynomiale, celle ci est appelée application *Cremona*. L'ensembles de ces applications est un groupe, le *groupe Cremona affine*, noté C .

Notons que toute application de Hénon généralisée a un inverse polynomiale

$$h^{-1}(x, y) = \left(-\frac{y}{c}, x - p\left(-\frac{y}{c}\right)\right),$$

Alors toute composition d'applications de Hénon généralisées est une application Cremona.

Théorème (Jung)[11] : Le groupe Cremona affine est généré par les sous groupes affine A , et élémentaire E .

Ce théorème a été utilisé par Friedland et Milnor, pour montrer que toute application Cremona f peut être écrite comme une “application réduite” sous la forme

$$f = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1$$

tel que chaque g_i appartient à E ou A , mais pas à $S = E \cap A$, et deux facteurs consécutifs n'appartiennent pas au même sous groupe.

Si la longueur n de l'application réduite de f est un, alors elle est soit affine soit élémentaire, et sa dynamique est triviale. Quand $n > 1$, les facteurs peuvent toujours être permutés cycliquement par conjugaison, i.e., $f \cong g_1 \circ f \circ g_1^{-1} = g_1 \circ g_n \circ \dots \circ g_2$. Si n est impaire, l'application réduite commence et finit avec des éléments du même sous groupe. Dans ce cas, nous pouvons permuter le premier élément à la fin et combiner ces deux facteurs tel que l'application réduite ait une longueur paire. Finalement, nous pouvons permuter cycliquement tel que f soit conjuguée à une application qui commence par une application affine :

$$f \cong a_k \circ e_k \circ a_{k-1} \circ \dots \circ e_1$$

où la longueur est $2k$, et chaque facteur n'appartient pas au sous groupe S . L'application f est alors dite cycliquement réduite.

Théorème (Friedland et Milnor)[11] : Toute application réduite cycliquement $f \in C$ de longueur $2k$, est conjuguée à une composition de k applications de Hénon généralisées,

$$h_i(x, y) = (y + p_i(x), -cx)$$

où $p_i(x)$ a un degré d_i et $p_i(x) = \pm x^{d_i} + O(x^{d_i-2})$.

Ce théorème reste en général vrai, pour tout difféomorphisme polynomial non trivial du plan avec Jacobien constant, c'est-à-dire appartenant à K , si l'on tient compte de la conjecture de Keller suivante :

Conjecture Jacobienne de Keller[11] : toute application de Keller, a un inverse polynomiale.

2.2 Hénon généralisées :

Dans cette partie nous étudions la dynamique des applications de Hénon généralisées de type :

$$h(x, y) = (y + p(x), -cx) \quad (2.1)$$

Nous considérons dans cette partie le degré d du polynôme p est arbitraire.

Il est suffisant de traiter le cas $|c| \leq 1$, puisque avec $|c| > 1$, l'inverse d'un Hénon généralisée est conjugué à une application de Hénon généralisée.

Pour $|c| < 1$ et sous la réflexion $r(x, y) = (y, x)$ on a la relation suivante :

$$r \circ h \circ r^{-1} = \left(y - p\left(\frac{-x}{c}\right), \frac{-x}{c} \right)$$

Lorsque $c = \pm 1$ l'application (2.1) est réversible, elle est conjuguée à son inverse, et on obtient :

$$R \circ h \circ R^{-1} = h^{-1}, \text{ tel que } R(x, y) = (-y, -x) \quad (2.2)$$

Si $R = R^{-1}$, le réversible est une involution [9], et l'application de Hénon généralisé h peut être factorisée dans un produit d'involution sous la forme suivante :

$$h = R \circ (R \circ h).$$

L'involution $R \circ h$ est également un réversible pour h .

On peut se référer aux travaux de Meiss et Dullin sur ces applications.

Lemme :

Soit S une transformation dans IR^2 telle que $S(x, y) = (-x, -y)$ et h : une application de Hénon généralisée.

Si $p(x) = -p(-x)$ alors

$$S \circ h \circ S^{-1} = h \quad (2.3)$$

et h a une symétrie par rapport à l'origine

2.2.1 Point fixe :

Un point fixe (x_*, y_*) de la transformation (2.1) est une solution qui satisfait le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} y_* = -cx_* \\ (1+c)x_* = p(x_*) \end{cases} \quad (2.4)$$

tel que x_* soit une racine du polynôme :

$$g(x) = p(x) - (1+c)x.$$

Ainsi tous les points fixes appartiennent à la droite $y + cx = 0$.

Les ensembles fixes des applications réversibles sont déterminés alors par :

$$Fix(R) = \{(x, y) : y = x\}, \text{ et } Fix(Rh) = \{(x, y) : 2y = -p(x)\} \quad (2.5)$$

Ces deux ensembles et leurs itérations jouent un rôle important pour déterminer des orbites périodiques et symétriques par rapport à $Fix(R)$

2.2.2 La stabilité

La stabilité des points fixes est déterminée par le Jacobian de la transformation (2.1)

$$J = \begin{pmatrix} p'(x) & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix},$$

Soit $trJ = p'(x)$ la trace de la matrice jacobienne.

Le point fixe est stable si ses paramètres appartiennent à l'intérieur du triangle $|trJ| - 1 \leq c \leq 1$ dans le plan paramétrique (trJ, c) .

Le point fixe est linéairement stable sur la frontière du triangle excepté aux deux coins $trJ = \pm 2$, où il est instable. Ainsi il est nécessaire que $|trJ| \leq 1 + c$ pour assurer la stabilité.

Au point fixe nous avons $(1 + c)x_* = p(x_*)$ et $trJ = p'(x)$. La division de ces deux équations nous donne les critères nécessaires de stabilité.

Proposition 2.2.2.1 :

Soit (x_, y_*) un point fixe de (2.1), il est stable si et seulement si :*

$$\left| \frac{trJ}{1 + c} \right| = \left| x_* \frac{p'(x_*)}{p(x_*)} \right| = \left| \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - (x_i/x_*)} \right| \leq 1. \quad (2.6)$$

si $p(x) = \pm \prod_{i=1}^d (x - x_i)$ n'a aucune racine double.

Considérons les polynômes de la forme suivante $p(x) = +x^d + \dots$, et supposons que x_* est le plus grand de tous les points fixes. Alors x_* est nécessairement instable, parce que le graphe de $p(x)$ traverse $(1 + c)x$ à l'infini puisque $trJ = p'(x) > (1 + c)$.

Remarque1 :

Si le jacobien de la transformation (2.1) est égal à 1, cette dernière proposition entraîne que le produit des multiplicateurs $S_1.S_2 = 1$ ce qui exclue que les points soient de type noeud ou foyer, on est dans le cas des transformations conservatives.

Avec ces transformations, la non linéarité entraîne pour les courbes invariantes passant par un point ou cycle col l'existence des points homoclines et hétéroclines. La présence de ces points génère un comportement dynamique complexe.

2.3 Bifurcation homocline et hétérocline :

Nous rappelons quelques notions de base introduites au chapitre 1 auxquelles nous nous référerons souvent par la suite sur la bifurcation homocline et hétérocline

Définition 2.3.1 :

Soit T une transformation de degré d . On dit qu'un point q est *homocline* au point fixe répulsif P^* si et seulement si $q \in W^i(P^*) \cap W^s(P^*)$. Dans le cas où T est non inversible et si P^* est répulsif, cela signifie que pour $q \in W^i(P^*)$, il existe un entier positif m tel que $T^m(q) = q_m = P^*$.

L'orbite homocline $O_0(q)$ associée à q , $q \in U(P^*)$, est l'ensemble des points formés par les itérés directs successifs de q , et de la séquence des antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse T_l^{-1} de T dans $U(P^*)$:

$$O_0(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, \dots, q_n, \dots\}$$

où $q_n = T^n(q) \rightarrow P^*$, et $q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow P^*$

Si P^* est répulsif, alors il existe un entier fini m tel que $q_m = T^m(q) = P^*$ tel que $O_0(q) = \{T_l^{-n}(q), q, q_1, \dots, q_m = P^*; n > 0\}$.

Un segment fermé d'une telle variété entre deux points q_1 et q_2 est noté par $W^i[q_1, q_2]$.

Un segment qui se prolonge au point fixe P^* par exemple. $W^i(P^*, q]$, s'appelle *segment initial* de la variété.

L'ensemble d'orbites homoclines est l'ensemble des intersections des variétés stable et instable W^s, W^i .

Un point q est un point homocline principal si les deux segments initiaux s'intersectent seulement au point q c.-à-d

$$W^i(P^*, q] \cap W^s(P^*, q] = \{q\}.$$

Définition 2.3.2

Soient P^* et r^* deux points fixes répulsifs de T . On dit que $q \in U(P^*)$, est *hétérocline* de P^* vers r^* , ou connecte P^* à r^* , si $T^n(q) \rightarrow r^*$, quand n croît, et q appartient à l'ensemble instable local $W_l^i(P^*)$ de P^* dans $U(P^*)$. Lorsque P^* est répulsif, il existe un entier positif m tel que $T^m(q) = r^*$.

L'orbite *hétérocline* $O_e(q)$ connectant P^* à r^* , associée à $q \in U(P^*)$, est l'ensemble des points obtenus par itération directe de q , la séquence infinie de ses antécédents obtenus par la transformation inverse T_l^{-1} de T dans $U(P^*)$:

$$O_e(q) = \{ \dots, T_l^{-n}(q), q, q_1, \dots, q_n \rightarrow r^* \}, \lim_{n \rightarrow \infty} T_l^{-n}(q) = P^*$$

où $q_i = T^i(q)$, pour tout $i > 0$. Lorsque r^* est répulsif, on a $T^m(q) = r^*$.

Définition 2.3 :

Soit T une transformation inversible dépendant du paramètre λ et un point fixe de T noté P^* . Une bifurcation homocline apparaît lorsque le paramètre atteint la valeur $\lambda = \tilde{\lambda}$ en faisant apparaître (disparaître) une infinité d'orbites homoclines.

Corollaire 2.3.1 : *soit W^i la variété instable du point fixe P^* , si $W^i \cap \text{Fix}(R) \neq \emptyset$, alors tous les points d'intersection sont des points homoclines.*

Lemme 2.3.1 : Soit W^s et W^i les variétés stables et instables du point fixe P^* et soit R un difféomorphisme défini comme suit

$$R(x, y) = (-y, -x) \text{ alors}$$

$$RW^i(P^*, q] = W^s(P^*, Rq]$$

Tel que $W^i(P^*, q]$: est le segment initial de la variété instable au point q

$W^s(P^*, Rq]$: est le segment initial de la variété stable au point Rq

Rq : est le point symétrique de q

Preuve :

Par définition, si $q \in W^i$ alors $T^{-n}(q) \rightarrow P^*$ quand $n \rightarrow \infty$ puis $RT^{-n}(q) = T^n(Rq) \rightarrow RP^* = P^*$. Ainsi $Rq \in W^s$, on obtient donc

$$RW^i(P^*, q] = W^s(P^*, Rq]. \tag{2.7}$$

Lemme 2.3.2 : Soit P^* un point fixe hyperbolique, q un point homocline et soit R une transformation réversible telle que $R(x, y) = (-y, -x)$. Alors il existe des points homoclines aux deux ensembles fixes $\text{Fix}(R)$ et $\text{Fix}(RT)$.

Preuve :

D'après le lemme 1, si q est point homocline $q \in W^i \cap W^s$ alors $Rq \in W^s \cap W^i$ est aussi un point homocline. Comme l'ensemble fixe $Fix(R)$ divise le plan de phases en deux. Les points q, Rq appartiennent aux cotés opposés de cette courbe, alors le segment $RW^i[q, Rq]$ doit intersecté l'ensemble fixe $Fix(R)$, et le point d'intersection est nécessairement homocline et symétrique par rapport à l'ensemble fixe $Fix(R)$.

2.3.1 Frontière des bassins d'attraction -courbes invariantes :

Ce paragraphe présente quelques résultats que nous avons mis en oeuvre pour modéliser les variétés stables et instables pour une transformation ponctuelle bidimensionnelle cubique à l'aide d'un logiciel dite "dynamics", les variétés stables des cycles situées sur la frontière constituent une partie de la frontière du bassin et les variétés instables convergent vers des cycles attractifs. Nous considérons l'intersection possible de bassin d'attraction et la variété instable de point fixe de type col pour le cas conservatif où $c = \pm 1$ de la transformation (2.1).

Première situation : pour $c = 1$

Considérons la transformation ponctuelle T_1 définie par

$$T_1 : \begin{cases} x' = x^3 + ax + b + y \\ y' = cx \end{cases} \quad (2.8)$$

T_1 est un difféomorphisme polynomial de degré 3 pour une valeur du paramètre $c \neq 0$. Nous commençons maintenant une description qualitative des bifurcations qui peuvent se produire pendant la variation des paramètres.

Nous fixons les valeurs des paramètres $a = -1.3, b = 0$, on fait varier le paramètre c , l'équation (2.8) possède trois points fixes appartenant à la droite $y = cx$, en vertu de la résolution de ce système trois solutions sont données par :

$$C_0 = (0.0)$$

$$C_1 = \left(-\frac{1}{10}\sqrt{10}\sqrt{-10c + 23}, -\frac{1}{10}\sqrt{10c}\sqrt{-10c + 23} \right)$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{10} \sqrt{10} \sqrt{-10c + 23}, \frac{1}{10} \sqrt{10c} \sqrt{-10c + 23} \right)$$

On a une symétrie par rapport à l'origine $C_0 (0,0)$. Ces trois points sont de type col .

- Pour $c = 0.65$, à chaque point fixe deux variétés invariantes se coupent, l'une stable notée w^s , l'autre instable notée w^i . Trois cycles d'ordres deux apparaissent, un cycle de type col, et deux cycles de type foyer stable, le bassins d'attraction de ces cycles est connexe, la représentation de ces résultats est donnée par la figure 2a.1 où on remarque la symétrie des solutions ou cycles et leurs bassins d'attraction par rapport au point fixe $C_0 (0,0)$. Les variétés stables de chaque point fixe $w^s (C_0), w^s (C_1), w^s (C_2)$ délimitent la frontière du bassin d'attraction.

-La figure 2a.2 est une représentation locale de la tangence hétérocline entre les ensembles stables $w^s (C_0)$ et instables $w^i (C_1), w^i (C_2)$ pour la valeur $c = 0.80$ une infinité de point de tangence est due aux oscillations de $w^i (C_1)$ près de C_0 et $w^i (C_2)$ près de C_0 . Ces points de tangences sont des points hétéroclines symétriques et qui convergent vers les cycles d'ordre deux de type foyer stable.

-Pour $c = 0.82$, une explosion d'orbites homoclines (points homoclines) due aux points d'intersection des variétés stables et instables des points fixes C_0, C_1 et C_2 donnant lieu à une bifurcation de contact entre les variétés instables des points C_0, C_1, C_2 et la frontière du bassin d'attraction. Ces points de contacts sont des points homoclines. L'accumulation de ces points entraîne la fractalisation du bassin d'attraction. Les résultats sont représentés par figure 2a.2.

-Dans le cas, où c prend la valeur 1, les deux cycles d'ordre deux bifurquent donnant des courbes fermées (centres) par une bifurcation de Neimark, leurs bassins d'attractions ont disparu et les variétés instables des points cols $w^i (C_0), w^i (C_1), w^i (C_2)$ peuvent seulement converger en spirales vers les courbes fermées, sans les traverser, le résultat est présenté par la figure 2a.4

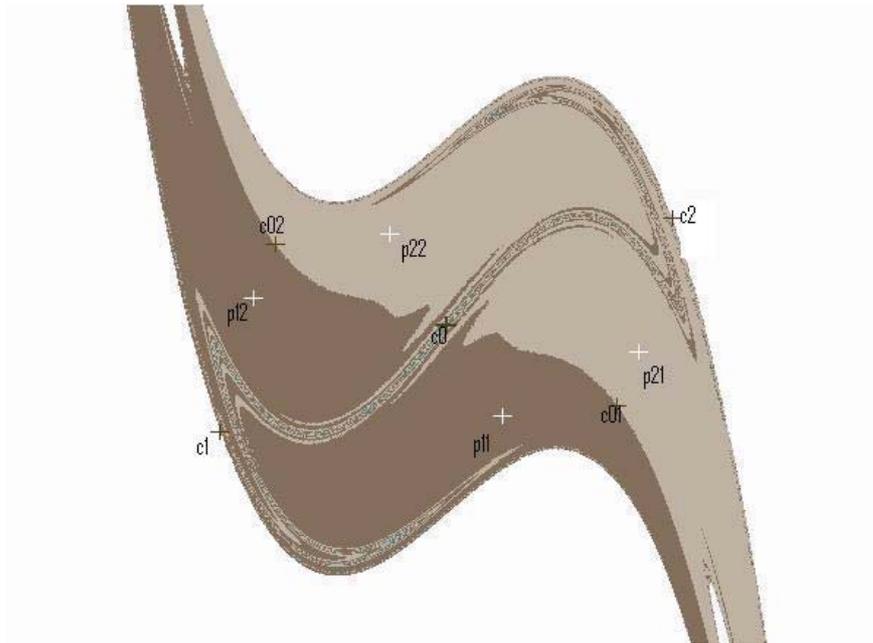


figure2a.1

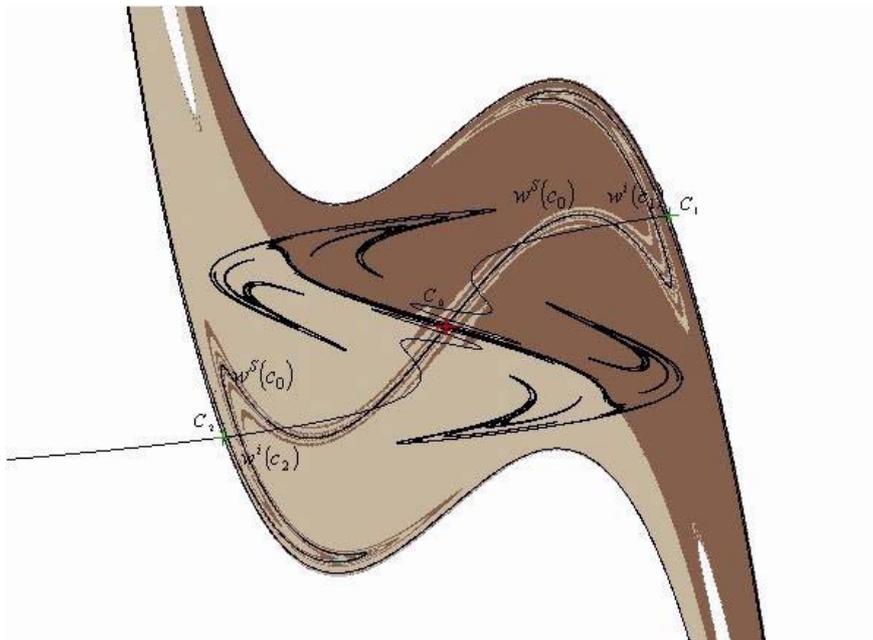


figure2a.2

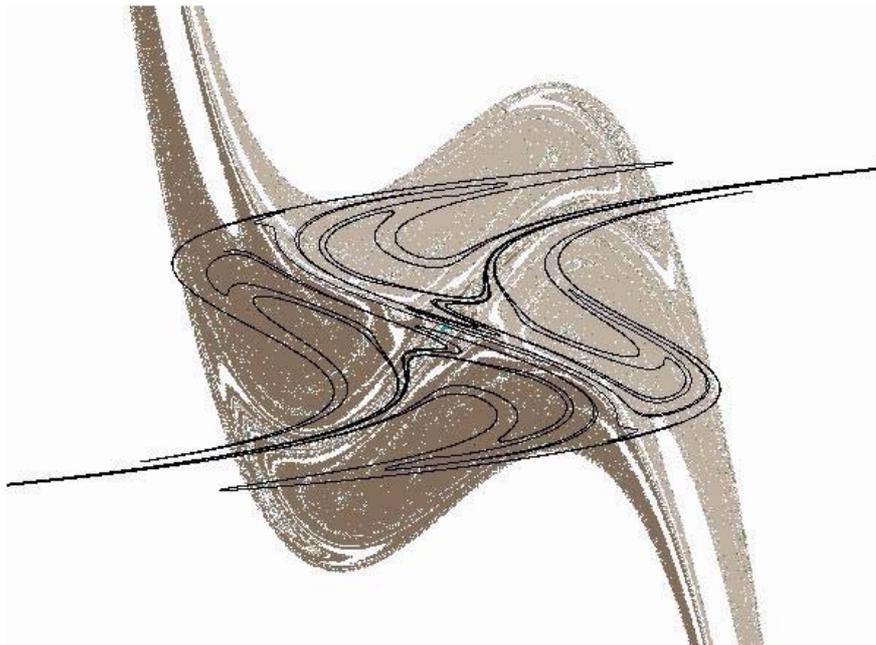


figure2a.3

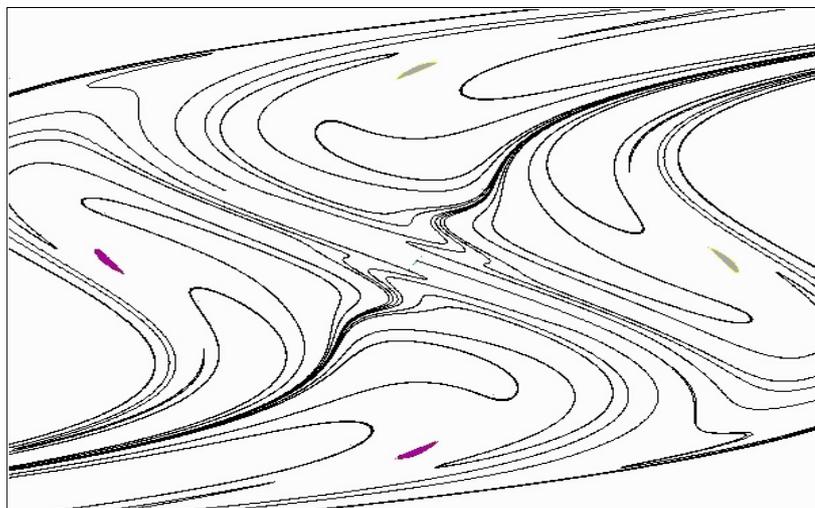


figure2a.4 tracé des variétés instables sans traverser les centres

Deuxième situation $c = -1$:

Nous fixons les valeurs des paramètres $a = -2.2701, b = 0$ et le paramètre c prend les valeurs en-dessous de -1 .

La transformation T_1 est symétrique par rapport à l'origine parce que $T(-x, -y) = -T(x, y)$ ceci implique que tous les points fixes et cycles existant de T sont en position symétrique par rapport à l'origine et n'importe quel cycle de période impair est nécessairement symétrique ayant les mêmes caractéristiques. Pour la même raison aussi tous les bassins d'attraction sont symétriques.

- Pour $c = -0.96$, une bifurcation flip se produit, provoquant un cycle d'ordre deux q_1 et q_2 sont les points fixes de $T^2(x, y)$, nous choisissons la valeur de c telle que les deux points fixes q_1 et q_2 sont des foyers stables, la variété stable du point col $O(0.0)$ délimite le bassin d'attraction de deux points fixes q_1 et q_2 , l'ensemble stable $w^s(O)$ a une structure complexe illustrée dans figure2b.1. Les deux branches de l'ensemble instable du col $w^i(O)$ tendent vers ces points fixes.

- Pour la valeur $c = -0.987$, les deux foyers stables deviennent des centres, une bifurcation homocline se produit due à l'intersection des deux variétés stable et instable du point fixe col $O(0.0)$ ces variétés se coïncident formant une bifurcation homocline de type double boucle-col illustré sur la figure 2b.2.

- Pour $c = -0.998$, les deux courbes fermées s'agrandissent, ensuite fusionnent donnant un attracteur chaotique.figure2b.3.

- Dans le cas conservatif $c = -1$ tous les cycles qui apparaissent d'ordre supérieurs sont des courbes fermées les résultats sont représentés par les figure2b.3, figure2b.4.

- La figure 2b.5 représente un agrandissement au voisinage du point fixe $O(0.0)$, où les points $q_1, q_2, q_3, \dots, q'_1, q'_2, q'_3, \dots$ sont des points d'intersection de l'ensemble fixe $Fix(R) = \{(x, y) : y = -x\}$ et la variété instable du point col $O(0.0)$, le lemme2 est vérifié, alors tous les points q_i sont des points homoclines et symétriques par rapport au point $O(0.0)$.

Proposition 2.3.1.2

Pour $c = -1$, tous les points homoclines appartiennent à $Fix(R) = \{(x, y) : y = -x\}$.

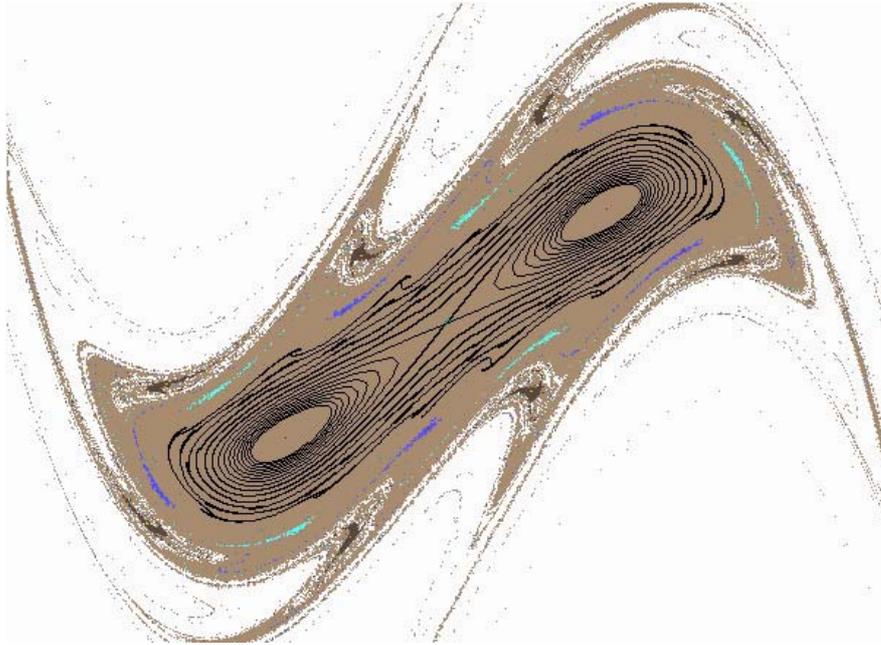


figure2b.1

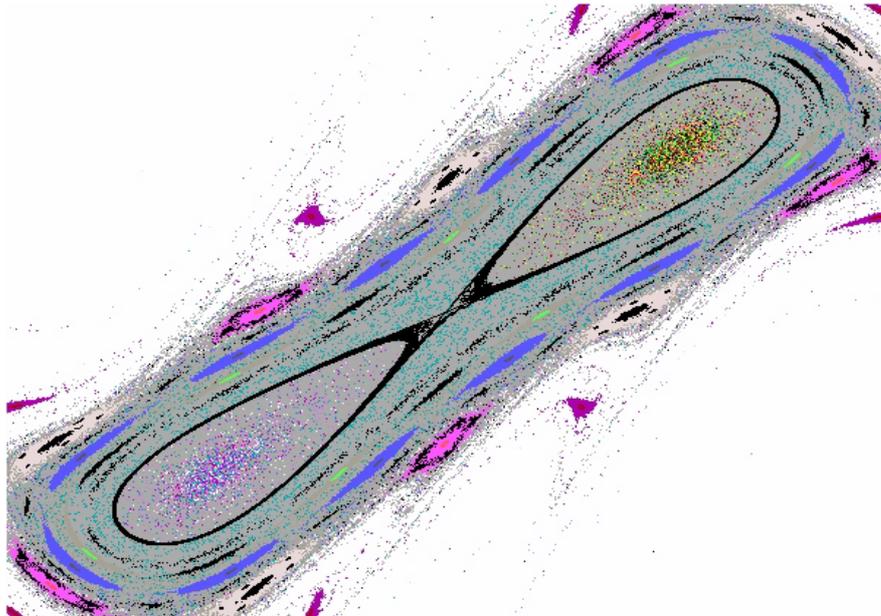


figure2b.2

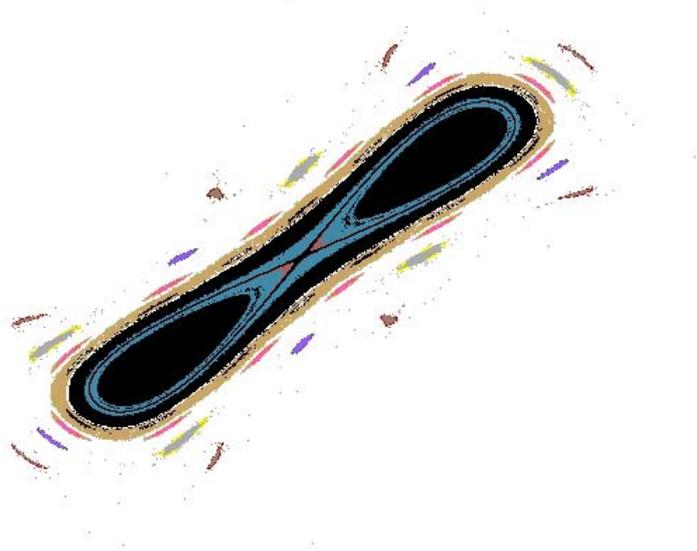
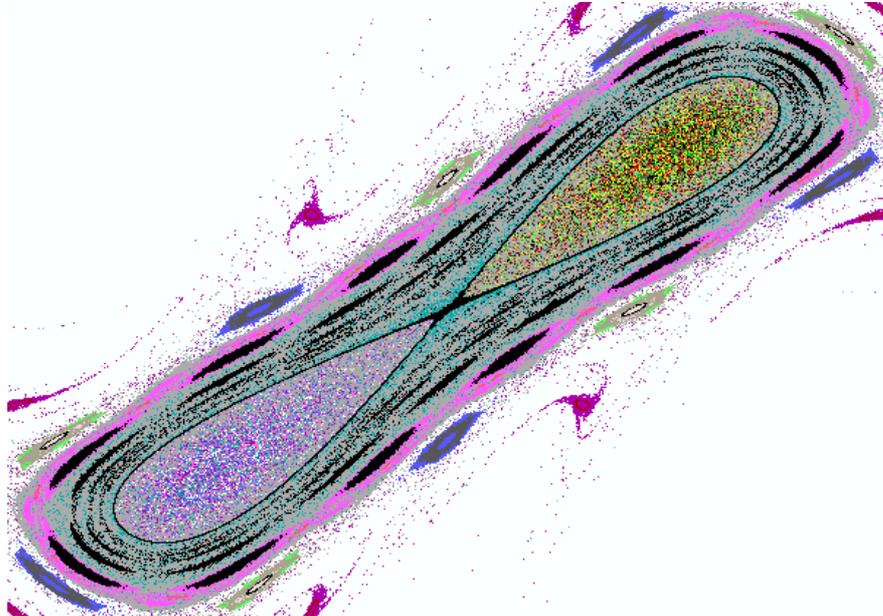


figure2b.3

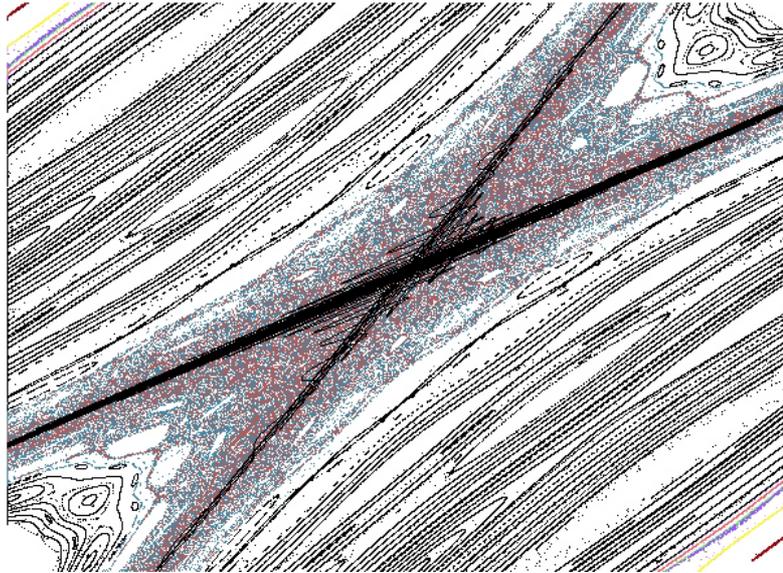


figure2b.4

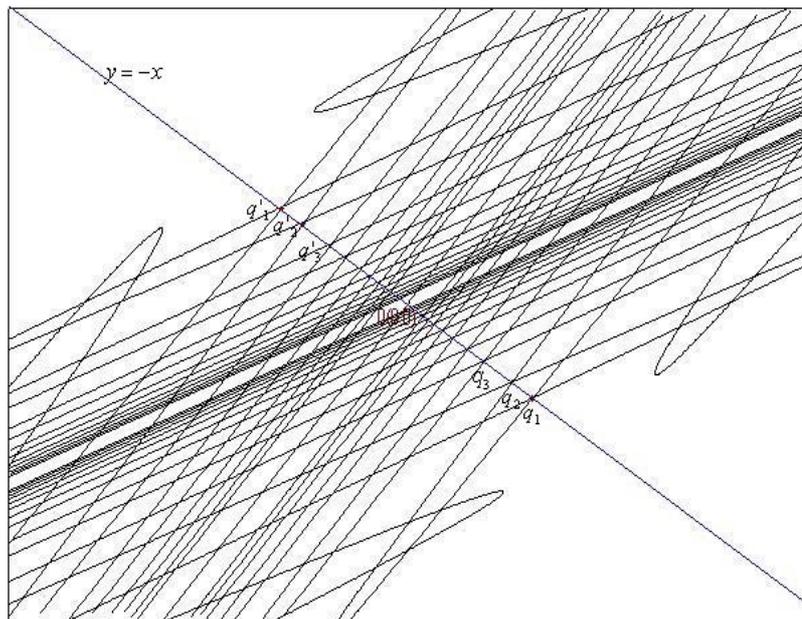


figure2b.5

Chapitre 3

Caractérisation des lignes critiques dans le plan de phases et le plan paramétrique :

3.1 Introduction :

Dans ce paragraphe, on utilise les concepts de Mira donnant lieu à une théorie rigoureuse de la dynamique des transformations noninversibles dans le plan de phases qui a été récemment développée. Des exemples caractéristiques des transformations non inversibles sont présentés et discutés. La méthode principale est la méthode des lignes critiques qui fournit les outils analytiques et expérimentaux aux chercheurs dans ce domaine. Plusieurs travaux ont montré l'importance des lignes critiques dans les bifurcations des bassins, on citera Gumoswski et Mira [24] qui ont développé le rôle des lignes critiques dans les bifurcations "bassin simplement connexe→bassin non connexe", ainsi que Barugola et Cathala [2] et Gardini [17] qui ont étudié le cas des bifurcations de type "bassin simplement connexe→bassin multiplement connexe".

3.2 Feuilletage de l'espace de phases :

3.2.1 Définitions des antécédents :

Les lignes critiques LC , pour une transformation ponctuelle T donnée, coupent le plan \mathbb{R}^2 en régions Z_i , pour lesquelles tout point X possède i antécédents distincts de rang un notés $T^{-1}(X)$.

La transformation inverse donne les solutions X_n de l'équation $X_{n+1} = T(X_n)$ avec X_{n+1} donné. Nous pouvons donc considérer cette région du plan (x, y) comme une superposition des i feuillets, chaque feuillet correspond à un antécédent de rang un donné. Ces feuillets peuvent être reliés deux à deux par un pli (ces plis correspondent aux lignes critiques), lieu des points qui possèdent au moins deux antécédents de rang un qui coïncident. Par conséquent, un segment critique correspond à une racine double de cette équation, il se peut que trois feuillets se confondent en un point critique, appelé point cuspidal (point de rebroussement) jonction de deux segments de lignes critiques correspondant respectivement à deux "plis", le point possède trois antécédents de rang un confondu, le point cuspidal de LC correspond dans ce cas à une racine triple. Il se peut également que m feuillets, $m > 3$, avec m entier impair, se confondent en un point critique.

Le point cuspidal correspond alors à une racine de multiplicité m , ce point possède m antécédents de rang un qui coïncident.

D'après ce qui précède, on énonce la propriété suivante

Propriété :

En traversant la courbe critique LC , à l'exception des points singuliers isolés possibles de LC , les antécédents de rang un disparaissent ou apparaissent par paires, LC correspond à la jonction de deux feuillets superposé du plan feuilleté .

En présence de variations paramétriques, le feuilletage du plan de phases peut changer, i.e, une transformation d'un type donné peut devenir une transformation d'un autre type en subissant les bifurcations de feuilletage [30,33]. Le feuilletage du plan de phases peut être considéré comme la superposition des feuillets, chaque feuillet correspond à l'une des déterminations de la transformation inverse $T^{-1}(X_{n+1})$.

L'application T^{-1} sert à faire un dépliage non linéaire de ces feuillets dans le plan de phase.

3.2.2 Lignes critiques

La notion de non inversibilité est primordiale pour l'analyse des phénomènes complexes, elle est caractérisée par la présence des singularités de l'espace de phase appelées lignes critiques LC pour les transformations d'ordre deux, et surfaces ou hypersurfaces critiques pour les transformations d'ordres supérieur. C'est un outil fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, il permet d'expliquer les bifurcations globales des attracteurs et de leurs bassins d'attraction. Les LC constituent une généralisation de la notion de point critique dans le cas unidimensionnel. Elles ont été introduites pour la première fois par Mira [31]

Antécédent de rang un :

Soit T une transformation non inversible de $IR^2 \rightarrow IR^2$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

où f et g sont des fonctions continues, ou continument différentiables par morceaux. La spécificité des TNI repose sur la considération de leurs transformations inverses T^{-1} qui jouent un rôle fondamental pour la compréhension de la dynamique de la transformation T . Comme nous l'avons vu, la transformation inverse peut avoir zéro, une ou plusieurs déterminations et elle est obtenue à partir de la solution algébrique du problème (3.1), avec $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ donnés. On suppose que pour tout $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in IR^2$, les différentes solutions (x_{ni}, y_{ni}) de ce système (que nous avons appelés antécédents de rang 1) sont un nombre fini de points isolés dans le plan. IR^2 peut alors être divisé en régions bornées ou non bornées notées Z_i ($IR^2 = \cup_i Z_i$).

Les points de chacune de ces régions possèdent i antécédents distincts de rang un. Les frontières des Z_i sont les branches des courbes critiques LC . les LC séparent ainsi le plan de phases en plusieurs régions, qui ont un nombre d'antécédents différent. Une courbe LC , qui peut être constituée de plusieurs segments, est le lieu géométrique des points X dont au moins deux antécédents de rang un coïncident, et sont situés sur la courbe LC_{-1} . Par extension, l'ensemble de points $T^{-1}(X)$ correspond aux antécédents de rang n du point

X . La courbe LC vérifie

$$T^{-1}(LC) \supseteq LC_{-1} \text{ et } T(LC_{-1}) = LC$$

Dans chaque voisinage d'un point de LC il existe des points avec deux antécédents distincts. La courbe LC_{-1} est donc l'ensemble des points où le déterminant de la matrice jacobienne de T noté $J(X)$ s'annule, ou n'est pas défini lorsque la transformation T n'est pas différentiable. La courbe des antécédents confondus de rang un LC_{-1} appartient à l'ensemble:

$$J_0 = \{X \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que : soit } J(X) = 0, \text{ soit } T \text{ n'est pas différentiable en } X\}$$

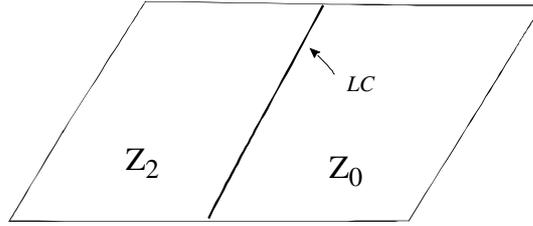
Quand T est linéaire par morceaux, les points de non différentiabilité sont les points pour lesquels deux antécédents de rang un coïncident. L'indice maximal i de Z_i , c.à.d. le nombre maximal d'antécédents de rang un qui génère une transformation donnée, sera appelé *degré de la transformation*, du fait que la transformation soit donnée sous forme polynomiale ou non.

3.2.3 Classification des transformations non inversibles (TNI) :

Une classification de TNI est proposée dans [30,33] est basée sur la considération des lignes critiques et des régions Z_i qui caractérisent T . Elles sont classées dans un ordre de complexité croissante avec le symbolisme suivant :

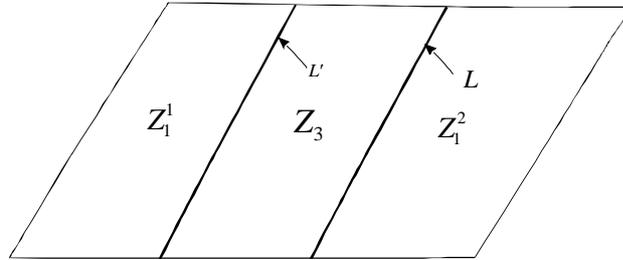
1-Type ($Z_0 - Z_2$) :

C'est le cas où LC sépare \mathbb{R}^2 en régions Z_0 et Z_2 . Chaque point X appartenant à Z_2 possède deux antécédents distincts de rang un, et aucun point X de Z_0 n'en possède. Les transformations de ce type présentent les propriétés les plus simples.



2-Type ($Z_1 - Z_3 - Z_1$) :

La courbe critique LC contient deux segments disjoints (segments de lignes parallèles) définissant deux régions pour lesquelles chaque point possède seulement un antécédent de rang un, et une troisième région, pour laquelle tout point possède trois antécédents distincts de rang un.

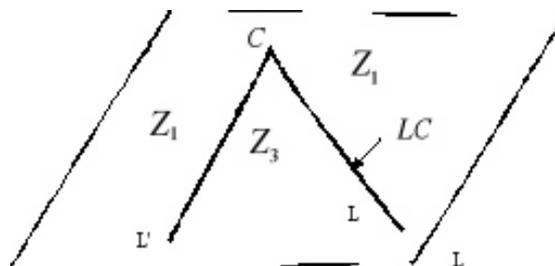


De la même façon, il est possible de définir des TNI de type ($Z_0 - Z_2 - Z_4$) ou de degré plus élevé.

Pour deux TNI de même degré, une singularité supplémentaire peut augmenter la complexité de l'une par rapport à l'autre par la présence des points *cuspidaux* sur les LC . Ces transformations sont classées de la façon suivante, on introduit les symboles (" $<$ " et " $>$ ") pour la représentation symbolique

3-Type ($Z_1 < Z_3$) :

La courbe LC possède un point cuspidal créant un cap dans Z_3 pénétrant dans Z_1



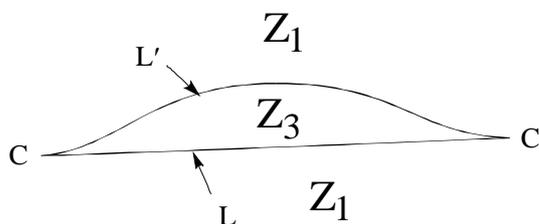
Telque

$$LC = L \cup L'$$

$$C = L \cap L'$$

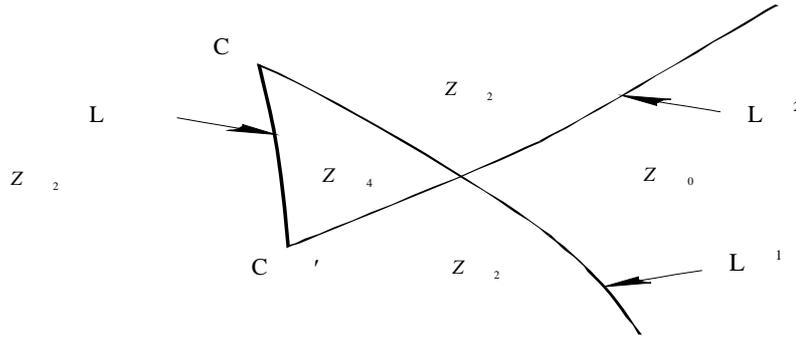
4-Type ($Z_1 < Z_3 > Z_1$) :

LC possède deux points cuspidaux C et C' formant une courbe fermée en forme de lèvres



5-Type ($Z_0 - Z_2 \ll Z_4$) :

LC possède deux points cuspidaux créant deux caps dans la régions Z_4 qui pénètrent dans la régions Z_2 en forme de queue d'aronde (dovetail). Les deux points cuspidaux C et C' sont reliés par un segment de LC en commun.



Avec ce symbolisme, il est possible de définir des TNI de complexité supérieure de type $(Z_0 - Z_2 < Z_4 >)$, $(Z_1 - Z_2 < Z_5 - Z_3 > Z_1 >)$, etc...

3.3 Détermination des lignes critiques dans le plan paramétrique :

Il a été rendu plausible par Carcasses qu'on peut associer une nouvelle transformation T' à la transformation considérée T , les lignes critiques de la transformation initiale T sont les courbes de bifurcation fold de la transformation associée T' . Cette méthode a attiré notre attention, car il n'est pas toujours évident de déterminer les lignes critiques. La méthode de paramétrisation est nécessaire pour déterminer les lignes critiques et le tracer dans le plan de phase, mais il est plus intéressant d'appliquer la deuxième méthode et tracer les lignes critiques dans le plan paramétrique. Les résultats de cette étude sont comparés à ceux obtenus avec la méthode de paramétrisation [33] dans le plan de phase.

3.3.1 Définition de la transformation T'

Soit T une transformation non inversible définie par :

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n, \lambda) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n, \lambda) \end{cases} \quad (3.2)$$

telle que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, λ est un paramètre.

Soit

$$J(x_n, y_n, \lambda) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

J est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation T

Une ligne critique associée au système (3.1) vérifiée le système suivant :

$$\begin{cases} f(x_n, y_n, \lambda) - x_{n+1} = 0 \\ g(x_n, y_n, \lambda) - y_{n+1} = 0 \\ J(x_n, y_n, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

On peut déterminer une ligne critique par un autre outil où on définit une transformation T'

$$T' : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + f(u_n, v_n, \lambda) - \bar{x} \\ v_{n+1} = v_n + g(u_n, v_n, \lambda) - \bar{y} \end{cases} \quad (3.4)$$

Proposition 3.3.1 : Une courbe de bifurcation fold associée à un point fixe de T' dans le plan paramétrique (\bar{x}, \bar{y}) correspond à une ligne critique LC dans le plan de phase (x_{n+1}, y_{n+1}) .

Preuve :

Rappelons que les bifurcations correspondant aux points fixes ou cycle d'ordre k du système (3.4) dans le plan paramétrique (\bar{x}, \bar{y}) , vérifiant les équations du système suivant

$$\begin{cases} T'^k(V) - V = G(V, \Delta) = 0 \\ \Psi(V, \Delta) = \det(DT'^k(V) - SI) = 0 \\ S = \pm 1 \end{cases}$$

S est le multiplicateur qui fixe la nature de la bifurcation cherchée.

L'élimination du vecteur des variables $V = (u, v)$ conduit à une équation implicite

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

Cette équation est appelée courbe de bifurcation.

Les courbes de bifurcation sont déterminées par la projection sur le plan de deux paramètres (\bar{x}, \bar{y}) .

$$\Lambda = \Pi \{ (V, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 / G(V, \Delta) = 0 \text{ et } \Psi(V, \Delta) = 0 \text{ avec } S = \pm 1 \}$$

telque $\Delta = (\bar{x}, \bar{y})$

Seul $S = 1$ sera traité puisqu'elle est associée à la bifurcation fold.

Une bifurcation fold associée à un point fixe de T' satisfait donc les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 0 \\ v_{n+1} - v_n = 0 \\ \Psi(V, \Delta) = \det(DT^k(V) - I) = 0 \end{cases}, \quad V = (u_n, v_n) \quad (3.5)$$

on peut reformuler le système précédent sous la forme :

$$\begin{cases} F(u, v, \lambda, \bar{x}) = f(u, v, \lambda) - \bar{x} = 0 \\ G(u, v, \lambda, \bar{x}) = g(u, v, \lambda) - \bar{y} = 0 \\ J(u, v, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

qui est équivalent aux conditions (3.3), telque le plan paramétrique (\bar{x}, \bar{y}) correspond au plan de phase (x_{n+1}, y_{n+1}) .

3.3.2 Condition nécessaire et suffisante d'existence d'un point cusp sur LC de T :

La complexité d'une structure de bifurcation est liée à l'existence de points cuspidaux (appelés points de rebroussement) sur une ou plusieurs courbes de bifurcations "fold" ou jonction de deux segments de lignes critiques, un tel point correspond à une racine de multiplicité 3 pour $x = T_\lambda^k(x)$ (dans le cas d'un cycle d'ordre k).

Des conditions analytiques sont données dans [4, 6, 37] permettant de calculer ces points et sont précisées dans ce paragraphe. Notons qu'actuellement les travaux les plus avancés sont ceux de Carcacèsse et Mira [4, 31]

Considérons les mineurs de la matrice jacobienne $\partial(F, G, J) / (u, v, \lambda, \bar{x})$:

$$A_u = \frac{\partial J}{\partial v}; \quad A_v = -\frac{\partial J}{\partial u}; \quad A_{\bar{x}} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial J}{\partial u} & \frac{\partial J}{\partial v} \end{bmatrix}; \quad A_{\bar{y}} = -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial J}{\partial u} & \frac{\partial J}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Alors une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un point cusp sur une courbe de bifurcation fold de T' ou sur une ligne critique LC de T est donnée par :

1- Si $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$ l'existence d'un point cusp est liée aux conditions suivantes

$$\begin{cases} f(u, v, \lambda) - \bar{x} = 0 \\ g(u, v, \lambda) - \bar{y} = 0 \\ J(u, v, \lambda) = 0 \\ A_{\bar{x}}(u, v, \lambda) = 0 \\ A_v \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial A_{\bar{x}}}{\partial v} - \frac{\partial A_{\bar{x}}}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \neq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

2- Si $\frac{\partial g}{\partial v} \neq 0$ les conditions deviennent :

$$\begin{cases} f(u, v, \lambda) - \bar{x} = 0 \\ g(u, v, \lambda) - \bar{y} = 0 \\ J(u, v, \lambda) = 0 \\ A_{\bar{y}}(u, v, \lambda) = 0 \\ A_u \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial A_{\bar{y}}}{\partial v} - \frac{\partial A_{\bar{y}}}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \neq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

3- Si $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial v} \neq 0$

$$\begin{cases} f(u, v, \lambda) - \bar{x} = 0 \\ g(u, v, \lambda) - \bar{y} = 0 \\ J(u, v, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial u}(u, v, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial v} \frac{\partial^2 J}{\partial^2 u} \neq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

4-Si $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial v} \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u, v, \lambda) - \bar{x} = 0 \\ g(u, v, \lambda) - \bar{y} = 0 \\ J(u, v, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial v}(u, v, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial^2 J}{\partial v^2} \neq 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

La singularité paramétrique :

Pour une valeur donnée au paramètre λ , la singularité paramétrique de type col et centre satisfait au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u, v, \lambda) - \bar{x} = 0 \\ g(u, v, \lambda) - \bar{y} = 0 \\ M_u(u, v, \lambda) = N(u, v, \lambda) \frac{\partial J}{\partial v}(u, v, \lambda) - J(u, v, \lambda) \frac{\partial N}{\partial v}(u, v, \lambda) = 0 \\ M_v(u, v, \lambda) = -N(u, v, \lambda) \frac{\partial J}{\partial u}(u, v, \lambda) + J(u, v, \lambda) \frac{\partial N}{\partial u}(u, v, \lambda) = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

telque :

$$N(u, v, \lambda) = 2 + \frac{\partial f}{\partial u}(u, v, \lambda) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v, \lambda) \neq 0$$

ou le multiplicateur $\sigma = \frac{N(u, v, \lambda)}{N(u, v, \lambda) + J(u, v, \lambda)}$

Le type de singularité est déterminé par le signe de α telque :

$$\alpha = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial M_u}{\partial u} & \frac{\partial M_u}{\partial v} \\ \frac{\partial M_v}{\partial u} & \frac{\partial M_v}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Si $\alpha > 0$ la singularité paramétrique est un centre.

$\alpha < 0$ la singularité paramétrique est un col.

Pour plus de détail, on peut se référer à [4, 6]

Les exemples ci-dessous nous permettent de résumer les différents types à suivre pour l'étude d'une transformation non inversible à savoir la détermination des lignes critiques,

nous présentons les deux méthodes, la méthode de paramétrisations [33] et la deuxième méthode la représentation des lignes critiques dans le plan paramétrique, on se basant sur les différentes structures de la courbe critique LC .

3.4 Résultats numériques et exemples :

3.4.1 Exemple1 :

Considérons l'application polynômiale :

$$T_1 : \begin{cases} x_{n+1} = y_n - 2x_n y_n \\ y_{n+1} = y_n - 2\lambda x_n - 4\lambda x_n^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

où λ est un paramètre réel.

T_1 est continue et différentiable . Elle est non inversible de type $(Z_1 < Z_3)$. La ligne critique possède un point cuspidal C créant un "cap", telque $LC = L \cup L'$, $C = L \cap L'$

Méthode de paramétrisation :

La courbe constituée de l'ensemble des antécédents de rang 1 de (x_{n+1}, y_{n+1}) , LC_{-1} est obtenue en annulant le jacobien de la transformation T_1 :

$$E(x, y) = y - \lambda - 2\lambda x + 8\lambda x^2 \quad (3.13)$$

l'annulation de $E(x, y) = 0$ définit une courbe $y = \lambda + 2\lambda x - 8\lambda x^2$ à partir de laquelle une représentation paramétrique de LC_{-1} est obtenue :

$$LC_{-1} : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \lambda + 2\lambda t - 8\lambda t^2 \end{cases} \quad (3.14)$$

Par application de T_1 , on obtient la représentation paramétrique de LC .

$$LC : \begin{cases} x(t) = \lambda(1-2t)(1+2t-8t^2) \\ y(t) = \lambda - 12\lambda t^2 \end{cases} \quad (3.15)$$

Le point cuspidal C , sur la courbe LC , est une solution du système $dx/dt = dy/dt = 0$, dont la solution est donnée par $(x(C), y(C)) = (\lambda, \lambda)$.

Appliquons notre méthode consistant dans la détermination de la bifurcation Fold :

Soit la transformation associée T'_1 est :

$$T'_1 : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n - 2u_n v_n - \bar{x} \\ v_{n+1} = v_n + v_n - 2\lambda u_n - 4\lambda u_n^2 - \bar{y} \end{cases} \quad (3.16)$$

\bar{x}, \bar{y} sont des paramètres

La bifurcation fold d'un cycle d'ordre 1 (point fixe) de T'_1 satisfait la condition (3.6), on obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} v - 2uv - \bar{x} = 0 \\ v - 2\lambda u - 4\lambda u^2 - \bar{y} = 0 \\ v - \lambda - 2\lambda u + 8\lambda u^2 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

la résolution de ce système par rapport aux paramètres \bar{x}, \bar{y} , donne l'équation :

$$-32768\lambda^2 \bar{x}^4 (4(\bar{y} - \lambda)^3 + 27(\bar{x} - \bar{y})^2) = 0$$

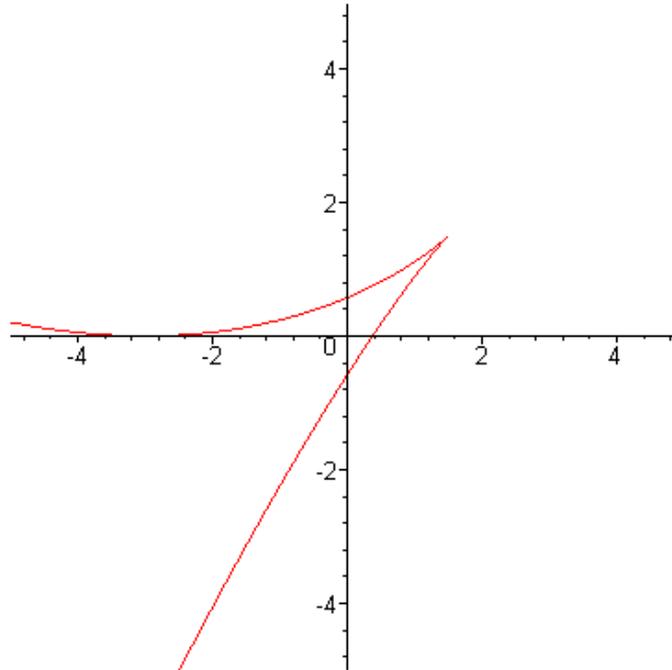
Cette équation présente une courbe de bifurcation fold pour un cycle d'ordre 1 de T'_1 dans le plan (\bar{x}, \bar{y}) .

Un point cusp est une solution du système algébrique suivant :

$$\begin{cases} v - 2uv - \bar{x} = 0 \\ v - 2\lambda u - 4\lambda u^2 - \bar{y} = 0 \\ -2v + 2\lambda + 4\lambda u - 16\lambda u^2 = 0 \\ u = 0 \\ v \neq 0 \end{cases}$$

La solution de ce système est donnée par

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda \\ \bar{y} = \lambda \\ u = 0 \\ v = \lambda \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$$



3.4.2 Exemple2 :

Nous avons considéré cet exemple pour la détermination de la structure lèvre.

Soit l'endomorphisme T_2 :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -x_n^3/3 - x_n y_n^2 + \lambda x_n + 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

T_2 est noninversible si $\lambda \geq 0$

T_2 est continue et différentiable de type $(Z_1 < Z_3 > Z_1)$. la ligne critique LC possède deux points cuspidaux C et C' formant une courbe fermée en forme de lèvre.

1-Méthode de paramétrisation

La courbe constituée de l'ensemble des antécédents de rang 1 de (x_{n+1}, y_{n+1}) , LC_{-1} est obtenue en annulant le jacobien du système (3.18) :

$$E(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda \quad (3.19)$$

On distingue pour $E(x, y) = 0$ une courbe fermée définie par $y = \pm\sqrt{|\lambda - x^2|}$.

Une représentation paramétrique de LC_{-1} est donnée :

$$LC_{-1} : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \pm\sqrt{|\lambda - t^2|} \end{cases} \quad (3.20)$$

Par application de T_2 , on obtient la représentation paramétrique de LC .

$$LC : \begin{cases} x(t) = \pm\sqrt{|\lambda - t^2|} \\ y(t) = -t^3/3 - t(\lambda - t^2) + \lambda t + 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

Sur la courbe LC , on distingue deux branches L et L' symétriques par rapport à $x_n = 0$, chacune d'elles contenant respectivement les cusps C, C' formant une courbe fermée

Les points cusps sont : $(x(C), y(C)) = (0, \sqrt{\lambda}), (x(C'), y(C')) = (0, -\sqrt{\lambda})$

2-Méthode de la bifurcation fold :

soit la transformation associée T'_2 :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n - \bar{x} \\ v_{n+1} = v_n - u_n^3/3 - u_n v_n^2 + 2\lambda u_n + 1 - \bar{y} \end{cases}$$

\bar{x}, \bar{y} sont des paramètres

Une courbe de bifurcation fold d'un cycle d'ordre 1 (point fixe) de T'_2 est donnée par :

$$\begin{cases} v - \bar{x} = 0 \\ -u^3/3 - uv^2 + 2\lambda u + 1 - \bar{y} \\ v - \lambda - 2\lambda u + 8\lambda u^2 = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

En éliminant u, v , on trouve cette relation :

$$4(\lambda - \bar{x}^2)^3 - 9(\bar{y} - 1)^2 = 0$$

qui est une courbe de bifurcation fold de T'_2 dans le plan (\bar{x}, \bar{y}) et une équation de la courbe LC de T_2 .

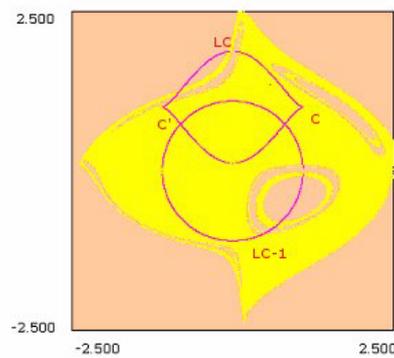
Un point cusp est une solution du système algébrique suivant :

$$\begin{cases} v - \bar{x} = 0 \\ -u^3/3 - uv^2 + 2\lambda u + 1 - \bar{y} \\ u^2 + v^2 - \lambda = 0 \\ u = 0 \\ v \neq 0 \end{cases}$$

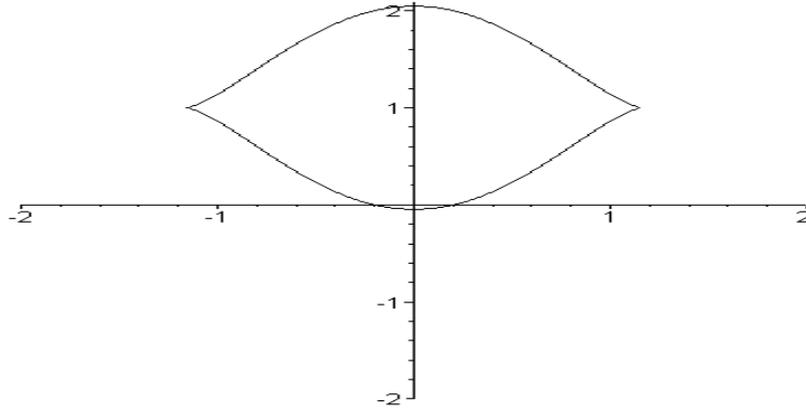
La solution de ce système est donnée par :

$$\begin{cases} \bar{x} = \pm\sqrt{\lambda} \\ \bar{y} = 1 \\ v = \bar{x} = \pm\sqrt{\lambda} \\ u = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

a= 1.20000 b= .00000 c= .00000 d= .00000



la lèvre dans le plan de phase pour T_3



$\lambda = 1.25$ la courbe LC dans le plan paramétrique (lèvre)

3.4.3 Exemple3 :

Cet exemple a été considéré pour la détermination de la structure dovetail (queue d'aronde).

Soit l'endomorphisme T_3 :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - 2x_n y_n \\ y_{n+1} = y_n - \lambda x_n + 2x_n^3 \end{cases} \quad (3.23)$$

T_3 est continue et différentiable de type $(Z_0 - Z_2 \ll Z_4)$. LC possède deux points cuspidaux créant deux caps dans la régions Z_4 .

1- Méthode de paramétrisation :

La courbe constituée de l'ensemble des antécédents de rang 1 de (x_{n+1}, y_{n+1}) , LC_{-1} est obtenue en annulant le jacobien du système :

$$E(x, y) = 2y - (\lambda - 6x^2)(1 - 2x) = 0 \quad (3.24)$$

$E(x, y) = 0$ donne une courbe fermée définie par $y = (\lambda - 6x^2)(1 - 2x)/2$ à partir de laquelle une représentation paramétrique de LC_{-1} est obtenue :

$$LC_{-1} : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = (\lambda - 6t^2)(1 - 2t)^2/2 \end{cases} \quad (3.25)$$

Par application de T_3 , on obtient la représentation paramétrique de LC .

$$LC : \begin{cases} x(t) = (\lambda - 6t^2)(1 - 2t)/2 \\ y(t) = (\lambda - 6t^2)(1 - 2t)/2 - \lambda t + 3t^3 \end{cases} \quad (3.26)$$

Sur la courbe LC , on distingue deux points cusps.

Les points cusps sont :

$$(x(C), y(C)) = \left(\frac{1}{3}\lambda \left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2} \right), \frac{2}{9}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\lambda \left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

,

$$(x(C'), y(C')) = \left(-\frac{1}{3}\lambda \left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} \right), -\frac{2}{9}\lambda^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\lambda \left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \right)$$

2- Méthode de la bifurcation fold :

soit T'_3 un endomorphisme associé à T_3 :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n - 2u_n v_n - \bar{x} \\ v_{n+1} = v_n + v_n - \lambda u_n + 2u_n^3 - \bar{y} \end{cases} \quad (3.27)$$

Une courbe de bifurcation fold d'un cycle d'ordre 1 (point fixe) de T'_3 satisfait le système :

$$\begin{cases} v - 2uv - \bar{x} = 0 \\ v - \lambda u + 2u^3 - \bar{y} = 0 \\ 2v - (\lambda - 6u^2)(1 - 2u) = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

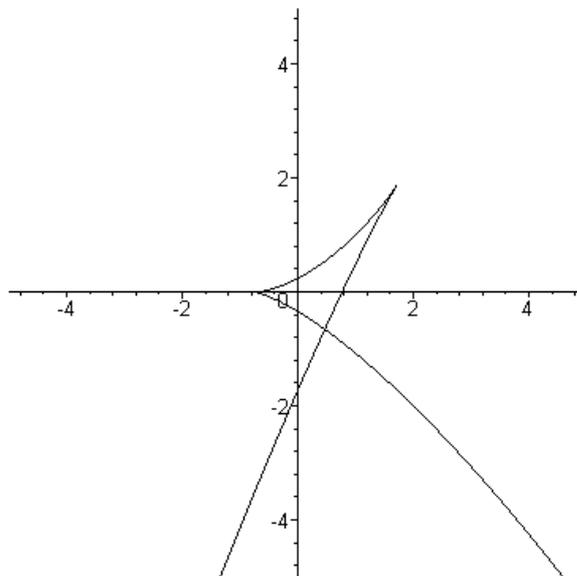
cherchons une relation paramétrique indépendamment des variables u et v :

qui est une courbe de bifurcation fold de T'_3 dans le plan (\bar{x}, \bar{y}) et une équation de la courbe LC de T_3 .

Un point cusp est une solution du système algébrique suivant :

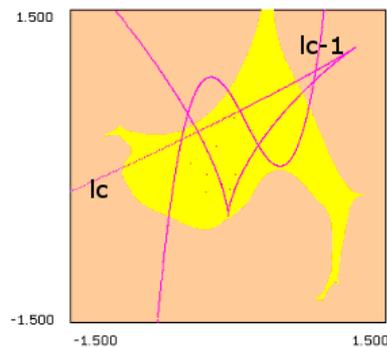
$$\left\{ \begin{array}{l} v - 2uv - \bar{x} = 0 \\ v - \lambda u + 2u^3 - \bar{y} = 0 \\ 2v - (\lambda - 6u^2)(1 - 2u) = 0 \\ 4v + 12u + 2\lambda - 60u^2 - 4\lambda u + 72u^3 = 0 \\ (12u + 2\lambda - 36u^2)(-8v - (12 - 120u - 4\lambda + 216u^2)(1 - 2u)) \end{array} \right.$$

la résolution de ce système s'avère difficile. Nous avons tracé grâce au logiciel Maple la courbe fold.



la dovetail dans le plan paramétrique (\bar{x}, \bar{y}) pour T_3'

a= 1.45000 b= .00000 c= .00000 d= .00000



la dovetail dans le plan de phase pour T_3

3.5 Etude des singularités dans le plan de phase :

Dans le but de comprendre la façon avec laquelle le système se comporte, nous nous intéressons à l'évolution de l'espace de phases pour des valeurs de paramètre λ .

Nous avons fait une étude dans le plan de phase ou nous avons tracé les différentes singularités présentes, leurs bassins d'attraction et les lignes critiques LC ainsi que LC_{-1} . La configuration du plan de phases de T_2, T_3 , donne le tracé du bassin d'un attracteur pour des valeurs différentes du paramètre λ .

Considérons tout d'abord les transformations non inversibles et différentiables T_2, T_3 . Nous pouvons mettre en évidence des bifurcations classiques données aux chapitre 1 et dans [16,20,32] qui mettent en relation les variétés critiques, les attracteurs chaotiques et leurs bassins. Les bifurcations mises en évidence sont les suivantes :

- a). Bassin connexe \rightarrow bassin multiplement connexe
- b). Bifurcation de contact (disparition d'un attracteur)
- c). Fractalisation de la frontière du bassin

Ces bifurcations se retrouvent dans les deux modèles T_2 et T_3 .

La bifurcation *a)* est illustrée dans les figures 3a et 3b ; des trous apparaissent à l'intérieur du bassin, lorsque la ligne critique de rang un LC devient tangente à la frontière du bassin d'attraction.

Les figures 3c et 3d illustrent la bifurcation de contact *b)*. L'attracteur existant disparaît par une bifurcation de contact avec la frontière de son bassin.

On peut observer la bifurcation *c)*, dans les figures 3e et 3f, la frontière du bassin d'attraction devient fractale suite à la tangence avec la ligne critique de rang un LC et à une succession de tangences du même type lorsque le paramètre λ varie.

Ces bifurcations de base résultent du contact d'une frontière de bassin avec un segment de courbe critique d'un ensemble d'attraction et ces bifurcations mènent à la destruction d'un attracteur chaotique, ou à une modification importante du bassin d'attraction.

a= 1.25000 b= .00000 c= .00000 d= .00000

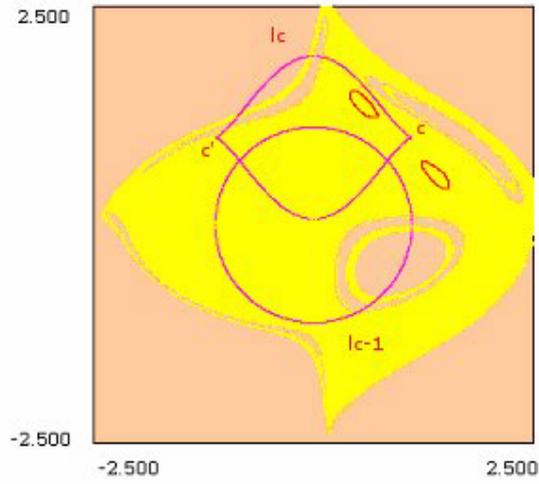


Figure3a : Bifurcation a).pour la transformation T_2 .

a= 1.69000 b= .00000 c= .00000 d= .00000

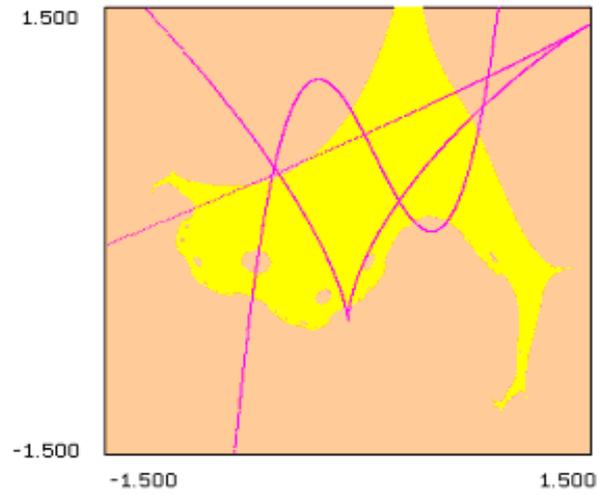


Figure3b : Bifurcation a).pour la transformation T_3 .

a= 1.35000 b= .00000 c= .00000 d= .00000

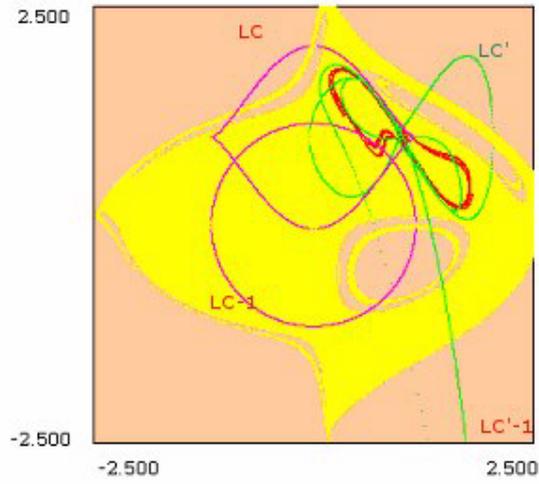


Figure3c : bifurcation de contact de T_2

l'attracteur chaotique est tangent à la frontière du bassin d'attraction

a= 1.71690 b= .00000 c= .00000 d= .00000

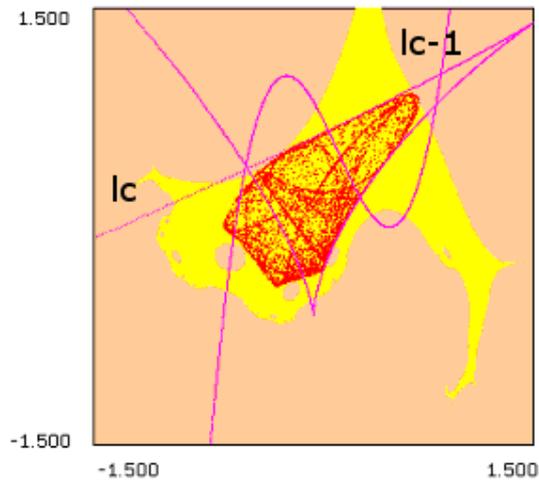


Figure3d : bifurcation de contact de T_3

l'attracteur chaotique est tangent à la frontière du bassin d'attraction

a= 1.42000 b= .00000 c= .00000 d= .00000

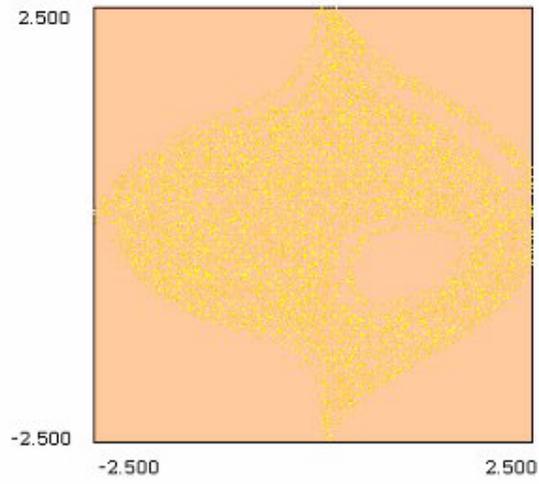


Figure3e :Bifurcation c :fractalisation de bassin pour la transformation T_2 .

a= 1.72600 b= .00000 c= .00000 d= .00000

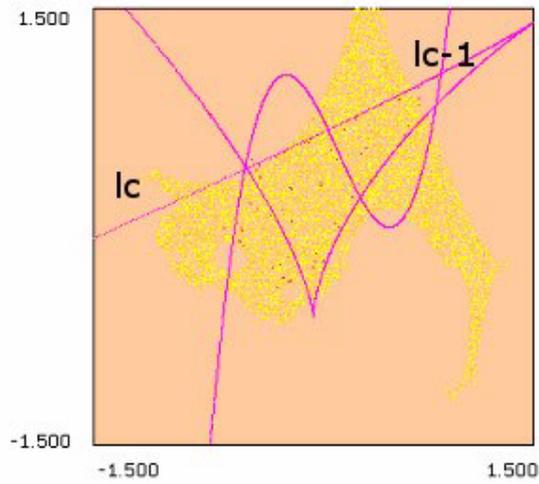


Figure3f : :Bifurcation c :fractalisation de bassin pour la transformation T_3

Chapitre 4

Etude de bifurcation d'un endomorphisme de type (Z_1, Z_3, Z_1)

4.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à quelques propriétés d'une transformation bidimensionnelle noninversible de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ définie par un polynôme cubique. Cette famille des transformations dépend de deux paramètres.

On rappelle que les transformations noninversibles sont identifiées par un symbolisme basé sur la configuration des régions Z_k de l'espace, chaque point de Z_k en ayant k antécédents de rang un (ref chapitre.3.).

Pour la transformation bidimensionnelle de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$, cette notation signifie que l'espace est divisé par trois régions ; une région Z_3 , à chaque point se produisent trois antécédents de rang un, encadré par deux régions Z_1 dont les points ont seulement un antécédent de rang un. Cette transformation a les mêmes propriétés spécifiques aux transformations ponctuelles non inversibles de type (Z_0, Z_2) .

Ce paragraphe met en évidence quelques bifurcations spécifiques aux transformations ponctuelles non inversibles de type (Z_0, Z_2) dans le cas bidimensionnel décrivant les changements de structure de bassins d'attraction et de l'attracteur. L'analyse sera faite dans le cas des transformations polynomiales. La noninversibilité génère des structures complexes concernant les ensembles instables, des singularités du plan de phase la variété

instable $W^i(P)$ et les courbes invariantes fermées.

Après quelques définitions et bifurcations relatives au sujet de ce chapitre, on étudiera successivement les bifurcations concernant $W^i(P)$ d'un point singulier de type col, et bifurcations d'une courbe invariante fermée. Toutes ces bifurcations seront étudiées grâce à l'outil des lignes critiques. Pour plus de détails, on peut se référer aux travaux de Millerioux [28].

4.2 Définitions et bifurcation :

On considère dans cette partie le cas où T possède deux points fixes : un point col P et un point Q de type noeud ou foyer. Le col P est situé dans la région R_1 alors que Q est dans la région R_2 .

Variété instable de P ($W^i(P)$) :

On note $W^i(P)$ la variété instable issue du point fixe col P . Soit $\alpha(P) = (P, A_1) \subset W^i(P)$ l'arc limité par les deux points $A_1 \in LC$ et P . On note également le point $A_0 = \alpha(P) \cap LC_{-1}$, les images de A_0 sont données par $A_n = T(A_0), n \geq 1$ et donc $\alpha(P) = (P, A_0) \cup (A_0, A_1)$. L'arc $\alpha_0(P)$ est la partie de $W^i(P)$ limitée par les points A_0 et A_1 . Les images de $\alpha_0(P)$ sont telles que $\alpha_1(P) = T(\alpha_0) = (A_1, A_2)$, $\alpha_n(P) = T^n(\alpha_0)$ avec $A_2 \in L_1^1 \subset LC_1$. La variété instable est donc caractérisée par :

$$W^i(P) = \alpha(P) \cup_{n \geq 1} \alpha_n(P) \quad (4.1)$$

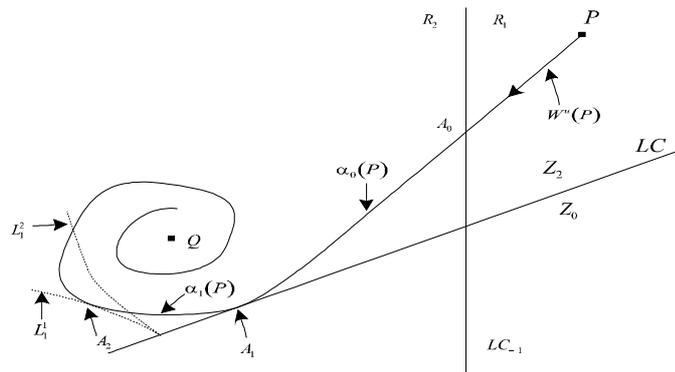


figure4.1

4.2.1 Bifurcation de $W^i(P)$:

On suppose que T dépend d'un paramètre λ et que les bifurcations interviennent pour des valeurs particulières de λ lorsque celui-ci croît. Avant la première bifurcation, la situation considérée est donnée sur la figure 4.2 et $W^i(P)$ vérifie les propriétés suivantes :

Propriété 1 :

Soit $[W^i(P)]^{-1}, P^{-1}$ l'antécédent de rang un de $W^i(P), P$ (respectivement) autre que lui-même. On a l'égalité : $T^{-1}(W^i(P)) = W^i(P) \cup W^i(P)^{-1}$,

puisque T possède deux déterminations inverses. Si les hypothèses suivantes sont vérifiées

$$\alpha(P) \cap LC_{-1} = \emptyset, n > 0, \text{ c'est-à-dire } \alpha_n(P) \subset R_2,$$

$$\text{et } W^i(P) \cap W^i(P)^{-1} = A_0 \in LC_{-1},$$

A_0 est l'unique point d'intersection, on a alors les propriétés :

1- La restriction de la transformation inverse de T à $W^i(P)$ est définie par T_2^{-1} sur $\alpha_n(P), n > 0$ et par T_1^{-1} sur $\alpha(P) = (P, A_1)$. $W^i(P)$ est donc invariante par itération inverse pour chacune des déterminations T_1^{-1} et T_2^{-1} sur respectivement, $\alpha_n(P), n > 0$ et $\alpha(P)$.

2- Il existe un voisinage $U(\alpha_n(P))$ de $\alpha_n(P), n > 0$, pour lequel T est à inverse unique définie par : $T_2^{-1} : U \rightarrow U$.

Première bifurcation : $\lambda = \tilde{\lambda}_1$ créant des auto-intersections de $W^i(P)$:

Cette bifurcation intervient lorsque l'intersection $W^i(P) \cap W^i(P)^{-1}$ possède des points autres que A_0 hors de LC_{-1} . A la valeur de bifurcation $\lambda = \tilde{\lambda}_1$, on a :

$$W^i(P) \cap W^i(P)^{-1} \setminus LC_{-1} = b_0 \equiv c_0 \cup \acute{b}_0 \equiv \acute{c}_0 \quad (4.2)$$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\lambda = \tilde{\lambda}_1 + \varepsilon$ on a :

$$W^i(P) \cap W^i(P)^{-1} \setminus LC_{-1} = b_0 \cup c_0 \cup \acute{b}_0 \cup \acute{c}_0 \quad (4.3)$$

Les arcs $(b_0 c_0) \in W^i(P)$, $(\acute{b}_0 \acute{c}_0) \in [W^i(P)]^{-1}$ et $(b_0 c_0) \in [W^i(P)]^{-1}$, $(\acute{b}_0 \acute{c}_0) \in W^i(P)$ ont pour image par T deux arcs différents sur $W^i(P)$ lui-même dû à l'invariance de $W^i(P)$

par itération directe mais limitées par deux points identiques $b_1 = T(b_0) = T(\acute{b}_0)$ et $c_1 = T(c_0) = T(\acute{c}_0)$ créant donc deux auto-intersections de $W^i(P)$ en b_1 et c_1 . Ces deux points sont confondus $b_1 \equiv c_1$ en un point de tangence à la bifurcation.

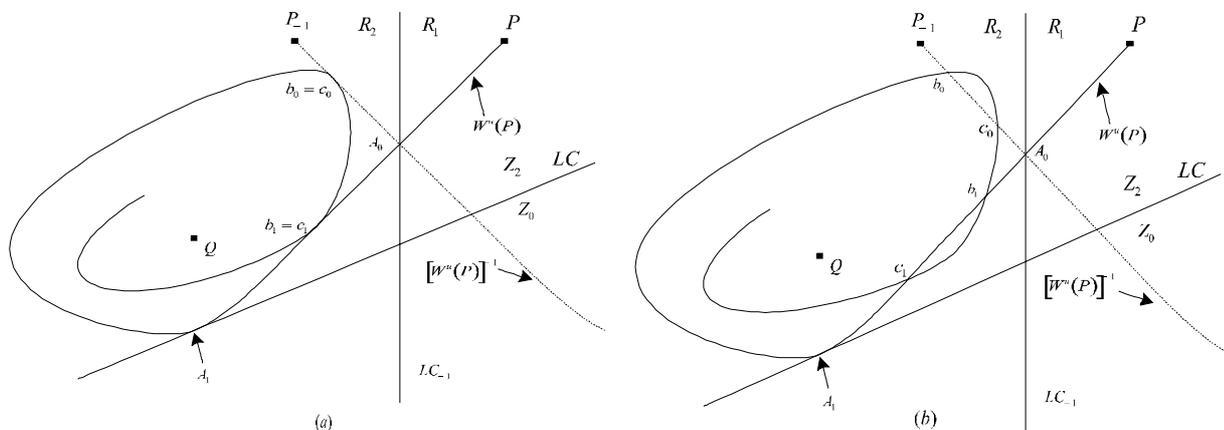


figure4.2

Deuxième bifurcation : $\lambda = \tilde{\lambda}_2$ créant des oscillations de $W^i(P)$

Cette bifurcation est caractérisée par le fait que sur $\alpha_n(P)$, $n > 0$, $W^i(P)$ a un contact avec LC_{-1} puis une intersection avec LC_{-1} à la valeur de bifurcation $\lambda = \tilde{\lambda}_2$.

$$\alpha_n(P) \cap LC_{-1} = \{r_0 \equiv s_0\}, n > 0 \quad (4.4)$$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\lambda = \tilde{\lambda}_2 + \varepsilon$ on a :

$$\alpha_n(P) \cap LC_{-1} = \{r_0, s_0\}, n > 0 \text{ et } \alpha_n(P) \cap R_1 \neq \emptyset \quad (4.5)$$

Les images de rang k du couple (r_0, s_0) par T notées (r_k, s_k) , $k > 0$ appartenant à $\alpha_n(P)$, $n > 0$ sont des points de contact avec les lignes critiques LC_{k-1} en posant $LC_0 = LC$. En effet, $\alpha_n(P)$ ne peut pas traverser LC_m , ce qui signifierait dans le cas contraire qu'un point de Z_0 possède un antécédent. Cette bifurcation crée des oscillations de $\alpha_n(P)$ le long des LC_m . La propriété 1 devient :

Propriété2 :

Si les relations (4.5) sont vérifiées, on a alors :

1-La restriction de la transformation inverse de T à $\alpha_n(P)$, $n > 0$ est définie par T_1^{-1} et par T_2^{-1} . $W^i(P)$ n'est donc plus invariante par itération inverse.

2- Pour tout voisinage $U(\alpha_n(P))$ de $\alpha_n(P)$, $n \geq 0$, T n'est pas définie par un inverse unique : $T_i^{-1} : U \rightarrow U$.

3- $[W^i(P)]^{-1}$ et $W^i(P)$ s'intersectent en des points autres que A_0 , hors de LC_{-1}

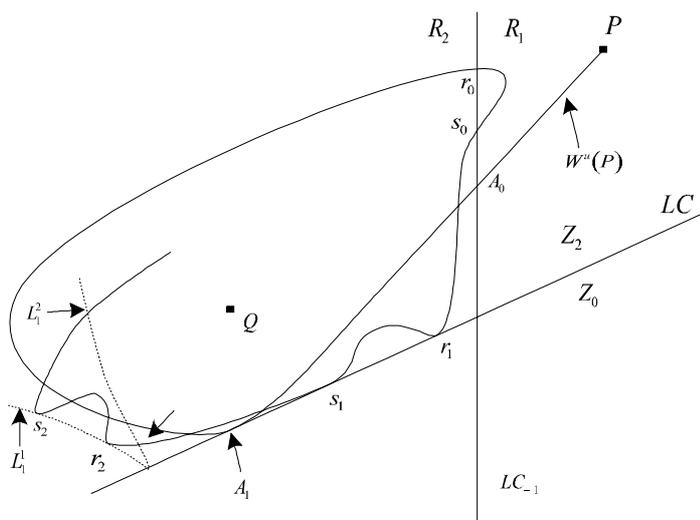


figure4.3

4.2.2 Bifurcation d'une courbe invariante fermée :

Non invariance par itération inverse :

On considère une courbe invariante fermée notée Γ née à partir de la déstabilisation du point fixe $Q \in R_2$ de type foyer via une bifurcation de Hopf-Neimark. La courbe est telle que $\Gamma \subset R_2$ avant la bifurcation étudiée, c'est -à-dire $\Gamma \cap LC_{-1} = \emptyset$

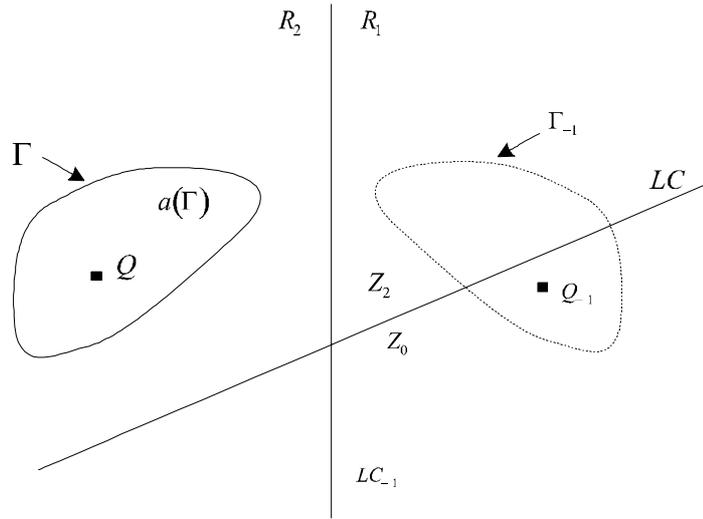


figure4.4

Avec cette hypothèse, Γ satisfait les propriétés suivantes :

Propriété3 :

1- L'aire intérieure délimitée par Γ notée $a(\Gamma)$ avec $Q \in a(\Gamma)$ est invariante par itération directe : $T(a(\Gamma)) = a(\Gamma)$

2- Γ et son antécédent de rang un $T_1^{-1}(\Gamma) = \Gamma_{-1}$ distinct d'elle-même ne s'intersectent pas : $\Gamma \cap \Gamma_{-1} = \emptyset$ avec $T^{-1}(\Gamma) = \Gamma \cup \Gamma_{-1}$.

3- Il existe un voisinage de T défini dans $a(\Gamma)$ est donnée uniquement par T_2^{-1} .

C'est la même détermination qui définit la restriction T_Γ de T à Γ . Ceci caractérise l'invariance de $a(\Gamma)$ et de Γ par itération inverse.

4- Il existe un voisinage $U(\Gamma)$ de Γ pour lequel T est à inverse unique définie par $T_2^{-1} : U \rightarrow U$.

Ceci caractérise l'invariance locale par itération inverse.

Bifurcation : $\lambda = \tilde{\lambda}_1$, **intersection avec LC_{-1} :**

Cette bifurcation apparaît lorsque Γ entre en contact avec LC_{-1} en un point $u_0 \equiv v_0$ telle que

$$\Gamma \cap LC_{-1} = u_0 \equiv v_0 \tag{4.6}$$

L'image $u_1 \stackrel{\equiv}{=} v_1$ de $u_0 \stackrel{\equiv}{=} v_0$ par T est un point de contact entre Γ et LC_{-1} . Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\lambda = \tilde{\lambda}_1 + \varepsilon$ on a

$$\Gamma \cap LC_{-1} = \{u_0, v_0\} \text{ et } \Gamma \cap R_1 \neq \emptyset \quad (4.7)$$

Cette intersection est responsable du changement d'allure de Γ car les itérés de rang n du couple $\{u_0, v_0\}$ notés $\{u_n, v_n\}$ sont des points de contact non transversaux (tangentiels dans le cas différentiable) entre Γ et LC_m , ce qui signifierait dans le cas contraire qu'un point de Z_0 possède un antécédent. Cette bifurcation crée donc des oscillations de Γ le long des LC_m . Ceci s'explique également par le fait que Γ passe d'un feuillet à un autre lorsqu'elle entre en contact avec LC .

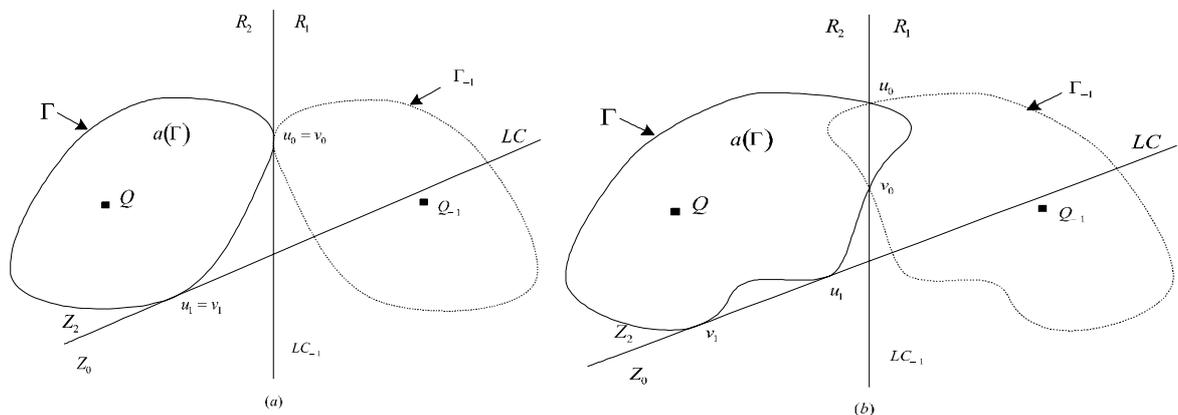


figure4.5

Lorsque $\Gamma \cap R_1 \neq \emptyset$ et $\Gamma \cap LC_{-1} \neq \emptyset$, les propriétés 3 deviennent :

Propriété 4. :

1-L'aire $a(\Gamma)$ n'est plus invariante par T : $T(a(\Gamma)) \neq a(\Gamma)$.

2- Γ et Γ^{-1} s'intersectent au moins en deux points u_0 et v_0 sur LC_{-1} . La partie $\Gamma \in R_1$ crée une oscillation de Γ le long de LC par itération directe de T .

3- L'inverse de la restriction T_Γ de T à Γ est définie à présent par les deux déterminations inverses T_1^{-1} et T_2^{-1} suivant la partie de Γ que l'on considère. Ceci caractérise la non invariance de Γ par itération inverse.

4- Soit U_Γ un voisinage de Γ . T n'est plus à inverse unique de $U \rightarrow U$ mais définie par les deux déterminations T_1^{-1} et T_2^{-1} . Ceci caractérise la non invariance locale de Γ par itération inverse.

Intersection d'une courbe invariante fermée avec une branche instable d'un point col :

On considère la branche instable $W^i(P)$ et la courbe invariante fermée Γ , ces deux ensembles invariants sont tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(P) \subset \Gamma$. Pour une transformation inversible, ces deux ensembles ne peuvent pas intersecter, i.e. $W^i(P) \cap \Gamma = \emptyset$. Mais dans le cas d'une transformation noninversible, cette propriété est vraie tant qu'il n'apparaît pas une bifurcation dont la valeur de paramètre est $\lambda = \hat{\lambda}$. Pour cette valeur particulière, $W^i(P) \cap \Gamma \neq \emptyset$ et il existe un entier m tel que $\alpha_m(P) \cap \Gamma \neq \emptyset$ et donc $\alpha_n(P) \cap \Gamma \neq \emptyset$ pour tout $n \geq m$ par application directe de T . A la bifurcation, les points de contact t_i entre $W^i(P)$ et Γ sont tels que :

$$\{t_i\} = [W^i(P) \cap \Gamma_{-1}] \cup [[W^i(P)]^{-1} \cap \Gamma]$$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\lambda = \hat{\lambda} + \varepsilon$, les points t_i se multiplient et deviennent des points d'intersections. Il existe alors une infinité de points d'intersections entre $W^i(P)$ et Γ par itération directe de T .

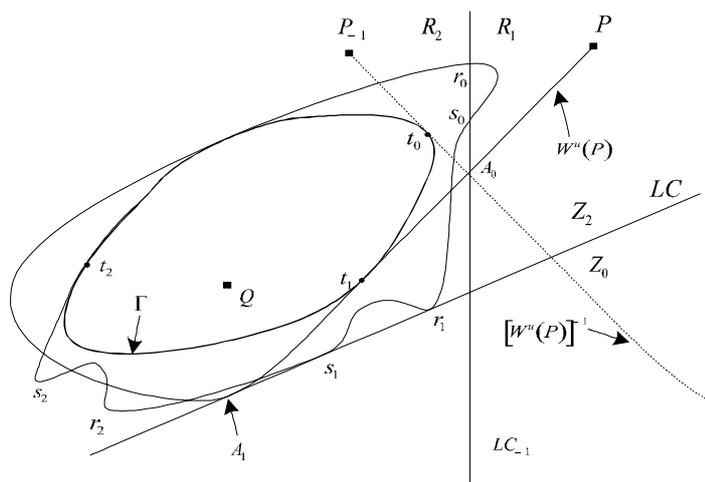


figure4.6

4.2.3 Bifurcations des bassins spécifiques à la transformations cubique :

L'étude repose sur un exemple. On considère la transformation ponctuelle T de $IR^2 \rightarrow IR^2$ définie de la façon suivante

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 + ax + b + y \end{cases} \quad (4.8)$$

On étudie les changements qualitatifs intervenant dans le plan de phases de T lorsque le paramètre a varie dans l'intervalle $-2.62 \leq a \leq -2$

La transformation T appartient à la classe des transformations ponctuelles bidimensionnelles non inversibles T ssi $a < 0$, qui possède deux branches de courbes L et L' (formant LC) séparant le plan de phase en trois régions. Les points de chacune de ces trois régions ne possèdent pas le même nombre d'antécédents de rang un. Une courbe LC est le lieu géométrique des points X ayant deux antécédents de rang un confondus, $T^{-1}(X)$ situés sur LC_{-1} . On rappelle que l'ensemble des points $T^{-n}(X)$ est l'ensemble des antécédents de rang n d'un point donné X . La courbe LC telle que $T^{-1}(LC) \supseteq LC_{-1}$ ou $T(LC_{-1}) = LC$ est appelée courbe critique. Elle correspond à la généralisation bidimensionnelle de la notion de point critique (au sens de Julia-Fatou) d'un endomorphisme unidimensionnel (chapitre3).

4.2.4 Généralité pour une transformation de type (Z_1, Z_3, Z_1) :

Plan paramétrique - Bifurcation :

Nous nous intéressons à la structure de bifurcation de la transformation (4.8) dans le plan paramétrique (a, b) . Une première étude consiste à déterminer les courbes de bifurcation de la transformation considérée afin de connaître les valeurs des paramètres pour lesquelles les solutions du système sont stables ou non. Ces courbes nous permettent aussi de déceler la présence de plusieurs solutions d'ordres et stabilité différents pour les mêmes valeurs de paramètres de la transformation T .

A partir de différentes conditions initiales (x_0, y_0) de T , on effectue n itérations de la transformation pour une valeur fixe de (a, b) . Si après ces n itérations, le point (x_n, y_n) ainsi calculé appartient à un domaine borné préalablement défini, on considère qu'un attracteur existe pour les valeurs de (a, b) données. On cherche alors à définir cet attracteur. Cette méthode grossière permet d'identifier les différentes zones du plan paramétrique (a, b) pour lesquelles il existe une solution attractive à distance finie de T . Ce diagramme de bifurcation représenté par la figure 4.7 permet de mettre en évidence certaines courbes de bifurcation définie au chapitre 1. En effet, le segment de courbe qui sépare une zone de couleur rouge (existence d'un cycle d'ordre 4 attractif) d'une zone de couleur rose (existence d'un cycle d'ordre 8 attractif) est un segment d'une courbe de bifurcation flip (bifurcation de type doublement de période).

Il est important de noter que cette méthode numérique est une méthode approchée de détermination des zones du plan paramétrique pour lesquelles il existe un attracteur à distance finie. Le domaine des conditions initiales est choisi de façon arbitraire. Ainsi, il est impossible d'affirmer qu'il n'existe pas d'attracteur dans le domaine en blanc.

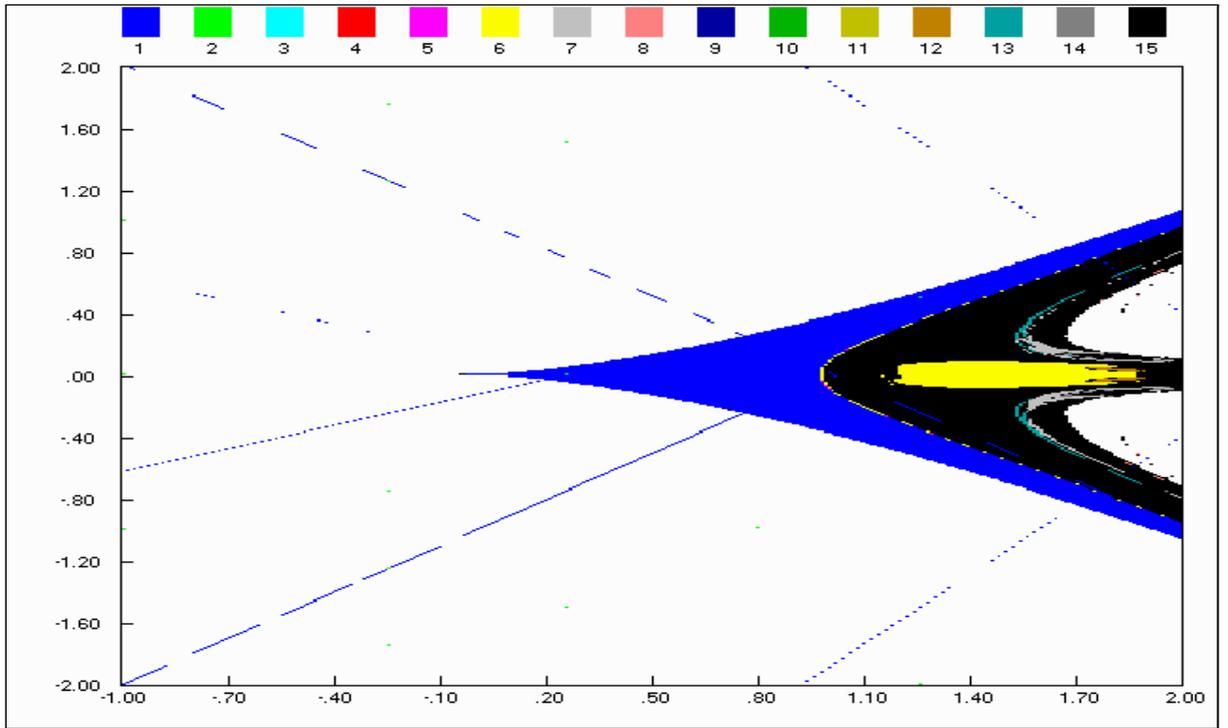


figure 4.7

4.2.5 Plan de phase -bassin d'attraction :

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques résultats généraux sur la structure du plan de phase d'une transformation ponctuelle non inversible de type (Z_1, Z_3, Z_1) pour des valeurs de paramètres fixées et rappelons les conditions données dans [31,32] pour définir les bassins connexes, multiplement connexes et non connexes. On décrit les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d'un domaine D , bassin d'un attracteur A . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection de D avec une ligne critique LC d'une transformation non inversible.

Soit D_0 le bassin immédiat d'un ensemble attractif à distance finie, D étant le bassin total. \tilde{A} est un ensemble attractif supposé de période $k = 1$.

Proposition 4.2.5.1 :

Soient T une transformation de type (Z_1, Z_3, Z_1) et D_0 le bassin immédiat d'un ensemble attractif tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$, alors :

- a) D est connexe $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) = D_0 \cap LC$.
- b) D est non connexe $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) \subset D_0 \cap LC$.

Proposition 4.2.5.2 :

Soient T une transformation de type (Z_1, Z_3, Z_1) et D_0 le bassin immédiat d'un ensemble attractif tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ et D est connexe alors :

- a) $T^{-1}(D_0^*) = D_0^* \Leftrightarrow D = D_0$ est simplement connexe $\Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{-1}) = D_0^* \cap LC$.
- b) $T^{-1}(D_0^*) \subset D_0^* \Leftrightarrow D = D_0$ est multiplement connexe $\Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{-1}) \supset D_0^* \cap LC$.

D_0^* est la frontière du domaine simplement connexe et appelé "bassin immédiat apparent" obtenu en retirant les trous de D_0

Les démonstrations de ces propositions sont données dans la référence [32].

La transformation (4.8) possède deux branches de courbes critiques ou deux lignes parallèles L et L' telles que $LC = L \cup L'$. L et L' séparent le plan IR^2 en trois régions ouvertes Z_1, Z_3 et Z_1 (figure 4.8a). La recherche de déterminations inverses permet d'affirmer que cet endomorphisme est de type (Z_1, Z_3, Z_1) , les régions Z_1 et Z_3 sont délimitées par les lignes critiques L et L' . Un point appartenant à une région Z_1 a un antécédent de rang 1, et un point de la région Z_3 a trois antécédents de rang 1. figure 4.8.

On définit les deux branches de courbes critiques par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} L & : y = x - \frac{2}{9}\sqrt{3}(-a)^{\frac{3}{2}} + b \\ L' & : y = x + \frac{2}{9}\sqrt{3}(-a)^{\frac{3}{2}} + b \end{aligned}$$

pour une valeur négative du paramètre a .

Ces deux branches sont les courbes consécutives des droites L_{-1} et L'_{-1} , tel que L_{-1} et L'_{-1} sont déterminées par le jacobien de la transformation T égale à zéro c-à-d :

$$J = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 + a & 1 \end{bmatrix} = 3x^2 + a = 0 \quad (4.9)$$

ce qui nous donne $L_{-1} : x = +\sqrt{\frac{-a}{3}}$ et $L'_{-1} = -\sqrt{\frac{-a}{3}}$ telles que $LC_{-1} = L_{-1} \cup L'_{-1}$ solutions de l'équation (4.8)

Pour chercher les points fixes de la transformation T , il faut résoudre l'équation algébrique suivante :

$$x^3 + ax + b = 0$$

T admet trois points fixes, si $\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} < 0$, ces trois points appartenant à la droite $y = x$.

Si $\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} > 0$, T a un seul point fixe.

Si $\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} = 0$, c'est une courbe de bifurcation .

Remarque :

On voit dans la partie encadré de la figure 4.8a que le bassin immédiat d'attraction D_0 est simplement connexe. Ceci résulte du fait que $D_0 \cap \overline{Z_3}$ et $D_0 \cap L'$ sont connexes ; par conséquent, on est localement dans la situation d'une transformation de type (Z_0, Z_2) due à l'intersection d'une seule branche de LC parmi les deux branches qui délimitent Z_3 avec le bassin D_0

4.2.6 Bifurcation du bassin d'attraction :

Fixons le paramètre $b = 1$, et faisons varier le paramètre a , on a les situations suivantes : Pour la valeur de bifurcation $a = -2.100$, deux singularités de type points fixes jouent un rôle important dans la structure de bassin D , qui est simplement connexe, un point fixe de type col P appartient à la frontière du bassin d'attraction D et le foyer répulsif Q . Ce point répulsif Q joue un rôle primordial pour décrire la bifurcation hétérocline [29].

Une courbe invariante fermée Γ est née de la déstabilisation du point fixe Q foyer via une bifurcation de Hopf-Neimark .

Lorsque Γ entre en contact avec L_{-1} en un point, l'image de ce point par la transformation est un point de contact de Γ et L' cette bifurcation crée des oscillations le long de L' pour $a = -2.18$, pour cette bifurcation, on peut se référer au paragraphe 4.2.2 proposition 6.

- Pour $a = -2.205$ des auto-intersections génèrent des boucles sur Γ figure 4.9. La complexité Γ notée $\tilde{\Gamma}$ croît, elle est caractérisée par une dimension de Ljapunov supérieure à 1 et $\tilde{\Gamma}$ évalué donnant un attracteur chaotique annulaire à la valeur de bifurcation $a = -2.238$ figure 4.12.

- Pour a correspondant à la valeur de bifurcation, la frontière de l'attracteur chaotique rentre en contact avec la frontière du bassin du point fixe. L'attracteur chaotique est borné par des segments de courbes critiques de tous ordre LC_n limitant les langues de l'attracteur qui sont en contact avec la frontière du bassin immédiat.

- La figure 4.14 illustre ce contact. Le point fixe de type col P est le point d'accumulation de ces points de contact, l'attracteur chaotique est détruit et le bassin D devient un bassin multiplement connexe c'est -à-dire connexe avec des trous.

- Sous la variation du paramètre a , la branche de ligne L évolue et se rapproche de la frontière du bassin (figure 4.14) après la bifurcation le point de contact entre L et ∂D est le point initial d'une suite itérative de points donnant naissance à des lacs dans le continent D qui est alors devenu multiplement connexe. Cette bifurcation conduit généralement au phénomène de fractalisation du bassin figure 4.16

a=-2.10000 b= 1.00000 c= .00000 d= .00000

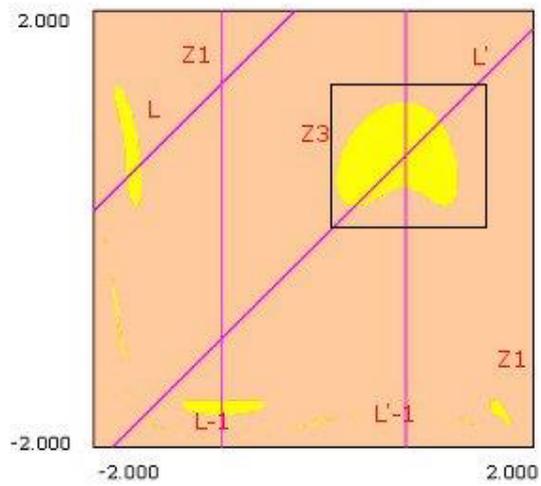


figure 4.8a

a=-2.10000 b= 1.00000 c= .00000 d= .00000

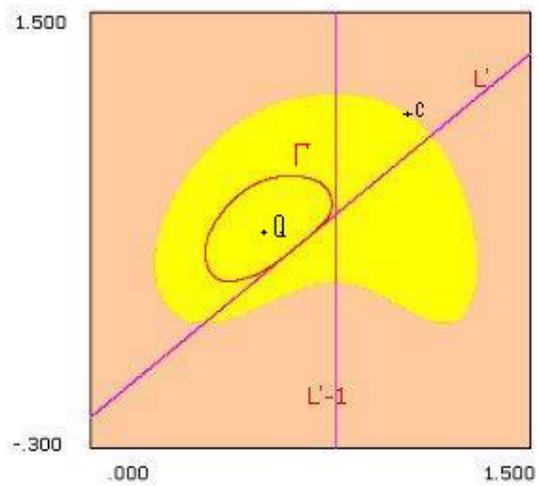


figure 4.8b

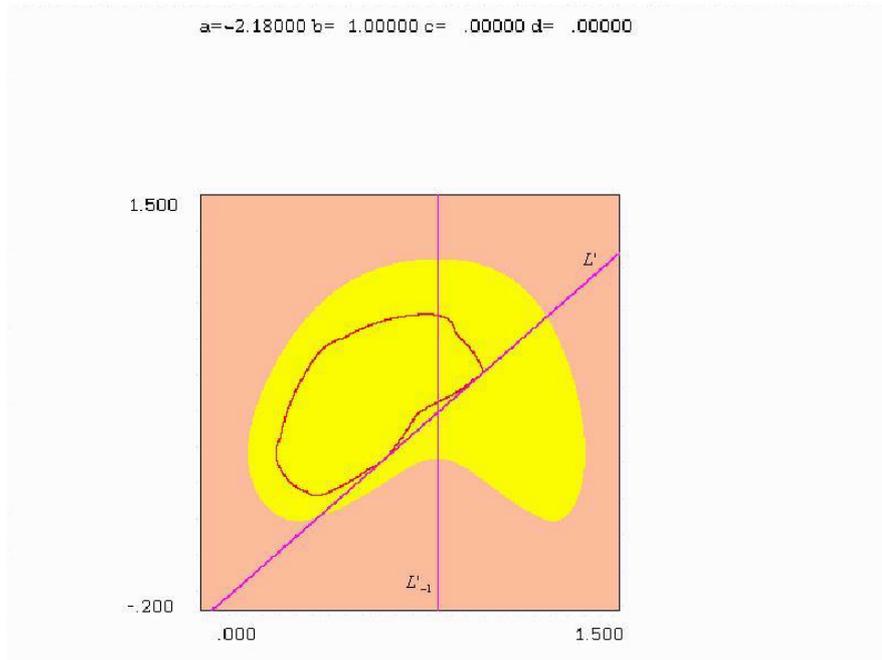


figure 4.9

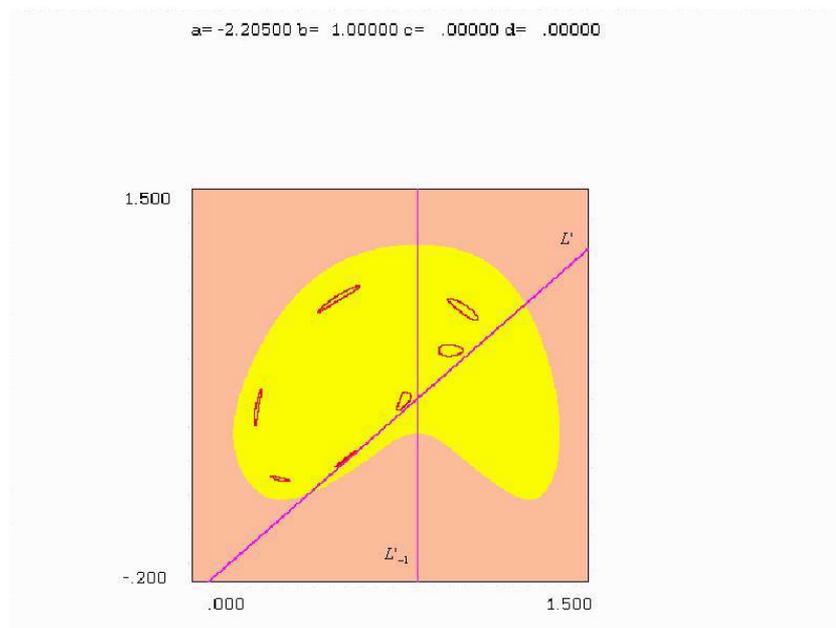


figure 4.10

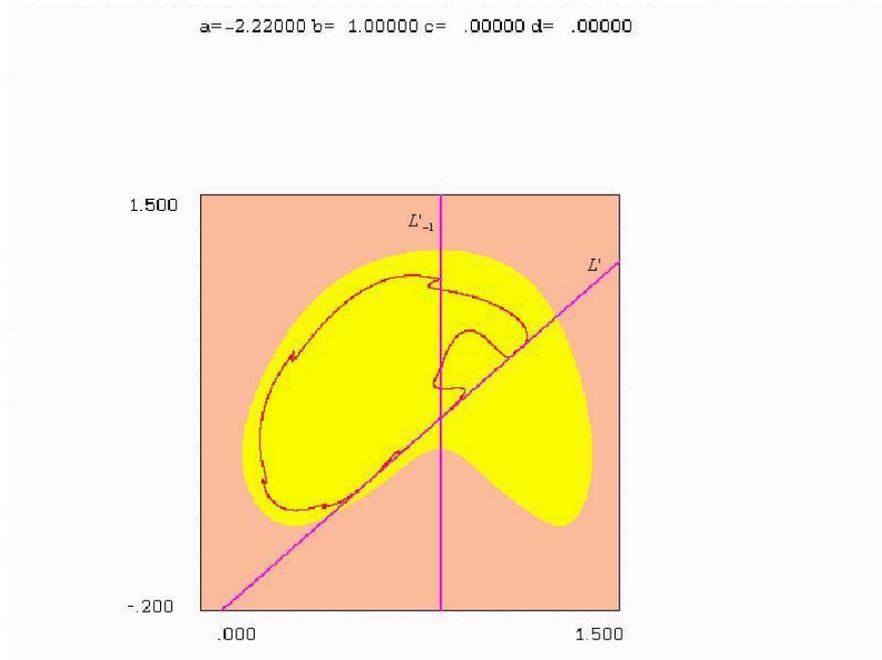


figure4.11

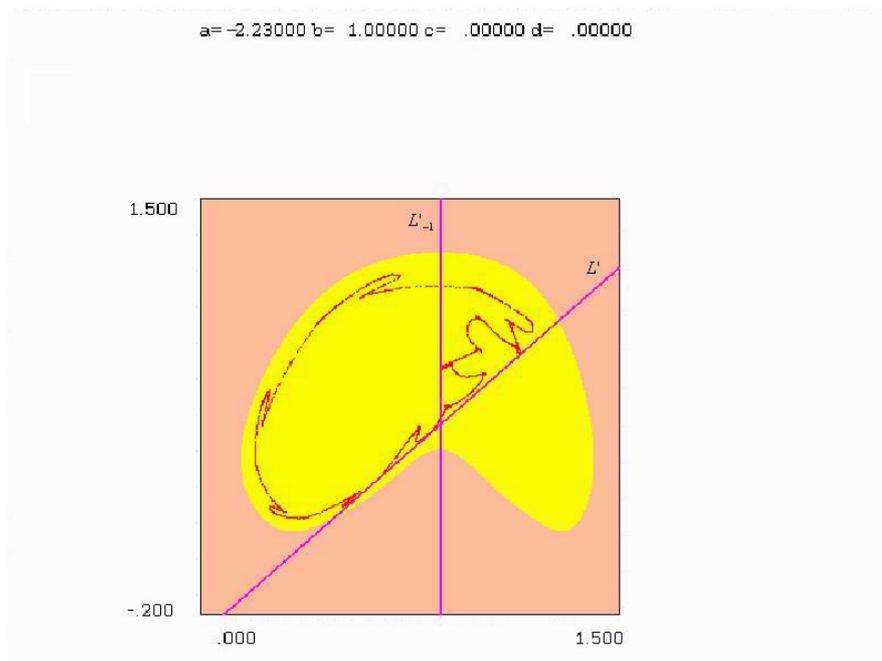


figure 4.12

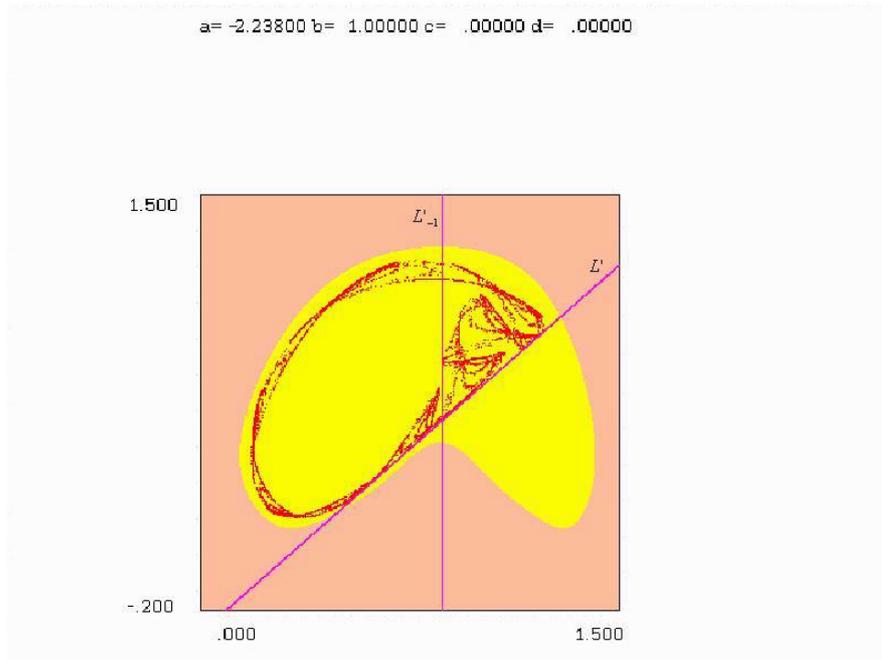


figure 4.13

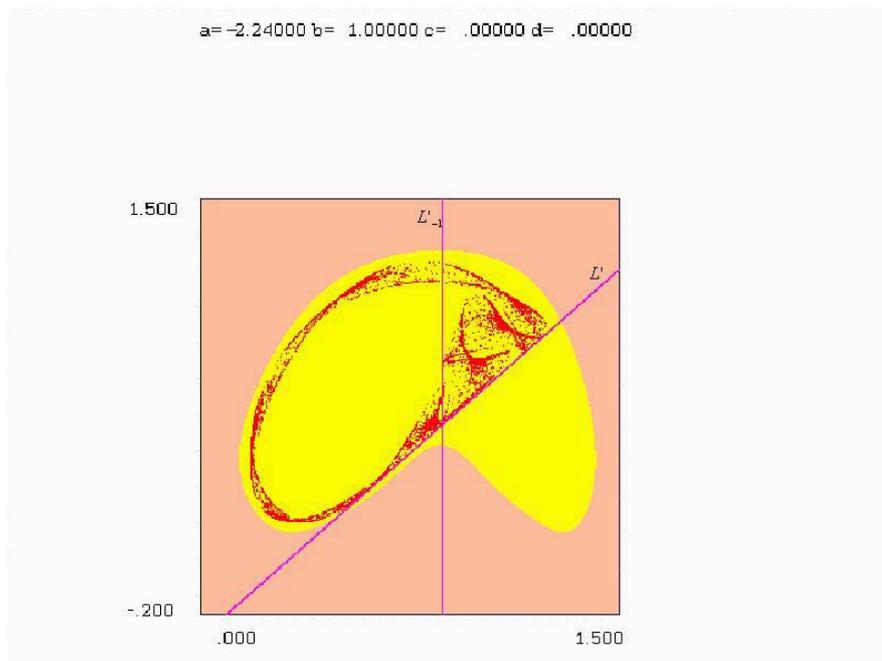


figure 4.14

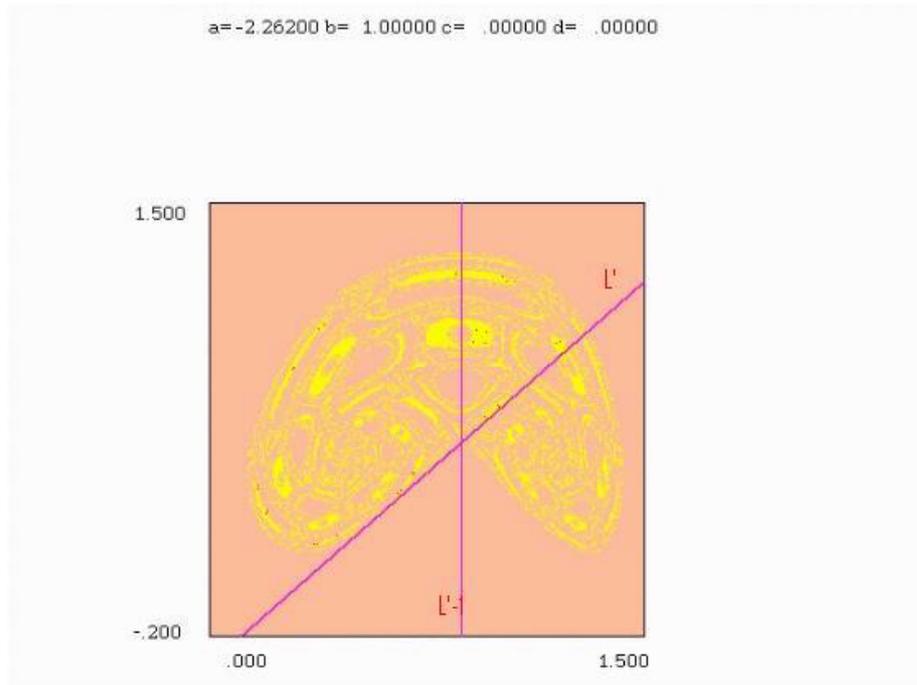


figure 4.15 : Fractalisation du bassin d'attraction

On fait croire le paramètre $a = -2.26$, deux attracteurs coexistent (figure 4.16). Le premier est un cycle stable d'ordre 7, le second est un cycle d'ordre 7 de type col. Lorsque l'on fait varier le paramètre a , le bassin de l'attracteur considéré évolue. Il peut devenir multiplement connexe (connexe avec des trous). Cette bifurcation a lieu lorsque le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change, où encore lorsqu'il y a une modification du nombre de lacs dans le bassin total D . En fait, elle correspond au contact entre la frontière ∂D du bassin et la ligne critique LC .

Pour la valeur de bifurcation $a \geq -2.256$ des situations homoclines entraînent la disparition d'une courbe invariante fermée, l'interaction de variété stable issue d'un point fixe ou un cycle col avec la ligne critique peut provoquer la formation d'un îlot, cet îlot constitue le bassin immédiat d'un point fixe considéré. par applications successives, on aboutit à une structure non connexe.

Dans ce travail, on a analysé les conséquences de la présence des lignes critiques sur les variétés invariantes et les bassins d'attraction. Ces résultats ont été établis pour des transformations noninversibles et polynomiales d'ordres 3, mais restent généraux et s'étendent à des transformations polynomiales de degré supérieur de type

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = p(x, a, b) + y \end{cases} \quad \text{telque } p(x, a, b) = x^{n+1} + ax^{n-1} + b, \quad n \geq 3 \quad (4.10)$$

4.2.7 Résultats :

Pour plus de clarté et pour élargir les résultats lorsque le degré du polynôme $p(x, a, b)$ est supérieure à 3, nous adapterons deux exemples.

Soit les endomorphismes suivants :

$$(T1) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = x^4 + ax^2 + b + y \end{cases}, \quad (T2) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = x^5 + ax^3 + b + y \end{cases}$$

Une étude similaire aux cas de la transformation de type (Z_1, Z_3, Z_1) est faite.

Le paramètre b garde une valeur $b = 1$, on fait varier le paramètre a pour les deux exemples. On retrouve la bifurcation expliquée ci-dessus, pour les deux exemples, l'apparition d'une courbe fermée invariante pour les endomorphismes $T1, T2$. Les figures 4.17b, 4.18b représentent un zoom pour les régions encadrées de la figure 4.17a et 4.18a. On fait croître le paramètre a , la courbe fermée invariante Γ traverse LC_{-1} . Cette bifurcation, crée des points d'auto-intersections sur Γ , ce qui signifie que Γ devient un attracteur chaotique ce résultat est représenté par les figures 4.17c et 4.18c. En diminuant encore la valeur du paramètre a , on a les situations présentées par les figures 4.17d, 4.18d, ces résultats sont comparés aux résultats de Millerioux [29] représentés par la figure 4.19 pour un endomorphisme quadratique défini par :

$$\begin{cases} x' = a'x + y \\ y' = x^2 + b' \end{cases}$$

Il a mis en évidence deux bifurcations liées à la non connexité des bassins d'attraction dans le cas quadratique :

- une bifurcation homocline par accumulation d'îlots non connexes le long d'une variété instable de type col
- une bifurcation par contact fondamental de deux îlots engendrant le passage d'une situation bassin non connexe à bassin multiplement connexe.

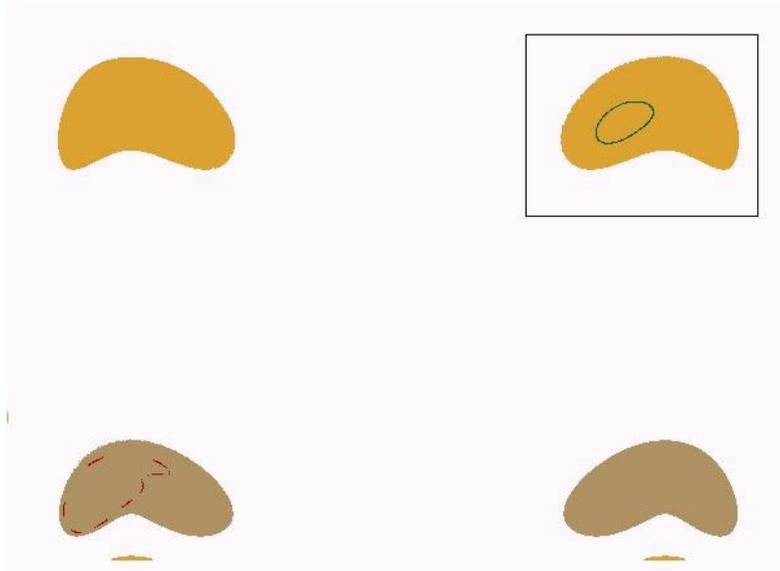


figure 4.17a

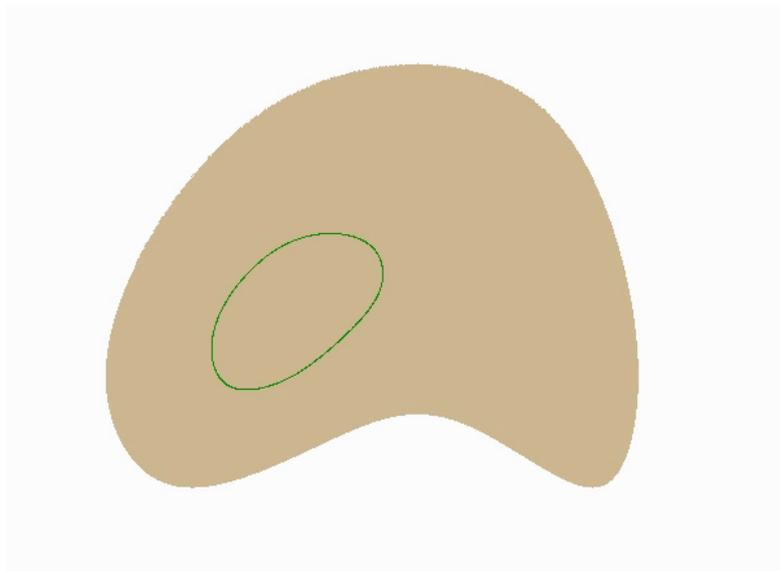


figure 4.17b

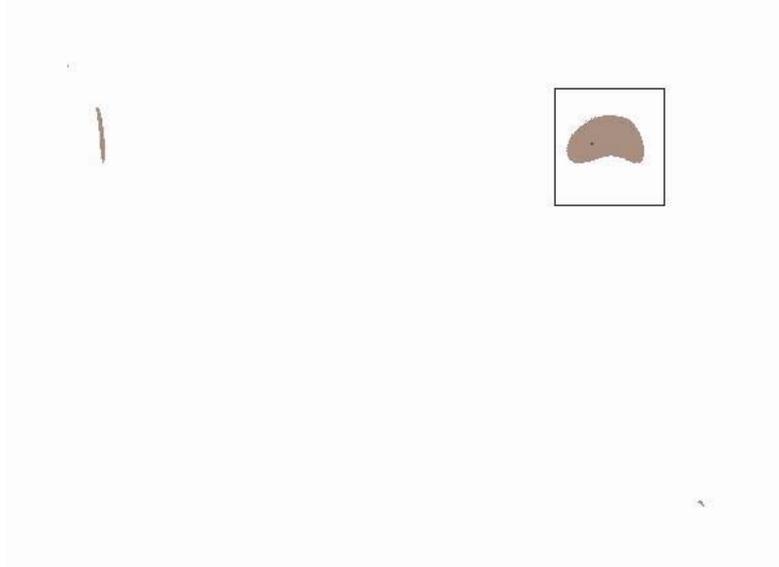


figure 4.18a

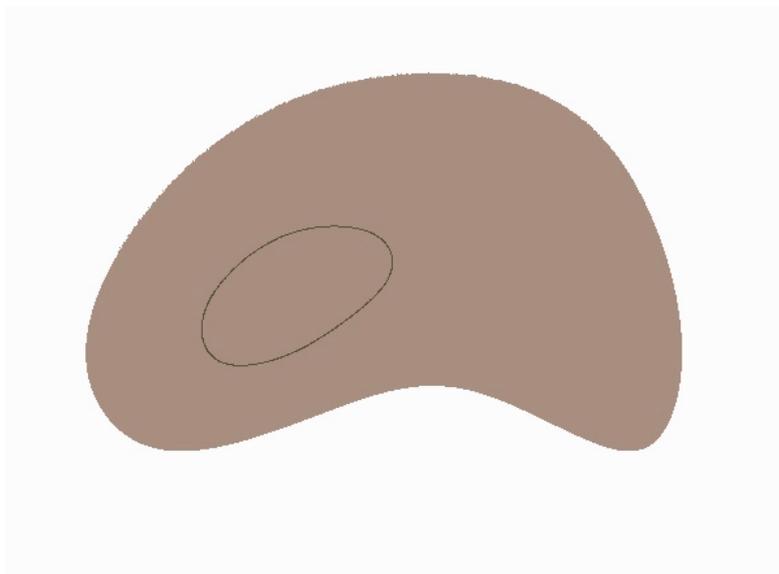


figure 4.18b

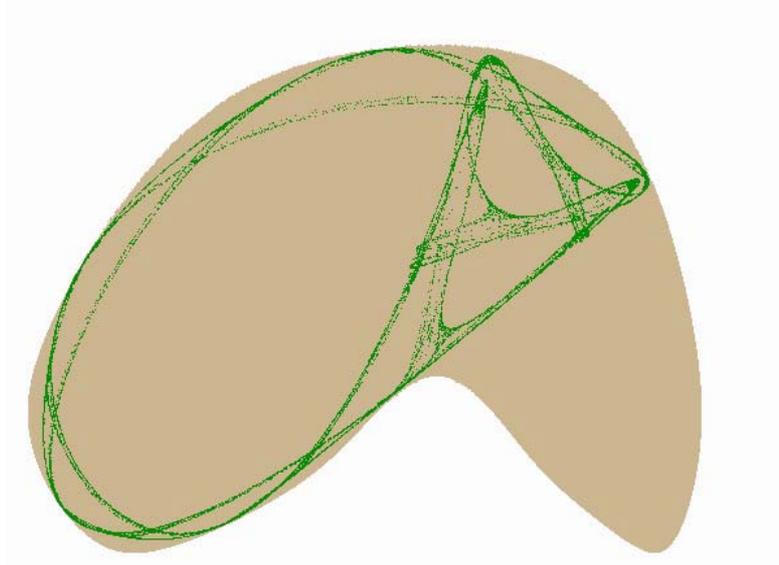


figure 4.17c

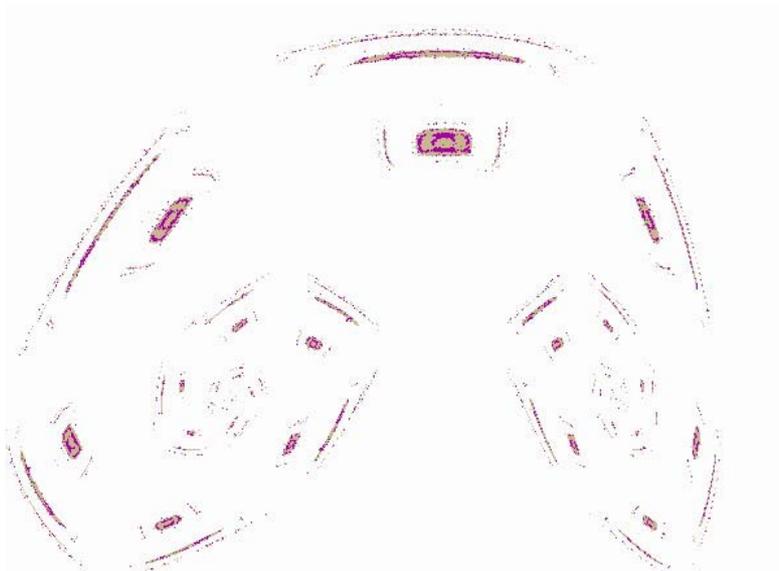


figure 4.17d

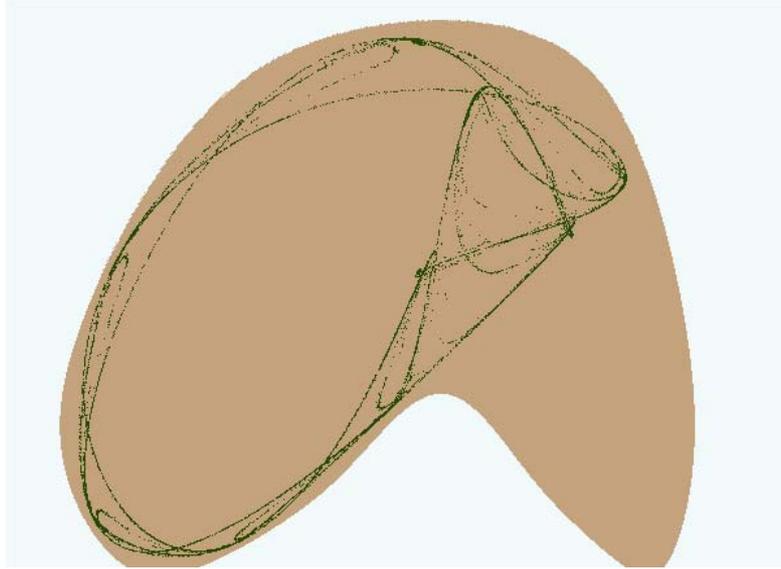


figure 4.18c



figure 4.18d

$$\lambda = 1.37861$$

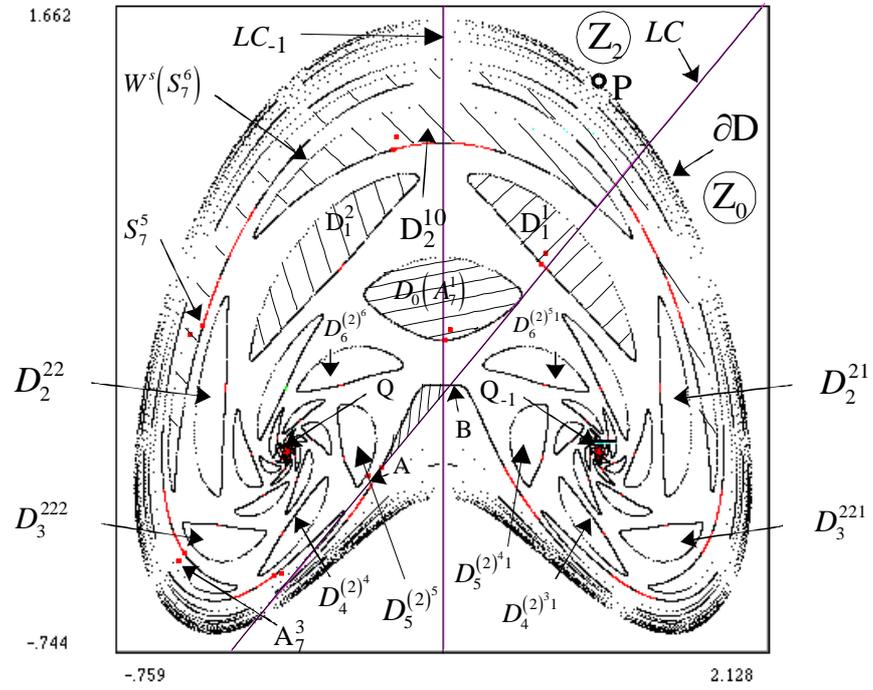


figure 4.19

Proposition 4.2.7.1 :

Soit T une transformation noninversible de la forme (4.10), p un polynôme de degré $n + 1$ tel que $p(x, a, b) = x^{n+1} + ax^{n-1} + b, b \neq 0, \forall n \geq 3$, il existe toujours trois branches parallèles de courbes critiques pour une valeur négative du paramètre a , données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} L & : y = x - \frac{2}{n+1}a \left(-a \frac{n-1}{n+1} \right)^{\frac{n-1}{2}} + b \\ L' & : y = x + \frac{2}{n+1}a \left(-a \frac{n-1}{n+1} \right)^{\frac{n-1}{2}} + b \\ L'' & : y = x + b \end{aligned}$$

Démonstration :

Les courbes critiques sont les courbes conséquentes des droites L_{-1}, L'_{-1} et L''_{-1} .

Les courbes des antécédents confondus de rang un, appartiennent à l'ensemble:

$$J_0 = \{ (x, y) \in IR^2 \text{ tels que : } J(x, y) = 0, \}$$

J est le jacobien de la transformation T défini par :

$$J = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p'(x) & 1 \end{bmatrix} = -p'(x) = x^{n-2}((n+1)x^2 + a(n-1))$$

Le jacobien s'annule pour trois valeurs du variable x , c'est trois solutions sont les courbes LC_{-1} telque $LC_{-1} = L_{-1} \cup L'_{-1} \cup L''_{-1}$ données par les branches :

$$L_{-1} : x = -\sqrt{\frac{-a(n-1)}{(n+1)}}, L'_{-1} : x = \sqrt{\frac{-a(n-1)}{(n+1)}}, L''_{-1} : x = 0.$$

Comme $LC = T(LC_{-1})$, telque $LC = L \cup L' \cup L''$, alors les courbes critiques L, L' et L'' sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
L & : y = x - \frac{2}{n+1}a \left(-a \frac{n-1}{n+1} \right)^{\frac{n-1}{2}} + b \\
L' & : y = x + \frac{2}{n+1}a \left(-a \frac{n-1}{n+1} \right)^{\frac{n-1}{2}} + b \\
L'' & : y = x + b
\end{aligned}$$

Remarque :

Si le paramètre a a une valeur positive, la transformation T admet une seule courbe critique c'est la droite $y = x + b, \forall n > 3$. Pour $n = 3$, la transformation T est un difféomorphisme.

Quand $x \neq 0$, la transformation T est de type (Z_1, Z_3, Z_1) , due à l'existence de deux branches L, L' .

Mais, il serait intéressant de caractériser le type de la transformation T au voisinage de la droite $x = 0$.

Pour cette étude, nous considérons l'exemple T_2 tel que :

$$T_2 : \begin{cases} x' = y \\ y' = x^5 + ax^3 + b + y \end{cases},$$

On cherche les déterminations inverses de T_2 ($(x, y) = T^{-1}(x', y')$), pour caractériser le type de la transformation, alors il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y = x' \\ x^5 + ax^3 + b + x' - y' = 0 \end{cases} \quad (*)$$

l'équation (*) de 5^{ème} degré à coefficients réels, on peut avoir 5 déterminations inverses, donc il peut exister dans le plan de phase une région Z_5 .

Le jacobien de cette transformation est $J_2 = -x^2(5x^2 + 3a)$, les solutions de cette équation $J_2 = 0$ sont $x = 0$, une racine double et $x = \pm \sqrt{\frac{-3a}{5}}$, donc il existe 4 branches de courbes critiques LC_{-1} , et le plan de phase se divise en 5 régions, alors on peut considérer T_2 un endomorphisme de type $(Z_1, Z_3, Z_5, Z_3, Z_1)$, tel que les 5 déterminations inverses sont données par :

$$T_1^{-1} = T_2^{-1} = T_3^{-1} = \begin{cases} x = 0 \\ y = x' \end{cases}, T_4^{-1} = \begin{cases} x = \sqrt{-a} \\ y = x' \end{cases}, T_5^{-1} = \begin{cases} x = -\sqrt{-a} \\ y = x' \end{cases}$$

Puisque sur la droite $y' = x' + b$, on a 5 déreminations inverses, alors on peut considérer cette droite comme la région Z_5 .

Remarque : les deux branches $LC'_{-1}(x = 0)$, $LC'_{-1}(x = 0)$ sont confondues, la région Z_5 se limite à une droite $y = x + b$.

CONCLUSION :

Le but de notre travail est d'analyser un système non linéaire réel polynomial de point de vue des systèmes dynamiques qu'il se caractérise par un comportement très complexe. L'analyse de ces phénomènes a nécessité des connaissances théoriques sur les comportements complexes pour l'interprétation des résultats obtenus, ces bases théoriques ont fait l'objet du chapitre un. Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté une étude sur les transformations inversibles (difféomorphisme) avec le jacobien du système constant, ce type d'applications est conjuguée à la composition d'applications de Hénon généralisées, ainsi que les résultats obtenus antérieurement. Nous avons étudié les bifurcations homoclines et hétéroclines dans les cas où il y a une symétrie et dans le cas conservatif. Nous avons proposé deux situations, pour le jacobien égal à -1 et la deuxième le jacobien égale à 1 .

Le troisième chapitre a permis de procéder à une classification et caractérisation d'une large classe de transformations non inversibles bidimensionnelles. En se basant sur les différentes structures des lignes critiques, on a développé une méthode et un programme en Maple pour calculer les lignes critiques en associant une nouvelle transformation T' à la transformation initiale T , telle que les lignes critiques de la transformation initiale T sont les courbes de bifurcation de Fold de la transformation associée T' . Les résultats de cette étude sont comparés à ceux obtenus dans le plan de phase.

La dernière partie est une généralisation d'une classe d'endomorphismes bidimensionnels polynomiaux. On a analysé les conséquences de la présence des lignes critiques sur les variétés invariantes et le bassin d'attraction, on s'est inspiré des travaux de Millerioux sur les bifurcations concernant les variétés invariantes de type col et les courbes invariantes fermées. Avec la présence des lignes critiques, ces mécanismes peuvent générer du chaos. Des résultats sont établis pour une transformation de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ et généralisés à des transformations de degrés supérieurs, nous avons mis en évidence la modification des bassins d'attraction due à la présence des lignes critiques.

A l'issue de cette étude, plusieurs perspectives sont envisagées.

- Il est intéressant de prolonger l'étude des difféomorphismes à trois dimensions, de

développer les bifurcations homoclines et hétéroclines.

- Une étude plus systématique des bassins d'attractions est à envisager. En particulier, il serait utile de connaître l'influence des paramètres sur les ensembles attractifs et leurs bassins d'attraction pour des transformations plus complexes par exemples des transformations définies par des fonctions trigonométriques.
- Dans le but de confirmer les résultats de **chapitre 3** sur la détermination des courbes critiques dans le plan paramétrique pour une transformation T , il serait intéressant de confirmer les résultats pour des transformations d'ordres supérieurs T^2, T^3, \dots

Annexe

– Le programme de **MAPLE** pour tracer les courbes de bifurcations fold :

```
> restart :with(linalg) :
> f := f(x, y, λ);
> g := g(x, y, λ);
> jacob0 :=matrix(2, 2, [diff(f, x), diff(f, y), diff(g, x), diff(g, y)]);
> ja0 :=det(jacob0);
```

Conditions d'existence de bifurcation fold de la transformation T'

Soit T' un endomorphisme défini par :

```
> fu := u + f(u, v, λ) - x̄;
> gv := v + g(u, v, λ) - ȳ;
> jacob1 :=matrix(2, 2, [diff(fu, u), diff(fu, v), diff(gv, u), diff(gv, v)]);
> ja1 :=det(jacob1);
```

NC d'existence d'un point cusp point sur la bifurcation fold pour un point fixe considéré :

```
> fu1 := fu - u;
> gv1 := gv - v;
> jacob2 := matrix(2, 2, [diff(fu1, u), diff(fu1, v), diff(gv1, u), diff(gv1, v)]);
> ja2 := det(jacob2);
```

Les mineurs de la matrice jacobienne $ja2$

```
> Au := diff(ja2, v);
> Av := -diff(ja2, u);
> A $\bar{x}$  :=det(matrix(2, 2, [diff(fu1, u), diff(fu1, v), diff(ja2, u), diff(ja2, v)]));
> A $\bar{y}$  := -det(matrix(2, 2, [diff(gv1, u), diff(gv1, v), diff(ja2, u), diff(ja2, v)]));
```

les points cusps.

```
> solve({fu1 = 0, gv1 = 0, ja2 = 0, A $\bar{x}$  = 0}, {u, v, x̄, ȳ});
```

Détermination de la courbe fold de T'

```
> D := ja1 + 1;
> N := trace(jacob1);
> H1 := D - N;
```

```
> E1 := resultant(fu1, gv1, u);
> E2 := resultant(fu1, H1, u);
> fold := simplify(resultant(E1, E2, v));
> folda := solve(fold, a);
> foldi := folda[i];
Fixons la valeur de  $\lambda$ 
>  $\lambda :=$ 
> plot([foldi, i = 1..],  $\bar{y} = -5.5, -5.5, color = [black, black, black], numpoints = 200);$ 
```

Bibliographie

- [1] Bernussou J., Liu Hsu et Mira C. (1976) "Quelques Exemples de Solutions Stochastiques Bornées dans les Récurrences Autonomes du 2nd Ordre", *Transformations Ponctuelles et Applications*, Colloque CNRS, Sept. 73 (Ed. CNRS Paris 1976).
- [2] Barugola A., Cathala J.C. et Mira C. (1986) "Annular Chaotic Areas" *Nonlinear Analysis TM & A.* 10(11), 1223-1236.
- [3] Broer.H, Simo.C, Tatjer.C "Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms". *Nonlinearity* 11 (1998) 667-770. printed in the UK
- [4] Carcassé.J.P " Sur quelques structures complexes de bifurcations de systèmes dynamiques" Thèse de L'UPS (Toulouse) 1990.
- [5] Carcasses.J.p, Mira.C, Simo.C,Tadjer.J.C : "Cross road area-spring area transition (I) Parameter plane representation" *International Journal of Bifurcations and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, n°1,PP.1-2,1991.
- [6] Carcasses.j "A new kind of parametric singularities and their use for the study of the bifurcation structure of an n-dimensional map", *Nonlinear Analysis TM & A.* vol 28 no,5 (1996) p.917-946.
- [7] Carcasses .J, Tatha.A "Study of a two-dimensional endomorphism by use of the parametric singularities", *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 10, No. 12(2000) 2853-2862.
- [8] Cathala J.C. (1989) "On some Properties of Absorptive Areas in 2nd Order Endomorphisms", *ECIT Batschuns*, Sept. 89, *Proceedings (World Scientific)*.
- [9] Devaney. R.L Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley, 1989

- [10] Djellit I, Chouit.S "On critical curves in noninvertible maps" *Far East J. Appl.Math.*24(1)(2006),101-117
- [11] Dullin.H.R, Meiss.J.D,"Generalized Hénon maps : the cubic diffeomorphisms of the plane", *Elsevier, Physica D143 (2000) 262-289.*
- [12] Farmer J.D., "The Dimension of Chaotic Attractors", *North-Holland Publishing Company Physica 7D (1983) p.153-180.*
- [13] Frouzakis C., Gardini L., Kevrekidis I., Millerioux G. et Mira C. (1997) "On Some Properties of Invariant Sets of Two-Dimensional Noninvertible Maps", *International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 7, No. 6*, p.1167-1194.
- [14] Friedland S. et Milnor J., "Dynamical Properties of Plane Polynomial Automorphisms", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 9 (1989) 67-99.
- [15] Fournier-Prunaret D. (1991) "The Bifurcation Structure of a Family of Degree-one Endomorphisms", *International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 1, No. 4*, p.823-838.
- [16] Fournier.D, Kawakami.H, Mira.C "Système dynamique : Sur les bifurcations d'un difféomorphisme quadratique bi-dimensionnel. Situations homoclines et hétéroclines. Zone Morse-smale."C.R. Acad.ScParis,t. 298,Série I, n°11, 1984
- [17] Gardini L. (1991) "On the Global Bifurcation of Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines" *Nonlinear Analysis TM & A.* 18(4), p.361-399.
- [18] Gardini L. (1991a) "Global Analysis and Bifurcations in Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines" *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria*, Sept. 91 (World Scientific, Singapore, 1992) p.112-125.
- [19] Gardini L. (1992) "Homoclinic Orbits of Saddles in Two-Dimensional Endomorphisms" *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria*, Sept. 92.
- [20] Gardini L. (1994) "Homoclinic Bifurcations in n-Dimensional Endomorphisms Due to Expanding Periodic Points", *Nonlinear Analysis TM & A.* 23 (8), p.1039-1089.
- [21] Gardini L., Abraham R., Fournier-Prunaret D. et Record R.J. (1994) "A Double Logistic Map" *International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 4, No. 1*, p.145-176.

- [22] Gardini.L, Agliari.A, Bischi.G, Dieci.R "Global bifurcations of closed invariant curves in two-dimensional maps : A computer assisted study" *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol15,No.4 (2005) 1285-1328.
- [23] Guckenheimer J. et Holmes P., "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", *Springer, New york* (1983).
- [24] Gumowski I. et Mira C. (1980) "Dynamique Chaotique" (Ed. Cépadues, Toulouse).
- [25] Gavrilov N.K. et Shilnikov L.P. (1973) "On the Three-Dimensional Dynamical System Close to Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Curve II", *Math. USSR Sb.*, 90 (1) p.139-156.
- [26] Hénon M., "A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor", *Comm. Math. Phys.* 50 (1) (1976) p.69-77.
- [27] Hale J.K. et Lin X.B. (1986) "Symbolic Dynamics and Nonlinear Semiflows", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Serie IV, Tomo CXLIV, p.229-259.
- [28] Li T.Y. et Yorke J. (1975) "Period three Implies Chaos", *Amer. Math. Monthly*, 82 (10) p.985-992.
- [29] Millerioux.G "Modèles par Transformations Non Inversible et Application à la Sécurité des Communications. Synchronisation du Chaos" Thèse de doctorat de l'insat toulouse (1997).
- [30] Mira C. (1987) "Chaotic Dynamics" *World Scientific, Singapore*.
- [31] Mira .C,Carcassese.j.P,Bosch.M, Simo.C,Tadjer.J.C "Crossroad area-spring area transition (II). Foliated parametric representation"*International Journal of Bifurcations and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1(2),PP.339-348,1991.
- [32] Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H. et Cathala J.C. (1994) "Basin Bifurcations of Two Dimensional Noninvertible Maps : Fractalization of Basins", *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 4, No. 2 (1994) p.343-381.
- [33] Mira C., Gardini L., Barugola A. et Cathala J.C., "Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps", *World Scientific Series on Nonlinear Sciences, Series A Vol. 20*.

- [34] Mira C. et Narayaninsamy T. (1993) "On Two Behaviours of Two-Dimensional Endomorphisms : Role of the Critical Curves", *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 3, No. 1, p.187-194.
- [35] Mira C. et Rauzy C. (1995) "Fractal Aggregation of Bassin Islands in Two-Dimensional Quadratic Noninvertible Maps", *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 5, No. 4 (1995) p.991-1019.
- [36] Sterling.D, Dullin.H.R, Meiss.J.D "Homoclinic Bifurcations for the H´enon Map" arXiv :chao-dyn/9904019 v1 9 Apr 1999.
- [37] Tatjer.J.C "Invariant manifolds and bifurcations for one-dimensional and two dimensional dissipative maps". PHD. Thesis University of Barcelona 1990.