

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA
FACULTÉ DES SCIENCES. DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en sciences

Option : Analyse Numérique

Titre

Approximation par la Méthode de Décomposition
en sous Domaines d'une Classe d'Inéquation
Quasi-Variationnelle Elliptique

Par :
Mehri Allaoua

Soutenue le 06/ 05/ 2015

Jury :

Haiour Mohamed	Président	Pr.	Univ. B.M Annaba
Saadi Samira	Rapporteur	M.C.A	Univ. B.M Annaba
Christine Bernardi	Examineur	Pr.	Univ. Pierre et M. Curie
Sissaoui Hocine	Examineur	Pr.	Univ. B.M Annaba
Ayadi Ab.Hamid	Examineur	Pr.	Univ. Oum El Bouaghi
Boussetila Nadjib	Examineur	Pr.	Univ. Guelma

Remerciements

Je tiens à remercier ma directrice de thèse le docteur Mme Saadi Samira maître de conférences à l'université Badji Mokhtar de Annaba pour son soutien et son aide qui m'ont permis de mener à bien ces travaux. Je tiens à lui assurer profonde gratitude pour m'avoir initié à la recherche dans ce domaine.

Je remercie vivement Monsieur Haïour Mohamed professeur à l'université Badji Mokhtar, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury et de l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Mes sincères remerciements vont à Mme Christine Bernardi directrice de recherche au laboratoire d'analyse numérique de l'université Pierre et Marie Curie Paris 6, monsieur Sissaoui Hocine professeur à l'université Badji Mokhtar, monsieur Ayadi Abdelhamid professeur à l'université d'Oum El Bouaghi et monsieur Boussetila Nadjib professeur à l'université 8 mai 1945 de Guelma qui ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse. Je leur adresse tous mes remerciements et toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

J'adresse également mes remerciements à ma femme et ma fille As-sia.

Je tiens enfin à remercier tous mes amis et collègues, ainsi tout le personnel du département de mathématiques.

Table des matières

Introduction générale	ix
0.1 Introduction	x
0.2 Historique de la méthode de Schwarz	xiii
0.3 Méthodes de Schwarz avec recouvrement et sans recouvrement	xv
0.3.1 Méthode de Schwarz sans recouvrement	xv
0.3.2 Méthode de Schwarz avec recouvrement	xvi
1 Généralités sur les inéquations variationnelles et quasi-variationnelles	1
1.1 Inéquation variationnelle (I.V) continue	2
1.1.1 Existence, unicité et régularité de la solution d'I.V	3
1.1.2 Propriété de monotonie	6
1.1.3 Propriété de Lipschitzianité de la Solution	7
1.2 Inéquation variationnelle discrète	8
1.2.1 Existence et unicité de la solution discrète	10
1.2.2 Propriété de monotonie de la solution discrète	10
1.2.3 Propriété de Lipschitzianité de la solution discrète	10
1.2.4 Régularité de la solution discrète	11
1.2.5 Estimation d'erreur	11
1.3 Inéquation quasi-variationnelle continue (I.Q.V)	12
1.3.1 Application du point fixe	13
1.3.2 Algorithme de Bensoussan-Lions	15
1.3.3 Existence et unicité de la solution d'I.Q.V	15
1.3.4 Régularité de la solution d'I.Q.V	16
1.4 Inéquation quasi-variationnelle discrète	16
1.4.1 Application discrète du point fixe	16
1.4.2 Algorithme discret de Bensoussan-Lions	17
1.4.3 Existence et unicité de la solution discrète d'I.Q.V	18

2	Estimation de l'erreur en norme L^∞ de l'algorithme de Schwarz pour une inéquation quasi-variationnelle elliptique	19
2.1	Introduction	20
2.2	Algorithme de Schwarz pour une inéquation quasi-variationnelle	20
2.2.1	Quelques résultats préliminaires sur les I.Q.V	20
2.2.2	Algorithme continu de Schwarz	26
2.2.3	Théorème de convergence géométrique	28
2.2.4	La Discrétisation	31
2.3	Analyse de l'erreur	32
2.3.1	Définition de deux suites auxiliaires de Schwarz	32
2.3.2	Estimation de l'erreur en norme L^∞	35
2.4	Expérimentation numérique	37
3	Estimation de l'erreur en norme L^∞ de l'algorithme de Schwarz pour une inéquation variationnelle elliptique à opérateur non-coercif	45
3.1	Introduction	46
3.2	Algorithme de Schwarz pour l'inéquation variationnelle à opérateur noncoercif	47
3.2.1	Notations et hypothèses	47
3.2.2	Quelques résultats préliminaires sur l'I.V noncoercive	50
3.2.3	Algorithme continu de Schwarz	54
3.2.4	La discrétisation	56
3.3	Analyse de l'erreur d'approximation	57
3.3.1	Suites auxiliaires de Schwarz	57
3.3.2	Suites de sous solutions	59
3.3.3	Estimation d'erreur	62
3.4	Expérimentation numérique	64
	Conclusion	75
	Appendice	75
	Bibliographie	78

Liste des tableaux

2.1	Erreurs et nombre d'itérations	38
2.2	Itérations de la solution pour $h_1 = \frac{1}{2^5}, h_2 = \frac{1}{2^6}, d = 0.5$	40
2.3	Nombre d'itérations de Schwarz	40
3.1	Erreurs et nombre d'itérations pour : $\lambda = 1$	65
3.2	Itérations de la solution pour : $\lambda = 1, d = 0.5, h_1 = \frac{1}{2^5}, h_2 = \frac{1}{2^6}$	67
3.3	Nombre d'itérations de Schwarz pour : $\lambda = 1$	67
3.4	Nombre d'itérations pour : $\lambda = 3$ et $\lambda = 6$	68

Table des figures

1	La fameuse figure de Schwarz	xiv
2.1	Discrétisation des deux sous domaines	38
2.2	Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 1$	41
2.3	Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 2$	41
2.4	Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 4$	42
2.5	Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 6$	42
2.6	Evolution des erreurs dans Ω_1	43
2.7	Evolution des erreurs dans Ω_2	43
3.1	Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 1$	69
3.2	Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 2$	69
3.3	Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 3$	70
3.4	Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 5$	70
3.5	Evolution de l'erreur pour h_i fixe : $h_1 = 1/16, h_2 = 1/32, d = 0.5, \lambda = 1$	71
3.6	Evolution de l'erreur pour h_i fixe : $h_1 = 1/32, h_2 = 1/64, d = 0.5, \lambda = 1$	71

Résumé

Ce travail porte sur l'étude de la méthode de Schwarz et son application pour résoudre un problème de l'obstacle régis par des inéquations variationnelles et quasi-variationnelles à opérateur elliptique. Le principe de cette méthode consiste à ramener des problèmes de grande taille sur des domaines à géométries complexes en une suite de sous-problèmes de taille plus petite sur des sous domaines à géométries plus simples. En considérant une décomposition en deux sous domaines avec recouvrement dont chaque sous domaine a sa propre triangulation, autrement dit que les deux triangulations sont indépendantes l'une à l'autre, nous prouvons une estimation optimale de l'erreur dans chaque sous domaine entre la solution continue et l'itéré discret de Schwarz. Cette approche combine entre un résultat de convergence géométrique des suites continues de Schwarz et une autre estimation d'erreur des suites auxiliaires de Schwarz pour chaque sous problème. Cette dernière estimation repose également sur une propriété de Lipschitzianité de la solution par rapport aux données sur la frontière et le second membre de l'inéquation.

Abstract

The Schwarz method can be used to solve elliptic variational inequalities on domain which consist of two or more overlapping subdomains. The solution is approximated by an infinite sequence of functions which results from solving a sequence of elliptic variational inequalities in each of the subdomains. In this work, we are interested in the error analysis in L^∞ - norm for a class of elliptic variational and quasi-variational inequalities in the context of overlapping nonmatching grids : we consider a domain which is the union of two overlapping subdomains where each subdomain has its own triangulation. The proof of the main result of this work stands on a Lipschitz continuous dependency with respect to the boundary condition and the source term for variational or quasi-variational inequality. More precisely, we develop an approach which combines a geometrical convergence result due to Lions and estimates errors between the continuous and discretized Schwarz iterates. The optimal convergence order is then derived making use of standard finite element L^∞ -error estimate for elliptic variational inequalities.

Liste des Publications

1. **S. SAADI and A. MEHRI**, L^∞ -Error Estimate of Schwarz Algorithm for Elliptic Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problem, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications (AJMAA), [http ://www.ajmaa.org](http://www.ajmaa.org), Volume 11, N°1, (2014), pp 1-13.
2. **S. SAADI and A. MEHRI**, L^∞ -Error Estimate of Schwarz Algorithm for Noncoercive Variational Inequalities, Applied Mathematics, [http ://www.scirp.org/journal/am](http://www.scirp.org/journal/am), Volume 5, N°3, (2014), pp 572-580.

Notations

Soit Ω un ouvert borné de R^N à frontière régulière $\partial\Omega$,

- $L^\infty(\Omega)$ est l'espace de Banach, des fonctions mesurables et bornées définies presque partout de Ω dans R , munit de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{Supess}_{x \in \Omega} |u| = \inf \{M / |u(x)| < M\},$$

- $L^p(\Omega)$ est l'espace de Banach, des fonctions mesurables définies presque partout de Ω dans R , tel que $|u(x)|^p$ soit intégrable, munit de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

- pour $p \geq 1, m \in N^*$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ l'espace

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) / D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

est un espace de Banach,

- l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$,

- V est l'espace $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$.

Introduction générale

0.1 Introduction

Les méthodes de Schwarz ou méthodes de décomposition de domaine ont récemment suscité un grand intérêt ceci est dû principalement au développement et l'évolution des calculs parallèles. Nous nous intéressons à l'application de ces méthodes pour la résolution de problèmes de contrôle impulsionnel et stochastique régis par des inéquations aux dérivées partielles [1, 4, 5, 14, 24, 26]. Le premier objectif de ces méthodes est de trouver des solutions efficaces aux problèmes gouvernés par des inéquations aux dérivées partielles sur des géométries compliquées et leurs approximations sur de très fines grilles. En effet, cela engendre des systèmes linéaires de grande taille et difficiles à résoudre par des solveurs directs ou des méthodes itératives, puisque de tels systèmes sont souvent mal conditionnés. Ainsi, les méthodes de Schwarz permettent de décomposer le problème initial en des sous problèmes de petite taille et sur des géométries plus simples [2, 3, 9, 17, 18, 27, 28].

Il faudra ajouter que les méthodes de Schwarz fournissent une façon très naturelle de dériver des algorithmes bien adaptés aux machines parallèles. C'est pourquoi, elles ont récemment suscité un grand intérêt du point de vue théo-

rique et pratique. A cet effet et depuis 1987, une conférence internationale se tiendra annuellement pour présenter les nouveaux résultats et les diverses applications qui sont recueillis par la suite dans des "proceeding" de ces conférences [17, 18], la dernière conférence s'est tenue en 2013 sous le titre "22nd International Conference on Domain Decomposition Methods". Quant aux diverses et importantes raisons qui ont conduit à la popularité de ces méthodes, cela peut être résumé dans le fait qu'elles :

1. sont bien adaptées aux machines parallèles dont le développement et les caractéristiques ne cessent de s'accroître,
2. possèdent un intérêt mathématique intrinsèque,
3. peuvent s'appliquer à des problèmes définis sur des géométries complexes,
4. possèdent une base théorique solide,
5. facilitent l'utilisation des schémas numériques différents pour chaque sous problème, par exemple, éléments finis, différences finies, méthodes spectrales.....,
6. et peuvent être combinées avec une résolution par d'autres méthodes telles les méthodes multigrilles.

Ces méthodes peuvent être vues comme des algorithmes type "diviser pour régner".

On s'intéresse à l'approximation par décomposition de domaine et parfois appelée algorithme de Schwarz de l'inéquation quasi-variationnelle elliptique en

abrégé (I.Q.V) liée à des problèmes de gestion des stocks [5], et l'inéquation variationnelle (I.V) à opérateur non coercif [4]. Ce travail est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats généraux sur l'inéquation variationnelle et quasi-variationnelle, telles l'existence et l'unicité de la solution, leurs propriétés de régularité, de monotonie et de Lipshitzianité. Nous rappelons aussi l'approximation par éléments finis des problèmes d'I.V et d'I.Q.V et par symétrie nous donnons des résultats analogues aux problèmes continus. Et pour évaluer l'erreur commise entre la solution continue et la solution discrète du problème, nous introduisons un théorème fondamental dû à Cortey-Dumont [13] qui montre la convergence uniforme en norme L^∞ de la solution approchée vers la solution exacte.

Le deuxième chapitre est consacré à l'application de la méthode de Schwarz à une inéquation quasi-variationnelle elliptique. Nous exposons les deux algorithmes de Schwarz continu et discret. Nous prouvons un théorème de convergence géométrique qui forme un élément essentiel de ce chapitre. Finalement nous estimons l'erreur de la solution de chaque sous problème, en introduisant deux suites et en se basant sur un résultat classique de la convergence uniforme de Cortey-Dumont [13]. Il convient de mentionner que la technique présentée dans cette preuve est différente à celle introduite dans les travaux de [15]. Pour valider notre théorie, nous traitons un test numérique simple sur un logiciel MATHLAB pour différentes décompositions géométriques.

L'objectif du troixième chapitre est de faire une extension de l'algorithme de Schwarz à une inéquation variationnelle à opérateur noncoercif. La technique utilisée dans ce chapitre diffère à celle entreprise dans le chapitre précédent. Plus précisément, nous introduisons dans chaque sous domaine deux suites de sous solutions continues et discrètes. Nous prouvons leurs approximations en norme L^∞ qui forment une base de cette technique, et nous terminons ce chapitre par des applications numériques sur différents exemples simples.

Avant d'entamer la réalisation du premier chapitre de cette thèse, nous exposons ici un bref historique sur la méthode de Schwarz et ses variantes.

0.2 Historique de la méthode de Schwarz

La première méthode de Schwarz a été développée à la fin du 19^{eme} siècle par le mathématicien H. A. Schwarz [23] dans le but d'étudier l'opérateur de Laplace. Son idée est de traiter le problème dans le cas où Ω est la réunion avec recouvrement de deux domaines simples, par exemple : l'union d'une plaque rectangulaire et un disque.

ALGORITHME1 : Schwarz 1870

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = u_0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (0.2.1)$$

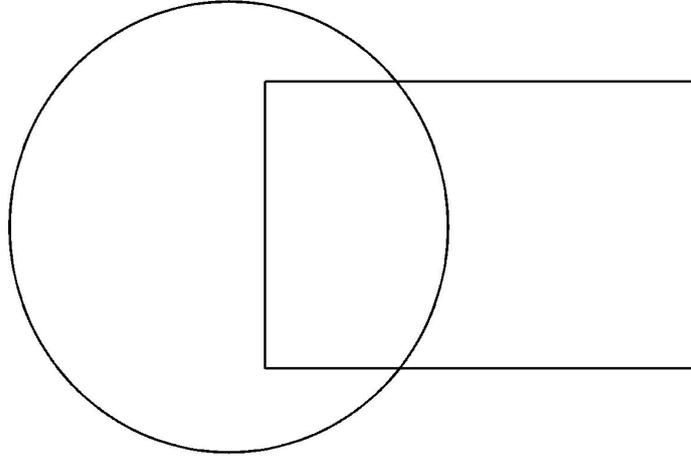


FIGURE 1 – La fameuse figure de Schwarz

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = u_0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (0.2.2)$$

La convergence vers la solution globale de cet algorithme a été établie par Schwarz en utilisant le principe du maximum.

Ensuite, vers les années 30, Sobolev a découvert la formulation variationnelle pour des problèmes en élasticité linéaire [25]. Le résultat de Sobolev offre un point de départ pour utiliser l'algorithme pour des problèmes ne vérifiant pas le principe du maximum. Puis en 1988, P. L. Lions donne une interprétation de cet algorithme à l'aide d'une formulation variationnelle [17, 18, 19]. Il précise que la convergence de cette méthode dépend de la taille du recouvrement d et du pas

de discrétisation h . On note que la convergence est meilleure si le recouvrement est important.

0.3 Méthodes de Schwarz avec recouvrement et sans recouvrement

Pour simplifier, nous allons nous limiter au cas d'un problème elliptique avec conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.3.3)$$

Les méthodes de Schwarz sont basées sur un partitionnement du domaine Ω en $m(m \geq 2)$ sous domaines Ω_i tel que :

$$\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \Omega_i$$

Ces méthodes visent à résoudre le problème global sur Ω en résolvant des problèmes plus petits sur les sous-domaines Ω_i . On distingue deux types de partitionnement :

0.3.1 Méthode de Schwarz sans recouvrement

L'intersection entre les sous domaines se limite aux interfaces :

$$\forall 1 \leq i \leq j \leq m, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \Gamma_{i,j}$$

où $\Gamma_{i,j}$ est la frontière entre les sous domaines Ω_i et Ω_j .

ALGORITHME2 : Schwarz sans recouvrement

Soit $(u_i^0)_{i=1,2}$ une approximation initiale de la solution u dans chaque sous domaine dans le cas d'un découpage en deux sous domaines, et $(u_i^n)_{i=1,2}$ est la valeur de l'approximation de u à l'itération n .

L'algorithme de Schwarz s'écrit :

$$\begin{cases} Lu_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ B_1 u_1^{n+1} = B_1 u_2^n \text{ sur } \Gamma_{1,2} \end{cases} \quad (0.3.4)$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ B_2 u_2^{n+1} = B_2 u_1^n \text{ sur } \Gamma_{1,2} \end{cases} \quad (0.3.5)$$

où B_1 et B_2 sont des opérateurs d'interfaces.

Dans cet algorithme la résolution des deux sous problèmes se déroule en parallèle: à l'itération courante, chaque sous domaine a besoin d'information à l'itération précédente de son voisin, avec lequel il a des frontières non vides. P.L. Lions [19] a montré que ces opérateurs d'interfaces peuvent être remplacés par des conditions aux limites mixtes de type Dirichlet et Neumann, qui sont appelées " conditions de transmissions de type Robin ou mixtes ".

0.3.2 Méthode de Schwarz avec recouvrement

Chaque sous domaine recouvre une partie de ses sous domaines voisins. On distingue deux versions :

ALGORITHME3 : Schwarz additif - Calcul parallèle

On prend comme conditions de Dirichlet pour un sous domaine Ω_i , les valeurs calculées par le sous domaine voisin à l'itération précédente. Soit à résoudre ces deux sous problèmes en parallèle :

$$\begin{cases} Lu_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 \end{cases} \quad (0.3.6)$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^n \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \end{cases} \quad (0.3.7)$$

ALGORITHME4 : Schwarz multiplicatif - Calcul séquentiel

On prend comme conditions de Dirichlet les dernières valeurs d'interfaces calculées par le sous domaine voisin. Soit à résoudre ces deux sous problèmes séquentiellement :

$$\begin{cases} Lu_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 \end{cases} \quad (0.3.8)$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \end{cases} \quad (0.3.9)$$

Remarque 0.3.1. L'algorithme de Schwarz multiplicatif s'interprète algébriquement comme une méthode de Gauss Seidel par blocs où chaque bloc est relatif à l'opérateur restreint sur un sous domaine. Le degré du parallélisme dans ce cas est moins important puisque le sous domaine Ω_2 doit attendre que le calcul soit fait sur le sous domaine voisin Ω_1 avant d'entamer son propre calcul.

Remarque 0.3.2. Il faut souligner que la convergence de la méthode de Schwarz additive est moins bonne que sa version multiplicative. En termes algébriques, elle correspond à une méthode de Jacobi par blocs où chaque bloc est relatif à l'opérateur restreint sur un sous domaine.

L'avantage de ces algorithmes est l'économie en place mémoire, en effet si le problème global est résolu par des méthodes directes le coût de stockage est très grand, mais en divisant ce problème en plus petits morceaux la quantité de stockage peut être réduite.

Chapitre 1

Généralités sur les inéquations variationnelles et quasi-variationnelles

1.1 Inéquation variationnelle (I.V) continue

On définit pour tout $u, v \in V$ (ici $V = H_0^1(\Omega)$)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq N} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0 uv \right) dx, \quad (1.1.1)$$

qui est une forme bilinéaire associée à l'opérateur A défini par

$$A = - \sum_{1 \leq i, j \leq N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{1 \leq j \leq N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + a_0 \quad (1.1.2)$$

dont les coefficients $a_{ij}(x), a_j(x), a_0(x)$ sont supposés suffisamment réguliers, et $a_0(x)$ satisfait

$$a_0(x) \geq \beta > 0, \forall x \in \Omega. \quad (1.1.3)$$

Nous supposons aussi que la forme bilinéaire est continue et fortement coercive

$$\exists \alpha > 0 : a(v, v) \geq \|v\|_V^2. \quad (1.1.4)$$

Soient une fonction $f \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$(f, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \forall v \in V \quad (1.1.5)$$

et un obstacle

$$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \text{ telle que } \psi > 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1.1.6)$$

Soit enfin un ensemble convexe fermé non vide de V

$$K = \{v \in V / v \leq \psi \text{ dans } \Omega\}. \quad (1.1.7)$$

On considère l'inéquation variationnelle elliptique (en abrégé I.V) continue suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Ce genre d'inéquation s'appelle aussi problème de l'obstacle où problème à frontière libre. En effet la fonction u coïncide avec l'obstacle ψ sur une partie de Ω , et dans l'autre partie l'obstacle $\psi > u$. Cela nous conduit à définir une frontière libre entre les deux parties de Ω . En pratique les inéquations variationnelles sont souvent appliquées dans le domaine des problèmes de contrôle stochastique et les problèmes de l'énergie [1, 4, 14, 24, 26].

1.1.1 Existence, unicité et régularité de la solution d'I.V

Théorème 1.1.1. [14, 26] *Sous les notations et les hypothèses précédentes, il existe une unique solution u du problème (1.1.8). De plus u satisfait la propriété de régularité :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), 2 \leq p < \infty.$$

Preuve.

1. Prouvons d'abord l'unicité.

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (1.1.8), alors nous avons

$$a(u_1, v - u_1) \geq (f, v - u_1) \quad \forall v \in K$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq (f, v - u_2) \quad \forall v \in K$$

posons $v = u_2$ dans la première inéquation, $v = u_1$ dans la deuxième inéquation, et en additionnant les deux inéquations, nous obtenons

$$a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

en utilisant la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$,

$$\alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

d'où

$$u_2 = u_1$$

2. Prouvons l'existence. L'idée est de transformer le problème (1.1.8) à un problème de point fixe. En effet, nous avons

$$a(u, v - u) = (Au, v - u), \quad \forall v \in K$$

ainsi, le problème (1.1.8) est équivalent à,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ (Au - f, v - u) \geq 0, \forall v \in K \end{array} \right.$$

soit $t > 0$, alors

$$(-t(Au - f), v - u) \leq 0, \forall v \in K$$

ce qui implique que

$$(u - t(Au - f) - u, v - u) \leq 0, \forall v \in K.$$

Soit

$$P_K : V \longrightarrow K$$

la projection orthogonale de V sur K . Alors le problème (1.1.8) est équivalent à un problème de point fixe,

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ u = P_K(u - t(Au - f)), \text{ pour } t > 0. \end{cases}$$

Montrons maintenant que P_K est une contraction sur V . Soit $v, w \in V$, alors

$$\begin{aligned} & \|P_K(v - t(Av - f)) - P_K(w - t(Aw - f))\|^2 \\ & \leq \|(v - t(Av - f)) - (w - t(Aw - f))\|^2 \\ & = \|(v - w) - tA(v - w)\|^2 \\ & = \|v - w\|^2 - 2ta(v - w, v - w) + t^2 \|A(v - w)\|^2 \\ & \leq (1 - 2t\alpha + t^2 M^2) \|v - w\|^2 \end{aligned}$$

nous choisissons

$$0 < t < \frac{2\alpha}{M^2}$$

alors P_K est une contraction, et par le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une solution unique $u \in K$.

□

Nous donnons une propriété de monotonie de la solution d'I.V.

1.1.2 Propriété de monotonie

On notera par $u = \partial(f, \psi)$ (second membre f , obstacle ψ) la solution du problème (1.1.8).

Proposition 1.1.2. *Sous les notations et les hypothèses précédentes, on a si $f \geq \tilde{f}$ et $\psi \geq \tilde{\psi}$ alors $\partial(f, \psi) \geq \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$.*

Preuve. On pose $v^- = \max(-v, 0)$ qui est une fonction de V . soit $\tilde{u} = \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) \in \tilde{K}$ solution de

$$a(\tilde{u}, v - \tilde{u}) \geq (\tilde{f}, v - \tilde{u}), \forall v \in \tilde{K} \quad (1.1.9)$$

Alors la fonction $v = u + (u - \tilde{u})^-$ est une fonction admissible pour le problème (1.1.8) donc

$$a(u, (u - \tilde{u})^-) \geq (f, (u - \tilde{u})^-) \quad (1.1.10)$$

de même $v = \tilde{u} - (u - \tilde{u})^-$ est une fonction admissible pour le problème (1.1.9), donc

$$a(\tilde{u}, -(u - \tilde{u})^-) \geq (\tilde{f}, -(u - \tilde{u})^-) \quad (1.1.11)$$

par addition de (1.1.10) et (1.1.11), nous obtenons

$$a(u - \tilde{u}, (u - \tilde{u})^-) \geq (f - \tilde{f}, (u - \tilde{u})^-) \geq 0$$

ce qui donne

$$a((u - \tilde{u})^-, (u - \tilde{u})^-) \leq 0$$

comme $a(., .)$ est coercive, ceci implique que

$$(u - \tilde{u})^- = 0$$

d'où

$$u \geq \tilde{u}.$$

□

1.1.3 Propriété de Lipschitzianité de la Solution

Proposition 1.1.3. *Sous les notations et les hypothèses de la proposition (1.1.2),*

on a

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\beta} \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Preuve. La démonstration est une adaptation de [8]. Posons

$$\Phi = \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\beta} \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

alors

$$\psi \leq \tilde{\psi} + \Phi$$

et

$$f \leq \tilde{f} + \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{f} + a_0 \Phi$$

donc d'après la proposition (1.1.2), on a

$$\begin{aligned} \partial(f, \psi) &\leq \partial(\tilde{f} + a_0 \Phi, \tilde{\psi} + \Phi) \\ &= \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) + \Phi \end{aligned}$$

d'où

$$\partial(f, \psi) - \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) \leq \Phi$$

similairement, en changeant les rôles des couples (f, ψ) et $(\tilde{f}, \tilde{\psi})$, nous obtenons

$$\partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) - \partial(f, \psi) \leq \Phi$$

ce qui achève la démonstration. \square

1.2 Inéquation variationnelle discrète

Nous allons maintenant introduire le problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédemment pour le problème continu. Toutes les démonstrations qui ne sont pas données explicitement sont exactement les mêmes que dans le cas continu. Et pour insister sur la symétrie de l'étude, nous suivrons exactement la même démarche qu'au cas continu. Nous allons considérer un espace d'éléments finis conformes construit à partir des polynômes de degré 1. L'introduction de polynômes de degré supérieur n'a pas été envisagée dans la mesure où les propriétés de régularité rencontrées ne semblent pas permettre d'en tirer partie.

Nous introduisons une famille de triangulation régulières, quasi-uniformes τ^h de Ω , et considérons l'espace V_h d'éléments finis conformes

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \cap V / v_h|_K \in P_1, \forall K \in \tau^h\} \quad (1.2.12)$$

Soit $M_s, s = 1, 2, \dots, m(h)$ les sommets de la famille de triangulation τ^h qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega$. Nous notons par $\varphi_s, s = 1, 2, \dots, m(h)$ les fonctions

de bases usuelles ($\varphi_s(M_l) = \delta_{sl}$, symbole de Kronecker).

Soit aussi r_h , l'opérateur d'interpolation défini par : $\forall v \in C(\bar{\Omega}) \cap V$

$$r_h v = \sum_{s=1}^{m(h)} v(M_s) \varphi_s(x, y) \quad (1.2.13)$$

L'ordre sur V_h sera celui induit par $R^{m(h)}$.

Nous introduisons de manière similaire la matrice de discrétisation A de coefficients génériques $a_{ls} = a(\varphi_l, \varphi_s)$, où $\varphi_s, s = 1, 2, \dots, m(h)$ sont les fonctions de base usuelles.

L'hypothèse du principe du maximum discret (p.m.d)

Définition 1.2.1. Soit A une matrice carré telle que $a_{ss} > 0$ et $a_{ls} \leq 0$ pour $l \neq s$. On dit que A est une M -matrice si A^{-1} existe et ses éléments sont tous non négatifs.

Dans [11], on trouve des conditions géométriques simples liées à la triangulation, pour lesquelles le (p.m.d) sera vérifié. Dans ce qui suit on suppose que A est une M -matrice.

Considérons le problème discret associé au problème (1.1.8)

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in K_h \text{ solution de} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (1.2.14)$$

où

$$K_h = \{v_h \in V_h / v_h \leq r_h \psi \text{ dans } \tau^h\} \quad (1.2.15)$$

1.2.1 Existence et unicité de la solution discrète

Théorème 1.2.1. [14, 24] *Sous les notations et les hypothèses précédentes, le problème (1.2.14) admet une solution unique.*

1.2.2 Propriété de monotonie de la solution discrète

On notera par $u_h = \partial_h(f, r_h\psi)$ la solution du problème discret (1.2.14).

Proposition 1.2.2. *Sous les notations et les hypothèses précédentes, si $f \geq \tilde{f}$ et $\psi \geq \tilde{\psi}$ alors $\partial_h(f, r_h\psi) \geq \partial_h(\tilde{f}, r_h\tilde{\psi})$.*

Preuve. La démonstration est similaire à celle donnée dans la proposition (1.1.2). □

1.2.3 Propriété de Lipschitzianité de la solution discrète

Proposition 1.2.3. *Sous les notations et les hypothèses de la proposition (1.2.2), on a*

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|r_h\psi - r_h\tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\beta} \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Preuve. La démonstration est analogue à celle de la proposition (1.1.3). □

Remarque 1.2.1. Si $f = \tilde{f}$, alors

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|r_h\psi - r_h\tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{1.2.16}$$

1.2.4 Régularité de la solution discrète

Comme dans le cas continu, la régularité de la solution discrète se démontre par le théorème suivant.

Théorème 1.2.4. [12] *Il existe une constante c indépendante de h telle que*

$$|a(u_h, \varphi_s)| \leq c \|\varphi_s\|_{L^1(\Omega)}, \forall \varphi_s, s = 1, 2, \dots, m(h)$$

1.2.5 Estimation d'erreur

Le théorème suivant dû à Cortey-Dumont ([13]), établit la convergence uniforme de la solution discrète u_h vers la solution continue u .

Théorème 1.2.5. *Sous les notations et les hypothèses (1.1.1)-(1.1.7) et le (p.m.d), il existe une constante c indépendante de h telle que*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch^2 |\ln h|^2$$

Remarque 1.2.2. L'estimation d'erreur en norme L^∞ est un défi non seulement pour le caractère réaliste de cette norme mais aussi pour les difficultés inhérentes de convergence. L'intérêt de son emploi dans l'approximation des problèmes de type obstacle réside dans le fait qu'ils sont des problèmes à frontière libre. Ce fait a été confronté et validé en premier lieu par l'article de Brezzi et Caffarelli [10], et plus tard par celui de Nochetto [20] sur la convergence de la frontière libre discrète vers la frontière libre continue.

1.3 Inéquation quasi-variationnelle continue (I.Q.V)

On s'intéresse à l'étude de l'inéquation quasi-variationnelle (en abrégé I.Q.V), dont l'obstacle dépend de la solution u . Plus précisément soit un ensemble convexe fermé non vide de V

$$K(u) = \{v \in V / 0 \leq v \leq Mu \text{ dans } \Omega\} \quad (1.3.17)$$

où l'opérateur M est défini de $V \cap L^\infty(\Omega)$ dans lui même par :

$$Mu(x) = k + \inf u(x + \xi), x \in \Omega, \xi \geq 0, x + \xi \in \Omega, k = \text{conste} > 0 \quad (1.3.18)$$

et possédant les propriétés suivantes

$$\|Mu - Mv\|_V \leq \|u - v\|_V, \forall u, v \in V \quad (1.3.19)$$

$$Mu \leq Mv \text{ dès que } u \leq v \quad (1.3.20)$$

$$M(u + c) = Mu + c, \quad c \text{ constante positive.} \quad (1.3.21)$$

Considérons le problème de l'inéquation quasi-variationnelle suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K(u) \text{ telle que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K(u). \end{cases} \quad (1.3.22)$$

En pratique ce type d'inéquation apparaît dans le domaine de gestion des stocks qui est lié aux problèmes de contrôle impulsionnel [5, 14, 24].

Remarque 1.3.1. Dans le problème (1.3.22), la condition $u \geq 0$ est naturelle puisqu'elle provient de la théorie du contrôle impulsionnel [5, 14, 24].

L'existence et l'unicité de la solution d'I.Q.V se déduit à partir de la construction d'une suite de solutions d'inéquations variationnelles qui converge vers la solution d'I.Q.V.

1.3.1 Application du point fixe

Soit l'application du point fixe

$$\begin{aligned} T: L_+^\infty(\Omega) &\longrightarrow L_+^\infty(\Omega) \\ w &\longrightarrow Tw = \xi \end{aligned}$$

où $\xi \in V$ est la solution de l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} a(\xi, v - \xi) \geq (f, v - \xi), \forall v \in V \\ \xi \leq Mw, v \leq Mw \end{cases} \quad (1.3.23)$$

et

$$L_+^\infty(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega) / v \geq 0\}.$$

Soit maintenant $\bar{u}^0 \in V$ la solution de l'équation

$$a(\bar{u}^0, v) = (f, v), \forall v \in V \quad (1.3.24)$$

alors le problème (1.3.24) admet une solution unique, de plus $\bar{u}^0 \in W^{2,p}(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, voir [1, 5, 14, 24].

Donnons maintenant quelques propriétés de l'application T .

Soit

$$H = \{w \in L_+^\infty(\Omega) / 0 \leq w \leq \bar{u}^0\}$$

Proposition 1.3.1. [5] *L'application T est croissante, concave de H dans lui même.*

Proposition 1.3.2. *T est lipschitzienne de constante 1 dans H ,*

$$\|Tw - T\tilde{w}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w - \tilde{w}\|_{L^\infty(\Omega)}, \forall w, \tilde{w} \in H$$

Preuve. La démonstration est une adaptation de [5]. On pose

$$\Phi = \|w - \tilde{w}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

comme T est croissante, alors

$$Tw \leq T(\tilde{w} + \Phi) = T\tilde{w} + \Phi$$

donc

$$Tw - T\tilde{w} \leq \Phi$$

de la même manière, échangeant les rôles de w et \tilde{w} , nous obtenons

$$T\tilde{w} \leq Tw + \Phi$$

d'où

$$\|Tw - T\tilde{w}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w - \tilde{w}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

.

□

1.3.2 Algorithme de Bensoussan-Lions

Partant de \bar{u}^0 (resp. $\underline{u}^0 = 0$), nous définissons les suites

$$\bar{u}^{n+1} = T\bar{u}^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

(resp.)

$$\underline{u}^{n+1} = T\underline{u}^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

où $\bar{u}^{n+1} \in V$ est la solution de l'I.V

$$\begin{cases} a(\bar{u}^{n+1}, v - \bar{u}^{n+1}) \geq (f, v - \bar{u}^{n+1}), \forall v \in V \\ v \leq M\bar{u}^n, \bar{u}^{n+1} \leq M\bar{u}^n \end{cases} \quad (1.3.25)$$

(resp.) $\underline{u}^{n+1} \in V$ est la solution de l'I.V

$$\begin{cases} a(\underline{u}^{n+1}, v - \underline{u}^{n+1}) \geq (f, v - \underline{u}^{n+1}), \forall v \in V \\ v \leq M\underline{u}^n, \underline{u}^{n+1} \leq M\underline{u}^n \end{cases} \quad (1.3.26)$$

Nous donnons maintenant un théorème de convergence des suites \bar{u}^{n+1} (resp. \underline{u}^{n+1}).

1.3.3 Existence et unicité de la solution d'I.Q.V

Théorème 1.3.3. [5] *Les suites (\bar{u}^n) et (\underline{u}^n) convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution du problème (1.3.22).*

1.3.4 Régularité de la solution d'I.Q.V

Théorème 1.3.4. [5, 14] *La solution u du problème (1.3.22) satisfait la propriété de régularité :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), 2 \leq p < \infty$$

1.4 Inéquation quasi-variationnelle discrète

On garde la même triangulation du paragraphe précédent (1.2). Soit

$$K(u_h) = \{v_h \in V_h / 0 \leq v_h \leq r_h M u_h \text{ dans } \tau^h\} \quad (1.4.27)$$

l'analogie discret du problème (1.3.22), consiste à

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in K(u_h) \text{ solution de} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \forall v_h \in K(u_h) \end{cases} \quad (1.4.28)$$

De la même manière on construit une suite de solutions discrètes d'inéquations variationnelles (I.V) qui converge vers la solution d'I.Q.V discrète.

1.4.1 Application discrète du point fixe

Soit l'application discrète du point fixe

$$T_h: L_+^\infty(\Omega) \longrightarrow V_h$$

$$w: \longrightarrow T_h w = \xi_h$$

où $\xi_h \in V_h$ est la solution discrète de l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} a(\xi_h, v_h - \xi_h) \geq (f, v_h - \xi_h), \forall v_h \in V_h \\ \xi_h \leq r_h M w, v_h \leq r_h M w \end{cases} \quad (1.4.29)$$

Soit maintenant $\bar{u}_h^0 \in V_h$ la solution de l'équation discrète

$$a(\bar{u}_h^0, v_h) = (f, v_h), \forall v_h \in V_h \quad (1.4.30)$$

l'application T_h possède des propriétés analogues à celles de l'application T . Soit

$$H_h = \{w \in L_+^\infty(\Omega) / 0 \leq w \leq \bar{u}_h^0\}$$

Proposition 1.4.1. [5, 7] *L'application T_h est croissante, concave de H_h dans lui même.*

Proposition 1.4.2. *T_h est lipschitzienne de constante 1 dans H_h .*

Preuve. La démonstration est similaire à celle donnée dans la proposition (1.3.2). □

1.4.2 Algorithme discret de Bensoussan-Lions

Partant de \bar{u}_h^0 (resp. $\underline{u}_h^0 = 0$), nous définissons les suites

$$\bar{u}_h^{n+1} = T_h \bar{u}_h^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

(resp.)

$$\underline{u}_h^{n+1} = T_h \underline{u}_h^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

où $\bar{u}_h^{n+1} \in V_h$ est la solution de l'I.V discrète

$$\begin{cases} a(\bar{u}_h^{n+1}, v_h - \bar{u}_h^{n+1}) \geq (f, v_h - \bar{u}_h^{n+1}), \forall v_h \in V_h \\ v_h \leq r_h M \bar{u}_h^n, \bar{u}_h^{n+1} \leq r_h M \bar{u}_h^n \end{cases} \quad (1.4.31)$$

(resp.) $\underline{u}_h^{n+1} \in V_h$ est la solution de l'I.V discrète

$$\begin{cases} a(\underline{u}_h^{n+1}, v_h - \underline{u}_h^{n+1}) \geq (f, v_h - \underline{u}_h^{n+1}), \forall v_h \in V_h \\ v_h \leq r_h M \underline{u}_h^n, \underline{u}_h^{n+1} \leq r_h M \underline{u}_h^n \end{cases} \quad (1.4.32)$$

1.4.3 Existence et unicité de la solution discrète d'I.Q.V

Théorème 1.4.3. [7] *Supposons que l'hypothèse du principe du maximum discret est vérifiée. Alors les suites (\bar{u}_h^n) et (\underline{u}_h^n) convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution du problème (1.4.28).*

Chapitre 2

Estimation de l'erreur en norme L^∞ de l'algorithme de Schwarz pour une inéquation quasi-variationnelle elliptique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la méthode de Schwarz pour une classe d'inéquation quasi-variationnelle elliptique. Le résultat principal de cette étude est de prouver l'estimation de l'erreur en norme L^∞ en combinant la convergence géométrique des suites itérées et la convergence uniforme dû à Cortey-Dumont[13]. L'idée de la démonstration repose sur la propriété de Lipschitzianité de la solution par rapport à la donnée de Dirichlet g sur la frontière. Le domaine Ω est décomposé en deux sous domaines avec recouvrement, La discrétisation des deux sous domaines est indépendante l'une à l'autre de façon à avoir un maillage nonmatching. Et pour valider notre théorie, des expérimentations numériques ont été faites, et des comparaisons ont été obtenues.

2.2 Algorithme de Schwarz pour une inéquation quasi-variationnelle

2.2.1 Quelques résultats préliminaires sur les I.Q.V

Pour tout u et v dans V ($V = H^1(\Omega)$), nous définissons une forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq 2} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0 uv \right) dx, \quad (2.2.1)$$

une fonction

$$f \in L^\infty(\Omega), f \geq 0 \quad (2.2.2)$$

un obstacle Mu du contrôle impulsionnel

$$Mu(x) = k + \inf u(x + \xi), x \in \Omega, \xi \geq 0, x + \xi \in \Omega, k = \text{conste} > 0 \quad (2.2.3)$$

et un ensemble convexe non vide

$$K_g(u) = \{v \in V / v = g \text{ sur } \partial\Omega, 0 \leq v \leq Mu \text{ dans } \Omega\} \quad (2.2.4)$$

où g est une fonction régulière définie sur $\partial\Omega$,

$$g \in W^{2,p}(\Omega), 2 \leq p < \infty, g \geq 0. \quad (2.2.5)$$

Supposons que la forme bilinéaire, la fonction f et l'obstacle Mu satisfont les hypothèses (1.1.3)-(1.1.5),(1.3.19)-(1.3.21) du chapitre I.

Considérons l'inéquation quasi-variationnelle elliptique (I.Q.V) suivante

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K_g(u) \text{ tq} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K_g(u) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Soit V_h l'espace d'éléments finis des fonctions linéaires par morceaux. L'analogie discret du problème (2.2.6) consiste à

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in K_{gh}(u_h) \text{ solution de} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \forall v_h \in K_{gh}(u_h) \end{cases} \quad (2.2.7)$$

où

$$K_{gh}(u_h) = \{v_h \in V_h / v_h = \pi_h g \text{ sur } \partial\Omega, 0 \leq v_h \leq r_h Mu_h \text{ dans } \Omega\} \quad (2.2.8)$$

π_h est un opérateur d'interpolation convenable sur $\partial\Omega$ et r_h est l'opérateur de restriction usuelle par éléments finis dans Ω .

Soit u_h la solution de l'I.Q.V discrète

$$\begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \forall v_h \in V_h \\ u_h = \pi_h g \text{ sur } \partial\Omega, u_h \leq r_h M u_h \text{ dans } \Omega \\ v_h = \pi_h g \text{ sur } \partial\Omega, v_h \leq r_h M u_h \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2.2.9)$$

d'une façon similaire soit \tilde{u}_h la solution discrète de l'I.V

$$\begin{cases} a(\tilde{u}_h, v_h - \tilde{u}_h) \geq (f, v_h - \tilde{u}_h), \forall v_h \in V_h \\ \tilde{u}_h = \pi_h \tilde{g} \text{ sur } \partial\Omega, \tilde{u}_h \leq r_h M u_h \text{ dans } \Omega \\ v_h = \pi_h \tilde{g} \text{ sur } \partial\Omega, v_h \leq r_h M u_h \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2.2.10)$$

où \tilde{g} est une fonction régulière définie sur $\partial\Omega$.

Nous donnons une propriété de monotonie et de stabilité de la solution.

Lemme 2.2.1. *Soient g, \tilde{g} deux fonctions données et $u_h = \partial_h(g, M u_h), \tilde{u}_h = \partial_h(\tilde{g}, M u_h)$ les solutions discrètes correspondantes de (2.2.9) (resp. (2.2.10)). Si $g \geq \tilde{g}$, alors $\partial_h(g, M u_h) \geq \partial_h(\tilde{g}, M u_h)$.*

Preuve. Soit

$$v_h = \min(0, u_h - \tilde{u}_h)$$

dans la région où v_h est négatif ($v_h < 0$), on a

$$0 \leq u_h < \tilde{u}_h \leq r_h M u_h$$

ce qui signifie que l'obstacle $r_h M u_h$ n'est pas actif pour u_h , donc pour cette fonction v_h on a,

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad (2.2.11)$$

si on pose $w_h = \tilde{u}_h + v_h$, alors $w_h \leq r_h M u_h$ qui est une fonction admissible pour le problème (2.2.10), donc

$$a(\tilde{u}_h, v_h) \geq (f, v_h) \quad (2.2.12)$$

en soustrayant (2.2.11) de (2.2.12), il vient que

$$a(\tilde{u}_h - u_h, v_h) \geq 0$$

or

$$a(v_h, v_h) = a(u_h - \tilde{u}_h, v_h) \leq 0$$

donc

$$a(v_h, v_h) \leq 0$$

comme $a(.,.)$ est fortement coercive alors $v_h = 0$, ce qui implique que

$$u_h \geq \tilde{u}_h$$

.

□

Remarque 2.2.1. La preuve est similaire à celle du cas continu.

Nous établissons une propriété de Lipschitzianité de la solution par rapport à la donnée sur la frontière, et qui sera utile ci- après.

Proposition 2.2.2. *Sous les notations et les hypothèses du lemme (2.2.1), on*

a

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

Avant de démontrer cette proposition, prouvons le lemme suivant :

Lemme 2.2.3. *Soit*

$$\Phi = \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

alors

$$\partial_h(\tilde{g} + \Phi, Mu_h + \Phi) = \partial_h(\tilde{g}, Mu_h) + \Phi$$

Preuve. Soit

$$\tilde{u}_h = \partial_h(\tilde{g}, Mu_h)$$

la solution de (2.2.10), on sait que

$$a(\Phi, v_h - \tilde{u}_h) = a_0(\Phi, v_h - \tilde{u}_h)$$

donc

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}_h + \Phi, v_h - \tilde{u}_h) &= a(\tilde{u}_h, v_h - \tilde{u}_h) + a(\Phi, v_h - \tilde{u}_h) \\ &= a(\tilde{u}_h, v_h - \tilde{u}_h) + \Phi(a_0, v_h - \tilde{u}_h) \\ &\geq (f, v_h - \tilde{u}_h) + \Phi(a_0, v_h - \tilde{u}_h) \\ &= (f + \Phi a_0, v_h - \tilde{u}_h) \end{aligned}$$

ainsi

$$a(\tilde{u}_h + \Phi, (v_h + \Phi) - (\tilde{u}_h + \Phi)) \geq (f + \Phi a_0, (v_h + \Phi) - (\tilde{u}_h + \Phi))$$

posons

$$\bar{v}_h = v_h + \Phi \text{ et } \bar{u}_h = \tilde{u}_h + \Phi$$

alors

$$\bar{u}_h \leq r_h M u_h + \Phi = r_h M(u_h + \Phi) \text{ dans } \Omega$$

et

$$\bar{u}_h = \pi_h \tilde{g} + \Phi = \pi_h(\tilde{g} + \Phi) \text{ sur } \partial\Omega$$

de même

$$\bar{v}_h \leq r_h M u_h + \Phi = r_h M(u_h + \Phi) \text{ dans } \Omega$$

et

$$\bar{v}_h = \pi_h \tilde{g} + \Phi = \pi_h(\tilde{g} + \Phi) \text{ sur } \partial\Omega$$

on peut dire alors que \bar{u}_h est solution de

$$\begin{cases} a(\bar{u}_h, \bar{v}_h - \bar{u}_h) \geq (f + \Phi a_0, \bar{v}_h - \bar{u}_h) \\ \bar{u}_h \leq r_h M(u_h + \Phi), \bar{v}_h \leq r_h M(u_h + \Phi) \text{ dans } \Omega \\ \bar{u}_h = \pi_h(\tilde{g} + \Phi), \bar{v}_h = \pi_h(\tilde{g} + \Phi) \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

vue l'unicité de la solution, on conclut que

$$\bar{u}_h = \partial_h(\tilde{g} + \Phi, M u_h + \Phi)$$

d'où le résultat. □

Démontrons maintenant la proposition (2.2.2).

Preuve. On a

$$g - \tilde{g} \leq \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

donc

$$g \leq \tilde{g} + \Phi$$

d'après les lemmes (2.2.1) et (2.2.3), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\partial_h(g, Mu_h) &\leq \partial_h(\tilde{g} + \Phi, Mu_h + \Phi) \\ &= \partial_h(\tilde{g}, Mu_h) + \Phi\end{aligned}$$

d'où

$$\partial_h(g, Mu_h) - \partial_h(\tilde{g}, Mu_h) \leq \Phi$$

similairement en changeant les rôles de g et \tilde{g} on déduit que

$$\partial_h(\tilde{g}, Mu_h) - \partial_h(g, Mu_h) \leq \Phi$$

Ce qui implique que

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

□

Remarque 2.2.2. La proposition précédente reste valable dans le cas continu.

2.2.2 Algorithme continu de Schwarz

Considérons le problème modèle de l'obstacle

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K_0(u) \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K_0(u) \end{cases} \quad (2.2.13)$$

où $K_0(u)$ est l'ensemble convexe non vide défini en (2.2.4) avec $g = 0$. On décompose Ω en deux sous domaines polygonaux avec recouvrement Ω_1 et Ω_2 tel que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

et u satisfait la condition de régularité locale

$$u|_{\Omega_i} \in W^{2,p}(\Omega_i), 2 \leq p < \infty.$$

On note par $\partial\Omega_i$ la frontière de Ω_i , et $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$. l'intersection de $\bar{\Gamma}_i$ et $\bar{\Gamma}_j, i \neq j$ est supposée vide. On supposera toujours pour simplifier que Γ_1 et Γ_2 sont régulières. Soit

$$V_i(\Omega_i) = \{v \in H^1(\Omega_i) / v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega\}, i = 1, 2.$$

Pour $w \in C^0(\bar{\Gamma}_i)$, nous définissons

$$V_i^{(w)} = \{v \in V_i(\Omega_i) / v = w \text{ sur } \Gamma_i\}, i = 1, 2.$$

Nous associons au problème (2.2.13) le couple $(u_1, u_2) \in V_1^{(u_2)} \times V_2^{(u_1)}$ tels que

$$\begin{cases} a_1(u_1, v - u_1) \geq (f_1, v - u_1), \forall v \in V_1^{(u_2)} \\ u_1 \leq Mu_1, v \leq Mu_1 \text{ dans } \Omega_1 \end{cases} \quad (2.2.14)$$

$$\begin{cases} a_2(u_2, v - u_2) \geq (f_2, v - u_2), \forall v \in V_2^{(u_1)} \\ u_2 \leq Mu_2, v \leq Mu_2 \text{ dans } \Omega_2 \end{cases} \quad (2.2.15)$$

où

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} \left(\sum_{1 \leq l, j \leq 2} a_{lj} \frac{\partial u}{\partial x_l} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq 2} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0 uv \right) dx, i = 1, 2$$

$$f_i = f|_{\Omega_i}, u_i = u|_{\Omega_i}, i = 1, 2$$

Soit $u^0 \in C^0(\bar{\Omega})$ une valeur initiale telle que

$$a(u^0, v) = (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2.16)$$

nous définissons respectivement les suites de Schwarz (u_1^{n+1}) sur Ω_1 telle que $u_1^{n+1} \in V_1^{(u_2^n)}$ solution de

$$\begin{cases} a_1(u_1^{n+1}, v - u_1^{n+1}) \geq (f_1, v - u_1^{n+1}), \forall v \in V_1^{(u_2^n)} \\ u_1^{n+1} \leq Mu_1^n \text{ dans } \Omega_1, v \leq Mu_1^n \text{ dans } \Omega_1, \end{cases} \quad (2.2.17)$$

et (u_2^{n+1}) sur Ω_2 telle que $u_2^{n+1} \in V_2^{(u_1^{n+1})}$ résout le problème

$$\begin{cases} a_2(u_2^{n+1}, v - u_2^{n+1}) \geq (f_2, v - u_2^{n+1}), \forall v \in V_2^{(u_1^{n+1})} \\ u_2^{n+1} \leq Mu_2^n \text{ dans } \Omega_2, v \leq Mu_2^n \text{ dans } \Omega_2, \end{cases} \quad (2.2.18)$$

où

$$\begin{aligned} u_1^0 &= u^0 \text{ dans } \Omega_1, u_2^0 = u^0 \text{ dans } \Omega_2, \\ u_1^{n+1} &= 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_1 \text{ et } u_2^{n+1} = 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_2. \end{aligned}$$

2.2.3 Théorème de convergence géométrique

Considérons maintenant une fonction $w_i \in L^\infty(\Omega_i)$ continue dans $\bar{\Omega}_i \setminus (\bar{\Gamma}_i \cap \partial\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \Delta w_i = 0 \text{ dans } \Omega_i, i = 1, 2 \\ w_i = \begin{cases} 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \setminus \bar{\Gamma}_i \\ 1 \text{ sur } \Gamma_i \end{cases} \end{cases}$$

avec $w_i = 0$ dans $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_i$. D'après le principe du maximum, on a $0 < w_i < 1$ dans Ω_i (voir [18], pages 51-63).

Nous prouvons un théorème de convergence géométrique.

Théorème 2.2.4. *Les suite $(u_1^{n+1}), (u_2^{n+1}), n \geq 0$ générées par l'algorithme de Schwarz convergent géométriquement vers la solution (u_1, u_2) du système (2.2.14)-(2.2.15). Plus précisément, il existe deux constantes $k_1, k_2 \in]0, 1[$ telles que pour tout $n \geq 0$,*

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} &\leq k_1^n k_2^n \|u - u^0\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \\ \|u_2 - u_2^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} &\leq k_1^{n+1} k_2^n \|u - u^0\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\end{aligned}$$

Preuve. D'après le principe du maximum, on

$$\|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Gamma_1)}$$

et

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Gamma_1)} &\leq \|u_2 - u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \|w_1 u_2 - w_1 u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \\ &\leq \|w_1 u_2 - w_1 u_2^n\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq \|w_1 u_2 - w_1 u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \\ &\leq \|w_1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \|u_2 - u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \|w_1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \|w_2 u_2 - w_2 u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \\ &\leq \|w_1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \|w_2 u_1 - w_2 u_1^n\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \|w_1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \|w_2 u_1 - w_2 u_1^n\|_{L^\infty(\Omega_1)} \\ &\leq \|w_1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \|w_2 u_1 - w_2 u_1^n\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \|w_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|w_1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \|u_1 - u_1^n\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\end{aligned}$$

posons

$$k_i = \sup \{w_j(x) / x \in \partial\Omega_i \cap \Omega, i \neq j\} \in]0, 1[, \forall i, j = 1, 2$$

alors

$$\|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq k_1 k_2 \|u_1 - u_1^n\|_{L^\infty(\Gamma_1)}$$

par induction, on obtient

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} &\leq k_1^n k_2^n \|u_1 - u_1^1\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \\ &\leq k_1^n k_2^n \|u - u^0\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\end{aligned}$$

où $u_1^1 = u^0$ sur Γ_1 et $u_1^1 = 0$ sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$.

D'une façon similaire, on a

$$\begin{aligned}\|u_2 - u_2^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} &\leq \|u_2 - u_2^{n+1}\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \\ &\leq \|w_2 u_1 - w_2 u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \|w_2 u_1 - w_2 u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \\ &\leq \|w_2 u_1 - w_2 u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \|w_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \\ &\leq \|w_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|w_1 u_1 - w_1 u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \|w_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|w_1 u_2 - w_1 u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \\ &\leq \|w_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|w_1 u_2 - w_1 u_2^n\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq \|w_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|w_1 u_2 - w_1 u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \\ &\leq \|w_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \|w_1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \|u_2 - u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq k_1 k_2 \|u_2 - u_2^n\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\end{aligned}$$

par induction, on obtient

$$\begin{aligned}\|u_2 - u_2^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} &\leq k_1^n k_2^n \|u_2 - u_2^1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq k_1^n k_2^n \|w_2 u_1 - w_2 u_1^1\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \\ &\leq k_1^n k_2^n \|w_2 u_1 - w_2 u_1^1\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq k_1^n k_2^n \|w_2 u_1 - w_2 u_1^1\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \\ &\leq k_1^{n+1} k_2^n \|u_1 - u_1^1\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq k_1^{n+1} k_2^n \|u_2 - u_2^0\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \\ &\leq k_1^{n+1} k_2^n \|u_2 - u_2^0\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq k_1^{n+1} k_2^n \|u_2 - u_2^0\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \\ &\leq k_1^{n+1} k_2^n \|u - u^0\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. □

Remarque 2.2.3. La démonstration du théorème (2.2.4) est une adaptation de [18] prouvé pour une équation variationnelle. Ce théorème reste vraie pour l'inéquation quasi-variationnelle.

2.2.4 La Discrétisation

Pour $i = 1, 2$ soit τ^{h_i} une famille de triangulation régulière et quasi-uniforme de Ω_i , h_i étant le pas de la discrétisation. On suppose que les deux triangulations sont mutuellement indépendantes sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$, dans le sens où un triangle appartient à un domaine de triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre. Soit $V_{h_i} = V_{h_i}(\Omega_i)$ l'espace des fonctions linéaires continues par morceaux sur τ^{h_i} , qui s'annulent sur $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$, V_{h_i} étant de dimension finie. Pour $w \in C^0(\bar{\Gamma}_i)$, nous définissons

$$V_{h_i}^{(w)} = \{v_{h_i} \in V_{h_i} / v_{h_i} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, v_{h_i} = \pi_{h_i}(w), \text{ sur } \Gamma_i\}, i = 1, 2$$

où π_{h_i} désigne un opérateur d'interpolation convenable sur Γ_i . Nous définissons maintenant les analogues discrets des suites de Schwarz, on suppose aussi que les matrices qui résultent de la discrétisation des problèmes (2.2.17), (2.2.18) sont des M -matrices [11].

Partant de $u_{h_i}^0 = r_{h_i} u^0$, trouver la suite $u_{1h_1}^{n+1} \in V_{h_1}^{(u_{2h_2}^n)}$ telle que

$$\begin{cases} a_1(u_{1h_1}^{n+1}, v_{h_1} - u_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1, v_{h_1} - u_{1h_1}^{n+1}), \forall v_{h_1} \in V_{h_1}^{(u_{2h_2}^n)} \\ u_{1h_1}^{n+1} \leq r_{h_1} M u_{1h_1}^n \text{ dans } \tau^{h_1}, v_{h_1} \leq r_{h_1} M u_{1h_1}^n \text{ dans } \tau^{h_1} \end{cases} \quad (2.2.19)$$

respectivement, trouver la suite $u_{2h_2}^{n+1} \in V_{h_2}^{(u_{1h_1}^{n+1})}$ solution de

$$\begin{cases} a_2(u_{2h_2}^{n+1}, v_{h_2} - u_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2, v_{h_2} - u_{2h_2}^{n+1}), \forall v_{h_2} \in V_{h_2}^{(u_{1h_1}^{n+1})} \\ u_{2h_2}^{n+1} \leq r_{h_2} M u_{2h_2}^n \text{ dans } \tau^{h_2}, v_{h_2} \leq r_{h_2} M u_{2h_2}^n \text{ dans } \tau^{h_2} \end{cases} \quad (2.2.20)$$

où r_{h_i} est l'opérateur de restriction usuelle dans Ω_i , $u_{1h_1}^0 = u_{h_1}^0$ dans Ω_1 , et $u_{2h_2}^0 = u_{h_2}^0$ dans Ω_2 .

2.3 Analyse de l'erreur

Cette section est consacrée à la démonstration du résultat principal de ce chapitre. Pour cela nous commençons par introduire deux suites auxiliaires discrètes et montrons un lemme fondamental.

2.3.1 Définition de deux suites auxiliaires de Schwarz

Pour $\tilde{w}_{h_i}^0 = u_{h_i}^0$, nous définissons la suite $\tilde{w}_{1h_1}^{n+1} \in V_{h_1}^{(u_2^n)}$, solution discrète de l'I.V

$$\begin{cases} a_1(\tilde{w}_{1h_1}^{n+1}, v_{h_1} - \tilde{w}_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1, v_{h_1} - \tilde{w}_{1h_1}^{n+1}), \forall v_{h_1} \in V_{h_1}^{(u_2^n)} \\ \tilde{w}_{1h_1}^{n+1} \leq r_{h_1} M u_{1h_1}^n \text{ dans } \tau^{h_1}, v_{h_1} \leq r_{h_1} M u_{1h_1}^n \text{ dans } \tau^{h_1}, \end{cases} \quad (2.3.21)$$

respectivement la suite $\tilde{w}_{2h_2}^{n+1} \in V_{h_2}^{(u_1^{n+1})}$ satisfait

$$\begin{cases} a_2(\tilde{w}_{2h_2}^{n+1}, v_{h_2} - \tilde{w}_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2, v_{h_2} - \tilde{w}_{2h_2}^{n+1}), \forall v_{h_2} \in V_{h_2}^{(u_1^{n+1})} \\ \tilde{w}_{2h_2}^{n+1} \leq r_{h_2} M u_{2h_2}^n \text{ dans } \tau^{h_2}, v_{h_2} \leq r_{h_2} M u_{2h_2}^n \text{ dans } \tau^{h_2}, \end{cases} \quad (2.3.22)$$

Notation : Dans la suite de ce travail, nous adopterons les notations suivantes

$$|\cdot|_1 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma_1)}, |\cdot|_2 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma_2)},$$

$$\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_1)}, \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_2)},$$

$$h_1 = h_2 = h, r_{h_1} = r_{h_2} = r_h, \pi_{h_1} = \pi_{h_2} = \pi_h.$$

Le lemme suivant jouera un rôle crucial dans la démonstration du résultat principal.

Lemme 2.3.1. *Soient $(u_i^{n+1}), (u_{ih}^{n+1}), i = 1, 2$ les suites définies en (2.2.17), (2.2.18), (2.2.19), (2.2.20) respectivement. Alors, on a*

$$\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 \quad (2.3.23)$$

$$\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 \quad (2.3.24)$$

Preuve. Raisonnons par récurrence, pour $n = 0$, d'après la proposition 2.2.2, on a

$$\|\tilde{w}_{1h}^1 - u_{1h}^1\|_1 \leq |\pi_h u_2^0 - \pi_h u_{2h}^0|_1 \leq \|u_2^0 - u_{2h}^0\|_2 \leq \|u_2^0 - \tilde{w}_{2h}^0\|_2$$

donc

$$\|u_1^1 - u_{1h}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - \tilde{w}_{1h}^1\|_1 + \|u_2^0 - \tilde{w}_{2h}^0\|_2$$

de même

$$\begin{aligned} \|u_2^1 - u_{2h}^1\|_2 &\leq \|u_2^1 - \tilde{w}_{2h}^1\|_2 + \|\tilde{w}_{2h}^1 - u_{2h}^1\|_2 \\ &\leq \|u_2^1 - \tilde{w}_{2h}^1\|_2 + |\pi_h u_1^1 - \pi_h u_{1h}^1|_2 \\ &\leq \|u_2^1 - \tilde{w}_{2h}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{1h}^1\|_1 \\ &\leq \sum_{p=0}^1 \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^1 \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 \end{aligned}$$

pour $n = 1$, en utilisant encore la proposition 2.2.2, on aura

$$\begin{aligned}
\|u_1^2 - u_{1h}^2\|_1 &\leq \|u_1^2 - \tilde{w}_{1h}^2\|_1 + \|\tilde{w}_{1h}^2 - u_{1h}^2\|_1 \\
&\leq \|u_1^2 - \tilde{w}_{1h}^2\|_1 + |\pi_h u_2^1 - \pi_h u_{2h}^1|_1 \\
&\leq \|u_1^2 - \tilde{w}_{1h}^2\|_1 + \|u_2^1 - u_{2h}^1\|_2 \\
&\leq \|u_1^2 - \tilde{w}_{1h}^2\|_1 + \|u_1^1 - \tilde{w}_{1h}^1\|_1 + \sum_{p=0}^1 \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 \\
&\leq \sum_{p=1}^2 \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^1 \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|u_2^2 - u_{2h}^2\|_2 &\leq \|u_2^2 - \tilde{w}_{2h}^2\|_2 + \|\tilde{w}_{2h}^2 - u_{2h}^2\|_2 \\
&\leq \|u_2^2 - \tilde{w}_{2h}^2\|_2 + |\pi_h u_1^2 - \pi_h u_{1h}^2|_2 \\
&\leq \|u_2^2 - \tilde{w}_{2h}^2\|_2 + \|u_1^2 - u_{1h}^2\|_1 \\
&\leq \|u_2^2 - \tilde{w}_{2h}^2\|_2 + \sum_{p=1}^2 \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^1 \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 \\
&\leq \sum_{p=1}^2 \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^2 \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2.
\end{aligned}$$

Supposons que

$$\|u_2^n - u_{2h}^n\|_2 \leq \sum_{p=1}^n \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 \text{ est vraie}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 &\leq \|u_1^{n+1} - \tilde{w}_{1h}^{n+1}\|_1 + \|\tilde{w}_{1h}^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \\
&\leq \|u_1^{n+1} - \tilde{w}_{1h}^{n+1}\|_1 + |\pi_h u_2^n - \pi_h u_{2h}^n|_1 \\
&\leq \|u_1^{n+1} - \tilde{w}_{1h}^{n+1}\|_1 + \|u_2^n - u_{2h}^n\|_2 \\
&\leq \|u_1^{n+1} - \tilde{w}_{1h}^{n+1}\|_1 + \sum_{p=1}^n \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2$$

de même, en utilisant l'estimation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 &\leq \|u_2^{n+1} - \tilde{w}_{2h}^{n+1}\|_2 + \|\tilde{w}_{2h}^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \\
&\leq \|u_2^{n+1} - \tilde{w}_{2h}^{n+1}\|_2 + |\pi_h u_1^{n+1} - \pi_h u_{1h}^{n+1}|_2 \\
&\leq \|u_2^{n+1} - \tilde{w}_{2h}^{n+1}\|_2 + \|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \\
&\leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2.
\end{aligned}$$

d'où

$$\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2.$$

□

2.3.2 Estimation de l'erreur en norme L^∞

Théorème 2.3.2. *Il existe une constante c indépendante de n et h telle que*

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_i \leq ch^2 |\log h|^3, i = 1, 2.$$

Preuve. Nous donnons la preuve pour $i = 1$. Le cas $i = 2$ est similaire.

En effet, soit $k = \max(k_1, k_2)$, on a

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1 - u_1^{n+1}\|_1 + \|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1.$$

On introduit le théorème 2.2.4 et le lemme 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_1 &\leq k^{2n}|u^0 - u|_1 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 \\ &\leq |u^0 - u|_1 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 \\ &\leq \|u^0 - u\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2 \\ &\leq (\|u^0 - u_h\|_2 + \|u_h - u\|_2) + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - \tilde{w}_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - \tilde{w}_{2h}^p\|_2. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 1.2.5, on en déduit

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_1 &\leq (ch^2|\log h|^2 + ch^2|\log h|^2) + (n+1)ch^2|\log h|^2 + (n+1)ch^2|\log h|^2 \\ &\leq ch^2|\log h|^2 + 2(n+1)ch^2|\log h|^2. \end{aligned}$$

Maintenant posons

$$k^n = h$$

nous obtenons

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq ch^2|\log h|^3$$

d'où l'estimation de l'erreur désirée. \square

2.4 Expérimentation numérique

Dans cette section, on présente quelques résultats de test numérique simple comportant un maillage nonmatching. On pose

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1] \times [0, 1], V = H_0^1(\Omega) \\ Au &= -\Delta u + u \\ f(x, y) &= (2\pi^2 + 1) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ Mu(x) &= 1 + \inf \{u(x + \xi), \xi \geq 0, x + \xi \in \Omega\}, \forall x \in \Omega \\ \Omega_1 &= [0, x_1] \times [0, 1], \Omega_2 = [x_2, 1] \times [0, 1] \\ d &= x_1 - x_2, 0 < x_2 < x_1 < 1\end{aligned}$$

on arrête toutes les itérations lorsque

$$\|u_{1h_1}^n - u_{1h_1}^{n-1}\|_1 < 10^{-6} \text{ et } \|u_{2h_2}^n - u_{2h_2}^{n-1}\|_2 < 10^{-6}.$$

Soit $u_{ih}^0 = 0$, valeur initiale. Pour chaque macro-itération (itération de Schwarz) nous avons employé sur chaque sous domaine la méthode itérative de relaxation par projection, dont le paramètre de relaxation est $w = 1.5$

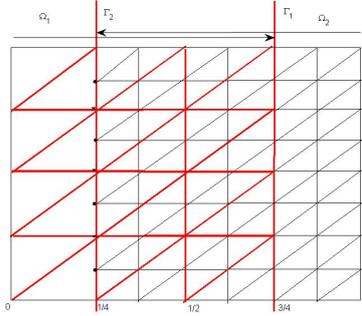


FIGURE 2.1 – Discrétisation des deux sous domaines

	ℓ	erreur dans Ω_1	erreur dans Ω_2	it_3	it_2	it_1
$d = 0.5$ $x_2 = 0.25$ $h_1 = \frac{1}{2^{\ell+1}}$ $h_2 = \frac{1}{2^{\ell+2}}$	1	/	/	6	22	23
	2	$3.4460e - 02(/)$	$1.4128e - 02(/)$	6	65	23
	3	$8.6500e - 03(3.98)$	$3.2638e - 03(4.32)$	6	250	67
	4	$2.2461e - 03(3.85)$	$8.0498e - 04(4.05)$	6	885	254
$d = 0.25$ $x_2 = 0.5$ $h_1 = \frac{1}{2^{\ell+1}}$ $h_2 = \frac{1}{2^{\ell+2}}$	1	/	/	17	21	23
	2	$3.3886e - 02(/)$	$1.2371e - 02(/)$	17	34	23
	3	$8.4832e - 03(3.99)$	$2.9105e - 03(4.25)$	17	143	67
	4	$2.1911e - 03(3.87)$	$7.3943e - 04(3.93)$	17	516	254
$d = 1/3$ $x_2 = 1/3$ $h_1 = \frac{1}{3 \times 2^{\ell-1}}$ $h_2 = \frac{1}{3 \times 2^{\ell}}$	1	/	/	9	22	21
	2	$4.6320e - 02(/)$	$2.0774e - 02(/)$	10	26	23
	3	$1.2975e - 02(3.57)$	$5.2879e - 03(3.93)$	10	125	28
	4	$3.1613e - 03(4.10)$	$1.2342e - 03(4.28)$	10	456	129

TABLE 2.1 – Erreurs et nombre d'itérations

it_3 , indique le macro itération de Schwarz (itération extérieure),

it_1, it_2 , indiquent les micro itérations de relaxation par projection pour chaque sous domaine (itérations intérieures),

ℓ , indique le niveau du raffinement,

A la rangé ℓ , le nombre entre parenthèse (.) indique le quotient de la valeur de

l'erreur à la rangé $\ell - 1$ sur la valeur de l'erreur à la rangé ℓ .

Nous remarquons que :

- Le quotient des erreurs montre la bonne précision de la discrétisation, ainsi l'ordre de convergence est égal à 2.
- Le nombre d'itérations de Schwarz it_3 est borné indépendamment du pas h_i de la discrétisation.
- Les valeurs numériques des erreurs pour chaque sous domaine décroissent dès qu'on raffine le maillage ce qui nous assure la convergence de la solution.
- A chaque pas de discrétisation les valeurs numériques des erreurs dans le sous domaine Ω_2 sont plus petites que celles de Ω_1 , et ça est dû à la finesse du maillage de Ω_2 .
- Sur les noeuds de la frontière Γ_2 qui sont non communs avec les noeuds du maillage Ω_1 , on a considéré l'interpolation linéaire de u_1^{n+1} de deux noeuds voisins, ce qui induit un accumule des erreurs d'arrondis.
- Dans les cas $d = 0.5, d = 1/3$ les itérations it_2, it_1 sont proportionnelles, et ça est dû à la proportionnalité des deux matrices des deux sous problèmes.

$k = it_3$	1	2	3	4	5	6
$u^k(0.25, 0.25)$	0.42204973	0.49844705	0.50031850	0.50036433	0.50036546	0.50036548
$u^k(0.5, 0.5)$	0.69966404	0.99328516	1.00047814	1.00065431	1.00065863	1.00065873
$u^k(0.75, 0.75)$	0.48780615	0.49975636	0.50004905	0.50005622	0.50005639	0.50005640

TABLE 2.2 – Itérations de la solution pour $h_1 = \frac{1}{2^5}, h_2 = \frac{1}{2^6}, d = 0.5$

- On remarque que les premiers chiffres qui sont après la virgule se stabilisent à partir de l'itération $it_3 = 3$, ce qui nous assure la convergence de la solution.
- Les valeurs numériques sont positives puisque la solution u est supposée positive.

$d \setminus \ell$	1	2	3	4
1/2	6	6	6	6
1/3	9	10	10	10
1/4	17	17	17	17

TABLE 2.3 – Nombre d'itérations de Schwarz

Nous constatons que :

- Si la valeur de la distance géométrique d croit, le nombre d'itérations de Schwarz décroît, ce qui prouve que le nombre d'itérations it_3 dépend impérativement de la dimension de la partie géométrique commune $\Omega_1 \cap \Omega_2$.
- La convergence est plus rapide si le recouvrement est important.

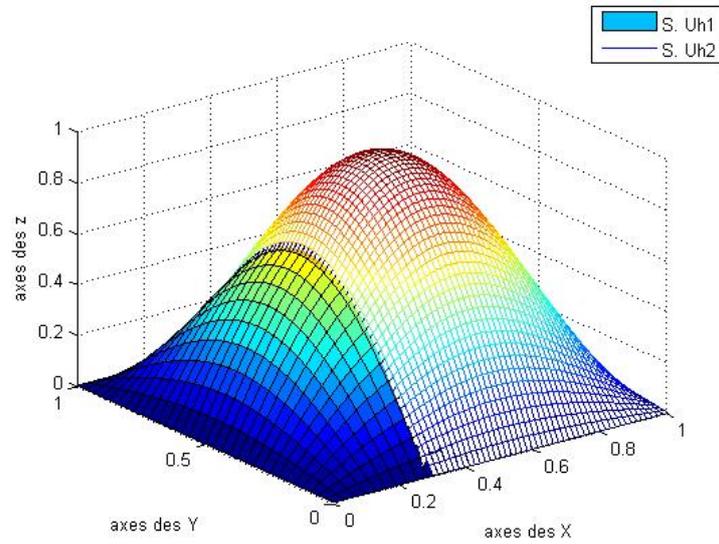


FIGURE 2.2 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 1$

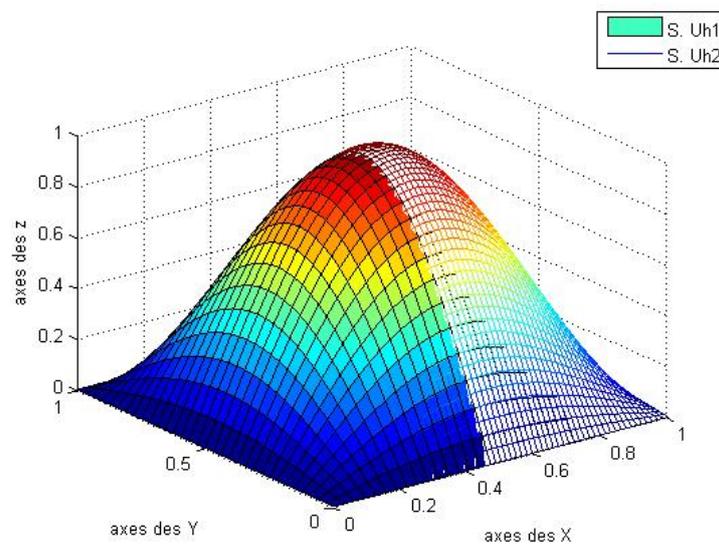


FIGURE 2.3 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 2$

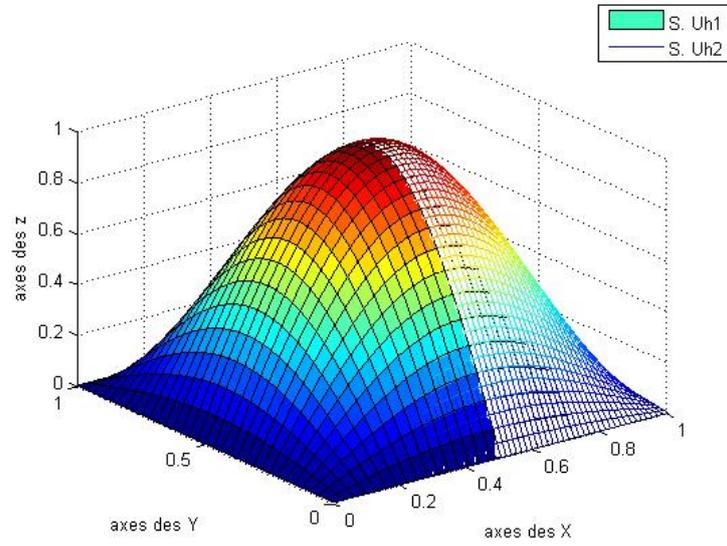


FIGURE 2.4 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 4$

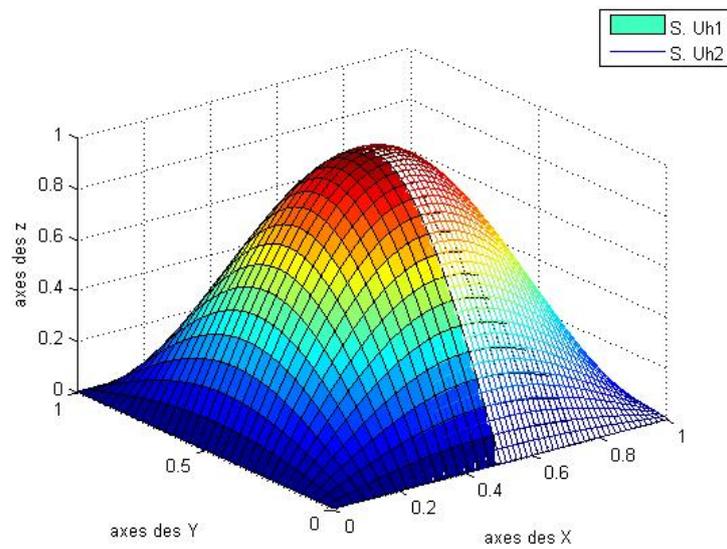


FIGURE 2.5 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 6$

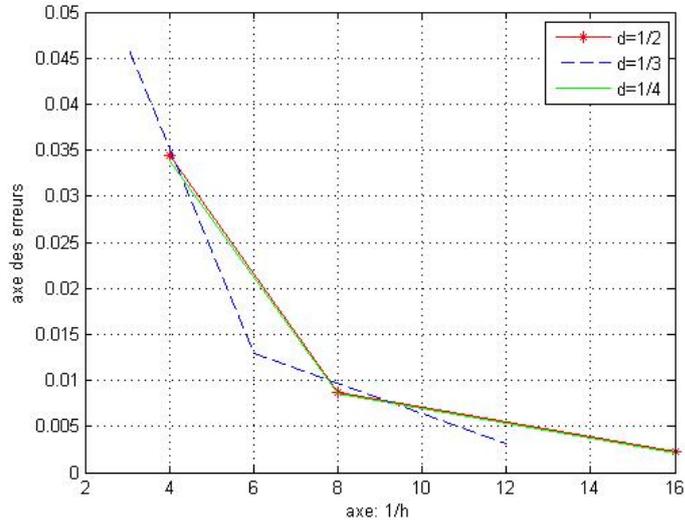


FIGURE 2.6 – Evolution des erreurs dans Ω_1

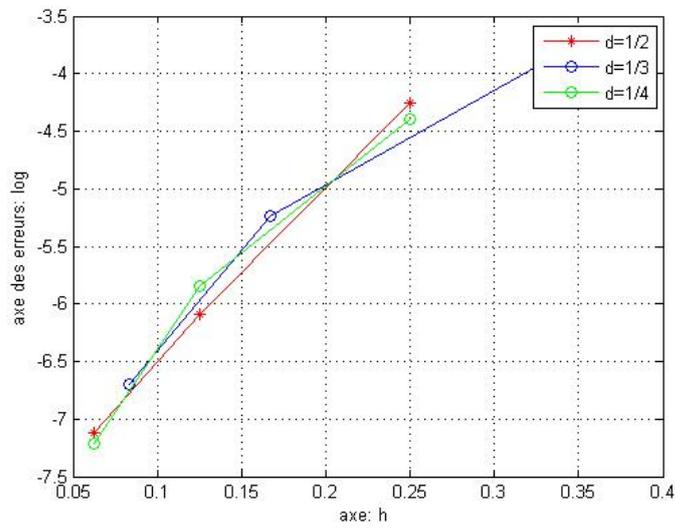


FIGURE 2.7 – Evolution des erreurs dans Ω_2

- La surface de la solution numérique est tracée en collant les deux morceaux de la solution des deux sous problèmes.
- Notons que sur la partie du recouvrement les deux morceaux s'approchent de plus en plus à chaque itération de Schwarz.
- La surface est au dessus du plan XOY car $u \geq 0$.
- La valeur maximale de la surface est : $u^6(0.5, 0.5) = 1.00065873$.
- Les trois courbes indiquent l'évolution de l'erreur de la solution par rapport au pas h dans chaque sous domaine Ω_i pour les trois décompositions.
- Les courbes décroissent si h décroît ce qui prouve que l'erreur est stable.

Chapitre 3

Estimation de l'erreur en norme L^∞ de l'algorithme de Schwarz pour une inéquation variationnelle elliptique à opérateur noncoercif

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de l'inéquation variationnelle à opérateur noncoercif lié aux problèmes de contrôle stochastique. Nous considérons un domaine qui est l'union de deux sous domaines avec recouvrement dont chacun d'eux a sa propre triangulation. Sous l'hypothèse du principe du maximum discret, nous montrons que la discrétisation sur chaque sous domaine converge quasi-optimal en norme L^∞ . L'idée de la démonstration repose sur la propriété de Lipschitzianité de la solution par rapport au second membre f et non pas aux données g et ψ . Plus précisément, le chapitre est organisé comme suit : dans la deuxième section nous introduisons le problème de l'obstacle continu et discret, ainsi que l'algorithme de Schwarz pour deux sous domaines, et nous donnons un théorème de convergence géométrique. Dans la troisième section, nous établissons deux suites de sous-solutions et leurs estimations, et nous prouvons un résultat principal concernant l'estimation de l'erreur de la solution en norme L^∞ , en combinant la convergence géométrique, et la convergence uniforme [6, 13] de l'approximation par éléments finis des inéquations variationnelles. Finalement, dans la quatrième section, et pour appuyer notre théorie, nous traitons quelques exemples de tests numériques.

3.2 Algorithme de Schwarz pour l'inéquation variationnelle à opérateur noncoercif

3.2.1 Notations et hypothèses

Etant données les fonctions

$$a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega}), a_j \in C^1(\bar{\Omega}), 1 \leq i, j \leq 2, a_0 \in C^0(\bar{\Omega}), \quad (3.2.1)$$

telles que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{1 \leq i \leq 2} \xi_i^2, \quad \xi \in R^2, \alpha > 0 \quad (3.2.2)$$

$$a_0(x) \geq \alpha_0 > 0 \quad (3.2.3)$$

où Ω est un domaine borné dans R^2 , de frontière $\partial\Omega$ régulière.

Nous définissons un opérateur différentiel du second ordre

$$A = - \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{1 \leq j \leq 2} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + a_0 \quad (3.2.4)$$

et une forme bilinéaire associée, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq 2} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0 uv \right) dx \quad (3.2.5)$$

Soient :

– une fonction

$$f \in L^\infty(\Omega) \quad (3.2.6)$$

– un obstacle

$$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \quad (3.2.7)$$

– une fonction régulière g définie sur $\partial\Omega$ telle que

$$g \in W^{2,p}(\Omega), 2 \leq p < \infty, g \leq \psi \text{ sur } \partial\Omega \quad (3.2.8)$$

– et un ensemble convexe non vide

$$K_{(\psi,g)} = \{v \in H^1(\Omega) / v - g \in H_0^1(\Omega), v \leq \psi \text{ dans } \Omega\}. \quad (3.2.9)$$

Nous supposons aussi qu'il existe $\lambda > 0$ assez grand et une constante $\beta > 0$ telles que

$$\beta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(v, v) + \lambda \int_{\Omega} v^2 dx \quad (3.2.10)$$

posons

$$b(u, v) = a(u, v) + \lambda \int_{\Omega} uv dx, \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (3.2.11)$$

alors la forme bilinéaire $b(., .)$ est fortement coercive.

En effet, soient

$$B = \sup_{x \in \Omega} |a_i| \quad \text{et} \quad A = \sup_{x \in \Omega} |a_0|$$

nous avons :

$$b(v, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq 2} a_j \frac{\partial v}{\partial x_j} v + a_0 v^2 + \lambda v^2 \right) dx$$

$$\begin{aligned} b(v, v) &\geq \alpha \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \\ &\quad - B\sqrt{\epsilon} \left(\int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2} + (-A + \lambda) \int_{\Omega} v^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(v, v) &\geq \alpha \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \\ &\quad - \frac{B\epsilon}{2} \left(\int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right) - \frac{B}{2\epsilon} \int_{\Omega} v^2 dx + (-A + \lambda) \int_{\Omega} v^2 dx \end{aligned}$$

$$b(v, v) \geq \left(\alpha - \frac{B\epsilon}{2} \right) \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx + \left(-A + \lambda - \frac{B}{2\epsilon} \right) \int_{\Omega} v^2 dx$$

si $B \neq 0$, nous choisissons

$$\epsilon < \frac{2\alpha}{B} \text{ et } \lambda > A + \frac{B}{2\epsilon}$$

et si $B = 0$, nous choisissons

$$\lambda > A$$

posons

$$\beta = \min \left\{ \alpha - \frac{B\epsilon}{2}, -A + \lambda - \frac{B}{2\epsilon} \right\}$$

alors nous avons

$$b(v, v) \geq \beta \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx + \int_{\Omega} v^2 dx \right).$$

Soit $u \in K_{(\psi, g)}$ la solution de l'inéquation variationnelle (I.V)

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K_{(\psi, g)} \quad (3.2.12)$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K_{(\psi, g)} \text{ solution de} \\ b(u, v - u) \geq (f + \lambda u, v - u), \forall v \in K_{(\psi, g)} \end{cases} \quad (3.2.13)$$

(.,.) désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Nous définissons $\bar{u} = \sigma(f + \lambda w) \in K_{(\psi, g)}$ la solution d'I.V suivante :

$$b(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq (f + \lambda w, v - \bar{u}), \forall v \in K_{(\psi, g)} \quad (3.2.14)$$

avec $w \in L^\infty(\Omega)$ et σ est une application de $L^\infty(\Omega)$ dans lui même.

Remarque 3.2.1. On appelle inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V) si le second membre $(f + \lambda u)$ dépend de la solution u , dans le cas contraire on appelle inéquation variationnelle (I.V).

3.2.2 Quelques résultats préliminaires sur l'I.V noncoercive

Soit une paire de données $(f, \psi, g); (\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{g})$ et soient $u = \partial(f, \psi, g); \tilde{u} = \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{g})$ les solutions correspondantes de l'I.V (3.2.12). Nous donnons une propriété de monotonie de la solution par rapport au second membre f , la donnée au frontière g et l'obstacle ψ , qui sera utile ci-après.

Lemme 3.2.1. [4] *Sous les notations et les hypothèses (3.2.1) à (3.2.11), si $f \geq \tilde{f}$, $\psi \geq \tilde{\psi}$ et $g \geq \tilde{g}$, alors $\partial(f, \psi, g) \geq \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{g})$.*

Soit X l'ensemble des sous solutions de l'I.Q.V, c'est à dire l'ensemble des $\bar{w} \in K_{(\psi, g)}$ tels que

$$b(\bar{w}, v) \leq (f + \lambda \bar{w}, v), v \geq 0, v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.2.15)$$

qui est équivalent à

$$a(\bar{w}, v) \leq (f, v), v \geq 0, v \in H_0^1(\Omega)$$

Lemme 3.2.2. [4] *Sous les notations et les hypothèses précédentes (3.2.1) à (3.2.11), la solution u du problème (3.2.12) est le plus grand élément de X .*

Nous prouvons la propriété de lipschitzianité de la solution, qui montre la dépendance continue de u par rapport aux données f, g, ψ .

Lemme 3.2.3. *Sous les notations et les hypothèses (3.2.1) à (3.2.11), on a*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max \left\{ c \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}, \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$$

où c est une constante indépendante des données, $c.a_0(x) \geq 1$.

Preuve. Premièrement :

Soit

$$\Phi = \max \left\{ \frac{1}{\alpha_0} \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}, \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$$

on a

$$a(\Phi, v - u) = \Phi \cdot (a_0, v - u)$$

alors

$$a(u + \Phi, v - u) \geq (f + a_0\Phi, v - u)$$

et

$$a(u + \Phi, (v + \Phi) - (u + \Phi)) \geq (f + a_0\Phi, (v + \Phi) - (u + \Phi))$$

si on pose

$$u + \Phi = \hat{u} \text{ and } v + \Phi = \hat{v}$$

donc

$$a(\hat{u}, \hat{v} - \hat{u}) \geq (f + a_0\Phi, \hat{v} - \hat{u})$$

par conséquent

$$\partial(f + a_0\Phi, \psi + \Phi, g + \Phi) = \hat{u} = \partial(f, \psi, g) + \Phi.$$

Deuxièmement : Il est clair que

$$\begin{aligned} \tilde{f} &\leq f + \left\| f - \tilde{f} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq f + \frac{a_0}{\alpha_0} \left\| f - \tilde{f} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq f + a_0\Phi \end{aligned}$$

et

$$\tilde{\psi} \leq \psi + \Phi$$

$$\tilde{g} \leq g + \Phi$$

ainsi, d'après le lemme 3.2.1, on obtient

$$\partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{g}) \leq \partial(f + a_0\Phi, \psi + \Phi, g + \Phi) = \partial(f, \psi, g) + \Phi$$

ce qui donne

$$\partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{g}) - \partial(f, \psi, g) \leq \Phi$$

en changeant les rôles de (f, ψ, g) et $(\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{g})$, on déduit que

$$\partial(f, \psi, g) - \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{g}) \leq \Phi$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 3.2.2. Si $\psi = \tilde{\psi}$ et $g = \tilde{g}$, alors on a

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Soit τ^h une famille de triangulation régulière quasi-uniforme de Ω de pas de discrétisation $h > 0$. Soit V_h l'espace d'éléments finis standard des fonctions linéaires continues par morceaux sur Ω et $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, m(h)$, les fonctions de

base de l'espace V_h . Soit r_h l'opérateur de restriction usuel par éléments finis dans Ω . L'analogie discret de (3.2.13) consiste à :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in K_{(\psi,g)}^h \text{ telle que} \\ b(u_h, v_h - u_h) \geq (f + \lambda u_h, v_h - u_h), \forall v_h \in K_{(\psi,g)}^h \end{cases} \quad (3.2.16)$$

où

$$K_{(\psi,g)}^h = \{v_h \in V_h / v_h = \pi_h g \text{ sur } \partial\Omega, v_h \leq r_h \psi \text{ dans } \tau^h\} \quad (3.2.17)$$

π_h est un opérateur d'interpolation convenable sur $\partial\Omega$. Nous supposons que la matrice B définie par

$$B_{ij} = b(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_i, \varphi_j) + \lambda \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \quad (3.2.18)$$

est une M -matrice (voir[11]),

(ce qui est vérifiée sous les hypothèses usuelles puisque l'opérateur $A + \lambda I$ est fortement coercif et les angles des triangles de τ^h sont $\leq \pi/2$).

3.2.3 Algorithme continu de Schwarz

Considérons le problème modèle de l'obstacle : trouver $u \in K_{(\psi,0)}$ tel que

$$b(u, v - u) \geq (f + \lambda u, v - u), \forall v \in K_{(\psi,0)} \quad (3.2.19)$$

où $K_{(\psi,0)}$ est l'ensemble convexe non vide défini en (3.2.9) avec $g = 0$.

Nous décomposons Ω en deux sous domaines polygonaux avec recouvrement Ω_1 et Ω_2 tel que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

et supposons que u satisfait la propriété de régularité locale

$$u|_{\Omega_i} \in W^{2,p}(\Omega_i), 2 \leq p < \infty$$

nous notons par $\partial\Omega_i$ la frontière de Ω_i , et $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$. L'intersection de $\bar{\Gamma}_i$ et $\bar{\Gamma}_j$; $i \neq j$ est supposée vide. On supposera toujours pour simplifier que Γ_1 et Γ_2 sont régulières.

Pour $w \in C^0(\bar{\Gamma}_i)$, nous définissons

$$V_i^{(w)} = \{v \in H^1(\Omega_i) / v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, v = w \text{ sur } \Gamma_i\}; i = 1, 2.$$

Nous associons au problème (3.2.19) le couple $(u_1, u_2) \in V_1^{(u_2)} \times V_2^{(u_1)}$ tels que

$$\begin{cases} b_1(u_1, v - u_1) \geq (f_1, v - u_1), \forall v \in V_1^{(u_2)} \\ u_1 \leq \psi, v \leq \psi \text{ dans } \Omega_1 \end{cases} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{cases} b_2(u_2, v - u_2) \geq (f_2, v - u_2), \forall v \in V_2^{(u_1)} \\ u_2 \leq \psi, v \leq \psi \text{ dans } \Omega_2 \end{cases} \quad (3.2.21)$$

où

$$\begin{aligned} b_i(u, v) &= \int_{\Omega_i} \left(\sum_{1 \leq l, j \leq 2} a_{lj} \frac{\partial u}{\partial x_l} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq j \leq 2} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0 uv + \lambda uv \right) dx; \quad i = 1, 2 \\ f_i &= f|_{\Omega_i}, \quad u_i = u|_{\Omega_i}. \end{aligned}$$

partant de $u^0 = \psi$, nous définissons la suite continue de Schwarz (u_1^{n+1}) sur Ω_1 telle que $u_1^{n+1} \in V_1^{(u_2^n)}$ solution de

$$\begin{cases} b_1(u_1^{n+1}, v - u_1^{n+1}) \geq (f_1 + \lambda u_1^n, v - u_1^{n+1}), \forall v \in V_1^{(u_2^n)} \\ u_1^{n+1} \leq \psi, v \leq \psi \end{cases} \quad (3.2.22)$$

et (u_2^{n+1}) sur Ω_2 telle que $u_2^{n+1} \in V_2^{(u_1^{n+1})}$ solution de

$$\begin{cases} b_2(u_2^{n+1}, v - u_2^{n+1}) \geq (f_2 + \lambda u_2^n, v - u_2^{n+1}), \forall v \in V_2^{(u_1^{n+1})} \\ u_2^{n+1} \leq \psi, v \leq \psi \end{cases} \quad (3.2.23)$$

où

$$\begin{aligned} u_1^0 &= u^0 \text{ dans } \Omega_1, u_2^0 = u^0 \text{ dans } \Omega_2, \\ u_1^{n+1} &= 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_1 \text{ et } u_2^{n+1} = 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_2. \end{aligned}$$

3.2.4 La discrétisation

Pour $i = 1, 2$ soit τ^{h_i} une famille de triangulation régulière et quasi-uniforme de Ω_i , h_i étant le pas de la discrétisation. Nous supposons que les deux triangulations sont mutuellement indépendantes sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$, dans le sens où un triangle appartient à un domaine de triangulation n'appartient forcément à l'autre. Soit $V_{h_i} = V_{h_i}(\Omega_i)$ l'espace des fonctions linéaires continues par morceaux sur τ^{h_i} , qui s'annulent sur $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$, V_{h_i} étant de dimension finie. Pour $w \in C^0(\bar{\Gamma}_i)$, nous définissons

$$V_{h_i}^{(w)} = \{v_{h_i} \in V_{h_i} / v_{h_i} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, v_{h_i} = \pi_{h_i}(w), \text{ sur } \Gamma_i\}, i = 1, 2$$

où π_{h_i} désigne un opérateur d'interpolation convenable sur Γ_i . Nous donnons l'algorithme de Schwarz discret associé aux problèmes (3.2.22) et (3.2.23) comme suit :

Partant de $u_{ih_i}^0 = r_{h_i}\psi$, nous définissons la suite discrète de Schwarz $(u_{1h_1}^{n+1})$ sur

Ω_1 telle que $u_{1h_1}^{n+1} \in V_{h_1}^{(u_{2h_2}^n)}$ solution de

$$\begin{cases} b_1(u_{1h_1}^{n+1}, v_{h_1} - u_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1 + \lambda u_{1h_1}^n, v_{h_1} - u_{1h_1}^{n+1}), \forall v_{h_1} \in V_{h_1}^{(u_{2h_2}^n)} \\ u_{1h_1}^{n+1} \leq r_{h_1} \psi, v_{h_1} \leq r_{h_1} \psi \end{cases} \quad (3.2.24)$$

et sur Ω_2 la suite $u_{2h_2}^{n+1} \in V_{h_2}^{(u_{1h_1}^{n+1})}$ solution de

$$\begin{cases} b_2(u_{2h_2}^{n+1}, v_{h_2} - u_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2 + \lambda u_{2h_2}^n, v_{h_2} - u_{2h_2}^{n+1}), \forall v_{h_2} \in V_{h_2}^{(u_{1h_1}^{n+1})} \\ u_{2h_2}^{n+1} \leq r_{h_2} \psi, v_{h_2} \leq r_{h_2} \psi \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Nous supposons aussi que les matrices résultantes respectivement des problèmes (3.2.24) et (3.2.25) sont des M -matrices.

3.3 Analyse de l'erreur d'approximation

Cette section est consacrée à la démonstration du résultat principal de ce chapitre. Pour cela nous commençons par introduire deux suites auxiliaires.

3.3.1 Suites auxiliaires de Schwarz

Pour simplifier les notations, on pose

$$h_1 = h_2 = h, \quad r_{h_1} = r_{h_2} = r_h, \quad \pi_{h_1} = \pi_{h_2} = \pi_h,$$

$$\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_1)}, \quad \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_2)}$$

$$\tau^{h_1} = \tau_1^h, \quad \tau^{h_2} = \tau_2^h$$

Soit $\bar{u}_{ih}^{n+1} = \sigma_h(f_i + \lambda u_i^n) \in V_{h_i}(\Omega_i)$ la solution de l'I.V discrète suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} b_i(\bar{u}_{ih}^{n+1}, v_h - \bar{u}_{ih}^{n+1}) \geq (f_i + \lambda u_i^n, v_h - \bar{u}_{ih}^{n+1}) \quad \forall v_h \in V_h(\Omega_i) \\ \bar{u}_{ih}^{n+1} \leq r_h \psi, \quad v_h \leq r_h \psi \quad \text{dans } \tau_i^h \\ \bar{u}_{ih}^{n+1} = \pi_h u_{ih}^{n+1}, \quad v_h = \pi_h u_{ih}^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_i \end{array} \right. \quad (3.3.26)$$

où $u_i^{n+1} = \sigma(f_i + \lambda u_i^n)$, $i = 1, 2$ est la solution de l'I.V continue (3.2.22) (resp. (3.2.23)).

Et soit $\bar{u}_i^{(h),n+1} = \sigma(f_i + \lambda u_{ih}^n) \in V_i$ la solution de l'I.V continue suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} b_i(\bar{u}_i^{(h),n+1}, v - \bar{u}_i^{(h),n+1}) \geq (f_i + \lambda u_{ih}^n, v - \bar{u}_i^{(h),n+1}) \quad \forall v \in H^1(\Omega_i) \\ \bar{u}_i^{(h),n+1} \leq \psi, \quad v \leq \psi \quad \text{dans } \Omega_i \\ \bar{u}_i^{(h),n+1} = u_i^{n+1}, \quad v = u_i^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_i \end{array} \right. \quad (3.3.27)$$

avec $u_{ih}^{n+1} = \sigma_h(f_i + \lambda u_{ih}^n)$, $i = 1, 2$ est la solution de l'I.V discrète (3.2.24) (resp. (3.2.25)). Il est clair que \bar{u}_{ih}^n est l'approximation par éléments finis de u_i^n . Alors, comme $\|f_i + \lambda u_i^n\|_i \leq c$ (indépendante de n), par conséquent, appliquons le théorème de l'estimation d'erreur pour l'inéquation variationnelle (voir [6, 13]), nous obtenons

$$\|u_i^n - \bar{u}_{ih}^n\|_i \leq ch^2 |\log h|^3 \quad (3.3.28)$$

de façon similaire, nous avons

$$\left\| u_{ih}^n - \bar{u}_i^{(h),n} \right\|_i \leq ch^2 |\log h|^3. \quad (3.3.29)$$

3.3.2 Suites de sous solutions

Les théorèmes suivant joueront un rôle essentiel dans la démonstration du résultat principal de ce chapitre.

1ere Partie - sous solution discrète

On construit une fonction discrète α_{ih}^n proche de u_i^n et qui vérifie $\alpha_{ih}^n \leq u_{ih}^n$.

Théorème 3.3.1. *Soit \bar{u}_{ih}^{n+1} la solution de (3.3.26). Alors il existe une fonction α_{ih}^n et une constante c indépendante de h et n , telles que*

$$\begin{aligned} \alpha_{ih}^n &\leq u_{ih}^n \\ \|\alpha_{ih}^n - u_i^n\|_i &\leq ch^2 |\log h|^3 \end{aligned}$$

Preuve. On prouve le théorème pour $i = 1$. Le cas $i = 2$ est similaire. Etant donné que \bar{u}_{1h}^{n+1} est la solution de l'I.V (3.3.26), il est facile de montrer que \bar{u}_{1h}^{n+1} est aussi une sous solution, i.e

$$\begin{cases} b_1(\bar{u}_{1h}^{n+1}, \varphi_l) \leq (f_1 + \lambda u_1^n, \varphi_l), & \forall \varphi_l \geq 0, \quad l = 1, \dots, m(h) \\ \bar{u}_{1h}^{n+1} \leq r_h \psi \text{ dans } \tau_1^h, \quad \bar{u}_{1h}^{n+1} = \pi_h u_{2h}^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} b_1(\bar{u}_{1h}^{n+1}, \varphi_l) &\leq (f_1 + \lambda \|u_1^n - \bar{u}_{1h}^n\|_1 + \lambda \bar{u}_{1h}^n, \varphi_l), & \forall \varphi_l \geq 0, \quad l = 1, \dots, m(h) \\ \bar{u}_{1h}^{n+1} &\leq r_h \psi \text{ dans } \tau_1^h, \quad \bar{u}_{1h}^{n+1} = \pi_h u_{2h}^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

et d'après le lemme 3.2.2 (cas discret), il suit que

$$\bar{u}_{1h}^{n+1} \leq \tilde{u}_{1h}^{n+1} = \partial_h(\tilde{f}_1) \tag{3.3.30}$$

où

$$\tilde{f}_1 = f_1 + \lambda \|u_1^n - \bar{u}_{1h}^n\|_1$$

posons $u_{1h}^{n+1} = \partial_h(f_1, r_h\psi, \pi_h u_{2h}^n)$, en introduisant la remarque 3.2.2 (cas discret) et l'estimation (3.3.28), nous obtenons

$$\|u_{1h}^{n+1} - \tilde{u}_{1h}^{n+1}\|_1 \leq c \|\tilde{f}_1 - f_1\|_1 \leq c\lambda \|u_1^n - \bar{u}_{1h}^n\|_1 \leq ch^2 |\log h|^3 \quad (3.3.31)$$

en combinant (3.3.29) et (3.3.30) cela donne

$$\bar{u}_{1h}^{n+1} \leq u_{1h}^{n+1} + ch^2 |\log h|^3$$

ainsi, nous choisissons

$$\alpha_{1h}^{n+1} = \bar{u}_{1h}^{n+1} - ch^2 |\log h|^3$$

alors

$$\alpha_{1h}^{n+1} \leq u_{1h}^{n+1}$$

et

$$\begin{aligned} \|\alpha_{1h}^{n+1} - u_1^{n+1}\|_1 &\leq \|\bar{u}_{1h}^{n+1} - ch^2 |\log h|^3 - u_1^{n+1}\|_1 \\ &\leq \|\bar{u}_{1h}^{n+1} - u_1^{n+1}\|_1 + ch^2 |\log h|^3 \\ &\leq ch^2 |\log h|^3 + ch^2 |\log h|^3 \\ &\leq ch^2 |\log h|^3 \end{aligned}$$

□

2eme Partie - sous solution continue

On construit une fonction continue $\beta_i^{(h),n}$ proche de u_{ih}^n vérifiant $\beta_i^{(h),n} \leq u_i^n$.

Théorème 3.3.2. *Soit $\bar{u}_i^{(h),n+1}$ la solution de (3.3.27). Alors il existe une fonction $\beta_{ih}^{(h),n}$ et une constante c indépendante de h et n , telle que*

$$\beta_i^{(h),n} \leq u_i^n$$

$$\left\| \beta_i^{(h),n} - u_{ih}^n \right\|_i \leq ch^2 |\log h|^3$$

Preuve. On prouve le théorème pour $i = 1$. Le cas $i = 2$ est similaire. En effet, $\bar{u}_1^{(h),n+1}$ étant la solution de l'I.V (3.3.27), c'est aussi une sous solution, i.e

$$\begin{cases} b_1(\bar{u}_1^{(h),n+1}, w) \leq (f_1 + \lambda u_{1h}^n, w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega_1), w \geq 0 \\ \bar{u}_1^{(h),n+1} \leq \psi \text{ dans } \Omega_1, \quad \bar{u}_1^{(h),n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

ainsi

$$\begin{cases} b_1(\bar{u}_1^{(h),n+1}, w) \leq (f_1 + \lambda \left\| u_{1h}^n - \bar{u}_1^{(h),n} \right\|_1 + \lambda \bar{u}_1^{(h),n}, w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega_1), w \geq 0 \\ \bar{u}_1^{(h),n+1} \leq \psi \text{ dans } \Omega_1, \quad \bar{u}_1^{(h),n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

alors, en appliquant le lemme 3.2.2, on obtient

$$\bar{u}_1^{(h),n+1} \leq \tilde{u}_1^{n+1} = \partial(\tilde{f}_1) \tag{3.3.32}$$

où

$$\tilde{f}_1 = f_1 + \lambda \left\| u_{1h}^n - \bar{u}_1^{(h),n} \right\|_1$$

posons $u_1^{n+1} = \partial(f_1, \psi, u_2^n)$, utilisant la remarque 3.2.2 et l'estimation (3.3.29), nous obtenons

$$\|\tilde{u}_1^{n+1} - u_1^{n+1}\|_1 \leq c \|\tilde{f}_1 - f_1\|_1 \leq c\lambda \|u_{1h}^n - \bar{u}_1^{(h),n}\|_1 \leq ch^2 |\log h|^3 \quad (3.3.33)$$

ainsi, en combinant (3.3.32) avec l'estimation (3.3.33) cela nous donne

$$\bar{u}_1^{(h),n+1} \leq u_1^{n+1} + ch^2 |\log h|^3$$

finalement, choisissant

$$\beta_1^{(h),n+1} = \bar{u}_1^{(h),n+1} - ch^2 |\log h|^3$$

on conclut le résultat immédiatement. \square

3.3.3 Estimation d'erreur

Théorème 3.3.3. *Soient (u_i^{n+1}) (resp. (u_{ih}^{n+1})) les solutions de (3.2.22), (3.2.23) (resp. (3.2.24), (3.2.25)). Alors il existe une constante c indépendante de h et n , telle que*

$$\begin{aligned} \|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_i &\leq ch^2 |\log h|^3 \\ \|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_i)} &\leq ch |\log h|^3 \end{aligned}$$

Preuve. En se basant sur les résultats du théorème 3.3.1 et le théorème 3.3.2, nous avons

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_{ih}^{n+1} &\leq ch^2 |\log h|^3 \\ u_{ih}^{n+1} - u_i^{n+1} &\leq ch^2 |\log h|^3 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|u_i^{n+1} - u_{ih}^{n+1}\|_i \leq ch^2 |\log h|^3; i = 1, 2. \quad (3.3.34)$$

De plus

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_i \leq \|u_i - u_i^{n+1}\|_i + \|u_i^{n+1} - u_{ih}^{n+1}\|_i.$$

Soit $k = \max(k_1, k_2)$, ainsi appliquons le théorème 2.2.4 et l'estimation (3.3.34), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_i &\leq k^{2n} \|u^0 - u\|_{L^\infty(\Gamma_i)} + ch^2 |\log h|^3 \\ &\leq k^{2n} \|\psi - u\|_{L^\infty(\Gamma_i)} + ch^2 |\log h|^3 \\ &\leq ck^{2n} + ch^2 |\log h|^3. \end{aligned}$$

Nous choisissons n tel que

$$k^{2n} \leq h^2$$

alors

$$\begin{aligned} \|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_i &\leq ch^2 + ch^2 |\log h|^3 \\ &\leq ch^2 |\log h|^3. \end{aligned}$$

Et par l'inégalité inverse nous obtenons

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_i)} \leq ch |\log h|^3$$

ce qui achève la démonstration. □

3.4 Expérimentation numérique

Dans cette section, on présente quelques résultats de tests numériques simples comportant un maillage nonmatching. On pose

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1] \times [0, 1], & V &= H_0^1(\Omega) \\ Au &= -\Delta u + 0.5x \frac{\partial u}{\partial x} + 0.5y \frac{\partial u}{\partial y} + 0.045u \\ f(x, y) &= \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ \psi(x) &= 0, \forall x \in \Omega \\ \Omega_1 &= [0, x_1] \times [0, 1], \Omega_2 = [x_2, 1] \times [0, 1] \\ d &= x_1 - x_2, \quad 0 < x_2 < x_1 < 1\end{aligned}$$

on arrête toutes les itérations quand

$$\|u_{1h_1}^n - u_{1h_1}^{n-1}\|_1 < 10^{-6} \quad \text{et} \quad \|u_{2h_2}^n - u_{2h_2}^{n-1}\|_2 < 10^{-6}.$$

Soit $u_{ih}^0 = 0$ une valeur initiale.

Pour chaque macro-itération (itération de Schwarz) nous avons employé sur chaque sous domaine la méthode itérative de relaxation par projection, dont le paramètre de relaxation est $w = 1.5$.

	ℓ	erreur dans Ω_1	erreur dans Ω_2	it_3	it_2	it_1
$d = 0.5$ $x_2 = 0.25$ $h_1 = \frac{1}{2^{\ell+1}}$ $h_2 = \frac{1}{2^{\ell+2}}$	1	/	/	5	16	17
	2	$2.6479e - 03(/)$	$1.0995e - 03(/)$	5	28	18
	3	$6.4476e - 04(4.11)$	$3.2312e - 04(3.40)$	5	103	29
	4	$1.5741e - 04(4.09)$	$8.5800e - 05(3.76)$	5	332	104
$d = 0.25$ $x_2 = 0.5$ $h_1 = \frac{1}{2^{\ell+1}}$ $h_2 = \frac{1}{2^{\ell+2}}$	1	/	/	6	16	16
	2	$2.6378e - 03(/)$	$4.7167e - 04(/)$	6	17	17
	3	$6.4414e - 04(4.09)$	$1.5458e - 04(3.05)$	7	73	28
	4	$1.5692e - 04(4.10)$	$4.4176e - 05(3.50)$	7	243	103
$d = 1/3$ $x_2 = 1/3$ $h_1 = \frac{1}{3 \times 2^{\ell-1}}$ $h_2 = \frac{1}{3 \times 2^{\ell}}$	1	/	/	4	16	16
	2	$5.6987e - 03(/)$	$2.0413e - 03(/)$	5	17	16
	3	$1.1146e - 03(5.11)$	$5.4825e - 04(3.72)$	6	59	17
	4	$2.8029e - 04(3.97)$	$1.2620e - 04(4.34)$	6	197	59

TABLE 3.1 – Erreurs et nombre d’itérations pour : $\lambda = 1$

it_3 , indique le macro itération de Schwarz (itération extérieure),
 it_1, it_2 , indiquent les micro itérations de relaxation par projection pour chaque sous domaine (itérations intérieures),
 ℓ , indique le niveau du raffinage,
à la rangé ℓ , le nombre entre parenthèse (.) indique le quotient de la valeur de l’erreur à la rangé $\ell - 1$ sur la valeur de l’erreur à la rangé ℓ .

Nous constatons que :

- Le quotient des erreurs montre la bonne précision de la discrétisation, ainsi l’ordre de convergence est égal à 2.
- Le nombre d’itérations de Schwarz it_3 est borné indépendamment du pas h_i de la discrétisation.

- Les valeurs numériques des erreurs pour chaque sous domaine décroissent dès qu'on raffine le maillage ce qui nous assure la convergence de la solution.
- Puisque le maillage est nonmatching alors les valeurs numériques des erreurs dans le sous domaine Ω_2 sont plus petites que celles de Ω_1 .
- Le critère d'arrêt des itérations de Schwarz it_3 est choisi de façon que l'erreur entre deux itérations successives sur chaque sous domaine est inférieur à 10^{-6} , Nous pensons qu'il est préférable de remplacer le test d'arrêt sur chaque sous domaine par un seul test sur le "overlap" $\Omega_1 \cap \Omega_2$.
- Les résultats numériques montrent que dans le cas d'une décomposition symétrique, les itérations de relaxation par projection it_1 et it_2 sont proportionnelles, par contre dans le cas non symétrique (cas $d = 0.25$) ne le sont pas. De plus l'erreur est stable si la décomposition est symétrique cas $d = 0.5$, $d = 1/3$, et dans l'autre cas ($d = 0.25$) l'erreur pourrait être instable pour certains problèmes, et ça provient que la taille de la matrice d'un sous problème est indépendante de l'autre, ce qui induit un accumule d'erreurs d'arrondis plus grand que l'autre, dans ce cas nous conseillons d'éviter les décompositions non symétriques.

$k = it_3$	1	2	3	4	5
$u^k(0.5, 0.25)$	$-0.23184e - 2$	$-0.54148e - 2$	$-0.55464e - 2$	$-0.55510e - 2$	$-0.55512e - 2$
$u^k(0.5, 0.5)$	$-0.36135e - 2$	$-0.60834e - 2$	$-0.62139e - 2$	$-0.62191e - 2$	$-0.62193e - 2$
$u^k(0.75, 0.5)$	$-0.53239e - 2$	$-0.55319e - 2$	$-0.55400e - 2$	$-0.55403e - 2$	$-0.55403e - 2$

TABLE 3.2 – Itérations de la solution pour : $\lambda = 1, d = 0.5, h_1 = \frac{1}{2^5}, h_2 = \frac{1}{2^6}$

- On remarque que les premiers chiffres qui sont après la virgule se stabilisent à partir de l'itération $it_3 = 3$, ce qui nous assure la convergence de la solution.
- Les valeurs numériques sont négatives puisque l'obstacle $\psi = 0$.
- Il aurait dû calculer la solution du problème global discrétisé sans décomposition de domaine afin de comparer les deux méthodes au niveau du temps de calcul, taille des matrices et nombre d'itérations de la résolution des systèmes d'équations linéaires.

$d \setminus \ell$	1	2	3	4
1/2	5	5	5	5
1/3	4	5	6	6
1/4	6	6	7	7

TABLE 3.3 – Nombre d'itérations de Schwarz pour : $\lambda = 1$

- Si la valeur de la distance géométrique d croit, le nombre d'itérations de Schwarz décroît, ce qui prouve que le nombre d'itérations it_3 dépend impérativement de la dimension de la partie géométrique commune $\Omega_1 \cap \Omega_2$.
- La convergence est plus rapide si la taille du recouvrement est plus large.

		$\lambda = 3$			$\lambda = 6$		
	ℓ	it_3	it_2	it_1	it_3	it_2	it_1
$d = 0.5$	1	6	16	17	7	16	17
$x_2 = 0.25$	2	6	27	18	7	25	17
$h_1 = \frac{1}{2^{\ell+1}}$	3	6	99	27	7	94	26
$h_2 = \frac{1}{2^{\ell+2}}$	4	6	320	99	7	304	94
$d = 0.25$	1	7	16	16	8	15	16
$x_2 = 0.5$	2	7	17	16	8	16	16
$h_1 = \frac{1}{2^{\ell+1}}$	3	7	71	26	8	68	25
$h_2 = \frac{1}{2^{\ell+2}}$	4	7	237	99	8	229	94
$d = 1/3$	1	5	16	16	6	16	16
$x_2 = 1/3$	2	6	17	16	7	17	16
$h_1 = \frac{1}{3 \times 2^{\ell-1}}$	3	6	56	17	8	53	17
$h_2 = \frac{1}{3 \times 2^{\ell}}$	4	7	190	56	8	181	53

TABLE 3.4 – Nombre d'itérations pour : $\lambda = 3$ et $\lambda = 6$

On remarque que le nombre d'itérations de Schwarz varie suivant les valeurs de λ , par conséquent le temps et le volume de calcul s'accroît proportionnellement avec les valeurs de λ . Alors il convient de choisir une valeur optimale de λ , on rappelle que dans notre cas

$$\lambda > 0.1075$$

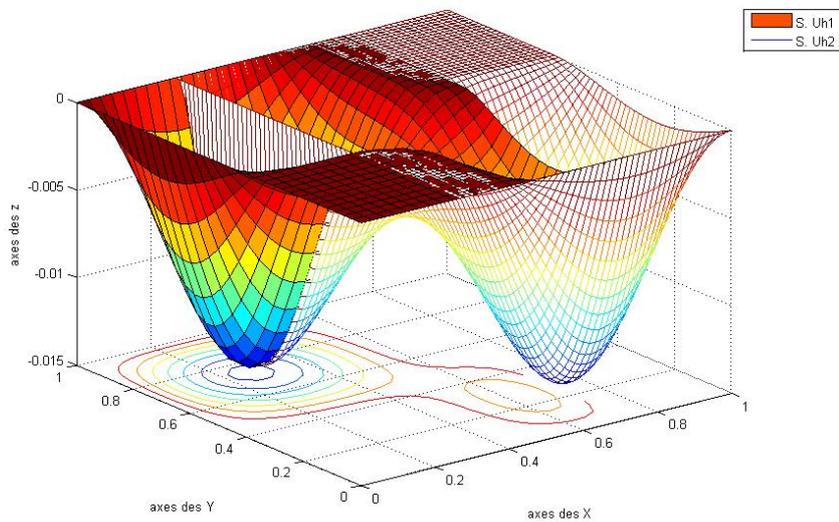


FIGURE 3.1 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 1$

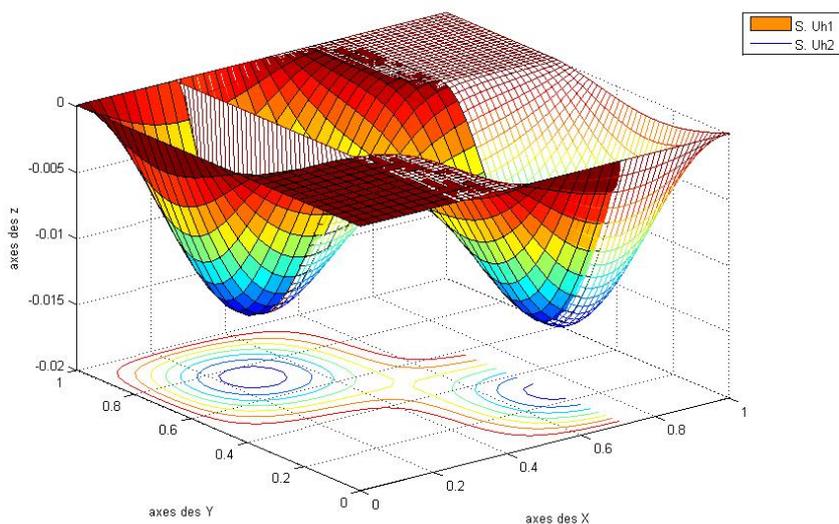


FIGURE 3.2 – Surface de la solution numérique à l'itération de Schwarz $it_3 = 2$

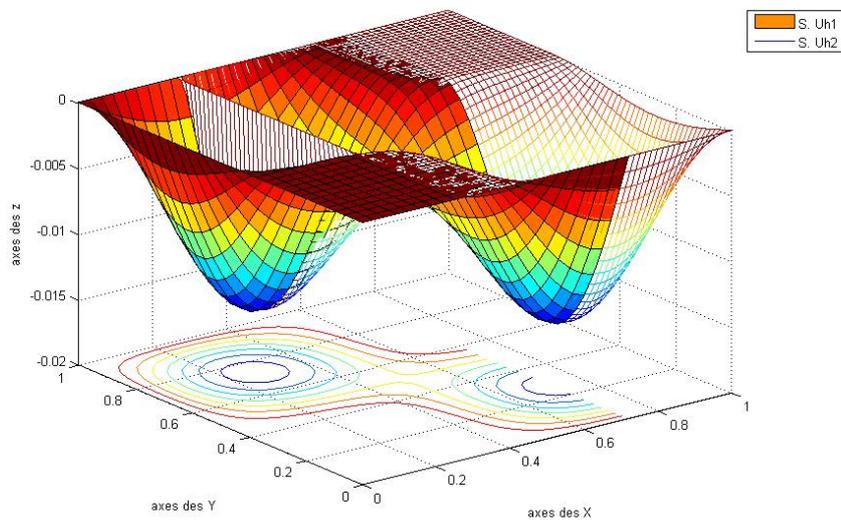


FIGURE 3.3 – Surface de la solution numérique à l’itération de Schwarz $it_3 = 3$

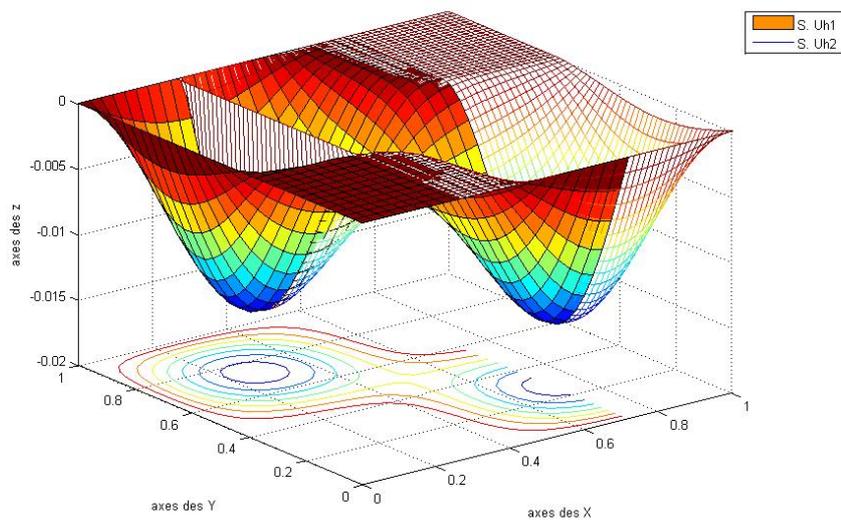


FIGURE 3.4 – Surface de la solution numérique à l’itération de Schwarz $it_3 = 5$

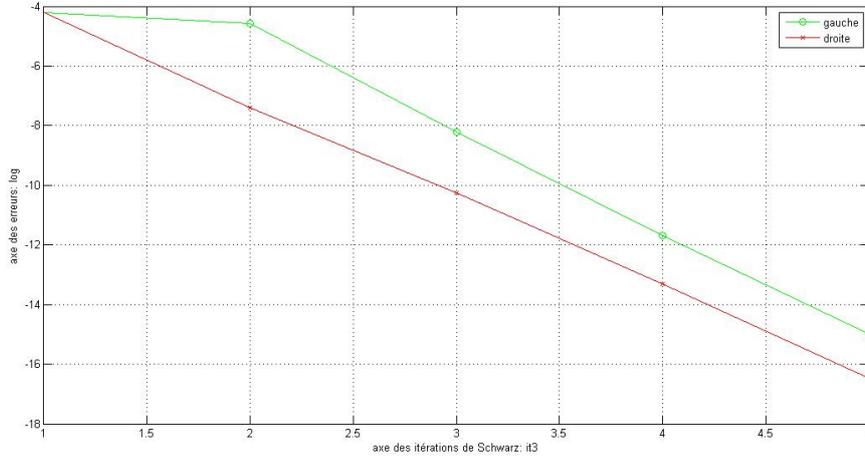


FIGURE 3.5 – Evolution de l’erreur pour h_i fixe : $h_1 = 1/16, h_2 = 1/32, d = 0.5, \lambda = 1$

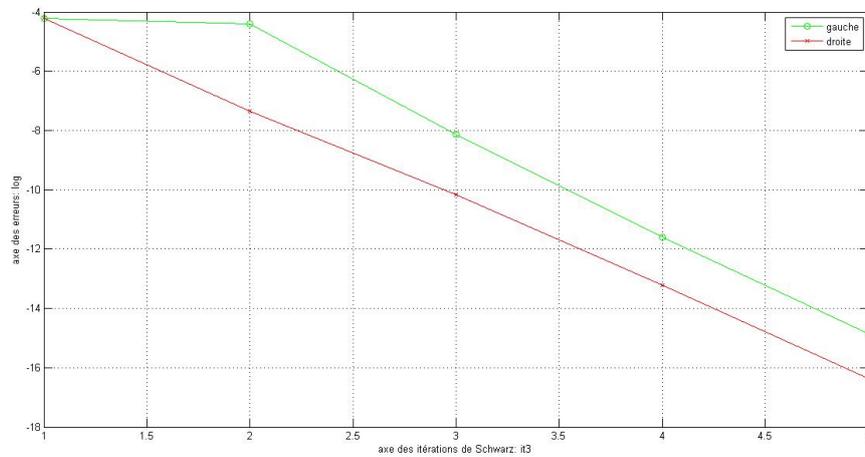


FIGURE 3.6 – Evolution de l’erreur pour h_i fixe : $h_1 = 1/32, h_2 = 1/64, d = 0.5, \lambda = 1$

- La surface de la solution numérique est tracée en collant les deux morceaux de la solution des deux sous problèmes.
- La surface est au dessous du plan XOY car $u \leq 0$.
- La valeur minimale de la surface est : $u^5(0.5, 0.5) = -0.62193e - 2$.
- Puisqu'on a considéré un maillage nonmatching alors le morceau de la surface sur Ω_2 est plus fin que celui de Ω_1 .
- La surface prend la forme d'une fonction Sinusoïdale car le second membre f de l'inéquation comporte des fonctions sinus.
- Chaque courbe indique l'évolution de l'erreur de la solution entre deux itérations successives de Schwarz dans un sous domaine Ω_i avec un pas de discrétisation fixe h_i . Nous constatons que la courbe est décroissante ce qui signifie que l'erreur est stable (non perturbée) lorsque l'itération de Schwarz it_3 s'accroît.

Conclusion

Dans cette étude, nous avons proposé deux approches différentes permettant d'estimer l'erreur en norme L^∞ de l'algorithme de Schwarz pour des problèmes d'obstacle gouvernés par des inéquations aux dérivées partielles.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à un problème d'inéquation quasi-variationnelle elliptique. Nous avons établi un ordre de convergence de l'algorithme de Schwarz pour deux sous-domaines. L'approche développée dans cette partie est fondée principalement sur la propriété de **Lipschitzianité** de la solution par rapport aux **conditions de Dirichlet sur les frontières** " Γ_1, Γ_2 " et sur la convergence géométrique des systèmes itératifs de Schwarz. L'estimation d'erreur obtenue a contenu un facteur logarithmique avec une puissance supplémentaire de $|\log h|$ que prévu.

Dans les expressions (2.2.19), (2.2.20) et à l'itération $(n + 1)$ l'obstacle Mu_{ih}^n dépend de la solution à l'itération n , ce qui nous impose à conserver en mémoire machine les deux solutions u_{ih}^n et u_{ih}^{n+1} pour qu'on puisse tester l'une à l'autre.

Puis dans un deuxième temps, nous avons estimé l'erreur de l'algorithme de Schwarz pour une inéquation variationnelle à opérateur noncoercif. L'approche utilisée dans cette partie est reposée essentiellement sur la propriété de **Lipschitzianité** de la solution par rapport au second membre \mathbf{f} et sur la convergence géométrique des systèmes itératifs de Schwarz. L'estimation d'erreur obtenue sur

chaque sous domaine est quasi optimal avec un ordre de convergence $h^2 |\log h|^3$. Dans la démonstration des théorèmes d'estimation d'erreur, nous avons supposé $k^n \leq h$, il serait très intéressant de chercher une estimation à priori de l'itération n de Schwarz.

Du côté numérique, les résultats sont satisfaisants. Le meilleur résultat est obtenu pour un recouvrement grand. Les résultats numériques présentées pour une décomposition en deux sous domaines symétriques sont plus robustes qu'une décomposition non symétrique.

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de Schwarz multiplicative. Une extension de ce travail serait d'appliquer la variante additive et cela nous permettra de comparer les deux variantes.

Appendice A

Les fonctions et les boucles de la programmation de la méthode de Schwarz sur un logiciel Matlab pour un problème d'inéquation quasi-variationnelle - Maillage nonmatching -

1. Calcul des coordonnées nodales

Mcoord-nodal11.m, Mcoord-nodal12.m

2. Connectivité nodale

Mconnect-nodal11.m, Mconnect-nodal12.m

3. Conditions aux frontières

Mfrontiere-u01.m, Mfrontiere-u02.m

4. Remplissage des conditions aux limites discrètes des 2 problèmes

Mbcval-U01.m, Mbcval-U02.m

5. Assemblage des matrices élémentaires

Massemble-mat1.m, Massemble-mat2.m

6. Calcul des 2 vecteurs de droite

MlocalF1-11.m, MlocalF1-12.

7. Assemblage des vecteurs de droite

MassembleF1-11.m, MassembleF1-12.m

8. Ajout des conditions aux limites aux membres de droite
Mbound-U01.m, Mbound-U02.m
9. Matrices extraites
Mbound-k01.m, Mbound-k02.m
10. Iteration de l'algorithme de Schwarz
 - 10.1. Remplissage des conditions aux limites discrètes problème 1
 - 10.2. Ajout des conditions aux limites au membre de droite FF1
 - 10.3. Vecteur de droite extrait FFF1
 - 10.4. Méthode de relaxation pour le problème 1
 - 10.5. Passage au problème 2
 - 10.6. Remplissage des conditions aux limites discrètes problème 2
 - 10.7. Ajout des conditions aux limites au membre de droite FF2
 - 10.8. Vecteur de droite extrait FFF2
 - 10.9. Méthode de relaxation pour le problème 2
 - 10.10. Test d'arrêt des itérations de l'algorithme de Schwarz
11. Remplissage du vecteur solution globale v , composé de v_1 et v_2
12. Remplissage du vecteur obstacle global G , composé de G_1 et G_2
13. Conditions aux frontières sur le carré entier
Mfrontiere-v0.m, Mbcval3-v0.m
14. Chargement du vecteur solution numérique U , et de l'obstacle GG
15. Tracé de l'obstacle GG

16. Tracé de la solution numérique U_{sol}

17. Tracé de l'obstacle GG et de la solution numérique U_{sol}

18. Calcul de la solution exacte

```
uexactfunc = inline('-sin(pi*x).*sin(pi*y)', 'x', 'y')
```

19. Calcul de l'erreur

```
erreur1=norm(Usol- uexact, inf)
```

Bibliographie

- [1] K. ATKINSON and W. HAN, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer-Verlag, INC, New York, Berlin, 2001.
- [2] L. BADEA, *On the Schwarz Alternating Method with more than Subdomains for Nonlinear Monotone Problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis **28** (1991), 197–204.
- [3] L. BADEA, X. CHENG, and J. WANG, *Convergence Rate Analysis of a Multiplicative Schwarz Method for Variational Inequalities*, SIAM Journal of Numerical Analysis **41** (2003), no. 3, 1052–1073.
- [4] A. BENSSOUSSAN and J.L. LIONS, *Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control (English version)*, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [5] ———, *Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities*, Gauthier Villars, Paris, 1984.
- [6] M. BOULBRACHENE, *The Noncoercive Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problems*, Comput. Math. Appl. **35** (1998),

no. 12, 101–108.

- [7] M. BOULBRACHENE, M. HAIOUR, and S. SAADI, *L^∞ -Estimates for a System of Quasi-Variational Inequalities*, IJMMS (2003), 1–10.
- [8] M. BOULBRACHENE and S. SAADI, *Maximum Norm Analysis of an Overlapping Nonmatching Grids Method for the Obstacle Problem*, Hindawi Publishing Corporation (2006), 1–10.
- [9] A. BOUNAIM, *A Lagrangian Approach to DDM for an Optimal Control Problem, Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering*, Proceeding from the Ninth International Conference (1996), Hold in Bergen, Norway.
- [10] F. BREZZI and L.A. CAFFARELLI, *Convergence of the Discrete Free Boundary for Finite Element Approximation*, R.A.I.R.O. Anal. Numer. **17** (1983), 385–395.
- [11] P. G. CIARLET and P. A. RAVIART, *Maximum Principle and Uniform Convergence for the Finite Element Method*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. **2** (1973), 1–20.
- [12] P. CORTEY-DUMONT, *Contibution à l'Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles sans Principe du Maximum Discret*, C. R. Acad. Sciences (1983), serie I.
- [13] ———, *On Finite Element Approximation in the L^∞ -Norm of Variational Inequalities*, Numerische Mathematik **47** (1985), 45–57.

- [14] R. GLOWINSKY, *Numerical Method for Nonlinear Variational Problem*, Springer-Verlag, Inc, New York, Berlin, 2008.
- [15] M. HAIOUR and S. BOULAARES, *Overlapping Domain Decomposition Methods for Elliptic Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problem With Mixed Boundary Conditions*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **121** (2011), no. 4, 481–493.
- [16] M. HAIOUR and E. HADIDI, *Uniform Convergence of Schwarz Method for Noncoercive Variational Inequalities*, Int. J. Contemp. Math. Sciences **4** (2009), no. 29, 1423–1434.
- [17] P. L. LIONS, *On the Schwarz Alternating Method.I, First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia (1988), 1–42.
- [18] ———, *On the Schwarz Alternating Method.II, Stochastic Interpretation and order Proprieties, Domain Decomposition Methods*, SIAM, Philadelphia (1989), 47–70.
- [19] ———, *On the Schwarz Alternating Method.III, A Variant for Nonoverlapping Subdomains, Proc. 3rd Conference on Domain Decomposition Methods*, SIAM, Philadelphia (1990), 202–223.
- [20] R. H. NOCHETTO, *A Note on the Approximation of Free Boundaries by Finite Element Methods*, R.A.I.R.O. Anal. Numer. **20** (1986), 355–368.

- [21] S. SAADI and A. MEHRI, *L[∞]-Error Estimate of Schwarz Algorithm for Elliptic Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problem*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications (AJMAA), (<http://www.ajmaa.org>) **11**, N°1 (2014), 1–13.
- [22] ———, *L[∞]-Error Estimate of Schwarz Algorithm for Non-coercive Variational Inequalities*, Applied Mathematics, (<http://www.scirp.org/journal/am>) **5**, N°3 (2014), 572–580.
- [23] H. A. SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Volume 2. Springer, Berlin. First Published in Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zurich **15** (1870), 272–286.
- [24] A. H. SIDDIQI, *Applied Functional Analysis, Numerical Methods, Wavelet Methods, and Image Processing*, Marcel Dekker, Inc. ed., New York. Basel, 2004.
- [25] S. L. SOBOLEV, *l'Algorithme de Schwarz dans la Théorie de l'Elasticité*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS **IV((XIII)6)** (1936), 243–246.
- [26] G. STAMPACCHIA and D. KINDERLEHRER, *An Introduction to Variational Inequalities And Their Applications*, Academic Press Inc., London, New York, 1980.
- [27] J. ZENG and S. ZHOU, *On Monotone and Geometric Convergence of Schwarz Methods for Two-Sided Obstacle Problems*, SIAM, Journal on Nu-

merical Analysis **35** (1998), 600–616.

- [28] ———, *Schwarz Algorithm of the Solution of Variational Inequalities with Nonlinear Source Terms*, Applied Mathematics and Computations **97** (1998), 23–35.