وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar Annaba

Badji Mokhtar University - Annaba

جامعة باجي مختار

عنابة

Année 2015

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat de 3ème cycle en Mathématiques

EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FRACTIONNAIRE IMPULSIVE DE TEMPS INFINI DANS UN ESPACE DE BANACH

Option :
Mathématiques et Applications

Présentée par

MEDJEKAL Hamza

DIRECTEUR DE THÈSE :	MAZOUZI Saïd	PROF.,	Univ. B. M. Annaba

Devant le jury

PRÉSIDENT :	CHIBI Ahmed Salah	PROF. ,	Univ. B. M. Annaba
EXAMINATEUR :	TATAR Nasser-Eddine	PROF.,	KFUPM, A. Saoudite
EXAMINATR ICE:	LASKRI Yamina	PROF.,	Univ. B. M. Annaba
EXAMINATEUR :	BOUSSETILA Nadjib	PROF.,	Univ. de Guelma

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volenté pour achever ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le professeur **Saïd Mazouzi**, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des rendez-vous et des délais de relecture des documents que je lui ai adressé. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail de recherche.

Je remercie également mon enseignant **Ahmed Salah Chibi**, professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur **Nasser Eddine Tatar**, professeur à l'université du King Fahd de l'Arabie Saoudite pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'évaluer ce travail.

Je remercie Madame **Yamina Laskri**, professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba d'avoir accepté d'examiner ma thèse et faire partie du jury.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **Nadjib Boussetila**, professeur à l'université de Guelma, d'avoir accepté de juger ce travail.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père, ma mère et ma femme.

Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

وجود ووحدانية حلول معادلة تفاضلية كسرية نبضية ذات زمن غير منته في فضـــاء بناخ

ملخــص

تظهر المعادلات التفاضلية الكسرية بشكل تلقائي في مختلف الميادين العلمية مثل الفيزياء، الكيمياء الكهربائية، علوم الهندسة، الطب، نظرية التحكم، إلخ. الفعالية الكبيرة لهذا النوع من المعادلات في نمذجة العديد من الظواهر الطبيعية والفيزيائية شجعت الكثير من الباحثين لدراسة جوانبها الكمية والنوعية.

الهدف من هذه الأطروحة هو المساهمة في تطوير مجال دراسة وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية الكسرية من خلال دراسة نوعين من هذه المعادلات في فضاءات بناخ وذلك باستعمال تقنيات النقطة الصامدة.

سنتطرق في البداية إلى دراسة معادلة تفاضلية كسرية شبه خطية خاضعة لشروط ابتدائية غير محلية حيث نعرض بعض النتائج المتعلقة بوجود ووحدانية حلولها وكذا ارتباط هذه الحلول بالشروط الابتدائية.

بعد ذلك سنعالج مسألة وجود حل معادلة تفاضلية ذات رتب كسرية متعددة خاضعة لشروط نبضية، حيث نثبت وجود حل شامل للمعادلة باستعمال طريقة النقطة الصامدة مع الاستعانة بعملية استمرارية معينة. نرفق بالنتائج المحصل عليها أمثلة توضيحية لتبرير صحتها.

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري، شروط نبضية، نظريات النقطة الصامدة، شروط غير محلية، وجود شامل، مسألة ذات قيم ابتدائية.

Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive de temps infini dans un espace de Banach

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de la théorie d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires en étudiant deux types de ces équations dans des espaces de Banach. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques du point fixe. Nous étudions d'abord une équation différentielle fractionnaire quasi-linéaire de type neutre présentée sous forme d'un problème de Cauchy avec condition initiale non locale. Nous présentons alors quelques résultats d'existence et d'unicité ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport à la condition initiale. Ensuite nous nous intéressons à l'étude d'une équation différentielle d'ordres fractionnaires multiples soumise à des conditions impulsives. Nous établissons ainsi l'existence globale de la solution en utilisant la méthode du point fixe combinée avec un certain procéssus de continuation. Nous concluons les résultats obtenus par des exemples illustratifs.

Mots-clés : *Calcul fractionnaire, conditions impulsives, théorèmes de point fixe, conditions non locales, problème à valeur initiale, existence globale.*

Existence and uniqueness of a solution to an infinite time impulsive fractional differential equation in a Banach space

Abstract

The fractional differential equations (FDEs) appear as a natural description of observed evolution phenomena in various scientific areas such as physics, engineering, medicine, electrochemistry, control theory, etc. The efficiency of these equations in the modeling of many real-world problems motivated a lot of researchers to investigate their quantitative and qualitative aspects.

The aim of this thesis is to contribute to the development of the study of existence and uniqueness of solutions to fractional differential equations where we investigate two types of such equations in Banach spaces. The derived results are based on some fixed point theorems. First, we are concerned with existence, uniqueness and stability of the solution of some neutral quasi-linear fractional differential equation presented in the form of a Cauchy problem subjected to a nonlocal initial condition. Next, we establish the global existence of the solution to a certain fractional differential equation with multi-orders subjected to impulsive conditions in a finite dimensional Banach space. Illustrative examples are also presented.

Keywords : *Fractional calculus, impulsive conditions, fixed point theorems, non local condition, initial value problem, global existence.*

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire connait à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliqueés. En fait, il étend les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordres entiers à des ordres fractionnaires, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$ soit :

$$(\mathscr{D}^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}}$$

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ces origines remontaient à la fin du $17^{ième}$ siècle, partant de la réponse de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du $20^{ème}$ siècle où de nombreuses applications ont été développées utilisant ce concept. Un exposé historique détaillé est donné en introduction de [58] ; de plus, cet ouvrage est sans doute l'un des premiers à rassembler des résultats épars.

Le calcul fractionnaire a été intensivement développé depuis la première conférence sur ce domaine en 1974 [61]. Depuis, il a gagné une popularité et une considération importante dû principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus [10, 11, 25, 27, 44, 45, 49, 51]. Donc, il est très important d'établir une théorie claire et nette pour l'étude et l'analyse des opérateurs et systèmes d'ordres fractionnaires.

Tout d'abord, plusieurs mathématiciens ont apporté des contributions importantes jusqu'à la moitié du dernier siècle : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823 – 1826), H. Holmgren (1865 – 67), A.K. Grünwald (1867 – 1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892 – 1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1917 – 1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924 – 1936), A. Zygmund (1935 – 1945), E.R. Love (1938 – 1996), A. Erdélyi (1939 – 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Ces développements mathématiques obtenus ont été très différents de ceux utilisés dans le calcul ordinaire. A cette époque, Il n'y avait presque pas d'applications du calcul fractionnaire. Depuis longtemps, il a été considéré par certains comme un domaine abstrait ne contenant que des manipulations mathématiques avec peu ou pas d'utilité. Il y a presque 30 ans, ce paradigme a commencé à se passer des mathématiques pures aux applications dans différents domaines. Les opérateurs et les systèmes d'ordres fractionnaires ont été appliqués dans presque tous les domaines de la science. Les divers domaines où le calcul fractionnaire a fait un impact profond comprend la viscoélasticité et la rhéologie, le génie électrique, l'électrochimie, la biologie, la biophysique et le génie biologique, le traitement du signal et d'image, la mécanique, la mécatronique, la physique, et la théorie de la commande. Bien que certaines questions mathématiques restent non résolues, beaucoup de difficultés ont été surmontées, et la plupart des problèmes mathématiques clés documentés dans le domaine ont été résolus à un point où plusieurs outils mathématiques sont les mêmes pour les deux calculs, régulier et fractionnaire. Les ouvrages déjà cités précédemment ont été très utiles dans l'introduction du calcul fractionnaire aux chercheurs des différentes communautés scientifiques. En plus, on peut compter plusieurs travaux fondamentaux [28, 29, 34, 39, 60, 59, 66], qui fournissent une bonne compréhension des opérateurs et des systèmes d'ordres fractionnaires.

D'autre part, les équations différentielles impulsives apparaient comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. La majorité des processus dans les sciences appliquées sont représentés par des équations différentielles. Cependant, la situation est différente dans certains phénomènes physiques subisant des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques (battements du coeur, flux du sang,...), la dynamique des populations, les disastres naturels, etc. Ces changements sont souvent de très courtes durées et sont donc produits instantanément sous forme d'impulsions. La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des formes qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du phénomène ainsi que les changements instantanés. De tels modèles sont dits "impulsifs" ; ils sont évolutifs de processus continus régis par des équations différentielles combinées avec des équations aux différences représentant l'effet impulsif subi.

Présentation de la thèse

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'étude de deux classes d'équations différentielles d'ordres fractionnaires, elle est organisée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons des notions préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Ce chapitre est partagé en trois sections. La première section présente une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordres fractionnaires y sont répertoriés. Dans la deuxième section nous traitons des systèmes impulsifs en présentant un exemple concret d'une application de tels systèmes en médecine. Enfin nous rapelons les différents théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

L'objet du deuxième chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour le problème différentiel fractionnaire soumis à une condition non-locale suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{\alpha}(y(t)+\sigma(t,y(t))) = A(t,y(t))y(t)+f(t,y(t)),\ t\in J=[0,\infty), \\ y(0)+g(y)=y_0, \end{cases}$$

Nous commençons d'abord par établir une équivalence entre ce problème et une certaine équation intégrale. Ensuite, nous présentons dans la deuxième section notre premier résultat d'existence en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. La validité de ce résultat sera illustrée par un exemple adéquat. Un deuxième résultat d'existence sera présenté dans la dernière section. Il s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité obtenu à l'aide du principe de contraction de Banach. Nous montrons par la suite que cette solution dépend continûment de la donnée initiale du problème. Ce résultat est également illustré par un exemple concret.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème fractionnaire impulsif semi-linéaire d'ordres multiples suivant

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} y(t) = A(t)y(t)+f(t,y(t)),\ t\in J_k,\ k=0,1,..., \\ y(0)=y_0\in X, \\ y(t_k^+)=y(t_k^-)+I_k(y(t_k^-)),\quad k\geq 0, \end{cases} \tag{P}$$

Après la présentation, à l'aide d'un exemple illustratif, de la notion d'un problème fractionnaire impulsif d'ordres multiples, nous abordons la question d'existence globale de la solution du problème (P). Nous commençons par établir une équivalence entre ce problème et une équation intégrale. Ensuite, nous prouvons l'existence de la solution en passant par deux étapes :

• Dans la première, nous montrons l'existence de la solution sur un intervalle borné à l'aide du théorème du point fixe de Schauder.

• Dans la deuxième, nous utilisons un procéssus de continuation pour étendre le résultat d'existence à la demi droite réelle positive.

Nous terminons ce chapitre par un exemple illustratif.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés et suggère les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

Notations

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

$L_p[a,b]$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1,+\infty)$ intégrables sur $[a,b]$.

$L_\infty[a,b]$: espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur $[a,b]$.

$C([a,b],X)$: espace des fonctions continues sur [a,b] à valeurs dans un espace de Banach X.

$AC([a,b])$ ou $AC^1([a,b])$: espace des fonctions absolûment continues sur $[a,b]$.

$AC^n([a,b])$: espace des fonctions $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $y^{(n-1)} \in AC^1([a,b])$ et $y^{(k)} \in C([a,b])$, $k = 1,\dots,n-1$.

$\Gamma(.)$: la fonction Gamma.

$\mathbf{B}(.,.)$: la fonction Bêta.

$I_a^\alpha y$: intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

$\mathscr{D}_a^\alpha y$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville dordre $\alpha > 0$.

${}^C\mathscr{D}_a^\alpha y$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo dordre $\alpha > 0$.

$\mathscr{C}_\alpha$: espace des fonctions $y \in C([a,b],X)$ telles que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{1+t^{\alpha+1}} = 0$.

$\mathscr{PC}([a,b],X)$: espace des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace de Banach X.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit, il est partagé en trois sections. La première section comporte un bref rappel sur les éléments de base de la théorie du calcul fractionnaire ainsi que quelques exemples d'applications de cette théorie dans certains domaines scientifiques. La deuxième section est consacrée à la présentation de la notion de systèmes impulsifs. On conclut le chapitre par une section réservée aux différents théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

1.1 Calcul fractionnaire

Le concept du calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire. Les dérivées d'ordres non entiers sont à présent largement appliquées dans de nombreux domaines, par exemple, en probabilité, viscoélasticité, électronique, économie, mécanique et en biologie, etc. Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommes et des caoutchoucs. En bref, toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations antérieures notamment à caractère viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement.

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions.

Dans ce chapitre, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville et de Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions.

1.1.1 Espaces L^p

Soit $[a,b]$ $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On note par $L^p[a,b]$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance p-intégrables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$:*

$$L^p([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C};\ f \ \text{ mesurable, et } \|f\|_{L^p} < \infty \right\},$$

avec

$$\|f\|_{L^p([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

L'espace $L^p[a,b]$ muni de la norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach.

Si $p = 2$, alors $L^2([a,b])$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables de carré intégrable sur $[a,b]$.

Le produit scalaire sur $L^2[a,b]$ est défini pour toutes $f, g \in L^2([a,b])$ par

$$(f,\ g)_{L^2([a,b])} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

L'espace $L^2([a,b])$, muni par la norme

$$\|f\|_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

est un espace de Hilbert.

1.1.2 Fonctions absolûment continues

Soit maintenant $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini.

Définition 1.1.2 *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolûment continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables $i.e$:*

$$f \in AC([a,b]) \iff \exists \varphi \in L^1([a,b]) \ telle\ que\ f = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Ainsi, toute fonction f absolûment continue possède une dérivée sommable $f' = \varphi$, presque partout sur $[a,b]$, et donc $c = f(a)$.

Définition 1.1.3 *On note par $AC^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1,2,3...\}$, l'espace des fonctions f définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $n-1$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$ $i.e.$*

$$AC^n([a,b]) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \ f^{(k)} \in C([a,b]), \ k = 0...n-1, \ f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

Remarque 1.1.1 *On a $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$*

Une caratérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1.1 *Une fonction $f \in AC^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

1.1.3 Fonctions Gamma et Bêta

Dans ce paragraphe nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées ultérieurement. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Définition 1.1.4 *La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathscr{R}e(z) > 0$, on définit la fonction Gamma par*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.1}$$

En intégrant par parties dans (1.1), on montre que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathscr{R}e(z) > 0. \tag{1.2}$$

La propriété (1.2) permet d'établir que

$$\Gamma(n+1) = n!, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fonction Gamma peut être représentée par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}, \quad \mathscr{R}e(z) > 0.$$

Définition 1.1.5 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et w par*

$$\boldsymbol{B}(z,\ w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad \mathscr{R}e(z) > 0, \mathscr{R}e(w) > 0. \tag{1.3}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\mathbf{B}(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \mathscr{R}e(z) > 0, \mathscr{R}e(w) > 0. \tag{1.4}$$

Il s'ensuit de (1.4) que

$$\mathbf{B}(z,w) = \mathbf{B}(w,z), \quad \mathscr{R}e(z) > 0, \mathscr{R}e(w) > 0.$$

1.1.4 Intégrale et dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

Selon l'approche de Riemann-Liouville sur le calcul fractionnaire, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre α, $(\alpha > 0)$ généralise la célèbre formule [1] d'intégrales répétées n-fois

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \ldots \int_a^{s_{n-1}} f(s_n)ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds, \qquad n \in \mathbb{N}^*,\end{aligned} \tag{1.5}$$

qui réduit le calcul de la $n^{ème}$ primitive d'une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ à une seule intégrale de type convolution.

Notons par $\mathscr{D}^n$, $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur de dérivation d'ordre n, alors on a

$$\mathscr{D}^n I_a^n = I, \qquad I_a^n \mathscr{D}^n \neq I, \tag{1.6}$$

où I est l'opérateur d'identité.

Définition 1.1.6 *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in L^1[a,b]$ est donnée par*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t > a. \tag{1.7}$$

Définition 1.1.7 *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est donnée par*

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) &= \mathscr{D}^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, \quad t > a,\end{aligned} \tag{1.8}$$

où $n = [\alpha]+1$, et $[\alpha]$ est la partie entière de α.

1. Cette formule est généralement attribuée à Cauchy.

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$(\mathscr{D}_a^0 f)(t) = I_a^0 f(t) = f(t).$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$(\mathscr{D}_a^n f)(t) = f^{(n)}(t).$$

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$(\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad t > a.$$

Remarque 1.1.2 *La définition de la dérivation d'ordre fractionnaire est basée sur celle d'une intégration d'ordre fractionnaire, une dérivation d'ordre fractionnaire revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction nécessite la connaissance de $f(t)$ sur tout l'intervalle $]a, t[$, alors que dans le cas entier, seule la connaissance locale de f autour de t est nécessaire. Cette propriété permet d'interpréter les systèmes d'ordres fractionnaires comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte .*

Exemple 1.1.1 *Soient $\alpha > 0$, $\gamma > -1$, et $f(t) = (t-a)^\gamma$, alors*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} (t-a)^{\gamma+\alpha}, \qquad \alpha > 0,\ \gamma > -1.$$
$$(\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha}, \qquad \alpha > 0,\ \gamma > -1.$$

En effet,

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (t-a)^\gamma ds. \tag{1.9}$$

Effectuant le changement de variable

$$t = a + \theta(t-a), \quad 0 \le \theta \le 1, \tag{1.10}$$

alors, (1.9) devient

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{(t-a)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \theta^\gamma (1-\theta)^{\alpha-1} d\theta$$

En utilisant (1.3) et la propriété (1.4) on arrive à

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(t) &= \frac{\boldsymbol{B}(\gamma+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\gamma} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}(t-a)^{\gamma+\alpha}.\end{aligned}$$

En particulier, si $\gamma = 0$ *et* $\alpha > 0$, *alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante est en général non nulle. En effet, on a*

$$(\mathscr{D}_a^\alpha C)(t) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Il est aisé d'établir le résultat suivant :

Proposition 1.1.1 *Soient* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$, *alors*

$$(\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) = 0 \iff f(t) = \sum_{j=1}^n c_j (t-a)^{\alpha-j}, \forall c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$(\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) = 0 \iff f(t) = c(t-a)^{\alpha-1}, \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Enonçons maintenant quelques propriétés des opérateurs I_a^α et $\mathscr{D}_a^\alpha$.

Lemme 1.1.2 *[40] L'opérateur d'intégration fractionnaire* I_a^α, $\alpha > 0$ *est linéaire et borné de l'espace* $L^p[a,b]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *dans lui même, i.e* $\exists k > 0$ *tel que :*

$$\|I_a^\alpha f\|_p \leq k \|f\|_p \, \forall f \in L^p[a,b] \text{ , où } k = \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha|\Gamma(\alpha)|}.$$

Le résultat suivant caractérise les conditions nécéssaires pour l'existence de la dérivée fractionnaire $\mathscr{D}_a^\alpha$.

Lemme 1.1.3 *[40] Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire $\mathscr{D}_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a,b]$ et elle est representée sous la forme*

$$(\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds.$$

Une propriété importante de l'opérateur d'intégration fractionnaire I_a^α, dite propriété du semi-groupe, est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1.4 *[53] Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, alors l'équation*

$$(I_a^\alpha I_a^\beta f)(t) = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t), \tag{1.11}$$

est satisfaite presque partout sur $[a,b]$, pour toute $f \in L^p[a,b], 1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Soit $f \in L^p[a,b]$, alors on a grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f)(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}dt \int_a^s (s-\xi)^{\beta-1} f(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi)d\xi \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\xi)^{\beta-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi)d\xi \\
&= (I_a^{\alpha+\beta} f)(t).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Une des propriétés importantes qui lie la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec l'intégrale fractionnaire est la suivante :

Lemme 1.1.5 *Pour $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$ on a*

$$(\mathscr{D}_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t), \qquad p.p \ \ sur[a,b] \tag{1.12}$$

La propriété (1.12) signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

Démonstration. D'après (1.8) et la propriété (1.11), on a pour $n = [\alpha] + 1$

$$(\mathscr{D}_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = \mathscr{D}^n I^{n-\alpha} I^\alpha f(t) = \mathscr{D}^n I^n f(t) = f(t), \quad p.p \ sur \ [a, b],$$

ce qui établit le résultat ■

1.1.5 Dérivée fractionnaire de Caputo

Les dérivées de Riemann-Liouville ont certains inconvénients lorsque on essaie de modéliser des phénomènes du monde réel. Les problèmes étudiés exigent une définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables incluant $y(0)$, $y'(0)$, etc. Ces défaillances ont conduit vers la fin des années soixante, à une définition alternative des dérivées fractionnaires qui satisfait ces demandes ; elle a été introduite par Caputo [23]. En fait, Caputo et Mainardi [24] ont utilisé cette définition dans leurs travaux sur la viscoélasticité.

Dans cette section on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Soit $[a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, et soit I_a^α et $\mathscr{D}_a^\alpha$ les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires donnés par (1.7) et (1.8) dans la section précédente.

Définition 1.1.8 *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Caputo d'une fonction f définie sur $[a, b]$ est donnée par*

$$({}^C\mathscr{D}_a^\alpha) f(t) = \mathscr{D}_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right), \tag{1.13}$$

où

$$n = [\alpha] + 1, \ si \ \alpha \notin \mathbb{N}, \ et \ n = \alpha \ si \ \alpha \in \mathbb{N}^*. \tag{1.14}$$

Si $\alpha = 0$, alors

$$({}^C\mathscr{D}_a^0)f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (1.13) prend la forme

$$({}^C\mathscr{D}_a^\alpha)f(t) = \mathscr{D}_a^\alpha\left([f(t) - f(a)]\right).$$

Donc, si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et f est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires de Caputo (1.13), et celle de Riemann-Liouville (1.8) existent, alors elles sont liées l'une à l'autre par la relation

$$({}^C\mathscr{D}_a^\alpha)f(t) = (\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\alpha]+1). \tag{1.15}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, on a

$$({}^C\mathscr{D}_a^\alpha)f(t) = (\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. \tag{1.16}$$

D'après la relation (1.15), si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors la dérivée de Caputo (1.13) coïncide avec la dérivée de Riemann-Liouville (1.8) si la fonction f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'a l'ordre $n - 1$ $(n = [\alpha]+1)$ s'annulent au point a, $i.e.$

$$({}^C\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) = (\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) \iff f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et la dérivée usuelle $f^{(n)}(t)$ existe, alors $({}^C\mathscr{D}_a^\alpha)f(t)$ coïncide avec $f^{(n)}(t)$ $i.e$

$$({}^C\mathscr{D}_a^\alpha)f(t) = f^{(n)}(t). \tag{1.17}$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.13) est définie pour les fonctions $f(t)$ pour lesquelles la dérivée de Riemann-Louville (1.8) existe, en particulier, elle est définie pour les fonctions $f(t) \in AC^n[a,b]$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 *[40] Soit $\alpha > 0$ et soit n donné par (1.14). Si $f \in AC^n[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo $({}^C\mathscr{D}_a^\alpha f)(t)$ existe presque partout sur $[a,b]$.*

(i) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, *alors* ${}^{C}\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t)$ *est donnée par*

$$({}^{C}\mathscr{D}_a^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\,ds, \tag{1.18}$$
$$= I_a^{n-\alpha} \mathscr{D}^n f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ *et* $f \in AC[a,b]$, *alors*

$$({}^{C}\mathscr{D}_a^{\alpha}) f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)\,ds \tag{1.19}$$
$$= I_a^{1-\alpha} f'(t).$$

(ii) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors* $({}^{C}\mathscr{D}_a^{n}) f(t) = f^{(n)}(t)$.

Démonstration. D'après la définition, on a

$$\begin{aligned}({}^{C}\mathscr{D}_a^{\alpha}) f(t) &= \mathscr{D}_a^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)\\ &= \mathscr{D}^n I_a^{n-\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right).\end{aligned}$$

Posons

$$\mathscr{I}(t) = I_a^{n-\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right).$$

D'après (1.7), on a

$$\mathscr{I}(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right) ds.$$

Intègrant par parties, on aura

$$\begin{aligned}\mathscr{I}(t) =& \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right) ds\\ =& -\frac{(t-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right)\Bigg|_{s=a}^{s=t}\\ &+ \frac{(t-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} \mathscr{D}\left(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right) ds\\ =& I_a^{n-\alpha+1} \mathscr{D}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right).\end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, on trouve

$$\begin{aligned}\mathscr{I}(t) &= I_a^{n-\alpha+n}\mathscr{D}^n\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)\\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha}\mathscr{D}^n\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right).\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent

$$\mathscr{I}(t) = I_a^n I_a^{n-\alpha}\mathscr{D}^n f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}({}^C\mathscr{D}_a^\alpha)f(t) &= \mathscr{D}^n\mathscr{I}(t)\\ &= \mathscr{D}^n I_a^n I_a^{n-\alpha}\mathscr{D}^n f(t).\\ &= I_a^{n-\alpha}\mathscr{D}^n f(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 1.1.2 *[40] Soient $\alpha > 0$, n donné par (1.14) et $f \in C^n[a,b]$. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo $({}^C\mathscr{D}_a^\alpha)f$ est continue sur $[a,b]$.*

(i) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $({}^C\mathscr{D}_a^\alpha f)(t)$ est donnée par (1.18). En particulier, elle prend la forme (1.19) pour $0 < \alpha < 1$.
(ii) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors ${}^C\mathscr{D}_a^n f(t) = f^{(n)}(t)$.

Exemple 1.1.2 *Soient $0 < \alpha < 1$ et $f(t) = (t-a)^\gamma$, $\gamma > -1$. Alors*

$$({}^C\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(t-a)^{\gamma-\alpha}. \tag{1.20}$$

En effet,

$$\begin{aligned}({}^C\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) &= I_a^{1-\alpha}f'(t)\\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}(s-a)^{\gamma-1}ds.\end{aligned}$$

En efféctuant le changement de variable (1.10), on aura

$$\begin{aligned}({}^C\mathscr{D}_a^\alpha f)(t) &= \tfrac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{\gamma-\alpha}\int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{-\alpha}ds \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{\gamma-\alpha}\boldsymbol{B}(\gamma,1-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(t-a)^{\gamma-\alpha}.\end{aligned}$$

En particulier, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle :

$$ {}^C\mathscr{D}_a^\alpha C = 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^C\mathscr{D}_a^\alpha$, comme celle de Riemann-Liouville, représente l'opération inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire I_a^α.

Lemme 1.1.6 *Soient* $\alpha > 0$ *et* $f \in L^\infty[a,b]$, *alors*

$$({}^C\mathscr{D}_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Lemme 1.1.7 *Soit* $\alpha > 0$, *et* $f \in L^\infty[a,b]$ *alors*

$$I^{\alpha C}\mathscr{D}^\alpha f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour certains contsantes $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,...,n-1,\ m = [\alpha]+1$.

On a défini la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction f sur un intervalle fini $[a,b]$ par (1.13), et on a vu dans le Théorème 1.1.1 qu'elle peut être représentée par (1.17) et (1.18) à condition que $f \in AC^n[a,b]$. En fait, la formule (1.18) peut être utilisée pour définir la dérivée fractionnaire de Caputo sur le demi axe $\mathbb{R}^+$. En effet, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction $f \in AC^n[0,\infty)$ sur le demi axe $\mathbb{R}^+$ est donnée par

$$({}^C\mathscr{D}_{0^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, \quad t > 0.$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC^1[0,\infty)$, alors

$$({}^C\mathscr{D}_{0^+}^\alpha) f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)ds, \ \ t > 0.$$

1.1.6 Applications des systèmes fractionnaires

Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus dans les différents domaines de la recherche. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes est leurs applications en sciences fondamentales et appliquées. On peut noter que pour la majeure partie des domaines présentés ci dessous, les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire. Mentionnons les ouvrages [39, 60] qui regroupent diverses applications du calcul fractionnaire.

En Automatique :
En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (commande robuste d'ordre non entier) était proposé par Oustaloup [51]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordres fractionnaires, ce régulateur permet d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquence donnée. La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour ($1^{ère}$, $2^{ème}$ et $3^{ème}$ générations). Et depuis, La commande d'ordres fractionnaires a attiré l'attention de nombreux chercheurs. En 1999, Podlubny [54] a proposé le régulateur $PI^{\alpha}D^{\beta}$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre α et une dérivation fractionnaire d'ordre β , élargissant ainsi le champ d'applications du calcul fractionnaire à la théorie de la commande.

En Physique :
Une des applications les plus remarquables du calcul fractionnaire en physique était dans le contexte de la mécanique classique. Riewe [55] a montré que le Lagrangien contenant des dérivées temporelles d'ordres fractionnaires conduit à une équation du mouvement avec des forces nonconservatives telles que les frottements. Ce résultat est remarquable du fait que les forces de frottement et les forces nonconservatives sont essentielles dans le traitement variationnel macroscopique habituel, et par conséquent, dans les méthodes les plus avancées de la mécanique classique. Riewe a généralisé le calcul des variations habituel au Lagrangien qui dépend des dérivées fractionnaires [56] afin de traiter avec les forces nonconservatives habituelles. D'autre part, plusieurs approches ont été développées pour gé-

néraliser le principe de moindre action et l'équation d'Euler-Lagrange au cas des dérivées fractionnaires [3, 4].

En Mécanique des milieux continus :

La déformation des milieux continus (solides ou liquides) est souvent décrite à l'aide de deux tenseurs, celui des déformations noté ε_{ij} et celui des contraintes σ_{ij}. Certains matériaux, comme les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement intermédiaire entre caractères visqueux et élastiques, qualifié de visco-élastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs :

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij}(t) + \eta\mathscr{D}^{\alpha}\varepsilon_{ij}(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Cette loi est justifiée par Bagley et Torvik dans [10, 11] (pour $\alpha = \frac{1}{2}$). Dans [52], l'introduction de dérivées fractionnaires dans le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant t va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroît comme $t^{-(1+\alpha)}$, elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre α . Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes.

En Acoustique :

Pour certains instruments de musique à vent les pertes visco-thermiques peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionnaires temporelles [38].

1.2 Systèmes impulsifs

Une classe particulière de systèmes hybrides sont les systèmes impulsifs, qui présentent une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle ordinaire (EDO) et des sauts instantanés de l'état ou impulsions. Les systèmes différentiels impulsifs ont été observés naturellement dans plusieurs modèles et phénomèmes. Par exemple, dans le modèle de choc Bautin, d'un mécanisme de l'horloge, dans l'étude de la distribution de médicaments dans le corps humain, dans le contrôle des modèles de Lotka-Volterra, etc.

La théorie des équations différentielles impulsives à été initiée par A. Mishkis et V. D. Mil'man en 1960 [46]. Le développement de cette théorie était relativement lent à cause de la difficulté de manipulation de telles équations, V. Lakshmikantham, L. Byszewski, D. Bainov et S. Simeonov ainsi que d'aures chercheurs ont participé à l'enrichissement et la popularisation de la théorie des équations différentielles impulsives à partir de 1991 [6, 7, 8, 9, 31, 57].

1.2.1 Description des systèmes impulsifs

Un système impulsif est généralement défini par la donnée

i. d'une équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x), \tag{1.22}$$

avec $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $\mathbb{R}^n$ est l'espace euclidien de dimension n et $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs.

ii. d'applications : $(t, x) \to M(t, x)$ et $(t, x) \to N(t, x)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans l'ensemble des parties de Ω.

iii. d'une famille d'applications $A(t, x) : M(t, x) \to N(t, x)$.

On note $x(t, t_0, x_0)$ la solution du système $x'(t) = f(t, x)$ de condition initiale (t_0, x_0). Une solution du système impulsif ci-dessus est une fonction de $\mathbb{R}^+ \to \Omega$, notée $x_I(t, t_0, x_0)$ telle que $x_I(t_0, t_0, x_0) = x_0$ et qui vérifie $x_I'(t, t_0, x_0) = f(t, x_I(t, t_0, x_0))$ tant que le point $x(t, t_0, x_0)$ n'appartient pas à l'ensemble $M(t, x(t, t_0, x_0))$. Si la trajectoire $x(t, t_0, x_0)$ intersecte l'ensemble

$M(t,x)$ au temps $t = t_1$, l'application $A(t_1, P_{t_1})$ transfère le point $P_{t_1} = x(t_1, t_0, x_0)$ (appartenant à l'ensemble $M(t_1, P_{t_1})$) en un point $P_{t_1^+} = A(t_1, P_{t_1})P_{t_1}$ de l'ensemble $N(t_1, P_{t_1})$. Pour les temps $t > t_1, x_I(t, t_0, x_0)$ est solution de $x'(t) = f(t,x)$ de condition initiale $(t_1,\ P_{t_1^+})$. Nous avons donc $x_I(t, t_0, x_0) = x(t, t_1, P_{t_1^+})$ pour $t > t_1$ et ceci tant que $x_I(t, t_0, x_0)$ n'appartient pas à l'ensemble $M(t, x_I(t, t_0, x_0))$. S'il existe un temps $t_2 > t_1$, tel que $P_{t_2} \in M(t_2, P_{t_2}))$, le point P_{t_2} sera transféré en $P_{t_2^+} \in N(t_2, P_{t_2})$ par l'application A. Ainsi, le processus d'évolution continue à avancer tant que la solution du système (1.22) existe.

Remarque 1.2.1 *Soit $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ les instants pendant lesquels P_t rencontre l'ensemble $M(t,x)$. Ces instants sont dits instants d'impulsions. Il pourrait arriver que $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = T < +\infty$.*

Ce cadre général étant posé, nous allons décrire ci-dessous deux types particuliers de systèmes impulsifs.

■ **Systèmes avec temps d'impulsions fixés :** Pour ce premier type de systèmes, on se donne une suite strictement croissante $t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$ tendant vers l'infini, d'instants d'impulsions. Les ensembles $M(t,x)$ et $N(t,x)$ sont

$$\begin{cases} M(t,x) \ = \ N(t,x) \ = \phi\,, \ \text{si} \ \ t \neq t_k, \ \ k = 1,2...,\\ M(t,x) \ = \ N(t,x) \ = \Omega\,, \ \text{si} \ \ t = t_k, \ \ k = 1,2..., \end{cases}$$

Les applications $A(t,x)$ ne sont définies alors que pour les instants $t = t_k$ par la donnée d'une suite d'applications $(A_k)_{k\geq 0}$, que l'on écrit

$$\begin{aligned} A_k \quad : \quad & \Omega \to \Omega \\ & x \to A_k(x) = x + I_k(x), \end{aligned}$$

avec $I_k : \Omega \to \Omega$. Ainsi, avec ce choix de $M,\ N$ et A, nous pouvons décrire simplement un système différentiel impulsif dont les impulsions se produisent à des instants fixés par le modèle mathématique suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \neq t_k, \ \ k = 1,2...,\\ \Delta x(t) = I_k(x(t)), \qquad t = t_k, \ \ k = 1,2...,\\ x(t_0^+) = x_0, \end{cases}$$

où $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$, d'où on tire $x(t_k^+) = x(t_k) + I_k(x(t_k))$.

■ **Systèmes avec temps d'impulsions variables :** Ces systèmes constituent une généralisation des systèmes à instants d'impulsions fixés. Pour ce type de systèmes impulsifs, on se donne une infinité dénombrable de fonctions $\tau_k : \Omega \to \mathbb{R}^+$ telles que $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ et $\lim_{k\to+\infty} \tau_k(x) = +\infty$ pour tout $x \in \Omega$.

Les ensembles $M(t,x)$ et $N(t,x)$ sont

$$\begin{cases} M(t,x) \;=\; N(t,x) \;=\phi\,, \text{ si } \; t \neq \tau_k(x), \;\; k = 1,2..., \\ M(t,x) \;=\; N(t,x) \;=\Omega\,, \text{ si } \; t = \tau_k(x), \;\; k = 1,2..., \end{cases}$$

et les applications $A(t,x)$ ne sont définies que pour les instants $t = \tau_k(x)$. Ainsi un tel système est décrit par

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \quad t \neq \tau_k(x), \;\; k = 1,2..., \\ \Delta x(t) = I_k(x), \qquad t = \tau_k(x) \end{cases}$$

Comme les instants d'impulsions dépendent à travers l'état x de la solution, ce type de systèmes présente plus de difficultés que les systèmes à temps d'impulsions fixés.

1.2.2 Application des systèmes impulsifs

De nos jours, les systèmes impulsifs sont devenus de plus en plus importants dans certains processus réels et phénomènes étudiés en physique, en pathologie [42], en technologie chimique [26], en dynamique des populations [63, 64], en biotechnologie, surtout dans les réseaux de neurones biologiques [36] et en économie [32]. Ces dernières années, il y a eu un développement important dans la théorie des équations différentielles impulsives avec moments fixés, voir les ouvrages [9], [62] et [70]. Dans ce qui suit, nous allons présenter un exemple d'application de systèmes impulsifs en médicine.

Le système suivant représente un modèle mathématiques décrivant l'évolution d'une tumeur hétérogène, sous un traitement chimiothérapique périodique avec des médicaments à effets instantanés représentés par des impulsions.

$$\begin{cases} x' = r_1(x, y)x \\ y' = r_2(x, y)y \\ x(t_n^+) = \eta_n(D, x(t_n), y(t_n)) \\ y(t_n^+) = \theta_n(D, x(t_n), y(t_n)) \end{cases} \tag{1.23}$$

où

• D est la dose de médicament administré.

• x, y sont respectivement la biomasse des cellules sensibles et des cellules résistantes.

• $r_2(x, y)$ et $r_2(x, y)$ sont respectivement les taux de croissance des cellules sensibles et les cellules résistantes.

• Les valeurs $\eta_n(D, x(t_n), y(t_n))$ et $\theta_n(D, x(t_n), y(t_n))$ sont respectivement la biomasse des cellules sensibles et des cellules résistantes qui survivent après la $n^{iéme}$ dose D du médicament administré à l'instant t_n.

• La suite (t_n) est strictement croissante.

Le système (1.23) représente le cas où plusieurs médicaments sont administrés un par un ; dans l'ordre, avec une certaine période T : le médicament 1 est administré à l'instant t_1, le médicament 2 à l'instant t_2 et ainsi de suite jusqu'au dernier médicament n.

Si on considère le cas de deux médicaments alors la période est $T = t_2$.

La tumeur est constituée de cellules sensibles et de cellules résistantes, l'évolution de leur biomasse est égale à la biomasse des cellules sensibles $x(t_1)$ et la biomasse des cellules résistantes $y(t_1)$.

Quand une dose D de médicament A est administrée à l'instant t la biomasse de la tumeur devient

$$x(t_1^+) + y(t_1^+) = \eta_1(D, x(t_1), y(t_1)) + \theta_1(D, x(t_1), y(t_1))$$

Le médicament élimine seulement une petite fraction de la biomasse de cellules résistantes. Pour réduire une biomasse significative de cellules résistantes, on administre une dose D du médicament B au moment $t = t_2$; $t_2 > t_1$ et on reprend périodiquement le même processus par le médicament A jusqu'a l'éradication de la tumeur.

1.2.3 L'espace des fonctions continues par morceaux

Les solutions d'une équation différentielle impulsive sont en général des fonctions continues par morceaux. Alors l'espace fonctionnel approprié pour de telles solutions est l'espace des fonctions continues par morceaux.

Soient

$$J_0 = [0, t_1]\,;\ J_k = (t_k, t_{k+1}],\ k = 1, \ldots m, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Soit y une fonction continue. On note par $y(t_k^-)$ et $y(t_k^+)$ les limites à gauche et à droite de y en $t = t_k$. Alors pour tout $T \geq 1 + [t_1]$, on introduit l'espace

$$\mathscr{PC}([0,T], X) = \left\{ \begin{array}{c} y : [0,T] \to X : y \in C(J_k \cap [0,T], X),\ k = 1, \ldots, m \\ y(t_k^+) \text{et} y(t_k^-) \text{ existent et } y(t_k^-) = y(t_k),\ k = 1, \ldots, m \end{array} \right\}.$$

L'espace $\mathscr{PC}([0,T], X)$ muni de la norme

$$\|y\|_{\mathscr{PC}} = \sup_{t \in [0,T]} \|y(t)\|,$$

est un espace de Banach.

1.3 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.

Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 1.3.1 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que*

$$f(u) = u.$$

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe. Ce théorème prouvé en 1922 par Stefan Banach est basé essentiellement sur les notions d'application Lipschitzienne et d'application contractante.

Théorème 1.3.1 *(Principe de contraction de Banach)*
Soit E un espace métrique complet et soit $F : E \to E$ une application contractante, alors F possède un point fixe unique.

Le deuxième théorème de point fixe qu'on va énnoncer est celui de Schauder.

Théorème 1.3.2 *Soit C une partie convexe et fermée d'un espace de Banach E et soit $F : C \to C$ un opérateur continu et compact . Alors F possède au moins un point fixe.*

Enfin, nous rappelons le théorème d'Arzela-Ascoli de type $\mathscr{PC}$ introduit dans [68] pour caractériser les parties relativement compactes de l'espace $\mathscr{PC}$. Nous avons

Théorème 1.3.3 *Soit E un espace de Banach et $\mathscr{W}$ une partie de $\mathscr{PC}(J,E)$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) $\mathscr{W}$ est uniformément bornée,
(ii) $\mathscr{W}$ est équicontinue,
(iii) Les parties $\mathscr{W}(t) = \{u(t) : u \in \mathscr{W}, \ t \in J \setminus \{t_k\}\}$, $\mathscr{W}(t_k^+) = \left\{u(t_k^+) : u \in \mathscr{W}\right\}$,
$\mathscr{W}(t_k^-) = \left\{u(t_k^-) : u \in \mathscr{W}\right\}$ sont relativement compactes,
alors la partie $\mathscr{W}$ est relativment compacte.

Chapitre 2

Étude d'un problème différentiel fractionnaire dans un domaine non borné

Au cours des dernières années, la théorie des équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires a attiré l'attention de nombreux auteurs, et un nombre considérable de résultats ont été obtenus. Cependant, la majorité des travaux parus concernant l'étude de ces équations dans des espaces de Banach ont considéré l'existence et l'unicité de solutions dans l'intervalle fini $[0, T]$, et seulement peu de résultats dans la litterature mathématique ont traité le problème d'existence et d'unicité dans des domaines non bornés [5, 30, 41, 43, 65, 71].

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire sur un domaine non borné et avec des conditions initiales non locales. En outre, nous établissons deux résultats d'existence et d'unicité ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport à la donnée initiale.

Ce chapitre est structuré comme suit

Dans la première section, nous étudions l'existence globale de solutions pour une classe d'équations différentielles fractionnaires quasi-linéaires de type neutre présentées sous la forme d'un problème de Cauchy avec condition non locale. Tout d'abord, nous prouvons une équivalence entre le problème de Cauchy et une équation intégrale. Ensuite, en s'appuyant sur un critère de compacité approprié, nous établissons notre premier résultat d'existence en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Nous présentons enfin un exemple adéquat pour valider le résultat obtenu.

Dans la deuxième section nous présentons notre deuxième résultat qui s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité. Nous montrons, à l'aide du principe de contraction de Banach, que sous certaines hypothèses de type Lipschitz, nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution. Nous montrons aussi que dans ce cas la solution dépend continûment de la donnée initiale. Nous concluons cette section par un exemple illustratif.

2.1 Problème différentiel quasi-linéaire avec condition non locale

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence globale de la solution d'un problème différentiel fractionnaire soumis à une condition initiale non locale de la forme :

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}^{\alpha}_{0^+}(y(t)+\sigma(t,y(t))) = A(t,y(t))y(t)+f(t,y(t)),\ t>0, \\ y(0)+g(y)=y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

• ${}^C\mathscr{D}^{\alpha}_{0^+}$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha,\ 0<\alpha\le 1$ au sens de Caputo.

• $f,\ \sigma : J\times X \to X\ ,\ g : X\to X$ sont des fonctions données, où $J=[0,\infty)$.

• $(X,\|.\ \|)$ est un espace de Banach.

• $A(t,x) : J\times X \to \mathscr{B}(X)$ est un opérateur linéaire borné, $\mathscr{B}(X)$ étant l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés sur X.

La condition non locale est une condition donnée sur la solution en un nombre fini où infini d'instants. Celle ci est présentée sous forme de la relation $y(0)+g(y)=y_0$ liant $y(0)$ et d'autres valeurs de la solution. Par exemple

$$g(y)=\sum_{i=1}^{p} c_i y(\tau_i), \tag{2.2}$$

où $c_i,\ i = 1,2,...p$, sont des constantes données et $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_p$.

Byszewski [21] a utilisé la formule (2.2) pour décrire le phénomène de diffusion d'une petite quantité de gaz dans un tube transparent. Une autre forme de la condition non locale est donnée par

$$g(y) = \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i}{\varepsilon_i} \int_{t_i-\varepsilon_i}^{t_i} y(\tau)d\tau,$$

où $c_i,\ \varepsilon_i,\ \ i = 1,2,...p$, sont des constantes positives données telles que $0 < t_1 - \varepsilon_i$ et $0 < t_{i-1} < t_i - \varepsilon_i,\ i = 1,2,...p$.

La condition non locale [2, 18, 19, 22, 37, 69] jointe à l'équation principale - au lieu de la condition initiale classique - s'avère nécessaire pour bien modéliser et décrire mathématiquement, de la manière la plus proche de la réalité de nombreux phénomènes dans de multiples disciplines.

Considérons l'espace

$$\mathscr{C}_\alpha = \left\{ y \in C(J,X),\ \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{1+t^{\alpha+1}} = 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|y\|_{\mathscr{C}_\alpha} = \sup_{t\geq 0} \frac{\|y(t)\|}{1+t^{\alpha+1}}.$$

Alors $(\mathscr{C}_\alpha,\ \|.\|_{\mathscr{C}_\alpha})$ est un espace de Banach.

On a besoin de ce lemme introduit dans [41] (Lemme 4.2 dans le cas $\varphi(t) = t^2 + t^{1-\alpha}$).

Lemme 2.1.1 *Soit M un sous ensemble de $\mathscr{C}_\alpha$. Alors M est relativement compacte si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$(i) \left\{ \frac{y(t)}{1+t^{\alpha+1}},\ y \in M \right\}$ *est uniformément bornée.*

$(ii) \left\{ \frac{y(t)}{1+t^{\alpha+1}},\ y \in M \right\}$ *est équicontinue sur* $[0,+\infty)$.

$(iii) \forall \varepsilon > 0, \exists\ T > 0$ *tel que* $\forall\, y \in M$ *et* $t \geq T$: $\left\| \frac{y(t)}{1+t^{\alpha+1}} \right\| \leq \varepsilon.$

Introduisons maintenant la définition de la solution du problème (2.1).

Définition 2.1.1 *Une fonction $y \in \mathscr{C}_\alpha$ est dite solution du problème* (2.1) *si elle satisfait l'équation différentielle* ${}^C\mathscr{D}^{\alpha}_{0^+}(y(t)+\sigma(t,y(t))) = A(t,y(t))y(t)+f(t,y(t))$, *pour* $t \in (0,\infty)$, *ainsi que la condition non locale* $y(0)+g(y) = y_0$.

2.2 Premier résultat d'existence

Afin d'établir l'existence de la solution du problème (2.1) nous proposons les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_1$) Pour tout $(t,x) \in J \times X$, $A(t,x)$ est un opérateur linéaire borné, la fonction $(t,x) \to A(t,x)$ est continue et il existe deux fonctions continues, bornées et non négatives $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ définies sur J telles que

$$0 \leq \psi(s) \leq s, \quad s \geq 0,$$

et

$$\|A(t,x)\| \leq \frac{\varphi(t)}{1+t^{\alpha+1}}\psi\left(\frac{\|x\|}{1+t^{\alpha+1}}\right) \tag{2.3}$$

($\mathbf{H}_2$) La fonction $f : J \times X \to X$ est continue et il existe deux fonctions continues, bornées et non négatives $a(t)$, $b(t)$ définies sur J telles que

$$\left\|f(t,x)\right\| \leq \frac{a(t)}{1+t^{\alpha+1}}\|x\| + b(t), \quad t \geq 0,\ x \in X. \tag{2.4}$$

($\mathbf{H}_3$) La fonction $\sigma : J \times X \to X$ est continue et il existe une constante $\varsigma > 0$ telle que

$$\|\sigma(t,u)-\sigma(t,v)\| \leq \varsigma \|u-v\|, \quad u,\ v \in X, \tag{2.5}$$

et

$$\delta = \sup_{t\geq 0}\|\sigma(t,0)\| < \infty, \qquad \sigma_0 = \sigma(0,y(0))$$

($\mathbf{H}_4$) La fonction $g : X \to X$ est continue et il existe une constante $G > 0$ telle que

$$\left\|g(u)-g(v)\right\| \leq G\|u-v\|, \quad u,\ v \in X.$$

($\mathbf{H}_5$) Il existe $r > 0$ tel que

$$C_0(r)+C_1(r) < r, \tag{2.6}$$

où

$$C_0(r) = \|y_0\| + \|g(0)\| + \|\sigma_0\| + \delta + (G+\varsigma)r, \ \ C_1(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(\|\varphi\|_\infty r^2 + \|a\|_\infty r + \|b\|_\infty).$$

Notre premier résultat est le suivant :

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)-(\mathbf{H}_5)$ *le problème* (2.1) *possède au moins une solution y dans l'espace* $\mathscr{C}_\alpha$.

Pour démonter ce théorème nous allons utiliser la méthode du point fixe. Commençons d'abord par transformer le problème à valeur initiale (2.1) en une équation intégrale de Volterra (Lemme 2.2.1), ensuite on prouvera l'existence de la solution de l'équation intégrale ainsi obtenue à l'aide du théorème du point fixe de Schauder. On a

Lemme 2.2.1 *Une fonction* $y \in \mathscr{C}_\alpha$ *est solution du problème* (2.1) *si et seulement si elle satisfait l'équation intégrale de Volterra*

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \sigma_0 - g(y) - \sigma(t, y(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A(s, y(s)) y(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Démonstration. Supposons que y satisfait le problème (2.1), alors on a

$$^C\mathscr{D}^\alpha_{0^+}(y(t) + \sigma(t, y(t))) = A(t, y(t))y(t) + f(t, y(t)). \tag{2.8}$$

En appliquant l'opérateur de l'intégration fractionnaire $I^\alpha_{0^+}$ aux deux membres de l'équation ci-dessus nous obtenons

$$y(t) + \sigma(t, y(t)) + c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (A(t, y(t))y(t) + f(t, y(t))) ds. \tag{2.9}$$

Maintenant, en utilisant la condition initiale non locale $y(0) + g(y) = y_0$ on trouve

$$c_1 = -y(0) - \sigma_0.$$

Substituant dans (2.9) nous obtenons l'équation (2.7).

Inversement, si y est une solution de l'équation de Volterra (2.7), alors on peut écrire cette équation sous la forme

$$y(t)+\sigma(t,y(t)) = y_0+\sigma_0-g(y)+I_{0^+}^{\alpha}(A(s,y(s))y(s)+f(s,y(s)))$$

On applique l'opérateur différentiel ${}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{\alpha}$ aux deux membres de cette égalité, on se rend compte immédiatement que y est aussi une solution de l'équation différentielle (2.8).

D'autre part, il est simple de voir que y satisfait la condition initiale non locale

$$y(0)+g(y) = y_0.$$

Par conséquent, y est solution du problème (2.1). ■

En utilisant ce résultat nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 2.2.1.

Démonstration. Dans le but de démontrer l'existence de la solution de l'équation intégrale (2.7) on introduit le sous-ensemble

$$\mathscr{B}_r = \left\{ y\in\mathscr{C}_\alpha \;:\; \|y\|_{\mathscr{C}_\alpha} \le r \right\}.$$

r étant la constante introduite dans ($\mathbf{H}_5$). Il est clair que c'est une partie fermée et convexe de l'espace $\mathscr{C}_\alpha$ muni de la norme $\|.\|_{\mathscr{C}_\alpha}$. On définit sur $\mathscr{B}_r$ l'opérateur $\mathscr{F}$ par

$$(\mathscr{F}y)(t) = y_0+\sigma_0-g(y)-\sigma(t,y(t))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Phi(s,y(s))ds,$$

où $\Phi(s,y(s)) = A(s,y(s))+f(s,y(s))$. Alors l'équation intégrale (2.7) est réduite à

$$y=\mathscr{F}y,$$

et afin d'établir notre résultat d'existence, nous devons montrer que $\mathscr{F}$ possède un point fixe. Regardons de plus près les propriétés de l'opérateur $\mathscr{F}$.

D'abord notons que, pour tout $y \in \mathscr{B}_r$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{(\mathscr{F} y)(t)}{1+t^{\alpha+1}} \right\| &= \left\| \frac{y_0+\sigma_0-g(y)-\sigma(t,y(t))}{1+t^{\alpha+1}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \Phi(s,y(s))ds \right\| \\
&\le \frac{1}{1+t^{\alpha+1}} (\|y_0\| + \|\sigma_0\| + \|g(0)\| + \|\sigma(t,0)\| + \|g(y)-g(0)\| \\
&\quad + \|\sigma(t,y(t))-\sigma(t,0\|) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \|\Phi(s,y(s))\| \, ds, \\
&\le \frac{1}{1+t^{\alpha+1}} (\|y_0\| + \|\sigma_0\| + \|g(0)\| + \delta + G\|y\| + \varsigma \|y(t)\|) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} (\|A(s,y(s))\| \, \|y(s)\| + \|f(s,y(s))\|) ds.
\end{aligned}$$

Nous obtenons grâce aux hypothèses $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{H}_3)$ l'estimation suivante

$$\left\| \frac{(\mathscr{F} y)(t)}{1+t^{\alpha+1}} \right\| \le \frac{c_0(r)}{1+t^{\alpha+1}} + c_1(r) \frac{t^\alpha}{1+t^{\alpha+1}},$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\mathscr{F} y)(t)}{1+t^{\alpha+1}} = 0,$$

et

$$\|\mathscr{F} y\|_{\mathscr{C}_\alpha} \le c_0(r) + c_1(r) \le r, \tag{2.10}$$

ce qui prouve que $\mathscr{F} y \in \mathscr{B}_r$ si $y \in \mathscr{B}_r$, c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ envoie $\mathscr{B}_r$ dans $\mathscr{B}_r$.

D'autre part, l'opérateur $\mathscr{F}$ est continu.

En effet, soient $\{y_n\}_{n\ge1}$ une suite de $\mathscr{B}_r$ et $y \in \mathscr{B}_r$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Pour établir la continuité de $\mathscr{F}$ il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$; $\|\mathscr{F} y_n - \mathscr{F} y\|_{\mathscr{C}_\alpha} \le \varepsilon$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{F} y_n(t) - \mathscr{F} y(t)\| &\le \|g(y_n)-g(y)\| + \|\sigma(t,y_n(t)) - \sigma(t,y(t))\| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \|A(s,y_n(s))y_n(s) - A(s,y(s))y(s)\| \, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \|f(s,y_n(s) - f(s,y(s))\| \, ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses ($\mathbf{H}_3$) et ($\mathbf{H}_4$) nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}y_n-\mathscr{F}y\right\|_{\mathscr{C}_\alpha} &\leq (G+\varsigma)\left\|y_n-y\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}\\ &+\sup_{t\geq 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|A(s,y_n(s))y_n(s)-A(s,y(s))y(s))\right\|ds\\ &+\sup_{t\geq 0}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|f(s,y_n(s)-f(s,y(s))\right\|ds.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left\|y_n-y\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}=0$, alors il exist une constante $\mu>0$ telle que

$$\left\|y_n\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}\leq\mu,\ n\geq 1 \text{ et } \left\|y\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}\leq\mu.$$

Au vue de l'hypothèse ($\mathbf{H}_1$), on a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|A(s,y_n(s))y_n(s)-A(s,y(s))y(s)\right\|ds\leq\left(\frac{2\mu^2\left\|\varphi\right\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\frac{t^\alpha}{1+t^{\alpha+1}}.$$

Donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe $T_1>0$ et $\delta_1>0$ tels que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|A(s,y_n(s))y_n(s)-A(s,y(s))y(s)\right\|ds\leq\varepsilon,\quad t\geq T_1,$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|A(s,y_n(s))y_n(s)-A(s,y(s))y(s)\right\|ds\leq\varepsilon,\ 0<t\leq\delta_1.$$

De plus, comme A est continu alors

$$\sup_{s\in[\delta_1,T_1]}\left\|A(s,y_n(s))-A(s,y(s))\right\|\to 0,\ n\to+\infty,$$

Il s'ensuit qu'il existe $N>0$ tel que pour tout $n>N$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\delta_1}^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|A(s,y_n(s))y_n(s)-A(s,y(s))y(s)\right\|ds\\ \leq\ &\sup_{t\in[\delta_1,T_1]}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\delta_1}^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}(1+s^{\alpha+1})}{1+t^{\alpha+1}}ds\\ &\times\sup_{s\in[\delta_1,T_1]}\left(\left\|A(s,y_n)-A(s,y)\right\|\left\|y_n\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}+\left\|y_n-y\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}\left\|A(s,y)\right\|\right)\\ \leq\ &\frac{T_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{s\in[\delta_1,T_1]}\left(\left\|A(s,y_n(s))-A(s,y(s))\right\|\mu+\left\|y_n-y\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}\left\|A(s,y(s))\right\|\right)\\ &\to 0, n\to+\infty.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'hypothèse ($\mathbf{H}_2$) nous obtenons pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \left\| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \right\| ds \leq \left(\frac{2\mu \|a\|_\infty + 2\|b\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \frac{t^\alpha}{1+t^{\alpha+1}}.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_2 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \left\| f(s, y_n(s) - f(s, y(s)) \right\| ds \leq \varepsilon, \quad t \geq T_2,$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \left\| f(s, y_n(s) - f(s, y(s)) \right\| ds \leq \varepsilon, \;\; 0 \leq t \leq \delta_2.$$

De plus, la continuité de f entraine

$$\sup_{s \in [\delta_2, T_2]} \left\| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \right\| \to 0, \;\; n \to +\infty.$$

Alors, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$ on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\delta_2}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \left\| f(s, y_n(s) - f(s, y(s)) \right\| ds \\
\leq\;& \sup_{s \in [\delta_2, T_2]} \left\| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \right\| \sup_{t \in [\delta_2, T_2]} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\delta_2}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} ds \\
\leq\;& \frac{T_2}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s \in [\delta_2, T_2]} \left\| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \right\| \to 0, \;\; n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Les estimations ci-dessus montrent que l'opérateur $\mathscr{F}$ est continu.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathscr{F}(\mathscr{B}_r) = \{\mathscr{F} y, \; y \in \mathscr{B}_r\}$ est un ensemble relativement compact pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Schauder. Ceci peut être établi à l'aide du Lemme 2.1.1. Compte tenu de l'estimation (2.10), nous concluons immédiatement que la condition (i) du Lemme 2.1.1 est satisfaite.

D'autre part, pour tout $y \in \mathscr{B}_r$ et $t_1,\ t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{(\mathscr{F}y)(t_2)}{1+t_2^{\alpha+1}} - \frac{(\mathscr{F}y)(t_1)}{1+t_1^{\alpha+1}} \right\| \quad \leq \quad & \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left(\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha+1}} - \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha+1}} \right) A(s,y(s))y(s)ds \right\| \\
& + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha+1}} A(s,y(s))y(s) \right\| ds \\
& + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left(\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha+1}} - \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha+1}} \right) f(s,y(s))ds \right\| \\
& + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha+1}} f(s,y(s))ds \right\|
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales, nous obtenons

$$\left\| (\mathscr{F}y)(t_2) - (\mathscr{F}y)(t_1) \right\|_{\mathscr{C}_\alpha} \leq C_1(r) \left| \frac{{t_1}^{\alpha}}{1+t_1^{\alpha+1}} - \frac{{t_2}^{\alpha}}{1+t_2^{\alpha+1}} + \frac{2(t_2-t_1)^{\alpha}}{1+t_2^{\alpha+1}} \right|$$

Notons que le terme de droite de cette expression est indépendant de y, de plus lorsque $t_1 \longrightarrow t_2$, le membre de droite tend vers 0, ce qui implique que l'ensemble $\mathscr{F}(\mathscr{B}_r)$ est équicontinu, et donc la condition (ii) du Lemme 2.1.1 est satisfaite.
Enfin, pour tout $y \in \mathscr{B}_r$ on a

$$\left\| \frac{(\mathscr{F}y)(t)}{1+t^{\alpha+1}} \right\| \leq \frac{C_0(r)}{1+t^{\alpha+1}} + C_1(r) \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\alpha+1}}.$$

Cette dernière estimation montre que la dernière condition du Lemme 2.1.1 est également satisfaite. Alors, $\mathscr{F}(\mathscr{B}_r)$ est relativement compacte d'après le Lemme 2.1.1. Le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence d'un point fixe de $\mathscr{F}$. Par conséquent, le problème à valeur initiale (2.1) possède au moins une solution $y \in \mathscr{C}_\alpha$. ■

Nous terminons cette section par l'exemple illustratif suivant :

2.2.1 Exemple

Considérons le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}}(y(t)+\frac{1}{5}\sin(t+y(t))) = \dfrac{\cos(t^3+1)}{15}(1+t\sqrt{t})^{\frac{-5}{2}}\left|y\right|^{\frac{2}{3}}\ln\left(\left(\dfrac{|y|}{1+t\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right)y(t) \\ \qquad\qquad\qquad +\dfrac{|y|}{(19+e^{2t})(1+t\sqrt{t})}+\dfrac{1}{10},\ t>0 \\ y(0)+\frac{1}{4}\sin(y(1)) = 10^{-2}. \end{cases} \tag{2.11}$$

On prend

$$\begin{aligned} (X,\ \|.\|) &= (\mathbb{R},\ |.|),\ \alpha=\frac{1}{2}, \\ A(t,y) &= \frac{\cos(t^3+1)}{15}(1+t\sqrt{t})^{\frac{-5}{2}}\left|y\right|^{\frac{2}{3}}\ln\left(\left(\frac{|y|}{1+t\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right)I,\ \ t\geq 0,\ y\in\mathbb{R}. \\ \sigma(t,y) &= \frac{1}{5}\sin(t+y) \\ f(t,y) &= \frac{1}{19+e^{2t}}\frac{|y|}{1+t\sqrt{t}}+\frac{1}{3},\ \ t\geq 0),\ y\in\mathbb{R}. \\ g(y) &= \frac{1}{4}\sin(y(1)). \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \left|A(t,y)\right| &\leq \frac{\left|\cos(t^3+1)\right|}{15(1+t\sqrt{t})}\left(\frac{|y|}{(1+t\sqrt{t})}\right)^{\frac{2}{3}}\ln\left(\left(\frac{|y|}{1+t\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right) \\ &\leq \frac{\left|\cos(t^3+1)\right|}{15(1+t\sqrt{t})}\left(\frac{|y|}{(1+t\sqrt{t})}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{|y|}{(1+t\sqrt{t})}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq \frac{\left|\cos(t^3+1)\right|}{15(1+t\sqrt{t})}\frac{|y|}{(1+t\sqrt{t})} \end{aligned}$$

Donc $A(t,y)$ satisfait $(\mathbf{H}_1)$ avec

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\left|\cos(t^3+1)\right|}{15} \Rightarrow \|\varphi\|_\infty \leq \frac{1}{15}. \\ \psi(t) &= t^{\frac{2}{3}}\ln\left(t^{\frac{1}{3}}+1\right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\left|f(t,y(t))\right| \leq \frac{1}{19+e^{2t}}\frac{|y|}{1+t\sqrt{t}}+\frac{1}{10},$$

et donc ($\mathbf{H}_2$) est satisfaite avec

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{19+e^{2t}} \Rightarrow \|a\|_\infty = \frac{1}{20}. \\ b(t) &= \frac{1}{10} \Rightarrow \|b\|_\infty = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Quant à l'hypothèse ($\mathbf{H}_3$) on a

$$\begin{aligned} \left|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\right| &= \frac{1}{5}\left|\sin(t+x)-\sin(t+y)\right| \\ &\leq \frac{1}{5}\left|x-y\right|, x,y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donc ($\mathbf{H}_3$) est satisfaite avec

$$\varsigma = \frac{1}{5}, \quad \delta = \frac{1}{5}\text{et} \quad \sigma_0 = 0.$$

Il découle de la condition ($\mathbf{H}_4$) que

$$\left|g(y)-g(x)\right| \leq \frac{1}{4}\left|x-y\right|, x,y \in \mathbb{R},$$

et donc

$$G = \frac{1}{4}.$$

Finalement, l'inégalité donnée dans l'hypothèse ($\mathbf{H}_5$) nécessite que la constante r satisfait

$$\frac{2}{15\sqrt{\pi}}r^2 + \left(\frac{1}{10\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - 1\right)r + \left(10^{-2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5\sqrt{\pi}}\right) < 0,$$

ce qui est vrai pour tout $r \in [1.34,\ 5.25]$.

Ainsi toutes les hypothèses du Théorème 2.2.1 sont satisfaites, par conséquent le problème (2.16) possède au moins une solution y dans l'espace $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$.

2.3 Deuxième résultat d'existence

Dans la présente section nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1). Pour cela nous imposons d'autres conditions sur les données du problème. Dans la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}'_1$) Il existe une fonction $L : J \to \mathbb{R}^+$ continue et bornée et une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|A(t,u) - A(t,v)\| \leq \frac{L(t)}{(1+t^{\alpha+1})^2}\|u-v\|, \quad u,v \in X, t \geq 0, \tag{2.12}$$

et

$$\|A(t,0)\| < \frac{\lambda}{1+t^{\alpha+1}}.$$

($\mathbf{H}'_2$) La fonction $f : J \times X \to X$ est continue et il existe une fonction $p : J \to \mathbb{R}^+$ continue et bornée telle que

$$\left\|f(t,u) - f(t,v)\right\| \leq \frac{p(t)}{1+t^{\alpha+1}}\|u-v\|, \quad u,v \in X, t \geq 0, \tag{2.13}$$

et

$$\eta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{t\geq 0}\left\|f(t,0)\right\| < \infty.$$

($\mathbf{H}'_3$) La fonction $\sigma : J \times X \to X$ est continue et il existe une constante $\varsigma > 0$ telle que

$$\|\sigma(t,u) - \sigma(t,v)\| \leq \varsigma\|u-v\|, \quad u,v \in X, t \geq 0, \tag{2.14}$$

et

$$\delta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{t\geq 0}\|\sigma(t,0)\| < \infty.$$

($\mathbf{H}'_4$) La fonction $g : X \to X$ est continue et il existe une constante $G > 0$ telle que

$$\left\|g(u) - g(v)\right\| \leq G\|u-v\|, \quad u,\ v \in X.$$

On définit la boule fermée

$$\mathscr{B}_\rho = \{y \in \mathscr{C}_\alpha,\ \left\|y\right\|_{\mathscr{C}_\alpha} \leq \rho\}$$

de l'espace $\mathscr{C}_\alpha$ centrée en 0 et de rayon ρ pour un certain $\rho > 0$. Si on munit $\mathscr{B}_\rho$ de la distance d définie pour tout $u,\ v \in \mathscr{C}_\alpha$ par

$$d(u,v) = \|u-v\|_{\mathscr{C}_\alpha},$$

alors nous obtenons un espace métrique complet $(\mathscr{B}_\rho, d)$. Posons

$$M = \frac{\|L\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)},\ N = \frac{\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)},\ \gamma = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Nous supposons de plus que

$(\mathbf{H}_5')$ $M\rho^2 + (\gamma + G + \varsigma + N)\rho + \|y_0\| + \|\sigma_0\| + \|g(0)\| + \delta + \eta < \rho$

$(\mathbf{H}_6')$ $(1+\rho)M + \gamma + G + \varsigma + N < 1$.

Notre deuxième résultat est le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_1')-(\mathbf{H}_6')$ *le problème* (2.1) *possède une solution unique* $y \in \mathscr{C}_\alpha$.

On sait déjà que le problème (2.1) est équivalent à l'équation intégrale (2.7). Il suffit de prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale par le principe de contraction de Banach.

Posons $\Phi(t,y(t)) = A(t,y(t))y(t) + f(t,y(t))$, et définissons sur $\mathscr{B}_\rho$ l'opérateur Ψ par

$$\Psi y(t) = y_0 + \sigma_0 - g(y) - \sigma(t,y(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Phi(s,y(s))ds.$$

Alors l'équation intégrale (2.7) est réduite à

$$y = \Psi y$$

Pour obtenir notre résultat, nous devons montrer que Ψ possède un point fixe unique y qui est solution de l'équation intégrale (2.7). On procède en deux étapes :

- Dans la première étape on montre que Ψ envoie $\mathscr{B}_\rho$ dans $\mathscr{B}_\rho$.
- Dans la deuxième étape on montre que Ψ est une contraction.

Lemme 2.3.1 *L'opérateur* Ψ *envoie* $\mathscr{B}_\rho$ *dans* $\mathscr{B}_\rho$.

Démonstration. Soit $y \in \mathscr{B}_\rho$, notons d'abord que

$$\frac{\Psi y(t)}{1+t^{\alpha+1}} = \frac{y_0+\sigma_0}{1+t^{\alpha+1}} - \frac{g(y)+\sigma(t,y(t))}{1+t^{\alpha+1}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\Phi(s,y(s))ds,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Psi y(t)}{1+t^{\alpha+1}}\right\| &\leq \frac{\|y_0\|+\|\sigma_0\|}{1+t^{\alpha+1}} + \frac{\|g(y)\|}{1+t^{\alpha+1}} + \frac{\|\sigma(t,y(t))\|}{1+t^{\alpha+1}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}} \|\Phi(s,y)\|\, ds \\
&\leq \|y_0\| + \|\sigma_0\| + \|g(0)\| + \|\sigma(t,0)\| + \frac{\|g(y)-g(0)\|}{1+t^{\alpha+1}} + \frac{\|\sigma(t,y(t))-\sigma(t,0)\|}{1+t^{\alpha+1}} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}(\|A(s,y(s))-A(s,0)\| + \|A(s,0)\|)\,\|y(s)\|\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}(\|f(s,y(s))-f(s,0)\| + \|f(s,0)\|)ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses $(\mathbf{H}_1')-(\mathbf{H}_4')$, nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Psi y(t)}{1+t^{\alpha+1}}\right\| &\leq \|y_0\| + \|\sigma_0\| + \|g(0)\| + \delta + \frac{G\|y(t)\|}{1+t^{\alpha+1}} + \frac{\varsigma\|y(t)\|}{1+t^{\alpha+1}} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left(\frac{L(s)\|y(s)\|}{1+s^{\alpha+1}} + (1+s^{\alpha+1})\|A(s,0)\|\right)\frac{\|y(s)\|}{1+s^{\alpha+1}}ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left(\frac{p(s)\|y(s)\|}{1+s^{\alpha+1}} + \|f(s,0)\|\right)ds
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales et en utilisant l'hypothèse $(\mathbf{H}_5')$ nous arrivons à

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Psi y(t)}{1+t^{\alpha+1}}\right\| &\leq \|y_0\| + \|\sigma_0\| + \|g(0)\| + \delta + G\rho + \varsigma\rho + (M\rho+\gamma)\rho + N\rho + \eta \\
&\leq M\rho^2 + (\gamma+G+\varsigma+N)\rho + \|y_0\| + \|\sigma_0\| + \|g(0)\| + \delta + \eta \\
&\leq \rho.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|\Psi y\|_{\mathscr{C}_\alpha} \leq \rho,$$

ce qui implique que $\Psi\mathscr{B}_\rho \subset \mathscr{B}_\rho$, c'est à dire que Ψ envoie $\mathscr{B}_\rho$ dans $\mathscr{B}_\rho$. ■

Lemme 2.3.2 *L'opérateur* Ψ *est une contraction dans* $(\mathscr{B}_\rho, d)$.

Démonstration. Pour tous $u,\ v \in \mathscr{B}_\rho$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\Psi u(t)-\Psi v(t)}{1+t^{\alpha+1}} &= \frac{g(u)-g(v)}{1+t^{\alpha+1}}+\frac{\sigma(t,u(t))-\sigma(t,v(t))}{1+t^{\alpha+1}}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}(A(s,u)u(s)-A(s,v))v(s)ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}(f(s,u(s))-f(s,v(s)))ds,\end{aligned}$$

d'où les estimations

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\Psi u(t)-\Psi v(t)}{1+t^{\alpha+1}}\right\| &\leq \frac{\left\|g(u)-g(v)\right\|}{1+t^{\alpha+1}}+\frac{\|\sigma(t,u(t))-\sigma(t,v(t))\|}{1+t^{\alpha+1}}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\|A(s,u)u(s)-A(s,v)v(s)\|ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|ds\\ &\leq \frac{\left\|g(u)-g(v)\right\|}{1+t^{\alpha+1}}+\frac{\|\sigma(t,u(t))-\sigma(t,v(t))\|}{1+t^{\alpha+1}}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}(\|A(s,u)\|\,\|u(s)-v(s)\|\\ &+\|A(s,u)-A(s,v)\|\,\|v(s)\|)ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right\|ds\end{aligned}$$

Nous obtenons par les hypothèses $(\mathbf{H}_1'), (\mathbf{H}_2'),\ (\mathbf{H}_3')$ et $(\mathbf{H}_4')$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\Psi u(t)-\Psi v(t)}{1+t^{\alpha+1}}\right\| &\leq \frac{G\|u-v\|}{1+t^{\alpha+1}}+\frac{\varsigma\|u-v\|}{1+t^{\alpha+1}}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left(\left(\frac{L(s)\|u(s)\|}{1+s^{\alpha+1}}+(1+s^{\alpha+1})\|A(s,0)\|\right)\frac{\|u(s)-v(s)\|}{1+s^{\alpha+1}}\right.\\ &\left.+\frac{L(s)\|u(s)-v(s)\|}{1+s^{\alpha+1}}\frac{\|v(s)\|}{1+s^{\alpha+1}}\right)ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left(\frac{p(s)\|u(s)-v(s)\|}{1+s^{\alpha+1}}\right)ds.\end{aligned}$$

En calculant les intégrales et en prenant le sup sur J nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned}\|\Psi u-\Psi v\|_{\mathscr{C}_\alpha} &\leq G\|u-v\|_{\mathscr{C}_\alpha}+\varsigma\|u-v\|_{\mathscr{C}_\alpha}+(M+\gamma)\|u-v\|_{\mathscr{C}_\alpha}+M\rho\|u-v\|_{\mathscr{C}_\alpha}+N\|u-v\|_{\mathscr{C}_\alpha}\\ &\leq ((1+\rho)M+\gamma+G+\varsigma+N)\|u-v\|_{\mathscr{C}_\alpha}.\end{aligned}$$

On en déduit de l'hypothèse ($\mathbf{H}_6'$) que l'opérateur Ψ est une contraction dans $(\mathscr{B}_\rho, d)$. ∎

Démonstration du Théorème 2.3.1. L'application Ψ est une contraction de $\mathscr{B}_\rho$ dans $\mathscr{B}_\rho$. Il s'ensuit du principe de contraction de Banach qu'elle possède un point fixe unique $y\in\mathscr{B}_\rho$ qui est solution de l'équation intégrale (2.7). Ainsi, le problème (2.1) possède une solution unique $y\in\mathscr{C}_\alpha$.

2.3.1 Dépendance de la solution par rapport à la condition initiale

Ce paragraphe s'intéresse à l'étude de la dépendance continue de la solution du problème (2.1) par rapport à la condition initiale y_0.

Proposition 2.3.1 *Sous les hypothèses du Théorème* 2.3.1*, la solution du problème* (2.1) *dépend continûment de la valeur initiale* y_0.

Démonstration. Comme y est l'unique solution du problème (2.1), alors elle satisfait l'équation intégrale (2.7). Soit x une autre solution du problème (2.1) avec la condition initiale $x(0)=x_0-g(x)$. Alors x satisfait l'équation intégrale

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0+\sigma_0-g(x)-\sigma(t,x(t))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}A(s,x(s))x(s)ds\\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds.\end{aligned}\tag{2.15}$$

En estimant la norme de la différence entre $y(t)$ et $x(t)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{y(t)-x(t)}{1+t^{\alpha+1}}\right\| &\leq \left\|y_0-x_0\right\|+\frac{\left\|g(y)-g(x)\right\|}{1+t^{\alpha+1}}+\frac{\left\|\sigma(t,y(t))-\sigma(t,x(t))\right\|}{1+t^{\alpha+1}}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|A(s,y)y(s)-A(s,x)x(s)\right\|ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left\|f(s,y(s))-f(s,x(s))\right\|ds\end{aligned}$$

Les hypothèses $(\mathbf{H}'_1)-(\mathbf{H}'_4)$ impliquent que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{y(t)-x(t)}{1+t^{\alpha+1}}\right\| &\leq \left\|y_0-x_0\right\|+\frac{G\left\|y-x\right\|}{1+t^{\alpha+1}}+\frac{\varsigma\left\|y-x\right\|}{1+t^{\alpha+1}} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left(\left(\frac{L(s)\left\|y(s)\right\|}{1+s^{\alpha+1}}+(1+s^{\alpha+1})\left\|A(s,0)\right\|\right)\frac{\left\|y(s)-x(s)\right\|}{1+s^{\alpha+1}}\right. \\
&\left.+\frac{L(s)\left\|y(s)-x(s)\right\|}{1+s^{\alpha+1}}\frac{\left\|x(s)\right\|}{1+s^{\alpha+1}}\right)ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha+1}}\left(\frac{p(s)\left\|y(s)-x(s)\right\|}{1+s^{\alpha+1}}\right)ds.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{y(t)-x(t)}{1+t^{\alpha+1}}\right\| &\leq \left\|y_0-x_0\right\|+G\left\|y-x\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}+\varsigma\left\|y-x\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}+(M+\gamma)\left\|y-x\right\|_{\mathscr{C}_\alpha} \\
&+M\rho\left\|y-x\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}+N\left\|y-x\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}.
\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur $[0,+\infty)$ on arrive à

$$\left\|y-x\right\|_{\mathscr{C}_\alpha}\leq\frac{1}{\xi}\left\|y_0-x_0\right\|,$$

où

$$\xi=1-(1+\rho)M-G-\gamma-\varsigma-N.$$

Ceci implique que l'application: $y_0\to y$ est continue de $X\to\mathscr{C}_\alpha$. ■

Afin de valider le résultat précédent nous présentons l'exemple suivant :

2.3.2 Exemple

Considérons le problème à valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}}(y(t)+\dfrac{|y(t)|e^{-t}}{2(|y(t)|+5)}) = \dfrac{e^{-t}\ln(6+|y(t)|)}{5(1+t\sqrt{t})^2}y(t)+\dfrac{\sin(t)}{5(1+t\sqrt{t})(|y(t)|^2+1)},\ t>0 \\ \\ y(0)+\frac{1}{8}\cos(y(1)) = 0.001 \end{cases} \tag{2.16}$$

Soit

$$\begin{aligned} (X,\ \|.\|) &= (\mathbb{R},\ |.|),\ \alpha=\frac{1}{2}, \\ A(t,y) &= \left(\frac{e^{-t}\ln(6+|y|)}{5(1+t\sqrt{t})^2}\right)I,\ \ t\geq 0,\ y\in\mathbb{R}. \\ \sigma(t,y) &= \frac{|y|e^{-t}}{2(|y|+5)} \\ f(t,y) &= \frac{\sin(t)}{5(1+t\sqrt{t})(y^2+1)},\ \ t\geq 0,\ y\in\mathbb{R}. \\ g(y) &= \frac{1}{8}\cos(y(1)). \end{aligned}$$

Alors pour tout $x, y\in\ \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |A(t,y)-A(t,y)| &\leq \frac{e^{-t}}{5(1+t\sqrt{t})^2}|\ln(6+x)-\ln(6+y)| \\ &\leq \frac{e^{-t}}{30(1+t\sqrt{t})^2}|x-y|,\ t\geq 0,\ x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur $A(t,y)$ satisfait l'hypothèse $(\mathbf{H}_1')$ avec

$$L(t)=\frac{e^{-t}}{30}\Rightarrow \|L\|_\infty=\frac{1}{30},\ \lambda=\frac{\ln(6)}{5},\quad M=\frac{1}{15\sqrt{\pi}},\quad \gamma=\frac{2\ln(6)}{5\sqrt{\pi}}.$$

D'autre part, l'hypothèse $(\mathbf{H}_2')$ donne

$$\begin{aligned} |f(t,x)-f(t,y)| &\leq \frac{|\sin(t)|}{10(1+t\sqrt{t})}\left|\frac{1}{(x^2+1)}-\frac{1}{(y^2+1)}\right| \\ &\leq \frac{|\sin(t)|}{10(1+t\sqrt{t})}|x-y|,\ t\geq 0,\ x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc $(\mathbf{H}_2')$ est satisfaite avec

$$p(t)=\frac{|\sin(t)|}{10}\Rightarrow \|p\|_\infty=\frac{1}{10},\quad N=\frac{1}{5\sqrt{\pi}},\quad \eta=\frac{1}{5\sqrt{\pi}}.$$

Quant à l'hypothèse ($\mathbf{H}_3'$) on a

$$\left|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\right| = \frac{e^{-t}}{2}\left|\frac{|x|}{(|x|+5)}-\frac{|y|}{(|y|+5)}\right|$$
$$\leq \frac{1}{10}\left|x-y\right|, t\geq 0,\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Alors ($\mathbf{H}_3'$) est satisfaite avec

$$\varsigma = \frac{1}{10},\quad \sigma_0 = 0 \quad \text{et} \quad \delta = 0.$$

Il découle de la condition ($\mathbf{H}_4'$) que

$$\left|g(y)-g(x)\right| \leq \frac{1}{8}\left|x-y\right|,\ x,y\in\mathbb{R}$$

, et donc

$$G = \frac{1}{8}.$$

Finalement, les inégalités données dans les hypothèses ($\mathbf{H}_5'$) et ($\mathbf{H}_6'$) nécessitent que la constante ρ satisfait

$$\frac{1}{15\sqrt{\pi}}\rho^2 + \left(\frac{2\ln(6)}{5\sqrt{\pi}}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5\sqrt{\pi}}-1\right)\rho + (0.001+\frac{1}{8}+\frac{1}{5\sqrt{\pi}}) < 0$$

et

$$\frac{1}{15\sqrt{\pi}}\rho + \frac{2\ln(6)}{5\sqrt{\pi}}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{2}{5\sqrt{\pi}}-1<0$$

ce qui est vérifié pour tout $\rho\in[1.2,\ 5.6]$.

Ainsi toute les hypothèses du Théorème 2.3.1 sont satisfaites et par conséquent le problème (2.16) possède une solution unique.

Chapitre 3

Étude d'un problème différentiel impulsif d'ordres fractionnaires multiples

Les équations différentielles fractionnaires impulsives représentent de nos jours un outil mathématique important pour la modélisation de différents phénomènes dans divers domaines scientifiques, ce qui a poussé beaucoup de mathématiciens à s'impliquer dans l'étude des propriétés de ces équations. Au cours des dernières années, un nombre considérable de travaux traitant ce sujet ont été présentés [1, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 33, 50, 67].

Cependant, la majorité des résultats développés s'intéressent à l'étude des équations différentielles fractionnaires impulsives dans des domaines bornés. D'autres part, différentes formules de solutions ont été proposées dans le cadre du concept classique d'une solution utilisant la théorie des semi-groupes [20, 12, 16, 33, 50].

Dans ce chapitre nous introduisons une nouvelle approche afin d'étudier une classe des équations différentielles fractionnaires impulsives dites : équations différentielles impulsives d'ordres fractionnaires multiples. Plus précisement nous étudions l'existence globale d'une solution bornée d'un problème fractionnaire impulsif dont la dérivé fractionnaire est comprise au sens de Caputo. La téchnique que nous allons utiliser consiste à montrer l'existence de la solution sur un intervalle borné de type $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, par le théorème du point fixe de Schauder puis étendre le résultat d'existence à l'intervalle $[0, +\infty)$ à l'aide d'un processus de continuation. Le chapitre est organisé comme suit :

Dans la première section, nous introduisons la notion de problème fractionnaire impulsif d'ordres multiples en donnant un exemple concrêt de ce type de problèmes dans $\mathbb{R}$. La deuxième section sera consacrée à l'étude d'un problème impulsif semi-linéaire d'ordres fractionnaires multiples. Tout d'abord, nous établissons une équivalence entre le problème donné et une certaine équation intégrale de type Volterra en tenant compte des remarques et d'améliorations introduites dans [20]. Ensuite, nous montrons l'existence globale d'une solution bornée en passant par deux étapes :

• Dans la première étape, nous établissons l'existence de la solution sur un intervalle borné.

• Dans la deuxième étape, nous utilisons un procéssus de continuation pour étendre le résultat d'existence à l'intervalle $[0, +\infty)$.

Nous concluons ce chapitre par un exemple illustratif.

3.1 Problèmes impulsifs d'ordres fractionnaires multiples

Un problème différentiel impulsif d'ordres fractionnaires multiples est un système d'équations différentielles impulsives dans lequel apparaissent des dérivées fractionnaires d'ordres variés. Ce type de problèmes à été étudié recemment par A. Bouzaroura et S. Mazouzi [20]. Un exemple concret de tels problèmes dans $\mathbb{R}$ sur un intervalle borné $[0, T]$, $T > 1$ est de la forme

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{1/2} y(t) = t^2 - 1, \ t \in J_0 = [0, 1], \\ {}^{C}\mathscr{D}_{1^+}^{1/3} y(t) = t^2 - 2t + 1, \ t \in J_1 = (1, T], \\ y(0) = 1, \\ y\left(1^+\right) = y(1) + 2. \end{cases} \tag{3.1}$$

On cherche une fonction continue par morceaux $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ satisfaisant (3.1). On résout le sous-problème

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{0^+}^{1/2} y(t) = t^2 - 1, \ t \in J_0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-s)^{-1/2} s^2 ds - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds \\ &= 1 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}, \end{aligned}$$

Donc $y(1) = 1 - \frac{14}{15\sqrt{\pi}}$.

Ensuite, on résout le sous-problème

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{1^+}^{1/3} y(t) = t^2 - 2t + 1, \ t \in J_1, \\ y\left(1^+\right) = y(1) + 2 = 3 - \frac{14}{15\sqrt{\pi}}, \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{aligned} y(t) &= y\left(1^+\right) + \frac{1}{\Gamma(1/3)} \int_1^t (t-s)^{-2/3} (s-1)^2 ds \\ &= 3 - \frac{14}{15\sqrt{\pi}} + \frac{6}{\Gamma(1/3)} (t-1)^{7/3}. \end{aligned}$$

Donc, la fonction continue par morceaux

$$y(t) = \begin{cases} 1 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}, \ t \in J_0, \\ 3 - \frac{14}{15\sqrt{\pi}} + \frac{6}{\Gamma(1/3)} (t-1)^{7/3}, \ t \in J_1. \end{cases}$$

est une solution du problème fractionnaire impulsif (3.1)

On note que dans la majorité des travaux publiés, les problèmes traités sont des problèmes fractionnaires impulsifs avec un seul ordre de dérivation et la plupart des résultats obtenus sont des résultats d'existence locale. Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'existence globale d'une solution bornée d'un nouveau problème fractionnaire impulsif d'ordres fractionnaires multiples de la forme

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} y(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t)), \ t \in J_k, \ k = 0, 1, \ldots, \\ y(0) = y_0 \in X, \\ y(t_k^+) = y(t_k^-) + I_k(y(t_k^-)), \quad k > 0, \end{cases}$$

Les résultats développés dans ce chapitre, qui sont issus de [47] généralisent ceux obtenus récemment par Benchohra *et al. [5, 17]* établis en l'absence des impulsions ainsi que les travaux de Balachandran *et al.* [12, 13, 14], Bouzaroura et Mazouzi [20] considérés dans un espace de Banach mais seulement sur un intervalle fini $[0, T]$.

3.2 Problème différentiel semi-linéaire impulsif

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence globale de la solution du problème impulsif d'ordres fractionnaires multiples suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} y(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t)),\ t \in J_k,\ k = 0, 1, \dots \\ y(0) = y_0 \in X, \\ y(t_k^+) = y(t_k^-) + I_k(y(t_k^-)), \quad k > 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

où

- ${}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+}$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordres $\alpha_k \in (0,1)$, $k = 0, 1, \dots$
- $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach de dimension finie.
- $A : J = [0, +\infty) \to \mathscr{B}(X)$ est un opérateur linéaire continu.
- $f : J \times X \to X$ et $I_k : X \to X$ sont des fonctions données.
- $J_k = (t_k, t_{k+1}]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} < \dots$
- $y(t_k^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} y(t_k + h)$ representent les limites à droite et à gauche de $y(t)$ à $t = t_k$.

Pour étudier ce problème, nous allons utiliser la méthode du point fixe. Nous montrons d'abord l'existence de la solution sur un intervalle borné de type $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide du théorème du point fixe de Schauder puis nous utilisons un processus de continuation pour étendre le résultat d'existence à l'intervalle $[0, +\infty)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons le problème impulsif d'ordres fractionnaires multiples suivant

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} y(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t)),\ t \in J_k \cap [0, n],\ k = 0, \dots m_n \\ y(0) = y_0 \in X, \\ y(t_k^+) = y\left(t_k^-\right) + I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1, 2, \dots, m_n, \end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$m_n = \max\{k \in \mathbb{N},\ t_k < n\}.$$

Considérons l'espace de Banach

$$\mathscr{PC}([0, n], X) = \left\{ \begin{array}{c} y : [0, n] \to X : y \in C(J_k \cap [0, n], X),\ k = 0, \dots, m_n, \\ y(t_k^+) \text{ et } y(t_k^-) \text{ existent et } y(t_k^-) = y(t_k),\ k = 1, \dots, m_n \end{array} \right\},$$

muni de la norme

$$\|y\|_n = \sup_{t\in[0,n]} \|y(t)\|.$$

Introduisons maintenant la définition de la solution du problème (3.3).

Définition 3.2.1 *Une fonction $y \in \mathscr{PC}([0,n],X)$ est dite solution du problème* (3.3) *si* ${}^C\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} y(t)$ *existe pour tout $t \in J_k \cap [0,n]$, $k = 0,\dots,m_n$ et satisfait les équations* ${}^C\mathscr{D}^{\alpha_k}_{t_k^+} y(t) = A(t)y(t) + f(t,y(t))$, *pour tout $t \in J_k \cap [0,n]$, $k = 0\dots m_n$ ainsi que les conditions*

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \in X, \\ y(t_k^+) = y\left(t_k^-\right) + I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1,2,\dots,m_n. \end{cases}$$

3.2.1 Équivalence entre le problème (3.3) et une équation intégrale

Nous allons établir une équivalence entre le problème (3.3) et une certaine équation intégrale. Posons

$$\Phi(t,y(t)) = A(t)y(t) + f(t,y(t)).$$

On a le résultat suivant :

Lemme 3.2.1 *Une fonction $y \in \mathscr{PC}([0,n],X)$ est solution du problème* (3.3) *si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale suivante*

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1}\Phi(s,y(s))ds\,,\ t \in [0,t_1] \\ y_0 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi(s,y(s))ds \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha_k-1}\Phi(s,y(s))ds + \sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-)),\ \ t \in J_k \cap [0,n],\ k = 1,\dots,m_n \end{cases} \tag{3.4}$$

Démonstration. Soit y une solution de (3.3). Comme $y(t_k^-) = y(t_k)$, alors on a

$$y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y(t_k^-)).$$

Pour $t \in [0, t_1]$, la solution du problème

$$\begin{cases} {}^C\mathscr{D}_{0^+}^{\alpha_0} y(t) = \Phi(t, y(t)), \quad t \in J_0 \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases}$$

est donnée par

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0 - 1} \Phi(s, y(s)) ds.$$

Si $t \in (t_1,\ t_2] \cap [0, n]$, alors

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_1^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha_1 - 1} \Phi(s, y(s)) ds \\ &= y(t_1) + I_1(y(t_1^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha_1 - 1} \Phi(s, y(s)) ds \\ &= y_0 + I_1(y(t_1^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha_0 - 1} \Phi(s, y(s)) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha_1 - 1} \Phi(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Si $t \in (t_2, t_3] \cap [0, n]$, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_2^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^t (t_2 - s)^{\alpha_2 - 1} \Phi(s, y(s)) ds \\ &= y(t_2) + I_2(y(t_2^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha_2 - 1} \Phi(s, y(s)) ds \\ &= y_0 + I_1(y(t_1^-)) + I_2(y(t_2^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha_0 - 1} \Phi(s, y(s)) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha_1 - 1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^t (t-s)^{\alpha_2 - 1} \Phi(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Plus généralement, si $t \in J_k \cap [0,n],\ k = 1,\dots,m_n$ alors

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi(s, y(s))ds$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1}\Phi(s, y(s))ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(y(t_i^-)).$$

Donc y satisfait (3.4).

Inversement, supposons que y satisfait (3.4).

Si $t \in [0, t_1]$, alors

$$y(0) = y_0.$$

Ensuite, en utilisant le fait que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle nous obtenons

$${}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} y(t) = {}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1}\Phi(s, y(s))ds \right]$$
$$= {}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} I^{\alpha_k}\, \Phi(t, y(t)), \quad t \in J_k \cap [0,n], \quad k = 1,\dots,m_n,$$

et grâce à la propriété fondamentale

$${}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} I^{\alpha_k}\Phi(t, y(t)) = \Phi(t, y(t)),$$

nous obtenons

$${}^C\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} y(t) = \Phi(t, y(t)),$$

pour tout $t \in J_k \cap [0,n],\ \ k = 1,\dots,m_n,.$

De plus, il est aisé de montrer que

$$y\left(t_k^+\right) = y(t_k) + I_k(y(t_k^-)), \qquad k = 1,\dots,m_n,$$

Tout cela prouve que y satisfait (3.3).

Par conséquent, l'équation intégrale (3.4) est équivalente au problème impulsif (3.3). ∎

3.2.2 Existence de la solution

Dans cette section nous allons établir l'existence de la solution du problème (3.2). En vue d'obtenir un tel résultat, on propose les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_0$) $\{\alpha_k\}_{k\geq 0} \subset (0,1)$. On pose $\alpha = \sup\limits_{k\geq 0}\{\alpha_k\}$ et $\Gamma' = \inf\limits_{k\geq 0}\{\Gamma(\alpha_k+1)\}$.

($\mathbf{H}_1$) La fonction $f:\ J\times X \to X$ est continue, et il existe une fonction continue et bornée $P : J \to \mathbb{R}^+$ et une fonction continue et croissante $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ telles que

$$\|f(t,u)\| \leq P(t)\varphi(\|u\|),\ \ t\in J,\ u\in X,$$

et

$$p^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} P(s)ds < \infty.$$

On pose $\|P\|_\infty = \sup\limits_{t\geq 0}|P(t)|$.

($\mathbf{H}_2$) $A : J \to X$ est continu et satisfait l'estimation

$$\|A(t)\|_{B(X)} \leq a(t),\ \ t\geq 0,$$

pour une certaine fonction continue et bornée $a : J \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$a^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} a(s)ds < \infty.$$

On pose $\|a\|_\infty = \sup\limits_{t\geq 0}|a(t)|$.

($\mathbf{H}_3$) Les fonctions $I_k : X \to X$ sont continues et il existe une suite de nombres positifs $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ tels que

$$\|I_k(u)\| \leq \lambda_k,\ \ u\in X,$$

et

$$\Lambda = \sum_{k\geq 1} \lambda_k < \infty.$$

($\mathbf{H}_4$) Il existe une constante $\rho > 0$ telle que

$$\|y_0\| + \Lambda + a^*\rho + p^*\varphi(\rho) \leq \rho. \tag{3.5}$$

Nous allons tout d'abord montrer que le problème (3.3) possède au moins une solution bornée $y_n \in \mathscr{PC}([0,n],X)$ en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.
Soit l'ensemble

$$\mathscr{B}_{n_\rho} = \left\{ y \in \mathscr{PC}([0,n],X),\ \|y\|_n \leq \rho \right\},$$

où ρ est la constante définie dans l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$. Il est clair que $\mathscr{B}_{n_\rho}$ est un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de $\mathscr{PC}([0,n],X)$. Pour tout $t \in J_k \cap [0,n],\ k = 0,1,\ldots,m_n$, on définit sur $\mathscr{B}_{n_\rho}$ l'opérateur $\mathscr{F}$ par

$$(\mathscr{F}y)(t) = \begin{cases} y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_0 - 1} \Phi(s, y(s))ds\ ,\ t \in [0, t_1] \\ y_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s, y(s))ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s, y(s))ds + \sum\limits_{i=1}^{k} I_i(y(t_i^-)),\ \ t \in J_k \cap [0,n],\ k = 1,\ldots,m_n \end{cases}$$

D'abord notons que $\mathscr{F}y \in \mathscr{B}_{n_\rho}$ pour tout $y \in \mathscr{B}_{n_\rho}$.
En effet, soit $y \in \mathscr{B}_{n_\rho}$, alors, pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned} \|(\mathscr{F}y)(t)\| &\leq \|y_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} \|\Phi(s, y(s))\| ds \\ &\leq \|y_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_0-1}\, \|A(s)\|\, \|y(s)\| ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_0^t \|f(s, y(s))\| ds. \end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{H}_4)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \|(\mathscr{F}y)(t)\| &\leq \|y_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} a(s) \|y(s)\| ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_0-1} P(s) \varphi(\|y\|) \| ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathscr{F} y\|_n \leq \|y_0\| + a^*\rho + p^*\varphi(\rho) \leq \rho.$$

D'autre part, pour tout $t \in J_k \cap [0, n]$, $k = 1, ..., m_n$, on a

$$\begin{aligned}
\|(\mathscr{F} y)(t)\| &\leq \|y_0\| + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi(s, y(s))\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi(s, y(s))\| ds + \sum_{i=1}^{k} \|I_i(y(t_i^-))\| \\
&\leq \|y_0\| + \Lambda + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi(s, y(s))\| ds
\end{aligned}$$

En estimant les termes du second membre on obtient

$$\begin{aligned}
\|(\mathscr{F} y)(t)\| &\leq \|y_0\| + \Lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi(s, y(s))\| ds \\
&\leq \|y_0\| + \Lambda + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} a(s) ds \\
&+ \varphi(\rho) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} P(s) ds \\
&\leq \|y_0\| + \Lambda + a^*\rho + p^*\varphi(\rho).
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathscr{F} y\|_n \leq \|y_0\| + \Lambda + a^*\rho + p^*\varphi(\rho) \leq \rho, \tag{3.6}$$

ce qui montre que $\mathscr{F} y \in \mathscr{B}_{n_\rho}$ si $y \in \mathscr{B}_{n_\rho}$, c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ envoie $\mathscr{B}_{n_\rho}$ dans $\mathscr{B}_{n_\rho}$.

Établissons maintenant que $\mathscr{F}$ est continu. On a

Lemme 3.2.2 *L'opérateur $\mathscr{F}$ est continu.*

Démonstration. Soit $\{y_q\}_{q\geq 1}$ une suite de $\mathscr{B}_{n_\rho}$ telle que $y_q \to y$, $q \to \infty$, dans $\mathscr{PC}([0,n],X)$. Alors pour $t \in [0,t_1]$ on a

$$
\begin{aligned}
\|(\mathscr{F}y_q)(t)-(\mathscr{F}y)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1}\|\Phi(s,y_q(s))-\Phi(s,y(s))\|ds \\
&\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_0-1}ds\right)\Bigg(\sup_{s\in[0,n]}\|A(s)(y_q(s))-y(s))\| \\
&+\sup_{s\in[0,n]}\|f(s,y_q(s))-f(s,y(s)))\|\Bigg) \\
&\leq \frac{t^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0+1)}\Bigg(\sup_{s\in[0,n]}\|A(s)(y_q(s))-y(s))\| \\
&+\sup_{s\in[0,n]}\|f(s,y_q(s))-f(s,y(s)))\|\Bigg) \\
&\leq \frac{n^\alpha}{\Gamma'}\Bigg(\sup_{s\in[0,n]}\|A(s)(y_q(s))-y(s))\| \\
&+\sup_{s\in[0,n]}\|f(s,y_q(s))-f(s,y(s)))\|\Bigg)
\end{aligned}
$$

Les hypothèses $(\mathbf{H}_0)-(\mathbf{H}_2)$ entrainent

$$\|\mathscr{F}y_q-\mathscr{F}y\|_n \to 0,\ q\to\infty.$$

Ensuite, pour tout $t \in J_k \cap [0,n],\ k = 1,\dots,m_n$ on a

$$\begin{aligned}
\|(\mathscr{F} y_q)(t) - (\mathscr{F} y)(t)\| &\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi(s, y_q(s)) - \Phi(s, y(s))\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi(s, y_q(s)) - \Phi(s, y(s))\| ds \\
&+ \sum_{i=1}^{k} \|I_k(y_q(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))\| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} ds \right) \\
&\times \left(\sup_{s\in[0,n]} \|A(s)(y_q(s)) - y(s))\| + \sup_{s\in[0,n]} \|f(s, y_q(s)) - f(s, y(s)))\| \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} \|I_i(y_q(t_i^-)) - I_i(y(t_i^-))\| \\
&\leq \frac{(m_n+1)n^{\alpha}}{\Gamma'} \left(\sup_{s\in[0,n]} \|A(s)(y_q(s)) - y(s))\| \right. \\
&\left. + \sup_{s\in[0,n]} \|f(s, y_q(s)) - f(s, y(s)))\| \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} \|I_i(y_q(t_i^-)) - I_i(y(t_i^-))\|
\end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses $(\mathbf{H}_0) - (\mathbf{H}_3)$ on obtient

$$\|\mathscr{F} y_q - \mathscr{F} y\|_n \to 0,\ q \to \infty.$$

Par conséquent, l'opérateur $\mathscr{F}$ est continu. ■

Il nous reste à montrer que $\mathscr{F}$ est compact pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Schauder. On a le résultat suivant :

Lemme 3.2.3 *L'opérateur $\mathscr{F}$ est compact.*

Démonstration. Pour établir la compacité de l'opérateur $\mathscr{F}$, il suffit de prouver que $\mathscr{F}(\mathscr{B}_{n_\rho})$ est relativement compacte en utilisant le théorème d'*Ascoli-Arzela de type $\mathscr{PC}$*.

Nous avons déjà montré que $\mathscr{F} y \in \mathscr{B}_{n_\rho}$, pour tout $y \in \mathscr{B}_{n_\rho}$, ce qui implique que $\mathscr{F}(\mathscr{B}_{n_\rho})$ est uniformément bornée. Il reste à montrer que $\mathscr{F}(\mathscr{B}_{n_\rho})$ est une famille équicontinue de $\mathscr{PC}([0,n],X)$. Soit alors $0<\tau_1<\tau_2<t_1$ et $y\in\mathscr{B}_{n_\rho}$, on a

$$\begin{aligned}
\|(\mathscr{F}y)(\tau_2)-(\mathscr{F}y)(\tau_1)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^{\tau_1}|(\tau_2-s)^{\alpha_0-1}-(\tau_1-s)^{\alpha_0-1}|\|\Phi(s,y(s))\|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha_0-1}\|\Phi(s,y(s))\|ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^{\tau_1}|(\tau_2-s)^{\alpha_0-1}-(\tau_1-s)^{\alpha_0-1}|(\|A(s)\|\left\|y(s)\right\|+\left\|f(s,y(s))\right\|)ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha_0-1}(\|A(s)\|\left\|y(s)\right\|+\left\|f(s,y(s))\right\|)ds\\
&\leq \frac{\|a\|_\infty\|y\|+\|P\|_\infty\varphi(\|y\|)}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^{\tau_1}|(\tau_2-s)^{\alpha_0-1}-(\tau_1-s)^{\alpha_0-1}|ds\\
&+\frac{\|a\|_\infty\|y\|+\|P\|_\infty\varphi(\|y\|)}{\Gamma(\alpha_0)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha_0-1}ds,
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales nous obtenons l'estimation

$$\|(\mathscr{F}y)(\tau_2)-(\mathscr{F}y)(\tau_1)\|\leq\frac{\|a\|_\infty\rho+\|P\|_\infty\varphi(\rho)}{\Gamma'}(\tau_1^{\alpha_0}-\tau_2^{\alpha_0}+2(\tau_2-\tau_1)^{\alpha_0}).$$

Le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est indépendant de y et tend vers 0 lorsque $\tau_1\longrightarrow\tau_2$. Ainsi $\mathscr{F}(\mathscr{B}_{n_\rho})$ est equicontinue dans l'intervalle $[0,t_1]$.

Maintenant, si $t \in J_k \cap [0,n],\ k = 1,\dots,m_n$ et $y \in \mathscr{B}_{n_\rho}$, on a pour tous τ_1, τ_2 satisfaisant $t_k < \tau_1 < \tau_2 < t_{k+1}$,

$$
\begin{aligned}
\|(\mathscr{F}y)(\tau_2) - (\mathscr{F}y)(\tau_1)\| \le\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^{\tau_1} |(\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1}| \|\Phi(s, y(s))\| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi(s, y(s))\| ds + \sum_{\tau_1 \le t_i \le \tau_2} \|I_i(y(t_i^-))\| \\
\le\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^{\tau_1} |(\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1}| (\|A(s)\| \left\|y(s)\right\| + \left\|f(s, y(s))\right\|) ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} (\|A(s)\| \left\|y(s)\right\| + \left\|f(s, y(s))\right\|) ds \\
& + \sum_{\tau_1 \le t_i \le \tau_2} \|I_i(y(t_i^-))\| \\
\le\ & \frac{\|a\|_\infty \|y\| + \|P\|_\infty \varphi(\|y\|)}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^{\tau_1} |(\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} - (\tau_1 - s)^{\alpha_k - 1}| ds \\
& + \frac{\|a\|_\infty \|y\| + \|P\|_\infty \varphi(\|y\|)}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_k - 1} ds.
\end{aligned}
$$

En calculant les intégrales du membre de droite, nous obtenons l'estimation

$$
\begin{aligned}
\|(\mathscr{F}y)(\tau_2) - (\mathscr{F}y)(\tau_1)\| \le\ & \frac{\|a\|_\infty \rho + \|P\|_\infty \varphi(\rho)}{\Gamma'} (\tau_1^{\alpha_k} - \tau_2^{\alpha_k} + 2(\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_k}) \\
& + \sum_{\tau_1 \le t_i \le \tau_2} \|I_i(y(t_i^-))\|,
\end{aligned}
$$

Le second membre de cette inégalité est indépendant de y et tend vers 0, lorsque $\tau_1 \longrightarrow \tau_2$, c'est-à-dire $\mathscr{F}(\mathscr{B}_{n_\rho})$ est equicontinue dans l'intervalle $J_k \cap [0,n],\ k = 1,\dots,m_n$.
D'autre part, comme l'espace X est de dimension finie, alors les fermetures des sous-ensembles $\mathscr{W}(t) = \left\{\mathscr{F}y(t) :\ y \in \mathscr{B}_{n_\rho},\ t \in J \setminus \{t_k\}\right\}$, $\mathscr{W}(t_k^+) = \left\{\mathscr{F}y(t_k^+) : u \in \mathscr{B}_{n_\rho}\right\}$, $\mathscr{W}(t_k^-) = \left\{\mathscr{F}y(t_k^-) : u \in \mathscr{B}_{n_\rho}\right\}$, pour $k = 1,\dots,m_n$ sont bornées et donc elles sont relativement compactes. Ainsi, $\mathscr{F}(\mathscr{B}_{n_\rho})$ est relativement compacte d'après le théorème d'*Ascoli-Arzela de type $\mathscr{PC}$*. ∎

Nous concluons d'après ce qui précède qu'en vertu du théorème du point fixe de Schauder l'opérateur $\mathscr{F}$ possède au moins un point fixe y_n dans $\mathscr{B}_{n_\rho}$ tel que

$$\|y_n\|_n \le \rho,$$

Nous somme maintenant sur le point d'énoncer et démontrer notre résultat principal.

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_0) - (\mathbf{H}_4)$ *le problème* (3.2) *possède au moins une solution bornée* $y \in \mathscr{PC}(J, X)$.

Démonstration. On a déjà montré auparavant que le problème (3.3) qui est la restriction du problème (3.2) sur un intervalle borné de type $[0, n]$ possède au moins une solution $y_n \in \mathscr{PC}([0, n], X)$ avec $\|y_n\|_n \le \rho$. Pour démontrer le Théorème 3.2.1, nous allons utiliser un processus de continuation afin d'étendre le résultat d'existence obtenu dans les intervalles bornés $[0, n]$, $n = 1, 2, \ldots$ à la demi-droite réelle positive.

Nous allons utiliser le processus de continuation suivant :
Soit $\{n_j\}_{j\ge 0}$ une suite croissante de nombres entiers qui satisfait

$$n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots \uparrow \infty.$$

Pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, on défini la fonction $u_j(t)$ comme suit :

$$u_j(t) = \begin{cases} y_j(t), & t \in [0,\ n_j] \\ y_j(n_j), & t \in [n_j,\ \infty), \end{cases} \tag{3.7}$$

où $y_j(t)$ est la solution dans l'intervalle $[0, n_j]$. Il est facile de voir que

$$\|u_j\|_{n_1} \le \rho, \quad j \in \mathbb{N}^*,$$

et pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, u_j satisfait l'équation intégrale suivante, pour $t \in J_k \cap [0, n_1]$, $k = 1, \ldots, m_{n_1}$,

$$u_j(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s, u_j) ds$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s, u_j) ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(u_j(t_i^-)).$$

En procédant d'une manière analogue, on montre que $\{u_j\}_{j\geq 1}$ est relativement compacte dans $\mathscr{PC}([0,n_1],X)$. Alors il existe un sous-ensemble propre N_1 de $\mathbb{N}^*$ et une fonction $v_1 \in \mathscr{PC}([0,n_1],X)$ tels que

$$u_j \to v_1 \text{ dans } \mathscr{PC}([0,n_1],X), \ \ j\to\infty, \ \ (\text{à travers } N_1).$$

D'autre part, on a

$$\|u_j\|_{n_2} \leq \rho, \ \ j \in N_1,$$

et comme la suite $\{u_j(t),\ j \in N_1\}$ est relativement compacte dans $\mathscr{PC}([0,n_2],X)$, alors il existe un sous-ensemble propre N_2 de N_1 et une fonction $v_2 \in \mathscr{PC}([0,n_2],X)$ tels que

$$u_j \to v_2 \ \ \text{dans } \mathscr{PC}([0,n_2],X), \ \ j\to\infty, \ \ (\text{à travers } \ N_2).$$

Poursuivant ce processus, nous obtenons une suite décroissante de sous-ensembles $\{N_l\}_{l\geq 1}$ satitsfaisant $N_{l+1} \subset N_l$, pour $l = 1,2,\ldots$, et une suite de fonctions continues par morceaux $\{v_l\}_{l\geq 1}$ telles que, pour chaque $l = 1,2,\ldots$, on a

(1) $v_l \in \mathscr{PC}([0,n_l],X)$,

(2) $\{u_j,\ j \in N_l\} \to v_l$ dans $\mathscr{PC}([0,n_l],X)$, lorsque $j\to\infty$, (à travers N_l),

(3) $v_{l+1} = v_l$ sur l'intervalle $[0,n_l]$ puisque $N_{l+1} \subset N_l$,

(4) Pour chaque $l \in \mathbb{N}^*$, la sous-suite $\{u_j,\ j \in N_l\}$ satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} u_j(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s,u_j)\,ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s,u_j)\,ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(u_j(t_i^-)), \end{aligned} \tag{3.8}$$

pour tout $t \in J_k \cap [0,n_l]$.

Ensuite, nous définissons la fonction $y : J = [0,\infty) \to X$ comme suit :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y(t) = v_l(t), \quad t \in (n_{l-1}, n_l], \ l \geq 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Il s'ensuit que $y \in \mathscr{PC}(J,X)$ et $\|y(t)\| \le \rho,\ t \in J$. De plus, faisant tendre $j \to \infty$ dans (3.8) nous obtenons l'équation intégrale

$$v_l(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s, v_l) ds \tag{3.10}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s, v_l) ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(v_l(t_i^-)),$$

pour tout $J_k \cap [0, n_l]$, et comme $v_l(s) = y(s)$ pour chaque $s \in (n_{l-1}, n_l]$, $l = 1, 2, \ldots$, alors l'équation (3.10) devient

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s, y(s)) ds$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s, y(s)) ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(y(t_i^-)), \quad t \in J_k \cap [0, n_l].$$

Compte tenu de l'équivalence de cette équation intégrale et le problème (3.2) nous déduisons que y est une solution globale continue par morceaux et bornée du problème (3.2). Ce qui achève la preuve du Théorème 3.2.1. ■

Pour illustrer le résultat d'existence ci-dessus, on considère l'exemple suivant :

3.2.3 Exemple

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathscr{D}_{t_0^+}^{\alpha_0} y(t) = \frac{e^{-t/2}}{5} y(t) + \frac{e^{-t}}{10} |y(t)|^{1/2}, \ t \in J_0 = [0, \pi] \\ y(0) = 1/6, \\ {}^{C}\mathscr{D}_{t_k^+}^{\alpha_k} y(t) = \frac{e^{-t/2}}{5} y(t) + \frac{e^{-t}}{10} |y(t)|^{1/2}, \ t \in J_k = (k\pi, (k+1)\pi] \\ \\ y((k\pi)^+) = y(k\pi) - \frac{|y(k\pi)|}{k^2(4 + |y(k\pi)|)}, \ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.11}$$

Dans le problème (3.11) on a

$$\alpha_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3+k}, \ k = 0, 1, \ldots, \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$A(t)x = \frac{e^{-t/2}}{5}x,\ f(t,x) = \frac{e^{-t}}{10}|x|^{1/2},\ \text{pour tout } (t,x) \in J \times \mathbb{R}.$$

$$I_k(t) = -\frac{t}{k^2(4+t)},\ \lambda_k = \frac{1}{k^2}.$$

Il est clair que les hypothèses $(\mathbf{H}_0) - (\mathbf{H}_3)$ sont satisfaites avec

$$a(t) = \frac{e^{-t/2}}{5},\ P(t) = \frac{e^{-t}}{10},\ \ \varphi(|u|) = |u(t)|^{1/2},\ \ \|P\|_\infty = \frac{1}{10},\ \|a\|_\infty = \frac{1}{5}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1}e^{-s}ds \\ &\leq \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5}{4}\left(e^{-\pi}\right)^k\pi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(1-e^{-\pi})} = 0.23156 < \infty. \end{aligned}$$

et

$$a^* = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1}e^{-\frac{s}{2}}ds \leq 0.34963 < \infty.$$

Par ailleurs, la série

$$\Lambda = \sum_{k\geq 1}\lambda_k = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

En ce qui concerne l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$ on note que

$$\|y_0\| + \Lambda + a^*\rho + p^*\varphi(\rho) \leq \frac{1}{6} + \frac{\pi^2}{6} + 0.34963\rho + 0.23156\sqrt{\rho} \leq \rho,$$

qui est satisfaite pour tout $\rho \geq 3.5$. Comme toutes les hypothèses du Théorème 3.2.1 sont satisfaites, alors le problème (3.11) possède au moins une solution globale continue par morceaux et bornée sur le demi-axe réel positif.

Conclusion et Perspectives

Au terme de cette thèse, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité de certains problèmes différentiels d'ordres fractionnaires relatifs à la dérivée de Caputo dans des espaces de Banach. Tout d'abord, nous avons établi des résultats d'existence globale et d'unicité d'un problème différentiel fractionnaire de type neutre en utilisant les techniques de points fixes. La dépendance de solutions par rapport aux données initiales a été également discutée. Les résultats obtenus sont soumis pour publication [48].

Par ailleurs, nous avons présenté un résultat d'existence globale de la solution d'une nouvelle classe de problèmes différentiels impulsifs d'ordres fractionnaires multiples. Ce résultat est obtenu à l'aide de la technique de point fixe combinée avec un certain processus de continuation. Ce résultat sera incessamment publié dans une revue de renommée [47].

Les résultats présentés dans cette thèse offrent naturellement de nombreuses perspectives. La première est l'étude des équations différentielles fractionnaires dont l'ordre de dérivation est compris entre 1 et 2. La deuxième perspective envisageable serait l'étude des équations impulsives d'ordres fractionnaires avec retard fini et infini, ainsi que la stabilité des solutions de ces équations.

Finalement, une perspective, qui semble être, une continuité logique de ce travail, est le développement de modèles numériques correspondant aux problèmes présentés dans ce travail.

Annexe A

Copie de l'article publié

Fixed Point Theory, xx(2014), No.xx, ...-...
http://www.math.ubbcluj.ro/~nodeacj/sfptcj.html

ON GLOBAL EXISTENCE OF CERTAIN IMPULSIVE MULTI-ORDERS FRACTIONAL DIFFERENTIAL PROBLEM

HAMZA MEDJEKAL* AND SAÏD MAZOUZI**

*,**Laboratory of Applied Mathematics, Badji Mokhtar-Annaba University,
P.O.Box 12, 23000 Annaba, Algeria.
*h.medjekal@yahoo.com; **mazouzi_sa@yahoo.fr

Abstract. In this paper, we introduce a novel approach to tackle a class of fractional differential problems with impulses on the positive half-ray. So, we establish the existence of a bounded solution to certain impulsive multi-orders fractional initial value problem in a finite dimensional Banach space. The obtained result is based on the Schauder's fixed point theorem as well as certain continuation process. Finally, an illustrative example is provided.

Key Words and Phrases: Caputo's fractional derivative, multi-orders, impulsive conditions, Schauder's fixed point Theorem, PC-Ascoli-Arzela Theorem, continuation process.
2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 34A12, 34A37.

1. Introduction

Due to their intensive applications in the modeling of many phenomena in various fields of science and engineering, Fractional Differential Equations (FDEs) have attracted the attention of a great deal of investigators in the last decade. Actually, the theory of FDEs has been rapidly developed, see the monographs of Kilbas *et al.* [14], Kilbas and Trujillo [15, 16], Lakshmikantham *et al.* [17], Miller and Ross [18], Srivastava and Saxena [23], Podlubny [22], Agarwal *et al.* [1], and so we can encounter in the literature several new results dealing with the FDEs such as in viscoelasticity, electrochemistry, control, porous media, etc. (see [9, 11, 13, 21] and the references therein).

Regarding the impulsive fractional differential equations (IFDE), we mention that they are nowadays an important tool for various mathematical models such as in physical and mathematical sciences. Due to their effectiveness, impulsive conditions have been used in specific models dealing with rapid changes which cause the discontinuity of the solution in a finite or infinite increasing temporal moments. For this reason several mathematicians are investigating the properties of solutions of such problems; unfortunately, most of the developed results are studied in the finite interval $[0,T]$, see [3, 4, 7, 19]. For instance in [10], the authors studied the existence and uniqueness of a class of impulsive fractional differential equations on $J=[0,T]$ and they introduced a new formula of solutions for an impulsive Cauchy problem with Caputo's fractional derivative by applying fixed point methods.

As far as we are involved in the study of impulsive fractional equations we must point out that Lemma 2.6 used in [10] to obtain the equivalence between an impulsive fractional problem and an integral equation is not correct as we see in the following counter-example:

Let us consider the function described on page 48 of the famous book of B. Nagy and F. Riesz [20] which is an example of a monotonic continuous function $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, not constant in any subinterval of $[0,1]$ and satisfies $F'=0$, almost everywhere in $[0,1]$. So, in terms of Caputo's derivative we would have formally for any $\alpha\in(0,1)$

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}F(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}F'(s)\,ds=0,\ t\in[0,1] \\ F(a) &= F_0,\ (0<a<1),\ F_0 \text{ being the value of } F \text{ at } a. \end{aligned}$$

However, there is no apparent equivalence between this problem and the fractional integral representation of F defined in Lemma 2.6 [10], otherwise the function $F(t)$ would be constant and equal to F_0 throughout the interval $[0,1]$ which is a contradiction! Furthermore, since in the same work Lemma 2.7 is based on Lemma 2.6 then it is not correct and may lead to apparent contradictions... For further details see the recent paper of A. Bouzaroura and S. Mazouzi [8]. The reader may find in the recent comments about the concept of impulsive fractional differential equations of [24] that the proposed approach in [10] is incorrect.

Our main contribution in this paper is the study of new multi-orders fractional problems in a finite dimensional normed space $(X,\ \|.\|)$ such as either the euclidean space $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ subject to some impulsive conditions, namely

$$\begin{cases} {}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}y(t)=A(t)y(t)+f(t,y(t)),\ t\in J_k=(t_k,t_{k+1}],\ k=0,1,..., \\ y(0)=y_0\in X, \\ y(t_k^+)=y(t_k^-)+I_k(y(t_k^-)),\quad k\geq 1, \end{cases} \tag{1}$$

where ${}^{C}D_{t_k^+}^{\alpha_k}$ is the Caputo's fractional derivative of order $\alpha_k\in(0,1)$, $k=0,1,...$; $J_0=[0,t_1]$; $J_k=(t_k,t_{k+1}]$, for $k=1,...$; and y_0 is a given initial value in X. On the other hand, $A:J=[0,+\infty)\to\mathcal{B}(X)$, where $\mathcal{B}(X)$ is the Banach space of bounded linear operators on X into itself, $f:J\times X\to X$ and $I_k:X\to X$ are given continuous functions, $0=t_0<t_1<...<t_m<t_{m+1}<...$ Finally, $y(t_k^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}y(t_k+h)$ and

$y(t_k^-) = \lim_{h \to 0^-} y(t_k + h)$ represent the right and left limits of $y(t)$ at $t = t_k$.
Let us first anticipate our study by a concrete example of such a problem in $\mathbb{R}$ in a finite interval $[0, T]$, $T > 1$, namely

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{1/2} y(t) = t^2 - 1, \ t \in J_0 = [0,1], \\ {}^{C}D_{1^+}^{1/3} y(t) = t^2 - 2t + 1, \ t \in J_1 = (1, T], \\ y(0) = 1, \\ y(1^+) = y(1) + 2. \end{cases} \tag{2}$$

First, we look for a piecewise continuous function $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfying (2). Solving the subproblem

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{1/2} y(t) = t^2 - 1, \ t \in J_0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

we get

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-s)^{-1/2} s^2 ds - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds \\ &= 1 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}, \end{aligned}$$

so that $y(1) = 1 - \frac{14}{15\sqrt{\pi}}$.

Next, solving the subproblem

$$\begin{cases} {}^{C}D_{1^+}^{1/3} y(t) = t^2 - 2t + 1, \ t \in J_1, \\ y(1^+) = y(1) + 2 = 3 - \frac{14}{15\sqrt{\pi}}, \end{cases}$$

we find

$$\begin{aligned} y(t) &= y\left(1^+\right) + \frac{1}{\Gamma(1/3)} \int_1^t (t-s)^{-2/3} (s-1)^2 ds \\ &= 3 - \frac{14}{15\sqrt{\pi}} + \frac{27}{14\Gamma(1/3)} (t-1)^{7/3}. \end{aligned}$$

Thus, the piecewise continuous function

$$y(t) = \begin{cases} 1 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}, \ t \in J_0, \\ 3 - \frac{14}{15\sqrt{\pi}} + \frac{27}{14\Gamma(1/3)} (t-1)^{7/3}, \ t \in J_1, \end{cases}$$

is a solution to the impulsive fractional problem (2).
In view of these new ideas we intent to extend in this paper recent results on fractional differential equations on unbounded domains, for instance those of Benchohra *et al.* in [2, 6] established in the absence of impulses, as well as those of K. Balachandran *et al.* in [5] considered in a Banach space but only for the finite interval $[0, T]$. We point out that using the Schauder's fixed point theorem combined with the diagonalization process the authors in [2, 6] proved the existence of bounded real-valued solutions of

some fractional order differential equation on the half-ray $J = [0, +\infty)$.
The paper is organized as follows, in section 2 we introduce some basic definitions and notations, and give some necessary lemmas that will be used throughout this paper. In section 3 we state and prove our main results. Finally, in the last section we give a concrete example that illustrates the existence result established in Theorem 3.1.

2. Preliminaries

Let $\mathbb{R}^+ = [0, \ \infty)$ and let I be an arbitrary interval of $\mathbb{R}$; we denote by $C(I, X)$ the linear space of all continuous functions $y : I \to X$.

First, we introduce the Caputo's fractional derivative as defined in the reference [14]. We have

Definition 2.1. *We define the left-sided fractional Riemann-Liouville integral of order $\alpha \in (0, 1)$ of a function $f : [a, b] \to X$ as follows*

$$J^{\alpha}_{a^+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a.$$

We define the left-sided fractional derivative of order $\alpha \in (0, 1)$ of a function $f : [a, b] \to X$ in the sense of Caputo by

$$^{C}D^{\alpha}_{a^+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t > a.$$

Remark 2.1. *We point out that the above integrals are understood in the sense of Bochner and we assume that the function f satisfies the necessary conditions for which those integrals are well defined.*

We set

$J_0 = [0, t_1]$; $J_k = (t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, ...$ and $m_n = \max\{k \in \mathbb{N}, t_k < n\}$, for $n \geq 1+[t_1]$,

and for each $n \geq 1 + [t_1]$, we introduce the Banach space

$$PC([0, n], X) = \left\{ \begin{array}{l} y : [0, n] \to X : y \in C(J_k \cap [0, n], X), \ k = 1, ..., m_n, \\ y(t_k^+) \text{ and } y(t_k^-) \text{ exist}, y(t_k^-) = y(t_k,), \ k = 1, ..., m_n \end{array} \right\},$$

equipped with the norm

$$\|y\|_n = \sup_{t \in [0,n]} \|y(t)\|.$$

We need the following hypotheses:
$(\mathcal{H}_0)$ $\{\alpha_k\}_{k \geq 0} \subset (0, 1)$. We set $\alpha = \sup_{k \geq 0} \{\alpha_k\}$ and $\Gamma' = \inf_{k \geq 0} \{\Gamma(\alpha_k + 1)\}$.
$(\mathcal{H}_1)$ $f : \ J \times X \to X$ is a continuous function.

$(\mathcal{H}_2)$ There exist a continuous bounded function $P : J \to \mathbb{R}^+$ and a continuous nondecreasing function $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ such that

$$\|f(t,u)\| \leq P(t)\varphi(\|u\|), \quad t \in J,\ u \in X, \tag{3}$$

and

$$p^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} P(s)ds < \infty.$$

We put $\|P\|_\infty = \sup\limits_{t\geq 0} |P(t)|$.

$(\mathcal{H}_3)$ $A : J \to X$ is continuous and satisfies the estimate

$$\|A(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq a(t),\ t \geq 0,$$

for some continuous bounded function $a : J \to \mathbb{R}^+$ such that

$$a^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} a(s)ds < \infty.$$

We set $\|a\|_\infty = \sup\limits_{t\geq 0} |a(t)|$.

$(\mathcal{H}_4)$ The functions $I_k : X \to X$ are continuous and there exists a sequence of positive numbers $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ such that

$$\|I_k(u)\| \leq \lambda_k, \quad u \in X,$$

and

$$\Lambda = \sum_{k\geq 1} \lambda_k < \infty;$$

$(\mathcal{H}_5)$ There exists a constant $\rho > 0$ such that

$$\|y_0\| + \Lambda + a^*\rho + p^*\varphi(\rho) \leq \rho. \tag{4}$$

Next, consider the impulsive differential equation of fractional multi-orders

$$\begin{cases} {}^C D^{\alpha_k}_{t_k^+} y(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t)),\ t \in J_k \cap [0,n],\ k = 0,1,...,m_n, \\ y(0) = y_0 \in X, \\ y(t_k^+) = y\left(t_k^-\right) + I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1,2,...,m_n. \end{cases} \tag{5}$$

To be more rigorous we define a solution to the problem (5) as follows

Definition 2.2. *A function $y \in PC([0,n], X)$ is said to be a solution to the problem (5) if ${}^C D^{\alpha_k}_{t_{k+}} y\ (t)$ exists for $t \in J_k \cap [0,n]$, for each $k = 0,...,m_n$ and satisfies the equation ${}^C D^{\alpha_k}_{t_{k+}} y(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t))$ for $t \in J_k \cap [0,n]$, for each $k = 0,...,m_n$*

and the conditions

$$\begin{cases} y(0)=y_0\in X, \\ y(t_k^+)=y\left(t_k^-\right)+I_k(y(t_k^-)), \quad k=1,2,...,m_n. \end{cases} \tag{6}$$

Next, we state and prove a useful equivalence between problem (5) and certain integral equation.
Let $h\in C(\mathbb{R}^+,X)$ and consider the fractional differential equation

$$^{C}D_{t_k+}^{\alpha_k}y(t)=h(t), \quad t\in J_k\cap[0,n], k=0,...,m_n \tag{7}$$

We refer to (7)-(6) as *(pb)*, we have the following result:

Lemma 2.1. *A function $y\in PC([0,n],X)$ is a solution to the problem (pb) if and only if it satisfies the following integral equation*

$$y(t)=\begin{cases} y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_0-1}h(s)ds\ ,\ t\in[0,t_1] \\ y_0+\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}h(s)ds \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int\limits_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha_k-1}h(s)ds+\sum\limits_{i=1}^{k}I_i(y(t_i^-)),\ t\in J_k\cap[0,n],\ k=1,...,m_n. \end{cases} \tag{8}$$

Proof. Let y be a solution to problem *(pb)* and let $t\in[0,t_1]$, then we have

$$y(t)=y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_0-1}h(s)ds.$$

If $t\in(t_1,\ t_2]\cap[0,n]$, then

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_1^+)+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha_1-1}h(s)ds \\ &= y(t_1)+I_1(y(t_1^-))+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha_1-1}h(s)ds \\ &= y_0+I_1(y(t_1^-))+\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int\limits_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha_0-1}h(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha_1-1}h(s)ds. \end{aligned}$$

If $t \in (t_2, t_3] \cap [0, n]$, then we get once again

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_2^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} (t_2 - s)^{\alpha_2 - 1} h(s) ds \\ &= y(t_2^-) + I_2(y(t_2^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} (t - s)^{\alpha_2 - 1} h(s) ds \\ &= y_0 + I_1(y(t_1^-)) + I_2(y(t_2^-)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_{0}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha_0 - 1} h(s) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha_1 - 1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{t_2}^{t} (t - s)^{\alpha_2 - 1} h(s) ds, \end{aligned}$$

and more generally, if $t \in J_k \cap [0, n]$, $k = 1, .., m_n$, then we get

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1} - 1} h(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} h(s) ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(y(t_i^-)). \end{aligned}$$

Conversely, assume that y satisfies (8). If $t \in [0, t_1] \cap [0, n]$, then $y(0) = y_0$. Next, since the Caputo's derivative of a constant is zero, then we merely obtain ${}^{C}D_{t_k+}^{\alpha_k} y(t) = h(t)$, $t \in J_k \cap [0, n]$, $k = 0, 1, .., m_n$. On the other hand, one can easily verify that

$$y\left(t_k^+\right) = y\left(t_k\right) + I_k(y(t_k^-)), \qquad k = 1, ..., m_n,$$

which completes the proof. □

The next Theorem is a piecewise continuous version of the famous Ascoli-Arzela's theorem. It is essentially needed in the proof of our main result.

Theorem 2.1. [25] *Let X be a Banach space and $\mathcal{W}$ a subset of $PC([0, n], X)$. Then $\mathcal{W}$ is relatively compact if the following conditions are satisfied:*
(i) $\mathcal{W}$ is a uniformly bounded subset of $PC([0, n], X)$;
(ii) $\mathcal{W}$ is equicontinuous in (t_k, t_{k+1}), $k = 0, 1, ..., m_n$, where $t_0 = 0$, $t_{m_{n+1}} = n$;
(iii) $\mathcal{W}(t) = \{u(t) \mid u \in \mathcal{W},\ t \in J_n^*\}$, $\mathcal{W}(t_k^+) = \{u(t_k^+) : u \in \mathcal{W}\}$ and $\mathcal{W}(t_k^-) = \{u(t_k^-) : u \in \mathcal{W}\}$ are relatively compact subsets of X, where $J_n^* = [0, n] \setminus \{t_k\}_{k=0}^{m_{n+1}}$.

3. Main results

We will establish in this section the global existence of at least one bounded solution to the problem (1) by using Schauder's fixed point theorem combined with certain continuation process based on Arzela-Ascoli's Theorem. Our main result is the following

Theorem 3.1. *If the hypotheses $(\mathcal{H}_1)-(\mathcal{H}_5)$ are satisfied, then problem (1) has at least one bounded solution $y \in PC(J,X)$.*

Proof. The proof will be given in two parts:

Part I: We begin by showing that problem (5) has a solution $y_n \in PC([0,n],X)$ satisfying $\|y_n\|_n \leq \rho$, for any $n \geq 1+[t_1]$. We set $\Phi(t,y(t)) = A(t)y(t)+f(t,y(t))$, and for each $t \in J_k \cap [0,n]$, $k=0,1,...,m_n$, we define the mapping

$$\mathcal{F} : PC([0,n],X) \to PC([0,n],X)$$

by

$$(\mathcal{F}y)(t) = \begin{cases} y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_0-1}\Phi(s,y(s))ds\ ,\ t \in [0,t_1], \\ y_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i-s)^{\alpha_{i-1}-1}\Phi(s,y(s))ds \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k-1}\Phi(s,y(s))ds + \sum\limits_{i=1}^{k} I_i(y(t_i^-)), \\ \quad t \in J_k \cap [0,n]\,,\ k=1,...,m_n. \end{cases}$$

Our main goal is to show that the mapping $\mathcal{F}$ has a fixed point which is a solution to the problem (5). Indeed, let

$$\mathcal{C} = \{y \in PC([0,n],X),\quad \|y\|_n \leq \rho\},$$

be the closed ball of $PC([0,n],X)$ centered at 0 and with radius ρ defined in $(\mathcal{H}_5)$. It is clear that $\mathcal{C}$ is a closed and convex subset of $PC([0,n],X)$.
We proceed in several steps:
Step 1: $\mathcal{F}$ maps $\mathcal{C}$ into itself.
Let $y \in \mathcal{C}$, then for $t \in [0,t_1]$, we have

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{F}y)(t)\| &\leq \|y_0\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_0-1}\|\Phi(s,y(s))\|ds \\ &\leq \|y_0\| + a^*\rho + p^*\varphi(\rho) \\ &\leq \rho. \end{aligned}$$

Moreover, for each $t \in J_k \cap [0, n]$, $k = 0, 1, ..., m_n$, we have

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}y)(t)\| \leq \|y_0\| + & \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi(s, y(s))\| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi(s, y(s))\| ds + \sum_{i=1}^{k} \|I_i(y(t_i^-))\| \\
& \leq \|y_0\| + \Lambda + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi(s, y(s))\| ds \\
& \leq \|y_0\| + \Lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi(s, y(s))\| ds \\
& \leq \|y_0\| + \Lambda + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} a(s) ds \\
& + \varphi(\rho) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} P(s) ds \\
& \leq \|y_0\| + \Lambda + a^* \rho + p^* \varphi(\rho).
\end{aligned}$$

Thus

$$\|\mathcal{F}y\|_n \leq \|y_0\| + \Lambda + a^* \rho + p^* \varphi(\rho) \leq \rho, \tag{9}$$

showing that $\mathcal{F}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$.

Step 2: Let us prove that $\mathcal{F}$ is continuous. Indeed, consider a sequence $\{y_q\}_{q \geq 1}$ such that $y_q \to y$, in $PC([0, n], X)$, when $q \to \infty$. Then, for any $t \in [0, t_1]$, we have

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}y_q)(t) - (\mathcal{F}y)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_0 - 1} \|\Phi(s, y_q(s)) - \Phi(s, y(s))\| ds \\
&\leq \frac{n^{\alpha}}{\Gamma'} (\sup_{s \in [0,n]} \|A(s)(y_q(s)) - y(s))\| \\
&\quad + \sup_{s \in [0,n]} \|f(s, y_q(s)) - f(s, y(s)))\|).
\end{aligned}$$

Since f and A are continuous, then

$$\|\mathcal{F}y_q - \mathcal{F}y\|_n \to 0, \; q \to \infty.$$

Next, for each $t \in J_k \cap [0, n]$, $k = 1, ..., m_n$, we have

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}y_q)(t) - (\mathcal{F}y)(t)\| \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \|\Phi(s, y_q(s)) - \Phi(s, y(s))\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} \|\Phi(s, y_q(s)) - \Phi(s, y(s))\| ds \\
&+ \sum_{i=1}^{k} \|I_k(y_q(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))\| \\
&\leq \quad \frac{(m_n + 1)n^\alpha}{\Gamma'} \Big(\sup_{s \in [0,n]} \|A(s)(y_q(s)) - y(s))\| \\
&+ \sup_{s \in [0,n]} \|f(s, y_q(s)) - f(s, y(s)))\| \Big) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} \|I_i(y_q(t_i^-)) - I_i(y(t_i^-))\|.
\end{aligned}$$

The continuity of the functions f, A, I_i, for $i = 1, ..., k$, implies that

$$\|\mathcal{F}y_q - \mathcal{F}y\|_n \to 0, \ \ q \to \infty,$$

which establishes the continuity of $\mathcal{F}$.

Step 3: $\mathcal{F}$ maps $\mathcal{C}$ into an equicontinuous family of $PC([0, n], X)$.
Let $0 < \tau_1 < \tau_2 < t_1$ and $y \in \mathcal{C}$, then

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}y)(\tau_2) - (\mathcal{F}y)(\tau_1)\| \quad &\leq \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_{0}^{\tau_1} |(\tau_2 - s)^{\alpha_0 - 1} - (\tau_1 - s)^{\alpha_0 - 1}| \|\Phi(s, y(s))\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_0 - 1} \|\Phi(s, y(s))\| ds \\
&\leq \quad \frac{\|a\|_\infty \|y\| + \|P\|_\infty \varphi(\|y\|)}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_{0}^{\tau_1} |(\tau_2 - s)^{\alpha_0 - 1} - (\tau_1 - s)^{\alpha_0 - 1}| ds \\
&+ \frac{\|a\|_\infty \|y\| + \|P\|_\infty \varphi(\|y\|)}{\Gamma(\alpha_0)} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha_0 - 1} ds.
\end{aligned}$$

Hence

$$\|(\mathcal{F}y)(\tau_2) - (\mathcal{F}y)(\tau_1)\| \leq \frac{\|a\|_\infty \rho + \|P\|_\infty \varphi(\rho)}{\Gamma'} (\tau_1^{\alpha_0} - \tau_2^{\alpha_0} + 2(\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_0}).$$

Obviously, the right-hand side of the above inequality tends to zero as $\tau_1 \longrightarrow \tau_2$, therefore $\mathcal{FC}$ is equicontinuous in the interval $[0, t_1]$.
More generally, regarding the interval $J_k \cap [0, n]$, $k = 1, ..., m_n$, if $y \in \mathcal{C}$, then for every τ_1, τ_2 satisfying $t_k < \tau_1 < \tau_2 < t_{k+1}$, we obtain the following estimate

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{F}y)(\tau_2) - (\mathcal{F}y)(\tau_1)\| \quad &\leq \quad \frac{\|a\|_\infty \rho + \|P\|_\infty \varphi(\rho)}{\Gamma'}(\tau_1^{\alpha_k} - \tau_2^{\alpha_k} + 2(\tau_2 - \tau_1)^{\alpha_k}) \\ &\quad + \sum_{\tau_1 \leq t_i \leq \tau_2} \|I_i(y(t_i^-))\|,\end{aligned}$$

which shows once again that $\mathcal{FC}$ is equicontinuous in the interval $J_k \cap [0, n]$, for $k = 1, ..., m_n$.
Thanks to the finite dimension assumption of X condition (iii) of Theorem 2.1 is obviously satisfied. As a consequence of the steps 1-3 together with the fact that X is of finite dimension we conclude by the PC-type Arzela-Ascoli theorem that $\mathcal{F}$ is completely continuous.
Accordingly, in virtue of Schauder's fixed point theorem $\mathcal{F}$ has a fixed point y_n in $\mathcal{C}$ which is a bounded solution to the problem (5) satisfying

$$\|y_n\|_n \leq \rho.$$

Next, in order to extend the foregoing existence result from the finite interval J_n, $n \geq 1 + [t_1]$ to the positive half ray we use certain continuation process which can be described as follows:
Part II: Continuation process. Let $\{n_j\}_{j \geq 0}$ be an increasing sequence of integer numbers satisfying

$$n_0 = 0 < n_1 < n_2 < ... < n_j < ... \uparrow \infty.$$

For each $j \in \mathbb{N}^*$, we define the function $u_j(t)$ as follows:

$$u_j(t) = \begin{cases} y_j(t), & t \in [0,\ n_j] \\ y_j(n_j), & t \in [n_j,\ \infty), \end{cases} \tag{10}$$

where $y_j(t)$ is the piecewise continuous solution on the interval $[0,\ n_j]$ obtained in the above steps. It is easy to see that

$$\|u_j\|_{n_1} \leq \rho, \quad j \in \mathbb{N}^*,$$

and for each $j \in \mathbb{N}^*$, u_j satisfies the following integral equation for $t \in J_k \cap [0,\ n_1]$, $k = 1,\ 2, ..., m_{n_1}$

$$\begin{aligned} u_j(t) &= y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s, u_j) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s, u_j) ds \ + \sum_{i=1}^{k} I_i(u_j(t_i^-)). \end{aligned}$$

Following the above steps we can prove that the sequence $\{u_j\}_{j\geq 1}$ is relatively compact in $PC([0,\ n_1], X)$, so there is an infinite proper subset N_1 of $\mathbb{N}^*$ and a function $v_1 \in PC([0,\ n_1], X)$ such that

$$u_j \to v_1 \text{ in } PC([0,\ n_1], X), \text{ as } \ j \to \infty, \ \text{(through } \ N_1).$$

We notice that

$$\|u_j\|_{n_2} \leq \rho, \quad j \in N_1,$$

and since the sequence $\{u_j(t),\ j \in N_1\}$ is relatively compact in $PC([0,\ n_2], X)$, then there exists an infinite proper subset N_2 of N_1 and a function $v_2 \in PC([0,\ n_2], X)$ such that

$$u_j \to v_2 \text{ in } PC([0,\ n_2], X), \text{ as } j \to \infty, \ \text{(through } \ N_2).$$

Continuing in this way we obtain a sequence of decreasing subsets $\{N_l\}_{l\geq 1}$ satisfying

$N_{l+1} \subset N_l$, for every $l \geq 1$, and a sequence of piecewise continuous functions $\{v_l\}_{l\geq 1}$ such that, for each $l = 1, 2, ...$, we have
(1) $v_l \in PC([0,\ n_l], X)$,
(2) $\{u_j,\ j \in N_l\} \to v_l$ in $PC([0,\ n_l], X)$, as $j \to \infty$, (through N_l),
(3) $v_{l+1} = v_l$ on the interval $[0,\ n_l]$ since $N_{l+1} \subset N_l$,
(4) For each $l \in \mathbb{N}^*$, the subsequence $\{u_j,\ j \in N_l\}$ satisfies the following integral equation

$$\begin{aligned} u_j(t) &= y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s, u_j) ds \qquad (11) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s, u_j) ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(u_j(t_i^-)), \end{aligned}$$

for every $t \in J_k \cap [0, n_l]$.

Next, define a function $y : J = [0, \infty) \to X$ as follows

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y(t) = v_l(t), \quad t \in (n_{l-1}, n_l], \ l = 1, 2, ... \end{cases} \tag{12}$$

It follows that $y \in PC(J, X)$ and $\|y(t)\| \le \rho, \ t \in J$. Furthermore, letting $j \to \infty$ in (11), we obtain the following integral equation

$$\begin{aligned} v_l(t) &= y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s, v_l(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s, v_l(s)) ds \ + \sum_{i=1}^{k} I_i(v_l(t_i^-)), \end{aligned} \tag{13}$$

for every $t \in J_k \cap [0, n_l]$. Now since we have $v_l(s) = y(s)$, for every $s \in (n_{l-1}, n_l]$, $l = 1, 2, ...$, then equation (13) merely becomes

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1} \Phi(s, y(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha_k - 1} \Phi(s, y(s)) ds + \sum_{i=1}^{k} I_i(y(t_i^-)), \ t \in J_k \cap [0, n_l] \end{aligned}$$

from which we infer that y satisfies problem (1). Accordingly, y is a piecewise continuous bounded solution to the given problem which completes the proof of the main theorem.

□

Here is a concrete example illustrating the above global existence theorem.

4. Example

Let $\alpha_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3+k}, \ k = 0, 1, ...$ and consider the problem

$$\begin{cases} {}^C D_{t_0^+}^{\alpha_0} y(t) = \frac{e^{-t/2}}{5} y(t) + \frac{e^{-t}}{10} |y(t)|^{1/2}, \ t \in J_0 = [0, \pi] \\ y(0) = 1/6, \\ {}^C D_{t_k^+}^{\alpha_k} y(t) = \frac{e^{-t/2}}{5} y(t) + \frac{e^{-t}}{10} |y(t)|^{1/2}, \ t \in J_k = (k\pi, (k+1)\pi] \\ \\ y((k\pi)^+) = y(k\pi) - \frac{|y(k\pi)|}{k^2(4 + |y(k\pi)|)}, \ k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{14}$$

Here

$$A(t)x = \frac{e^{-t/2}}{5} x, \ f(t, x) = \frac{e^{-t}}{10} |x|^{1/2}, \ \text{for every } (t, x) \in J \times \mathbb{R},$$

$$I_k(t) = -\frac{t}{k^2(4+t)},\ \lambda_k = \frac{1}{k^2},\ k = 1, 2, ...$$

It is clear that hypotheses $(\mathcal{H}_0)-$ $(\mathcal{H}_3)$ are satisfied with

$$a(t) = \frac{e^{-t/2}}{5},\ P(t) = \frac{e^{-t}}{10},\ \ \varphi(|u|) = |u(t)|^{1/2},\quad \|P\|_\infty = \frac{1}{10},\ \|a\|_\infty = \frac{1}{5}.$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1}e^{-s}ds \\ &\leq \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{-(i-1)\pi}}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1}ds \leq 0.231\,56 < \infty. \end{aligned}$$

Proceeding in the same manner we find that

$$a^* = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i - s)^{\alpha_{i-1}-1}e^{-\frac{s}{2}}ds \leq 0.349\,63 < \infty.$$

In addition, we have

$$\Lambda = \sum_{k\geq 1}\lambda_k = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Regarding condition $(\mathcal{H}_5)$ we notice that we have

$$\|y_0\| + \Lambda + a^*\rho + p^*\varphi(\rho) \leq \frac{1}{6} + \frac{\pi^2}{6} + 0.349\,63\rho + 0.231\,56\sqrt{\rho} \leq \rho,$$

which is satisfied for any $\rho \geq 3.45$. Since all the assumptions of Theorem 3.1 are satisfied, then problem (14) has a bounded global solution on J.

References

[1] R. P. Agarwal, M. Benchohra, B. A. Slimani, Existence results for differential equations with fractional order and impulses, Mem. Differential Equations Math. Phys. 44 (2008), 1–21.

[2] A. Arara, M. Benchohra, N. Hamidi, J. J. Nieto, Fractional order differential equations on an unbounded domain, Nonlinear Anal. 72 (2010), 580-586.

[3] K. Balachandran, S. Kiruthika, J. J. Trujillo, Existence results for fractional impulsive integrodifferential equations in Banach spaces, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 16, 2011 1970–1977.

[4] K. Balachandran, S. Kiruthika, J. J. Trujillo, On fractional impulsive equations of Sobolev type with nonlocal condition in Banach spaces, Comput. Math. Appl., 62, 2011, 157–1165.

[5] K. Balachandran, S. Kiruthika, Existence of solutions of abstract fractional impulsive semilinear evolution equations, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2010 No 4, 1–12.

[6] M. Benchohra, F. Berhoun, G. N'Guérékata, Bounded solutions for fractional order differential equations on the half-line, Bull. Math. Anal. Appl., Vol. 4, 1(2012), 62-71.

[7] M. Benchohra, B. A. Slimani, Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2009 (2009), No. 10, pp. 1-11.

[8] A. Bouzaroura and S. Mazouzi, An Alternative Method for the Study of Impulsive Differential Equations of Fractional Orders in a Banach Space, Int. J. Differ. Equ., Vol. 2013 (2013), Article ID 191060.

[9] K. Diethelm, A. D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoelasticity, in: F. Keil, W. Mackens, H. Voss, J. Werther (Eds.), Scientific Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, pp. 217–307.

[10] M. Fečkan, Y. Zhou, J. Wang, On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 2012, 3050–3060

[11] L. Gaul, P. Klein, S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, Mech. Syst. Signal Process. 5 (1991) 81–88.

[12] E. Hernandez, D. O'Regan, K. Balachandran, On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives, Nonlinear Anal. 73 (2010), 3462–3471.

[13] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, 2000.

[14] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed. Van Mill , Amsterdam, (2006).

[15] A. A. Kilbas, J. J. Trujillo, Differential equations of fractional order: Methods, results and problems I, Appl. Anal. 78 (2001), 153–192.

[16] A. A. Kilbas, J. J. Trujillo, Differential equations of fractional order: Methods, results and problems II, Appl. Anal. 81 (2002), 435–493.

[17] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Anal. 69 (2008), 2677–2682.

[18] K. S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, John Wiley, New York, 1993.

[19] G. M. Mophou, G. M. N'Guérékata, Existence of mild solution for some fractional differential equations with a nonlocal condition, Semigroup Forum, 79 (2009), 315-322.

[20] B. Nagy, F. Riesz, Functional analysis, Blackie and Son Limited, London 1956.

[21] L. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, Fract. Calc. Appl. Anal. 5 (2002), 367–386.

[22] L. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[23] H. M. Srivastava, R. K. Saxena, Operators of fractional integration and their applications, Appl. Math. Comput. 118 (2001), 1–52.

[24] G. Wang, B. Ahmad, L. Zhang, and J. J. Nieto, Comments on the concept of existence of solution for impulsive fractional differential equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 19 (2014), no. 3, 401-403.

[25] W. Wei, X. Xiang, Y. Peng, Nonlinear impulsive integrodifferential equation of mixed type and optimal controls, Optimization, 55 (2006), 141-156.

Received: ; Accepted:

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, *A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions*, Acta. Appl. Math.109 (2010), 973-1033.

[2] S. Agarwal, D. Bahuguna, *Existence and uniqueness of strong solutions to nonlinear nonlocal functional differential equations*, EJDE, Vol 2004 N°. 52 2004, pp. 1-9.

[3] O. P. Agrawal, *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems*, J. Math. Anal. Appl. 272 (2002), 368-379.

[4] R. Almeida, S. Pooseh, D. F. M. Torres, *Fractional variational problems depending on indefinite integrals*, Nonlinear Anal. 75 (2012), 1009-1025.

[5] A. Arara, M. Benchohra, N. Hamidi, J. J. Nieto, *Fractional order differential equations on an unbounded domain*, Nonlinear Analysis 72 (2010), 580-586.

[6] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Oscillation theory of impulsive differential equations*, International Publications, Orlando, Fla, USA, (1998).

[7] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Impulsive differential equations : Asymptotic properties of the solutions*, vol.28 of Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific, Singapore, (1995).

[8] D. Bainov and V. Covachev, *Impulsive differential equations with a small parameter*, vol. 24 of Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific, Singapore, (1994).

[9] D. D. Bainov, V. Lakshmikantham, and P. S. Simeonov,*Theory of impulsive differential equations*, vol.6 of Series in Modern Applied Mathematics, World Scientific, Singapore, (1989).

[10] R. L. Bagley, P. J. Torvik, *A theoritical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity*, Journal of Rheology 27, 201-210 (1983).

[11] R. L. Bagley, P. J. Torvik, *On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior*, Journal of Rheology 30, 133-155 (1986).

[12] K. Balachandran *et al.*, *Remark on the existence results for fractional impulsive integro-differential equations in Banach spaces,* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 17 (2012), 2244-2247.

[13] K. Balachandran *et al.*, *Existence results for fractional impulsive integrodifferential equations in Banach spaces.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 16 (2011) 1970-1977.

[14] K. Balachandran, S. Kiruthika, *Existence of solutions of abstract fractional impulsive semilinear evolution equations,* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2010, No.4, 1-12.

[15] M. Benchohra, D. Seba, *Impulsive fractional differential equations in Banach Spaces,* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Spec. Ed. I, 2009, No.8,1-14.

[16] M. Benchohra, B. A. Slimani, *Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations,* EJDE, Vol 2009 (2009), No 10, 1-11.

[17] M. Benchohra, F. Berhoun, G. N'Guerekata, *Bounded solutions for fractional order differential equations on the half-line,* Bull. Math. Anal. Appli, Vol. 4, 1(2012), 62-71.

[18] M. Benchohra, S. B. Abbes, S. K. Ntouyas, *Existence of mild solutions of second order initial value problems for delay integrodifferential inclusions with non local conditions,* Mathematica bohemica, 127 N°. 4 2002 pp. 612-621.

[19] M. Benchohra, S. K. Ntouyas, *Existence of mild solutions for certain delay semilinear evolution inclusions with nonlocal conditions,* Dynam. systems Appl. 9 2000 , 405-412

[20] A. Bouzaroura, S. Mazouzi, *An alternative method for the study of impulsive differential equations of fractional orders in a Banach space, International Journal of Differential Equations,* vol 2013, Article ID 191060, 12 pages, 2013. doi :10.1155/2013/191060.

[21] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem.*J. Math. Anal. Appl. 162 1991 pp. 494-505.

[22] L. Byszewski, *Application of properties of the right-hand sides of evolution equations to an investigation of nonlocal evolution problems,* Nonlinear Anal. 33 1998 pp. 413-426.

[23] M. Caputo, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II,* Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 (1967), 529-539.

[24] M. Caputo and F. Mainardi, *Linear models of dissipation in an elastic solids,* Riv. Nuovo Cimento (Ser. II), 1 (1971), 161-198.

[25] A.V. Chechkin, R. Gorenflo, I. M. Sokolov, *Fractional diffusion in inhomogeneous media.* J. Phys. A, Math. Gen. 38, (2005), 679-684.

[26] Y. Chou and K.T. Jih. *Robust control of a class of time-delay nonlinear processes,* Industrial and Engineering Chemistry Research, 45 (26) : pp. 8963 8972, 2006.

[27] S. Das, *Functional fractional calculus for system identification and controls*, Springer, New York, 2008.

[28] L. Debanth, *Recent applications of fractional calculus to science and engineering*, Int. J. Math. Appl. Sci. 54 (2003), 3413–3442.

[29] K. Diethelm, A. D. Freed, *On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoelasticity*, in : F. Keil, W. Mackens, H. Voss, J. Werther (Eds.), Scientific computing in chemical engineering II-Computational fluid dynamics, reaction engineering and molecular properties, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, pp. 217-307

[30] D. Delbosco, L. Rodino, *Existence and uniqueness for a fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 204 (1996), 609 625.

[31] A. Dishliev and D.D. Bainov, *Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure*, International Journal of Theoretical Physics, 29, (1990), 655-676.

[32] J. Eastham, K. Hastings. *Optimal impulse control of portfolios.* Mathematics of Operations Research, 4 : pp.588 605, 1988.

[33] M. Fečkan, Y. Zhou, J. Wang, *On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17, 2012, 3050–3060

[34] L. Gaul, P. Klein, S. Kempfle, *Damping description involving fractional operators*, Mech. Syst. Signal Process. 5 (1991) 81–88.

[35] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order*, in : Fractals and fractional calculus in continuum Mechanics (Eds. A. Carpinteri and F.Mainardi), Springer Verlag, Wien and New York (1997), 223-276.

[36] Z.Y. He, Y.F Zhang, L.X Yang, and Y.H Shi. *Control chaos in nonautonomous cellular neural networks using impulsive control methods*, International Joint Conference on Neural Networks, 1 : pp. 262 267, 1999.

[37] E. M. Hernandez, *Existence results for partial neutral functional differential equations with nonlocal conditions*, Cadernos de Mat., 02 2001, pp. 239-250.

[38] T. Hélie, D. Matignon, *Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses.* Math. Mod. and Meth. in Appl. Sc. 503–536 (2006).

[39] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, 2000.

[40] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed Van Mill , Amsterdam, (2006).

[41] C. Kou, H. Zhoua, Y. Yan, *Existence of solutions of initial value problems for nonlinear fractiona differential equations on the half-axis*, Nonlinear Analysis 74 (2011) 5975–5986.

[42] E. Kruger-Thiemer, *Formal theory of drug dosage regiments,* International Journal of Theoretical Biology, 13, 1966.

[43] S. Liang, J. Zhang, *Existence of three positive solutions of m-point boundary value problems for some nonlinear fractional differential equations on an infinite interval,* Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 3343–3354.

[44] F. Mainardi, *Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics,* in : A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Wien, Austria, 1997.

[45] R. L. Magin, *Fractional calculus in bioengineering,* Begell House, Redding, CT, USA, 2006.

[46] V.D. Mil'man and A.D. Myshkis, *On the stability of motion in the presence of impulses,* Sib. Math. J., 1, (1960), 233-237

[47] H. Medjekal, S. Mazouzi, *On global existence of certain impulsive multi-orders fractional differential problem,* accepté pour publication dans Fixed Point Theory.

[48] H. Medjekal, S. Mazouzi, *On the global existence of certain abstract fractional differential equation on the half-ray,* soumis pour publication.

[49] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, *Fractional-order systems and controls fundamentals and applications* , Springer-Verlag, England, UK, 2010S.

[50] G. M. Mophou, G. M. N'Gu er ekata, *Existence of mild solution for some fractional di erential equations with a nonlocal condition* , Semigroup Forum, 79 (2009), 315-322.

[51] A. Oustaloup, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications,* Hermès, Paris, 1995.

[52] T. Pfitzenreiter, *A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations,* Z. Angew. Math. Mech. 84(4), 284-287 (2004).

[53] I. Podlubny, *Fractional differential equations,* Academic Press, San Diego, 1999.

[54] I. Podlubny, *Fractional-order system and fractional-order controllers,* Technical report uef-03-94 Institut of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia (1994).

[55] F. Riewe, *Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics,* Phys. Rev. E. 53 (1996), 1890-1899.

[56] F. Riewe, *Mechanics with fractional derivatives,* Phys. Rev. E 55 (1997), 3581-3592.

[57] A. V. Roup *et. al., Limit cycle analysis of the verge and foliot clock escapement using impulsive differential equations and poincar maps,* Int. J. Control, 76, (2003), 1685-1698.

[58] B. Ross, *Fractional Calculus and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[59] Yu. Rossikhin, M.V. Shitikova, *Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids*, Appl. Mech. Rev. 50 (1) (1997) 15–67.

[60] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus*. Springer (2007).

[61] S. Samko, A. Kilbas, and O. Marichev, *Fractional integrals and derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach, London, 1993.

[62] A. M Samoilenko, N. A Perestyuk, *Impulsive differential equations*, volume 14 of A. World Scientific Publishing, 1995.

[63] R. Shi, L. Chen. *An impulsive predator-prey model with disease in the prey for integrated pest management,* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009.

[64] R. Shi, X. Jiang, L. Chen, *The effect of impulsive vaccination on an sir epidemic model*, Applied Mathematics and Computation, 212 :pp.305 311, 2009.

[65] X. Su, S. Zhang, *Unbounded solutions to a boundary value problem of fractional order on the half-line*, Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 1079–1087.

[66] C. C. Tseng, *Design of fractional order digital FIR differentiators*, IEEE Signal Processing Letters, 2001, 3, (8), pp 77-79.

[67] J. Wang, Y. Zhou, M. Fečkan, *Nonlinear impulsive problems for fractional differentiale quations and Ulam stability,* Computers and Mathematics with Applications, 64 (2012), 3389-3405.

[68] W. Wei, X. Xiang, Y. Peng, *Nonlinear impulsive integro-differential equation of mixed type and optimal controls*, Optimization, 55 (2006), 141-156.

[69] X. Xue, *Existence of solutions for semilinear nonlocal Cauchy problems in Banach spaces*. EJDE, Vol. N°64 2005, pp. 1-7.

[70] T. Yang. *Impulsive control theory,* volume 272. Springer, 2001.

[71] Z. Zhang, Q. Ning, H. Wang, *Mild solutions of fractional evolution equations on an unbounded interval*, Advances in Difference Equations 2014, 2014 :27