

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar  
Annaba

Badji Mokhtar University -  
Annaba



جامعة باجي مختار  
عنابة

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
Doctorat en Mathématiques  
Option : Mathématiques Appliquées

### Sur la stabilité et les dynamiques diffusives dans des domaines non bornés

Par:

NISSE Khadidja

Sous la direction de  
NISSE Lamine MC(A)

#### Devant le jury

<b>PRESIDENT :</b>	LASKRI Yamina	Prof.	UBM-Annaba
<b>EXAMINATEUR :</b>	CHORFI Lahcen	Prof.	UBM-Annaba
<b>EXAMINATEUR :</b>	BENZINE Rachid	Prof.	EPST Annaba
<b>EXAMINATEUR :</b>	BOUSSETILA Nadjib	MC(A)	U. Guelma
<b>EXAMINATEUR :</b>	NOUAR Ahmed	MC(A)	U. Skikda

Année : 2014

**Sur la stabilité et les dynamiques  
diffusives dans des domaines non  
bornés**

Nisse Khadidja

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة وجود حلول دورية و مستقرة لمسألة تطور في فضاء غير محدود ممثلة بمعادلة تفاضلية جزئية غير خطية : معادلة كيراموطو - سيفاشنسكي باستعمال طريقة لياونوف - شميث نبرهن على وجود حلول دورية و مستقرة لهذه المعادل في جوار الحل الصفري

# RÉSUMÉ

Dans cette thèse, on étudie l'existence de solutions stationnaires (spatialement périodiques) d'un problème d'évolution dans un domaine infiniment étendu, décrit par une équation aux dérivées partielles non linéaire, invariante par translation (spatiale) : l'équation de Kuramoto-Sivashinsky.

Lorsque la partie non linéaire ne comporte aucun terme non local, on sait que toute solution stationnaire localement intégrable est triviale. On considère le cas bidimensionnel où la partie non linéaire de l'équation est perturbée par un terme non local. A l'aide de la réduction de Liapunov-Schmidt, on démontre l'existence d'une classe de solutions stationnaires non triviales, périodiques en espaces. L'analyse adoptée conduit vers des calculs de ces solutions, par un processus facilement automatisable. L'étude des symétries du problème, nous a permis de simplifier l'équation réduite. Ainsi, on obtient un système algébrique d'ordre réduit, à partir duquel toutes les petites solutions stationnaires du problème sont déterminées.

# ABSTRACT

In this thesis, we study the existence of stationary solutions (spatially periodic) of an evolution problem in an infinitely extended domain, described by a nonlinear partial differential equation, which is invariant by translations (in space) : the Kuramoto-Sivashinsky equation.

When the nonlinear part has no non-local term, we know that any locally integrable stationary solution is trivial. The two-dimensional case where the nonlinear part of the equation is perturbed by a local source is considered. Using the Liapunov-Schmidt reduction, we prove the existence of a class of periodic non-trivial stationary solutions. The analysis leads toward some computation, which can be easily automatized. The study of symmetries of the problem has enabled us to simplify the reduced equation. Thus, a reduced-order algebraic system is obtained, from which all small stationary solutions of the problem are determined.

## REMERCIEMENTS

Je tiens, en premier et dernier lieu, à exprimer ma profonde gratitude à "ALLAH EL KARIM" pour ses faveurs et son aide qui a facilité la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier vivement Madame Y. LASKRI, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Ma profonde reconnaissance s'adresse à Monsieur L. NISSE pour sa patience, sa disponibilité et l'effort qu'il a fourni pour que ce travail puisse être réalisé. Je le remercie profondément.

Je tiens à remercier aussi chaleureusement Messieurs R. BENZINE et L. CHORFI d'avoir accepté de faire partie du jury.

Messieurs N. BOUSSETILA et A. NOUAR, qui ont accepté de venir de loin, m'ont honoré par leur participation au jury. Je les remercie vivement.

Enfin ma profonde reconnaissance s'adresse également à celui qui a participé à l'apparition de ce travail.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b> . . . . .	7
0.1 Position du problème . . . . .	9
0.2 Plan de la thèse . . . . .	11
<b>1. Préliminaires et rappels d'analyse fonctionnelle</b> . . . . .	13
1.1 Rappels sur la théorie des opérateurs . . . . .	13
1.1.1 Notations et définitions . . . . .	14
1.1.2 Opérateurs symétriques, et opérateurs auto-adjoints . . . . .	15
1.2 Opérateurs de Fredholm . . . . .	16
1.3 Bases orthonormales et analyse de Fourier . . . . .	18
<b>2. Formulation opérationnelle du problème</b> . . . . .	21
2.1 Stabilité linéaire : paramètres critiques . . . . .	21
2.2 Reformulation du problème stationnaire . . . . .	24

---

2.2.1	Notations et reformulation . . . . .	24
2.3	Forme opérationnelle du problème . . . . .	28
2.3.1	Définition de l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$ . . . . .	28
2.3.2	Définition de l'opérateur non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha,s,r}$ . . . . .	28
2.4	Cadre fonctionnel . . . . .	30
2.4.1	Notations et définitions . . . . .	30
2.4.2	Le cadre abstrait de l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$ . . . . .	31
2.5	Propriétés de l'espace $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ . . . . .	32
2.6	Etude de l'opérateur $\Delta_{sr}$ . . . . .	39
2.7	Le caractère Fredholm de l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$ . . . . .	44
2.7.1	Le noyau de $\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}$ . . . . .	44
2.7.2	Régularité de l'opérateur non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha,s,r}$ . . . . .	47
<b>3.</b>	<b>Réduction du problème stationnaire . . . . .</b>	<b>48</b>
3.1	Description de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt . . . . .	49
3.2	Application de la méthode de réduction . . . . .	52
3.2.1	Le principe de réduction . . . . .	53
3.2.2	L'équation réduite . . . . .	55
<b>4.</b>	<b>Symétries du problème et structure de l'équation réduite . . . . .</b>	<b>58</b>

4.1	Action et effets des symétries . . . . .	58
4.1.1	La réduction de Liapunov-Schmidt avec symétrie . . . . .	59
4.1.2	Les symétries du problème . . . . .	63
4.1.3	Action des symétries sur l'équation réduite . . . . .	65
4.1.4	Conséquences sur l'équation réduite . . . . .	73
4.2	Calcul de la fonction de réduction $f$ . . . . .	75
4.2.1	Forme générale de $f$ et $\mathcal{U}$ . . . . .	75
4.2.2	Procédure du calcul des premiers termes . . . . .	76
4.2.3	Calcul des premiers termes du développement de $f$ . . . . .	79
4.2.4	Résultats et conséquences des calculs . . . . .	83
<b>Conclusion générale</b> . . . . .		84
<b>5. Annexe</b> . . . . .		86
A	Premiers termes dans le développement des opérateurs . . . . .	86
B	Outils et procédure de calcul . . . . .	88
B.1	Identification du terme en $\rho_1^3 S$ . . . . .	89
B.2	Identification du terme en $\rho_1^3 SR$ . . . . .	91
<b>Bibliographie</b> . . . . .		93

# INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans le cadre des mathématiques appliquées à l'étude de la formation spontanée de structures auto-organisées, naissantes à partir de la déstabilisation d'états d'équilibre critiques des dynamiques diffusives dans des milieux étendus dans l'espace. L'apparition ou la non-apparition de ces structures est gouvernée par un phénomène de seuil, qui dépend en général du coefficient de diffusivité du milieu en question (voir [40, 41]).

Ce phénomène est lié au mouvement, résultant de la combinaison de l'effet des forces gravitationnelles et de la diffusion concernant les constituants physiques du milieu. Ces mouvements sont modélisés par l'évolution de champs scalaires ou vectoriels régis par des équations aux dérivées partielles non linéaires, qui possèdent dans certains cas, plusieurs solutions indépendantes du temps. Souvent, des structures stationnaires complexes naissent de la déstabilisation de structures plus simples (voir [28, 31, 41]). De façon générale, le nombre de solutions stationnaires de ces équations aux dérivées partielles dépend d'un certain nombre de paramètres, dits de contrôle, représentant des données liées à des conditions réalisables expérimentalement. La variation de

---

l'un des paramètres de contrôle est en général suivie d'un comportement qualitativement invariant du système, ce qui traduit une certaine stabilité, mais il existe des valeurs particulières des paramètres (appelées valeurs critiques) pour lesquelles le système adopte soudainement un comportement qualitativement différent du comportement antérieur. Un tel phénomène est appelé bifurcation et se traduit souvent par un basculement du système d'une configuration vers une autre. La valeur critique du paramètre (ou des paramètres), qu'on appelle aussi valeur du seuil, correspond à un renversement du rapport de force entre les facteurs stabilisants et les facteurs déstabilisants dans le système. Une instabilité peut en général être considérée comme le résultat d'une compétition entre des mécanismes antagonistes, stabilisants ou déstabilisants, et se traduit souvent par une perte de symétrie des solutions. Ainsi dans une analyse mathématique de ces phénomènes, pour comprendre la relation entre instabilités et bifurcations, il est très important de tenir compte des symétries du système afin d'étudier ses transitions vers ses différentes configurations.

Des modèles mathématiques de ces phénomènes, en terme d'équations aux dérivées partielles non linéaires, sont utilisés pour représenter les aspects essentiels de leurs apparitions et leurs transitions observées. L'une des équations aux dérivées partielles, modèle de formation de structure très abondamment étudié, est l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (équation KS).

L'équation KS a été introduite par Kuramoto dans [11, 10] pour l'étude de la turbulence de phase dans les réactions chimiques de Belousov-Zhabotinsky. Une extension de cette équation à deux ou plusieurs dimensions spatiales a en-

suite été donnée par Sivashinsky dans [15, 16] pour étudier la propagation des fronts de flamme dans les problèmes de la combustion. L'équation KS joue un rôle important en tant que prototype d'équations aux dérivées partielles, dans ce contexte de formation de structures (ou configurations) auto-organisées (voir [23, 17] et les références qui s'y trouvent), et constitue aussi un bon modèle dans la théorie de la bifurcation et du chaos (voir [9, 12, 13]).

Parmi toutes ces structures un intérêt particulier est porté pour celles qui possèdent des comportements qualitatifs forts, telle que la périodicité (spatiale ou temporelle). Les outils développés pour analyser ce type de problème s'appuient souvent sur une réduction de l'équation aux dérivées partielles de départ à une équation différentielle ordinaire, qui est une représentation plus ou moins fidèle de la dynamique du système. Dans certains travaux comme [37, 46], une telle réduction est réalisée par la méthode de l'équation d'amplitude (basée sur une approximation du développement formel de la solution du système E.D.P). Une autre approche, celle de la variété centrale (réduction du problème E.D.P à une équation E.D.O en dimension finie), est adoptée dans [47, 48, 25].

## 0.1 Position du problème

On considère l'équation de Kuramoto-Sivashinsky de la forme suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u - \alpha \Delta u + N(u, \alpha) \quad (KS)$$

avec une valeur initiale, et des conditions au bord appropriées.

Dans [22] les états stationnaires du problème (KS) sont étudiés dans  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 1$  et

$$N(u, \alpha) = \frac{\alpha}{2} |\nabla u|^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = 1.$$

Dans le cas de la dimension  $n = 1, 2$  les auteurs ont montré que les seules solutions stationnaires localement intégrables sont les solutions triviales  $u = \text{constante}$ .

Ici, on s'intéresse aux solutions stationnaires périodiques dans  $\mathbb{R}^2$  non triviales, pour l'équation non linéaire (KS), avec une source à caractère non local

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = -\Delta^2 u(t, x, y) - \alpha \Delta u(t, x, y) + N(u(t, x, y), \alpha) \quad (1.1)$$

pour  $(t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ , avec une valeur initiale  $u(0, x, y) = u_0(x, y)$ , et des conditions au bord périodiques

$$u(t, x, y) = u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y + 2\pi), \quad (1.2)$$

où la source non locale est définie par

$$N(u(t, x, y), \alpha) = \frac{\alpha}{2} \left( |\nabla u(t, x, y)|^2 - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\nabla u(t, \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right) \quad (1.3)$$

avec  $\alpha > 0$ , un paramètre réel.

Cette équation est traitée dans [13], pour les solutions à moyenne nulle, par le biais des méthodes de perturbation et le développement asymptotique.

Dans notre travail, on utilise la méthode de réduction de Liapunov-Schmidt, développée dans [20], et appliquée aussi dans [14] pour l'étude de stabilité. La méthode consiste à décomposer le problème stationnaire associé à (1.1) en deux équations, à résoudre séparément, et à réduire à un système d'équations algébriques, appelé équation réduite.

A l'aide de développements de Taylor de ces équations, on calcule toutes les solutions stationnaires de (1.1), qui sont proches de la solution triviale nulle. Une attention particulière est accordée aux symétries du problème, telles que les invariances par translation suivant les directions de  $x$  et  $y$ , et les réflexions. Ces symétries nous aident à déterminer les états stationnaires périodiques, qui bifurquent de l'état trivial ( $u \equiv 0$ ) lorsqu'il devient instable. Elles simplifient la structure de l'équation réduite, et diminuent de façon significative l'effort de calcul nécessaire pour résoudre le problème stationnaire associé à (1.1).

## 0.2 Plan de la thèse

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions et définitions, de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des opérateurs. Le deuxième chapitre est consacré au cadre fonctionnel, et à la formulation opérationnelle du

problème. De plus, on donne quelques propriétés concernant les opérateurs du problème formulé, lesquelles sont nécessaires pour l'application de la méthode de réduction dans les chapitres suivants. Dans le troisième chapitre, on introduit la méthode de réduction de Liapunov-Schmidt, et on l'applique à notre problème. Ainsi, on obtient l'équation réduite, par ce principe de réduction. Après une analyse rigoureuse, de l'action des symétries sur le problème réduit, nous obtenons dans le quatrième chapitre, le résultat principale sur l'existence des solutions stationnaires périodiques et non triviales. On termine par une conclusion générale, dans laquelle on évoque en perspective, une étude de la stabilité de ces solutions. On ajoute à la fin une annexe, dans laquelle on décrit la procédure de calcul des termes dominants de l'équation (algébrique) réduite.

# 1. PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

## 1.1 Rappels sur la théorie des opérateurs

Nous allons rappeler des notions et des résultats fondamentaux dans la théorie des opérateurs et de l'analyse fonctionnelle, qui représentent un outil indispensable, ou du moins utile dans notre étude.

On considère dans tout ce paragraphe,  $A$  un opérateur linéaire de domaine  $D(A)$  dense dans un espace de Hilbert  $H$ , muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme  $\|\cdot\|_H$ .

### 1.1.1 Notations et définitions

On désigne par  $G(A)$ ,  $R(A)$ ,  $Ker(A)$  respectivement le graphe de  $A$ , l'image de  $A$  et le noyau de  $A$ , définis par :

$$G(A) = \{(u, Au) : u \in D(A)\} \subset H \times H$$

$$R(A) = \{Au : u \in D(A)\} \subset H$$

$$Ker(A) = \{u \in D(A) : Au = 0\} \subset H$$

On notera dans toute la suite du texte, l'application identité de  $H$  vers  $H$  par  $I$ .

**Définition 1.1.1:** On dit que l'opérateur  $A$  défini sur  $H$  est borné s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $u \in H$  on a :

$$\|Au\|_H \leq C \|u\|_H$$

**Définition 1.1.2:** On dit que l'opérateur  $A$  est fermé si l'ensemble  $G(A)$  est un sous espace de  $H \times H$ , fermé relativement à la norme  $\|\cdot\|_{H \times H} = (\|\cdot\|_H^2 + \|\cdot\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Quelques propriétés essentielles des opérateurs linéaires fermés sont résumées (voir [3, Th.2.3, p.62]) dans :

**Proposition 1.1.3:** (i) Si  $A$  est un opérateur fermé et  $B$  est un opérateur borné, alors l'opérateur  $A + B$  est fermé sur  $D(A)$ .

(ii) Si  $A^{-1}$  existe, alors  $A$  est fermé si et seulement si  $A^{-1}$  est fermé.

### 1.1.2 Opérateurs symétriques, et opérateurs auto-adjoints

Sous les hypothèses faites au début de ce paragraphe, si  $A$  est un opérateur fermé, l'ensemble :

$$D^* = \{v \in H : \exists v^* \in H \text{ t.q. } \langle Au, v \rangle = \langle u, v^* \rangle \text{ pour tout } u \in D(A)\}$$

est un sous-espace dans  $H$ , où chaque élément  $v^*$  est uniquement déterminé en fonction de  $v$ .

**Définition 1.1.4:** On appelle adjoint de  $A$ , l'opérateur  $A^*$  défini par :  $D(A^*) = D^*$  et  $A^*v = v^*$ .

$$\text{Anisi on a, pour tout } u \in D(A) \text{ et tout } v^* \in D(A^*) : \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$$

On a aussi (voir [7, p.74], et [38]) le résultat important suivant

**Proposition 1.1.5:** Soit  $A$  un opérateur linéaire non borné de domaine dense. Alors il admet un opérateur adjoint  $A^*$ , fermé.

**Définition 1.1.6:** Un opérateur linéaire  $A$  de domaine dense  $D(A)$  est dit symétrique si pour tout  $u$  et  $v$  dans  $D(A)$  on a :  $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$

Notons que pour un opérateur symétrique on a

$$D(A) \subset D(A^*), \text{ et } A^*v = Av \quad \forall v \in D(A).$$

Donc  $A^*$  est une extension de  $A$ .

**Définition 1.1.7:** *Un opérateur symétrique est dit auto-adjoint si*

$$A = A^* \quad \text{ie :} \quad D(A) = D(A^*).$$

Notons que tout opérateur auto-adjoint est symétrique, et que la réciproque est généralement fautive. Toute fois, le théorème suivant (voir [45, p.137]) donne une condition suffisante qui établit la réciproque.

**Proposition 1.1.8:**

*Si un opérateur  $A$ , fermé et symétrique, admet au moins un nombre réel dans son ensemble résolvant, alors il est auto-adjoint.*

**Proposition 1.1.9:** ([38, p.287])

*Si  $A$  est un opérateur auto-adjoint, et  $B$  est un opérateur symétrique tels que  $D(A) \subset D(B)$ , et il existe deux nombres positifs  $a < 1$  et  $b$  qui vérifient*

$$\|B(u)\|_H \leq b \|u\|_H + a \|A(u)\|_H, \quad \text{pour tout } u \in D(A),$$

*alors la somme  $A + B$  est un opérateur auto-adjoint.*

## 1.2 Opérateurs de Fredholm

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques définitions et propriétés concernant les opérateurs de Fredholm, utiles dans la suite de notre travail. Des études plus développées de ces notions se trouvent dans [18, 19].

**Définition 1.2.1:** ([1, 20, 38, 18, 19])

Un opérateur linéaire non borné  $A$  est dit de Fredholm si les conditions suivantes sont satisfaites

- (i)  $A$  est un opérateur fermé (à domaine dense).
- (ii) Le noyau de  $A$  :  $\ker(A)$  est un sous-espace de dimension finie.
- (iii) L'image de  $A$  :  $R(A)$  est un sous-espace fermé de codimension finie.

**Définition 1.2.2:** ([18, 19, 20])

On appelle indice d'un opérateur de Fredholm  $A$  le nombre défini par

$$\text{Ind}(A) = \dim \text{Ker}(A) - \text{codim}(R(A)).$$

**Définition 1.2.3:**

On dit qu'un opérateur linéaire borné  $K$ , est compact, si pour toute suite  $\{x_n\}$  bornée dans  $H$ ,  $\{K(x_n)\}$  admet une sous-suite convergente dans  $H$ .

**Proposition 1.2.4:** ([19, Th. 3.7])

Soit  $A$  un opérateur fermé (à domaine dense) sur  $H$ .  $A$  est un opérateur de Fredholm si et seulement si, il existe un opérateur borné  $A_0$ , deux opérateurs compactes  $K_1$  et  $K_2$  sur  $H$  tels que

$$A_0.A = I - K_1 \quad \text{sur } D(A), \quad \text{et} \quad A.A_0 = I - K_2 \quad \text{sur } H.$$

**Proposition 1.2.5:** ([18, Th. 2.5])

Si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs de Fredholm d'indices  $\text{Ind}(A)$  et  $\text{Ind}(B)$  respectivement, alors la composée  $AB$  est un opérateur de Fredholm d'indice

$$\text{Ind}(AB) = \text{Ind}(A) + \text{Ind}(B)$$

## 1.3 Bases orthonormales et analyse de Fourier

Nous allons ici rappeler quelques notions et résultats fondamentaux sur les bases orthonormales, et l'analyse de Fourier, qu'on peut trouver dans [4, 24, 29].

Rappelons que dans ce chapitre nous considérons, un espace de Hilbert  $H$ , muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et de la norme  $\|\cdot\|_H$ .

**Définition 1.3.1:** ([24, p. 54])

*Soient  $x, y$  deux éléments de  $H$ , et  $N$  un sous ensemble de  $H$ .*

(i) *On dit que  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$ , ou orthonormaux si de plus  $\|x\|_H = \|y\|_H = 1$ .*

(ii) *On appelle orthogonale de  $N$  et on note  $N^\perp$  l'ensemble défini par*

$$N^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in N\}.$$

(iii) *Un sous ensemble  $K$  de  $H$  est dit orthonormale si chaque deux éléments de  $K$  sont orthonormaux.*

(iv) *Un ensemble  $K$  orthonormale dans  $H$  est dit complet si  $K^\perp = \{0\}$ .*

**Théorème 1.3.2:** ([24, Th. 5.8])

*Soient  $\{x_n\}$  une suite orthonormale dans  $H$  et  $\{\alpha_n\}$  une suite de scalaires. Alors la série  $\sum \alpha_n x_n$  est convergente si et seulement si  $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ ,*

et dans ce cas on a

$$\left\| \sum \alpha_n x_n \right\|_H = \left( \sum |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Théorème 1.3.3:** ([24, Th. 5.9])

Soient  $K$  un ensemble orthonormale de  $H$ , et  $x \in H$ . Posons  $K_x = \{y \in K : \langle x, y \rangle \neq 0\}$ . Alors

- (i) Pour tout  $x \in H$ ,  $K_x$  est dénombrable.
- (ii) La série  $\sum_{y \in K_x} \langle x, y \rangle y$  est convergente.

**Définition 1.3.4:** ([24, Def. 5.5])

Un ensemble  $K$  dans  $H$  est dit une base orthonormale ou base hilbertienne de  $H$  si pour tout  $x \in H$  :

$$x = \sum_{y \in K_x} \langle x, y \rangle y \quad (*)$$

Les coefficients  $\langle x, y \rangle$  dans la série (\*) sont appelés les coefficients de Fourier de  $x$ .

**Théorème 1.3.5:** ([24, Th. 5.10]) Soit  $K$  un ensemble orthonormale de  $H$ .

Les affirmations suivantes sont équivalentes

- (i)  $K$  est complet au sens de la définition (1.3.1(iv)).
- (ii)  $K$  est une base orthonormale de  $H$ .

$$(iii) \text{ Pour tout } x \in H, \|x\|_H^2 = \sum_{y \in K_x} |\langle x, y \rangle|^2.$$

**Remarque 1.3.6:** *L'égalité dans (iii) du théorème (1.3.5) est appelé identité de Parseval.*

**Théorème 1.3.7:** *([24, Th. 5.11])*

*Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale, et toute base orthonormale d'un espace de Hilbert séparable est dénombrable.*

La proposition suivante fournit un outil essentiel (pour le calcul), dans le cadre fonctionnel choisi pour notre problème, afin d'appliquer la réduction de Liapunov-Schmidt (pour plus de détails voir [4, 17, 6]).

**Proposition 1.3.8:** *([4, p.11])*

La suite  $\left\{ \frac{1}{2\pi} e^{2\pi i \left( \frac{k_1 x}{b_1 - a_1} + \frac{k_2 y}{b_2 - a_2} \right)} \right\}_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2}$  définit une base orthonormale dans  $L^2([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$ .

## 2. FORMULATION OPÉRATIONNELLE DU PROBLÈME

### 2.1 Stabilité linéaire : paramètres critiques

Il est clair que l'équation (1.1) admet une solution stationnaire : l'état trivial  $u \equiv 0$  pour toutes les valeurs du paramètre réel  $\alpha > 0$ . Si cette position d'équilibre est instable, en la perturbant, on déclenchera une dynamique qui fera évoluer notre problème vers d'autres états stationnaires. C'est pour cela qu'on déterminera d'abord, la valeur du paramètre  $\alpha > 0$  pour laquelle cet état devient instable.

**Proposition 2.1.1:** *L'état d'équilibre trivial  $u \equiv 0$  de l'équation (1.1), est linéairement instable pour  $\alpha > 2$ . Lorsque  $\alpha$  dépasse le seuil critique  $\alpha_c = 2$  des modes instables de vecteurs d'onde  $(s_c, r_c) = (1, 1)$  apparaissent.*

**Preuve**

Chaque perturbation (spatialement périodique) de l'état d'équilibre trivial, s'exprime par son développement en séries de Fourier. On la décompose ainsi en modes propres ayant pour vecteur d'onde  $(s, r)$  et pour taux de croissance la partie réelle d'un certain nombre complexe  $\lambda$ . On peut représenter ces modes propres sous la forme (en notation complexe)

$$U(t, x, y) = e^{\lambda t} \varphi(x, y), \quad \text{où } \varphi(x, y) = e^{i(sx+ry)}, \quad (2.1)$$

avec  $(s, r) \in \mathbb{Z}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

L'équation (1.1) linéarisée en  $u \equiv 0$ , s'écrit pour  $U$  comme suit

$$U_t(t, x, y) = -\Delta^2 U(t, x, y) - \alpha \Delta U(t, x, y). \quad (2.2)$$

Ainsi, d'après (2.1) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda \varphi &= -\Delta^2 \varphi - \alpha \Delta \varphi \\ &= \left( \alpha(s^2 + r^2) - (s^2 + r^2)^2 \right) \varphi. \end{aligned}$$

Par conséquent la solution de l'équation (2.2) s'exprime à travers  $(s, r)$  solution de l'équation

$$\lambda = -(s^2 + r^2)^2 + \alpha(s^2 + r^2). \quad (2.3)$$

Donc  $\alpha_c$ , valeur critique du paramètre  $\alpha$  est déterminée par la valeur minimale de  $(s, r)$  pour laquelle l'équation (2.3) admet une solution  $(s, r)$  non nulle avec

$\Re(\lambda) > 0$ . Ce qui est le cas lorsque

$$\alpha > s^2 + r^2.$$

Ainsi,

$$\alpha_c = \min\{(s^2 + r^2), (s, r) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Sachant, qu'on est concerné que par les solutions périodiques à moyennes nulles, et non constantes, on doit avoir  $s^2 + r^2 \neq 0$ .

De plus, l'espace fonctionnel dans lequel on travaille (qui sera précisé plus tard) étant constitué de fonctions ayant la même période suivant les deux directions  $x$  et  $y$ , il est nécessaire d'avoir  $s = r$ .

Par conséquent,

$$\alpha_c = \min \{2s^2, s \in \mathbb{Z} \text{ et } s \neq 0\} = 2.$$

Pour  $s = 1$  le minimum est réalisé, par conséquent  $\alpha_c = 2$  et  $(s_c, r_c) = (1, 1)$  sont des valeurs critiques, tel que c'est annoncé dans la proposition.

## 2.2 Reformulation du problème stationnaire

Nous nous proposons d'étudier les configurations indépendantes du temps et spatialement périodiques. Il serait donc plus commode de faire apparaître le vecteur d'onde  $(s, r)$  comme paramètre dans l'équation du problème, et non pas dans la définition des espaces où les solutions sont recherchées. C'est dans ce cadre que nous allons reformuler le problème stationnaire de l'équation (1.1)

### 2.2.1 Notations et reformulation

En supposant que  $U$  est  $T$  périodique par rapport à  $x$  et  $R$  périodique par rapport à  $y$ , il existe alors deux réels  $s$  et  $r$ , tels que  $T = \frac{2\pi}{s}$  et  $R = \frac{2\pi}{r}$ , autrement dit on a

$$U\left(x + \frac{2\pi}{s}, y\right) = U\left(x, y + \frac{2\pi}{r}\right) = U(x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

En composant par les transformations de variable  $X = sx$  et  $Y = ry$ ,  $U$  devient  $2\pi$ -périodique par rapport à  $X$  et  $Y$ , et bien défini par sa restriction sur l'ensemble  $(X, Y) \in \Omega = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Ainsi, on peut se ramener à une équation aux dérivées partielles dans un domaine spatial indépendant des paramètres.

Les dérivées partielles de  $U$  par rapport à  $x$  et  $y$  s'expriment en fonction de celles par rapport aux nouvelles variables  $X$  et  $Y$  respectivement. En effet, ce

changement de variables implique que

$$U\left(\frac{X+2\pi}{s}, \frac{Y}{r}\right) = U\left(\frac{X}{s}, \frac{Y+2\pi}{r}\right) = U\left(\frac{X}{s}, \frac{Y}{r}\right)$$

Ainsi en posant

$$\tilde{U}(X, Y) = U\left(\frac{X}{s}, \frac{Y}{r}\right)$$

on a

$$\tilde{U}(X+2\pi, Y) = U\left(\frac{X+2\pi}{s}, \frac{Y}{r}\right) = U\left(\frac{X}{s}, \frac{Y}{r}\right) = \tilde{U}(X, Y)$$

et

$$\tilde{U}(X, Y+2\pi) = U\left(\frac{X}{s}, \frac{Y+2\pi}{r}\right) = U\left(\frac{X}{s}, \frac{Y}{r}\right) = \tilde{U}(X, Y)$$

Donc  $\tilde{U}$  est  $2\pi$ -périodique par rapport à  $X$  et  $Y$ .

En utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée on obtient

$$\partial_X \tilde{U}(X, Y) = \frac{1}{s} \partial_x U\left(\frac{X}{s}, \frac{Y}{r}\right) = \frac{1}{s} \partial_x U(x, y),$$

donc

$$\partial_x U(x, y) = s \partial_X \tilde{U}(X, Y),$$

et de la même manière on obtient

$$\partial_y U(x, y) = r \partial_Y \tilde{U}(X, Y).$$

En dérivant encore une fois par rapport à  $X$  on a

$$\begin{aligned}\partial_X^2 \tilde{U}(X, Y) &= \partial_X \left( \partial_X \tilde{U}(X, Y) \right) = \partial_X \left( \frac{1}{s} \partial_x U \left( \frac{X}{s}, \frac{Y}{r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{s^2} \partial_x^2 U \left( \frac{X}{s}, \frac{Y}{r} \right) = \frac{1}{s^2} \partial_x^2 U(x, y),\end{aligned}$$

ainsi

$$\partial_x^2 U(x, y) = s^2 \partial_X^2 \tilde{U}(X, Y),$$

et de la même manière on obtient

$$\partial_y^2 U(x, y) = r^2 \partial_Y^2 \tilde{U}(X, Y).$$

**Remarque 2.2.1:** On gardera dans la suite, la même notation  $\tilde{U} = U$ , tout en considérant comme fonction  $\tilde{U}$  ( $2\pi$ -périodique par rapport à  $X$  et  $Y$ ), sa représentation par sa restriction à l'ensemble des  $(X, Y) \in \bar{\Omega} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

Il est clair maintenant, que pour toute solution stationnaire  $u(x, y)$  de (1.1), correspond une solution  $U(X, Y)$  de l'équation suivante

$$\begin{aligned}-\Delta_{sr}^2 U(X, Y) - \alpha \Delta_{sr} U(X, Y) \\ + \frac{\alpha}{2} \left( |\nabla_{sr} U(X, Y)|^2 - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\nabla_{sr} U(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right) = 0,\end{aligned}\tag{2.4}$$

pour  $(X, Y) \in \Omega = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Où

$$\Delta_{sr} = s^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2}, \quad \text{et} \quad \nabla_{sr} = \left( s \frac{\partial}{\partial X}, r \frac{\partial}{\partial Y} \right).$$

Avec  $|\nabla_{sr} U(X, Y)|^2 = \langle \nabla_{sr} U(X, Y), \nabla_{sr} U(X, Y) \rangle_{\mathbb{R}^2}$ <sup>1</sup>.

---

1. Ici  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.3 Forme opérationnelle du problème

On peut réécrire l'équation (2.4) sous la forme opérationnelle suivante

$$\mathcal{L}_{\alpha,s,r}(U) + \mathcal{N}_{\alpha,s,r}(U) = 0, \quad (2.5)$$

définie dans un certain espace de Hilbert, qu'on précisera par la suite. Où  $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$  est un opérateur linéaire, alors que la source non locale est représentée par  $\mathcal{N}_{\alpha,s,r}$ , la partie non linéaire du problème.

### 2.3.1 Définition de l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$

L'opérateur linéaire  $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$  est défini par

$$\mathcal{L}_{\alpha,s,r}(U) = -\Delta_{sr}^2 U(X, Y) - \alpha \Delta_{sr} U(X, Y).$$

### 2.3.2 Définition de l'opérateur non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha,s,r}$

L'opérateur non linéaire  $\mathcal{N}_{\alpha,s,r}$  est défini par

$$\mathcal{N}_{\alpha,s,r}(U) = \mathcal{N}(U, U),$$

tel que

$$\mathcal{N}(U, V) = \frac{\alpha}{2} \langle \nabla_{sr} U(X, Y), \nabla_{sr} V(X, Y) \rangle_{\mathbb{R}^2} -$$

$$\frac{\alpha}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \nabla_{sr} U(\xi, \eta), \nabla_{sr} V(\xi, \eta) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta.$$

**Remarque 2.3.1:** *Les définitions précédentes ne sont que formelles, et c'est dans le paragraphe suivant que nous allons les préciser, avec le cadre fonctionnel approprié.*

## 2.4 Cadre fonctionnel

L'équation (2.5) fait intervenir des opérateurs, dont les domaines de définition sont étroitement liés aux conditions aux limites (1.2) : les conditions de périodicité.

Fixons d'abord quelques notations.

### 2.4.1 Notations et définitions

Rappelons que  $\Omega$  est le rectangle  $]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ , et introduisons (pour  $0 \leq m < \infty$ ) les espaces fonctionnels

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = \{u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ localement intégrable, t.q. : } u|_{\Omega} \in H^m(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0\}$$

avec  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  et pour  $1 \leq m < \infty$ ,  $H^m(\Omega)$  sont les espaces de Sobolev au sens usuel sur  $\Omega$ . Pour  $m = 0$  on notera l'espace  $\mathcal{H}^0(\Omega)$  par  $\mathcal{H}$  (i.e.  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0(\Omega)$ ). Soit  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  l'espace défini par

$$\dot{H}_{per}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{H} \text{ et } u|_{\Omega} \in H^1(\Omega), : u(0, Y) = u(2\pi, Y) \text{ et } u(X, 0) = u(X, 2\pi)\}.$$

$\mathcal{H}$  étant muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

et de la norme induite

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

On munit  $H^1(\Omega)$  de la norme

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left( \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + |u|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

où  $|\cdot|_{1,\Omega}$  désigne la semi-norme dans  $H^1(\Omega)$  définie par

$$|u|_{1,\Omega} = \left( \|\partial_X u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\partial_Y u\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.7)$$

et associée à la forme bilinéaire

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle \partial_X u, \partial_X v \rangle + \langle \partial_Y u, \partial_Y v \rangle. \quad (2.8)$$

Pour plus de détails sur ce type d'espace de Sobolev voir [6, 17].

### 2.4.2 Le cadre abstrait de l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$

En prenant en considération l'invariance du problème (2.5) par rapport aux translations, et en tenant compte aussi des conditions de périodicité (1.2), on définit le domaine de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$  sur l'espace  $\mathcal{H}$  par

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}^4(\Omega) \cap \dot{H}_{per}^1(\Omega),$$

et le domaine de  $\Delta_{sr}$  par

$$D = D(\Delta_{sr}) = \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \dot{H}_{per}^1(\Omega),$$

## 2.5 Propriétés de l'espace $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$

Ce paragraphe est consacré à deux propriétés importantes, concernant l'espace  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ , dont nous nous servons par la suite pour justifier la validité du cadre fonctionnel choisi pour notre problème, afin d'appliquer la réduction de Lyapunov Schmidt. Ces deux propriétés sont : l'inégalité de Poincaré (généralisée, dite inégalité Poincaré-Wirtinger), et la compacité de l'injection de  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  dans  $\mathcal{H}$ . Nous présentons ici des démonstrations, qui reposent sur le développement en séries de Fourier (notation complexe) caractérisant les éléments de  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  :

$$u(X, Y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} C_{\mathbf{k}} e^{(ik_1 X + ik_2 Y)},$$

où  $C_{\mathbf{k}}$  est le coefficient de Fourier, d'indice vectoriel  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ , défini par

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} u(\xi, \eta) e^{-i(k_1 \xi + k_2 \eta)} d\xi d\eta \quad (2.9)$$

et vérifie  $\overline{C_{\mathbf{k}}} = C_{-\mathbf{k}}$  (puisque  $u$  est une fonction réelle).

### L'inégalité de Poincaré

Nous allons montrer, grâce à la condition

$$\int_{\Omega} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (2.10)$$

que l'inégalité de Poincaré reste valable pour les espaces du cadre fonctionnel choisi ( $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  et  $\mathcal{H}$ ).

**Théorème 2.5.1:** *Si  $u \in \dot{H}_{per}^1(\Omega)$  alors*

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq |u|_{1,\Omega}.$$

#### Preuve

On considère le développement en série de Fourier d'un élément  $u$  de  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$

$$u(X, Y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} C_{\mathbf{k}} e^{(ik_1 X + ik_2 Y)}.$$

On a

$$\partial_X u(X, Y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} ik_1 C_{\mathbf{k}} e^{(ik_1 X + ik_2 Y)},$$

et

$$\partial_Y u(X, Y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} ik_2 C_{\mathbf{k}} e^{(ik_1 X + ik_2 Y)}.$$

D'après l'identité de Parseval on a

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |C_{\mathbf{k}}|^2, \quad (2.11)$$

ainsi que pour les dérivées

$$\|\partial_X u\|_{\mathcal{H}}^2 = 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |k_1|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2,$$

et

$$\|\partial_Y u\|_{\mathcal{H}}^2 = 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |k_2|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\partial_X u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\partial_Y u\|_{\mathcal{H}}^2 &= 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (|k_1|^2 + |k_2|^2) |C_{\mathbf{k}}|^2. \\ &= 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\mathbf{k}|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $|\mathbf{k}|^2 = |k_1|^2 + |k_2|^2$ .

Il est clair que pour tout  $\mathbf{k}$  non nul on a

$$|C_{\mathbf{k}}|^2 \leq |\mathbf{k}|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2.$$

Or d'après (2.9) et (2.10)

$$C_{\mathbf{0}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0.$$

Ainsi (2.11) et (2.12) implique que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |C_{\mathbf{k}}|^2 \leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |\mathbf{k}|^2 |C_{\mathbf{k}}|^2$$

et par conséquent

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\partial_X u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\partial_Y u\|_{\mathcal{H}}^2,$$

d'où le résultat du théorème.

Comme conséquence du théorème précédent, on a la proposition suivante.

**Proposition 2.5.2:** *L'espace  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  muni de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  définie par (2.8), est un espace de Hilbert. De plus, la semi-norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$  définie par (2.7) est une norme sur  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  définie par (2.6).*

**Preuve**

Montrons d'abord que dans  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ , la semi-norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$  est une norme équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ .

En effet, elle est une norme car dans  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  toute fonction constante est une fonction nulle.

D'autre part, d'après le théorème précédent on a pour tout  $u \in \dot{H}_{per}^1(\Omega)$

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq |u|_{1,\Omega}^2,$$

ce qui implique que

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + |u|_{1,\Omega}^2 \leq 2|u|_{1,\Omega}^2.$$

Par conséquent on a

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{2}|u|_{1,\Omega}.$$

et puisqu'il est clair que

$$|u|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega},$$

les deux normes sont ainsi équivalentes.

D'après [6] et [17, Chap.II],  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  est un sous-espace fermé dans  $H^1(\Omega)$ . Ce qui entraîne grâce à l'équivalence des normes, que  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert. La démonstration de la proposition est ainsi achevée.

La compacité de l'injection de  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  dans  $\mathcal{H}$

**Théorème 2.5.3:** *L'inclusion  $\dot{H}_{per}^1(\Omega) \subset \mathcal{H}$  est une injection compacte.*

**Preuve**

Ici on va reprendre la démonstration présentée dans [6, Th A.4, p.437] adaptée à notre cas ( $m = 2$  et  $L_1 = L_2 = 2\pi$ ). On considère une suite  $\{u_n\}_{n \geq 1}$ ,

$$u_n = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} C_{\mathbf{k}}^n e^{(ik_1 X + ik_2 Y)}.$$

bornée dans  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ . Donc il existe une constante positive  $M$  telle que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\mathbf{k}|^2) |C_{\mathbf{k}}^n|^2 \leq M, \quad \forall n \geq 1. \quad (2.13)$$

Ainsi, pour chaque  $\mathbf{k}$ , la suite des coefficients de Fourier  $\{C_{\mathbf{k}}^n\}_{n \geq 1}$  est uniformément bornée par rapport à  $n$ . On peut donc extraire de  $\{u_n\}_{n \geq 1}$ , une sous suite  $u_{n_{1j}}$  telle que la suite  $C_{\mathbf{1}}^{n_{1j}}$  soit convergente. De cette suite, on prend une sous suite  $u_{n_{2j}}$  telle que  $C_{\mathbf{1}}^{n_{2j}}$  et  $C_{\mathbf{2}}^{n_{2j}}$  sont convergentes.

En continuant selon ce processus, on obtient une sous suite  $u_{n_{ij}}$  telle que  $C_{\mathbf{1}}^{n_{ij}}$ ,  $C_{\mathbf{2}}^{n_{ij}}, \dots, C_{\mathbf{h}}^{n_{ij}}$  sont toutes des suites convergentes.

On prend maintenant la suite diagonale

$$\tilde{u}_j = u_{n_{jj}}$$

et on note  $C_{\mathbf{k}}^j$  les coefficients de Fourier du développement de  $\tilde{u}_j$ .

Alors, pour tout  $\mathbf{k}$ ,  $C_{\mathbf{k}}^j$  est convergente. On note sa limite par  $C_{\mathbf{k}}^*$

D'après (2.13) on sait que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\mathbf{k}|^2) |C_{\mathbf{k}}^*|^2 \leq M.$$

Ainsi

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\mathbf{k}|^2) |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 \leq 2M$$

Maintenant, soit  $u^*$  l'élément de  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  dont les coefficients de Fourier sont  $C_{\mathbf{k}}^*$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_j - u^*\|_{\mathcal{H}}^2 &= 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 \\ &= 4\pi^2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq L} |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 + \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{|\mathbf{k}| \geq L} |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 |L^2| \\ &\leq 4\pi^2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq L} |C_{\mathbf{k}}^j - C_{\mathbf{k}}^*|^2 + 4\pi^2 \frac{2M}{L^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Etant donné  $\epsilon > 0$ , on choisit  $L$  et  $j$  suffisamment grands, de telle sorte que chaque terme dans (2.14) soit inférieur à  $\frac{\epsilon}{2}$ .

Ainsi  $\tilde{u}_j$  converge vers  $u^*$  dans  $\mathcal{H}$ , ce qui achève la démonstration du théorème.

## 2.6 Etude de l'opérateur $\Delta_{sr}$

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier l'opérateur  $\Delta_{sr}$ . Ce qui nous permettra par la suite de dégager les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$ . Tenant compte des conditions au bord des éléments de  $D$ , l'application de la formule de Green, aboutit à la symétrie de l'opérateur  $\Delta_{sr}$  dans  $\mathcal{H}$ .

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur  $-\Delta_{sr}$  admet un inverse borné. En effet, cette propriété de l'opérateur  $-\Delta_{sr}$ , est analogue à celle du Laplacien, et on y arrive par la méthode variationnelle qui repose sur le théorème de Lax-Milgram (voir [7, Th. 2.A], ou aussi [5, Th.2.1, p.II-6] ), appliquée au problème à valeurs aux limites associé à  $-\Delta_{sr}$  dans l'espace de Hilbert  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ .

Soit  $f \in \mathcal{H}$ , posons alors le problème suivant

$$\begin{cases} U \in \dot{H}_{per}^1(\Omega) \\ -\Delta_{sr}(U) = f \end{cases} \quad (\mathbf{P.b})$$

Montrons que les conditions du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. Rappelons que d'après la proposition (2.5.2),  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  muni de la norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$ , est un espace de Hilbert.

Pour tout  $U$  et  $V$  appartenant à  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  nous avons

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| = |\langle s^2 \partial_X^2 U + r^2 \partial_y^2 U, V \rangle|.$$

Grâce à la formule de Green on obtient

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| = |\langle s\partial_X U, s\partial_X V \rangle + \langle r\partial_Y U, r\partial_Y V \rangle|.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz entraine que

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| \leq \|s\partial_X U\|_{\mathcal{H}} \|s\partial_X V\|_{\mathcal{H}} + \|r\partial_Y U\|_{\mathcal{H}} \|r\partial_Y V\|_{\mathcal{H}},$$

ainsi que

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| \leq (\|s\partial_X U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|r\partial_Y U\|_{\mathcal{H}}^2)^{\frac{1}{2}} (\|s\partial_X V\|_{\mathcal{H}}^2 + \|r\partial_Y V\|_{\mathcal{H}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent on a

$$|\langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle| \leq \sqrt{\max(s^2, r^2)} |U|_{1, \Omega} |V|_{1, \Omega}.$$

D'où, la continuité de la forme bilinéaire définie sur  $\dot{H}_{per}^1(\Omega) \times \dot{H}_{per}^1(\Omega)$  par

$$a(U, V) = \langle -\Delta_{sr}(U), V \rangle$$

D'autre part on a

$$\langle -\Delta_{sr}(U), U \rangle = -\langle s^2 \partial_X^2 U, U \rangle - \langle r^2 \partial_Y^2 U, U \rangle$$

En appliquant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_{sr}(U), U \rangle &= s^2 \langle \partial_X U, \partial_X U \rangle + r^2 \langle \partial_Y U, \partial_Y U \rangle \\ &= s^2 \|\partial_X U\|_{\mathcal{H}}^2 + r^2 \|\partial_Y U\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\langle -\Delta_{sr}(U), U \rangle \geq \min(s^2, r^2) |U|_{1,\Omega}^2 \quad (2.15)$$

D'où la coercivité de la forme bilinéaire  $a(U, V)$  définie plus haut.

Il est évident aussi, que pour tout  $V$  appartenant à  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  (usant de l'inégalité de Cauchy-Schwartz) d'après le théorème 2.5.1, on obtient

$$|\langle f, V \rangle| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \cdot \|V\|_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \cdot |V|_{1,\Omega} \quad (2.16)$$

Donc la forme linéaire définie par  $f$  sur  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ , est continue.

Le théorème de Lax-Milgram garantit alors, l'existence et l'unicité d'une solution  $U \in \dot{H}_{per}^1(\Omega)$  pour le problème **(P.b)**. De plus (à partir de (2.15) et (2.16)) il existe une constante  $c$  positive telle que

$$|U|_{1,\Omega} \leq c \cdot \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

Ce qui prouve que  $-\Delta_{sr}$ , admet un inverse borné ( $U = (-\Delta_{sr})^{-1}(f)$ ).

Comme conséquence des propriétés ci-dessus, on a le résultat suivant.

**Proposition 2.6.1:**  $-\Delta_{sr}$  est un opérateur auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$ .

**Preuve**

En effet, ayant un inverse borné,  $-\Delta_{sr}$  est un opérateur fermé (proposition 1.1.3-(ii)), et admet la valeur réelle zéro dans son ensemble résolvant. De plus, étant symétrique,  $-\Delta_{sr}$  est un opérateur auto-adjoint d'après la proposition 1.1.8, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Comme conséquence immédiate des propositions (1.1.9) et (2.6.1) on a

**Proposition 2.6.2:** *Pour tout  $\alpha > 0$ ,  $(\Delta_{sr} + \alpha I)$  est un opérateur auto-adjoint dans  $\mathcal{H}$ .*

**Remarque 2.6.3:** *En reproduisant la démarche et l'analyse précédente concernant l'opérateur  $-\Delta_{sr}$ , on peut montrer que pour tout  $\lambda \geq 0$ ,  $(-\Delta_{sr} + \lambda I)$  est un opérateur auto-adjoint, et à résolvante compacte. Ceci, en étudiant le problème*

$$\begin{cases} U \in \dot{H}_{per}^1(\Omega) \\ -\Delta_{sr}(U) + \lambda U = f, \quad f \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

**Proposition 2.6.4:** *Pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\Delta_{sr}$  et  $(\Delta_{sr} + \alpha I)$  sont des opérateurs de Fredholm d'indice zéro.*

**Preuve**

D'une part, la compacité de l'injection de  $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$  dans  $\mathcal{H}$  (voir le théorème 2.5.3), implique que pour tout  $\lambda \geq 0$ , l'opérateur  $(-\Delta_{sr} + \lambda I)$  admet une résolvante compacte dans  $\mathcal{H}$ .

D'autre part, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est tel que  $\lambda - \alpha > 0$ , alors on a

$$\begin{aligned} (\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1}(\Delta_{sr} + \alpha I) &= I + \lambda(\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1} \\ (\Delta_{sr} + \alpha I)(\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1} &= I + \lambda(\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

En posant

$$A_0 = (\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1},$$

et

$$K_1 = K_2 = -\lambda(\Delta_{sr} - (\lambda - \alpha)I)^{-1}.$$

Sachant que  $A_0$  est un opérateur borné, et que  $K_1$  ou  $K_2$  est un opérateur compact, compte tenu de (2.17), on voit bien que les conditions de la proposition 1.2.4, pour que  $(\Delta_{sr} + \alpha I)$  soit de Fredholm sont réalisées.

Par un argument analogue, on montre aussi que  $\Delta_{sr}$  est un opérateur de Fredholm. Il reste à montrer que leurs indices sont nuls. Puisque  $\Delta_{sr}$  et  $(\Delta_{sr} + \alpha I)$  sont auto-adjoints (d'après les propositions (2.6.1) et (2.6.2)), ils admettent nécessairement des indices nuls (voir[18]).

## 2.7 Le caractère Fredholm de l'opérateur

$$\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$$

On est maintenant en mesure de prouver le résultat essentiel de ce chapitre :  $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Nous calculerons une base du noyau de cet opérateur (aux valeurs critiques des paramètres  $(\alpha, s, r) = (\alpha_c, s_c, r_c)$ ), ce qui nous permettra d'utiliser par la suite la réduction de Liapunov-Schmidt pour l'équation (2.5) (forme opérationnelle du problème stationnaire).

**Théorème 2.7.1:** *L'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.*

### Preuve

Rappelons que

$$\mathcal{L}_{\alpha,s,r} = -\Delta_{sr}(\Delta_{sr} + \alpha I).$$

Puisque  $\Delta_{sr}$  et  $(\Delta_{sr} + \alpha I)$  sont des opérateurs de Fredholm d'indice zéro d'après la proposition 2.6.4, le résultat du théorème découle immédiatement de la proposition 1.2.5 (voir [18, Th. 2.5, p.264]).

### 2.7.1 Le noyau de $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$

Puisque  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  est un opérateur de Fredholm (d'indice zéro), il possède un noyau de dimension finie. Pour effectuer les calculs nécessaires dans notre

analyse, issue de la décomposition de Liapunov-Schmidt, on a besoin d'une base du noyau de  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ . Pour déterminer une telle base, on procédera en utilisant des développements en modes de Fourier dans  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 2.7.2:** *L'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  possède dans  $\mathcal{H}$ , un noyau engendré par les vecteurs  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , définis par*

$$w_1 = \cos(X + Y), w_2 = \sin(X + Y), w_3 = \cos(X - Y), w_4 = \sin(X - Y).$$

### Preuve

Le calcul de  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  noyau de  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  se fera directement par la résolution de l'équation linéaire

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U) = 0, \tag{2.18}$$

en utilisant un développement de  $U$  en série de Fourier.

Rappelons que  $(\alpha_c, s_c, r_c) = (2, 1, 1)$ , donc

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U) = -(\partial_X^4 + 2\partial_X^2 \partial_Y^2 + \partial_Y^4)U - 2(\partial_X^2 + \partial_Y^2)U.$$

Tenant compte des conditions (de périodicité) au bord de  $\Omega$  vérifiées par les éléments du domaine de  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ , il suffit de chercher les solutions de (2.18) parmi celles qui prennent (en notation complexe) la forme

$$U(X, Y) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{Z}^2} \alpha^{(\sigma_1, \sigma_2)} e^{(i\sigma_1 X + i\sigma_2 Y)}.$$

où  $\alpha^{(\sigma_1, \sigma_2)} \in \mathbb{C}$ , et puisque les modes constants non nuls n'appartiennent pas à l'espace  $\mathcal{H}$ , on doit avoir  $\alpha^{(0,0)} = 0$ . Autrement dit, le terme correspondant à l'indice  $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0)$  ne figure pas dans cette somme.

Sachant que  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  est un opérateur fermé (d'après le théorème 2.7.1), on a

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{Z}^2} (-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)) \alpha^{(\sigma_1, \sigma_2)} e^{(i\sigma_1 X + i\sigma_2 Y)}.$$

L'espace des fonctions de type  $e^{(i\sigma_1 X + i\sigma_2 Y)}$  étant invariant par l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ , on peut affirmer que  $U \in \text{Ker}(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  si et seulement si

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)((\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2) = 0.$$

Pour les couples  $(\sigma_1, \sigma_2) \neq 0$  dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , l'équation ci-dessus n'est vérifiée que lorsque  $(\sigma_1, \sigma_2) \in \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$ .

Ainsi à chaque couple  $(\sigma_1, \sigma_2) \in \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$  correspond une solution de l'équation (2.18) :

(1) Pour  $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, 1)$ , on a :  $u(X, Y) = e^{i(X+Y)}$ .

(2) Pour  $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, -1)$ , on a :  $u(X, Y) = e^{i(X-Y)}$ .

(3) Pour  $(\sigma_1, \sigma_2) = (-1, 1)$ , on a :  $u(X, Y) = e^{i(Y-X)}$ .

(4) Pour  $(\sigma_1, \sigma_2) = (-1, -1)$  on a :  $u(X, Y) = e^{-i(X+Y)}$ .

On obtient ainsi comme base (réelle) pour  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  les éléments  $w_1, w_2, w_3, w_4$  énoncés dans la proposition.

### 2.7.2 Régularité de l'opérateur non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha, s, r}$

L'opérateur non linéaire  $\mathcal{N}_{\alpha, s, r}$ , est un opérateur quadratique associé à l'application bilinéaire

$$\mathcal{N} : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

définie pour  $U$  et  $V$  appartenant à  $D$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(U, V) &= \frac{\alpha}{2} \langle \nabla_{sr} U(X, Y), \nabla_{sr} V(X, Y) \rangle_{\mathbb{R}^2} - \\ &\quad \frac{\alpha}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \nabla_{sr} U(\xi, \eta), \nabla_{sr} V(\xi, \eta) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Pour l'état critique du problème, en  $(U_0, \alpha, s, r) = (0, \alpha_c, s_c, r_c)$ , on a

$$D_u \mathcal{N}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U_0) = 0.$$

**Remarque 2.7.3:** (1) L'application non linéaire  $\mathcal{N}_{\alpha, s, r}$  est régulière par rapport aux paramètres  $\alpha, s, r$ , et en tant que forme quadratique d'une application bilinéaire,  $\mathcal{N}_{\alpha, s, r}$  est une application régulière de  $D$  vers  $\mathcal{H}$ .

(2) La partie linéaire dominante du problème (2.5) au voisinage de l'état critique  $(0, \alpha_c, s_c, r_c)$  est l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ .

# 3. RÉDUCTION DU PROBLÈME STATIONNAIRE

Dans l'analyse fonctionnelle non linéaire, il existe plusieurs méthodes pour étudier l'existence des solutions de problèmes stationnaires. Parmi les plus importantes, on peut citer la théorie du degré topologique [32, 34, 49], la théorie du point fixe [26, 33, 39], et la théorie de la bifurcation, dans laquelle on dispose de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt, voir [2, 30, 20, 35, 44]. Nous étudions l'existence de solutions stationnaires spatialement périodiques du problème (1.1), lequel est reformulé dans le chapitre précédent, comme équation opérationnelle (2.5), dans le cadre fonctionnel défini précédemment. Dans ce chapitre nous allons montrer, que ce problème se réduit à une équation algébrique en dimension finie, qu'on déterminera.

Nous commençons par une brève description de cette méthode d'analyse locale, voir [1, 20]. Cet outil de la théorie de la bifurcation, est essentiel dans ce chapitre, aussi bien du point de vue théorique pour montrer l'existence des structures stationnaires, que du point de vue pratique pour le calcul de ces structures.

### 3.1 Description de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt

Considérons le problème suivant :

$$\mathcal{L}(U) + \mathcal{N}_\mu(U) = 0 \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire (non borné) fermé défini sur un domaine  $D(\mathcal{L})$  dense dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\mu$  un paramètre dans  $\mathbb{R}^m$ , et  $\mathcal{N}_\mu$  une application non linéaire assez régulière de  $D(\mathcal{L})$  vers  $\mathcal{H}$ , telle que  $\|\mathcal{N}_\mu(U)\| = O(\|U\|_{D(\mathcal{L})} (\|\mu\| + \|U\|_{D(\mathcal{L})}))$  avec  $\mathcal{N}_0(0) = 0$ . Supposons aussi, que  $\mathcal{L}$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro selon la définition 1.2.1.

Un tel opérateur  $\mathcal{L}$  possède un noyau  $\mathcal{X} = \ker(\mathcal{L})$  de dimension (supposons par exemple) égale à  $n \in \mathbb{N}$  et une image  $\mathcal{Y} = R(\mathcal{L})$  fermée dans  $\mathcal{H}$  de codimension égale aussi à  $n$ . Ainsi il existe deux projections continues

$$P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad P(\mathcal{H}) = \mathcal{X}, \quad \text{et} \quad Q : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad Q(\mathcal{H}) = \mathcal{Y}.$$

De plus, en posant  $\mathcal{Z} = (I - P)(\mathcal{X})$  où  $I$  est l'application identité sur  $\mathcal{H}$ , la restriction de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  au sous-espace  $\mathcal{Z} \cap D(\mathcal{L})$ , réalise une bijection entre  $\mathcal{Z} \cap D(\mathcal{L})$  et  $\mathcal{Y}$ .

Lorsque l'opérateur  $\mathcal{L}$  est auto-adjoint (ce qui est notre cas dans la suite),  $P$  est la projection orthogonale sur  $\ker(\mathcal{L})$  parallèlement à  $R(\mathcal{L})$ . Ainsi, en prenant

$Q = (I - P)$ , l'espace  $\mathcal{H}$  se décompose en une somme directe comme suit

$$\mathcal{H} = \ker(\mathcal{L}) \oplus R(\mathcal{L}).$$

Donc toute solution  $U$  du problème (3.1) dans  $\mathcal{H}$ , peut être étudiée selon la décomposition suivante

$$U = U_0 + U_1 \quad \text{avec} \quad U_0 = P(U) \in \ker(\mathcal{L}) \quad \text{et} \quad U_1 = (I - P)(U) \in R(\mathcal{L}).$$

Ainsi le problème (3.1) est équivalent à

$$\begin{cases} P(\mathcal{N}_\mu(U_0 + U_1)) & = 0 & (a) \\ \mathcal{L}(U_1) + (I - P)(\mathcal{N}_\mu(U_0 + U_1)) & = 0 & (b) \end{cases} \quad (3.2)$$

L'inverse de la restriction de l'opérateur  $\mathcal{L}$  au sous-espace  $\mathcal{Z} \cap D(\mathcal{L})$  étant un opérateur borné de  $\mathcal{Y}$  sur  $\mathcal{Z} \cap D(\mathcal{L})$ , grace au théorème de la fonction implicite, la seconde équation dans (3.2) peut être résolue localement (au voisinage de  $(\mu, U_0) = (0, 0)$ ) pour  $U_1 = \mathcal{U}(\mu, U_0)$ . En introduisant  $U_1 = \mathcal{U}$  dans la première équation de (3.2), on obtient ce qu'on appelle (en théorie de la bifurcation), l'équation de bifurcation, qui caractérise les éléments  $U_0$  de  $\ker(\mathcal{L})$  correspondant à une solution de (3.1)

$$\mathcal{G}(U_0, \mu) = 0. \quad (3.3)$$

Ici  $\mathcal{G}$  est une application définie de  $\ker(\mathcal{L}) \times \mathbb{R}^m$  vers  $\ker(\mathcal{L})$  par

$$\mathcal{G}(U_0, \mu) = P(\mathcal{N}_\mu(U_0 + \mathcal{U}(\mu, U_0))). \quad (3.4)$$

En admettant que  $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$  est une base de  $\ker(\mathcal{L})$ , il existe  $n$  nombres réels  $a_i$  tels que

$$U_0 = a_0 u_0 + \dots + a_{n-1} u_{n-1}.$$

En introduisant cette représentation de  $U_0$  dans (3.3), sachant que l'opérateur  $P$  est la projection orthogonale sur  $\ker(\mathcal{L})$ , on obtient ce qu'on appelle la fonction de réduction définie par la fonction vectorielle  $g$  suivante

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{où} \quad g = (g_0, \dots, g_{n-1}),$$

où pour tout  $j$  compris entre 0 et  $(n-1)$

$$g_j(a_0, \dots, a_{n-1}, \mu) = \langle \mathcal{N}_\mu(U_0 + \mathcal{U}(\mu, U_0)), u_j \rangle. \quad (3.5)$$

Ainsi, au voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , à chaque solution  $(a_0, \dots, a_{n-1}, \mu)$  de l'équation réduite

$$g_j(a_0, \dots, a_{n-1}, \mu) = 0, \quad j = 0, \dots, (n-1), \quad (3.6)$$

correspond une solution de l'équation de bifurcation (3.3).

On peut alors résumer le processus de réduction dans le résultat suivant :

**Proposition 3.1.1** ([1, 20]): *Si la linéarisation de (3.1) (au voisinage du point critique  $(U, \mu) = (0, 0)$ ) est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, alors les solutions de (3.1) sont (localement) en correspondance biunivoque avec les solutions du système d'ordre fini*

$$g_j(a_0, \dots, a_{n-1}, \mu) = 0, \quad j = 0, \dots, (n-1)$$

où,  $g_j$  est défini par (3.5).

## 3.2 Application de la méthode de réduction

Notre but dans ce paragraphe est la mise en œuvre de la méthode de réduction de Liapunov-Schmidt, afin de réduire le problème (2.5), à une équation algébrique en dimension finie, plus commode à traiter. Mais avant de procéder à cette réduction, nous allons rappeler certains résultats, et fixer quelques notations.

Sachant que  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, on décompose  $\mathcal{H}$  en une somme directe du noyau et de l'image de  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$

$$\mathcal{H} = \ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \oplus R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$$

Soit  $P$  la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ , dont le noyau est  $R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ . En notant  $I$  l'application identité sur  $\mathcal{H}$ ,  $P$  et  $(I - P)$  sont deux projections orthogonales bornées sur  $\mathcal{H}$ .

Pour tout triplet  $(\alpha, s, r)$  dans  $\mathbb{R}^3$  posons

$$\mathcal{L}_{\alpha, s, r} = \mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c} + \mathcal{L}_{\mu, S, R}$$

avec  $\mu = \alpha - \alpha_c = \alpha - 2$ ,  $S = s - s_c = s - 1$  et  $R = r - r_c = r - 1$ .

L'application  $\mathcal{L}_{\mu, S, R}$  ainsi définie est assez régulière en tant que fonction des paramètres  $\mu$ ,  $S$  et  $R$ , de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathcal{L}(D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}), \mathcal{H})$  espace des applications linéaires bornées de  $D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  vers  $\mathcal{H}$ . Ainsi on est prêt à passer au procédé de réduction, en appliquant la décomposition (3.2) au problème (2.5).

### 3.2.1 Le principe de réduction

Tout élément  $U$  de  $\mathcal{H}$  peut être décomposé d'une manière unique en une somme de deux éléments, l'un dans le noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  et l'autre dans son image :

$$U = w + \mathcal{U} \quad \text{où } w = P(U) \in \ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \quad \text{et } \mathcal{U} = (I - P)(U) \in R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}).$$

Ainsi, en appliquant la décomposition (3.2), le problème (2.5) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}) + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U})) = 0 \quad (a) \\ \mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}(\mathcal{U}) + (I - P)(\mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}) + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U})) = 0 \quad (b) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Montrons que pour tout élément  $w$  dans  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$ , il existe exactement un seul élément de  $R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$  tel que l'équation (3.7.b) soit vérifiée.

**Proposition 3.2.1:** *Pour tout  $(w, \mu, S, R)$  au voisinage de  $\vec{0}$  dans  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}) \times \mathbb{R}^3$ , l'équation (3.7.b) a une solution et une seule  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(w, \mu, S, R)$  assez régulière dans  $R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$  telle que  $\mathcal{U}(0, 0, 0, 0) = 0$*

### Preuve

On peut représenter l'équation (3.7.b) sous la forme

$$\Phi(w, \mu, S, R, \mathcal{U}) = 0,$$

où  $\Phi$  définie par

$$\Phi(w, \mu, S, R, \mathcal{U}) = \mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}(\mathcal{U}) + (I - P)(\mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}) + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U}))$$

est une application régulière de  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}) \times \mathbb{R}^3 \times (D(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}) \cap R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}))$  vers  $R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$ . Les espaces  $D(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$  et  $R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$  étant munis respecti-

vement de la norme du graphe et de la norme de  $\mathcal{H}$ . De plus on a

$$\Phi(0, 0, 0, 0, 0) = 0.$$

Sachant que  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  est un opérateur de Fredholm, son image  $R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  est un sous-espace fermé dans  $\mathcal{H}$ , donc l'application  $\partial_{\mathcal{U}}\Phi(0, 0, 0, 0, 0) = \mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  possède un inverse borné de  $R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  vers  $D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \cap R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ .

Ainsi grâce au théorème de la fonction implicite, il existe une fonction régulière unique  $\mathcal{U}(w, \mu, S, R)$  définie dans un voisinage de  $O$  dans  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \times \mathbb{R}^3$  à valeurs dans un voisinage de  $O$  dans  $D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \cap R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ , qui vérifie

$$\Phi(w, \mu, S, R, \mathcal{U}(w, \mu, S, R)) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}(0, 0, 0, 0) = 0.$$

### 3.2.2 L'équation réduite

Puisque pour chaque triplet de paramètres  $(\mu, S, R)$  assez petit dans  $\mathbb{R}^3$ , et pour tout  $w$  dans un voisinage de  $O$  dans  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  l'équation (3.7.b) a exactement une solution  $\mathcal{U}(w, \mu, S, R)$ , les éléments du voisinage de  $O$  dans  $D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  qui sont solutions de (2.5), prennent la forme  $u = w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)$  et vérifient

$$\begin{aligned}
G_{\mu,S,R}(w) &= P(\mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R))) \\
&\quad + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)) = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Cette équation correspond à l'expression (3.3) du début de chapitre, c'est l'équation de bifurcation. Il est clair que l'ordre de régularité de l'application  $G_{\mu,S,R}$  est déterminé par celui de la régularité de  $\mathcal{U}$ .

Les solutions du problème (2.5), proches de la solution triviale, lorsque  $(\mu, S, R)$  est au voisinage de  $(0, 0, 0)$ , sont des fonctions de la forme  $w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)$  avec  $w$  solution de (3.8).

En projetant sur la base  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  du sous-espace  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ , l'action de  $G_{\mu,S,R}$  sur  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  se traduit par ce qu'on appelle la fonction de réduction  $\mathbf{g}$

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

avec  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$  tel que  $\mathbf{g}_j$  pour  $j = 1, 2, 3, 4$ , sont les fonctions définies de  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_j(a_1, a_2, a_3, a_4, \mu, S, R) &= \langle \mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)) \\
&\quad + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)), w_j \rangle,
\end{aligned}$$

où,  $w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + a_4 w_4$ .

Les solutions de l'équation (3.8) sont donc en correspondance biunivoque avec celles de l'équation réduite

$$\mathbf{g}_j(a_1, a_2, a_3, a_4, \mu, S, R) = 0, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (3.9)$$

Ce fait, est exprimé dans la proposition suivante

**Proposition 3.2.2:** *Au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ , à chaque solution  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \mu, S, R)$  de l'équation réduite (3.9), correspond une et une seule solution de l'équation (3.8).*

Les symétries du problème (1.1) (ou celles de (2.5)) ont des conséquences importantes sur la fonction  $\mathbf{g}$ , et par conséquent sur la structure du système réduit (3.9). C'est notre objet d'étude dans le chapitre suivant.

# 4. SYMÉTRIES DU PROBLÈME ET STRUCTURE DE L'ÉQUATION RÉDUITE

## 4.1 Action et effets des symétries

Ce chapitre est consacré aux symétries (transformations symétriques), qui laissent le problème stationnaire invariant. Sachant que la fonction de réduction est déterminée par les composantes de  $G_{\mu,S,R}$ , par rapport à la base  $w_1, w_2, w_3, w_4$  dans  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ , on utilisera le fait que ces dernières reproduisent les mêmes symétries du problème de départ, afin d'analyser l'action de ces symétries sur  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ , pour en tirer les conséquences sur  $\mathfrak{g}$ . Ainsi, on aura plus d'informations sur la structure de l'équation réduite.

### 4.1.1 La réduction de Liapunov-Schmidt avec symétrie

Maintenant, on revient à la description de la méthode de réduction de Liapunov-Schmidt du paragraphe 3.1, en reformulant le problème posé un peu différemment, pour être plus approprié au contexte des symétries. Le but principal de cette partie est de montrer, que le problème réduit hérite des symétries du problème de départ, ce qui simplifie considérablement les calculs par la suite (voir [20]).

Étant donné un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et une application assez régulière  $\Phi$ , dépendant d'un paramètre  $\mu \in \mathbb{R}^m$ , définie sur un sous-espace  $D \subset \mathcal{H}$

$$\Phi : D \times \mathbb{R}^m \subset \mathcal{H} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad \Phi(0, 0) = 0,$$

alors, le problème posé est de résoudre au voisinage de  $(0, 0) \in D \times \mathbb{R}^m$ , l'équation

$$\Phi(u, \mu) = 0,$$

en  $u$  fonction du paramètre  $\mu$ .

Dans cette reformulation du problème, l'opérateur  $\mathcal{L}$  du paragraphe 3.1 représente la différentielle (au sens de Fréchet) de  $\Phi$  par rapport à  $u$  au point  $(0, 0)$ , c'est à dire

$$\mathcal{L} = D_u \Phi(0, 0),$$

et

$$\mathcal{N}_\mu = \Phi(u, \mu) - D_u \Phi(0, 0).$$

Comme précédemment,  $\mathcal{L}$  est supposé un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et auto-adjoint. Lorsque  $\Phi(u, \mu)$  commute avec certaines transformations (symétriques), la fonction de réduction  $g$  définie au paragraphe 3.1, possède des propriétés intéressantes, et surtout profitables au calcul de l'équation réduite. En conservant les notations du paragraphe 3.1, on rappellera brièvement les définitions de ces notions, et les résultats de [20, 21], concernant l'effet des invariances par symétries sur l'opérateur  $\mathcal{L}$ , les espaces de décomposition  $\ker(\mathcal{L})$ ,  $R(\mathcal{L})$ , ainsi que  $\mathcal{G}$  et la fonction implicite  $\mathcal{U}$ .

**Définition 4.1.1:** *On appelle symétrie dans  $\mathcal{H}$ , toute transformation  $S$  linéaire et isométrique définie de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ .*

**Définition 4.1.2:** *On dit que l'opérateur  $\Phi$  est équivariant par (ou commute avec) la symétrie  $S$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

- (1)  *$D$  est un sous-espace de  $\mathcal{H}$  invariant par  $S$ , c'est à dire  $S(D) \subset D$ .*
- (2) *Pour tout  $u \in D$  on a :  $\Phi(S(u), \mu) = S(\Phi(u, \mu))$ .*

**Remarque 4.1.3:** *Lorsque l'équivariance concerne aussi l'espace des paramètres, les mêmes définitions sont valables en prenant l'espace  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^m$  au lieu de  $\mathcal{H}$ .*

**Proposition 4.1.4:** *([20, Lemma 3.2, Proposition 3.3], et [21]) On suppose que  $\Phi$  est un opérateur équivariant par la symétrie  $S$ . Alors les propriétés suivantes sont satisfaites*

- (a)  $\mathcal{L}$  est équivariant par  $S$ .
- (b)  $\ker(\mathcal{L})$  est un sous-espace invariant par  $S$ .
- (c)  $R(\mathcal{L})$  est un sous-espace invariant par  $S$ .
- (d)  $\mathcal{G}$  est équivariante par  $S$ .

**Preuve**

On doit dire d'abord, que nous reproduirons ici, la démonstration présentée dans [20].

Suivant les hypothèses de la proposition, on a

$$\Phi(S(u), \mu) = S(\Phi(u, \mu)).$$

En dérivant cette identité en  $(u, \mu) = (0, 0)$ , on obtient

$$\mathcal{L} \circ S = S \circ \mathcal{L}$$

ce qui prouve (a).

Pour tout  $u \in \ker(\mathcal{L})$  d'après (a), on a

$$\mathcal{L}(S(u)) = S(\mathcal{L}(u)) = S(0) = 0,$$

ainsi  $S(u) \in \ker(\mathcal{L})$ , d'où (b).

Pour tout élément  $u \in R(\mathcal{L})$ , il existe  $w \in D$ , tel que  $u = \mathcal{L}(w)$ , donc

$$S(u) = S(\mathcal{L}(w)),$$

et d'après (a) on a

$$S(u) = \mathcal{L}(S(w)).$$

Donc  $S(u) \in R(\mathcal{L})$ , ce qui prouve (c).

Le point (d) est un résultat direct du fait que les projections  $(I - P)$  et  $P$ , ainsi que la fonction implicite  $\mathcal{U}$  (représentée par  $U_1$  dans l'équation (3.2.b)) sont équivariantes par  $S$ .

En effet, soit  $u = v + w$  dans  $\mathcal{H}$ , où  $v \in \ker(\mathcal{L})$  et  $w \in R(\mathcal{L})$ . En tenant compte de l'invariance des sous-espaces  $\ker(L)$  et  $R(\mathcal{L})$ , on a

$$\begin{aligned} S((I - P)(u)) &= S((I - P)(v + w)) = S(w) = \\ &= (I - P)(S(w)) = (I - P)(S(v) + S(w)) = (I - P)(S(u)). \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient l'équivariance de  $P$  par  $S$ .

Concernant  $\mathcal{U}$ , posons d'abord  $\mathcal{U}_S(v, \mu) = S^{-1}\mathcal{U}(S(v), \mu)$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned} (I - P)\Phi(v + \mathcal{U}_S(v, \mu), \mu) &= S^{-1} \circ S(I - P)\Phi(v + \mathcal{U}_S(v, \mu), \mu) \\ &= S^{-1} \circ S(I - P)\Phi(S^{-1}(S(v) + \mathcal{U}(S(v), \mu)), \mu) \\ &= S^{-1}(I - P)\Phi(S(v) + \mathcal{U}(S(v), \mu), \mu). \end{aligned}$$

Sachant que  $\mathcal{U}(\cdot, \mu)$  est la (fonction implicite) solution de l'équation (3.2.b), on déduit que

$$(I - P)\Phi(v + \mathcal{U}_S(v, \mu), \mu) = 0$$

Donc  $\mathcal{U}_S$  est aussi, une solution de l'équation (3.2.b). Par conséquent, l'unicité de la solution du théorème de la fonction implicite, implique que

$$\mathcal{U}_S(v, \mu) = \mathcal{U}(v, \mu),$$

ce qui est équivalent à (l'équivariance de  $\mathcal{U}$  par  $S$ )

$$S(\mathcal{U}(v, \mu)) = \mathcal{U}(S(v), \mu).$$

Ainsi, les propriétés précédentes, la définition de  $\mathcal{G}$  (voir (3.4)), et l'hypothèse sur  $\Phi$ , impliquent que

$$S(\mathcal{G}(v, \mu)) = \mathcal{G}(S(v), \mu)$$

Donc le point (d) est bien vérifié.

**Remarque 4.1.5:** *Dans la démonstration précédente, il est montré aussi, que les projections  $(I - P)$  et  $P$ , ainsi que la fonction implicite  $\mathcal{U}$  (représentée par  $U_1$  dans l'équation (3.2.b)) sont équivariantes par  $S$ .*

### 4.1.2 Les symétries du problème

Dans ce paragraphe, on détermine les transformations symétriques, qui laissent l'équation (2.4) (ou sa forme opérationnelle (2.5)) invariante.

On peut montrer par un calcul direct, que l'équation, (2.4) commute avec les transformations suivantes

(1) La translation  $\tau_{x_0, y_0}$ , définie par

$$(\tau_{x_0, y_0} U)(x, y) = U(x - x_0, y - y_0).$$

(2) La réflexion  $\kappa_1$ , définie par

$$(\kappa_1 U)(x, y) = U(-x, -y).$$

(3) La réflexion  $\kappa_2$ , définie par

$$(\kappa_2 U)(x, y) = U(x, -y).$$

où  $x_0, y_0$  sont des réels quelconques.

Ainsi, en revenant à la formulation opérationnelle de (2.4), c'est à dire le problème (2.5), en posant  $\mathcal{L}_{\mu, S, R} = \mathcal{L}_{\alpha, s, r} - \mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ , avec  $\mu = \alpha - \alpha_c$ ,  $S = s - 1$  et  $R = r - 1$ , l'application

$$\Phi(U, \mu, S, R) = \mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U) + \mathcal{L}_{\mu, S, R}(U) + N_{\mu+2, S+1, R+1}(U)$$

est équivariante par les transformations  $\tau_{x_0, y_0}$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ .

**Remarque 4.1.6:** *Pour préciser le sens des définitions ci-dessus, concernant les transformations  $\tau_{x_0, y_0}$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , il faut revenir à la remarque 2.2.1.*

*$U(X, Y)$  étant la représentation de la fonction ( $2\pi$ -périodique par rapport à  $X$*

et  $Y$ )  $\tilde{U}(X, Y)$ , par sa restriction à l'ensemble  $\Omega = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Ainsi, on considère les définitions précédentes comme suit

$$\tau_{x_0, y_0}(U(X, Y)) = \text{restriction de } \tau_{x_0, y_0}(\tilde{U}(X, Y)) \text{ à } \Omega,$$

et pour  $i = 1, 2$

$$\kappa_i(U(X, Y)) = \text{restriction de } \kappa_i(\tilde{U}(X, Y)) \text{ à } \Omega.$$

### 4.1.3 Action des symétries sur l'équation réduite

Dans cette partie de notre travail, nous étudions l'action des transformations symétriques sur les éléments du noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ . De cette analyse, nous dégagerons certaines propriétés de la fonction de réduction  $g$ , qui impliquent une simplification significative du système algébrique issu de l'équation réduite.

#### Invariance par rapport aux translations : $\tau_{x_0, y_0}$

Étudions d'abord l'action de  $\tau_{x_0, y_0}$  sur  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ , sous-espace de  $\mathcal{L}$  engendré par  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ .

Pour tout élément  $w$  de  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ , il existe deux couples de nombres réels  $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4)$  tels que

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 w_4$$

Exprimons les vecteurs  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $(\alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^2$  en coordonnées polaires

$$\alpha_1 = \rho_1 \cos(\phi_1), \quad \alpha_2 = \rho_1 \sin(\phi_1), \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \rho_2 \cos(\phi_2), \quad \alpha_4 = \rho_2 \sin(\phi_2),$$

avec  $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $(\phi_1, \phi_2) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ .

On peut donc exprimer  $w$  en tant que fonction de  $(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)$

$$\begin{aligned} w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = \\ \rho_1 ((\cos \phi_1)w_1 + (\sin \phi_1)w_2) + \rho_2 ((\cos \phi_2)w_3 + (\sin \phi_2)w_4). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ainsi, en s'appuyant sur les propriétés des fonctions et identités trigonométriques, on obtient

$$\begin{aligned} (\tau_{x_0, y_0} w)(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = \rho_1 (\cos(\phi_1) \cdot \tau_{x_0, y_0}(w_1) + \sin(\phi_1) \cdot \tau_{x_0, y_0}(w_2)) + \\ \rho_2 (\cos(\phi_2) \cdot \tau_{x_0, y_0}(w_3) + \sin(\phi_2) \cdot \tau_{x_0, y_0}(w_4)), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (\tau_{x_0, y_0} w_1) &= w_1 \cos(x_0 + y_0) + w_2 \sin(x_0 + y_0), \\ (\tau_{x_0, y_0} w_2) &= -w_1 \sin(x_0 + y_0) + w_2 \cos(x_0 + y_0), \\ (\tau_{x_0, y_0} w_3) &= w_3 \cos(x_0 - y_0) + w_4 \sin(x_0 - y_0), \\ (\tau_{x_0, y_0} w_4) &= -w_3 \sin(x_0 - y_0) + w_4 \cos(x_0 - y_0). \end{aligned}$$

ceci implique que

$$(\tau_{x_0, y_0} w)(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = \rho_1(\cos(\phi_1 + x_0 + y_0)w_1 + \sin(\phi_1 + x_0 + y_0)w_2) + \rho_2(\cos(\phi_2 + x_0 - y_0)w_3 + \sin(\phi_2 + x_0 - y_0)w_4).$$

D'où

$$(\tau_{x_0, y_0} w)(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = w(\rho_1, \phi_1 + x_0 + y_0, \rho_2, \phi_2 + x_0 - y_0).$$

La transformation  $\tau_{x_0, y_0}$  étant linéaire, l'expression de  $G_{\mu, S, R}$  (voir (3.8)) en fonction de  $(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)$ , dans les plans définis par les directions de  $w_1$ ,  $w_2$ , et  $w_3$ ,  $w_4$ , entraîne

$$G_{\mu, S, R}((\tau_{x_0, y_0} w)(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)) = \sum_{i=1}^4 g_i(\rho_1, \phi_1 + x_0 + y_0, \rho_2, \phi_2 + x_0 - y_0)w_i. \quad (4.2)$$

Pour alléger la notation, dans l'expression ci-dessus on a posé pour  $i = 1, 2, 3, 4$

$$g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = g_i(\rho_1 \cos \phi_1, \rho_1 \sin \phi_1, \rho_2 \cos \phi_2, \rho_2 \sin \phi_2, \mu, S, R). \quad (4.3)$$

D'autre part, à l'aide des identités trigonométriques, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \tau_{x_0, y_0}(G_{\mu, S, R}(w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2))) = & \\
 & (\cos(x_0 + y_0) + \sin(x_0 + y_0))g_1(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \\
 & -(\sin(x_0 + y_0) - \cos(x_0 + y_0))g_2(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \quad (4.4) \\
 & +(\cos(x_0 - y_0) + \sin(x_0 - y_0))g_3(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \\
 & -(\sin(x_0 - y_0) - \cos(x_0 - y_0))g_4(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)
 \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.1.4,  $G_{\mu, S, R}$  est équivariante par  $\tau_{x_0, y_0}$ , on a alors

$$\tau_{x_0, y_0}(G_{\mu, S, R}(w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2))) = G_{\mu, S, R}((\tau_{x_0, y_0} w)(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)). \quad (4.5)$$

En comparant les expressions (4.2), (4.4) et (4.5), et en posant  $\beta_1 = x_0 + y_0$ ,  $\beta_2 = x_0 - y_0$ , par identification on obtient l'équation matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} g_1(\rho_1, \phi_1 + \beta_1, \rho_2, \phi_2 + \beta_2) \\ g_2(\rho_1, \phi_1 + \beta_1, \rho_2, \phi_2 + \beta_2) \\ g_3(\rho_1, \phi_1 + \beta_1, \rho_2, \phi_2 + \beta_2) \\ g_4(\rho_1, \phi_1 + \beta_1, \rho_2, \phi_2 + \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & 0 & 0 \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta_2 & -\sin\beta_2 \\ 0 & 0 & \sin\beta_2 & \cos\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \\ g_2(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \\ g_3(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \\ g_4(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a la proposition suivante

**Proposition 4.1.7:** *Pour tout  $(\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2, x_0, y_0)$  dans  $(\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R}^4$  on a les deux équations matricielles suivantes*

$$\begin{pmatrix} g_1(\rho_1, \phi_1 + \beta_1, \rho_2, \phi_2 + \beta_2) \\ g_2(\rho_1, \phi_1 + \beta_1, \rho_2, \phi_2 + \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \\ g_2(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} g_3(\rho_1, \phi_1 + \beta_1, \rho_2, \phi_2 + \beta_2) \\ g_4(\rho_1, \phi_1 + \beta_1, \rho_2, \phi_2 + \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_2 & -\sin\beta_2 \\ \sin\beta_2 & \cos\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_3(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \\ g_4(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \end{pmatrix}$$

où  $\beta_1 = x_0 + y_0$  et  $\beta_2 = x_0 - y_0$ .

**Remarque 4.1.8:** *La proposition 4.1.7 montre que les translations le long des directions de  $x$  et de  $y$  agissent sur  $\text{Ker}(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  comme des rotations, séparément dans les deux plans définis respectivement par  $\{w_1, w_2\}$  et  $\{w_3, w_4\}$ . Donc, pour une étude complète de l'équation (3.9), il suffit de considérer  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ , ce qui réduit l'équation (3.9) à*

$$g_i(\rho_1, 0, \rho_2, 0) = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

On obtient ainsi, le corollaire suivant

**Corollaire 4.1.9:** *L'étude de l'équation (3.9) se réduit à celle de*

$$g_i(\rho_1, 0, \rho_2, 0) = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

**Invariance par rapport à la réflexion :  $\kappa_1$**

Les éléments de la base  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  de  $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  sont transformés par  $\kappa_1$ , comme suit

$$\kappa_1(w_1) = w_1, \quad \kappa_1(w_2) = -w_2, \quad \kappa_1(w_3) = w_3, \quad \text{et} \quad \kappa_1(w_4) = -w_4.$$

Ce qui donne pour

$$w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = \rho_1 ((\cos \phi_1)w_1 + (\sin \phi_1)w_2) + \rho_2 ((\cos \phi_2)w_3 + (\sin \phi_2)w_4),$$

$$\begin{aligned} (\kappa_1 w)(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) &= \rho_1 (\cos \phi_1 \cdot \kappa_1 w_1 + \sin \phi_1 \cdot \kappa_1 w_2) \\ &\quad + \rho_2 (\cos \phi_2 \cdot \kappa_1 w_3 + \sin \phi_2 \cdot \kappa_1 w_4) \\ &= \rho_1 (\cos \phi_1 \cdot w_1 - \sin \phi_1 \cdot w_2) \\ &\quad + \rho_2 (\cos \phi_2 \cdot w_3 - \sin \phi_2 \cdot w_4) \\ &= -w(-\rho_1, -\phi_1, -\rho_2, -\phi_2) = w(\rho_1, -\phi_1, \rho_2, -\phi_2). \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\kappa_1 w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = w(\rho_1, -\phi_1, \rho_2, -\phi_2) = -w(-\rho_1, -\phi_1, -\rho_2, -\phi_2). \quad (4.6)$$

Donc

$$\begin{aligned} \kappa_1 G_{\mu, S, R}(w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)) &= \sum_{i=1}^4 g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) \kappa_1 w_i \\ &= \sum_{i=1}^4 g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) (-1)^{i+1} w_i \end{aligned}$$

En tenant compte de l'équivariance, on obtient

$$\begin{aligned}\kappa_1 G_{\mu,S,R}(w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)) &= G_{\mu,S,R}((\kappa_1 w)(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)) \\ &= G_{\mu,S,R}(w(\rho_1, -\phi_1, \rho_2, -\phi_2))\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^4 g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)(-1)^{i+1}w_i = \sum_{i=1}^4 g_i(\rho_1, -\phi_1, \rho_2, -\phi_2)w_i.$$

Par conséquent, en tenant compte de la première égalité de (4.6), les fonctions  $g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)$  sont paires par rapport à  $(\phi_1, \phi_2)$ , pour  $i = 1, 3$ , et impaire par rapport à  $(\phi_1, \phi_2)$ , pour  $i = 2, 4$ .

D'autre part, de la deuxième égalité de (4.6) on obtient

$$\sum_{i=1}^4 g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)(-1)^{i+1}w_i = \sum_{i=1}^4 -g_i(-\rho_1, -\phi_1, -\rho_2, -\phi_2)w_i.$$

Il s'en suit que pour  $i = 1, 2, 3, 4$  les fonctions  $g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)$  sont impaires par rapport à  $(\rho_1, \rho_2)$ . Ceci est résumé dans la proposition suivante.

**Proposition 4.1.10:** *Les fonctions  $g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)$  de l'équation réduite, sont des fonctions*

- (i) *paires par rapport à  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , pour  $i = 1, 3$ .*
- (ii) *impaires par rapport à  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , pour  $i = 2, 4$ .*
- (iii) *impaires par rapport à  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .*

### Invariance par rapport à la réflexion : $\kappa_2$

Les éléments de la base  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  du noyau de  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  sont transformés par  $\kappa_2$ , comme suit

$$\kappa_2(w_i) = w_{i+2} \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad \text{et} \quad \kappa_2(w_i) = w_{i-2} \quad \text{pour } i = 3, 4.$$

Ainsi, si

$$w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = \rho_1 (\cos \phi_1 \cdot w_1 + \sin \phi_1 \cdot w_2) + \rho_2 (\cos \phi_2 \cdot w_3 + \sin \phi_2 \cdot w_4),$$

alors

$$\kappa_2 w(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = w(\rho_2, \phi_2, \rho_1, \phi_1).$$

Grâce à la linéarité de  $\kappa_2$  et l'équivariance de  $G_{\mu, S, R}$  par rapport à  $\kappa_2$ , en menant une analyse analogue à celle du paragraphe précédent, on arrive à

$$\sum_{i=1}^4 g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) w_i = \sum_{i=1}^4 g_i(\rho_2, -\phi_2, \rho_1, -\phi_1) w_i,$$

pour aboutir à la proposition suivante.

**Proposition 4.1.11:** *Les fonctions de l'équation réduite  $g_i(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2)$ , vérifient*

$$g_1(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = g_3(\rho_2, \phi_2, \rho_1, \phi_1),$$

$$g_2(\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2) = g_4(\rho_2, \phi_2, \rho_1, \phi_1).$$

#### 4.1.4 Conséquences sur l'équation réduite

L'analyse développée précédemment (dans les sous-paragraphes précédents), concerne les retombées de l'équivariance de notre problème par les transformations  $\tau_{x_0, y_0}$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sur la fonction de réduction  $\mathbf{g}$ . Ainsi, on est en mesure de déduire de cette analyse, que l'équation réduite (3.9) (représentation algébrique de (3.8)) admet une structure plus simple, décrite dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 4.1.12:** *Toutes les solutions de l'équation réduite (3.9), s'obtiennent à partir des solutions de l'équation*

$$g_1(\rho_1, 0, \rho_2, 0) = 0.$$

*La fonction  $g_1(\rho_1, 0, \rho_2, 0)$  étant impaire par rapport à  $(\rho_1, \rho_2)$ .*

#### Preuve

Le résultat de la proposition est une conséquence directe du corollaire 4.1.9, de la proposition 4.1.10, et la proposition 4.1.11. En effet, d'après le corollaire 4.1.9, pour résoudre l'équation réduite, il suffit de considérer (3.9) en  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Les fonctions  $g_2$  et  $g_4$  étant impaires d'après la proposition 4.1.10, les solutions de (3.9) peuvent être déterminées par  $g_1$  et  $g_3$ . Enfin, d'après la première identité de la proposition 4.1.11, on déduit que la fonction  $g_1$  (ou  $g_3$ ) suffit pour déterminer les solutions de l'équation réduite (3.9).

**Remarque 4.1.13:** *Dans la suite du texte, on appellera fonction de réduction, la fonction  $f$  impaire par rapport à  $(\rho_1, \rho_2)$  définie par*

$$f(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R) = g_1(\rho_1, 0, \rho_2, 0). \quad (4.7)$$

*D'après la proposition 4.1.12, on peut remplacer l'équation réduite par*

$$f(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R) = 0, \quad (\text{ou } f(\rho_2, \rho_1, \mu, S, R) = 0). \quad (4.8)$$

Résumons ces résultats, dans le théorème suivant

**Théorème 4.1.14:** *Pour tout  $(\mu, S, R) \in \mathbb{R}^3$ , on a*

(i)  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  est solution de (3.9), si et seulement si  $\rho_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  et  $\rho_2 = \sqrt{a_3^2 + a_4^2}$  sont solutions de l'une des deux équations équivalentes (4.8).

(ii) Pour chaque solution  $(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R)$  de l'équation réduite (4.8) correspond (à une translation près, le long de l'axe des  $x$  et des  $y$ ) une solution du problème (2.4) (ou (2.5)) sous la forme  $\tau_{x_0, y_0}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3 + \mathcal{U}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3, \mu, S, R))$  où  $x_0$  et  $y_0$  sont des nombres réels quelconques.

## 4.2 Calcul de la fonction de réduction $f$

Pour étudier l'existence des solutions de l'équation (4.8), on doit calculer la fonction  $f$ , ou du moins ses termes dominants. On calculera simultanément les termes dominants dans le développement de  $f(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R)$  et de la fonction implicite  $\mathcal{U}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3, \mu, S, R)$  en série de Taylor par rapport aux variables  $(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R)$  au voisinage de  $(0, 0, 0, 0, 0)$ .

On procèdera par identification des coefficients des termes dans (3.7.a) et (3.7.b), de même ordre de puissance par rapport à  $\rho_1, \rho_2, \mu, S$  et  $R$ .

Compte tenu de la remarque 4.1.13, nous savons déjà que la fonction  $f$  est impaire par rapport à  $(\rho_1, \rho_2)$ , on ne considèrera donc dans nos calculs que les termes de puissances impaires par rapport à  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

### 4.2.1 Forme générale de $f$ et $\mathcal{U}$

La fonction de réduction étant assez régulière on peut la représenter à l'aide de sa série de Taylor

$$f(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\nu \geq 2} f_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu} \cdot \mu^\alpha S^\beta R^\gamma \rho_1^\delta \rho_2^\nu$$

développée en  $(0, 0, 0, 0, 0)$  pour tout  $(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R)$  au voisinage de  $(0, 0, 0, 0, 0)$ .

De la même façon, la fonction  $\mathcal{U}(w, \mu, S, R)$  est une fonction de  $(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R)$ ,

avec un développement de Taylor pour  $(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R)$  au voisinage de  $(0, 0, 0, 0, 0)$

$$\mathcal{U}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3, \mu, S, R) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\nu \geq 2} \mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu} \mu^\alpha S^\beta R^\gamma \rho_1^\delta \rho_2^\nu.$$

En substituant ces développements dans (3.7.a) et (3.7.b), puis en identifiant les termes correspondant aux monômes  $\mu^\alpha S^\beta R^\gamma \rho_1^\delta \rho_2^\nu$ , on obtient les coefficients  $f_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu}$  et  $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu}$ .

### 4.2.2 Procédure du calcul des premiers termes

Pour calculer les termes dominants dans le développement de  $f$ , on représente les opérateurs  $\mathcal{L}_{\mu+2, S+1, R+1}$  et  $\mathcal{N}_{\mu+2, S+1, R+1}$  par leurs développements par rapport aux différentes puissances de  $\mu$ ,  $S$  et  $R$ , associées aux applications respectives  $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma}$  et  $\mathcal{B}_{\alpha\beta\gamma}$ , dont ils sont composés

$$\mathcal{L}_{\mu+2, S+1, R+1} = \sum \mu^\alpha S^\beta R^\gamma \mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{N}_{\mu+2, S+1, R+1} = \sum \mu^\alpha S^\beta R^\gamma \mathcal{B}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{4.10}$$

Pour des raisons de calcul, on a besoin aussi de décomposer la forme bilinéaire  $\mathcal{N}$  comme suit

$$\mathcal{N} = \sum \mu^\alpha S^\beta R^\gamma \mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{4.11}$$

Nous reviendrons avec plus de détails sur ces développements, et ces applications dans l'annexe.

### Propriétés utiles pour le calcul

Dans le calcul des termes dominants de l'équation réduite  $f$ , on a besoin des termes correspondants en  $\mathcal{U}$ . La proposition suivante fournit un résultat important dans le calcul. On montre que les termes  $\mathcal{U}_{000}^{10}$  et  $\mathcal{U}_{000}^{01}$  sont nuls.

**Proposition 4.2.1:** *les coefficients de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans le développement de  $\mathcal{U}$  sont nuls.*

#### Preuve

Notons que  $\mathcal{U}_{000}^{10} \in R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$  est égale à

$$\partial_{\rho_1} \mathcal{U}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3, \mu, S, R)$$

évalué au point  $(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R) = (0, 0, 0, 0, 0)$ , et vérifie l'équation

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(\mathcal{U}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3, \mu, S, R)) + (I - P)\mathcal{L}_{\mu, S, R}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3 + \mathcal{U}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3, \mu, S, R))$$

$$+ (I - P)\mathcal{N}_{\mu+2, S+1, R+1}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3 + \mathcal{U}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3, \mu, S, R)) = 0.$$

En dérivant cette équation par rapport à  $\rho_1$ , et en tenant compte de la condition (du théorème de la fonction implicite)

$$\mathcal{U}(0, 0, 0, 0, 0) = 0$$

on obtient

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(w_1 + \mathcal{U}_{000}^{10}) = 0.$$

Puisque  $w_1 \in \ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ , on a

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(\mathcal{U}_{000}^{10}) = 0,$$

et par suite

$$\mathcal{U}_{000}^{10} \in \ker(\mathcal{L}_c) \cap R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) = \{0\}.$$

Un raisonnement analogue relativement à  $\rho_2$  achève la démonstration.

**Remarque 4.2.2:**

(i) Pour chaque  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , le terme  $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{10}$  vérifie une équation de la forme

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{10}) + (I - P) \sum \mathcal{A}_{ijk} \mathcal{U}_{(\alpha-i)(\beta-j)(\gamma-k)}^{10} = 0.$$

Ainsi, par induction, et vu la proposition précédente, on obtient

$$\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{10} = 0,$$

et de la même manière on arrive à

$$\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{01} = 0.$$

(ii) La fonction de réduction  $f$  étant impaire par rapport à  $(\rho_1, \rho_2)$ , d'après

(i) les premiers termes dans le développement de  $f$  associés aux puissances de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les termes en  $\rho_1^3$  et  $\rho_2^3$ .

### 4.2.3 Calcul des premiers termes du développement de $f$

#### Identification du terme en $\rho_1^3$

Pour obtenir le coefficient de  $\rho_1^3$  dans  $f$ , on a besoin des termes  $\mathcal{U}_{000}^{20}$  et  $\mathcal{U}_{000}^{30}$  dans le développement de  $\mathcal{U}$ .

$\mathcal{U}_{000}^{20}$  satisfait l'équation

$$(I - P) (\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{000}^{20}) + \mathcal{B}_{000}(w_1)) = 0.$$

Ce qui entraîne

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(\mathcal{U}_{000}^{20}) = -(I - P)(\mathcal{N}_{\alpha_c, s_c, r_c}(w_1)),$$

et par suite

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(\mathcal{U}_{000}^{20}) = -\cos(2X + 2Y).$$

Le sous-espace  $\mathcal{E}$  des fonctions de la forme

$$\cos(kX + kY)$$

étant globalement invariant sous l'action de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ , on peut résoudre cette équation différentielle en cherchant les solutions dans  $\mathcal{E}$ . Ainsi on obtient

$$\mathcal{U}_{000}^{20} = \frac{1}{48} \cos(2X + 2Y).$$

Le terme  $\mathcal{U}_{000}^{30}$  satisfait l'équation

$$(I - P) (\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{000}^{30}) + 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{000}^{30}) = -2(I - P)(\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})),$$

donc

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{000}^{30}) = -\frac{1}{12} \cos(3X + 3Y).$$

En procédant comme pour le terme  $\mathcal{U}_{000}^{20}$ , et en résolvant l'équation précédente dans  $\mathcal{E}$ , on obtient

$$\mathcal{U}_{000}^{30} = \frac{1}{3456} \cos(3X + 3Y).$$

Le coefficient de  $\rho_1^3$  dans le développement de  $f$  s'obtient en projetant

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{000}^{30}) + 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})$$

sur le noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  suivant la direction de  $w_1$ . On obtient ainsi

$$f_{000}^{30} = \langle \mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{000}^{30}) + 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20}), w_1 \rangle = -\frac{\pi^2}{6}.$$

### Identification du terme en $\rho_1^3 \mu$

Pour obtenir le coefficient de  $\rho_1^3 \mu$  dans  $f$ , on a besoin des termes  $\mathcal{U}_{100}^{20}$  et  $\mathcal{U}_{100}^{30}$  dans le développement de  $\mathcal{U}$ .

$\mathcal{U}_{100}^{20}$  satisfait l'équation

$$(I - P)(\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{100}^{20}) + \mathcal{A}_{100}(\mathcal{U}_{000}^{20}) + \mathcal{B}_{100}(w_1)) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{100}^{20}) = -\mathcal{A}_{100}(\mathcal{U}_{000}^{20}) - (I - P)(\mathcal{B}_{100}(w_1)),$$

donc

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{100}^{20}) = -\frac{2}{3} \cos(2X + 2Y).$$

La résolution de cette équation conduit à

$$\mathcal{U}_{100}^{20} = \frac{1}{72} \cos(2X + 2Y).$$

Le terme  $\mathcal{U}_{100}^{30}$  vérifie l'équation

$$(I - P)(\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{100}^{30}) + \mathcal{A}_{100}(\mathcal{U}_{000}^{30}) + 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{100}^{20}) + 2\mathcal{C}_{100}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{100}^{30}) = -\mathcal{A}_{100}(\mathcal{U}_{000}^{30}) - 2(I - P)(\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{100}^{20}) + \mathcal{C}_{100}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})).$$

Par conséquent

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{100}^{30}) = -\frac{59}{576} \cos(3X + 3Y)$$

En procédant comme précédemment pour le terme  $\mathcal{U}_{000}^{20}$  et en résolvant l'équation précédente dans  $\mathcal{E}$ , on obtient

$$\mathcal{U}_{100}^{30} = \frac{59}{165888} \cos(3X + 3Y)$$

Le coefficient de  $\rho_1^3 \mu$  dans  $f$  s'obtient en projetant le terme

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{100}^{30}) + \mathcal{A}_{100}(\mathcal{U}_{000}^{30}) + 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{100}^{20}) + 2\mathcal{C}_{100}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})$$

sur le noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  suivant la direction de  $w_1$ . On obtient ainsi

$$f_{100}^{30} = \langle \mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{100}^{30}) + \mathcal{A}_{100}(\mathcal{U}_{000}^{30}), w_1 \rangle + \langle 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{100}^{20}) + 2\mathcal{C}_{100}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20}), w_1 \rangle .$$

D'où

$$f_{100}^{30} = -\frac{7\pi^2}{36} .$$

Pour un complément de calcul des premiers termes de la fonction réduite, voir l'annexe.

### 4.2.4 Résultats et conséquences des calculs

Suite aux calculs effectués au paragraphe précédent, on arrive à

$$f(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R) = -\frac{1}{108} \pi^2 \rho_1^3 (18 + 21\mu - 6(S + R) + 16SR + 288\mu SR + 5(S^2 + R^2)) - \frac{1}{1990650} \pi^2 \rho_1^5 (-576 - 1380\mu + 3381\mu S) + \dots$$

où " + ..." désigne des termes d'ordres plus élevés.

Ainsi on peut affirmer que le problème stationnaire (2.4), reformulé en (2.5), admet des solutions stationnaires non nulles proches de l'état trivial.

**Théorème 4.2.3:** *Pour tout  $(\mu, S, R)$  au voisinage de  $(0, 0, 0)$  tel que  $\mu > 0$ ,  $f(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R) = 0$  admet une solution unique. Toutes les solutions de (2.5) sont de la formes*

$$\tau_{x_0, y_0}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3 + \mathcal{U}(\rho_1 w_1 + \rho_2 w_3, \mu, S, R)) \quad (4.12)$$

où  $x_0$  et  $y_0$  sont quelconques.

#### Preuve

On obtient ce résultat, en appliquant le théorème de la fonction implicite à la fonction  $\frac{f(\rho_1, \rho_2, \mu, S, R)}{\rho_1^3}$ .

**Remarque 4.2.4:** *Toute solution de (4.12) représente une solution stationnaire du problème (1.1)-(1.2), périodique par rapport à  $x$  et  $y$ , et proche de la solution nulle.*

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, on a montré que l'équation de Kuramoto-Sivashinsky, avec un terme non linéaire d'ordre quadratique et à caractère non local, possède des solutions stationnaires non triviales, périodiques par rapport aux deux directions spatiales. Pour cela, nous avons utilisé un outil de l'analyse fonctionnelle, appliqué aux problèmes non linéaires : la méthode de réduction de Liapunov-Schmidt. On s'est intéressé aux solutions voisines de l'état d'équilibre trivial du problème.

Cette réduction repose essentiellement, sur le fait que la partie linéaire dominante du problème, est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Elle s'obtient alors, en projetant l'équation définie dans tout l'espace (fonctionnel), sur le sous espace constitué par le noyau de cet opérateur. Autrement dit, la linéarisation du problème au point critique, doit produire un opérateur linéaire possédant un noyau (non trivial) de dimension finie et une image fermée (donc admet zéro, comme valeur propre isolée dans son spectre). Ce qui n'est pas le cas de notre équation, lorsqu'elle décrit l'évolution dans un domaine non borné (l'espace  $\mathbb{R}^2$ ). Car dans ces conditions, le spectre de l'opérateur en question est continu. C'est la raison pour laquelle, on s'est restreint à la recherche de

solutions périodiques en espace, puisqu'elles nous permettent de reformuler le problème, dans un domaine borné (le rectangle période dans  $\mathbb{R}^2$ ). Pour montrer qu'on est dans les conditions d'application de cette méthode, on a reproduit les techniques de manipulation des opérateurs, utilisées dans la théorie classique de la régularité elliptique. Ainsi, on est arrivé à réduire l'équation aux dérivées partielles de départ, à un système d'équations algébriques. De plus une analyse des symétries du problème, nous a permis de simplifier ce système, en montrant qu'il est équivalent à une seule équation algébrique ; dont chaque solution correspond à un état stationnaire périodique du problème de départ.

Il reste à étudier la stabilité de ces solutions bifurcatives. On pourrait envisager d'aborder cette question par le principe de la stabilité réduite appliquée au problème spectrale associé. Ce qui permettrait de profiter de l'analyse déjà faite, concernant la réduction du problème non linéaire.

## 5. ANNEXE

Notre objectif principal dans cette annexe, est de décrire la démarche suivie dans les calculs effectués, pour déterminer les premiers termes de la fonction de réduction.

### A Premiers termes dans le développement

#### des opérateurs

Les opérateurs définis par (4.9)-(4.11),  $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma}$ ,  $\mathcal{B}_{\alpha\beta\gamma}$  et  $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ , qui figurent dans la décomposition des opérateurs  $\mathcal{L}_{\mu+2,S+1,R+1}$ ,  $\mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}$  et  $\mathcal{N}$ , respectivement sont (les premiers entre eux) donnés par

$$\mathcal{A}_{000}(U) = -(\partial_X^4 + 2\partial_Y^2\partial_X^2 + \partial_Y^4)U - 2(\partial_X^2 + \partial_Y^2)U$$

$$\mathcal{A}_{100}(U) = -(\partial_X^2 + \partial_Y^2)U$$

$$\mathcal{A}_{010}(U) = -4(\partial_Y^2\partial_X^2 + \partial_X^2 + \partial_X^4)U$$

$$\mathcal{A}_{001}(U) = -4 (\partial_Y^2 \partial_X^2 + \partial_Y^2 + \partial_Y^4) U$$

$$\mathcal{A}_{020}(U) = -2 (\partial_Y^2 \partial_X^2 + \partial_X^2 + 3\partial_X^4) U$$

$$\mathcal{A}_{002}(U) = -2 (\partial_Y^2 \partial_X^2 + \partial_Y^2 + 3\partial_Y^4) U$$

$$\mathcal{A}_{110}(U) = -2\partial_X^2, \mathcal{A}_{101}(U) = -2\partial_Y^2, \mathcal{A}_{011}(U) = -8\partial_Y^2 \partial_X^2$$

$$\mathcal{C}_{000}(U, V) = (\partial_X U) (\partial_X V) + (\partial_Y U) (\partial_Y V) -$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ((\partial_X U) (\partial_X V) + (\partial_Y U) (\partial_Y V)) d\xi d\eta.$$

$$\mathcal{C}_{010}(U, V) = 2 (\partial_X U) (\partial_X V) - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_X U) (\partial_X V) d\xi d\eta.$$

$$\mathcal{C}_{001}(U, V) = 2 (\partial_Y U) (\partial_Y V) - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_Y U) (\partial_Y V) d\xi d\eta.$$

$$\mathcal{C}_{100}(U, V) = \frac{1}{2} ((\partial_X U) (\partial_X V) + (\partial_Y U) (\partial_Y V)) -$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ((\partial_X U) (\partial_X V) + (\partial_Y U) (\partial_Y V)) d\xi d\eta.$$

Notons que les opérateurs  $\mathcal{B}_{\alpha\beta\gamma}$  sont définis par

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta\gamma}(U) = \mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}(U, U).$$

## B Outils et procédure de calcul

Pour calculer les termes dominants de l'équation réduite  $f$ , on a besoin des termes correspondants en  $\mathcal{U}$ . Le résultat suivant est utile pour le calcul.

**Proposition B.1:** *Pour tout  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu)$ , les termes  $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu}$  et  $\mathcal{U}_{\alpha\gamma\beta}^{\delta\nu}$  dans le développement de  $\mathcal{U}$  sont égaux.*

### Preuve

Nous obtenons le terme  $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu}$  dans le développement de  $\mathcal{U}$ , en identifiant le terme correspondant dans l'équation (3.7.b), ce qui conduit à une équation différentielle dont les solutions appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{E}$  des fonctions de la forme

$$\cos(kX + kY) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

On constate (d'après leurs définitions), que l'action des opérateurs  $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma}$  et  $\mathcal{A}_{\alpha\gamma\beta}$  sur l'ensemble  $\mathcal{E}$  est identique.

L'action des formes bilinéaires  $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$  sur l'ensemble  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  coïncide aussi avec

celle des formes  $\mathcal{C}_{\alpha\gamma\beta}$ .

Par conséquent, l'identification faite pour le calcul des termes  $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu}$  et  $\mathcal{U}_{\alpha\gamma\beta}^{\delta\nu}$  produit la même équation différentielle, et conduit à

$$\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu} = \mathcal{U}_{\alpha\gamma\beta}^{\delta\nu}.$$

**Remarque B.2:** *Le terme  $f_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu}$  dans le développement de  $f$  s'obtient par identification avec le terme correspondant dans l'équation (3.7.b). Ainsi, d'après la proposition (B.1), le terme obtenu dans cette identification coïncide avec le terme  $f_{\alpha\gamma\beta}^{\delta\nu}$ , et on a*

$$f_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\nu} = f_{\alpha\gamma\beta}^{\delta\nu}.$$

### B.1 Identification du terme en $\rho_1^3 S$

Pour obtenir le coefficient de  $\rho_1^3 S$  dans  $f$ , on a besoin des termes  $\mathcal{U}_{010}^{20}$  et  $\mathcal{U}_{010}^{30}$  (en plus des termes  $\mathcal{U}_{000}^{30}$  et  $\mathcal{U}_{000}^{20}$  déjà calculés dans le paragraphe 4.2.3)

Le terme  $\mathcal{U}_{010}^{20}$ , satisfait l'équation

$$(I - P)(\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{010}^{20}) + \mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{000}^{20}) + \mathcal{B}_{010}(w_1)) = 0$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{010}^{20}) = -\mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{000}^{20}) - (I - P)(\mathcal{B}_{010}(w_1)) = \frac{4}{3}\cos(2X + 2Y)$$

En résolvant l'équation précédente dans  $\mathcal{E}$ , l'ensemble des fonctions de la forme

(5.1) on obtient

$$\mathcal{U}_{010}^{20} = -\frac{1}{36}\cos(2X + 2Y).$$

Le terme  $\mathcal{U}_{010}^{30}$  satisfait l'équation

$$(I - P)(\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{010}^{30}) + \mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{000}^{30}) + 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{010}^{20}) + 2\mathcal{C}_{010}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})) = 0$$

ce qui entraine

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{010}^{30}) = -\mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{000}^{30}) - 2(I - P)(\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{010}^{20}) + \mathcal{C}_{010}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20}))$$

ainsi

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{010}^{30}) = \frac{59}{288}\cos(3X + 3Y).$$

La résolution de l'équation précédente encore dans  $\mathcal{E}$ , donne

$$\mathcal{U}_{010}^{30} = -\frac{59}{82944}\cos(3X + 3Y).$$

Le coefficient de  $\rho_1^3 S$  dans  $f$  s'obtient en projetant le terme

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{010}^{30}) + \mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{000}^{30}) + 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{010}^{20}) + 2\mathcal{C}_{010}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})$$

sur le noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  suivant la direction de  $w_1$ . On obtient

$$f_{010}^{30} = \langle \mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{010}^{30}) + \mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{000}^{30}), w_1 \rangle + 2 \langle \mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{010}^{20}) + \mathcal{C}_{010}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20}), w_1 \rangle,$$

ce qui conduit à

$$f_{010}^{30} = \frac{\pi^2}{18}.$$

## B.2 Identification du terme en $\rho_1^3 SR$

Pour obtenir le coefficient de  $\rho_1^3 SR$  dans  $f$ , on a besoin des termes  $\mathcal{U}_{011}^{20}$  et  $\mathcal{U}_{011}^{30}$ .

Le terme  $\mathcal{U}_{011}^{20}$  est solution de l'équation

$$(I - P)(\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{011}^{20}) + \mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{001}^{20}) + \mathcal{A}_{001}(\mathcal{U}_{010}^{20}) + \mathcal{B}_{011}(w_1)) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{011}^{20}) = -\mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{001}^{20}) - \mathcal{A}_{001}(\mathcal{U}_{010}^{20}) - (I - P)(\mathcal{B}_{011}(w_1)),$$

donc

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{011}^{20}) = -\frac{32}{9}\cos(2X + 2Y).$$

De la résolution de l'équation précédente dans  $\mathcal{E}$ , on obtient

$$\mathcal{U}_{011}^{20} = \frac{2}{27}\cos(2X + 2Y).$$

Le terme  $\mathcal{U}_{011}^{30}$  vérifie l'équation

$$\begin{aligned} & (I - P)(\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{011}^{30}) + \mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{001}^{30}) + \mathcal{A}_{001}(\mathcal{U}_{010}^{30}) + \mathcal{A}_{011}(\mathcal{U}_{000}^{30})) \\ & + 2(I - P)(\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{011}^{20}) + \mathcal{C}_{010}(w_1, \mathcal{U}_{001}^{20})) \\ & + 2(I - P)(\mathcal{C}_{001}(w_1, \mathcal{U}_{010}^{20}) + \mathcal{C}_{011}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})) = 0, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{011}^{30}) &= -\mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{001}^{30}) - \mathcal{A}_{001}(\mathcal{U}_{010}^{30}) - \mathcal{A}_{011}(\mathcal{U}_{000}^{30}) \\ &\quad -2(I - P)(\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{011}^{20}) + \mathcal{C}_{010}(w_1, \mathcal{U}_{001}^{20})) - \\ &\quad -2(I - P)(\mathcal{C}_{001}(w_1, \mathcal{U}_{010}^{20}) + \mathcal{C}_{011}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20})), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{011}^{30}) = -\frac{2617}{3456} \cos(3X + 3Y).$$

La résolution de cette équation donne

$$\mathcal{U}_{011}^{30} = \frac{2617}{995328} \cos(3X + 3Y).$$

Le coefficient de  $\rho_1^3 SR$  dans  $f$  s'obtient en projetant le terme

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{000}(\mathcal{U}_{011}^{30}) + \mathcal{A}_{010}(\mathcal{U}_{001}^{30}) + \mathcal{A}_{001}(\mathcal{U}_{010}^{30}) + \mathcal{A}_{011}(\mathcal{U}_{000}^{30}) \\ &\quad + 2\mathcal{C}_{000}(w_1, \mathcal{U}_{011}^{20}) + 2\mathcal{C}_{010}(w_1, \mathcal{U}_{001}^{20}) \\ &\quad + 2\mathcal{C}_{001}(w_1, \mathcal{U}_{010}^{20}) + 2\mathcal{C}_{011}(w_1, \mathcal{U}_{000}^{20}) \end{aligned}$$

sur le noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$  suivant la direction de  $w_1$ , ce qui donne

$$f_{011}^{30} = -\frac{4\pi^2}{27}.$$

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Amman , *Ordinary Differential Equations, An Introduction to nonlinear Analysis*, Studies in Mathematics, **13**, Walter de Gryter, 1991.
  
- [2] V. Balakotaiah, D. Luss, and B. Keyfitz, Steady state multiplicity analysis of lumped-parameter systems described by a set of algebraic equations. *Chem. Eng. Commun.*, **36**, 1985, 121-147.
  
- [3] A. Belleni-Morante, *Applied semigroups and evolution equations*, Oxford University Press, 1979.
  
- [4] Herman J.Bierens, *Introduction to Hilbert Spaces*, Pennsylvania State University, 2007.
  
- [5] P. A. Raviart, *Espace de Sobolev, Problèmes aux Limites Elliptiques Linéaire*, D.E.A d'Analyse Numérique, Prépub. Univ. Paris 6, 1981.
  
- [6] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems, Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, 2001.
  
- [7] R. E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Pitman Advanced Publishing Program, London, 1979.

- 
- [8] B. Soltanalizadeh and M. Zarebnia, Numerical analysis of linear and nonlinear Kuramoto-Sivashinsky equation by using differential transformation method, *Int. J. of Appl. Math. and Mech.*, **7**(12), 2011, 63-72.
- [9] H. I. Abdel-Gawad, and H. A. Abdusalam, Appriximate solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation for periodic boundary value problems and chaos, *Solitons and Fractals*, **12**, 2001, 2039-2050.
- [10] Y. Kuramoto, and T. Tsuzuki, Persistent Propagation of Concentration Waves in Dissipative Media far from Thermal Equilibrium, *Prog. Theor. Phys.*, **55**, 1976, 356-369.
- [11] Y. Kuramoto, Diffusion-induced chaos in reaction system, *Prog. Theor. Phys.Suppl.* **64**, 1978, 346-367.
- [12] LI. Changpin, and C. Guanrong, Bifurcation analysis of the Kuramoto-Sivashinsky equation in one spatial dimension, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **Vol. 11**(9), 2001, 2493-2499.
- [13] LI. Changpin, and C. Guanrong, Bifurcation from an equilibrium of the steady state Kuramoto-Sivashinsky equation in two spatial dimensions, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **Vol. 12**(1), 2002, 103-114.
- [14] L. Nisse, and M-C. Neel, Spectral stability of convective rolls in porous media, *J. Appl. Math. Mech*, **Vol.85**(5), 2005, 366-384.
- [15] G. I. Sivashinsky, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames, Part I, derivation of basic equations, *Acta Astronautica*, **4**, 1977, 1177-1206.

- 
- [16] G. I. Sivashinsky, On flame propagation under conditions of stoichiometry, *SIAM J. Appl. Math.*, **39**, 1980, 67-82.
- [17] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [18] M. Schechter, Basic Theory of Fredholm Operators, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 21(2), 1967, 361-380.
- [19] M. Schechter, *Spectra of Partial Differential Operators*, North-Holland, 1986.
- [20] M. Golubitsky, and D. Shaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Springer Verlag New York, 1985.
- [21] M. Golubitsky, I. Stewart and D. Shaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. II, *Appl. Math. Sci. Ser.* **69** Springer Verlag, New York, 1988.
- [22] Y. Cao, and E. Titi, Trivial stationary solutions to the Kuramoto-Sivashinsky and certain nonlinear elliptic equations, *J. Differential Equations*, **231**, 2006, 755-767.
- [23] Z. J. Yang, Travelling wave solutions to nonlinear evolution and wave equation, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **27**(5), 1974, 2837-2855.
- [24] T.B.Ward, *Functional Analysis Lecture Notes*, School of Mathematics, University of East Anglia, Norwich NR4 7TJ, U.K.
- [25] D. Armbruster, J. Guckenheimer, and P. Holmes, Kuramoto-Sivashinsky Dynamics on the Center-Unstable Manifold, *SIAM J. Appl. Math.*,

- 
- 49(3), 1989, 676-691.
- [26] R.P. Agarwal, M. Meehan et D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge Tracts in Mathematics, **141**, Cambridge University Press, 2001.
- [27] J. L. Beck, *Convection in a box of porous material saturated with fluid*, Physics of fluids, **15**, 1972, 1377-1383.
- [28] E. Bodenschatz, W. Pesch and G. Ahlers, *Recent developments in Rayleigh-Bénard convection*, Annu. Rev. Fluid Mech. **32**, 2000, 709-778.
- [29] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Collection Sci. Sup. Dunod, 1983.
- [30] S.N. Chow, J. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [31] M. C. Cross, & P.C. Hohenberg, *Pattern formation out of equilibrium*, Re. Mod. Phys. **65**(3), 1993, 851-1112.
- [32] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [33] J. Dugundji et A. Granas, *Fixed point theory*, Warsaw, PWN-Polich Scientific Publ., 1982.
- [34] I. C. Gohberg et M. G. Krein, *The basic proposition on defect numbers, roots numbers and indices of linear operators*, Amer. Math. Soc. Transl., **13**(2), 1960, 185-264.

- 
- [35] G. Iooss, D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory* Springer-Verlag, New York, 1980.
- [36] H. Kielhofer et R. Lauterbach, *On the principle of reduced stability*, J. Func. Anal., **53**, 1983, 99-111.
- [37] E. Knobloch, M. R. E. Proctor, *Non linear periodic convection in double-diffusive systems*, J. Fluid Mec. vol.108, 1981, 291-316.
- [38] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, 1980.
- [39] T. Kuczumow, S. Reich, D. Shoikhet., *The existence and non-existence of common fixed points for commuting families of holomorphic mappings*, Nonlinear Analysis **43**, 2001, 45-59.
- [40] P. Manneville, *Dynamique non-linéaire et chaos*, DEA de Physique des Liquides, Paris VI, École polytechnique, 2002.
- [41] P. Manneville, *Structures dissipatives, chaos et turbulence*, Collec. Alea, Saclay, 1991.
- [42] I. Melbourne, *Steady-state bifurcation with Euclidian symmetry*, Trans. Amer. Math. Soc. **351**(4), 1999, 1575-1603.
- [43] H. Politano, *Convection en milieu poreux, construction de modèles à petits nombres de modes*, J. Méc. Théor. Appl. **5**(1), 1986, 39-54.
- [44] M. Trenogin and V. Vainberg, *The Liapunov and Schmidt methods in the theory of non-linear equations and their subsequent development*, Russian Mathematical Surveys, **17**, 1962, 1-60.

- 
- [45] M. Reed and B. Simon , *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 2, Analysis of Operators, Academic Press, 1979.
- [46] A. M. Rucklidge, *Chaos in models of double convection*, J. Fluid Mec. vol. 237, 1992, 209-229.
- [47] A. M. Rucklidge, *Symmetry breaking instabilities of convection in squares*, Proc. R. Soc. Lond. A, 453, 1997, 107-118.
- [48] A. M. Rucklidge and M. Silbert, Bifurcation of periodic orbits with spatio-temporal symmetries, *Nonlinearity*, **11**, 1998, 1435-1455.
- [49] V. A. Volpert, A. I. Volpert, J. F. Collet, *Topological degree for elliptic operators in unbounded cylinders*, *Advances in Diff. Eq.* **4**(6), 1999, 777-812.