

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI-MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI-MOKHTAR-ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté des sciences de l'ingénieur

Année 2008

Département de Génie Civil

## MEMOIRE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER

***ANALYSE NON LINEAIRE GEOMETRIQUE ET  
MATERIELLE DES COQUES PAR UN ELEMENT  
QUADRILATERE AVEC DDL ROTATIONNEL DIT  
" DRILLING ROTATION "***

**Option:**

**Structure et Matériau**

**Par**

**BOUTAGOUGA Djamel**

**DIRECTEUR DE MEMOIRE :** Dr DJEGHABA KAMEL M.C Université de Annaba

**DEVANT LE JURY**

**PRESIDENT :** PR HABITA MED FAOUZI PR Université de Annaba

**EXAMINATEURS :** Dr HADIDANE YAZID M.C Université de Annaba

Dr MERZOUD MOULOU D MC Université de Annaba



## **Remerciement**

J'exprime mes sincères gratitudee à mon encadreur Monsieur Kamel. DJEGHABA, pour ses conseils et son soutien constant tout au long de cette étude.

Je remercie ensuite tous ceux qui m'ont encouragé par leur soutien moral lors de la réalisation de ce travail.

---

A mes parents, ma famille  
et mes amis.



## RESUME

Ce travail a pour cadre l'analyse non linéaire en grands déplacements et en grandes déformations par éléments finis de plaques et coques. Les structures de coque sont approchées par un modèle « facetisé » par des coques à facette plane. L'inconvénient majeur de ces éléments peut apparaître à cause de l'absence (sur la surface d'élément) du degré de liberté de rotation normal, Ce problème est résolu ici en utilisant un élément de membrane qui présente ce degré de liberté important appelé *ddl* rotationnel ou "drilling rotation". Ainsi nous décrivons dans ce travail deux éléments finis pour l'analyse non linéaire, le premier est consacré à l'analyse non linéaire géométrique des coques minces basé sur l'élément quadrilatère *DKQ*, l'autre est consacré à l'analyse élasto-plastique des plaques et coques épaisses en tenant compte de la déformation de cisaillement. Ces deux éléments présentent une géométrie quadrilatérale plate et ils sont le résultat d'une superposition entre une plaque de flexion et un élément de contrainte plane tenant compte des rotations matérielles "*drilling rotations*".

La formulation corotationnelle a été utilisée afin d'obtenir une nouvelle formulation pour l'analyse non-linéaire des structures spatiales qui permet de surmonter le problème des grandes rotations.

Le programme développé dans le cadre de cette thèse a pour but de proposer un outil de calcul pour l'analyse des structures métalliques prenant en compte séparément les deux cas de l'analyse non linéaire géométrique et matérielle.

---

## **ABSTRACT**

This work is mainly concerned with nonlinear analysis case of large displacements and large strains with plates and shells finite elements. Shells Structures are approached herein using a "faceted" flat shells model. The major inconvenience of these elements is due to the absence (on the element surface) of normal rotational freedom degree; this problem is solved by using a membrane element which uses that degree of freedom called "drilling rotation." Thus we describe in this work two finite elements for nonlinear analysis, the first is devoted to the geometrically nonlinear analysis of thin shells based on the quadrilateral *DKQ* element, the other is devoted to the elasto-plastic analysis of thick plates and shells taking into account the shear strain effect. These two elements have quadrilateral plate geometry and they are the result of a superposition between a plate bending element and a stress plane element taking into account material rotations "drilling rotations".

The co-rotational formulation is used to obtain a new formulation for nonlinear analysis of 3D structures to overcome the problem of large rotations.

The program developed in this thesis aims to provide a tool for the analysis of steel structures taking into account both cases separately of the non-linear analysis that is geometric and material nonlinearities.

---

# SOMMAIRE

- Remerciement .....	I
- Dédicace .....	II
- Résumé .....	III
- Abstract .....	IV
- Sommaire .....	V
- Liste des Figures .....	IX
- INTRODUCTION GENERALE .....	XII
- PARTIE A : THIORIE DE L'ANALYSE LINEAIRE ET NON LINEAIRE DES COQUES .....	1
- Introduction .....	2
- CHAPITRE I : THEORIE LINEAIRE DES COQUES ELASTIQUE .....	4
- Généralités .....	5
- I- 1. La Théorie des Coques .....	6
- I-1-1. Hypothèses de Love- Kirchhoff .....	7
- I-1-2. Le Champ de Déplacements de Love- Kirchhoff .....	8
- I-1-3. Le Tenseur de Déformations de Love- Kirchhoff .....	8
- I- 2. Théories des Coques en Analyse Linéaire .....	9
- I-2-1. Approche par coque profonde .....	10
- I-2-2. Approche par coque surbaissée .....	10
- I-2-3. Approche par coque plane .....	11
- I- 3. Théorie des Coques et Etats de Contrainte .....	12
- I-3-1. Etat Flexionnel .....	12
- I-3-1-1. Equations générales de la plaque mince en Théorie de Kirchhoff .....	14
- I-3-1-1-1. Relations Cinématiques .....	14
- I-3-1-1-2. Relations Géométriques .....	15
- I-3-1-1-3. Relations Constitutives .....	15
- I-3-1-1-4. Equations d'Equilibre de l'Elément .....	16
- I-3-1-1-5. Relations Statiques .....	17
- I-3-1-1-6. Energie de Déformation .....	18
- I-3-1-2. Equations générales de la plaque épaisse en Théorie de Reissner-Mindlin .....	19
- I-3-1-2-1. Relations Cinématiques .....	19
- I-3-1-2-2. Relations Géométriques .....	20
- I-3-1-2-3. Energie de déformation .....	21
- I-3-1-2-4. Relations Statiques .....	22
- I-3-2. Etat Membranaire .....	23
- I-3-2-1. Equations générales de l'élément de paroi .....	23
- I-3-2-1-1. Cinématiques .....	23
- I-3-2-1-2. Relations géométriques .....	23
- I-3-2-1-3. Relations constitutives .....	23
- I-3-2-1-4. Relations Statiques .....	24
- I-3-2-1-5. Energie de déformation .....	24
- I- 4. L'élément coque plane produit de la superposition (plaque-membrane) .....	25
- CHAPITRE II : ANALYSE NON LINEAIRE GEOMETRIQUE DES COQUES .....	27
- Généralités .....	28
- II- 1. Aspect Cinématique .....	29
- II-1-1. Descriptions Du Mouvement .....	29
- II-1-1-a. Description Lagrangienne .....	29

- II-1-1-b. Description Eulérienne .....	29
- II-1-1-c. Choix de description .....	30
- II-1-2. La Description Lagrangienne .....	30
- II-1-2-a. Différentes configuration d'un corps en mouvement .....	31
- II-1-2-b. Description Lagrangienne Corotationnelle .....	32
- II-1-2-c. Les grandes rotations .....	34
- II- 2. Aspect Géométrique .....	35
- II-2-1. Variation du déplacement .....	35
- II-2-2. Notion et Mesure des déformations .....	35
- II-2-2-a. tenseur linéaire de Cauchy .....	36
- II-2-2-b. tenseur quadratique de Green-Lagrange .....	36
- II-2-3. Propriétés des tenseurs de déformation .....	38
- II-2-4. Variation de déformation .....	38
- II- 3. Aspect Mécanique .....	39
- II-3-1. Notion et mesure des Contraintes .....	39
- II-3-1-a. Tenseur de Cauchy .....	39
- II-3-1-b. Tenseur de Piola-Kirchhoff .....	40
- II- 4. L'approche Incrémentale .....	40
- II- 5. Expression Incrémentale Du Principe Des Déplacements Virtuels .....	41
- II-5-1. Expression incrémentale du P.D.V. en D.L.T .....	41
- II-5-2. Expression incrémentale du P.D.V. en D.L.A .....	42
- CHAPITRE III : ANALYSE NON LINEAIRE MATERIELLE DES COQUES .....	44
- Généralités .....	45
- III- 1. Lois de Comportement Elasto-Plastiques .....	46
- III-1-1. Loi de comportement .....	46
- III-1-2. Essai de traction .....	46
- III-1-3. Limite d'Elasticité ou seuil d'Ecroulement .....	47
- III-1-4. Loi Comportement élasto-plastique .....	48
- III- 2. Les Critères Isotropes de Limite Elastique .....	48
- III-2-1. Critère Isotrope de Tresca .....	49
- III-2-2. Critère Isotrope de Von-Mises .....	50
- III- 3. Phénomène d'Ecrouissage .....	51
- III-3-1. Ecrouissage Isotrope .....	52
- III-3-2. Ecrouissage Cinématique .....	52
- III-3-3. Ecrouissage Mixte .....	53
- III- 4. Lois d'écoulement plastique .....	54
- III-4-1. Principe du travail maximal .....	54
- III-4-2. Règle de normalité .....	54
- III- 5. Loi de Comportement Elast-oplastique Incrémental .....	56
- III-5-2. Comportement élasto-plastique .....	56
- III-5-3. Règle d'écrouissage .....	57
- PARTIE B : CONSTRUCTION D'UN ELEMENT DE COQUE QUADRILATERE POUR L'ANALYSE NON LINEAIRE GEOMETRIQUE ET MATERIELLE DES COQUES .....	59
- Introduction .....	60
- CHAPITRE IV : DEVELOPPEMENT D'UN ELEMENT FINIS COQUE QUADRILATERE AVEC LE DEGRE DE LIBERTE ROTATIONNEL "Drilling Rotation " POUR L'ANALYSE LINEAIRE ELASTIQUE .....	62
- Généralistes .....	63
- IV- 1. Cinématique d'une Coque a Facette Plane .....	65

---



- IV- 2. Approximation de la membrane avec "Drilling Rotation" .....	67
- IV-2-1. Utilité du " <i>ddl</i> " Rotationnel dit "Drilling Rotation" .....	67
- IV-2-2. Rotation des Sommets "Vertex Rotation" .....	68
- IV-2-3. Vraie Rotation ou "Drilling Rotation" .....	70
- IV-2-4. La Formulation Variationnelle .....	71
- IV-2-5. Elément de membrane avec "Drilling Rotation" .....	71
-IV- 3. Approximation de la flexion .....	74
- IV-3-1. Approximation des coques mince par "Discret Kirchhoff Théorie" .....	75
- IV-3-2. Elément " <i>DKQ</i> " de plaque mince .....	76
- IV-3-3. Approximation des coques épaisses .....	80
- IV-3-4. L'élément $Q4\gamma$ (élément à 4 nœuds avec CT constant par côté) .....	81
- CHAPITRE V : DEVELOPPEMENT DE L'ELEMENT POUR L'ANALYSE NON LINEAIRE GEOMETRIQUE ET MATERIEL .....	86
- Généralistes .....	87
- V- 1. Analyse Non Linéaire Géométrique .....	88
- V-1-1. Discrétisation par éléments finis .....	88
- V-1-2. Expression discrétisée de l'équilibre en D.L.A .....	89
- V-1-2-a. Matrice de rigidité des petits déplacements en D.L.A .....	89
- V-1-2-b. Matrice de rigidité géométrique (des contraintes initiales) en D.L.A .....	89
- V-1-2-c. Actions extérieures en D.L.A .....	90
- V-1-2-d. Actions internes en D.L.A .....	90
- V-1-2-e. Matrice de rigidité tangente en D.L.A .....	90
- V-1-2-f. Forces résiduelles de déséquilibre en D.L.A .....	90
- V-1-3. Expression discrétisée de l'équilibre en D.L.T .....	90
- V-1-4. Comparaison de la D.L.A avec la D.L.T .....	91
- V-1-5. Matrice des contraintes initiales .....	92
- V-1-6. Système d'axes corotationnel .....	93
- V-1-7. Calcul des déplacements dans le repère Corotatiennel .....	97
- V-2. Analyse Non Linéaire Matériel .....	99
- V-2-1. Critère d'écoulement en variables généralisées .....	99
- V-2-1-1. Critère d'Ilyushin .....	99
- V-2-2. Intégration de loi de comportement élasto-plastique .....	104
- V-2-2-1. Prédiction des déplacements Correction des contraintes .....	105
- V-2-2-2. Rabattement sur la surface d'écoulement .....	107
- V-2-3. Matrice des contraintes initiales élasto-plastique .....	109
- CHAPITRE VI : METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES SYSTEMES NON LINEAIRES .....	110
- Généralistes .....	111
- VI- 1. Les Méthodes de résolution incrémentales des problèmes non linéaires .....	112
- VI-1-1. Méthode purement incrémentale .....	112
- VI-1-2. Méthode incrémentale itérative .....	112
- VI-1-3. Méthode des contraintes initiales .....	115
- VI- 2. Prédiction-corrrection pour la résolution des problèmes non linéaires .....	115
- VI-2-1. Équations fondamentales .....	115
- VI-2-2. Prédiction élastique linéaire .....	116
- VI-2-3. Correction de l'équilibre .....	116
- VI- 3. Procédure de résolution de Newton-Raphson .....	117
- VI-3-1. Stratégies de résolution .....	119
- VI-3-2. Technique de pilotage en charge imposée .....	122
- VI-3-2-a. Définition de la fonction $f$ en charge imposée .....	122

---

- VI-3-2-b. Algorithme de résolution de Newton-Raphson avec pilotage charge imposée .....	122
- VI-3-3. Technique de pilotage en longueur d'arc imposée .....	123
- VI-3-3-a. Définition de la fonction F en longueur d'arc imposée de Crisfield .....	123
- VI-3-3-b. Algorithme de résolution de Newton-Raphson avec pilotage en longueur d'arc imposée de CRISFIELD (b = 0) .....	124
- VI- 4. Méthode des contraintes initiales pour les problèmes élasto-plastiques .....	126
- VI-4-1. Procédure de résolution par la méthode des contraintes initiales .....	126
- VI-4-2. Algorithme de résolution de la méthode des contraintes initiales .....	128
- VI- 4. Critère de convergence .....	130
- CHAPITRE VII : TESTS ET VALIDATION NUMERIQUE .....	131
- Introduction .....	132
- VII- 1. Programme et développement informatique .....	133
- VII- 2. Validation des éléments développés .....	133
- VII- 3. NON LINEAIRITE GEOMETRIQUE .....	134
- VII-3-1. Plaque carrée sous charge uniformément répartie .....	134
- VII-3-2. Plaque carrée sous charge concentrée .....	136
- VII-3-3. Arc de Williams .....	137
- VII-3-4. Coque Cylindrique sous charge Concentrée .....	139
- VII-3-5. Coque Cylindrique raidie sous charge Concentrée .....	144
- VII-3-6. Coque Sphérique sous charge Concentrée .....	146
- VII-3-7. Coque Sphérique sous charge uniformément répartie .....	150
- VII-3-8. Poutre console sous l'action d'un moment d'extrémité .....	151
- Conclusion concernant la validation en analyse non linéaire géométrique .....	155
- VII- 4. NON LINEAIRITE MATERIEL .....	156
- VII-4-1. Problème de Cook .....	157
- VII-4-2. Plaque mince sous charge uniformément répartie .....	159
- VII-4-3. Plaque épaisse encastree sous l'action d'une charge centrée .....	163
- VII-4-4. Plaque biaise sous charge uniformément répartie .....	165
- Conclusion concernant la validation en analyse non linéaire matérielle .....	167
- Conclusion Générale et recommandations .....	168
- Bibliographie .....	170
- Annexes.....	181

**Liste des Figures**

I-1. Eléments de géométrie de la coque .....	9
I-2. Elément fini Coque : a- élément courbe, b- élément plan .....	11
I-3. Déformation de plaque de Kirchhoff .....	13
I-4. Déformation de plaque de Reissner-Mindlin .....	13
I-5. Plaque avec déformation de cisaillement d'ordre élevé .....	13
I-6. Cinématique d'une plaque mince en théorie de Kirchhoff .....	14
I-7. Eléments de plaque en équilibre .....	16
I-8. Cinématique d'une plaque épaisse en théorie de Reissner-Mindlin .....	19
I-9. Cinématique de Membrane .....	23
I-10. Efforts de Membrane .....	24
I-11. Efforts résultants dans un élément coque .....	25
I-12. Les <i>ddl</i> d'un Elément Coque .....	25
II-1. Solide élastique en mouvement .....	30
II-2. Configurations d'un solide en mouvement .....	31
II-3. Cinématique de la Description Corotationnelle .....	33
II-4. Déformation d'un solide en mouvement .....	36
II-5. Contrainte et force élémentaire .....	39
III-1. Courbe de repense (contrainte – déformation) .....	46
III-2. Limite d'élasticité .....	47
III-3. Représentation octaédrique du critère de Tresca .....	49
III-4. Représentation octaédrique du critère de Von-mises et Tresca .....	50
III-5. Critères de Tresca, et Von-Mises: 1- en traction-cisaillement, 2- en traction biaxial .....	51
III-6. Essai de traction Pour acier inoxydable composé de quatre phases charges -décharge ....	51
III-7. Evolution de la limite élastique avec le niveau de chargement .....	52
III-8. a- écrouissage isotrope, b- écrouissage cinématique .....	52
III-9. Courbe expérimentale de réponse d'un matériau écrouissable .....	53
III-10. Courbe de résultants expérimentaux de l'essai Traction – Compression à 900 °C .....	53
III-11. Illustration de la règle de normalité .....	54
III-12. Modeles : 1-Ec Cinématique, 2-Ec Isotrope, 3-E.P.P , 4-R.P.P .....	56
III-13. Modélisation de l'écrouissage isotrope .....	57
III-14. Évolution de surface d'écoulement: a-écrouissage isotrope, b-cinématique .....	58
IV-1. Cinématique d'un élément de coque classique à quatre noeuds .....	65
IV-2. Cinématique d'un élément de coque avec "drilling Rotation" à quatre noeuds .....	66
IV-3. Interpolation du déplacement transversal .....	68
IV-4. Rotation de sommets incompatible .....	69
IV-5. Triangle sous l'extension unie axiale .....	69
IV-6. La vraie Rotation " <i>Drilling Rotation</i> " .....	70
IV-7. Les rotations "normale et tangentielle" .....	76
IV-8. Orientation des cotés de l'élément quadrilatère .....	77
IV-9. Cinématique de la théorie de Reissner-Mindlin .....	80
IV-10. Champ du Cisaillement Transverse .....	82
V-1. Système d'axes corotationnel .....	94
V-2. Déplacement de la D.L.C .....	94
V-3. Plan de référence couramment utilisé .....	95

---

V-4. Projection de l'élément déformé sur le plan de référence .....	95
V-5. Plan de référence adopté .....	96
V-6. Projection sur le plan de référence .....	96
V-7. Cinématique des rotations rigides .....	98
V-8. Projection sur la surface d'écoulement .....	105
V-9. Le schéma idéal de projection .....	106
V-10. Le schéma numérique de projection .....	106
V-11. Rabattement sur la surface d'écoulement .....	108
VI-1. Méthode purement incrémentale .....	113
VI-2. Méthode de Newton-Raphson standard .....	113
VI-3. Méthode de Newton-Raphson modifiée .....	114
VI-4. Méthode de Newton-Raphson de la sécante .....	114
VI-5. Charge imposée (au voisinage du point limite charge) .....	118
VI-6. Déplacement imposé (au voisinage du point limite déplacement) .....	118
VI-7. Longueur d'arc imposé (franchir tout les points limites) .....	118
VI-8. Pilotage en Charge imposé .....	120
VI-9. Pilotage en déplacement imposé .....	120
VI-10. Pilotage en longueur d'arc imposé .....	121
VI-11. Longueur d'arc imposé : a- pour $b = 1$ , b: pour $b = 0$ .....	121
VI-12. Principe de la méthode des contraintes initiales .....	127
VI-13. a- Etat élasto-plastique ( $R \neq 0$ ), b- Etat complètement plastique ( $R = 0$ ) .....	129
VI-14. Rabattement par la méthode des contraintes initiales .....	129
VII-1. Plaque Carrée sous charge répartie : Géométrie, et maillage .....	134
VII-2. Plaque encastree : Courbe Charge – Déplacement .....	135
VII-3. Plaque simplement appuyée : Courbe Charge - Déplacement .....	135
VII-4. Plaque Carrée sous charge concentrée : Géométrie, maillage, et CL .....	136
VII-5. Plaque sous charge concentrée : Courbe Charge – Déplacement du point A et B .....	136
VII-6. Arc de Williams : géométrie, et conditions limites .....	137
VII-7. Arc de Williams: géométrie, et maillage pour un quart .....	137
VII-8. Arc de Williams: deuxième possibilité de modélisation .....	137
VII-9. Arc de Williams: courbe charge déplacement .....	138
VII-10. Arc de Williams: courbe charge déplacement (deuxième modélisation) .....	138
VII-11. Coque Cylindrique : géométrie, et conditions limites .....	139
VII-12. Coque cylindrique : Dimensions, et maillage pour un quart .....	140
VII-13. Coque cylindrique 12.7 : courbe charge déplacement central .....	140
VII-14. Coque cylindrique 12.7 : courbe charge déplacement $W_c$ , et $W_b$ .....	141
VII-15. Coque cylindrique 6.35 : courbe charge déplacement $W_c$ , et $W_b$ .....	142
VII-16. Coque cylindrique 6.35 : courbe charge déplacement central .....	142
VII-17. Coque cylindrique : configurations déformées .....	143
VII-18. Coque Cylindrique raidie : géométrie, et conditions limites .....	144
VII-19. Coque cylindrique raidie : Dimensions, et maillage pour un quart .....	144
VII-20. Coque cylindrique raidie : courbe charge déplacement central .....	145
VII-21. Coque Sphérique : géométrie, et conditions limites .....	146
VII-22. Coque Sphérique : projection en plan .....	147
VII-23. Coque Sphérique : Dimensions, et maillage pour un quart .....	147
VII-24. Coque sphérique : Courbe Charge – Déplacement du point central .....	148
VII-25. Coque sphérique : configurations déformées .....	149
VII-26. Coque sphérique sous charge répartie: Courbe Charge – Déplacement .....	150

---

VII-27. Poutre console : géométrie, et maillage .....	151
VII-28. Poutre console : deuxième possibilité de modélisation .....	152
VII-29. Poutre console 4 éléments : Courbe Charge – Déplacement .....	153
VII-30. Poutre console sous flexion: configurations déformées .....	153
VII-31. Poutre console : Courbe Charge – Déplacement (deuxième modélisation) .....	153
VII-32. Poutre console 10 éléments : Courbe Charge – Déplacement .....	154
VII-33. Poutre console sous flexion : déformé (deuxième modélisation) .....	155
VII-34. Poutre console sous flexion : déformé (jusqu'à $M = 2 \cdot M_{max}$ ) .....	155
VII-35. Poutre de Cook : géométrie, et maillage .....	157
VII-36. Problème de Cook : Courbe Charge – Déplacement .....	158
VII-37. Plaque carrée simplement appuyée : géométrie, et maillage .....	159
VII-38. Plaque mince : Courbe Charge – Déplacement .....	160
VII-39. Plaque carrée mince : évolution des zones plastiques .....	161
VII-40. Plaque carrée mince : évolution des zones plastiques (DKQ de Ben-Tahar) .....	162
VII-41. Plaque carrée encastree sur les 4 côtés : géométrie, et maillage .....	163
VII-42. Plaque épaisse : Courbe Charge – Déplacement .....	163
VII-43. Plaque épaisse sous charge concentrée : évolution des zones plastiques .....	164
VII-44. Plaque épaisse sous charge concentrée : évolution du coefficient $\alpha$ .....	164
VII-45. Plaque biaise : géométrie et maillage .....	165
VII-46. Plaque biaise : courbe charge – déplacement .....	165
VII-47. Plaque biaise : évolution des zones plastiques .....	166
VII-48. Plaque biaise : évolution des zones plastiques (quadrilatère de Dujc et Brank) .....	166

---

## **INTRODUCTION GENERALE**

Dans le domaine du génie civil, de la construction mécanique, aéronautique, automobile, navale et nucléaire, on rencontre fréquemment des structures tridimensionnelles à parois minces (plaques et coques), car ce sont des structures qui répondent de façon efficace aux efforts subis. Ceci est dû principalement à la courbure de leur surface, qui permet d'obtenir des structures minces et robuste en utilisant un minimum de matériau. Ainsi L'évolution de la technologie des matériaux et le développement des divers secteurs industriels ont amené l'emploi de matériaux légers et résistants permettant de réduire la dimension des composantes d'une structure en raison de leur niveau élevé de résistance.

D'autre part, l'évolution actuelle des normes de construction oblige de concevoir des structures plus fiables en termes d'amélioration de la sécurité et de la performance sur le plan économique. Ce but ne peut être atteint que par une analyse non linéaire tenant compte de toutes les sources de non linéarités possibles. Celles-ci peuvent être classées en trois catégories: La première est géométrique due aux grands déplacements, la deuxième est matériel ou rhéologique due aux grandes déformations où la loi de comportement des matériaux est caractérisé par la plasticité, la troisième est due à l'évolution des conditions limites. Notre travail concerne seulement les deux premières.

Sur le plan analytique peu de solutions sont disponibles dans la littérature pour la quantité énorme de problèmes de technologie, et surtout l'analyse des plaques et coques liées au comportement non linéaire géométrique et/ou matériel. Ceci est dû à la complexité mathématique de tels problèmes. Pour ce faire, on fait appel à la théorie non linéaire de la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement du système physique grâce à des équations aux dérivées partielles. Le problème est résolu ensuite par une formulation aux éléments finis de coques. Le présent travail a l'objectif de présenter une formulation simple de coque mince et épaisse à couplés à un algorithme efficace d'analyse non linéaire. L'élément utilisé est un élément quadrilatères à quatre nœuds utilisé en analyse non linéaire géométrique et matérielle. En analyse non linéaire géométrique, les performances de cet élément sont améliorées considérablement lorsqu'il lui est rajouté le degré de liberté (DDL) rotationnel dans le plan. En analyse non linéaire matériel nous ne nous limiterons pas à la théorie de plaques/coques mince, mais le développement est étendu à l'étude aux plaques/coques épaisses, puisque les grandes déformations apparaissent généralement dans les plaques de grande épaisseur. Nous tenons compte de la plastification progressive de la section transversale par la modification introduite par Crisfield au critère d'écoulement, cette approximation est une manière économique qui évite l'intégration à travers l'épaisseur.

---

**PARTIE A**  
**THEORIE DE L'ANALYSE LINEAIRE**  
**ET NON LINEAIRE DES COQUES**

## **INTRODUCTION :**

L'élasticité classique est l'étude du comportement des solides déformables, élastiques, isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire. Lorsqu'on considère en plus, que les déplacements restent petits, on dit que nous travaillons dans le cadre du modèle élastique linéaire où l'hypothèse de linéarité est faite deux fois. Dans une première étape, les termes du second ordre du tenseur des déformations sont négligés, et les vecteurs de forces intérieures dues aux déformations sont alors proportionnels aux vecteurs de déplacements, on peut parler dans ce cas de linéarité géométrique. La deuxième hypothèse du modèle élastique linéaire consiste à supposer que le tenseur des contraintes est proportionnel à celui des déformations, on parle alors de linéarité matérielle. Toutes ces hypothèses ont pour conséquence de rendre linéaires les équations différentielles de l'élasticité. En effet, en pratique on limite souvent le domaine de fonctionnement des structures à des déplacements et déformations faibles (pour des raisons de résistance, esthétique, ...) de sorte que des calculs linéaires suffisent à prédire leur comportement. Dans d'autres cas, en construction mécanique par exemple, on désire souvent qu'une pièce reprenne sa forme initiale lorsque le chargement a cessé. On doit donc rester dans le domaine élastique, et dans ce cas, l'élasticité classique est une théorie satisfaisante. On considère dans la pratique que cette approximation est valable tant que les déplacements restent inférieurs à 5% de la taille du solide à analyser, et les déformations sont petites lorsqu'elles sont inférieures à  $(10^{-2}-10^{-3})$ . Le couple d'hypothèses " petits déplacements" et " petites déformations" est souvent appelé hypothèses de petites perturbations HPP, et la vérification de la validité de ces deux conditions ne peut se faire qu'en analysant la solution complète du problème parce que les structures réelles ont un comportement en général non linéaire. Cependant, tout ce qui vient d'être énoncé ne doit pas amener à conclure qu'il faut éviter de construire des structures travaillant au delà de la limite élastique et hors du domaine linéaire. C'est l'ingénieur qui a la responsabilité de choisir la théorie à utiliser pour résoudre son problème et la responsabilité de vérifier a posteriori la solution trouvée. En effet, la théorie de l'élasticité classique malgré sa simplicité, ne peut satisfaire à tous les besoins pratiques car pour des raisons économique, industrielle, technique etc... tel que les procédés de formage, pliage, emboutissage, forgeage, etc..., il est essentiel de recourir à l'analyse non linéaire.

- Dans les bâtiments, on admet parfois de dépasser la limite élastique (sans aller jusqu'à la rupture);

- un calcul non linéaire est indispensable pour évaluer le comportement au moment de la ruine (crash en automobile, aviation, chemins de fer, conception d'emballages ...)

- Un grand nombre de matériaux nouveaux ont des lois de comportements non linéaires (les élastomères par exemple) ou non isotropes (élastomères, matériaux composites, ...), là encore, il faut utiliser des théories plus complexes.

De manière générale on distingue trois types de non linéarité dans le comportement des structures:

1. Les non linéarités géométriques, qui interviennent lorsque les déplacements sont suffisamment importants, dans ce cas, les caractéristiques de rigidité de la structure sont non linéaires et les déplacements ne sont pas proportionnels aux forces.

2. Les non linéarités matérielles ou physiques, qui se produisent dans le cas où le comportement du matériau ne peut plus être considéré comme élastique linéaire, et les déformations ne sont pas proportionnelles aux contraintes.

3. Les non linéarités de contact, qui se manifestent lorsque les conditions aux limites changent au cours du mouvement (processus de formage à froid, assemblages boulonnés, etc..).

Il est évident enfin que ces trois non linéarités peuvent se trouver seule ou ensemble.



En résumé on a recourt, à l'analyse non linéaire lorsque les trois hypothèses essentielles utilisées habituellement dans les calculs linéaires ne sont plus satisfaites :

- les déplacements sont suffisamment petits pour pouvoir confondre les positions non déformés et déformées de la structure;
- les matériaux se comportent de manière élastique linéaire dans le domaine des déformations résultant de ces déplacements;
- les conditions aux limites ne changent pas au cours du mouvement.







## **Chapitre I**

# **Théorie Linéaire des Coques Elastique**

**GENERALITES :**

Dans de nombreux problèmes mécaniques où il existe une direction particulière privilégiée, on cherche souvent à simplifier le problème en un problème de contraintes planes. Il est intéressant de définir dans ce cas des modèles cinématiques particuliers, appelés coques. On peut toujours étudier le problème avec des éléments volumiques, mais cela nécessite un nombre de degrés de liberté très élevé, en effet pour un problème de plaque mince analysé par un élément volumique il faut au moins 15 *ddl* par nœud ramenés sur la surface moyenne [VIDRASCU 1984], alors que pour la théorie des coques minces seulement 6 *ddl* sont suffisants.

Afin de simplifier les modèles tridimensionnels occupant dans l'espace un volume compris entre deux surfaces courbes telle que la distance entre ces deux surfaces, qui est épaisseur, soit petite par rapport aux autres dimensions, on réussit à réduire le modèle tridimensionnel en de nombreux modèles bidimensionnels, dont les différences proviennent principalement de la cinématique simplifiée utilisée dans l'épaisseur. Ces particularités rendent le projet d'une coque une tâche difficile, Parce que les coques peuvent présenter des comportements structuraux inhabituels et délicats, ardu à analyser.

Une première difficulté réside dans le choix d'une "bonne" théorie de coque capable de rendre compte à la fois du fonctionnement des coques profondes et coques surbaissées. La formulation des éléments basés sur une théorie de coque profonde est à la fois la plus juste, la plus délicate, et la plus difficile, même si les éléments correctement formulés convergent vers la solution exacte. Ils restent d'un point de vue pratique d'un emploi laborieux, et l'extension de tels éléments dans le domaine non linéaire semble très difficile [FREY & al 2000]. Au vue de ces difficultés, on a cherché des simplifications en construisant des éléments de coque surbaissée selon la théorie de « Marguerre » ou de « Donnelle ». Ces éléments de coques surbaissées construits sur la base d'une théorie exprimée en cordonnées cartésiennes convergent d'une manière plus au moins acceptable vers la solution exacte et ceci que la coque soit surbaissée ou non. Pour conclure, il faut dire que selon la bibliographie consultée, tous les spécialistes s'accordent pour dire que les éléments de coque aujourd'hui disponibles ne sont pas suffisamment fiables. Une cause essentielle de ce problème réside dans l'apparition du phénomène du verrouillage numérique

L'alternative à ce problème posé consiste à préférer les éléments à facettes planes qui ont l'avantage de la simplicité de la formulation. Les résultats des applications numériques montrent que les éléments à facettes planes peuvent donner d'excellents résultats [ZIENKIEWICZ 1977] ce qui les rends très populaires, efficaces, et très attrayants. Leur inconvénient principal reste cependant que l'analyse d'une coque avec de tels éléments introduit une approximation géométrique plus ou moins grossière. Ceci est en général corrigé par un maillage fin.

## I- 1. LA THEORIE DES COQUES :

La théorie des coques est l'étude des solides déformables surfaciques. Elle est adaptée à l'étude des solides déformables dans la géométrie est assimilable à une surface avec une épaisseur. Cette géométrie va permettre d'établir une théorie simplifiée dans laquelle on dira qu'on connaît les déplacements en connaissant seulement ceux de la surface moyenne.

L'idée de base dans la théorie de ces modèles est d'utiliser des hypothèses et simplifications physiquement justifiables à travers l'épaisseur pour obtenir la déformation d'une structure mince tridimensionnelle à partir d'un problème formulé sur sa surface moyenne.

On néglige, par exemple, l'influence de la composante normale des contraintes, et les effets des déformations à travers l'épaisseur. On utilise dans ce cas les hypothèses cinématiques de 1<sup>er</sup> ordre du type Kirchhoff-Love, où le champ de déplacements est supposé varier linéairement suivant l'épaisseur [BERNADOU & BOISSERIE 1982], Destuynder 1990, Bernadou 1994. On utilise aussi celles du 2<sup>ème</sup> ordre de type Hencky-Reissner-Mindlin qui supposent que les composantes tangentielles du déplacement 3D sont linéaires dans l'épaisseur, tandis que la composante transversale est constante (Koiter 1965, Mindlin 1951, Novozhilov 1970, Reissner 1945). On peut aussi penser à des hypothèses cinématiques d'ordre plus élevé, qui abandonnant tout ou partie des hypothèses simplificatrices à travers l'épaisseur [KOZIEY & MIRZA 1997], elles sont des théories plus précises, couramment employées pour les problèmes de matériaux multicouches ou de plaques épaisses [CHAPELLE & al 2004].

Dans le domaine des coques, la première théorie recevable a été formulée par Love en 1888. Elle est construite sur le même modèle que la théorie des plaques de Kirchhoff, à savoir exprimer les équations en se référant à la surface moyenne tout en tirant parti, à l'aide d'hypothèses raisonnables, de la minceur de la structure. La courbure de la coque pose toutefois des problèmes nouveaux et délicats, par rapport au cas de la plaque. Suite à des nombreuses recherches, la validité de la théorie simple de Love n'a finalement été confirmée que beaucoup plus tard par Koiter en 1960-1966.

Le modèle de Koiter est un modèle bidimensionnel, fondé sur des hypothèses de nature géométrique et mécanique, a été proposé par W.T. Koiter en 1966. C'est à dire qu'un déplacement sur la coque peut être défini à partir d'un déplacement sur la surface moyenne. Cela découle des hypothèses que formule W. T. Koiter, [BERNADOU & CIARLET 1976] :

- Les normales à la surface moyenne non déformée sont encore normales à la surface moyenne après déformation.

- Au cours de la déformation, les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent à la surface moyenne. Ainsi, le problème mécanique tridimensionnel sur la coque se réduit à un problème bidimensionnel sur la surface moyenne. En appliquant sur la coque un champ de forces extérieures  $\vec{f}$ , le problème mécanique consiste à trouver le champ de déplacement  $\vec{u}$  de la surface moyenne, satisfaisant aux conditions aux limites cinématiques (telles que la fixation ou l'encastrement d'une partie du bord de la coque); On suppose que les forces extérieures sont suffisamment faibles ou petites, de sorte que la théorie reste dans un cadre linéaire par rapport au déplacement  $\vec{u}$ .

**I-1-1. HYPOTHESES DE LOVE- KIRCHHOFF**

L'Hypothèse de Love consiste à généraliser aux coques les hypothèses classiques propres aux poutres de Bernoulli et aux plaques de Kirchhoff. Ces hypothèses [CHOÏ 1995] introduisent des restrictions sur le champ des déplacements et sur le champ des déformations dans une coque. Elles sont parfois contestées, et il est possible de remettre en question tout ou partie de ces hypothèses pour construire des théories de coques plus complexes.

Soit une coque dont la surface moyenne est  $S$

$\bar{n}$  Est la normale à la surface moyenne

On suppose que cette surface moyenne est soumise à un champ de déformation  $\bar{U}(x, y)$ ,

De même qu'en mécanique des milieux continus volumiques, on suppose souvent que les déformations sont petites, c'est-à-dire  $\|\partial\bar{U}\| \ll 1$

On verra ci-après que la théorie de love n'est, en réalité, qu'approximative. Elle néglige des termes dont l'ordre de grandeur peut être considéré comme petit, Il s'ensuit que certaines équations ne sont qu'imparfaitement satisfaites [CHOÏ 1995].

Tant qu'il y a cohérence dans l'ordre de grandeur des termes négligés, la théorie est acceptable, et le degré de précision est de quelques pour cent pour quasiment tout les cas des coques.

Pour l'ingénieur la théorie de Love qui est appelée, pour cette raison (première approximation cohérente de la théorie des coques) est donc entièrement satisfaisante [FREY & al 2000].

**Hypothèse 1 : petites déformations**

On suppose que les déformations sont petites (au sens des coques) de sorte que les équations cinématiques soient linéaires, et les pentes de la surface moyenne après déformation, soient supposées petites par rapport à l'unité et que les conditions d'existence d'un tenseur de variation de courbure linéaire en  $\bar{U}$  sont satisfaites.

**Hypothèse 2 : linéarisation en « Z » (coque mince)**

On suppose que le champ de déplacement  $\bar{U}(x, y)$  est peu différent de  $\bar{U}(x, y, z)$

Cette hypothèse est dite hypothèse de coque mince.

**Hypothèse 3 : distorsion nulle sur la surface moyenne**

On suppose que sur la surface moyenne, la distorsion dans tout plan contenant  $\bar{n}$  est négligeable.

C'est à dire que tout point  $M$  sur la normale  $\bar{n}$  reste sur la normale  $\bar{n}'$  après déformation

Cette hypothèse est parfois appelée loi de conservation de la normale.

**Hypothèse 4 : allongement transversal nul sur la surface moyenne**

Cette hypothèse permet d'ignorer les effets qui se manifestent à travers l'épaisseur

On suppose que sur la surface moyenne, l'allongement et la contrainte dans la direction de  $\bar{n}$  est négligeable par rapport aux autres composantes de déplacements et de contraintes.



**I-1-2. LE CHAMP DE DEPLACEMENTS DE LOVE- KIRCHHOFF**

Compte tenu des hypothèses précédentes, le champs de déplacements  $\bar{U}(x, y, z)$  dans la coque peut s'exprimer en fonction du champ de déplacements  $\bar{U}(x, y)$  de la surface moyenne sachant que le "complément de déplacement" est un vecteur tangent proportionnel à  $z$ .

**I-1-3. LE TENSEUR DE DEFORMATIONS DE LOVE- KIRCHHOFF**

En utilisant le champ de déplacements restreint, et en tenant compte des hypothèses précédentes en tout point de la coque, le tenseur de déformations de Love-Kirchhoff est donc un tenseur de déformation plane, dans un plan parallèle au plan tangent à la surface moyenne.

Les hypothèses 3 et 4, de distorsion et d'allongement transversal nuls n'ont été faites qu'au niveau de la surface moyenne. L'hypothèse 2, de linéarisation en  $z$ , implique que la distorsion et l'allongement transversal sont alors nuls dans toute l'épaisseur.

## I- 2. THEORIES DES COQUES EN ANALYSE LINEAIRE :

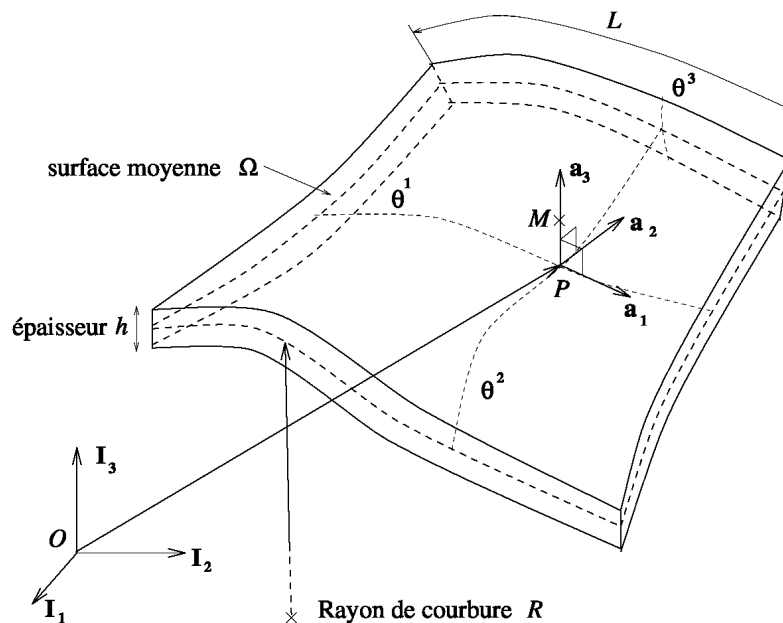
Pour analyser, prédire et même optimiser le comportement d'élément coque, l'idée naturelle est alors d'utiliser l'épaisseur comparée aux autres dimensions comme un petit paramètre. En fait, il apparaît deux paramètres : l'un noté  $h$ , est l'épaisseur comparée aux dimensions transverses et l'autre noté  $r$ , est le rapport entre l'épaisseur et le rayon de courbure locale de la coque  $R$ . Suivant les ordres de grandeurs respectifs de ces deux paramètres on peut alors construire un modèle approché du modèle tridimensionnel.

Par exemple pour  $r = 0$  on trouve les modèles de plaques minces,

Pour  $r = h$  on trouve des modèles de membrane,

Et enfin pour  $r = h^2$  on trouve les modèles de coques les plus classiques.

Cependant il existe d'autres approches mieux adaptées et qui permettent de regrouper tous ces modèles en un seul lui même surfacique et pouvant redonner l'une des trois situations



**Figure (I-1). Eléments de géométrie de la coque**

Les équations générales de la théorie des coques de forme quelconque établies dans les coordonnées orthogonales des lignes de courbure peuvent être exprimés différemment, afin de s'adapter à certaines formes géométriques particuliers de coques, et simplifier les équations pour pouvoir les résoudre.

Trois principales approches sont utilisées pour l'analyse linéaire des coques :

- \*Approche par coque profonde.
- \*Approche par coque surbaissée.
- \*Approche par coque plane (facettes plane).

Etant donné la diversité des problèmes (géométrie, conditions aux limites, chargement, ...) et la variété des comportements possibles (multicouches, non linéaires, dynamiques, ...), chaque approche présente des avantages et des inconvénients et aucune formulation n'est universellement reconnue.

**I-2-1. APPROCHE PAR COQUE PROFONDE** (à forte courbure)

La formulation d'éléments basés sur la théorie de coque profonde est à la fois la plus juste et la plus délicate. Des théories basées sur une approche par coque profonde ont été proposées par plusieurs auteurs [NAGHDI 1963], [KOITER & al 1972], et Argyris. La conformité des éléments basés sur cette approche exige une continuité des rayons de courbures  $C^2$  (la continuité exacte aux frontières exige que la rotation de la normale soit continue), ainsi l'utilisation des coordonnées curvilignes rend leur application en éléments finis très difficile à mettre au point.

L'amélioration possible de cette approche consiste à utiliser un système d'axes corotationnel afin de représenter le mouvement de corps rigide. On a recours aussi à une interpolation de même ordre pour la flexion et la membrane de façon à remédier au problème du blocage de membrane, mais ceci conduit à des éléments très performants mais très lourds à manipuler.

**I-2-2. APPROCHE PAR COQUE SURBAISSÉE** (à faible courbure)

Lorsqu'une coque a en tout point, une surface moyenne de faible courbure, elle est qualifiée de coque surbaissée. Pour simplifier l'approche par coque profonde, une théorie basée sur une approche par coque surbaissée nécessite l'introduction des hypothèses simplificatrices.

On prend, pour lignes de coordonnées  $(x, y)$  sur la projection sur le plan  $\pi$  *Figure (I-2)*

La surface moyenne de la coque est surbaissée si  $\frac{\partial Z}{\partial X}$ , et  $\frac{\partial Z}{\partial Y}$  sont petites, c'est-à-dire si les carrés et produits des dérivées premières de  $Z(x, y)$  sont négligeables devant l'unité.

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 \ll 1, \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \frac{\partial Z}{\partial Y}\right|^2 \ll 1.$$

En pratique ces pentes ne devraient pas dépasser 0,1 radian, mais des résultats peuvent encore être intéressants jusqu'à 0,5 Radian. Voir [FREY & al 2000].

Deux théories de coques surbaissées sont couramment utilisées, l'une dite de « Donnelle », s'exprime en coordonnées curvilignes. L'autre de « Marguerre », s'exprime en coordonnées cartésiennes. La différence est insignifiante pour les résultats pratiques, mais essentielle pour les techniques numériques.

- **Théorie en Coordonnées Curvilignes (Donnelle, 1933) :**

Toutes les grandeurs et équations s'expriment dans les coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$  de la surface moyenne, dans cette théorie, une hypothèse cinématique complémentaire est nécessaire, elle postule que les composantes membranaires  $u$ , et  $v$  du déplacement sont négligeables devant la composante transversale  $w$ , ou les rotations et variations de courbure ne dépendent plus que du déplacement transversal.

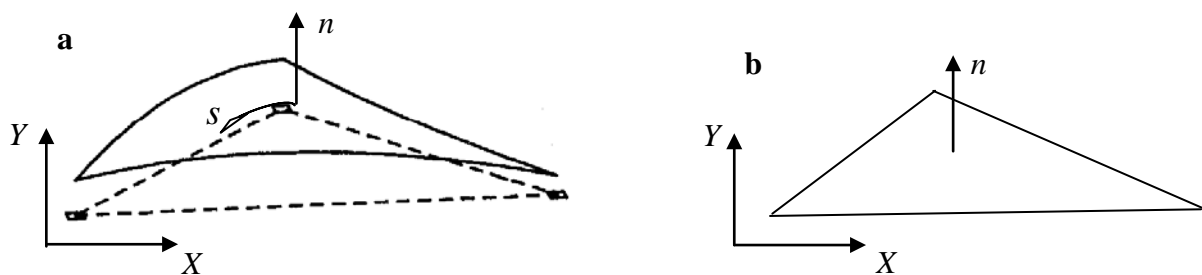
La difficulté dans cette approche réside dans sa mise au point fastidieuse.

- **Théorie en Coordonnées Cartésiennes (Marguerre) :**

On travaille dans les axes cartésiennes  $(X, Y, Z)$  et toutes les grandeurs s'y réfèrent, le plan de référence  $(x, y)$  a lieu par projection orthogonale  $(X, Y)$ , aucune hypothèse complémentaire n'est nécessaire. On considère que la coque est obtenue après un déplacement fictif d'une surface plane, ce déplacement fictif est la déformée initiale, ainsi il est tenu compte de la courbure initiale par introduction dans le tenseur de déformation d'un terme dû à la géométrie initiale. On allie dans cette théorie la rigueur de l'approche par coque profonde en tenant compte de la courbure initiale, et la simplicité de formulation de l'approche par facettes planes permettant le calcul en coordonnées cartésiennes.

**I-2-3. APPROCHE PAR COQUE PLANE** (facettes planes)

L'approximation faite dans cette approche consiste à confondre la coque avec sa surface de référence (localement) *Figure (I-2)*. La littérature concernant ce type d'approche est très large [BRIASSOULIS 1995, 1996], [DESTUYNDER & SALAIIN 1998], [BATOZ & al 2000], [PROVIDAS & KATTIS 2000], [Li & ZHAN 2000], [LEVY & GAL 2001], [FEATHERSTON 2001], [SHI 2002], [ARGYRIS & al 2002], [YAQUN & al 2003], [GEYER & GROENWOLD 2003], [KIM & al 2003], [ZHANG & CHEUNG 2003], [ANDRADE & al 2007]. Vu sa simplicité de mise en œuvre d'une part, et son efficacité d'autre part, cette approche est très utilisée soit en analyse linéaire, non linéaire, et dynamique. Elle ne permet, cependant une représentation correcte de la structure courbe et nécessite ainsi, un coût de calcul élevé. Le découplage entre le mode déformation de membrane et celui de flexion évite le problème du blocage de membrane.



**Figure (I-2). Élément fini Coque : a- élément courbe, b- élément plan**

Notons que les simplifications que l'on peut apporter aux différents modèles doivent trouver un cadre de justification. D'un point de vue à la fois mathématique et physique, deux propriétés sont fondamentales : l'une est la conservation des énergies par unité de matière mises en jeu que se soit pour le modèle complet ou celui obtenu après simplification ; l'autre concerne le principe fondamental de la mécanique et traduit que l'équilibre des efforts doit être conservés.

En fait, les équations d'équilibre permettent de compenser certaines imprécisions au niveau de la conservation de l'énergie.

Dans tous ces modèles, il apparaît que l'équilibre de la coque est régi par deux phénomènes :

- l'effet de flexion qui régit les mouvements de rotation de la surface moyenne,
- l'effet de membrane qui fait intervenir les déformations propres de la surface moyenne.

Nous rappelons brièvement dans cette section des éléments de ces deux aspects de la théorie linéaire des coques élastiques, en se plaçant dans le cadre de l'analyse linéaire des structures, acceptant :

- L'hypothèse de linéarisation géométrique
- L'hypothèse de linéarisation matérielle.

### I- 3. THEORIE DES COQUES ET ETATS DE CONTRAINTE :

L'état de contrainte par lequel l'élément structural résiste aux actions extérieures, et caractérisé par des efforts intérieurs définis au niveau de la surface ou ligne moyenne, le comportement de l'élément de coque à facette plane est gouverné par deux états de contrainte découplé au niveau élémentaire, l'une est flexionnel, l'autre est de membrane, où les efforts intérieurs sont décrites par unité de longueur de ligne moyenne dans la section droite.

#### I-3-1. ETAT FLEXIONNEL

L'élément de plaque est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne, il résiste aux charges agissant normalement à son plan moyen par un état flexionnel.

On dit qu'une plaque travaille à la flexion quand les charges auxquelles elle est soumise sont parallèles à l'axe perpendiculaire au plan moyen  $z$ , les théories des plaques reposent sur les hypothèses suivantes en plus des hypothèses de Kirchhoff :

Hypothèse A : On néglige l'interaction des phénomènes de membranes et de flexion due aux grands déplacements. En d'autres termes, on néglige les contraintes dans la surface moyenne (membrane) induites par déformations transverses (flexion). Ceci correspond à une approximation du premier ordre si les déplacements transverses sont de l'ordre de l'épaisseur de la plaque.

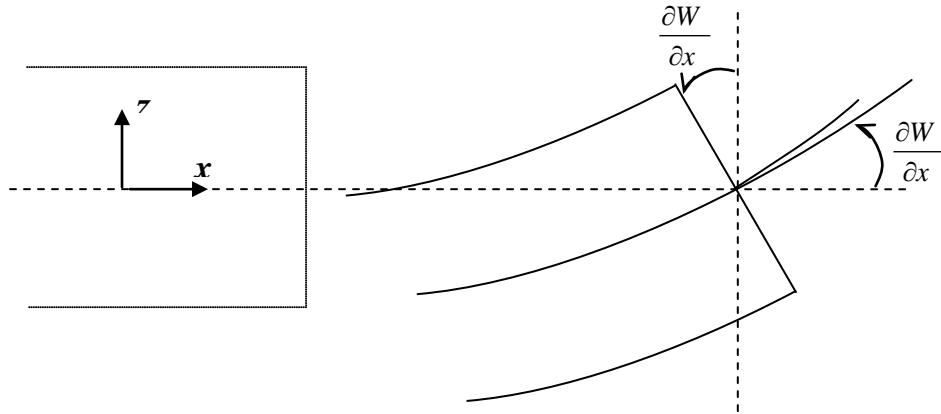
Hypothèse B : La construction et les matériaux de la plaque sont tels que les phénomènes de membrane (dans le plan) et de flexion (transverses) sont découplés. Ceci est vrai pour des plaques isotropes monocouches ou multicouches symétriques. (Exemple : Composite sandwich nid d'abeilles symétrique). Ceci permet de découpler totalement l'étude des phénomènes de membrane et de flexion.

Les hypothèses (4) et (3) correspondent dans le cas bidimensionnel aux hypothèses classiques de la R.D.M. avec conservation des sections droites. Notons également qu'elles correspondent à la définition d'un état plan de contrainte. La théorie des plaques correspondante dans laquelle on néglige les effets de cisaillement transverses est due à Kirchhoff. Cette théorie est valable dans le cas des plaques minces et lorsque les caractéristiques de cisaillement transverse du matériau sont importantes. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, on ne peut plus admettre l'hypothèse 3 dans ce cas, il faut prendre en compte les déformations de cisaillement transverse et alors les fibres normales à la surface moyenne avant déformation ne le restent pas au cours de la déformation ; La rotation des sections devient distincte de la pente de la surface moyenne. Il existe des théories des plaques qui permettent la prise en compte du cisaillement transverse : ce sont les théories de Hencky-Mindlin-Reissner- BOLLÉ-NAGDHI 1963-1972)

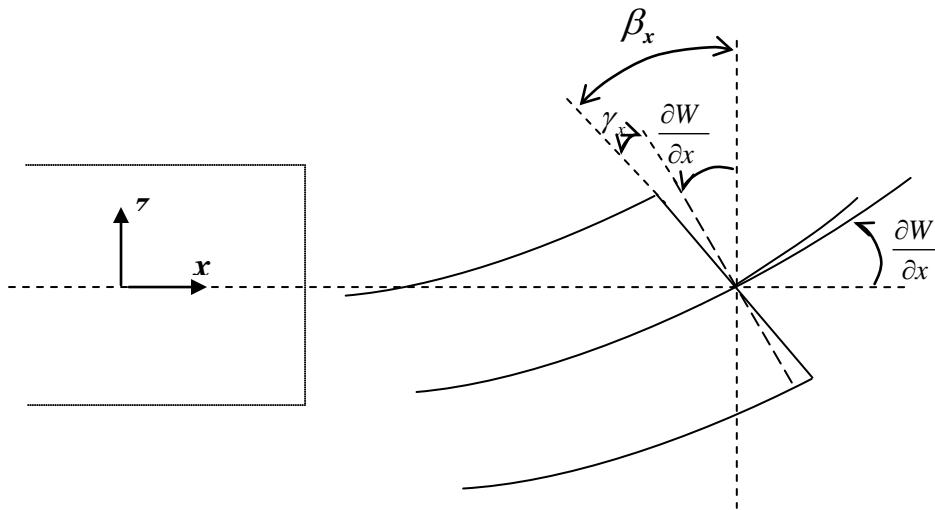
Nous allons rappeler ci-après les deux théories des plaques les plus importantes pour l'analyse linéaire des structures.

- La théorie de Kirchhoff Hypothèses [4, 1, A et 3] ou théorie linéaire des plaques sans cisaillement transverse *figure (I-3)*.
- La théorie de Hencky-Reissner-Mindlin [Hypothèses 4, 1 et A] ou théorie linéaire des plaques avec cisaillement transverse *figure (I-4)*.

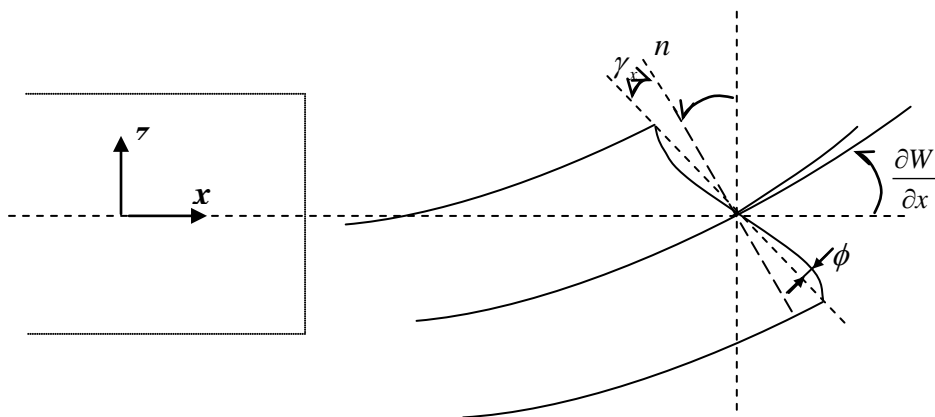
La théorie linéaire des plaques minces et celle des plaques épaisses sont exposées dans plusieurs ouvrages et références citant : [GALLAGHER 1967], [BATOZ & DHATT 1990], [IMBERT 1995], [AURICCHIO & TAYLOR 1995], [CHEVALIER 1996], [DUAN & al 1999], [WANG & al 2001], [SOH & al 2001].



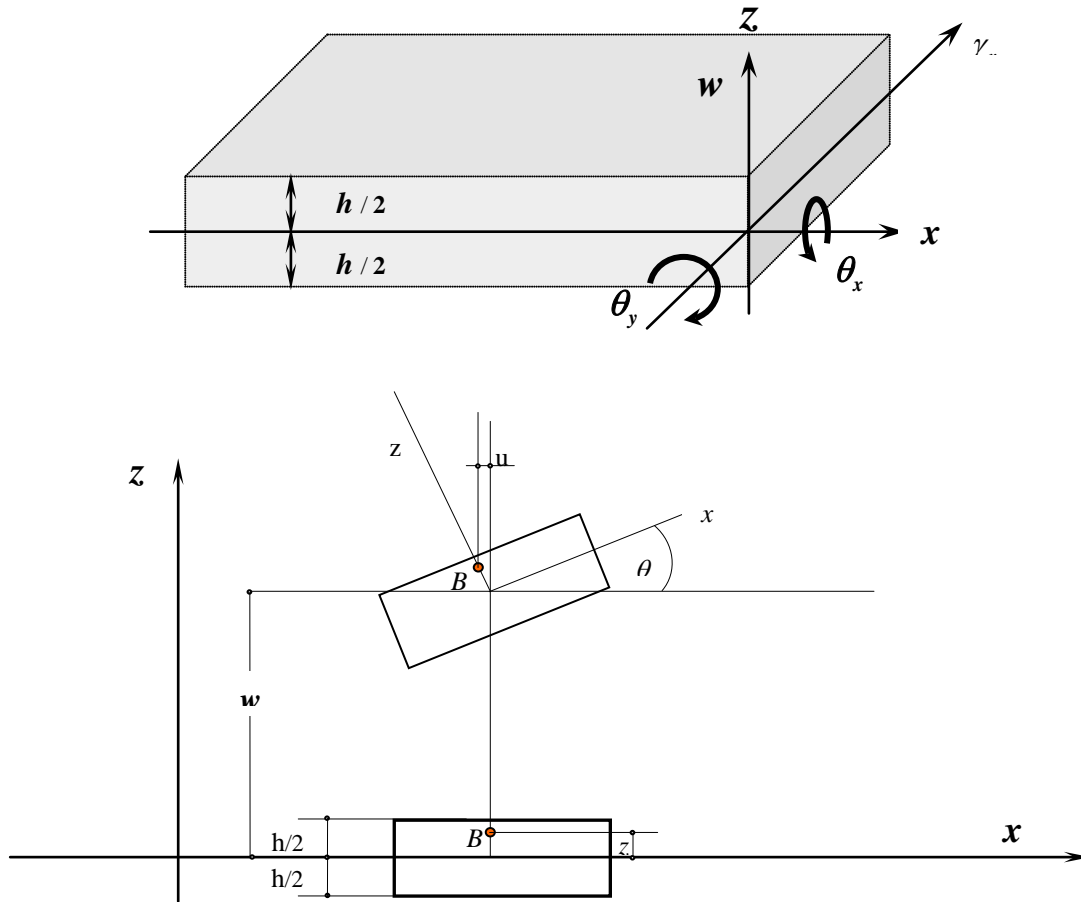
**Figure (I-3). Déformation de plaque de Kirchhoff**



**Figure (I-4). Déformation de plaque de Reissner-Mindlin**



**Figure (I-5). Plaque avec déformation de cisaillement d'ordre élevé**

**I-3-1-1. Equations générales de la plaque mince en Théorie de Kirchhoff :****1. Relations Cinématiques :****Figure (I-6). Cinématique d'une plaque mince en théorie de Kirchhoff**

le Déplacement du point B dans le sens x est

$$u = -z \tan \theta \quad [I - 1]$$

le déplacement étant petit

$$\tan \theta = \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad [I - 2]$$

$$\text{ainsi} \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad [I - 3]$$

$$\text{et dans la direction y} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Donc le champ des déplacements est défini uniquement par une variable

$$\left\{ \begin{array}{l} w = w(x, y, z) \\ u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad [I - 4]$$

## 2. Relations Géométriques :

Les déformations  $\gamma_{xz}$ , et  $\gamma_{yz}$  sont nulles, les relations déplacements-déformations seront :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad [I-5]$$

Soient en fonction des courbures

$$\varepsilon_f = z \{\chi\} \text{ Avec } \{\chi\}^T = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$$

Les relations déformations-contraintes seront

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad [I-6]$$

## 3. Relations Constitutives :

Après résolution du système d'équations [I-6], les contraintes seront

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{cases} \quad [I-7]$$

Les équations [I-7] sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [I-8]$$

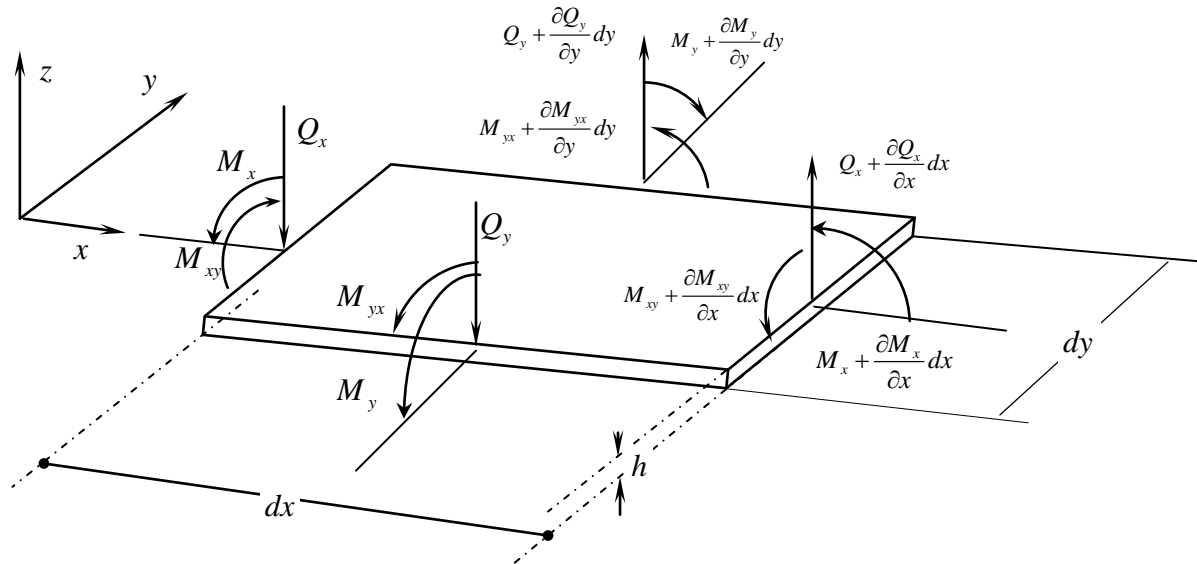
En substituant [I-5] dans [I-7] on obtiendra

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{E}{1+\nu} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{cases} \quad [I-9]$$



#### 4. Equations d'Equilibre de l'Elément :

Les équations d'équilibre permettent de compenser certaines imprécisions au niveau de la conservation de l'énergie.



**Figure (I-7). Eléments de plaque en équilibre**

L'état flexionnel regroupe les efforts intérieurs à caractère flexionnel : ils s'agit des moments de flexion, des moments de torsion, et des efforts tranchants.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \end{cases} \quad [I - 10]$$

**5. Relations Statiques :**

A fin d'aboutir à une théorie bidimensionnelle, il faut intégrer les distributions des contraintes à travers l'épaisseur pour les remplacer par leurs résultantes équivalentes qui sont les efforts intérieurs.

Détermination des moments de flexion  $M_x, M_y$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z dz$$

et comme  $w$  est indépendant de  $z$

$$M_x = - \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{avec } D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

de même pour

$$M_y = - \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Détermination des moments de torsion  $M_{xy}, M_{yx}$

$$M_{xy} = M_{yx} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

$$M_{xy} = M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Donc

$$\begin{cases} M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad [I-11]$$

Ou bien sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad [I-11']$$

En substituant les équations [I-11] dans [I-9] et [I-10] on obtient les équations suivantes

$$\begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad [I-12]$$

Remarque : il n'y a pas contradiction entre la présence des efforts tranchants et l'hypothèse de conservation des normales.

Par substitution de [I-14] dans [I-10] On trouve l'équation différentielle reliant les déplacements  $w$  et les charges

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad [I-13]$$

### **6. Energie de Déformation:**

L'énergie potentielle totale s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV$$

En tenant compte des équations de  $\sigma$  et  $\varepsilon$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( z \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2z \tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \cdot dV \quad [I-14]$$

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T \{\kappa\} dS$$

et avec [I-11']

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{\kappa\}^T [D_f] \{\kappa\} dS$$

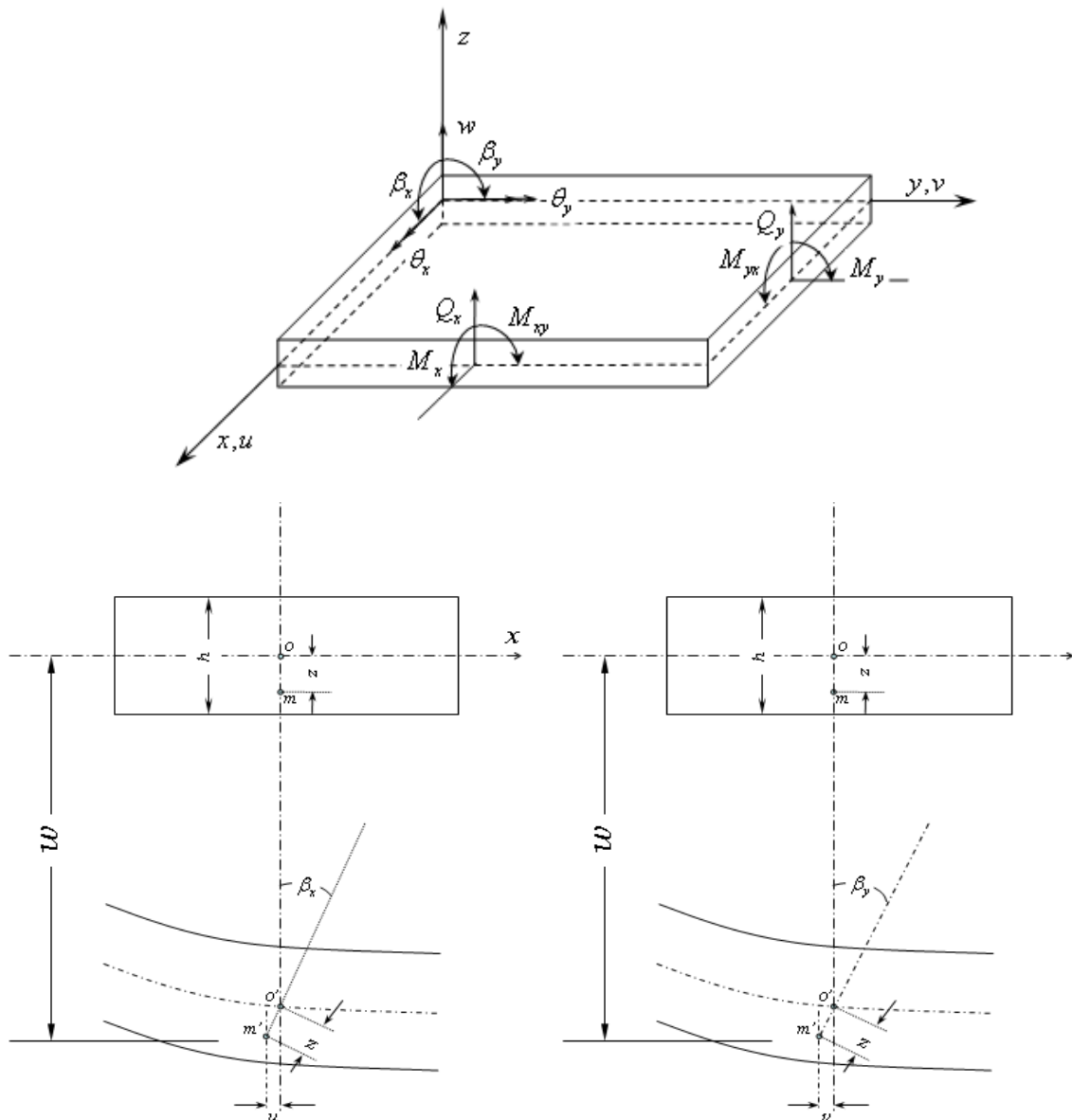
### **I-3-1-2. Equations générales de la plaque épaisse en Théorie de Reissner-Mindlin :**

Pour les plaques ou les coques épaisses le cisaillement transverse est pris en compte suivant la formulation proposée par Hencky-Reissner-Mindlin. Cette formulation englobe l'approche sans cisaillement transverse de Kirchhoff pour les plaques minces, mais dans laquelle on se donne un modèle de déplacement basé sur trois variables indépendantes  $w(x, y)$ ,  $\beta_x(x, y)$ , et  $\beta_y(x, y)$ .

$\beta_x$  et  $\beta_y$  : sont les rotations de la normale à la surface moyenne dans les plans  $(x-z)$ , et  $(y-z)$  respectivement, donc le champ des déplacements s'exprime alors en fonction de ces trois variables par les relations:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z \cdot \beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) = z \cdot \beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad [I - 15]$$

#### **1. Relations Cinématiques :**



**Figure (I-8). Cinématique d'une plaque épaisse en théorie de Reissner-Mindlin**

**2. Relations Géométriques :**

L'état de déformation en coordonnées cartésiennes est défini par les expressions suivantes

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad [I-16]$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad [I-16']$$

En exprimant maintenant les équations en fonction de variables  $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad [I-17]$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad [I-17']$$

Le vecteur de déformation peut être décomposé en deux parties, l'une indépendante de  $z$  traduisant les déformations de cisaillement notée  $\{\varepsilon_c\}$  ou  $\gamma$ , et l'autre partie  $\{\varepsilon_f\}$  dépendante de  $z$  et qui représente les déformations de flexion, comme suit :

$$\langle \varepsilon \rangle = \{ \langle \varepsilon_f \rangle, \langle \varepsilon_c \rangle \} = \{ z \langle \kappa \rangle, \langle \gamma \rangle \} \quad [I-18]$$

Avec :

$$\{ \varepsilon_f \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \{ \kappa \}$$

$$\{ \varepsilon_c \} = \{ \gamma \} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$k$  : c'est le vecteur de variation de courbure il s'écrit :  $\langle \kappa \rangle = \left\langle \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right\rangle$

### 3. Energie de déformation:

En tenant compte de cisaillement transversal L'énergie de déformation s'écrit sous la forme

$$U = U_f + U_c \quad [I - 19]$$

$U_f$  : énergie de déformation de flexion

$U_c$  : énergie de déformation de cisaillement

l'énergie de déformation de flexion et celle de cisaillement sont évaluées par :

$$\begin{cases} U_f = \frac{1}{2} \int_S \{\kappa\}^T [D_f] \{\kappa\} dx dy \\ U_c = \frac{1}{2} \int_V \{\tau\}^T \{\gamma\} dV = \int_V \{\gamma\}^T [H_\tau] \{\gamma\} dV \end{cases} \quad [I - 20]$$

Où  $H_\tau$  : Matrice constitutive de cisaillement tel que  $\{\tau\} = [H_\tau] \{\gamma\}$

Pour un matériau isotrope

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad [I - 21]$$

Après intégration suivant  $z$ , on peut exprimer cette énergie sous forme

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{Sm} \{T\}^T \{\gamma\} dx dy = \int_V \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} dx dy$$

$$T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\tau\} dz = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$$

$$\text{d'où } \{T\} = [H_c] \{\gamma\}$$

La prise en compte du cisaillement transverse dépend de facteurs de correction déterminés a priori par des équivalences énergétiques des modèles tridimensionnels, ou de fréquence propre associée au mode de vibration par cisaillement transverse. Ceci est fait de façon à ce que la rigidité en cisaillement transverse du modèle de plaque soit la plus proche possible de celle définie par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Ainsi le calcul de la matrice  $[H_c]$  en fonction de  $[H_\tau]$  s'effectue généralement en adoptant certain hypothèses sur la répartition de cisaillement suivant l'axe  $z$ , dans le cas général, on écrira l'expression suivante:

$$[H_c] = K h [H_\tau]$$

Avec  $K$  : Facteur de correction de cisaillement, Reissner et Mindlin ont respectivement proposé pour  $K$  les valeurs :

$K = 5/6$  par équivalence énergétique des modèles tridimensionnels;

$K = \pi^2/12$  par équivalences de fréquence propre associée au mode de vibration par CT.

Ainsi l'énergie de déformation d'une plaque peut se mettre sous la forme suivante:

$$U = \frac{1}{2} \int_{Sm} \{\kappa\}^T [D_f] \{\kappa\} dx dy + \frac{1}{2} \int_{sm} \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} dx dy$$

**4. Relations Statiques :**

Les Moments résultants de flexion et les courbures

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = [D_f] \{\kappa\} \quad [I - 22]$$

Les efforts tranchants et les déformations de cisaillement

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz = [H_c] \{\gamma\} \quad [I - 23]$$

Pour un Matériau Isotrope

$$[D_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \text{ et } [H_c] = G h k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [I - 24]$$

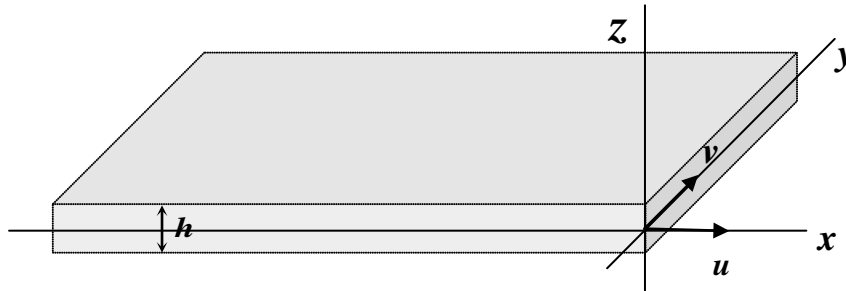
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

### I-3-2. ETAT MEMBRANAIRE

#### I-3-2-1. Equations générales de l'élément de paroi :

##### 1. Cinématiques :

L'élément de paroi est défini par la géométrie plane de la surface moyenne. Il est sollicité par des charges agissant dans son plan moyen, il y résiste par un état membranaire. *Figure (I-10)* les efforts normaux et tangentiels résultant d'ailleurs de l'état plan de contrainte. [CHEVALIER 1996]



**Figure (I-9). Cinématique de Membrane**

##### 2. Relations géométriques :

Les relations déplacements-déformations seront :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} \quad [I - 25]$$

##### 3. Relations constitutives :

- Contrainte plane :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [I - 26]$$

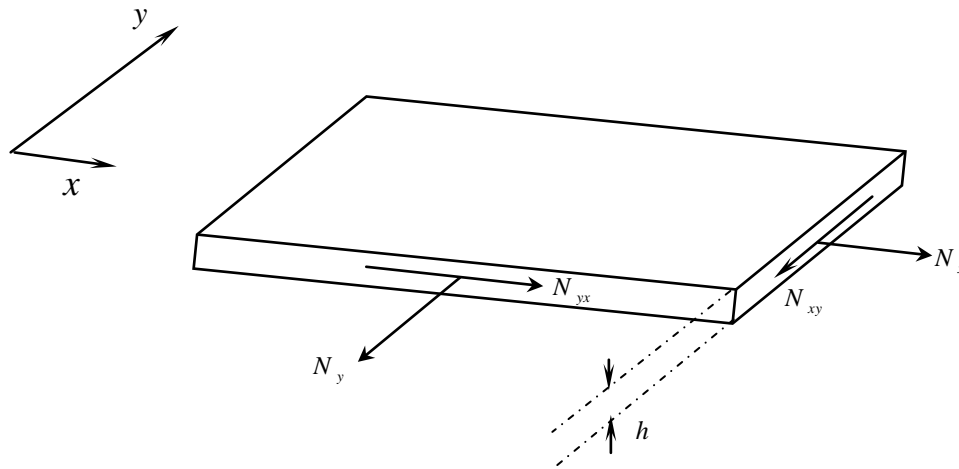
L'hypothèse des contraintes planes est surtout utilisée pour modéliser des corps élastiques plans et minces (plaques) chargés dans leur plan.

- Déformation plane :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu/1-\nu & 0 \\ \nu/1-\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [I - 27]$$

L'hypothèse des déformations planes est surtout utilisée pour les corps élastiques cylindriques longs, de section constante suivant la longueur, chargée parallèlement au plan de section.



**4. Relations Statiques :****Figure (I-10). Efforts de Membrane**

Détermination des efforts normaux  $N_x$ ,  $N_y$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad [I - 28]$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz$$

Détermination des efforts tangentiels  $N_{xy}$ ,  $N_{yx}$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad [I - 29]$$

$$N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} dz$$

**5. Energie de déformation:**

L'énergie potentielle totale s'écrit

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV$$

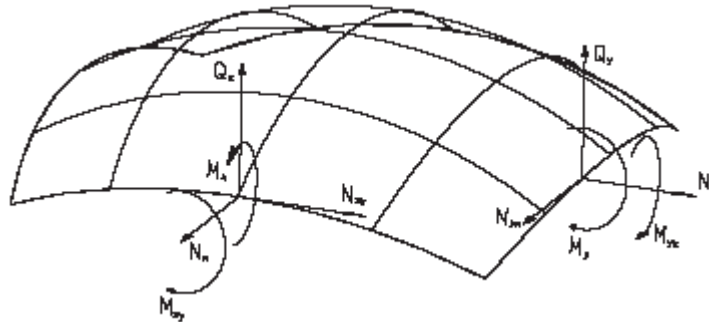
$$U = \frac{h}{2} \left( \int \sigma_x \varepsilon_x y dx + \int \sigma_y \varepsilon_y x dy \right) \quad [I - 30]$$

**I- 4. L'ELEMENT COQUE PLANE PRODUIT DE LA SUPERPOSITION  
PLAQUE-MEMBRANE:**

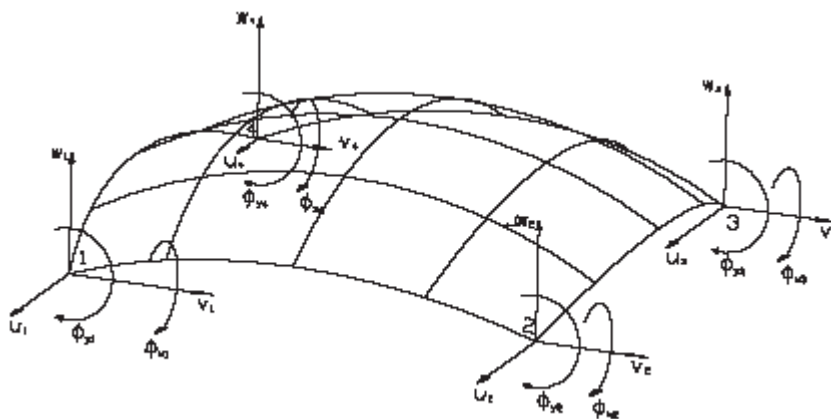
Il est très simple de combiner un champ membranaire à un champ flexionnel, pour obtenir un élément (plaque –membrane) plat, appelé élément de coque plane.

Lorsque les déplacements sont petits (analyse linéaire), on ne fait pas une grande erreur en disant que les deux états de contraintes sont indépendants et découplés a l'intérieur de l'élément, le couplage n'existe qu' aux frontières inter-éléments.

Nous formulons ici (en bref) les équations gouvernant le comportement d'une coque



**Figure (I-11) Efforts résultants dans un élément coque**



**Figure (I-12) Les ddl d'un Elément Coque**

A partir du champ de déplacement suivant :

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + z \beta_x \\ v_0 + z \beta_y \\ w_0 \end{Bmatrix} \tag{I - 31}$$

On définit le champ de déformation suivant :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle = \langle e \rangle + z \langle \chi \rangle \tag{I - 32}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle u_{0'x} \quad v_{0'y} \quad u_{0'y} + v_{0'x} \rangle + z \langle \beta_{x'x} \quad \beta_{y'y} \quad \beta_{x'y} + \beta_{y'x} \rangle$$

$$\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle = \langle u_{0'x} + \beta_x \quad v_{0'y} + \beta_y \rangle \tag{I - 33}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad [I - 34]$$

$\langle e \rangle$  : Déformations de membrane,

$z \cdot \langle \chi \rangle$  : Déformations de flexion, avec  $\langle \chi \rangle$  définissant la courbure

$\langle \gamma \rangle$  : Déformations de cisaillement transversal;

Les efforts unitaires s'exerçant sur un élément de coque étant définis ci-dessous par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle N_x \quad N_{xy} \quad Q_x \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \rangle dz \\ \langle N_{yx} \quad N_y \quad Q_y \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz} \rangle dz \\ \langle M_x \quad M_{xy} \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \sigma_x \quad \tau_{xy} \rangle z dz \\ \langle M_{yx} \quad M_y \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \tau_{yx} \quad \sigma_y \rangle z dz \end{array} \right. \quad [I - 35]$$

La relation contraintes efforts est :

$$\{ \sigma \} = \frac{1}{h} \{ N \} + \frac{12}{h^2} z \{ M \} \quad [I - 36]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} = \frac{1}{h} \cdot \left\{ \begin{array}{l} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} \quad [I - 36']$$

Ce qui amène finalement :

$$N_x = S \cdot (\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}), \quad N_y = S \cdot (\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}), \quad N_{xy} = N_{yx} = S \cdot \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy0}$$

$$M_x = D \cdot (\chi_x + \nu \chi_y), \quad M_y = D \cdot (\chi_y + \nu \chi_x), \quad M_{xy} = M_{yx} = D \cdot \frac{1-\nu}{2} \chi_{xy}$$

$$Q_x = T \cdot \gamma_{xy}, \quad Q_y = T \cdot \gamma_{yx}$$

$$\text{Avec } S = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}, \text{ et } T = \frac{5 \cdot E \cdot h}{12(1+\nu)} \text{ sont les rigidités de membrane, de flexion,}$$

et de cisaillement de la coque.

Enfin l'énergie de déformation élastique de la coque est donnée par :  $U = \pi_m + \pi_f + \pi_c$

L'expression de l'énergie de déformation est la suivante :

$$U = \frac{1}{2} (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy} + N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + 2N_{xy} \varepsilon_{xy} + Q_x \gamma_{xz} + Q_y \gamma_{yz}) \quad [I - 37]$$

## **Chapitre II**

# **Analyse Non Linéaire Géométrique des Coques**

**GENERALITES :**

Malgré l'importance des éléments structuraux de type coque dans la construction et l'industrie, grâce à la leur tenue mécanique assez grande pour une masse réduite du matériau, ils sont cependant, plus sensibles aux phénomènes d'instabilité provoqués par les grands déplacements. Dans le cadre des corps orientés employés en génie civil ou dans la construction aéronautique, aérospatiale et automobile, la réponse aux actions extérieures doit être contrôlée au delà du comportement linéaire pour assurer la fiabilité et la sécurité de ces structures, par prédiction des points d'instabilité qui peuvent apparaître sur la courbe charge-déplacement.

Dans ce cas lorsque les déplacements deviennent grands, la relation déformation-déplacements est non linéaire, on parle de modèles à grands déplacements ou à grandes rotations. Contrairement au cas classique de la mécanique linéaire, il n'est plus possible en grandes déplacements de confondre les configurations déformées et initiales.

Physiquement la Source du comportement non linéaire en grand déplacement est le changement de géométrie quand la structure se déforme. Cela se traduit mathématiquement par la non linéarité de l'équation *déformation-déplacement* (cette relation géométrique n'est plus linéaire mais quadratique en les déplacements). Dans ce cas il est nécessaire d'étudier le mouvement d'un corps constitué d'une infinité de points matériels. Sous l'effet de sollicitations mécaniques, ce corps va se déformer et se déplacer. Nous allons suivre le trajet de l'ensemble des points matériels constitutifs du corps, et l'ensemble des positions qu'occupent ces points à chaque instant s'appelle une *Configuration*.

Dans ce chapitre, quelques rappels de cinématiques vont être présentés. Après avoir rappelé les différentes descriptions lagrangiennes du mouvement, nous établirons la formulation du principe des travaux virtuels dans les différentes descriptions. Ces formulations sont plus détaillées dans ces références [DJEGHABA 1990], [ROBERT 1999], [LEGAY 2002].

## II- 1. ASPECT CINEMATIQUE :

La différence entre l'analyse linéaire et non linéaire géométrique réside dans la cinématique, où il n'est plus possible en grandes déplacements de confondre la configuration déformée et la configuration initiale non déformée. Les grands déplacements nécessitent alors la mise au point de nouveaux schémas numériques pour l'analyse précise de l'histoire des contraintes et des déformations au cours de l'évolution de la structure considérée. En particulier, les positions d'une particule du solide doivent être clairement définies par rapport à une configuration fixée a priori, la configuration initiale, la configuration courante ou finale ou tout autre type de configuration.

L'importance du choix du repérage et du paramétrage des particules s'avère donc un élément essentiel. Ces aspects ont été largement développés dans [FOREST & al 2006].

### II-1-1. DESCRIPTIONS DU MOUVEMENT

La représentation des variables cinématiques et mécaniques d'un ensemble de particules matérielles du corps, est appelé description. On note que la description du mouvement est complètement définie par la connaissance de l'état initial et de l'état final du point matériel. Afin de suivre le mouvement d'un point matériel du solide, il existe de manière générale deux principales approches classiques proposées au 19<sup>ème</sup> siècle dans le contexte de la mécanique classique et en astronomie. Elles sont reformulés ensuite et utilisées pour la description du mouvement dans le cadre de la mécanique des milieux continus déformables. Elles peuvent être **Eulérienne** (une représentation liée à un point géométrique); ou **Lagrangienne** (représentation liée à un point matériel).

#### II-1-1-a. Description Lagrangienne (Matérielle) :

A un instant  $t$  quelconque, le milieu occupe un domaine, noté  $\phi_t$ , dont une particule initialement en  $\bar{x}_0$  se situe maintenant au point géométrique  $M$  de coordonnées  $\bar{x}$ .

La *description lagrangienne* consiste alors à identifier chaque particule de la configuration  $\phi_t$  par sa position dans la configuration de référence. Toute grandeur physique peut alors être exprimée en fonction de la particule à laquelle elle est rattachée et du temps. On peut donc définir une fonction vectorielle  $\bar{\psi}(x_0, t)$  qui décrit la correspondance spatiale entre les configurations initiale et actuelle. On aura donc  $\bar{x} = \bar{\psi}(x_0, t)$

#### II-1-1-b. Description Eulérienne (spatiale) :

Par opposition à la description lagrangienne, la description Eulérienne ne cherche pas à repérer les particules au cours du temps relativement à une configuration initiale, mais consiste au contraire à définir à chaque instant  $t$  et en tout point  $\bar{x}$  de la configuration actuelle, la vitesse  $\bar{v}(\bar{x}, t)$  de la particule située à l'instant  $t$  au point de coordonnées  $\bar{x}$ . Ceci revient à prendre, à chaque instant, la configuration actuelle comme configuration de référence. Il convient également de prendre en compte la conservation de la matière, ce qui est le cas en mécanique des fluides et en aéro-acoustique pour lesquels la description eulérienne est souvent mieux adaptée.

### II-1-1-c. Choix de description :

Les deux descriptions présentent chacune son utilité suivant les types de milieux continus qu'on envisage. Pour les solides déformables, on préfère souvent la description de Lagrange, car la configuration de référence est facilement identifiable. On s'intéresse plutôt à la position finale après un certain temps lorsque l'application des efforts est achevée. Cette description consiste à suivre le mouvement d'une même particule du milieu au cours du temps

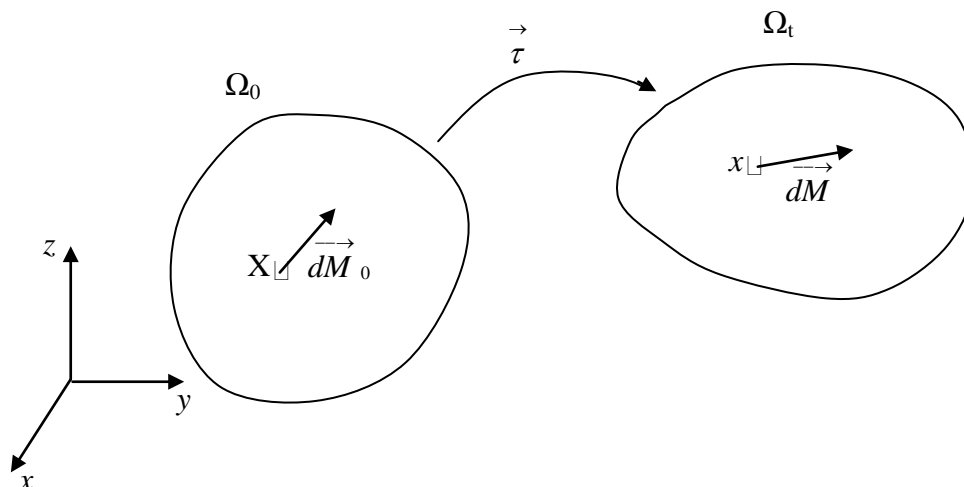
Pour les fluides, on préfère souvent la description d'Euler. En effet, on s'intéresse peu à la position individuelle des particules, du point de vue expérimental, cette description dite "eulérienne" correspond à une mesure locale de la vitesse du fluide, répétée en un très grand nombre de points de l'écoulement. Dans cette description, on observe différentes particules de fluide qui se succèdent en un même point de l'espace, comme lorsqu'on regarde l'eau défiler sous un pont (dans ce cas l'espace est discrétisé et le corps se déplace à travers l'espace).

Il y a des problèmes particuliers dont le choix n'est pas claire (interaction fluide structure, procédés de formage, ...) dans ces cas la combinaison des deux description et plus avantageuse.

### II-1-2. LA DESCRIPTION LAGRANGIENNE

Contrairement à la mécanique des fluides, on ne s'intéressera pas ici à la description du mouvement du solide pendant la déformation, mais seulement à l'état final du corps, lorsque l'application du chargement est terminée et que le solide a atteint son état d'équilibre.

Parmi les formulations permettant le passage entre deux configurations voisines à  $t$  et à  $t + \Delta t$ , les formulations dites lagrangiennes sont les plus courantes. Elles consistent à exprimer le principe des puissances virtuelles à l'instant  $t + \Delta t$  à partir d'une configuration de référence  $C_{(r)}$  qui peut, mais pas nécessairement, coïncider avec la configuration initiale  $C_{(0)}$  à  $t = 0$ .

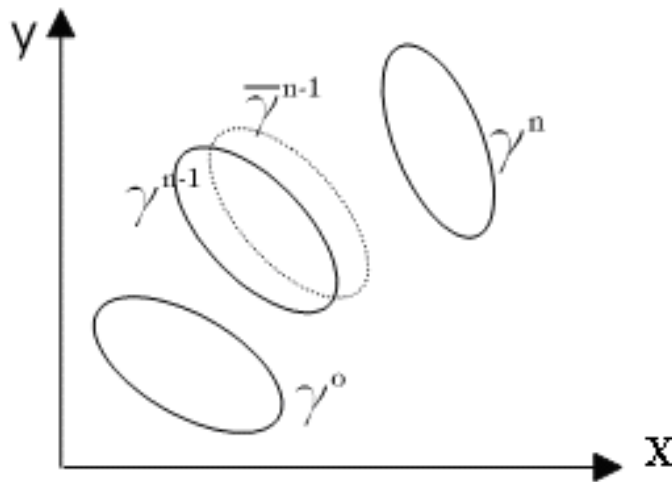


**Figure (II-1). Solide élastique en mouvement**

**II-1-2-a. Différentes configuration d'un corps en mouvement :**

Considérons un corps solide continu  $A$  constitué d'un ensemble de particules matérielles occupant à l'instant  $t$  un volume  $V$  de l'espace euclidien, borné par une frontière  $S$ . L'état, dans lequel se trouve le solide à cet instant, définit ce qu'on appelle la configuration actuelle du solide. Cette configuration notée  $C_{(t)}$  est caractérisée par un ensemble de variables cinématiques et mécaniques, telles que les positions géométriques  $x$  des particules matérielles; les contraintes et les déformations internes aux points matériels. Généralement quand on parle de configuration connue, on sous-entend que toutes les quantités cinématiques et mécaniques caractérisant la configuration sont connues.

Souvent, l'analyste introduit une *configuration de référence* qui est une configuration particulière connue de la structure à un instant  $t_0$  et fait la description au cours du temps des transformations géométriques que subit la structure quand elle se déplace de cette référence.



**Figure (II-2). Configurations d'un solide en mouvement**

Nous pouvons définir 4 configurations d'équilibre du corps *figure (II-2)*:

- La configuration initiale de l'élément, elle correspond à l'état au repos du corps, (non déformé, et non ni déplacé). Elle sera notée  $\gamma^0$ . Elle correspond à  $t = 0$ . Les coordonnées d'un point matériel dans cette configuration seront notées  ${}^0x_i$  ;
- La configuration courante, inconnue a priori. Elle sera notée  $\gamma^n$ . Les coordonnées du même point; matériel dans cette configuration seront notées  ${}^t x_i$  ;
- la configuration antérieure à la configuration courante, elle peut être :
  - \* configuration voisine de  $\gamma^n$ . Elle sera notée  $\gamma^{n-1}$ .
  - \* configuration très voisine de  $\gamma^{n-1}$ . Elle sera notée  $\overline{\gamma^{n-1}}$  et généralement non déformée.



Afin d'éviter toute confusion entre les différents variables dans les différentes configurations, la notation du variable est munie de deux indices additionnels comme suit :  ${}^{t_2}V_{t_1}$

$t_1$  : c'est la date de la position de référence;

$t_2$  : c'est la date à laquelle le variable est considéré.

On définit les déplacements de la façon suivante:

$${}^t u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i$$

$${}^{t+\Delta t} u_i = {}^{t+\Delta t} x_i - {}^0 x_i$$

Et l'incrément de déplacement entre  $\gamma^n$  et  $\gamma^{n-1}$  s'écrit :

$$\delta_i u = {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i$$

Il faut préciser que pour les quatre descriptions lagrangiennes, le système d'axes de référence utilisé est fixe et commun aux trois. Ainsi, les coordonnées d'une même particule sont notés dans le même système d'axes.

Ainsi La description (ou Formulation) Lagrangienne est appelée :

- Totale (D.L.T) : si on effectue le calcul par rapport à la référence  $\gamma^0$ ;
- Actualisée (D.L.A) : si on effectue le calcul par rapport à la référence  $\gamma^{n-1}$ ;
- Actualisée Approchée (D.L.A.A) : si on effectue le calcul par rapport à la référence  $\overline{\gamma^{n-1}}$ , dans ce dernier cas la configuration actuelle inconnue  $\gamma^{n-1}$  est remplacée par la configuration  $\overline{\gamma^{n-1}}$  qui est beaucoup plus simple à manipuler car elle est connue et non déformée.

Les Descriptions lagrangiennes traditionnelles, qui sont la description lagrangienne totale "D.L.T" et la description lagrangienne actualisée "D.L.A", ont été intensivement employées pour dériver la matrice de rigidité en analyse non linéaire. La "D.L.T" utilise la configuration initiale comme référence de déformation tandis que la "D.L.A" utilise une configuration déformée. Récemment, (en 1988 par Kanok-Nukulchai et Wong), une nouvelle variante de la description lagrangienne a été utilisée et elle est désignée sous le nom de "Element-Based Lagrangian Formulation" E.L.F [LEE & NUKULCHAI 1998], [HANA & all 2008] dans laquelle l'élément naturel sert de référence de déformation. Il signifie que toutes les équations gouvernant un corps déformé peuvent être exprimées dans le système des coordonnées naturels et en terme des coordonnées naturelles. Ainsi il apparaît sous une forme plus simple que ceux des deux descriptions lagrangiennes traditionnelles, et offre une grande efficacité sur le plan informatique.

### **II-1-2-b. Description Lagrangienne Corotationnelle (D.L.C) :**

Pour les descriptions Lagrangienne classiques définies précédemment, le système d'axes de référence est gardé fixe. Si on fait bouger le système d'axes de référence avec le mouvement du corps de manière à éliminer le mouvement de corps rigide induit par le grand déplacement, une autre description Lagrangienne d'une manipulation relativement simple peut être définie. Cette description est appelée description Lagrangienne Corotationnelle (D.L.C.). Il s'agit ensuite de définir la position de ce système d'axes, ceci peut être résolu en le prenant comme le système d'axes obtenu après avoir fait subir au système d'axes initial un mouvement de corps rigide afin de le positionner le plus proche possible de la configuration actuelle déformée *figure (II-3)*. En effet ceci permettrait d'absorber les grandes rotations et translations de corps rigide par l'actualisation des coordonnées sur

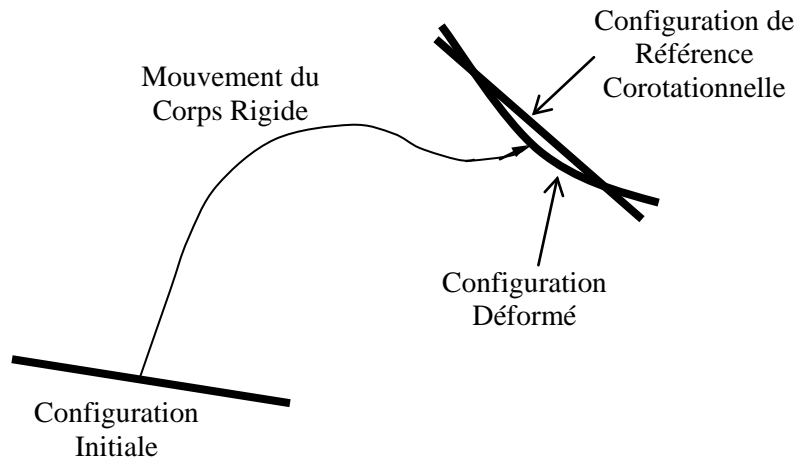
le nouveau système d'axes, et les rotations et déplacements restantes peuvent être considérées petites ou modérées. De cette façon la D.L.C surmonte ainsi un des problèmes des descriptions Lagrangienne classique, qui est le traitement des grandes rotations. Le fait en plus de constater que dans la majorité des cas la non linéarité géométrique peut être décomposée en un large mouvement de corps rigide accompagné d'une déformation local, peut donner à la description Corotationnelle un avantage certain.

Comme pour la description Lagrangienne classique, on définit pour la description Lagrangienne Corotationnelle, deux descriptions particulières se différenciant par le choix de la configuration de référence adaptée.

La description Lagrangienne Corotationnelle est appelée :

- Totale (D.L.C.T) : si on effectue le calcul par rapport à la référence  $\gamma^0$  ;
- Actualisée (D.L.C.A) : si on effectue le calcul par rapport à la référence  $\gamma^{n-1}$  ;

La description Lagrangienne Corotationnelle est l'approche la plus récente parmi les descriptions citées précédemment. Elle a connue un développement rapide depuis son apparition vers les années 1980. Elle a ensuite été très utilisée et l'important nombres de travaux l'atteste : [LIU & TO 1995-a], [ZHU & ZACHARIA 1996], [MEEK & RISTIC 1997], [PACOSTE 1998], [KIM & al 1998], [KIM & VOYIADJIS 1999], [KOLAHY & CRISFIELD 2001], [TABIEI & TANOV 2002], [YAQUN & al 2003], [TAYLOR & al 2003], [BRUNET & SABOURIN 2006], [KIM & LOMBOY 2006], [BATTINI & PACOSTE 2006], [KIM & al 2007-a], [KIM & al 2007-b], [KHOSRAVI & al 2008].



**Figure (II-3). Cinématique de la Description Corotationnelle**

Avant d'adopter la Description Corotationnelle comme la description choisie pour notre travail, il faut discuter les avantages et les inconvénients de la D.L.C par rapport aux autres descriptions du mouvement et particulièrement sa concurrente directe, la D.L.T :

- Traitement effectif des grandes rotations (avec petites déformations);
- Découplage de la non linéarité matérielle (en petits déplacements) et la non linéarité géométrique;
- La réorientation automatique du matériau par élimination du mouvement du corps rigide, permet d'éviter la complexité des invariants des contraintes de la MMC;
- Compatible et adaptable facilement avec les éléments qui ont des *ddl* de rotation (poutre, plaque, coque ...)
- Et enfin elle a l'avantage d'exploiter la librairie des programmes en petits déplacements.

**II-1-2-c. Les Grandes Rotations :**

L'analyse non linéaire comportant de grandes rotations attire beaucoup l'attention dans les dernières années [LIU & TO 1995-a], [BOISSE & al 1996], [MASSIN & AL MIKDAD 1996], [HONG & al 2001], [WISNIEWSKI & TURSKA 2006]. On peut à l'heure actuelle, concernant le traitement des rotations finies distinguer les quatre approches suivantes :

- La première approche [BOISSE & al 1996], [PACOSTE 1998], [KIM et al 1998], [KIM & VOYIADJIS 1999], [KIM & al 2007-a], [KHOSRAVI & al 2008] est comme nous l'avons vue dans (II-1-2-b), basée sur l'observation que le mouvement d'un élément se compose d'un mouvement de corps rigide et d'une déformation locale. Par conséquent, si on peut éliminer le mouvement de corps rigide du déplacement total, la partie restante (la déformation) du mouvement est toujours une petite quantité. Quand ceci est fait, les éléments finis développés pour la analyse linéaire en petits déplacements, en conjonction avec la formulation lagrangienne actualisée ou la formulation lagrangienne corotationnelle, peuvent être appliqués à l'analyse non linéaire dans lesquelles les grands déplacements et rotations sont impliqués.

- La deuxième approche [HONG & al 2001], [WISNIEWSKI & TURSKA 2006] tient compte des termes non linéaires de rotation dans la fonction d'interpolation de déplacement, qui sont principalement des sinus et des cosinus des rotations nodales. Par conséquent cette approche complique la dérivation des matrices élémentaires, mais elle enlève la restriction de petites rotations nodales entre deux incréments successifs de charge.

- La troisième approche [WISNIEWSKI & TURSKA 2006], [KIM & al 2007-b] a été proposée par (Bathe and Bolourchi 1979). Par référence à la formulation lagrangienne actualisée, Bathe et Bolourchi propose d'écrire la matrice de transformation entre le repère locale courant (déformé) et le repère global initial (indéformé) comme le produit de deux matrices, une pour la transformation entre le repère local courant et le repère local initial, l'autre pour la transformation entre le repère local initial et le repère global initial.

- La quatrième approche [LIU & TO 1995-a], [BETSCH & al 1998], [HONG & TENG 2002], [LI & CHEN 2003], [KAPANIA & LI 2003], est basée sur l'idée que la configuration spatiale d'une coque peut être définie par le champ de vecteurs position pour des points sur la mi-surface de la coque, et aussi par le champ de vecteur directeur qui donne les orientations de l'épaisseur. La description du champ de vecteurs de position est simple. Ce n'est pas le cas pour le champ du vecteur directeur des orientations, étant donné que des rotations finies dans l'espace ne peuvent pas être traitées comme vecteurs (les rotations ne sont pas commutatives). Par conséquent, la quatrième approche se concentre sur la définition d'une matrice de transformation pour n'importe quelle importance de l'incrément de rotation.

## II- 2. ASPECT GEOMETRIQUE :

Notre problème mécanique peut être résumé comme suit :

Un domaine initial  $\Omega_0$ , soumis à des forces et des déplacements imposés au cours du temps, est déformé en un domaine  $\Omega_t$  *figure (II-2)*. C'est le champ de déplacements  $U(M, t)$  qui permet de passer de  $\Omega_0$  à  $\Omega_t$ . Le problème est de déterminer  $U(M, t)$ .

Pour cela nous considérons l'évolution d'un point matériel  $M$  qui occupe la position  $M_{(0)}$  à l'instant initial  $t = 0$  et  $M_{(t)}$  à l'instant  $t$ . Si l'on se place dans la configuration  $C_{(0)}$ , le déplacement subi par le point au cours de la déformation est :  $U_{(M)} = M_{(t)} - M_{(0)}$

On définit la position du point  $M$  sur la configuration courante  $C_{(t)}$  par les coordonnées  ${}^t x_i$  tel que :

$${}^t x_i = {}^0 x_i + {}^t u_i \quad [II - 1]$$

### II-2-1. VARIATION DU DEPLACEMENT

La variation virtuelle du déplacement du point  $M$ , correspond à la variation de la coordonnée de  $M$  autour de la position à l'instant  $t$ , elle est donnée par :

$$\delta({}^t u_i) = \delta({}^t x_i - {}^0 x_i) = \delta({}^t x_i) \quad [II - 2]$$

La variation du déplacement autour de la position à l'instant  $t$  peut s'écrire :

$$\delta({}^t u_i) = \delta {}_t u_i$$

La dérivation par rapport aux coordonnées à l'état initial s'écrit :

$$\frac{\partial(\delta {}_t u_i)}{\partial {}^0 x_j} = \delta {}_0^t u_{i,j} \quad [II - 3]$$

La dérivation par rapport l'état courant s'écrit :

$$\frac{\partial(\delta {}_t u_i)}{\partial {}^t x_j} = \delta {}_t u_{i,j} \quad [II - 4]$$

La relation entre ces deux quantités est donnée par :

$$\delta {}_0^t u_{i,j} = \frac{\partial(\delta {}_t u_i)}{\partial {}^t x_k} \cdot \frac{\partial {}^t x_k}{\partial {}^0 x_j} = \delta {}_t u_{i,k} \cdot {}^t x_{k,j} \quad [II - 5]$$

### II-2-2. NOTION ET MESURE DES DEFORMATIONS

La notion de déformation entre un instant passé  $t_p$  correspondant à la configuration  $C_{(p)}$  et le temps présent  $t$  correspondant à la configuration  $C_{(t)}$  nécessite la comparaison des vecteurs élémentaires  $dM(t)$  et  $dM(t_p)$ . Nous décrivons ici deux façons de présenter la déformation que subit un matériau. Le tenseur de Cauchy et le tenseur de Green-Lagrange. Le premier étant une version simplifiée du deuxième. Les deux modèles ont leurs intérêts et leurs inconvénients.

**II-2-2-a. tenseur linéaire de Cauchy :**

Les déformations d'un objet sont mesurées à partir de la position initiale de repos.

On utilise la première dérivée spatiale du champ vectoriel déplacement  $\vec{U}$  qui est, pour chaque point  $M$ , le vecteur qui reliant sa position au repos à sa position actuelle déformé

$$\mathcal{E}_{\text{cauchy}} = \text{sym}(\nabla \vec{U}) = \frac{1}{2}(\nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^T) \quad [\text{II} - 6]$$

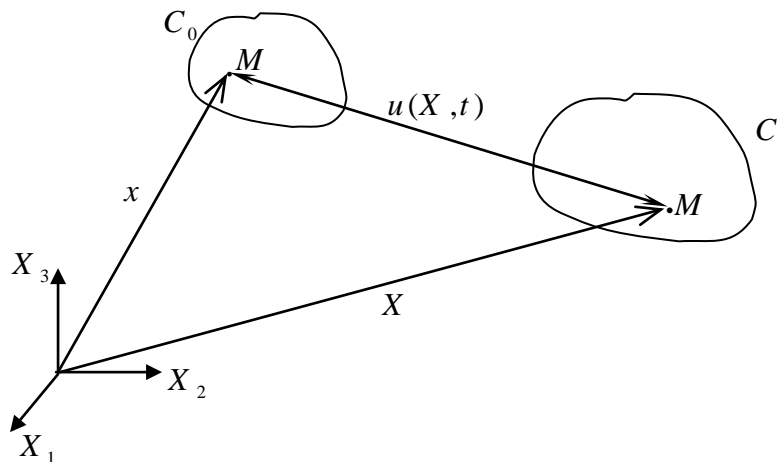
Les termes du tenseur peuvent s'écrire:

$$(\mathcal{E}_{\text{cauchy}})_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad [\text{II} - 7]$$

$\mathcal{E}_{\text{cauchy}}$  est un tenseur symétrique qui s'appelle partie symétrique du tenseur gradient de déplacement.

**II-2-2-b. tenseur quadratique de Green-Lagrange :**

Considérons un solide déformable dans une configuration de référence  $C_{(0)}$  à l'instant  $t_0$  et dans une configuration actuelle  $C_{(t)}$  à l'instant  $t$  figure (II-4). Un point matériel  $M$  de ce solide a pour coordonnées  $X$  à l'instant  $t_0$  et  $x$  à l'instant  $t$  dans le repère cartésien  $(X_1, X_2, X_3)$



**Figure (II-4). Déformation d'un solide en mouvement**

Le mouvement du point matériel  $M$  est décrit par :

$$x = u(X, t) + X \quad [\text{II} - 8]$$

Avec  $u(X, t)$  : est le vecteur déplacement.

La mesure des déformations d'un solide déformable revient à définir ses changements de forme.

Soit un vecteur infinitésimal  $dX$  autour du point  $M_0$ , ce vecteur se transforme par  $F$  en un vecteur  $dx$  au tour du point  $M$ .

L'état de déformation est complètement défini par le tenseur gradient de la déformation  $F$  défini tel que :  $F = \frac{\partial x}{\partial X}$  [II -9]

La mécanique des milieux continus met en évidence plusieurs tenseurs du second ordre pour analyser les déformations locales d'un corps (Biot, Almansi, Green-Lagrange, Hill, Hencky) qui permettent d'aborder de façon efficace les problèmes de grandes déplacements, tous ces tenseurs s'expriment les uns en fonction des autres. Voir [FOREST & al 2006].

Les deux mesures de déformations de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi possèdent les mêmes composantes mais s'expriment dans deux configurations différentes. Le tenseur de déformation d'Almansi est associé à une variation relative à la configuration  $C_{(t)}$  (déformation exprimée à  $t$ ) alors que le tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  se réfère à la configuration  $C_{(tp)}$ .

Généralement en analyse non linéaire, pour mesurer les déformations subies par le solide entre les configurations  $C_{(0)}$  et  $C_{(t)}$ , le tenseur des déformations de Green-Lagrange défini sur  $C_{(0)}$  est introduit :

On considère le produit vectoriel

$$\begin{aligned} d\bar{x}^T \cdot d\bar{x} - d\bar{X}^T \cdot d\bar{X} &= (\underline{\underline{F}} \cdot d\bar{x})^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\bar{x} - d\bar{X}^T \cdot d\bar{X} \\ d\bar{x}^T \cdot d\bar{x} - d\bar{X}^T \cdot d\bar{X} &= 2d\bar{X}^T \underline{\underline{e}} d\bar{X} \end{aligned} \quad [II -10]$$

Tenseur de déformation de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{e}}(X, t) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}_{(X, t)}^T \underline{\underline{F}}_{(X, t)} - \underline{\underline{I}}) \quad [II -11]$$

Exprimé en coordonnées cartésiennes orthonormées

$$e_{ij}(X, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k(X, t)}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial x_k(X, t)}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad [II -12]$$

Où  $\delta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j}$  : est le symbole de Kronecker

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est donc directement dérivable à partir du gradient de déformation sans avoir recours au calcul des valeurs et directions principales. Il apparaît donc que la facilité du calcul de la déformation de Green-Lagrange le rend plus attrayant.

Le tenseur de Green-Lagrange est largement utilisé dans la pratique pour quantifier l'intensité et la direction de la déformation, on peut aussi exprimer la déformation en fonction des variables de configuration actuelle. Le tenseur des déformations de d'Euler-Almansi s'appelle aussi tenseur des déformations de d'Almansi-Hamel est défini sur  $C_t$  par :

$$\begin{aligned} d\bar{x}^T \cdot d\bar{x} - d\bar{X}^T \cdot d\bar{X} &= d\bar{x}^T \cdot d\bar{x} - (F^{-1}d\bar{x})^T (F^{-1}d\bar{x}) \\ d\bar{x}^T \cdot d\bar{x} - d\bar{X}^T \cdot d\bar{X} &= 2d\bar{x}^T \underline{\underline{\varepsilon}} d\bar{x} \end{aligned} \quad [II -13]$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}] \quad [II -14]$$

Le tenseur d'Euler-Almansi est Eulérien puisque il est relatif à la configuration actuelle.

L'utilisation du tenseur d'Almansi est bien évidemment tout aussi légitime selon le point de vue adopté (lagrangien ou eulérien)

Par substitution de l'équation [II-8] dans [II-12] la déformation de Green-Lagrange s'écrit en fonction du déplacement et non plus de la position:

$${}^t_0 e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ {}^t_0 u_{i,j} + {}^t_0 u_{j,i} + \sum_1^3 ({}^t_0 u_{k,i} \cdot {}^t_0 u_{k,j}) \right] \quad [II - 15]$$

$$\text{c-à-d } {}^t_0 e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ {}^t_0 u_{i,j} + {}^t_0 u_{j,i} + ({}^t_0 u_{1,i} \cdot {}^t_0 u_{1,j} + {}^t_0 u_{2,i} \cdot {}^t_0 u_{2,j} + {}^t_0 u_{3,i} \cdot {}^t_0 u_{3,j}) \right]$$

On définit le tenseur de déformations de Green-Lagrange par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{e}}(\vec{U}, \vec{U}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{U} + \nabla^T \vec{U}) + \frac{1}{2} (\nabla^T \vec{U} \cdot \nabla \vec{U}) \\ \underline{\underline{e}}(\vec{U}, \vec{U}) = \underline{\underline{\varepsilon}}_l(\vec{U}) + \underline{\underline{\varepsilon}}_q(\vec{U}, \vec{U}) \end{cases} \quad [II - 16]$$

Cette définition du tenseur provient de l'étude de la variation du carré de la distance entre deux points voisins, avant et après déformation. Les termes quadratiques que l'on retrouve dans cette expression met en évidence la non linéarité de la relation entre le champ de déplacement et le champ de déformation de Green-Lagrange. On constate que cette expression n'est pas linéaire en fonction du champ de déplacement  $u(X, t)$  ou de son gradient en raison du dernier terme.

Ceci signifie que, dans le cas général, on ne peut pas ajouter deux tenseurs de déformation pour représenter la déformation issue de deux champs de déplacement successifs. En fait, cette addition ne peut être réalisée que dans l'hypothèse des petites perturbations.

### **II-2-3. PROPRIETES DES TENSEURS DE DEFORMATION**

La différence entre ces deux tenseurs est que celui de "Green-Lagrange dérive dans le repère lié au matériau (lagrangien), alors que Cauchy dérive par rapport au repère du monde (eulérien)". D'un autre côté, le tenseur de Cauchy peut être vu comme une approximation du premier ordre de celui de Green-Lagrange. La propriété la plus intéressante de ces deux tenseurs, c'est qu'ils sont insensibles aux translations rigides du corps, parce que lorsqu'on ajoute une constante au champ de déplacement, celui-ci va disparaître dans la dérivée. Cependant, Ils ne seront modifiés par des rotations globales que lorsque ils sont dans la position de repos. Ce comportement est irréaliste, mais il s'avère suffisant lorsqu'on se limite à des faibles déplacements et le corps reste donc proche de sa position d'équilibre.

### **II-2-4. VARIATION DE DEFORMATION**

La variation du tenseur de déformation de Green-Lagrange décrite par rapport à l'état initial s'écrit :

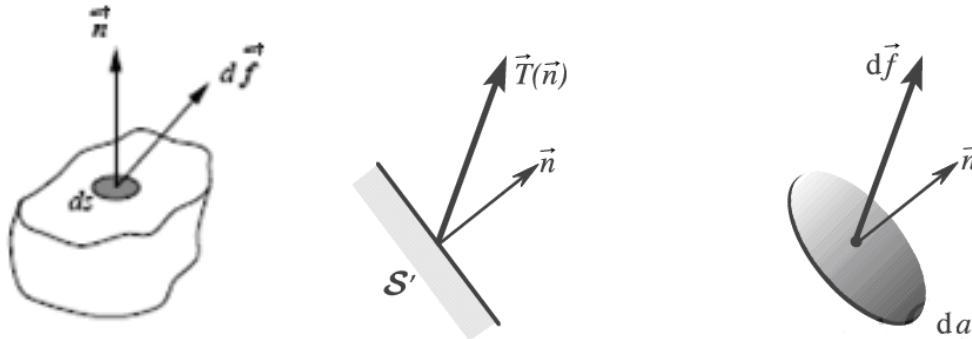
$$\delta {}^t_0 e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \delta {}^t_0 U_{i,j} + \delta {}^t_0 U_{j,i} + \sum \delta ({}^t_0 U_{k,j} \cdot {}^t_0 U_{k,i}) \right] \quad [II - 17]$$

La variation du tenseur de déformation de Green-Lagrange décrite par rapport à l'état actuel s'écrit :

$$\delta {}^{t+\Delta t}_t e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \delta {}^{t+\Delta t}_t U_{i,j} + \delta {}^{t+\Delta t}_t U_{j,i} + \sum \delta {}^{t+\Delta t}_t (U_{k,j} \cdot U_{k,i}) \right] \quad [II - 18]$$

## II- 3. ASPECT MECANIQUE :

### II-3-1. NOTION ET MESURE DES CONTRAINTES



**Figure (II-5). Contrainte et force élémentaire**

Dans la coupe présentée par la *figure (II-5)*, sur chaque élément de surface  $ds$ , de normale unitaire  $\vec{n}$ , au point  $P$ , un élément de force  $d\vec{f}$  s'exerce dans la configuration  $C_{(t)}$ . Cet élément de force rend compte des efforts locaux permettant de respecter la continuité du matériau (forces de cohésion).

Le vecteur contrainte  $\vec{T}$  au point  $P$  est alors défini par :

$$\vec{T}(p, \vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\vec{f}}{ds} \quad [II - 19]$$

Un vecteur contrainte n'est donc pas forcément porté par la normale  $\vec{n}$  à la surface sur laquelle il s'applique.

Pour plus de détails sur les contraintes voir [FOREST & al 2006], [CHEVALIER 1996]

#### II-3-1-a. Tenseur de Cauchy :

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  est défini par :

$$d\vec{f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} \cdot ds. \quad \text{Le tenseur } \underline{\underline{\sigma}} \text{ est Eulérien.}$$

La formule essentielle liant le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  au vecteur contraintes  $\vec{T}(p, \vec{n})$  sur la facette de normale sortante  $\vec{n}$  :  $\vec{T}(p, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$

Dans la base orthonormée il s'écrit :

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad [II - 20]$$

Ce tenseur est fonction du point  $P$  sur lequel on se place, mais pas de la facette élémentaire considérée en ce point.



**II-3-1-b. Tenseur de Piola-Kirchhoff :**

En exprimant  $d\vec{f}$  sur la configuration initiale  $C_0$ , le premier tenseur de Piola-Kirchhoff appelé aussi de Boussinesq est défini par :

$$d\vec{f} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}_0 \cdot ds_0 \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{T}} = \det \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \quad [II - 21]$$

Il n'est pas symétrique, et il est évalué dans la configuration actuelle, mais nécessite une dérivation sur la configuration de référence (tenseur mixte).

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$  est obtenu en transportant  $d\vec{f}$  dans la configuration initiale  $C_0$  avec  $d\vec{f}_0 = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d\vec{f}$  :

$$d\vec{f}_0 = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}_0 \cdot d\vec{s}_0 \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{S}} = \det \underline{\underline{F}} \times \underline{\underline{F}}^{-1} \times \underline{\underline{F}}^{-T} \quad [II - 22]$$

Il est symétrique et purement lagrangien.

**II- 4. L'APPROCHE INCREMENTALE :**

En 1960, Turner propose pour la première fois l'application de la méthode des éléments finis à l'analyse non linéaire des structures. L'auteur présente une approche "incrémentale" permettant d'analyser les problèmes géométriquement non linéaires par éléments finis. La réponse non linéaire de la structure est obtenue "incrémentalement", c'est à dire pas à pas, par augmentation progressive de la sollicitation. Pour chaque état déformé, on calcule une matrice de rigidité incrémentale comprenant un terme supplémentaire, dit "matrice géométrique", qui résulte de la prise en compte des termes quadratiques du champ de déplacements. En effet on suit les différentes configurations au cours de déplacement que subit la structure sous l'effet du système des forces appliquées en cherchant l'équilibre à chaque incrément.

La configuration au temps  $t$  est connue et l'état  $t+\Delta t$  est inconnu et recherché, par application du principe des travaux virtuels sous forme incrémentales entre les deux configurations (précédentes de référence, et actuelle cherchée). Nous évaluons la matrice de rigidité (tangente, ou sécante), ensuite par prédiction linéaire en évaluant les déplacements proportionnellement à l'incrément des actions extérieures, puis on fait la correction de l'équilibre entre les actions externes et les forces internes qui sont évaluées de manière non linéaire.

La description Lagrangienne, qui suit l'évolution temporelle de chacun des points matériels de la structure est utilisée pour la formulation mathématique.

La résolution de l'équilibre mécanique à  $t+\Delta t$  doit alors utiliser une configuration antérieure afin d'effectuer l'intégration sur un volume connu. Il diffère selon les formalismes. Ainsi, la formulation de type lagrangienne totale utilise l'instant  $t_0$ . Pour sa part, la formulation lagrangienne réactualisée considère le temps  $t$  comme état de référence envisageables découlent des expressions différentes des équations d'équilibre, dans la mesure où les tenseurs employés pour caractériser les états mécaniques et cinématiques diffèrent également.

L'algorithme incrémental est souvent accompagné par un processus itératif, l'équation d'équilibre doit être satisfaite pour toute l'histoire de chargement.

**II- 5. EXPRESSION INCREMENTALE DU PRINCIPE DES DEPLACEMENTS****VIRTUELS :**

Soient  $\gamma^n$  la configuration déformée d'un corps élastique. Le principe des travaux virtuels s'exprime dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormées par :

$$\int_{t_v} {}^t T_{ij} \cdot \delta_t \varepsilon_{ij} \cdot d {}^t v = {}^t W_{ext} \quad [II - 23]$$

Où :  $v {}^t$  c'est le volume défini à la date  $(t)$  correspond à la configuration  $\gamma^n$ .

${}^t T_{ij}$  : le tenseur de contraintes de Cauchy défini sur  $\gamma^n$ .

$\delta_t \varepsilon_{ij}$  : la variation du tenseur de déformation à la date  $(t)$ .

${}^t W_{ext}$  : travail des forces extérieures par rapport à la configuration  $\gamma^n$  à la date  $(t)$ .

L'expression incrémentale du principe des déplacements virtuels est obtenu par différenciation de l'expression du principe des déplacements virtuels à la date  $\tau = t + \Delta t$ .

**II-5-1. EXPRESSION INCREMENTALE DU (P. D. V) EN (D. L. T)**

La configuration de référence dans ce cas est la configuration  $\gamma^0$ .

Nous écrivons maintenant l'expression du P.D.V. en utilisant la méthode décrite précédemment qui fournit directement l'expression incrémentale à discrétiser.

A l'instant  $t + \Delta t$ , l'expression du P.D.V. écrite par rapport à la configuration de référence  $\gamma^0$  est :

$$\int_{0_v} {}^{t+\Delta t} {}_0 \sigma_{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} {}_0 e_{ij} \cdot d {}^0 v = {}^{t+\Delta t} W_{ext} \quad [II - 24]$$

${}^{t+\Delta t} W_{ext}$  : représente le travail virtuel des forces extérieures à la date  $t + \Delta t$

Les contraintes et les déformations à la date  $t + \Delta t$  peuvent être décomposées comme suit :

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t} {}_0 \sigma_{ij} = {}^t {}_0 \sigma_{ij} + {}_0 \sigma_{ij} \\ {}^{t+\Delta t} {}_0 e_{ij} = {}^t {}_0 e_{ij} + {}_0 e_{ij} \end{cases} \quad [II - 25]$$

Les accroissements  ${}_0 \sigma_{ij}$  et  ${}_0 e_{ij}$  sont inconnus, la variation  $\delta {}^{t+\Delta t} {}_0 \varepsilon_{ij}$  se réduit à :  $\delta {}^{t+\Delta t} {}_0 e_{ij} = \delta {}_0 e_{ij}$

En nous servant de l'expression [II-15] et en posant que :  ${}^{t+\Delta t} {}_0 U_i = {}^t U_i + {}_0 U_i$

Alors :

$${}^{t+\Delta t}{}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ ({}^tU_{i,j} + {}_0U_{i,j}) + ({}^tU_{j,i} + {}_0U_{j,i}) + ({}^tU_{k,i} + {}_0U_{k,i})({}^tU_{k,j} + {}_0U_{k,j}) \right]$$

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ {}_0U_{i,j} + {}_0U_{j,i} + {}^tU_{k,i} \cdot {}_0U_{k,j} + {}^tU_{k,j} \cdot {}_0U_{k,i} + {}_0U_{k,i} \cdot {}_0U_{k,j} \right]$$

L'accroissement  ${}_0e_{ij}$  peut être décomposé comme suit :

$${}_0e_{ij} = {}_0\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij}^{NL} \quad [II - 26]$$

$$\begin{cases} {}_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0U_{i,j} + {}_0U_{j,i} + {}^tU_{k,i} \cdot {}_0U_{k,j} + {}^tU_{k,j} \cdot {}_0U_{k,i}) \\ {}_0\varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} {}_0U_{k,i} \cdot {}_0U_{k,j} \end{cases} \quad [II - 27]$$

En injectant [II-25], [II-26] dans [II-24] on obtient :

$$\int_{0_v} ({}^t\sigma_{ij} + {}_0\sigma_{ij}) (\delta {}_0\varepsilon_{ij} + \delta {}_0\varepsilon_{ij}^{NL}) d^0v = {}^{t+\Delta t}W_{ext}$$

En négligent le terme infiniment petit :  ${}_0\sigma_{ij} \cdot \delta {}_0\varepsilon_{ij}^{NL} \approx 0$

On obtient finalement :

$$\int_{0_v} ({}^t\sigma_{ij} \cdot \delta {}_0\varepsilon_{ij}^{NL} + C_{ijkl} \cdot {}_0\varepsilon_{kl} \cdot \delta {}_0\varepsilon_{ij}) d^0v = {}^{t+\Delta t}W_{ext} - \int_{0_v} {}^t\sigma_{ij} \cdot \delta {}_0\varepsilon_{ij} \cdot d^0v \quad [II - 28]$$

La relation exprime donc l'équilibre réel du corps élastique

### **II-5-2. EXPRESSION INCREMENTALE DU (P. D. V) EN (D. L. A)**

La configuration de référence dans ce cas est la configuration actuelle  $\gamma^n$ .

À l'instant  $\tau = t + \Delta t$ , l'expression du P.D.V. écrite par rapport à la configuration de référence  $\gamma^n$

est :

$$\int_{t_v} {}^{t+\Delta t}{}_t\sigma_{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}{}_te_{ij} \cdot d^t v = {}^{t+\Delta t}W_{ext} \quad [II - 29]$$

Les grandeurs exprimées à la date  $t + \Delta t$  sont réécrites comme :

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}{}_t\sigma_{ij} = {}^tT_{ij} + {}_t\sigma_{ij} \\ {}^t\sigma_{ij} = {}^tT_{ij} \\ {}^{t+\Delta t}{}_te_{ij} = {}_te_{ij} \end{cases} \quad [II - 30]$$

L'accroissement de déformation entre  $t$  et  $t + \Delta t$  s'écrit :

$$\begin{cases} {}_t e_{ij} = {}_t \varepsilon_{ij} + {}_t \varepsilon_{ij}^{NL} \\ {}_t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t U_{i,j} + {}_t U_{j,i}) \\ {}_t \varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} ({}_t U_{k,i} \cdot {}_t U_{k,j}) \end{cases} \quad [II - 31]$$

L'équation [II-29] devient en utilisant [II-31] :

$$\int_{t_v} ({}^t T_{ij} + {}_t \sigma_{ij}) (\delta {}_t \varepsilon_{ij} + \delta {}_t \varepsilon_{ij}^{NL}) d{}^t v = {}^{t+\Delta t} W_{ext}$$

En injectant [II-31] et en négligeant le produit de deux accroissements afin de linéariser l'expression précédente, on obtient finalement :

$$\int_{t_v} ({}^t T \cdot \delta {}_t \varepsilon_{ij}^{NL} + C_{ijkl} \cdot {}_t \varepsilon_{kl} \cdot \delta {}_t \varepsilon_{ij}) d{}^t v = {}^{t+\Delta t} W_{ext} - \int_{t_v} {}^t T_{ij} \cdot \delta {}_t \varepsilon_{ij} \cdot d{}^t v \quad [II - 32]$$

## **Chapitre III**

# **Analyse Non Linéaire Matérielle des Coques**

**GENERALITES :**

Il est clair que suivant la nature du matériau, les efforts appliqués ne produisent pas les mêmes effets. Dans le cas des petits déplacements avec des matériaux parfaitement élastiques et isotropes, nous utilisons la loi de Hooke qui est linéaire. Cependant, si l'on souhaite caractériser des matériaux plus complexes, il faudra généralement utiliser des lois qui ne permettent plus d'avoir une relation linéaire entre contraintes et déformations. On parle de grandes déformations, où le comportement du matériau dépend de l'état courant de déformation et probablement de l'histoire de la déformation. Ceci se traduit mathématiquement par la non linéarité des équations constitutive qui relient les contraintes aux déformations et où le matériau n'obéit plus au modèle élastique.

Actuellement, Une branche entière de la mécanique du milieu continu est consacrée à étudier l'écoulement et les déformations des corps sous l'action des contraintes qui leur sont appliquées et à la formulation, et la validation des équations constitutives (l'élasticité non linéaire, la plasticité, la visco-élasticité, le fluage, ...). Il existe une grande variété de tels comportements et de modèles pour les décrire. Dans ce chapitre, on se limite aux modèles de comportement élasto-plastique les plus simples, utilisés pour la plasticité des métaux (très utilisés dans les applications industrielles).

Généralement on distingue trois classes de comportement mécanique principales :

- **Elasticité.** Dont l'allongement est proportionnel à la charge appliquée, au moins dans un certain domaine de charge dit domaine d'élasticité. Le facteur de proportionnalité est la propriété élastique intrinsèque du matériau utilisé.
- **Viscosité.** Le comportement visqueux uni-axial est celui d'un amortisseur ou d'un piston dont la réponse dépend de la vitesse de sollicitation (mécanique des fluides, rhéologie des polymères, certains aciers dans un certain domaine de température, ...).
- **Plasticité.** Le comportement rigide parfaitement plastique uni-axial se caractérise par l'existence d'un seuil de contrainte au dessous duquel aucune déformation n'est observée et pour laquelle une déformation permanente quelconque est possible. La combinaison de ces comportements schématiques élémentaires conduit à des comportements plus complexes effectivement rencontrés dans la pratique (viscoélasticité, élastoplasticité, viscoplasticité, et élastoviscoplasticité, ...).

La signification des non linéarités matérielles change considérablement à travers des disciplines. Elles semblent se produire le plus souvent dans le génie civil, où se traitent les matériaux non linéaires tels que le béton, les sols et l'acier. En construction mécanique le fluage et la plasticité sont les plus importants, et fréquemment ils se produisent en combinaison avec les effets thermiques. Dans la technologie aérospatiale les non linéarités matérielles sont moins importantes et tendent à être locales en nature. Mais dans tous les cas la non linéarité matérielle peut provoquer des phénomènes très complexes qu'il faut prendre en considération, tels que la *dépendance de chemin, hystérésis, localisation, shakedown, fatigue, défaillance graduelle* etc...

### **III- 1. LOIS DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUES :**

L'étude du comportement d'un corps solide est souvent basée sur la variation d'une grandeur mécanique  $\mathbf{Q}$  (force, couple, pression, ...etc.) appliquée à ce corps en fonction d'une grandeur géométrique  $\mathbf{q}$  (déplacement, rotation, variation de volume, ...etc.) à température constante. Cette étude permet de mettre en évidence les caractéristiques physiques intrinsèques du matériau. L'association des lois de conservation à des lois physiques traduisant le comportement des matériaux dans le cadre de la mécanique des milieux continus, produira les lois de comportement.

Ce chapitre est consacré à la formulation des lois de comportement plastiques (plasticité classique) sans dépendance avec le temps, la vitesse de déformation (visco-plasticité, fluage, fatigue, plasticité dynamique), ou gradient de température.

#### **III-1-1. LOI DE COMPORTEMENT**

En principe, les lois de comportement peuvent se déduire de la connaissance de la distribution détaillée des particules et des interactions entre ces particules au sein d'un matériau donné, par une démarche de thermomécanique statistique. C'est ainsi que la loi des gaz parfaits et les lois d'élasticité des solides en petites déformations se déduisent de la mécanique statistique ou des potentiels d'interaction entre molécules. Dans la majorité des cas toutefois, cette démarche déductive se révèle inextricable et ne donne pas lieu à des lois de comportement explicites simples. On pourra toutefois les approcher par une démarche phénoménologique consistant à corréliser contraintes aux déformations à partir de résultats expérimentaux suffisamment nombreux. C'est l'approche la plus efficace en sciences de l'ingénieur.

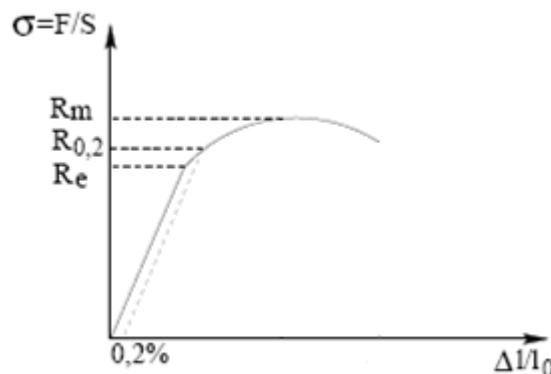
#### **III-1-2. ESSAI DE TRACTION**

L'essai de traction est le test le plus couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique d'un matériau, et donc établir sa "loi de comportement". Cet essai consiste le plus souvent à soumettre une éprouvette (ou plus exactement une partie dite "utile" de l'éprouvette) à un allongement  $\Delta l$  par déplacement relatif de ses extrémités, Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique (quasi-statique, petites déformations, température constante).

Les courbes obtenues à l'aide de cet essai ont typiquement l'allure de la *figure (III-1)*

Le comportement fait apparaître une partie linéaire (élasticité) suivie d'une partie non linéaire.

Le changement de la courbe de charge peut présenter un palier horizontal. Comme pour l'acier doux ou le cuivre à température ambiante, comme il peut être sans palier, le cas du cuivre recuit, de l'aluminium et des aciers hautement alliés.



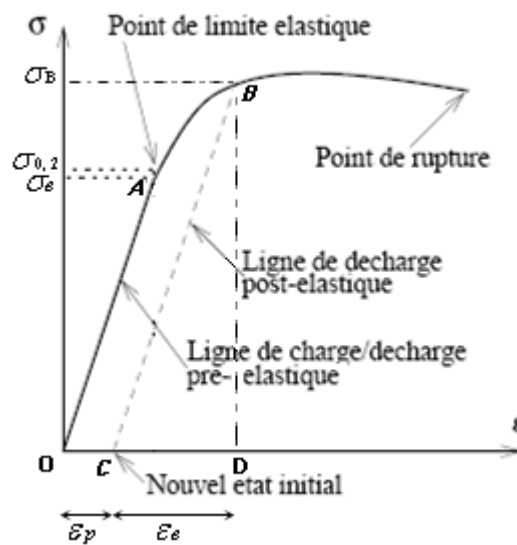
**Figure (III-1). Courbe de repense (contrainte – déformation)**

### III-1-3. LIMITE D'ELASTICITE OU SEUIL D'ECOULEMENT

L'expérience montre qu'un grand nombre de matériaux solides présentent un comportement élastique (et donc en particulier réversible, l'échantillon revenant dans son état initial après un cycle charge -décharge).

La limite d'élasticité (ou de proportionnalité) est la contrainte au dessus de laquelle apparaissent des déformations irréversibles. Le point correspondant à  $R_e$  figure (III-1) caractérisé par un changement net de la courbe de charge ( $F, \Delta l$ ) est difficile à situer.

Si on charge de O en passant de A jusqu'au B, Puis on décharge en B figure (III-2) lorsqu'on charge à partir de C, on aura une nouvelle limite d'élasticité  $\sigma_B$  plus nette. (augmentation ou diminution) de l'amplitude de la contrainte. Il y a alors (durcissement ou adoucissement) du matériau.



**Figure (III-2). Limite d'élasticité**

Sur la figure (III-2) on distingue les contraintes suivantes :

- $\sigma_e$  : la limite d'élasticité "vraie", ou limite de proportionnalité;
- $\sigma_{0,2}$  : la limite d'élasticité conventionnelle (apparente), correspond à une déformation inélastique de 0,2%, cette valeur classique étant relativement élevée, on utilise parfois  $\sigma_{0,02}$  ;
- $\sigma_B$  : la nouvelle limite d'élasticité apparaît après le décharge poste-élastique.

On distingue aussi les tronçons suivants :

- OC : déformation plastique "permanente";
- CD : déformation élastique "réversible";
- OD : déformation total.

Lorsque la limite d'élasticité est atteinte, il est possible de poursuivre une augmentation de chargement, le matériau se déformant alors plastiquement. En général, la valeur de la contrainte à un instant donné dépend de toutes les déformations subies auparavant par le matériau, de la vitesse et de l'ordre dans lequel ces déformations se sont produites, ainsi que de nombreux autres paramètres physiques tels que l'histoire des températures.

Il existe une multitude de lois de comportement permettant de décrire, totalement partiellement, la variété des matériaux qu'ils soient issus de la nature ou de l'industrie, elles ne suffisent cependant pas à déterminer complètement la loi de comportement d'un matériau.

Notre étude se limite au comportement élasto-plastique classique.



### III-1-4. LOI COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE

Le comportement élasto-plastique est défini pour modéliser un comportement réversible bilinéaire dans le domaine des grandes déformations, ce comportement est caractérisé par :

- L'existence d'un domaine d'élasticité où le comportement du matériau est élastique linéaire tant que les contraintes n'atteignent pas la limite d'élasticité.
- La limite d'élasticité peut être atteinte, mais en aucun cas dépassée. Quand elle est atteinte, des déformations plastiques sont susceptibles d'apparaître ou d'évoluer sous l'effet d'évolutions ultérieures du chargement.
- La création ou l'évolution des déformations plastiques s'accompagne d'énergie dissipée en chaleur, et le comportement est *irréversible* (un cycle charge-décharge hors du domaine d'élasticité produit un état final présentant des déformations et des contraintes résiduelles).

La construction d'une loi de comportement élasto-plastique nécessite la définition de trois éléments constitutifs suivants :

- Une loi élastique qui donne l'état de contrainte du matériau en fonction de son état de déformation élastique.
- Un seuil qui sépare un domaine élastique d'un domaine élasto-plastique dans lequel se produit des transformations irréversibles. Elle est définie par un des critères de plasticité
- Une loi d'écoulement qui, lorsque le seuil est dépassé, caractérise la direction de l'écoulement du matériau et son intensité dans le cas général, une partie de la déformation totale étant réversible, la loi d'écoulement ne décrit que l'évolution de la partie irréversible de la déformation.

### III- 2. LES CRITERES ISOTROPES DE LIMITE ELASTIQUE :

Pour un grand nombre de matériaux, on constate expérimentalement, que dans certaines limites, le comportement est bien élastique linéaire, mais qu'au delà il perd cette propriété. Il convient donc de vérifier si les résultats d'un calcul d'élasticité linéaire sont bien dans ces limites ou non.

Le problème de la définition d'un critère de limite élastique est aujourd'hui encore un problème non entièrement résolu. Plusieurs critères sont exposés dans plusieurs ouvrages [FOREST & al 2006], et thèses [M. BEN TAHAR 2005].

Principalement on trouve plusieurs idées de base :

- des critères basés sur les valeurs des déformations. Historiquement, ce sont les premiers apparus, ils sont abandonnés aujourd'hui;
- Des critères basés sur les valeurs des contraintes (Rankine, Tresca), Il sont très utilisés;
- Des critères basés sur les valeurs de l'énergie de déformation (Beltrami, Von-Mises). Leur traitement mathématique est assez commode, mais ne sont pas nécessairement les meilleurs vis-à-vis des confrontations expérimentales;
- Des critères expérimentaux (Caquot) Ce sont sans doute les plus fiables, dans la mesure où on ne les extrapole pas. Mais ils sont dénués de tout fondement théorique;
- Des critères réglementaires (ou normes). Ils n'ont pas toujours les fondements théoriques souhaitables, mais ils prennent en compte une certaine "expérience".

La manière la plus commode d'exprimer un critère de plasticité est de l'écrire sous la forme de l'équation  $f(\sigma, q) = 0$

La zone élastique est caractérisée par :  $f(\sigma, q) < 0$ ;

La zone plastique est caractérisée par :  $f(\sigma, q) = 0$ ;

La zone interdite est caractérisée par :  $f(\sigma, q) > 0$ .

Avec :

$q$ : représentant un paramètre (scalaire, vecteur, ou tenseur) dont la valeur n'est modifiée que lors des déformations plastiques.

$f$ : fonction scalaire appelée fonction de charge, la fonction de charge sert en quelque sorte, à mesurer l'intensité de la sollicitation subie ; elle est choisie de façon que :

$f < 0 \Leftrightarrow$  comportement élastique

$f = 0 \Leftrightarrow$  limite d'élasticité initiale du matériau.

La fonction de charge est une caractéristique physique intrinsèque de l'élément de matière, il est donc naturel de considérer  $f$  comme fonction du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  ;  $f(\underline{\underline{\sigma}})$ .

Pour le matériau isotrope, la fonction de charge  $f$  s'exprime donc en fonction de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , de façons équivalentes :

- soit comme une fonction symétrique des contraintes principales,
- soit comme une fonction des invariants de  $\sigma$ ,
- soit, compte tenu des relations entre les invariants de  $\sigma$  et ceux de (déviateur des contraintes)  $S$ , comme une fonction de  $I_1$  et des invariants  $J_2$  et  $J_3$  de  $S$ . Cette expression est indépendante de l'orientation de l'élément de matière dans l'espace et est intrinsèque au matériau.

Nous exposons deux critères plus utilisés, et ne font pas intervenir la pression hydrostatique.

### III-2-1. CRITERE ISOTROPE DE TRESCA (basé sur les contraintes)

Ce critère fut introduit par H. Tresca en 1864, à la suite d'expériences sur le plomb.

La fonction de charge correspondante s'écrit :

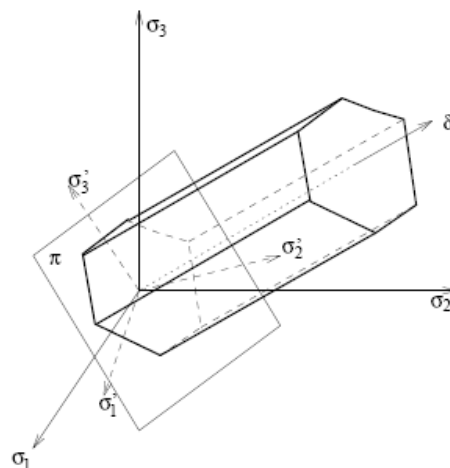
$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup \{ \sigma_i - \sigma_j - \sigma_0 \mid i, j = 1; 2; 3 \} \quad [III - 1]$$

Dans laquelle les  $\sigma_i$  désignant les contraintes principales, et où  $\sigma_0$  (dépendant d'un paramètre scalaire  $\kappa$  représente l'écrouissage) est une constante caractéristique du matériau qui a les dimensions d'une contrainte; on fait un essai de torsion pour trouver la contrainte tangentielle maximale  $\tau_e$ , ce critère s'écrit donc :  $\sup |\sigma_i - \sigma_j| \leq 2\tau_e(\chi)$

Physiquement cela signifie que le comportement du matériau demeure élastique tant que la contrainte de cisaillement sur une facette d'orientation quelconque ne dépasse pas la valeur  $\sigma_0/2$

Ceci explique son nom de "critère de scission maximale" donné au critère de Tresca.

Dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  le point représentatif est à l'intérieur d'un prisme hexagonal de directrice  $\delta$  figure (III-3)



**Figure (III-3). Représentation octaédrique du critère de Tresca**

**III-2-2. CRITERE ISOTROPE DE VON-MISES** (basé sur l'énergie)

Ce critère fut proposé indépendamment par Beltrami (1903), Huber (1904), Von-Mises (1913) et Hencky (1924). L'un des critères de limite élastique les plus utilisés pour les matériaux métalliques ductiles.

Si on décompose le tenseur de contraintes et le tenseur de déformations en parties sphérique et déviatorique, l'énergie de déformation élastique isotrope en petit déplacements peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^s + \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^d \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^d \quad [III - 2]$$

Le critère de Von-Mises vérifie en particulier la propriété d'isotropie qui doit traduire l'indépendance de l'expression du critère de plasticité de tout changement de repère, et donc  $f$  ne dépend que des invariants ( $J_1, J_2, J_3$ ) du déviateur des contraintes  $\underline{\underline{S}}$ .

La fonction de charge de Von-Mises est une expression très simple satisfaisant cette propriété :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} - k$$

où  $k$  (dépendant d'un paramètre scalaire  $\chi$  représente l'écroutissage) est une constante caractéristique du matériau, qui a les dimensions d'une contrainte.

$f$  peut évidemment s'écrire sous la forme d'une fonction symétrique des contraintes principales

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \left\{ \frac{1}{6} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right\}^{1/2} - k \quad [III - 3]$$

Il est établi en considérant l'écoulement plastique comme insensible à la pression hydrostatique est défini dans un repère de contrainte orthonormé quelconque par l'expression suivante :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \leq 2\sigma_e^2(\chi) \quad [III - 3']$$

La fonction de charge de Von-Mises est aussi le fondement de la notion de contrainte équivalente (de Von-Mises) à un état de contrainte quelconque donné, Il s'agit de la quantité  $\sigma_{eq} = \sqrt{3 J_2}$

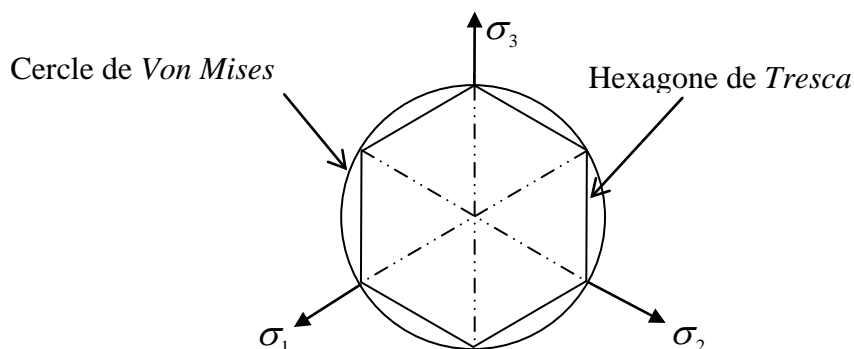
Le critère de Von-Mises est aussi appelé critère de "scission octaédriques" et on a  $\sigma_{eq} = 3 \cdot |\tau_{oct}| / \sqrt{2}$

Il s'interprète aussi, comme un critère de limitation de l'énergie élastique de distorsion.

Ce critère a le défaut de ne pas limiter les tractions ou les compressions hydrostatiques, et d'imposer que les limites en traction et en compression sont opposées. Malgré ces défauts, ce critère est souvent utilisé en raison de la simplicité de son expression.

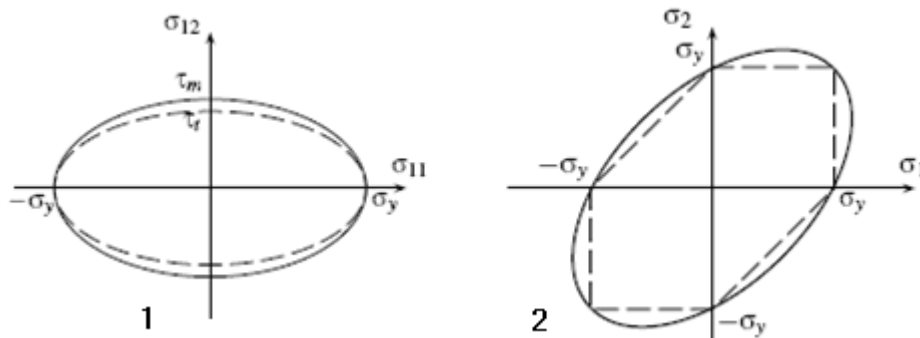
Les résultats d'expériences effectuées sur les métaux, par exemple en traction-compression et torsion, indiquent que le critère de limite d'élasticité initiale pour ces matériaux est plus proche du critère de Von-Mises que de celui de Tresca, en particulier le rapport des limites d'élasticité en traction simple et en scission simple est plus proche de  $\sqrt{3} p_3$  que de 2.

Il est remarquable que la représentation dans le plan déviateur de la surface limite de ce critère est le cylindre enveloppant le prisme de Tresca *figure (III-4)*



**Figure (III-4). Représentation octaédrique du critère de Von-Mises et Tresca**

Dans l'espace des contraintes principales, chacun de ces critères est représenté par un cylindre de génératrice (1,1,1), qui s'appuie sur les courbes définies dans le plan déviateur *figure (III-5)*.



**Figure (III-5). Critères de Tresca, et Von-Mises : 1- en traction-cisaillement, 2- en traction biaxial**

Enfin La définition d'un *domaine d'élasticité* dans l'espace des contraintes, se fait à l'aide d'un critère  $f(\sigma)$  de sorte que :

- Le domaine d'élasticité est l'ensemble des contraintes telles que  $f(\sigma) < 0$ .

De plus, pour les matériaux à comportement élasto-plastique, le critère  $f(\sigma)$  est un *seuil*.

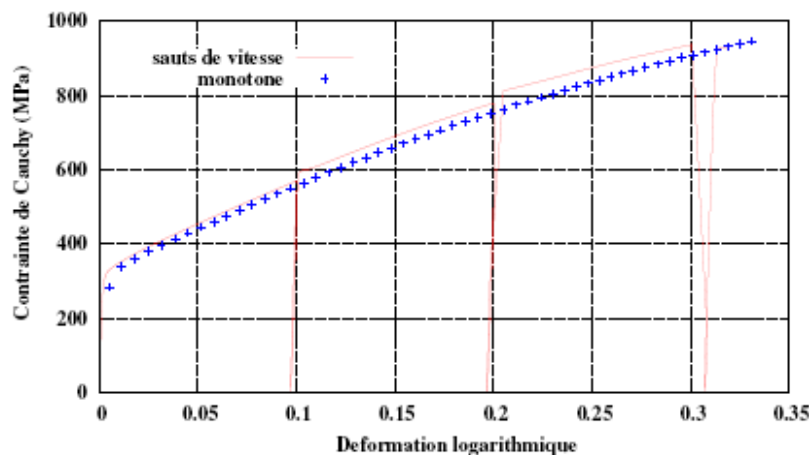
- Tout état de contrainte dans le matériau est tel que  $f(\sigma) \leq 0$ .

La variété définit, dans l'espace de dimension 6 des tenseurs de contraintes, par l'équation  $f(\sigma) = 0$  est appelée *surface seuil*.

Les déformations inélastiques subies altèrent généralement la taille et la forme du seuil. Pour rendre compte de cette modification, la fonction de charge est écrite grâce à des variables supplémentaires (les variables d'écrouissage). Il est alors nécessaire de spécifier des lois d'évolution pour ces variables.

### III- 3. PHENOMENE D'ECROUISSAGE :

Le problème de l'évolution du domaine d'élasticité est une des difficultés majeures de la plasticité, Lorsqu'on effectue une série de charges–décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la *figure (III-6)* tirée de [GALLEE 2005]. Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'écrouissage.



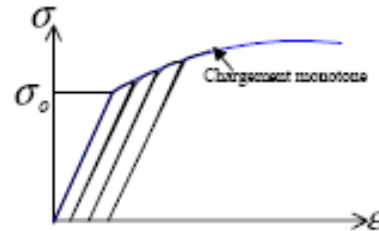
**Figure (III-6). Essai de traction Pour acier inoxydable nuance 316L composé de quatre phases charges – décharge**

Au cours du mouvement au delà du seuil de plasticité (d'écoulement) résulte un durcissement du matériau par écrouissage (source de Frank-Read), Le cycle charge décharge n'est plus parfaitement élastique, Mais par simplification nous pouvons considérer que :

- lors des chargements consécutifs la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone;
- l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité

Ces deux approximations *figure (III-7)* nous amènent à penser, que connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'écrouissage obtenue pour un chargement monotone.

Ce phénomène de plasticité engendre les différents mécanismes d'écrouissage notamment les écrouissages cinématique et isotrope.

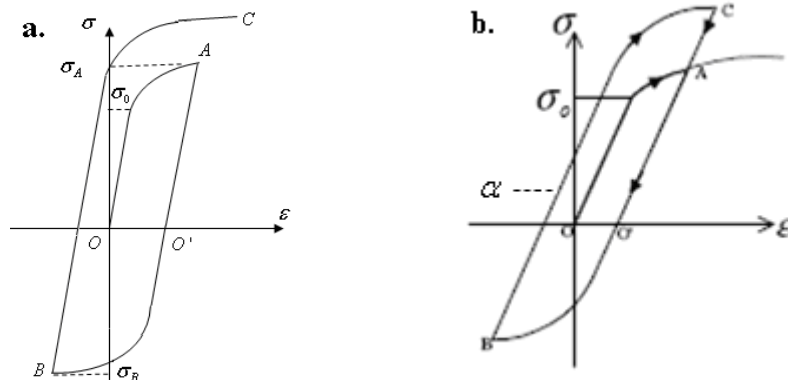


**Figure (III-7). Evolution de la limite élastique avec le niveau de chargement**

### III-3-1. ECROUISSAGE ISOTROPE

Supposant que les conditions d'épuisement en traction et en compression s'effectuent de la même manière, La *figure (III-8.a)* représente l'historique d'un cycle de chargement qui suit le trajet : **OA-AB-BC**. Après décharge nous obtenons le point **O'**, la déformation plastique est définie par **OO'**. On inverse la charge à partir du point **O'** l'écoulement plastique commencera au point **B** de contrainte  $\sigma_B = -\sigma_A$  (La limite d'élasticité en compression augmente comme celle de traction).

Dans ce cas la marge élastique  $2\sigma_y$  subit une expansion isotrope symétrique de centre **O** fixe, en plus l'isotropie est toujours conservée.



**Figure (III-8). a- écrouissage isotrope, b- écrouissage cinématique**

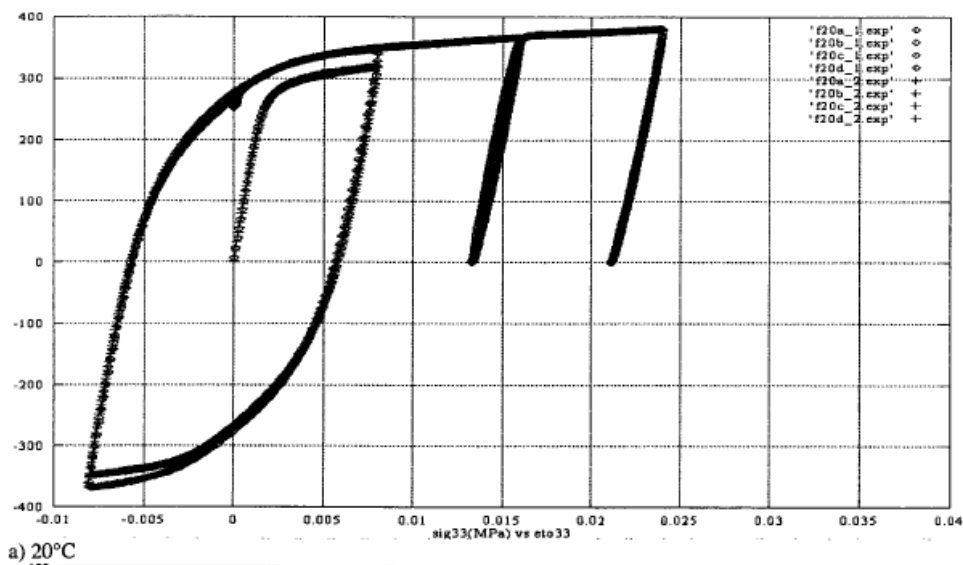
### III-3-2. ECROUISSAGE CINEMATIQUE

L'effet BAUSCHINGER est la principale manifestation de l'écrouissage cinématique. Il se traduit par un abaissement de la limite d'élasticité en compression après une sollicitation préalable en traction et vice-versa. Sur la *figure (III-8.b)* lorsqu'on inverse la charge à partir du point **O'** l'écoulement plastique commencera au point **B** de contrainte  $|\sigma_B| = \sigma_A - \alpha$ , cela veut dire que la marge élastique de  $2\sigma_y$  garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance  $\alpha = \sigma_0 - \sigma_A$  qui sera l'ordonnée du centre du segment.

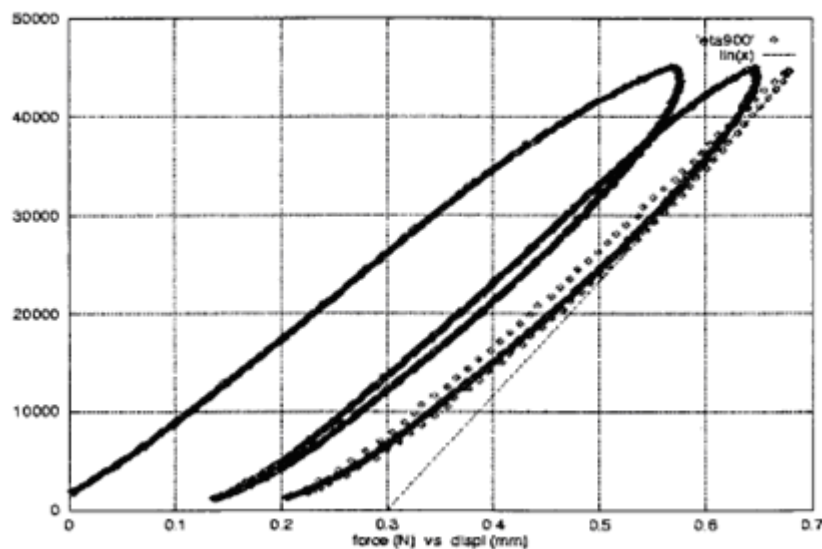
### III-3-3. ECROUISSAGE MIXTE

L'effet de BAUSCHINGER est complètement ignoré dans l'érouissage isotrope, et maximal dans l'érouissage cinématique. Cela est en contradiction avec les observations expérimentales. L'érouissage mixte est une combinaison des deux, la marge élastique subit une expansion et une transformation au même temps. La *figure (III-9)* [KERROUAULT 2001] présente la courbe d'un essai de traction-compression sur un acier inoxydable à température ambiante, où l'effet de BAUSCHINGER est remarquable, comme en peut remarquer que la forme de la courbe de décharge n'est pas toujours linéaire, mais peut être de forme hystérésis *figure (III-10)* [KERROUAULT 2001], les deux essais sont relatif à un acier inoxydable.

#### Essais de traction/compression



**Figure (III-9). Courbe expérimentale de réponse d'un matériau érouissable**



**Figure (III-10). Courbe de résultants expérimentaux de l'essai Traction – Compression à 900 °C**

### III- 4. LOIS D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE :

Ce sont les règles qui vont permettre de définir l'intensité de l'incrément de déformation plastique lorsqu'on n'est plus en élasticité. Pour généraliser les résultats précédents au cas tridimensionnel, il importe de se préoccuper également de la *direction* de l'écoulement. Cette direction doit être définie par un tenseur dans l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques.

Les *lois d'écrouissage*, définissant l'évolution du domaine d'élasticité, complètent le modèle pour le cas d'un matériau dont la résistance à la déformation évolue avec celle-ci. Elles seront abordées au prochain chapitre.

#### III-4-1. PRINCIPE DU TRAVAIL MAXIMAL

Il est souvent attribué à Hill, mais il a été discuté par Von-Mises et Taylor. Il stipule que, pour un  $d\varepsilon^p$  réel donné, le travail des contraintes réelles  $\underline{\underline{\sigma}}$  est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible  $\underline{\underline{\sigma'}}$  associé à  $d\varepsilon^p$ . Il s'écrit :

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma'}}) \otimes d\varepsilon^p > 0 \quad [III - 4]$$

Il n'est pas vérifié par tous les matériaux, en particulier par les sols. Il a des conséquences importantes concernant la direction d'écoulement plastique, la forme de la surface de charge.

#### III-4-2. REGLE DE NORMALITE

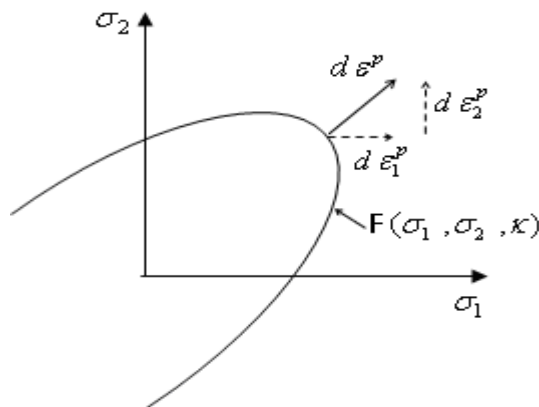
Des essais multiaxiaux sur des métaux mettent en évidence le fait que, quand le chargement est poursuivi à partir d'une contrainte située sur la surface seuil, les variations de déformation plastique s'opèrent selon des directions géométriquement orthogonales à la surface d'écoulement et vers l'extérieur de cette surface *figure (III-11)*. On cherche à construire une théorie dans laquelle on veut maximiser la puissance plastique, on est amené à introduire  $f(\underline{\underline{\sigma'}})$  tel que :

$$f(\underline{\underline{\sigma'}}) = \underline{\underline{\sigma'}} \otimes d\varepsilon^p - \lambda \cdot F \quad [III - 5]$$

On aura un point stationnaire si  $\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma'}}} = 0$ .

Ce point sera effectivement un maximum si la fonction  $F$  est convexe. On retrouve ainsi :

$$d\varepsilon^p = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad [III - 6]$$



**Figure (III-11). Illustration de la règle de normalité**

Les observations expérimentales indiquent que la condition de normalité est une hypothèse acceptable pour les métaux, on parle de la plasticité associée.

Dans le cas de la Plasticité non associée qui s'appliquent pour les matériaux, tels les matériaux géologiques (sol, roche), la direction d'écoulement est définie par référence à une autre fonction et la direction de l'écoulement n'est pas normale à la surface d'écoulement.

Nous démontrons que la règle de normalité implique la convexité de la surface de charge, et l'unicité de la solution aux frontières, cela amène à postuler que l'évolution de la déformation plastique est gouvernée par la *règle de normalité* :

- L'incrément de déformation plastique est nul lorsque les contraintes sont dans le domaine d'élasticité ( $f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$ ). Lorsqu'elles sont sur le seuil de plasticité ( $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ ), la vitesse cinématique de déformation plastique est normale extérieure au domaine de plasticité. La formulation mathématique de la règle de normalité couvrant les deux cas est :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{df}{d\underline{\underline{\sigma}}} \\ \lambda \geq 0 \\ f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \\ \lambda \cdot f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{array} \right. \quad [III - 7]$$

Le *multiplicateur plastique*  $d\lambda$  est un scalaire *a priori* indéterminé, il constitue donc une des inconnues introduites par le modèle de comportement.

La condition complémentaire  $\lambda \cdot f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$  sert à exprimer le fait que la déformation plastique n'est susceptible d'évoluer qu'à partir d'une situation telle que l'état de contrainte est sur le seuil de plasticité.

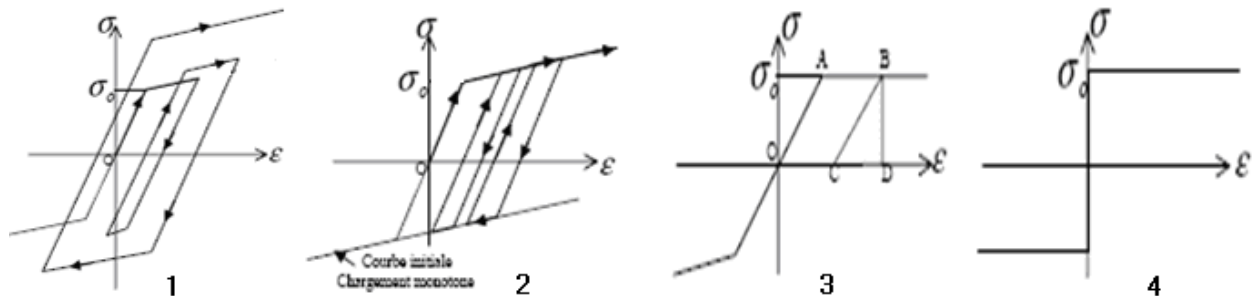
Avec  $\lambda$  : un scalaire positif appelé multiplicateur plastique représentant l'amplitude de l'écoulement plastique.



### III- 5. LOI DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE INCREMENTAL :

Pour modéliser la loi de comportement élasto-plastique (traction, compression) obtenue pour un chargement monotone le plus simple est d'utiliser un modèle construit à partir de segments de droite (modèle multi-linéaire), sont des modèles pour lesquels il existe un domaine de comportement purement réversible, autrement dit des modèles à seuil.

La loi de comportement Elasto-Plastique avec écrouissage peut être modélisée par un modèle Elasto-Plastique avec écrouissage ou bien un modèle rigide plastique avec écrouissage, si le matériau est non écrouissable, on adopte un modèle Elasto-Plastique Parfait ou bien un Modèle Rigide-Plastique Parfait, *figure (III-12)*.



**Figure (III-12). Modèles : 1-Ec Cinématique, 2-Ec Isotrope, 3-E.P.P., 4-R.P.P**

Comme la *figure (III-12)* illustre, un niveau donné de contrainte peut correspondre à une infinité de valeurs de la déformation plastique, ce qui entraîne que l'état actuel du matériau dépend de l'histoire de chargement. Donc L'évolution plastique ne peut se traduire que par des lois incrémentales reliant à un instant donné les incréments des contraintes et des déformations plastiques à partir de l'état actuel.

#### III-5-1. COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE

Le comportement élasto-plastique est décrit par recours à la théorie mathématique de plasticité (Hill 1950), et adopte une relation incrémentale entre les contraintes et les déformations.

Une loi d'écoulement associée est utilisée, ce qui signifie que le vecteur du taux de déformation plastique est supposé normal à la surface de charge, les développements présentés dans la suite de ce chapitre sont limités à la famille de comportements élasto-plastiques habituellement utilisée pour modéliser le comportements de matériaux métalliques sous charge monotone, qui vérifie les hypothèses suivantes :

- 1- Cinématique vérifiant l'hypothèse des petits déplacements;
- 2- plasticité isotherme,  $\varepsilon_0 = 0$  et  $\sigma_0 = 0$  ;
- 2- Elasticité linéaire isotrope ;
- 3- Critère de Von-Mises ;
- 4- Ecoulement plastique obéissant à la règle de normalité ;
- 5- Ecrouissage isotrope;
- 6- Le comportement dépendant de la succession des événements;
- 7- Hypothèse de partition (Décomposition de la déformation).

### III-5-2. REGLE D'ECROUISSAGE

La grande variété des comportements non linéaires se manifeste en particulier dans le durcissement (ou l'adoucissement) observé en relation avec le processus de déformation (écrouissage, endommagement). Le domaine d'élasticité sera modifié dans le cas du comportement à écrouissage positif (durcissement) ou négatif (adoucissement). Certains matériaux présentent même des évolutions durcissantes puis adoucissantes. Les lois d'écrouissage sont donc les règles qui caractérisent l'évolution du domaine d'élasticité au cours de la déformation inélastique.

Si la contrainte d'écoulement  $\sigma_y$  est constante, le matériau est élastique parfaitement plastique. Cependant il est généralement plus réaliste d'utiliser une loi d'écrouissage dans laquelle la contrainte d'écoulement varie en fonction du paramètre d'écrouissage  $\kappa$ .

La surface de charge initiale qui limite le comportement élastique est alors définie par la contrainte d'écoulement égale à la limite élastique du matériau. Lorsque cette surface est atteinte, la déformation inélastique apparaît et la loi d'écrouissage gouverne l'expansion de la surface de charge. Le déchargement à l'intérieur de la surface de charge courante est élastique.

L'écrouissage isotrope est simple mais ne convient qu'à la charge monotone car il ne tient pas compte de l'effet de Baushinger observé en pratique, où la fonction de charge est en générale s'écrit sous la forme  $f(\underline{\sigma}, y)$

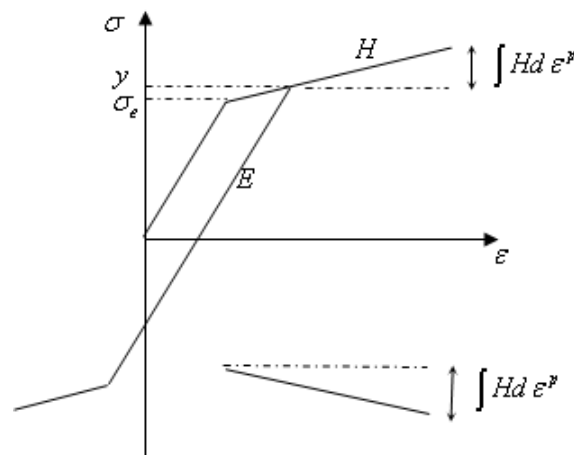
Dans le cas un-axial il s'écrit :  $f(\sigma, y) = |\sigma| - y$

$y$  est la limite élastique actuelle, elle est positive et dépend du niveau de la déformation plastique actuelle  $\varepsilon^p$  lorsqu'on analysant la *figure (III-13)* en trouve :

$$y = \sigma_e + \left| \int H \cdot d\varepsilon^p \right| \quad [III - 8]$$

$H$  c'est le coefficient de résistance plastique, c'est une caractéristique intrinsèque du matériau, il est appelé aussi module d'écrouissage, si  $H$  est constante

$$y = \sigma_e + H \cdot |\varepsilon^p|$$



**Figure (III-13). Modélisation de l'écrouissage isotrope**

Dans le cas bi-axial la fonction de charge s'agit d'une courbe délimitant une surface, dans le cas tridimensionnel c'est une surface couvrant un volume où il s'exprime par :

$$f(\underline{\sigma}, y) = \sigma_{eq} - y(\kappa) \quad [III - 9]$$

$\sigma_{eq}$  : est la contrainte équivalente de Von-Mises pour notre cas.

Prenant la valeur de déformation plastique équivalente (effective) qui mesure la longueur du trajet de déformation, et qui se définit par :

$$d\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \langle d\varepsilon^p \rangle \langle d\varepsilon^p \rangle} \quad [III - 10]$$

En utilisant le fait que :  $\left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \frac{3}{2}$ , l'équation [III-10] devient :

$$d\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \lambda \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} = \lambda \quad [III - 11]$$

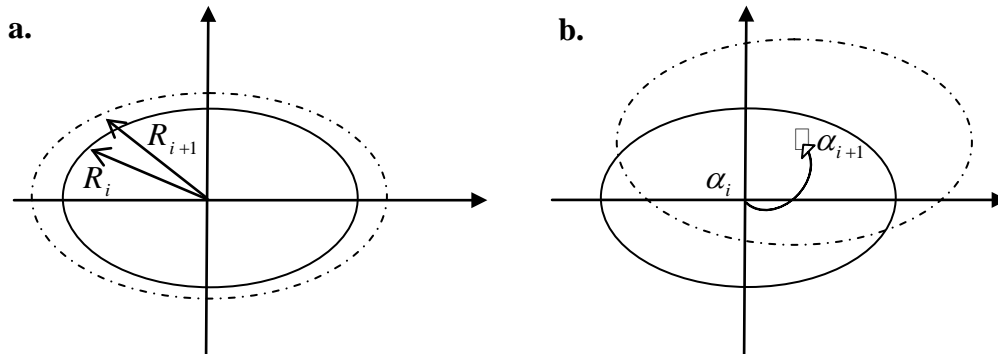
Le paramètre d'écrouissage  $\kappa$ , est en général supposé égale à la déformation plastique effective : La loi d'écrouissage liant la contrainte d'écoulement à la déformation plastique équivalente est extrapolée à partir de tests expérimentaux un-axiaux, de compression, traction, ou de flexion, et est prise en compte par différentes formes (Linéaire, Ludwick, Swift, Hollomon) nous adoptons la forme linéaire :  $y(\kappa) = \sigma_e + H \cdot \varepsilon_{eq}^p$  [III - 12]

$H$  : le module d'écrouissage d'où

$$H = \frac{d\kappa}{d\varepsilon_{eq}^p} \cdot \frac{\partial F}{\partial \kappa} \quad [III - 13]$$

L'écrouissage est isotrope, si la surface (d'écoulement) présentant la fonction de charge subit une expansion uniforme de la courbe d'écoulement initiale sans translation *figure (III-14.a)*, si la forme de la surface d'écoulement est inchangée et subit seulement des translations, l'écrouissage est purement cinématique *figure (III-14.b)*.

Les deux types d'écrouissage sont gouvernés par la même loi de l'équation [III-12].



**Figure (III-14). Évolution de surface d'écoulement: a-écrouissage isotrope, b-cinématique**

Deux Cas Particuliers :

a- Modèle élasto-plastique parfaitement plastique :

C'est un cas particulier du comportement élasto-plastique pour lequel on peut considérer que la courbe d'écrouissage présente un palier horizontal (acier doux vierge). Le palier est alors supposé illimité au delà de la limite d'élasticité. Dans ce cas,  $\sigma_e$  est une constante et  $d\sigma = 0$ .

Il est impossible de calculer  $d\varepsilon$  à partir de  $d\sigma$  même en utilisant la loi incrémentale .

b- Modèle rigide plastique :

Les modèles de type rigide plastique sont utilisés lorsqu'on se situe en grandes déformations (formage, pliage, profilage, emboutissage, usinage, crash...), et qu'on ne souhaite pas calculer les contraintes résiduelles. On peut alors négliger les déformations élastiques devant les déformations plastiques.  $\varepsilon = \varepsilon^p$

## **PARTIE B**

# **CONSTRUCTION D'UN ELEMENT DE COQUE QUADRILATERE POUR L'ANALYSE NON LINEAIRE GEOMETRIQUE ET MATERIELLE DES COQUES**

## INTRODUCTION

Dans le domaine de la mécanique des solides, la méthode des éléments finis est l'approche dominante dès sa première application à l'élasticité dans les années 50. Elle consiste en une représentation de la géométrie par un assemblage d'éléments de forme simple (les éléments finis) sur chacun duquel les champs inconnus sont approchés par des fonctions « simples » construites à partir de polynômes. Dans ce cadre, la voie la plus simple, comme nous l'adoptons dans notre travail, consiste à prendre les déplacements comme inconnue principale. Malgré la simplicité relative de l'approche par approximation du champ de déplacement, le développement d'un modèle élément fini pour l'analyse non linéaire des plaques et coques a été toujours un grand challenge, du principalement à la complexité de la théorie des coques.

Du point de vue théorique, un élément fini efficace pour l'analyse des coques doit présenter un certain nombre des caractéristiques. Il doit être :

- Général, pour l'analyse linéaire (statique et dynamique), et l'analyse non linéaire (géométrique et matérielle);
- Général, pour une géométrie arbitraire (plate, courbe, gauche, ...);
- Générale, pour les coques minces et épaisses;
- Basé sur une théorie simple (à formuler et à développer)
- Contenant six *ddl* par nœud, pour se connecter facilement au autres éléments structuraux (poutres spatiales, coques, ...);
- de forme géométrique simple;
- Converge ver la solution des coques profondes;
- Peu coûteux en temps de calcul;
- Ne présentant aucun verrouillage numérique (au cisaillement soit transversale ou dans le plan, et à la membrane);
- Ne présentant aucun mode parasite
- Capable de présenter l'état de déformation constant, et l'état de déformation nul;
- libre de tout artifice numérique (intégration réduit ou sélectif, rigidité fictives introduite, ...);
- Relativement insensible à la distorsion du maillage;
- Précis et convergeant rapidement.

En réalité, il est très difficile qu'un élément présente toutes ces qualités dans le domaine d'analyse des coques. Néanmoins, nous essayons de présenter un élément relativement simple et efficace basé sur la théorie des coques a facette plane. Il s'agit d'un élément quadrilatéral à quatre nœuds (nœuds sommet seulement), avec six *ddl*, par nœuds. Il comporte Le comportement deux rotations hors plan  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et le déplacement transversale  $w$  (a interpolation bi cubique) servant à présenter la flexion

hors plan des plaques minces, qui est basé sur l'hypothèse dite "*discrete Kirchhoff Theory*" qui suppose le cisaillement transversal nul à un certain points de l'élément. Les trois *ddl* restants sont, les deux translations  $u$ , et  $v$ , et la rotation autour de la normale au plan de l'élément  $\theta_z$ , servent à présenter le comportement en plan de membrane (le champ bilinéaire usuel est élargie bi carré en fonction de la rotation nodale  $\theta_z$ ).

En disposant ainsi d'un élément simple et robuste pour l'analyse linéaire, le développement à est ensuite étendue pour prendre en compte la non linéarité Géométrique et la non linéarité Matérielle. Les deux sont basées sur une approche incrémentale, cet aspect conduit a un développement relativement simple, basé essentiellement sur le développement en analyse linéaire, où dans ce cas on est ramené à faire un calcul linéaire à chaque position actualisée. Il faut alors, d'une part une technique d'approximation qui soit en mesure de transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques et d'autre part un algorithme de résolution qui permette de résoudre les équations algébriques non linéaires et obtenir les courbes retraçant l'évolution des déplacements au cours du temps.

## **Chapitre IV**

Développement d'un Élément Finis Coque Quadrilatère  
Avec Le Degré de Liberté Rotationnel "Drilling Rotation"  
Pour L'analyse Linéaire Élastique

**GENERALITES :**

La méthode des éléments finis est une méthode numérique qui permet de prévoir le comportement de structures avant leur réalisation effective. Les premiers pas vers la méthode des éléments finis ont été faits par Argyris qui publie en 1955 une approche unifiée de la méthode des forces et des déplacements, et Turner et Clough qui publient en 1956 une présentation systématique de la méthode des déplacements. Des éléments de membrane, de coque, de volume sont développés ensuite avec beaucoup d'ouvrages de référence édités: [ZIENKIEWICZ 1977], [GALLAGHER 1975], [BATOZ & DHATT 1990], [IMBERT 1995]. Il existe maintenant de très nombreuses méthodes d'approximation des problèmes de plaques et de coques. Cette grande diversité s'explique par :

- Le nombre des modèles continus qui varient suivant le problème traité; caractéristiques géométriques (épaisseur, courbure), petits ou grands déplacements, petites ou grandes déformations...;
- pour un modèle donné, par le nombre des formulations variationnelles possibles conduisant à des méthodes d'éléments finis déplacements, mixtes, hybrides, équilibrés...;
- pour un modèle continu donné et pour une formulation variationnelle donnée, par la variété des éléments finis bi ou tridimensionnels, triangulaires, quadrilatéraux, de degrés plus ou moins élevés, intégrations exactes ou approchées, approximations conformes ou non conformes ...etc.

La première application de la méthode des éléments finis aux coques a été faite en 1961 avec un élément à facette plane, mais la discrétisation était trop grossière et les résultats décevants. Le premier élément fini de coque de révolution à chargement de révolution apparaît en 1963, deux ans après en 1965 des programmes très généraux pour coques de révolution à chargement quelconque étaient couramment utilisés. Ensuite en 1966 le premier élément fini courbe pour coque de géométrie arbitraire fut proposé. A partir des années 60/70, la méthode des Éléments Finis a été utilisée pour la réalisation de grands projets de l'industrie (espace, et nucléaire), de nombreux essais eurent lieu avec des éléments plan et des éléments courbes, mais on se heurta aux difficultés théoriques et numériques. Il faut attendre 1975 environ pour bien comprendre, au niveau de la méthode des éléments finis, les différences entre coques à forte courbure et coques surbaissées, un tiers de siècle plus tard, dans les années 80, les grandes entreprises se dotent d'ordinateurs centraux et développent les calculs de structures avec la méthode des Éléments Finis pour des réalisations industrielles (aéronautique, automobile). Malgré des progrès considérables, il n'existe toujours pas d'élément fini de coque qui ne présente l'une ou l'autre des faiblesses. La recherche, dans ce domaine, reste ouverte.

En raison de simplicité, il est très commun de représenter des structures de coque par une composition des petits *éléments* plats (triangles, quadrilatères, ...), qui combinent la contrainte plane (membrane) et la plaque de flexion, c'est l'approximation par facettes planes. Cependant la difficulté la plus importante est d'assurer la continuité d'une facette à l'autre pour que l'énergie approximée soit suffisamment approchée à l'énergie exacte.

L'approche par facettes planes a été introduite dès 1961. Les travaux traitant cette approche sont très nombreux. Citons les travaux de BATOZ, qui en 1980 utilise cette approche en combinant les éléments de plaque en flexion (triangle *DKT*, et quadrangles *DKQ*) en théorie de Kirchhoff sous forme discrète (3 degrés de liberté par noeud sommet de l'élément  $W$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ), aux éléments de membrane (Constrant Strain Triangle *CST* et quadrangles bilinéaire *Q4*) à 2 degrés de liberté par



noeud sommet de l'élément  $u, v$ . Cet élément a obtenu de bons résultats pour des problèmes statiques et dynamiques.

Un autre élément de coque plat à 6 noeuds et 12 *ddl*, appelé *DKT12*, est aussi très souvent utilisé. Il associe un élément de membrane *CST* et un élément de flexion *DKT6*, appelé élément de Morley (flèche  $W$  aux sommets, et rotation dans le repère local aux noeuds milieux des arêtes du triangle). De la même façon, en alliant des éléments de membrane à des éléments de plaque en flexion, de nombreuses formulations d'éléments de coques plats ont été développées ( [CHINOSI 1995], [ALLMAN 1996], [BRIASSOULIS 1996], [EBERLEIN & WRIGGERS 1999], [BATOZ & al 2000], [PROVIDAS & KATTIS 2000], [BATOZ & al 2001], [KIM & al 2002], [KIM & al 2003], [ZHANG & CHEUNG 2003], [GEYER & GROENWOLD 2003], [AREIAS & al 2005], [GRUTTMANN & WAGNER 2005], [Zhang & Yang 2006], [BATTINI & PACOSTE 2006], [ÖZTORUN 2006], [KHOSRAVI & al 2008] ).

Des éléments mixtes et hybrides ainsi que des éléments dégénérés ont également été formulés à partir de cette approche ([AYAD 1993], [SEKI & ATLURI 1995], [LIU & TO 1998], [CÉSAR DE SÀ & al 2002], [GRUTTMANN & WAGNER 2005], [DARILMAZ & KUMBASAR 2006], [LU & al 2006] ).

Il faut signaler cependant quelques inconvénients de cette approche :

- limitations aux seuls éléments triangulaires si la coque discrétisée présente un fort gauchissement.
- lenteur de convergence dans le cas des problèmes sensibles aux grandes non linéarités géométriques, telles que le flambement qui peut être diminué en prenant un degré d'interpolation plus élevé;
- problème de convergence dans les cas où le couplage membrane/flexion est dominant,
- très limitée lorsqu'il est nécessaire de représenter des géométries très courbes du fait des pertes d'information dues à la discrétisation géométrique utilisée (facettes planes).

Dans la mesure où le comportement à étudier fait intervenir à la fois la membrane et la flexion, l'élément cherché est la combinaison d'un élément de membrane robuste et d'un élément de flexion performant. Dans ce chapitre nous analysons une approximation de problèmes de coques générales pour laquelle la surface moyenne est approchée par un assemblage de facettes planes quadrilatérales. La technique considérée ici pour l'approximation par éléments finis, dite «approche par déplacements», confère au champ de déplacement le statut d'inconnue principale, les autres grandeurs étant traitées comme des grandeurs secondaires. Elle conduit à chercher à exprimer, en chaque point du domaine, la contrainte  $\sigma_i$  en fonction du champ de déplacements  $U_i$ . Ce chapitre décrit la formulation d'un élément fini de coque à facette plane de géométrie quadrilatère à quatre noeuds, construit par superposition d'un élément membrane et d'un élément plaque de flexion, dont la cinématique de l'élément incorpore six composantes de déplacement : trois translations et trois rotations par noeuds. Dans le modèle à petit déplacement d'élément coque ainsi créé, les effets de membrane et de flexion ne sont pas couplés dans l'expression de l'énergie à l'intérieur de l'élément, l'interaction ne se produit que à l'interface inter éléments. Dans l'élément coque à facette plane, les forces agissantes en plan ne doivent pas affecter le déplacement hors plan et vis-versa. Enfin le but recherché ici est la construction de la matrice de rigidité élastique linéaire de l'élément coque quadrilatère à 24 *ddl*.

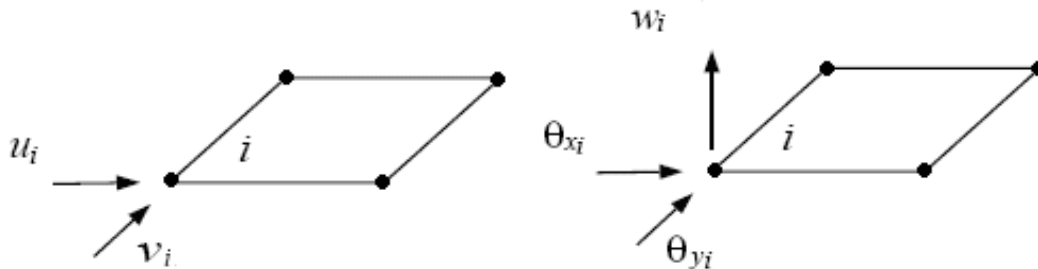
### IV- 1. CINEMATIQUE D'UNE COQUE À FACETTE PLANE :

Dans la plupart des cas, les variables nodales de l'élément coque a facette plane sont les trois composantes du déplacement  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et les deux rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  autour des axes locaux  $x$  et  $y$ . Le couplage membrane/flexion est réalisé au niveau de l'assemblage par transformation des variables nodales du repère global dans un repère local orthonormé.

Pour ce genre d'éléments, le problème principal qui peut apparaître est l'absence (sur la surface d'élément) du degré de liberté de rotation normal, qui cause la singularité dans le système des équations quand la coque devient peu profonde ou même plate.

La *Figure (IV-1)* présente un élément coque classique produit de la superposition d'un élément de membrane classique contenant deux *ddl* chaque nœud, qui sont les déplacements de translation  $u$ , et  $v$  selon les axes  $x$  et  $y$  respectivement, et un élément plaque contenant trois *ddl* chaque nœud qui sont le déplacement et les deux rotations hors plan  $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ .

L'élément obtenu est un élément avec seulement *cinq* *ddl* par noeud (2 rotations, et 3 déplacements). La sixième *ddl* qui présente la rotation des sommets au tour de l'axe normale  $\theta_z$ , n'est pas nécessaire pour la formulation élémentaire.



**Figure (IV-1). Cinématique d'un élément de coque classique à quatre noeuds**

Comme nous avons vu dans le premier chapitre, l'état de déplacement en plan est exprimé seulement par les vecteurs déplacements nodaux :  $\{U_m\}_i = \langle u_i \ v_i \rangle^T$  [IV -1]

Le vecteur forces nodales est :  $\{F_m\}_i = \langle f_{xi} \ f_{yi} \rangle^T$  [IV -2]

La formulation classique conduit à la matrice de rigidité  $[K_m]$

Où  $\{F_m\} = [K_m] \{U_m\}$  [IV -3]

De manière similaire pour la flexion l'état de déplacement hors plan est exprimé seulement par le vecteur déplacements nodaux  $\{U_f\}_i = \langle w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \rangle^T$  [IV -4]

Les forces nodales en flexion sont  $\{F_f\}_i = \langle f_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \rangle^T$  [IV -5]

Il en résulte la matrice de rigidité élémentaire  $[K_f]$ . Où  $\{F_f\} = [K_f] \{U_f\}$  [IV -6]

Le vecteur déplacement nodal est  $\{U\}_i = \langle u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \rangle^T$  [IV -7]

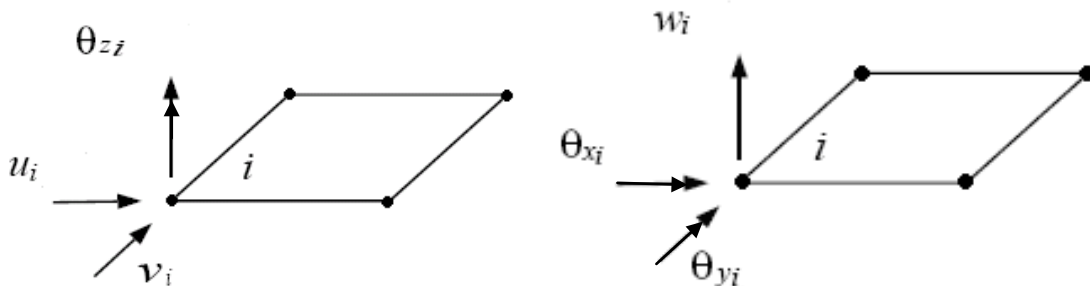
**Remarque:** La rotation de la normale au plan n'est pas prise comme paramètre nodal, la rigidité correspondante a ce paramètre est posé zéro dans sa position a la matrice de rigidité de l'élément coque produit de la superposition de  $[K_m]$  et  $[K_f]$ .

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K_m]_i & [0] & \{0\} \\ [0] & [K_f]_i & \{0\} \end{bmatrix} \quad [IV - 8]$$

Le vecteur déplacement nodal :

$$\{U\}_i = \langle u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{x_i} \ \theta_{y_i} \ \theta_{z_i} \rangle^T = \{ \langle U_m \rangle_i, \langle U_f \rangle_i, \theta_{z_i} \}^T \quad [IV - 9]$$

Bien qu'un seul élément ou même une structure plate (plaque) composée de juxtaposition de plusieurs éléments peut travailler avec 5 *ddl* par nœuds lorsque le repère local de l'élément coïncide toujours avec le repère global, l'équilibre est satisfait et la résolution est possible. Cependant ceci n'est pas le cas général des coques, où les directions locales et globales diffèrent, la structure souffre ainsi de la singularité du système des équations quand elle est devenue surbaissée ou plate (deux éléments adjacents sont coplanaires). Plusieurs techniques sont proposées pour surmonter ce problème [ZIENKIEWICZ 1977], cependant toutes ces techniques conduisent à des difficultés de programmation. La solution la plus simple et la plus commune est d'associer au sixième *ddl* qui est la rotation autour d'un axe normale au plan, une rigidité torsionnaire fictive arbitraire "faible" à chaque nœud [ZIENKIEWICZ 1977], cette dernière remplace l'équation  $0 = 0$ , par l'équation  $K \theta_z \cdot \theta_z = 0$ . Malheureusement, cette technique simple rend le comportement dans le plan sur-rigide, et conduit dans certains cas à des erreurs [JETTEUR 1986]. Afin de résoudre ce problème, des recherches pendant la dernière décennie ont été orientées vers l'interpolation du déplacement nodal lié à la rotation des sommets de l'élément autour d'un axe normale au plan de l'élément, appelée "drilling rotation", pour construire un élément coque à six *ddl* chaque nœud *Figure (IV-2)*.



**Figure (IV-2). Cinématique d'un élément de coque avec "drilling rotation" à quatre nœuds**

Le champ de déplacement est interpolé par le vecteur déplacement nodal :

$$\{U_m\}_i = \langle u_i \ v_i \ \theta_{z_i} \rangle^T \quad [IV - 10]$$

Ainsi il est possible d'appliquer une force nodale correspondant à  $\theta_z$  :

$$\{F_m\}_i = \langle f_{x_i} \ f_{y_i} \ M_{z_i} \rangle^T \quad [IV - 11]$$

Le vecteur déplacements nodaux est :

$$\{U\}_i = \langle u_i \ v_i \ \theta_{z_i} \ w_i \ \theta_{x_i} \ \theta_{y_i} \rangle^T = \{ \langle U_m \rangle_i, \langle U_f \rangle_i \}^T \quad [IV - 12]$$

Ce qui conduit à la matrice de rigidité élémentaire  $[K]_i$  tel que :

$$\{F\}_i = [K]_i \{U\}_i = \begin{bmatrix} [K_m]_i & [0] \\ [0] & [K_f]_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_m\}_i \\ \{U_f\}_i \end{Bmatrix} \quad [IV - 13]$$

## IV- 2. APPROXIMATION DE LA MEMBRANE AVEC "DRILLING ROTATION" :

Les éléments de contrainte plane qui mêlent seulement des *ddl* de translation nodaux, sont parmi les plus anciens modèles éléments finis basés sur l'approche déplacement, citons par exemple le Triangle linéaire (CST), le rectangle bilinéaire développés par (Turner & al 1956), et le quadrilatère bilinéaire développés par (Taig & al 1964). Ces éléments sont les plus couramment utilisés pour modéliser les problèmes de contrainte plane, déformation plane, est solides axisymétrique.

Cependant l'expérience montre que la rigidité de ces éléments est excessive, surtout lorsque le problème est de déformation linéaire, en plus cette sur-rigidité augmente rapidement par distorsion de maillage.

Afin d'améliorer le comportement de ces éléments, quelques approches sont utilisées :

- Intégration sélective d'énergie de cisaillement;
- modification du champ de déplacement par la technique « Assumed Strain »
- Addition des modes incompatibles par condensation statique;
- Addition des *ddl* à mi-côté pour produire un champ de déplacement d'ordre élevé (quadrilatère iso-paramétrique lagrangien à 8 et 9 nœuds);
- Augmenter le nombre de *ddl* nodaux par addition d'un *ddl* de rotation, contribuant ainsi à produire un champ de déplacement d'ordre élevé.

Les premières trois approches sont applicables seulement pour les quadrilatères, la quatrième nécessite le traitement numérique d'un nombre de nœuds élevé ( ex : [SABIR & SFENDJI 1995], [SAETHER 1996], [REDDY & KIISSNER 1997], [BARRETT 1999], [BILOTTA & CASCIARO 2002], [CHEN & al 2004], [LI & al 2004], [HEGYI & al 2006], [CEN & al 2007] ). Finalement la seule approche qui à prouver son importance est la dernière. C'est l'approche que nous adoptons dans ce travail et il sera montré que cette approche conduit à un élément fini plus performant que les éléments mentionnés ci-dessus grâce à leur interpolation bi carrée, et permet une bonne représentation des effets de membrane grâce à une faible sensibilité à la distorsion du maillage. [RENGARAJAN & al 1995], [ZHU & ZACHARIA 1996], [CHINOSI & al 1997], [GEYER & GROENWOLD 2003], [PIMPINELLI 2004], [CHOI & al 2006], [WISNIEWSKI & TURSKA 2006], [ANNABATTULA 2006], [ZHANG & al 2007].

### IV-2-1. UTILITE DU 'DDL' ROTATIONNEL DIT "Drilling Rotation"

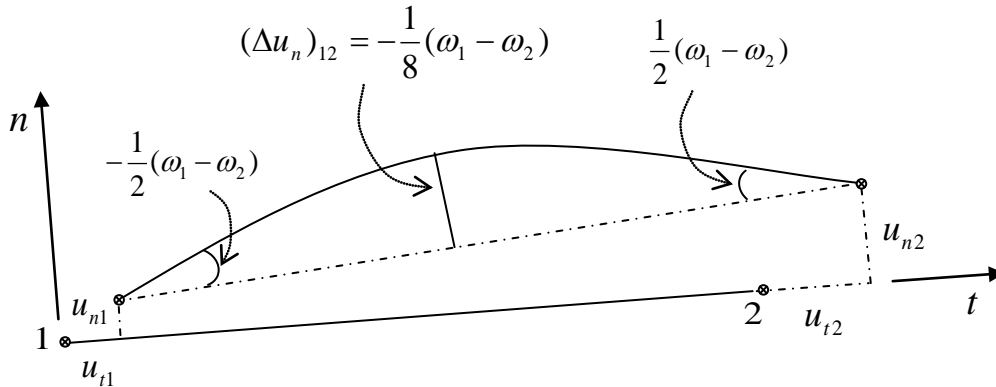
L'idée d'introduire la rotation de sommet de l'élément de membrane comme *ddl* nodale revient à l'année 1965. Les premières tentatives produisant des résultats insatisfaisantes, ont conduit à restreindre leur application au domaine bidimensionnel. Pour les problèmes tridimensionnels cette approche est complètement abandonnée, et l'introduction d'une petite raideur torsionnaire fictive à la matrice de rigidité devient la solution la plus commune pour prévoir la singularité de cette dernière. Quelques années après des chercheurs ont remarqué que le problème ne se limite pas au cas des structures coque plate ou surbaissée mais, dans certains cas, cette technique conduit à des erreurs [JETTEUR 1986]. Depuis cette date le "*Drilling Degrees of Freedom*" attire l'attention des chercheurs. Et actuellement il y a un important intérêt aux éléments finis de coque avec "*drilling degrees of freedom*". En effet l'incorporation de cette dernière a l'avantage d'améliorer le comportement en plan de l'élément de membrane, et de valoriser le comportement de l'élément de coque en générale lorsqu'elle fait partie d'une modélisation tridimensionnelle. Au contraire les éléments de coque classiques qui ne contiennent pas un *ddl* nodale de rotation torsionnaire ne peuvent pas être utilisés pour modéliser par exemple une structure mixte Voile-poteaux, ou dalle retenue par poteaux, où la rigidité des poteaux à la torsion ne peut pas se connecter à la rigidité de la

coque qui modélise la dalle. Cette tendance à introduire la rotation torsionnaire des sommets de l'élément finis de contrainte plane comme *ddl* rend l'élément de coque à facette plane un élément manipulant six *ddl* par nœud. Ceci permet de prévoir le problème de singularité de la matrice de rigidité, lors de la juxtaposition des éléments coplanaires de coque classique qui ne contient que cinq *ddl* chaque nœud.

#### IV-2-2. ROTATION DES SOMMETS ou "Vertex Rotation"

L'idée d'associer la rotation de sommet comme *ddl* nodal de l'élément membrane, est adoptée essentiellement pour éviter l'utilisation de la rigidité fictive comme solution dans les éléments coques, et améliorer en plus leur comportement dans le plan.

Après l'introduction du concept de rotation de sommet appelés "Vertex Rotation" en 1984 par [ALLMAN 1984], Cook en 1986 le donne leur interpolation géométrique en fonction de déplacement transversal du milieu du coté :



**Figure (IV-3). Interpolation du déplacement transversal**

Pour un coté de longueur  $l$  dans le système local  $(s, n)$ , Le déplacement tangent est interpolé linéaire  $u_t = \left(1 - \frac{s}{l}\right)u_{t1} + \frac{s}{l}u_{t2}$  [IV -14]

Le déplacement perpendiculaire est interpolé quadratique

$$u_n = \left(1 - \frac{s}{l}\right)u_{n1} + \frac{s}{l}u_{n2} + 4\frac{s}{l}\left(1 - \frac{s}{l}\right)\Delta u_{n12}$$
 [IV -15]

[ALLMAN 1984] donne à  $\omega$  la définition suivante :

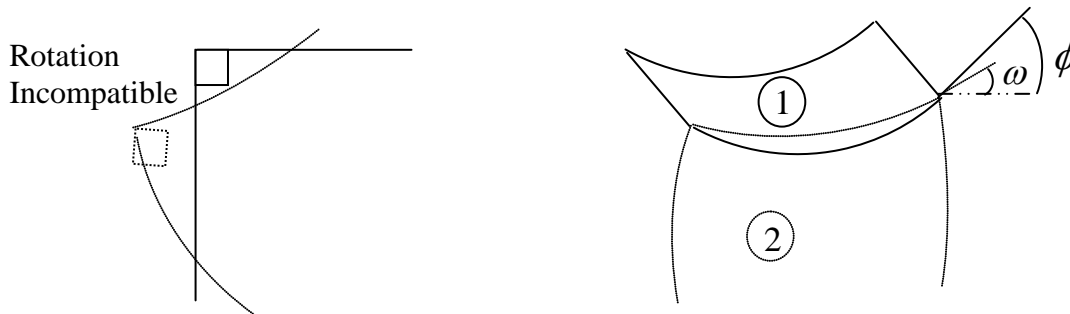
$$u_{n,s}(s = L_{12}) - u_{n,s}(s = 0) = \omega_1 - \omega_2$$
 [IV -16]

Il est clair que cette rotation  $\omega$  est différente de la vraie rotation dans le plan nommée  $\phi$ , mais  $\omega$  est toujours reliée à la vraie rotation  $\phi$ .

$u_n$  est interpolé en fonction des rotation des sommets "vertex rotation"  $\omega_1$  et  $\omega_2$  :

$$u_n = \left(1 - \frac{s}{l}\right)u_{n1} + \frac{s}{l}u_{n2} - \frac{s}{2}\left(1 - \frac{s}{l}\right)(\omega_1 - \omega_2)$$
 [IV -17]

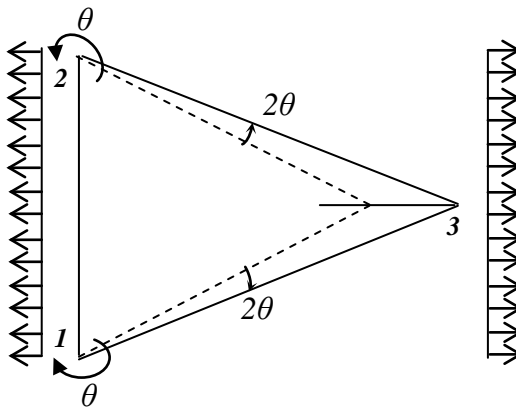
Cette interpolation assure la continuité inter éléments, et améliore le comportement dans le plan. Cependant le degré de liberté présenté n'est pas la vraie rotation du nœud «  $i$  » qui doit, dans le cas tridimensionnel, être confondu avec d'autre  $ddl$  de rotation comme le présente *Figure (IV-4)*, où  $\phi$  et  $\omega$  sont les rotations a un nœud commun à deux éléments croisés



**Figure (IV-4). Rotation de sommets incompatible**

Les éléments développés présentent une sur-rigidité dans les tests des coques tridimensionnel et les résultats sont insatisfaisants et plusieurs artifices pour assouplir les éléments sont utilisés, telle que l'intégration réduite, et les modes incompatibles.

Avant les années 1990, les auteurs qui développent des éléments avec  $ddl$  rotationnel ont été toujours considéré que la rotation  $\theta_{z_i}$  du nœud  $i$  est la moyenne des rotations des côtes de l'élément appartenant au nœud  $i$ . *Figure (IV-5)*, cette erreur est bien illustré par Irons et Ahmad en 1980, pour l'exemple de l'extension uniaxiale de l'élément de la *Figure (IV-5)*, où l'extension de l'élément donne une rotation moyenne  $\theta_z$  au nœud 3 différente de zéro, cependant l'extension pure ne doit pas produire de rotation.



**Figure (IV-5). Triangle sous l'extension unie axiale**

Généralement tous les auteurs qui traitent des éléments avec "Vertex rotation" [JETTEUR 1986], [FREY 1990] ont remarqué que l'élément "Vertex rotation" à deux défauts :

- $\omega$  n'est pas la vraie rotation;
- modes d'énergie nulle.

### IV-2-3. VRAIE ROTATION ou "Drilling Rotation"

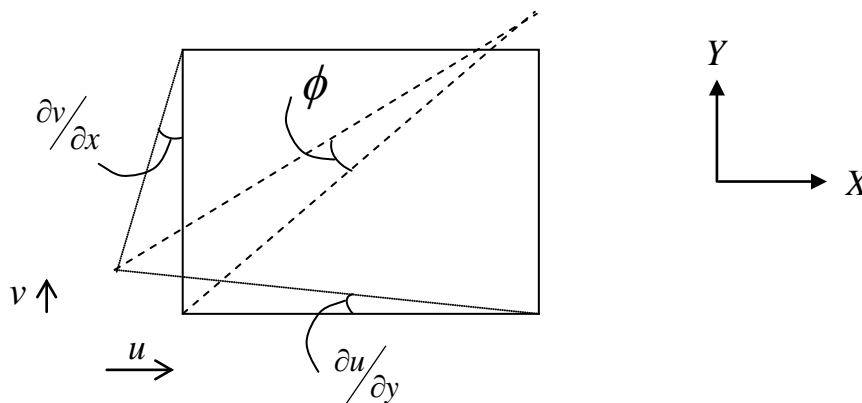
Deux approches sont apparues, l'une introduit le "drilling rotation" à l'approximation du champ du déplacement plan, l'autre introduit le "drilling rotation" à l'état variationnel comme un variable indépendant.

Les premières approches ont été proposées depuis 1985 par [BERGAN & FELIPPA 1985], et [SABIR 1985], ensuite par [JAAMEI 1988], et [FREY 1990]. Des éléments triangulaires et rectangulaires non conforme comportant le *ddl* nodal rotationnel dit "drilling rotation" basés sur des hypothèses imposés au champ de déformation "Assumed Strain" ont été développés. La vraie rotation "drilling rotation" est toujours présentée en fonction des déplacements  $u$ ,  $v$ , et les rotations des cotés. Les éléments de cette famille passent le « patch test », malheureusement ils souffrent des modes d'énergie nulle en plus de la sensibilité au distorsion de maillage [FREY 1990], Il est claire que les éléments développés souffrent du manque d'une base théorique consistante.

La deuxième approche qui a été présenté en 1990 par [IBRAHIMBEGOVIC & al 1990], adopte une formulation vibrationnelle initialement proposée par Reissner en 1965, et simplifiée par [HUGHES & BREZZI 1989], [HUGHES & al 1989, 1995], permet d'interpoler les rotations indépendamment des déplacements de translation. Contrairement à la première approche qui considère la rotation comme la moyenne des rotation des cotés du sommet (ce qui est faux), la deuxième approche utilise la définition de la mécanique des milieux continus :

$$\text{Elle est définie par : } \theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad [IV - 18]$$

C'est une valeur invariante et indépendante du système de coordonnées, leur signification physique c'est la rotation de la bissectrice de l'angle du sommet de l'élément *Figure (IV-6)*.



**Figure (IV-6). La vraie rotation "Drilling Rotation"**

La formulation variationnelle proposée utilise la composante antisymétrique du tenseur de contrainte comme un multiplicateur Lagrangien pour imposer ou "obliger" l'égalité entre la rotation indépendante et la composante antisymétrique du gradient du déplacement.

Plus tard Taylor combine la formulation variationnelle avec l'interpolation indépendante de rotation de type Allman [IBRAHIMBEGOVIĆ & al 1990], après cette date, beaucoup de travaux sont orientés vers l'investigation dans le développement des éléments avec "Drilling Rotation".

**IV-2-4. LA FORMULATION VARIATIONNELLE**

Considérons l'état d'équilibre au frontière d'un solide élastique linéaire, Formellement, la solution de ce problème est constituée d'un état élastique  $[u, \phi, S]$  où  $u$  est le champ de déplacement,  $\phi$  est le champ de rotation, et  $S$  le champ de contrainte, décrit comme suit

L'équation d'équilibre :  $div \sigma + f = 0$ ;

Condition de symétrie de contrainte :  $antisym \sigma = 0$ ;

Définition de la rotation en termes de gradient de déplacement :  $\phi = antisym(\nabla u)$ ;

L'équation constitutive :  $sym \sigma = C \cdot sym(\nabla u)$ ;

$u = \bar{u}$  aux frontières;

$sym \sigma \cdot n = \bar{s}$  aux frontières.

Sachant que :  $\sigma = sym \sigma + antisym \sigma$  et cette décomposition est unique

$sym \sigma = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^T)$ , c'est la partie symétrique du tenseur  $\sigma$ .

$antisym \sigma = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^T)$ , c'est la partie antisymétrique du tenseur  $\sigma$ .

Reissner en 1965 propose une formulation variationnelle décrivant le problème ci-dessus, qui à été modifié par [HUGHES & BREZZI 1989] et proposée sous forme faible pour simplifier le problème discret et le rendre numériquement applicable, elle est écrite sous la forme :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} sym(\nabla \delta u) \cdot C \cdot sym(\nabla u) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} (antisym(\nabla \delta u) - \delta \phi) \cdot (antisym(\nabla u) - \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \delta u \cdot f \cdot d\Omega \quad [IV - 19]$$

Où la partie symétrique du gradient de déplacement est le tenseur de déformation  $\varepsilon$  c-à-d :

$$\varepsilon = symm(\nabla u) \quad [IV - 20]$$

**IV-2-5. ELEMENT DE MEMBRANE AVEC "Drilling Rotation"**

Pour l'approximation élément fini du problème décrit par l'équation [IV-19], nous avons le choix librement de l'interpolation des champs de translations et de rotation.

En nous basant sur les travaux de [IBRAHIMBEGOVIĆ & al 1990], l'élément de membrane avec "Drilling Rotation" est obtenu en combinant l'interpolation du champ des translations [ALLMAN 1984] citée précédemment, avec une interpolation indépendante bilinéaire standard du champ de rotation, pour un quadrilatère elle prend la forme suivante :

$$\phi = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot \phi_i \quad [IV - 21]$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad [IV - 22]$$

L'interpolation du champ de déplacement de type Allman est de la forme :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 NS_k(\xi, \eta) \frac{l_{ij}}{8} (\phi_j - \phi_i) \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ S_{ij} \end{Bmatrix} \quad [IV - 23]$$



Avec :  $NS$  signifiant la fonction de forme d'interpolation de « Serendip »

$$NS_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_k \eta) \quad \text{pour } K=5,7 \quad [IV - 24]$$

$$NS_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi)(1 - \eta^2) \quad \text{pour } K=6,8$$

L'équation [IV-20] s'écrit :

$$\varepsilon = \text{Symm}(\nabla u) = \left\{ \begin{array}{c} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{array} \right\} \quad [IV - 25]$$

On utilisant la notation matricielle on peut l'écrire sous la forme :

$$\varepsilon = \text{sym}(\nabla u) = \sum_{i=1}^4 ([B_i] \{U_i\} + \{G_i\} \phi_i) \quad [IV - 26]$$

Où  $\{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$  est le vecteur des déplacements nodaux

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix} \quad [IV - 27]$$

$$\{G_i\} = \left\{ \begin{array}{c} l_{ji} C_{ji} \left( \frac{\partial NS_l}{\partial x} \right) - l_{ik} C_{ik} \left( \frac{\partial NS_m}{\partial x} \right) \\ l_{ji} S_{ji} \left( \frac{\partial NS_l}{\partial y} \right) - l_{ik} S_{ik} \left( \frac{\partial NS_m}{\partial y} \right) \\ l_{ji} C_{ji} \left( \frac{\partial NS_l}{\partial y} \right) - l_{ik} C_{ik} \left( \frac{\partial NS_m}{\partial y} \right) + l_{ji} S_{ji} \left( \frac{\partial NS_l}{\partial x} \right) - l_{ik} S_{ik} \left( \frac{\partial NS_m}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad [IV - 28]$$

Et  $\phi_i$  sont les Rotations nodales

La matrice de rigidité est obtenue par la formule classique:

$$[K] = \int_{\Omega} [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] d\Omega \quad [IV - 29]$$

Selon [IV-26],  $[\bar{B}]$  s'écrit :

$$[\bar{B}] = \{ [B_i], \{G_i\} \} \quad [IV - 30]$$

D'où

$$[K] \cdot \{q\} = \{f\}.$$

$$\text{et : } \{q\}^T = \langle u_1, v_1, \phi_1, \dots, u_4, v_4, \phi_4 \rangle.$$

Introduisant le terme de pénalisation apparu a l'équation [IV-19], qui contrôle la condition de l'équilibre assuré par le deuxième terme de l'équation [IV-19] qui doit être différent de zéro.

Cela conduit a un matrice de rigidité résultante pénalisé par  $[P]$  comme suit :

$$[K^m] = [K] + [P] \quad [IV - 31]$$

Les termes de la matrice de rigidité de pénalité  $[P]$  relie la rotation dans le plan avec les translations dans le plan, elle est évaluée comme suit :

De manière similaire a l'équation [IV-26],  $antisym(\nabla u)$  est donné par :

$$antisym(\nabla u) - \phi = \sum_{i=1}^4 (\langle b_i \rangle \{u_i\} + g_i \phi_i) \quad [IV - 32]$$

$$\langle b_i \rangle = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \quad [IV - 33]$$

$$g_i = -\frac{1}{16} \left( l_{ji} C_{ji} \left( \frac{\partial NS_l}{\partial y} \right) - l_{ik} C_{ik} \left( \frac{\partial NS_m}{\partial y} \right) \right) + \frac{1}{16} \left( l_{ji} S_{ji} \left( \frac{\partial NS_l}{\partial x} \right) - l_{ik} S_{ik} \left( \frac{\partial NS_m}{\partial x} \right) \right) - N_i \quad [IV - 34]$$

Posons alors comme [IV-30]:

$$\langle \bar{b}_i \rangle = \left\{ \langle b_i \rangle, g_i \right\} \quad [IV - 35]$$

$$[P] = \rho \int_{\Omega} \langle \bar{b} \rangle^T \langle \bar{b} \rangle \cdot d\Omega \quad [IV - 36]$$

Pour le cas de l'isotropie le choix du paramètre de pénalité de régularisation est tel qu'il est égale au module de cisaillement  $\rho = G$  [IBRAHIMBEGOVIĆ & TAYLOR 1990]. Cependant l'expérience a montré que le comportement dans le plan n'est pas vraiment sensible à la valeur de  $\rho \leq G$ , pour cela, de nouvelles études propose de choisir  $\rho$  tel que  $10^{-3} \leq \rho/G \leq 10^{-2}$ .

Voir [GEYER & GROENWOLD 2003], [WISNIEWSKI & TURSKA 2006].

Lorsque l'élément est couplé a un élément de flexion et mêlé dans une étude tridimensionnelle, la valeur optimale a choisir est  $\rho = 0.05G$  [PIMPINELLI 2004].

La matrice de rigidité est obtenue par intégration complète de 2x2 points de Gauss.

Finalement nous disposons d'une matrice de rigidité  $[K^m] = [K] + [P]$  assouplie traduisant un comportement en plan améliorée par l'introduction de  $ddl$  nodale de la vraie rotation dans le plan.

### IV- 3. APPROXIMATION DE LA FLEXION :

Le but de toute étude des éléments plaques est d'avoir un élément robuste, précis, et capable d'analyser les plaques tant minces qu'épaisses. Cependant, un élément robuste et précis doit avoir certaines caractéristiques telles que les conditions de continuité et de complétude, ce qui n'est assuré qu'à partir d'interpolation par des polynômes complets. Pour satisfaire ces conditions, beaucoup d'éléments ont été développés en se basant sur la théorie de Reissner–Mindlin où la flèche  $w$  et les rotations  $\beta_x$ , et  $\beta_y$  sont considérés indépendants, et ne nécessitent que la continuité de type  $C^0$ . (ex : [BRIASSOULIS 1996], [DUAN & al 1999], [SZE & ZHU 1999], [AYAD & al 2001], [GOSWAMI 2006], [XUAN & al 2008]).

Cependant l'extension de ces éléments à l'analyse des plaques minces est généralement à l'origine de l'augmentation de la rigidité de la structure lorsque la plaque devient mince (c'est le phénomène de blocage numérique au cisaillement transversal), ce qui ne rend ces éléments valables que pour l'analyse des plaques épaisses bien que beaucoup de solutions numériques aient été proposés : intégration réduite, sélective [REDDY & KIISSNER 1997], ou d'autres techniques (ex : [AURICCHIO & TAYLOR 1995], [WANJI & CHEUNG 2001], [OZKUL & TURE 2004]).

D'autres approches généralisent la plaque mince pour la rendre capable de traiter les coques minces et épaisses. Dans ce cas la plaque est basée sur la théorie de Kirchhoff, avec laquelle est ensuite introduite la déformation de cisaillement pour rendre le modèle capable de traiter autant les plaques minces qu'épaisses (Fricker en 1986, Long and Xi 1992, Katili 1993, et Lardeur en 1990), ex : [SOH & al 2001], [ZHANG & KIM 2006], voir aussi [BATOZ & DHATT 1990].

La théorie de Kirchhoff, a l'avantage d'être simple et fiable pour les plaques minces. Cependant, s'il y a une forte anisotropie, ou si la plaque est relativement épaisse, d'autres modèles avancés tels que la théorie des plaques épaisses de premier ordre sont exigés.

Ainsi notre travail concernera deux types de structure :

- Structures minces : pour ces structures, dont le rapport (épaisseur / longueur caractéristique  $h/L$ ) est inférieur à  $1/20$ , les effets de cisaillement transverse peuvent être négligés et la théorie de Kirchhoff s'applique. La théorie de Kirchhoff sous forme discrète apparait comme le bon choix pour une bonne analyse linéaire des coques minces;
- Structures épaisses : le rapport (épaisseur / longueur caractéristique) est de l'ordre de  $1/10$ , pour ces structures, on utilisera des éléments de plaque qui tiennent compte du cisaillement transverse. Nous nous limitons à la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin.

L'analyse linéaire des structures minces sera ensuite étendue à l'analyse non linéaire en grands déplacements, et l'analyse linéaire des structures épaisses sera étendue à l'analyse non linéaire en grandes déformations.

**IV-3-1. APPROXIMATION DES COQUES MINCE PAR "Discret Kirchhoff Théorie"**

Le modèle de Kirchhoff est directement difficile à mettre en œuvre sous forme numérique. Plusieurs modèles, dont le degré d'approximation varie suivant les méthodes de prise en compte de la courbure et des propriétés de la surface moyenne ont alors été définies : modèle de Koiter (1966), de Novozhilov, de [BERNADOU ET BOISSERIE 1982], Destuynder (1990), Bernadou (1994). La formulation des premiers éléments finis de plaque en flexion a été basée sur la théorie de plaque mince (théorie de Kirchhoff), qui néglige l'effet du cisaillement transversal.

La difficulté majeure dans l'approximation des coques minces en théorie de Kirchhoff par éléments finis est la nécessité d'assurer une continuité de type  $C^1$ . Les éléments finis conformes à polynôme réduit de Clough-Tocher (1965), ou à polynôme complet d'Argyris (1968), remplissent cette condition. Cependant ceux précis comme les éléments de type Argyris (réalisé avec une interpolation de type Hermite à l'aide de polynômes de degré cinq), comportent plusieurs difficultés techniques. Pour surmonter les difficultés techniques associées aux éléments finis conformes, on se propose d'utiliser une approximation par éléments finis non conformes de type *D.K.T/Q* (Discrete Kirchhoff Triangle/Quadrilatéral).

L'analyse de problèmes généraux de coques minces par des méthodes non-conformes d'éléments finis est une pratique courante, on trouve une grande variété d'éléments pour l'étude de la flexion des plaques [ADINI-CLOUGH 1961], [BAZELEY & al 1965], [DE VEUBEKE 1974], [MELOSH 1961], [MORLEY 1968]) et leur extension aux problèmes de plaques minces tient essentiellement à la simplicité de leur mise en œuvre.

L'idée de ces méthodes *D.K.T.* remonte aux travaux de (Wempner & al 1971). Ces méthodes ne se sont vraiment imposées qu'assez récemment, après en particulier les travaux de [BATOZ & al 1980] et [BATOZ & al 1982] et [BATOZ & BEN-TAHAR 1982], (Wempner 1981), [BATOZ & GEOFFROY 1983], Par ailleurs [KIKUCHI 1975, 1981] a effectué l'analyse numérique de ces méthodes *D.K.T/Q* pour des problèmes de plaques, cet Auteur a prouvé la convergence de ces méthodes.

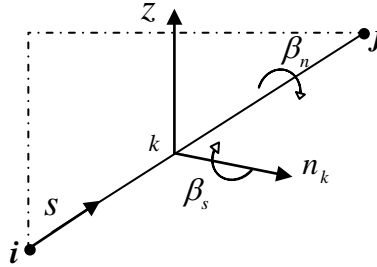
L'élément de flexion choisi pour notre travail est l'élément dit "*DKQ*". Cet élément a été présenté par plusieurs auteurs : [BATOZ & al 1980], [BATOZ & DHATT 1990], [BEN-TAHAR 1981]. Il utilise le champ de déformation qui découle du champ de déplacement de Kirchhoff, cet élément passe le patch test d'IRONS-RAZZAQUE, est montré une bonne convergence, Il est aussi peu sensible à la distorsion de maillage.

**IV-3-2. L'ELEMENT "DKO" DE PLAQUE MINCE**

Cet élément est apparu la première fois suite aux travaux de [BATOZ & BEN-TAHAR 1981], Il est dérivé sur les mêmes principes de l'élément triangulaire appelé "DKT" [BATOZ et al 1980]. Ces deux éléments sont les plus couramment utilisés pour les problèmes des plaques minces, ils sont implantés dans plusieurs codes de calcul. Depuis leur développement et jusqu'à l'heure actuelle, ces deux éléments sont parmi les meilleurs éléments finis de plaques minces, ils sont aussi la base de plusieurs travaux d'amélioration [BATOZ & al 2000], [GUO & al 2002], [RAZAQPUR & al 2003].

Pour éviter les difficultés de l'interpolation d'un champ de déplacements ( $w, \theta_x, \theta_y$ ) ou la continuité  $C^1$  est requise, nous supposons d'abord une interpolation des champs nodaux indépendants  $\beta_x$ , et  $\beta_y$  qui sont les rotations de la normale à la surface moyenne non déformée.

On considère deux rotations des côtés, l'une notée  $\beta_s$  (dans le plan  $sz$  où  $s$  est la coordonnée le long des côtés) est quadratique en  $s$ , l'autre est  $\beta_n$  (dans le plan  $nz$  où  $n$  est la direction normale aux côtés) est linéaire en  $s$  ( $n$  est dirigé vers l'extérieur de l'élément) *figure (IV-7)*.



**Figure (IV-7). Les rotations "normale et tangentielle"**

L'hypothèse de Kirchhoff est introduite sur le contour de l'élément sous la forme suivante :

$$\int_i^j \gamma_{sz} ds = \int_i^j (w_{,x} + \beta_s) ds = 0 \quad [IV - 37]$$

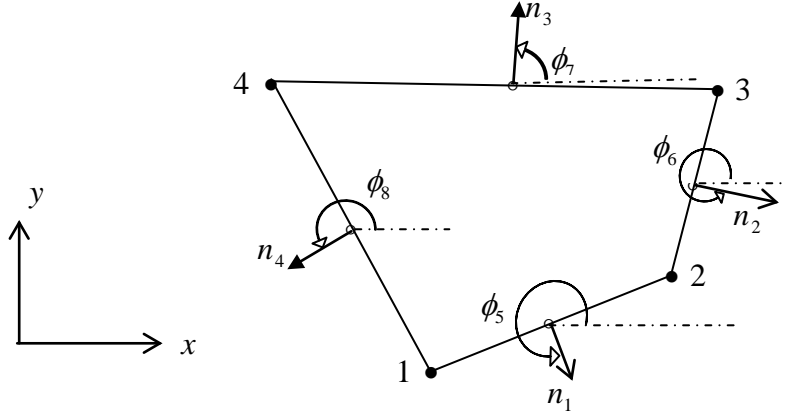
**a-** la condition de Kirchhoff est vérifiée aux sommets de l'élément par :

$$\{\gamma\}_i = \begin{Bmatrix} \beta_{xi} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \beta_{yi} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \end{Bmatrix} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad [IV - 38]$$

**b-** la condition de Kirchhoff-Love est vérifiée tangentiellement aux milieux des côtés de l'élément

$$\text{par : } \{\gamma\}_{sz} = \beta_{sk} + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_k = 0 \quad k = 5, 6, 7, 8 \quad [IV - 39]$$

Pour deux éléments adjacents ayant le côté  $[i, j]$  en commun,  $\beta_s$  est quadratique en  $s$   $\beta_n$  est linéaire en  $s$ , cette contrainte permet d'assurer la continuité à l'interface inter éléments.



**Figure (IV-8). Orientation des cotés de l'élément quadrilatère**

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} \quad [IV - 40]$$

$$C_k = \text{Cos}(\phi_k)$$

$$S_k = \text{Sin}(\phi_k)$$

L'équation [IV-40] montre une variation quadratique de  $\beta_x$ , et  $\beta_y$ .

La rotation  $\beta$  est interpolée comme suit :

$$\beta_x = -\sum_{i=1}^4 N_i (\beta_x)_i + \sum_{k=5}^8 NS_k (\beta_x)_i \quad [IV - 41]$$

L'introduction la condition de Kirchhoff aux sommets nous donne :

$$\beta_x = -\sum_{i=1}^4 N_i (w_x)_i + \sum_{k=5}^8 NS_k (\beta_x)_i \quad [IV - 42]$$

Qui s'écrit aussi :

$$\beta_x = -\sum_{i=1}^4 N_i (w_x)_i + \sum_{k=5}^8 NS_k (C_k (\beta_n)_k - S_k (\beta_s)_k)$$

L'introduction la condition de Kirchhoff aux milieux nous donne

$$\beta_x = -\sum_{i=1}^4 N_i (w_x)_i + \sum_{k=5}^8 NS_k \cdot C_k (\beta_n)_k + \sum_{k=5}^8 NS_k \cdot S_k (w_s)_k \quad [IV - 43]$$

$\beta_n$  Est linéaire en  $s$  :  $(\beta_n)_k = \frac{1}{2}((\beta_n)_i + (\beta_n)_j)$

$$\beta_x = -\sum_{i=1}^4 N_i (w_{,x})_i + \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 N_k C_k ((\beta_n)_i + (\beta_n)_j) + \sum_{k=5}^8 N_k S_k (w_{,s})_k \quad [IV - 44]$$

L'équation [IV-41] après imposition des conditions de Kirchhoff s'écrit :

$$\beta_x = -\sum_{i=1}^4 N_i (w_{,x})_i + \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 N_k C_k ((w_{,n})_i + (w_{,n})_j) + \sum_{i=5}^8 N_k S_k (w_{,s})_k \quad [IV - 45]$$

$w$  est choisi cubique le long du côté,

$$w_s = a_0 + a_1 s + a_3 s^2 + a_4 s^3 \quad [IV - 46]$$

Imposant les conditions suivantes à l'équation [IV-46]

$$\begin{cases} w_i = a_0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i = a_1 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_j = \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i + 2a_3 l + 3a_4 l \\ w_j = w_i + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i l + a_2 l^2 + a_3 l^3 \end{cases} \quad [IV - 47]$$

Avec :  $i \equiv (s = 0)$ ,  $j \equiv (s = l_{ij})$ ,  $k \equiv (s = l_{ij}/2)$

Trouvons :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_k = -\frac{3}{2} l_{ij} (w_i - w_j) - \frac{1}{4} \left( \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i - \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_j \right) \quad [IV - 48]$$

Prenant :

$$\begin{aligned} (w_{,n})_i &= S_k (\theta_x)_i - C_k (\theta_y)_i \\ (w_{,s})_i &= S_k (\theta_y)_i + C_k (\theta_x)_i \end{aligned} \quad [IV - 49]$$

Substituant [IV-48], [IV-49] dans [IV-45] et après simplification nous avons :

$$\begin{aligned} \beta_n &= \sum_{i=1}^4 N_i (\theta_y)_i + \frac{3}{2} \sum_{k=5}^8 N_k A1_k (w_i - w_j) + \\ &\quad + \sum_{k=5}^8 N_k A2_k ((\theta_x)_i - (\theta_x)_j) - \sum_{k=5}^8 N_k A3_k ((\theta_y)_i + (\theta_y)_j) \end{aligned} \quad [IV - 50]$$

$$A1_k = -S_k / l_{ij}, \quad A2_k = -\frac{3}{4} C_k S_k, \quad A3_k = -\frac{1}{2} C_k^2 + \frac{1}{4} S_k^2$$

Ce qui nous permet de écrire  $\beta_x = \langle H_x^1 \dots H_x^{12} \rangle \cdot \{U_n\}$  [IV - 51]

Avec  $\langle U_n \rangle = \langle w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \rangle$

Les fonctions  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation géométrique définie par :

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i, \quad \text{soient :}$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1$$

Les fonctions  $N_k$  sont les fonctions de forme d'interpolation quadratique définies au point milieu d'un élément quadrilatère de Serendip de l'équation [IV-24]:

$$\begin{cases} \text{pour } \xi = 0, & N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), & N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ \text{pour } \eta = 0, & N_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi), & N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \end{cases}$$

De même manière nous pouvons obtenir  $\beta_y$

$$\text{Comme l'équation [IV-51] nous écrivons } \beta_y = \langle H_y^1 \quad \dots \quad H_y^{12} \rangle \cdot \{U_n\} \quad [IV - 52]$$

$$\text{Avec } \langle U_n \rangle = \langle w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \rangle$$

Avec  $\theta_x, \theta_y$  sont les rotations autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement tel que :

$$\beta_{xi} = -\langle w_{,x} \rangle_i = \langle \theta_y \rangle_i; \quad \text{et} \quad \beta_{yi} = -\langle w_{,y} \rangle_i = -\langle \theta_x \rangle_i$$

$$\begin{cases} \beta_x \\ \beta_y \end{cases} = \begin{cases} \langle H_x^1 \quad \dots \quad H_x^{12} \rangle \\ \langle H_y^1 \quad \dots \quad H_y^{12} \rangle \end{cases} \cdot \{U_n\} \quad [IV - 53]$$

Les valeurs des  $H_x$ , et  $H_y$  sont présentés à l'annexe I.

Il ne nous reste pour obtenir la matrice de forme des déformations de courbure  $[\beta_f]$  que la substitution de  $H_{x,x}$ ,  $H_{y,y}$ ,  $H_{x,y}$ , et  $H_{y,x}$  de la manière suivante :

$$[\beta_f] = \begin{bmatrix} \langle H_{x,x} \rangle \\ \langle H_{y,y} \rangle \\ \langle H_{x,y} + H_{y,x} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} \langle H_{x,\xi} \rangle + j_{12} \langle H_{x,\eta} \rangle \\ j_{21} \langle H_{y,\xi} \rangle + j_{22} \langle H_{y,\eta} \rangle \\ j_{11} \langle H_{y,\xi} \rangle + j_{12} \langle H_{y,\eta} \rangle + j_{21} \langle H_{x,\xi} \rangle + j_{22} \langle H_{x,\eta} \rangle \end{bmatrix} \quad [IV - 54]$$

Avec  $j_{ij}$  sont les termes de l'inverse du Jacobien de la transformation géométrique.

L'obtention de la matrice de rigidité de l'élément  $DKQ$  nécessite l'intégration complète par schéma de 2 x 2 points de gauss.



### IV-3-3. APPROXIMATION DES COQUES EPAISSES

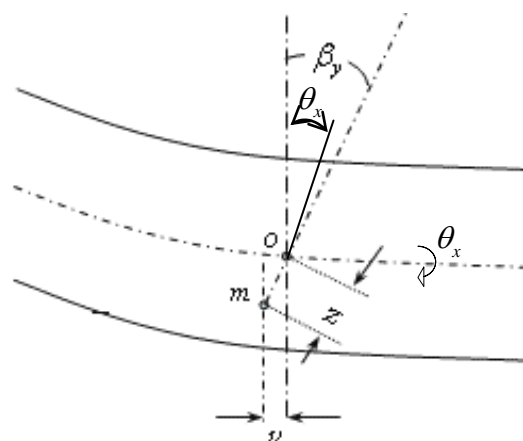
Le choix de la théorie de coque épaisse est préférable pour l'analyse non linéaire matérielle (grandes déformations), Dans le cadre de la théorie des plaque épaisses, la théorie de Hencky-Reisner-Mindlin est la plus répondeue. Par souci de simplicité, des travaux considérables de recherches ont été orientés vers la théorie de Reissner/Mindlin [NZENGWA & SIMO 1999], [HAN & LIEW 1999], [BUCZKOWSKI & TORBACKI 2001],[AYAD & al 2001],[DUAN & LIANG 2003],[WANG & HU 2006]. Cependant ces théories ne sont pas suffisantes si l'exactitude dans le calcul des efforts transversaux est recherchée. Pour cette raison, des théories plus avancées ont été développées pour augmenter l'exactitude des évaluations numériques du cisaillement transverse, les théories d'ordre élevé ont été également employées [KOZIEY & MIRZA 1997], [XIAO & al 2007], [DEMASI 2007].

Les avantages de cette théorie est qu'elle permet l'indépendance entre la flèche et les rotations, en plus, elles exigent seulement la continuité  $C^0$ . Cependant, la discrétisation directe de ces modèles de Reissner/Mindlin dans l'approche déplacement par des méthodes d'éléments finis conformes conduit à des instabilités numériques dès que l'épaisseur de la plaque devient trop petite (Verrouillage en Cisaillement). La théorie de la plaque épaisse propose une alternative plus réaliste que la théorie de Kirchhoff. Elle prend en compte les déformations de cisaillement, qui modifient largement les principes d'élaboration des éléments de plaque. En effet, leur formulation est basée sur l'approximation de trois champs indépendants, le déplacement transversal, et les deux rotations. Par ailleurs, leurs conformité ne requiert que la continuité  $C^0$  du champ de déplacements ce qui ne pose pas de problème particulier. C'est (Wempner & al 1971). (Wempner 1981), [NAGHDI 1963,1972], [BATOZ & GEOFFROY 1983] qui donnent la base à la théorie des plaques épaisses.

L'élargissement du champ d'utilisation de ces éléments comparé à celui des autres méthodes, provient essentiellement de la possibilité de traiter, avec un même modèle discret les problèmes de plaques épaisses et plaques minces à la fois (la normale à la surface moyenne de la plaque demeure droite après déformation mais pas nécessairement normale à la surface moyenne) *figure (IV-9)*.

Notre choix est un quadrilatéral de J.L BATOZ appelé Q4 $\gamma$  présenté dans [BATOZ & DHATT 1990], pour l'approximation du déplacement transverse, c'est un élément conforme qui passe le patch test et ne présente pas de blocage en cisaillement et converge vers son homologue "minces" lorsque l'épaisseur diminue.

**Figure (IV-9).**  
**Cinématique de la théorie**  
**de Reissner-Mindlin**



#### **IV-3-4. L'ÉLÉMENT Q4 $\gamma$ (élément à 4 nœuds avec CT constant par côté)**

Dans l'approche déplacement, pour éviter le blocage des éléments en cisaillement transverse (surestimation de la rigidité pour des épaisseurs faibles), une méthode consiste à construire des champs de cisaillement de substitution constants sur les bords de l'élément, dont la valeur est l'intégrale du cisaillement sur le bord en question. Cette façon de dériver le champ de cisaillement transverse conduit à ne pas bloquer en cisaillement transverse. Ce blocage en cisaillement vient du fait que l'énergie élastique de cisaillement est un terme proportionnel à  $h$  et il est plus grand que le terme d'énergie élastique de flexion qui est proportionnel en  $h^3$ , quand l'épaisseur devient faible devant la longueur caractéristique.

Nous décrivons ici l'élément Q4 $\gamma$  développé par J.L BATOZ [BATOZ & DHATT 1990]. C'est un élément conforme quadrilatéral avec cisaillement transversal constant par côté généralement appelé Q4 $\gamma$  qui présente la simplicité de formulation et l'économie en temps de calcul par ordinateur. En plus il ne présente aucun blocage en cisaillement transversal. Il nécessite, cependant un maillage fin pour converger vers la solution exacte, ce qui est en concordance avec la modélisation des structures à comportements non linéaires (grandes déformations), parce que dans le cas où il y a des singularités ou de forts gradients de contraintes, il est souvent préférable de remplacer un petit nombre d'éléments à haut degré d'interpolation par un grand nombre d'éléments à faible degré d'interpolation. Cet élément est isoparamétrique à interpolation complète et on peut voir en détail la construction de la matrice de rigidité des éléments iso-paramétriques se trouve exposée dans [BARRETT 1999], [OZKUL & TURE 2004].

Considérons une approximation bilinéaire de la flèche  $w$ , et la rotations  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  qui constituent les variables du vecteur déplacements nodaux  $\{U_n\}$  tel que :

$$\{U_n\} = \langle w \quad \beta_x \quad \beta_y \rangle \quad [IV - 55]$$

La matrice de rigidité est définie sur la base des équations [I-19], [I-20] comme suit :

$$[K] = [K_f] + [K_c] \quad [IV - 56]$$

Avec:

$$\begin{cases} [K_f] = \int_A [B_f]^T \times [H_f] \times [B_f] dA \\ [K_c] = \int_c [B_c]^T \times [H_c] \times [B_c] dA \end{cases} \quad [IV - 57]$$

Les variables  $w$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  s'écrivent en fonction des variables nodaux comme suit :

$$W = \sum N_i W_i, \quad \beta_x = \sum N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum N_i \beta_{yi}$$

En utilisant les fonctions d'interpolation  $N_i$  linéaires du quadrilatère iso paramétrique de Lagrange.

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \partial\beta_x/\partial x \\ \partial\beta_y/\partial y \\ \partial\beta_x/\partial y + \partial\beta_y/\partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial N/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial N/\partial y \\ 0 & \partial N/\partial y & \partial N/\partial x \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} W \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad [IV - 58]$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & N & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & N \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} W \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad [IV - 59]$$

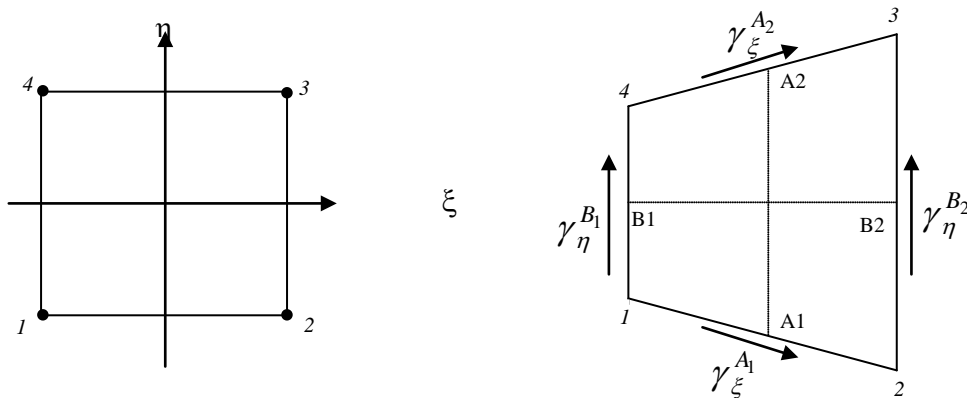
$$\text{Soit : } \{\chi\} = [B_f] \times \{U_n\}$$

$$\text{Où : } [B_f] = \begin{bmatrix} 0 & \langle \partial N \rangle / \partial x & 0 \\ 0 & 0 & \langle \partial N \rangle / \partial y \\ 0 & \langle \partial N \rangle / \partial y & \langle \partial N \rangle / \partial x \end{bmatrix} \quad [IV - 60]$$

$$\text{Aussi : } \{\gamma\} = [B_c] \times \{U_n\}$$

$$\text{Où : } [B_c] = \begin{bmatrix} \langle \partial N \rangle / \partial x & \langle N \rangle & 0 \\ \langle \partial N \rangle / \partial y & 0 & \langle N \rangle \end{bmatrix} \quad [IV - 61]$$

Considérons maintenant que le cisaillement transversal est constant par côté

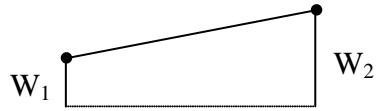


**Figure (IV-10). Champ du Cisaillement Transverse**

$$\gamma_\xi = \gamma_{\xi z} \quad \gamma_\eta = \gamma_{\eta z}$$

Où  $\gamma_\xi$  et  $\gamma_\eta$  sont évalués aux milieux des côtés

L'approximation de  $w$  est linéaire :

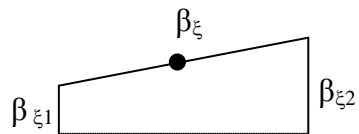


$$W = a + \left( \frac{W_2 - W_1}{L} \right) \xi, \text{ dans la base } \xi : L = 2$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{W_2 - W_1}{2}$$

$$\gamma_\xi = \frac{\partial W}{\partial \xi} + \beta_\xi$$

$\beta_\xi$  est aussi linéaire



$$\text{au milieu } \beta_\xi = \frac{\beta_{\xi 2} + \beta_{\xi 1}}{2}$$

$$\text{Donc: } \gamma_\xi^{A_1} = \frac{1}{2} (W_2 - W_1 + \beta_{\xi 1} + \beta_{\xi 2})$$

De même:

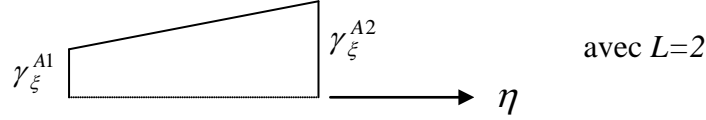
$$\gamma_\xi^{A_2} = \frac{1}{2} (W_3 - W_4 + \beta_{\xi 3} + \beta_{\xi 4})$$

$$\gamma_\xi^{B_1} = \frac{1}{2} (W_4 - W_1 + \beta_{\eta 1} + \beta_{\eta 2})$$

$$\gamma_\xi^{B_2} = \frac{1}{2} (W_3 - W_2 + \beta_{\eta 2} + \beta_{\eta 3})$$

La déformation de CT  $\gamma_{\xi z}$  est linéaire en  $\eta$

$\gamma_{\xi}^{A_1}$  et  $\gamma_{\xi}^{A_2}$  sont constantes



$$\gamma_{\xi z} = A + \left( \frac{\gamma_{\xi}^{A_2} - \gamma_{\xi}^{A_1}}{2} \right) \eta$$

$$\eta = -1 \quad \gamma_{\xi z} = \gamma_{\xi}^{A_1} \Rightarrow \frac{\gamma_{\xi}^{A_1}}{2} - \frac{\gamma_{\xi}^{A_2}}{2} + A = \gamma_{\xi}^{A_1}$$

$$\eta = 1 \quad \gamma_{\xi z} = \gamma_{\xi}^{A_2} \Rightarrow \frac{\gamma_{\xi}^{A_2}}{2} - \frac{\gamma_{\xi}^{A_1}}{2} + A = \gamma_{\xi}^{A_2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\gamma_{\xi}^{A_1} + \gamma_{\xi}^{A_2}}{2}$$

$$\gamma_{\xi z} = \frac{1-\eta}{2} \gamma_{\xi}^{A_1} + \frac{1+\eta}{2} \gamma_{\xi}^{A_2}$$

De même:

$$\gamma_{\xi z} = \frac{1-\eta}{2} \gamma_{\xi}^{B_1} + \frac{1+\eta}{2} \gamma_{\xi}^{B_2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{\xi} \\ \dots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{\xi z} \\ \dots \\ \gamma_{\eta z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1-\eta}{2} \gamma_{\xi}^{A_1} + \frac{1+\eta}{2} \gamma_{\xi}^{A_2} \\ \dots \\ \frac{1-\xi}{2} \gamma_{\eta}^{B_1} + \frac{1+\xi}{2} \gamma_{\eta}^{B_2} \end{array} \right\} \quad [IV - 62]$$

$\gamma_{\xi}$  : C'est les déformations de cisaillement transversal constant par côté, c'est aussi la valeur

moyenne du CT sur le côté

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{\xi}^{A_1} \\ \dots \\ \gamma_{\xi}^{A_2} \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \int_0^l \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} + B_{\xi} \right) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} + B_{\xi} \right) d\xi = \frac{W_2 - W_1}{2} + \frac{1}{2} (B_{\xi_1} + B_{\xi_2})$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{\xi}^{A_2} \\ \dots \\ \gamma_{\xi}^{A_3} \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \int_0^l \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} + \beta_{\xi} \right) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} + \beta_{\xi} \right) d\xi = \frac{W_3 - W_4}{2} + \frac{1}{2} (\beta_{\xi_3} + \beta_{\xi_4}) \quad [IV - 63]$$

$$\begin{cases} \gamma_{-\eta z}^{B_1} = \frac{1}{L} \int_0^l \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} + B_\eta \right) d_\eta = \frac{W_4 - W_1}{2} + \frac{1}{2} (B_{\eta_1} + B_{\eta_4}) \\ \gamma_{-\eta z}^{B_2} = \frac{1}{L} \int_0^l \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} + B_\eta \right) d_\eta = \frac{W_3 - W_2}{2} + \frac{1}{2} (B_{\eta_2} + B_{\eta_3}) \end{cases} \quad [IV - 64]$$

En reliant  $(\gamma_{\xi})$  à  $(\gamma_{\xi})$  le long de chaque côté par

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \left( \gamma_{-\xi z} - \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} + B_\xi \right) \right) d_\xi = 0 \quad \text{sur le côté (1-2) et (3-4)} \\ \int_{-1}^1 \left( \gamma_{-\eta z} - \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} + B_\eta \right) \right) d_\eta = 0 \quad \text{sur le côté (2-3) et (4-1)} \end{cases} \quad [IV - 65]$$

Passons de l'élément de référence vers l'élément réel par :

$$\left\{ \gamma_x \right\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [j] \left\{ \gamma_\xi \right\} \quad [IV - 66]$$

L'équation [IV-62] s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \gamma_{\xi z} \right\} = \begin{Bmatrix} \left\langle \dots \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} 0 \dots \right\rangle \{U_{n\xi}\} \\ \left\langle \dots \frac{\partial N_i}{\partial \eta} 0 \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \dots \right\rangle \{U_{n\xi}\} \end{Bmatrix} \quad [IV - 67]$$

$$\{U_{n\xi}\}^T = \langle W_1 B_{\xi_1} B_{\eta_2} \dots W_4 B_{\xi_4} B_{\eta_4} \rangle$$

D'après l'équation [IV-65]

$$\gamma_{\xi z} - \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} + B_\xi \right) = 0$$

$$\gamma_{\eta z} - \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} + B_\eta \right) = 0$$

$$\left\{ \gamma_\xi \right\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial \xi} + B_\xi \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} + B_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \dots \\ \dots \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots \end{bmatrix} \times \{U_{n\xi}\}$$

$$\text{Qui s'écrit : } \left\{ \gamma_\xi \right\} = [B'_\xi] \{U_{n\xi}\} \quad [IV - 68]$$

## **Chapitre V**

# **Développement de L'élément Pour L'analyse Non Linéaire Géométrique et Matérielle**

**GENERALITES :**

D'une manière pratique, lors de l'évolution du solide, en raison des différents non linéarités (grandes déplacements, et loi de comportement non linéaire), la détermination des contraintes et des déformations subies par le domaine matériel s'effectue en général à l'aide d'une méthode de résolution incrémentale. Il s'agit de l'augmentation progressive de la sollicitation, et de l'obtention de manière incrémentale de la réponse non linéaire de la structure. Cette méthode revient à satisfaire les équations d'équilibre en une suite discrète, de temps distincts, correspondant à l'application successive d'accroissements de sollicitations, ensuite une configuration  $C_{(t+\Delta t)}$  en équilibre, est déterminée à partir d'une configuration  $C_t$  considérée comme connue. Cette manière de procéder permet de ramener le problème non linéaire à une séquence des problèmes linéaires.

Pour ce faire, on fait appel à la théorie non linéaire de la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement du système physique grâce à des équations aux dérivées partielles. Cependant jusqu'à présent, nous avons considéré le corps solide comme un milieu continu caractérisé par un ensemble de variables cinématiques et mécaniques. Comme on peut le constater, les équations obtenues sont très compliquées et la solution exacte est très difficile à obtenir. On essaye donc de trouver une solution numérique du champ inconnu en utilisant une technique d'approximation permettant de remplacer le système continu par un système discrétisé équivalent. Il faut alors une technique d'approximation qui transforme les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.



## V- 1. ANALYSE NON LINEAIRE GEOMETRIQUE :

Cette partie est consacrée à la construction de l'élément finis de coque dans le cadre de l'analyse non linéaire géométrique en Description Lagrangienne Corotationnelle D.L.C (évaluation de la matrice de rigidité tangente, vecteur forces internes, et forces résiduelles de déséquilibre). [IMAI & FRANGOPOL 2000], [ZHANG & CHEUNG 2003], [ZIENKIEWICZ 1977].

Ainsi la résolution d'ensemble des équations algébriques traduisant l'état d'équilibre d'un milieu continu par la méthode des éléments finis nécessite la discrétisation de l'expression d'équilibre. Toutes les expressions écrites ci-dessous sont valables soit pour la D.L.A, soit pour la D.L.A.A, ou la D.L.C. Seule la configuration de référence change, elle n'est pas globale mais chaque élément a une configuration de référence propre et indépendante des autres éléments.

### V-1-1. DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

L'approche "Incrémentale" permet d'analyser les problèmes géométriquement non linéaires par éléments finis. La réponse non linéaire de la structure est obtenue "Incrémentalement", c'est à dire pas à pas, par augmentation progressive de la sollicitation. Il est clair qu'il faut trouver l'expression discrétisée de l'équilibre pour chaque état déformé :

$$\int_{t_v} {}^t T_{ij} \cdot \delta_t \varepsilon_{ij} \cdot d^t v = {}^t W_{ext} \quad [V - 1]$$

Aussi l'équilibre énergétique évalué de manière itérative entre  $t$  et  $t+\Delta t$  doit être vérifié quelque soit le point matériel  $M$  de la structure. L'utilisation de la méthode d'approximation par Eléments Finis est alors employée pour évaluer la solution aux seuls  $N$  nœuds du maillage. L'application du principe des déplacements Virtuelles consiste à vérifier l'équilibre entre les efforts intérieurs  $\{ {}^{t+\Delta t} F \}$  et extérieurs  $\{ {}^{t+\Delta t} P \}$  relatifs aux termes respectivement gauche et droite de l'équation [V-1].

La technique considérée ici pour l'approximation par éléments finis, dite « approche par les déplacements », confère au champ de déplacement le statut d'inconnue principale, les autres grandeurs étant traitées comme des grandeurs secondaires. Elle conduit à chercher à exprimer, en chaque point du domaine, le champ du déplacement en fonction des déplacements *nodaux*  $\{ q_\alpha \}$  par l'intermédiaire des fonctions de formes. Leur forme discrète s'exprime en générale par :

$${}^t U_i = \sum N_{i\alpha} \cdot ({}^n x_j) {}^t_n q_\alpha \quad [V - 2]$$

Et ceci sur la configuration initiale ou actuelle, où :

$n$  : défini la configuration initiale pour  $n = 0$ , et la configuration actuelle pour  $n = t$ .

Nous devons aussi exprimer le tenseur de déformation en fonction du champ de déplacement discrétisé, qui est fonction de la variation est de la dérivée du champ de déplacement.

La variation du déplacement a l'intérieur de l'élément (1-58) est donnée par :

$$\delta ({}^t U_i) = \sum N_{i\alpha} ({}^n x_j) (\delta {}^t_n q_\alpha) \quad [V - 3]$$

La dérivation du déplacement a l'intérieur de l'élément (1-58) est donnée par :

$${}^t U_{i,k} = \sum N_{i\alpha,k} ({}^n x_j) {}^t_n q_\alpha \quad [V - 4]$$

### V-1-2. EXPRESSION DISCRETISEE DE L'EQUILIBRE EN "D.L.A"

C'est l'expression discrétisé de l'équilibre qui nous permet la résolution d'un système matriciel où les  $N$  déplacements nodaux sont les inconnues à déterminer. Celui-ci s'écrit :

$${}^{t+\Delta t} [K_n] \{ {}^{t+\Delta t} U_n \} = \{ {}^{t+\Delta t} F_n \} \quad [V - 5]$$

Il est clair que le point de départ de toute analyse incrémentale est une expression incrémentale appropriée de l'équilibre, qu'est dans le cas de l'approche déplacement basée sur le principe des déplacements virtuels.

Alors, l'état d'équilibre est caractérisé par un minimum de l'énergie qui est exprimé sous la forme standard :

$$\delta\pi = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad [V - 6]$$

Soit, d'après le principe des travaux virtuels pour la configuration actualisé  $C_{(t)}$ :

$$\int_{t_v} ( \underset{(B)}{{}^t T_{ij}} \cdot \delta \underset{(A)}{{}^t \varepsilon_{ij}^{NL}} + C_{ijkl} \cdot \underset{(A)}{{}^t \varepsilon_{kl}} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t \varepsilon_{ij}} ) d^t v = \underset{(C)}{{}^{t+\Delta t} W_{\text{ext}}} - \int_{t_v} \underset{(D)}{{}^t T_{ij}} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t \varepsilon_{ij}} \cdot d^t v \quad [V - 7]$$

Décomposons cette expression incrémentale de l'équilibre en D.L.A en plusieurs parties et trouvons leurs expressions discrétisées.

#### V-1-2-a. Matrice de rigidité des petits déplacements en "D.L.A"

$$(A) = \int_{t_v} C_{ijkl} \cdot \underset{(A)}{{}^t \varepsilon_{kl}} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t \varepsilon_{ij}} \cdot d^t v \quad [V - 8]$$

Sachant que l'accroissement du tenseur de déformation en fonction de valeurs nodales du champ de déplacement est :  $\delta \underset{(A)}{{}^t \varepsilon_{ij}} = \underset{(A)}{{}^t B_{ij\alpha}} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t q_\alpha}$

$$(A) = \int_{t_v} C_{ijkl} \cdot \underset{(A)}{{}^t B_{kl\alpha}} \cdot \underset{(A)}{{}^t B_{ij\beta}} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t q_\alpha} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t q_\beta} \cdot d^t v \quad [V - 9]$$

$$(A) = \underset{(A)}{{}^t K_{\alpha\beta}} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t q_\alpha} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t q_\beta}$$

$$\text{Avec : } \underset{(A)}{{}^t K_{\alpha\beta}} = \int_{t_v} C_{ijkl} \cdot \underset{(A)}{{}^t B_{kl\alpha}} \cdot \underset{(A)}{{}^t B_{ij\beta}} \cdot d^t v \quad [V - 10]$$

$\underset{(A)}{{}^t K_{\alpha\beta}}$  Représente la matrice de rigidité des petits déplacements définie à la date  $(t)$  par rapport à la configuration actuelle.

#### V-1-2-b. Matrice de rigidité géométrique (des contraintes initiales) en "D.L.A"

$$(B) = \int_{t_v} \underset{(D)}{{}^t T_{ij}} \cdot \delta \underset{(A)}{{}^t \varepsilon_{ij}^{NL}} \cdot d^t v \quad [V - 11]$$

$$(B) = \underset{(A)}{{}^t K_{\alpha\beta}^\sigma} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t q_\alpha} \cdot \delta \underset{(D)}{{}^t q_\beta}$$

Avec :

$$\underset{(A)}{{}^t K_{\alpha\beta}^\sigma} = \int_{t_v} \underset{(D)}{{}^t T_{ij}} \left( \underset{(A)}{{}^t B_{ij\alpha}^{NL}} \cdot \underset{(A)}{{}^t B_{ij\beta}^{NL}} \right) d^t v \quad [V - 12]$$

La contrainte étant définie par rapport à  $(t)$  c'est donc celle de Cauchy.

$\underset{(A)}{{}^t K_{\alpha\beta}^\sigma}$  : représente la matrice des contraintes initiales définies à la date  $(t)$  par rapport à la configuration actuelle, elle est appelée aussi matrice de rigidité géométrique parce qu'elle résulte de la relation géométrique du deuxième ordre entre déplacement et déformation.

**V-1-2-c. Actions extérieures en "D.L.A"**

$$(C) = {}^{t+\Delta t}P_\beta \cdot \delta {}_t q_\beta \quad [V - 13]$$

${}^{t+\Delta t}P_\beta$  : représente les sollicitations extérieures indépendantes des déplacements.

**V-1-2-d. Actions internes en "D.L.A"**

$$(D) = \int_{t_v} {}^t T_{ij} \cdot \delta {}_t \varepsilon_{ij} \cdot d {}^t v \quad [V - 14]$$

En utilisant (1-64) on obtient

$$(D) = {}_t F_\beta \cdot \delta {}_t q_\beta$$

$$\text{Avec : } {}_t F_\beta = \int_{t_v} {}^t T_{ij} \cdot {}_t B_{ij\beta} \cdot d {}^t v \quad [V - 15]$$

${}_t F_\beta$  : Forces élastiques équilibrées au temps (t)

**V-1-2-e. Matrice de rigidité tangente en "D.L.A"**

Finalement l'expression de l'équilibre s'écrit :

$$\left( {}_t K_{\alpha\beta} + {}_t K_{\alpha\beta}^\sigma \right) \cdot {}_t q_\beta = {}^t P_\alpha - {}_t F_\alpha \quad [V - 16]$$

$$\text{Ou : } {}_t K_{\alpha\beta}^{Tg} = {}_t K_{\alpha\beta} + {}_t K_{\alpha\beta}^\sigma \quad [V - 17]$$

${}_t K_{\alpha\beta}^{Tg}$  : représente la matrice de rigidité tangente définie à la date (t) par rapport à la configuration actuelle à la date (t).

**V-1-2-f. Forces résiduelles de déséquilibre en "D.L.A"**

L'expression des forces résiduelles s'exprime sur la configuration actuelle par :

$${}_t R_\alpha = {}_t P_\alpha - \int_{t_v} {}^t T_{ij} \cdot {}_t B_{ij\alpha} \cdot d {}^t v \quad [V - 18]$$

$$\text{Avec } {}_t Q_\alpha = \int_{t_v} {}^t T_{ij} \cdot {}_t B_{ij\alpha} \cdot d {}^t v \quad [V - 19]$$

${}_t Q_\beta$  : représente les forces internes définies à la date (t) par rapport à la configuration actuelle.

**V-1-3. EXPRESSION DISCRETISEE DE L'EQUILIBRE EN "D.L.T"**

Quand on utilise une formulation L.T, on exprime la relation [V-6] sur la configuration initiale, soit :

$$\int_{0_v} (C_{ijkl} \cdot {}_0 \varepsilon_{kl} \cdot \delta {}_0 \varepsilon_{ij}) d {}^0 v + \int_{0_v} {}_t \sigma_{ij} \cdot \delta {}_0 \varepsilon_{ij}^{NL} \cdot d {}^0 v = {}^{t+\Delta t} W_{ext} - \int_{0_v} {}_t \sigma_{ij} \cdot \delta {}_0 \varepsilon_{ij} \cdot d {}^0 v \quad [V - 20]$$

Sachant que :

$${}_0 \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( {}_0 u_{i,j} + {}_0 u_{j,i} + {}_0 u_{k,i} \cdot {}_0 u_{k,j} + {}_0 u_{k,j} \cdot {}_0 u_{k,i} \right)$$

Qui s'écrit à l'aide de [V-2] comme suit :

$${}_0 \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ N_{i\alpha,j} + N_{j\alpha,i} + N_{k\beta,i} \cdot {}_t q_\beta \cdot N_{k\alpha,j} + N_{k\beta,j} \cdot {}_t q_\beta \cdot N_{k\alpha,i} \right] {}_0 q_\alpha \quad [V - 21]$$

${}^t B_{ij\alpha}$  : est la matrice relation entre variation de déformation et variation de déplacements nodaux, elle est défini par :

$${}_0 \varepsilon_{ij} = {}^t B_{ij\alpha} \cdot {}^t q_{\beta} \cdot {}_0 q_{\alpha} \quad [V - 22]$$

Ou  $\delta {}_0 \varepsilon_{ij} = {}^t B_{ij\alpha} \cdot \delta {}_0 q_{\alpha}$

L'équation [V-20] s'écrit aussi sous forme de quatre expressions :

$$\begin{cases} (A) = {}^t K_{\alpha\beta} \cdot {}_0 q_{\alpha} \cdot \delta {}_0 q_{\beta} \\ (B) = {}^t K_{\alpha\beta}^{\sigma} \cdot {}_0 q_{\alpha} \cdot \delta {}_0 q_{\beta} \\ (C) = {}^{t+\Delta t} P_{\beta} \cdot \delta {}_0 q_{\beta} \\ (D) = {}^t F_{\beta} \cdot \delta {}_0 q_{\beta} \end{cases} \quad [V - 23]$$

Où  ${}^t K_{\alpha\beta} = {}^t K_{\alpha\beta}^0 + {}^t K_{\alpha\beta}^{NL}$  : est appelée la matrice de rigidité matérielle;

${}^{t+\Delta t} P_{\beta}$  : représente les sollicitations extérieures indépendantes des déplacements;

${}^t F_{\beta}$  : forces élastiques équilibrées au temps (t).

Finalement la matrice de rigidité tangente en D.L.T s'écrit:

$${}^t K_{\alpha\beta}^T = {}^t K_{\alpha\beta}^0 + {}^t K_{\alpha\beta}^{NL} + {}^t K_{\alpha\beta}^{\sigma}$$

où  ${}^t K_{\alpha\beta}^0$  : matrice de rigidité initiale linéaire élastique;

${}^t K_{\alpha\beta}^{NL}$  : matrice des déplacements initiaux (rigidité non linéaire);

${}^t K_{\alpha\beta}^{\sigma}$  : matrice contraintes initiales.

#### V-1-4. COMPARAISON ENTRE LA "D.L.A" ET LA "D.L.T"

La D.L.A est moins coûteuse du point de vue calcul, parce qu'elle n'inclut pas la matrice des déplacements initiaux  $K^{GD}$  due au grand déplacement *tableau (V-1)*. Cependant si la "D.L.A" est plus économique par rapport à la "D.L.T", elle reste compliquée à formuler par rapport à cette dernière car elle est fonction de la matrice de rigidité élastique, de la matrice de rigidité géométrique (contraintes initiales), et enfin de la matrice de rotation d'actualisation. La "D.L.T" reste facile à implémenter du fait que sa configuration de référence reste constante. Malgré tout cela, la D.L.A est généralement favorisée devant la D.L.T et elle est plus populaire malgré son aspect approximatif (tenseurs incomplets). Elle a aujourd'hui permis de résoudre pas mal de problèmes académiques et pratiques.

Description	D.L.T / Référence initiale	D.L.A / Référence Actuelle
Variable Déplacement	${}^t U$	${}^t U$
Matrice de rigidité tangente	$K^0 + K^{\sigma} + K^{GD}$	$K^0 + K^{\sigma}$
Vecteur forces internes	$(K^0 + K^{\sigma}) \cdot {}^t U$	$(K^0) \cdot {}^t U$

**Tableau (V-1). Comparaison de la D.L.T et la D.L.A**

**V-1-5. MATRICE DES CONTRAINTES INITIALES**

Comme nous l'avant vu, la réponse non linéaire de la structure est obtenue "Incrémentalement", par augmentation progressive de la sollicitation. Pour chaque état déformé, on calcule une matrice de rigidité incrémentale comprenant un terme supplémentaire, dit "Rigidité géométrique", qui résulte de la prise en compte des termes quadratiques du champ de déplacements.

La matrice des contraintes initiales ou matrice de "la Rigidité géométrique" est calculée en utilisant les termes quadratiques du tenseur de déformation de Green-Lagrange équation [II-15], en les limitant à ceux de flexion [ZIENKIEWICZ 1977].

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{NI} \\ \varepsilon_{yy}^{NI} \\ \varepsilon_{xy}^{NI} \end{Bmatrix} = \left\langle \begin{matrix} 1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \right\rangle^T \quad [V - 24]$$

Elle s'écrit aussi :

$$\{\varepsilon^{NL}\} = \frac{1}{2} \{q\} \cdot [g]^T \cdot [g] \cdot \{q\} \quad [V - 25]$$

L'équation [V-12] s'écrit sous la forme :

$$[K^\sigma] = \int_{t_A} [g]^T \cdot [C] \cdot [g] \cdot d'A \quad [V - 26]$$

[g] : Cette matrice présente les pentes de la déformée, elle est limitée a ceux de la flexion tel que :

$$[g] \{\Delta q\} = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \quad [V - 27]$$

Dans le modèle de la théorie de Kirchhoff sous forme discrète, la flèche n'est interpolée cubique que sur le contour. A l'intérieur de l'élément l'interpolation de la flèche n'est que linéaire. Une interpolation bi cubique arbitraire est nécessaire et suffisante [EL-KHALDI 1987].

Le polynôme choisit et les fonctions de formes sont présentées à l'annexe II.

Enfin les vecteurs exprimant la pente de la déformation construisent [g] comme suit :

$$[g] = \begin{Bmatrix} \langle N_{,x} \rangle \\ \langle N_{,y} \rangle \end{Bmatrix} \quad [V - 28]$$

[C] : C'est la matrice traduit l'état de contrainte de membrane dans l'élément

$$[C] = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{yx} & N_{yy} \end{bmatrix} \quad [V - 29]$$

La matrice des contraintes initiales se calcule à partir du champ de contrainte solution du problème à l'étape (configuration) précédente.

Ainsi la matrice [K<sup>σ</sup>] s'écrit :

$$[K^\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K^\sigma]_f \end{bmatrix} \quad [V - 30]$$

Où :  $[K^\sigma]_f = \int_{t_A} [g]^T \cdot [C] \cdot [g] \cdot d'A$  .

**V-1-6. SYSTEME D'AXES COROTATIONNEL:**

L'idée principale dans le contexte de la D.L.C est de décomposer le mouvement de l'élément en deux parties. La première partie est le mouvement du corps rigide et la deuxième est une déformation pure. Le système d'axes corotationnel utilisé fait des rotations et translation avec l'élément. La déformation est toujours mesurée au niveau du repère de référence locale de l'élément, puisque les grands déplacements et les grandes rotations sont absorbés par le mouvement du système d'axes corotationnel qui suit toujours le mouvement de l'élément. Lorsqu'on considère la déformation calculée comme petite, le modèle linéaire devient valable.

Les différentes étapes à prendre en compte pour l'approche incrémentale avec la D.L.A

- 1- avant de calculer la rigidité tangente et les forces internes, on actualise le nouveau système d'axes sur la position précédente des nœuds de l'élément.
- 2- Les déformations et les forces internes sont calculées dans le nouveau repère produit de l'étape 1 "repère *oxy* de la *figure (V-2)*".
- 3- La nouvelle solution est obtenue après linéarisation du problème par l'étape 2.
- 4- La solution est utilisée pour procéder au nouvel incrément.

Cela nous conduit à considérer que la configuration initiale à l'instant  $t_0$  n'est plus la configuration de référence mais c'est la configuration à l'incrément de temps précédent l'instant considéré qui sera utilisée comme telle. En effet, une fois la configuration à l'instant  $t$  connue, elle peut être employée comme nouvel état de référence pour évaluer les contraintes et les déformations à l'instant  $t+\Delta t$ .

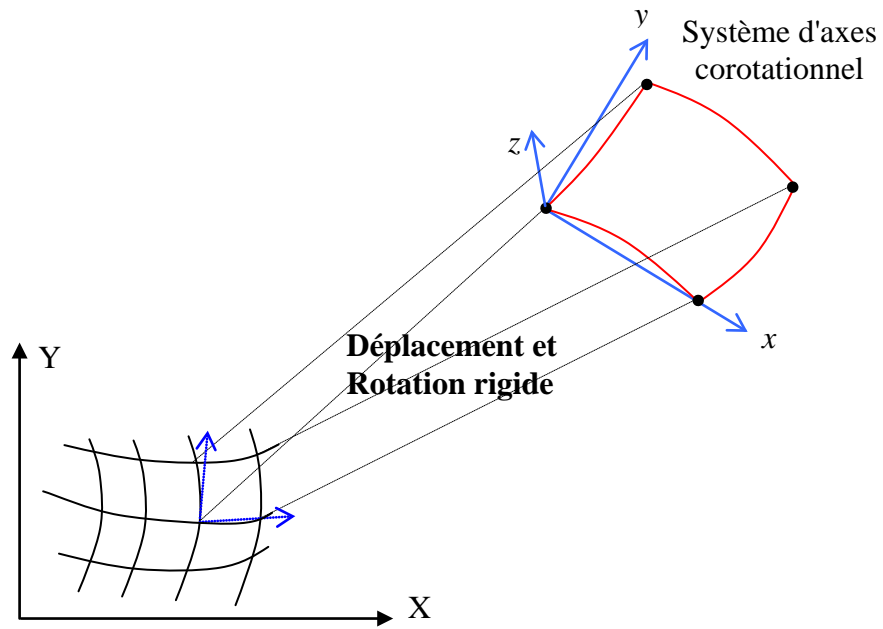
Cependant cet aspect est conditionné par la validité du système d'axes choisis. En effet les éléments quadrilatéraux n'assurent pas la continuité  $C^0$  au niveau des plans de référence dans le cas de géométrie quelconque produite après une déformation que subit la structure à un pas de chargement. Cela vient du fait que trois nœuds définissent un plan, et le quatrième nœud n'appartient pas obligatoirement à ce plan.

Lorsqu'on refait le maillage pour actualiser la géométrie de la structure après déformation, un problème de base de la méthode des éléments finis se pose. En effet lorsque l'un des nœuds se trouve hors du plan des trois autres, l'élément ainsi obtenu n'est pas plat. Ceci conduit à une divergence de la solution exacte, parce que les nœuds du maillage ne coïncideront pas avec les points matériels de la structure.

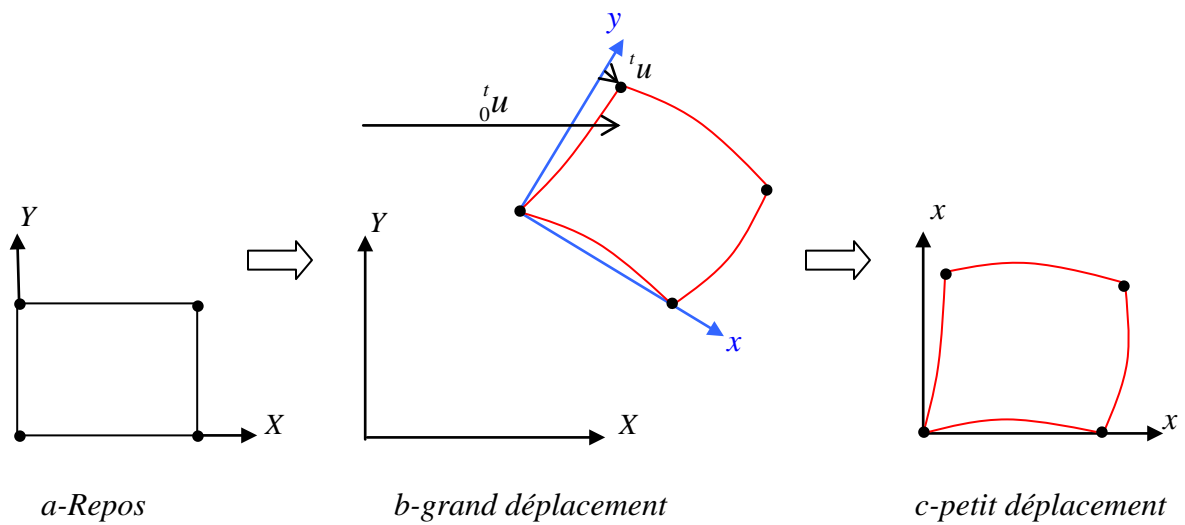
Plusieurs éléments quadrilatères plats ont été appliqués auparavant à l'analyse non linéaire des plaques (Crisfield 1980, Evans 1985). Ces éléments ne satisfont pas la compatibilité de déplacement, parce que la géométrie résultant du remaillage après déformation ne coïncide pas avec la géométrie réelle. Chin et al [CHIN & al 1993], [CHIN & al 1994] développe un élément rectangulaire qui satisfait la compatibilité de déplacement. Cette élément a quatre nœuds sommet et à sept *ddl* par nœud, et deux nœuds sur le milieu du côté chacun avec un *ddl* de translation. Plusieurs autres éléments conformes a ordre élevé d'interpolation ont été développés, mais ils sont tous très coûteux de fait du nombre élevé des nœuds d'interpolation.

En cherchant l'efficacité en précision et en temps de calcul, notre approche est la suivante :

On attache à la surface moyenne de l'élément quadrangulaire à un repère local *oxyz* différent du repère global *OXYZ*. La position des points de la coque est donnée par rapport au repère local. Pour les éléments coque à 4 nœuds, les 4 nœuds doivent être coplanaires pour que la théorie des coques planes puisse être validée.

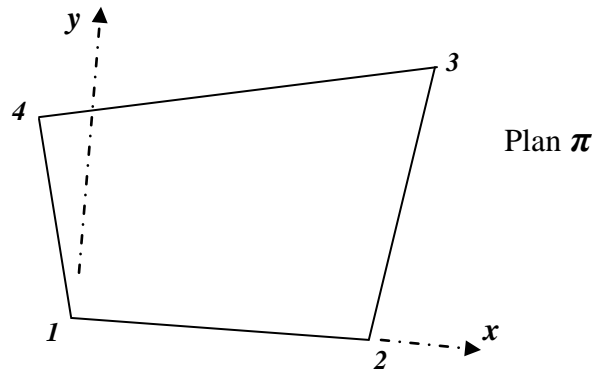


**Figure (V-1). Système d'axes corotationnel**

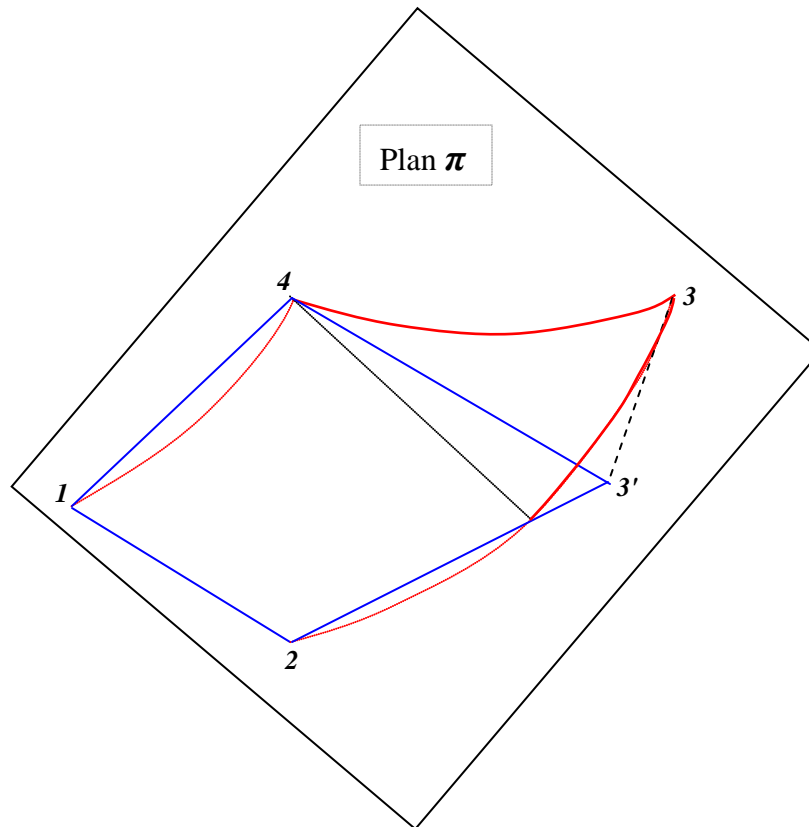


**Figure (V-2). Déplacement de la D.L.C**

Dans le cas classique, où le plans de référence est choisis comme la *figure (V-3)*, une grande erreur (de géométrie, de volume d'intégration) se produit lors de la projection spatiale du nœud hors plans sur le plan de référence  $\pi$  *figure (V-4)*.



**Figure (V-3). Plan de référence couramment utilisé**



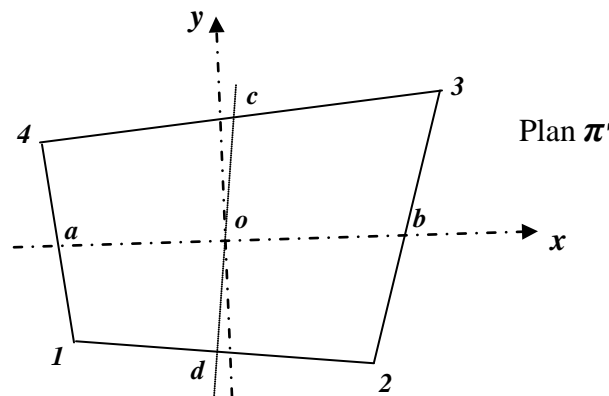
**Figure (V-4). Projection de l'élément déformé sur le plan de référence**



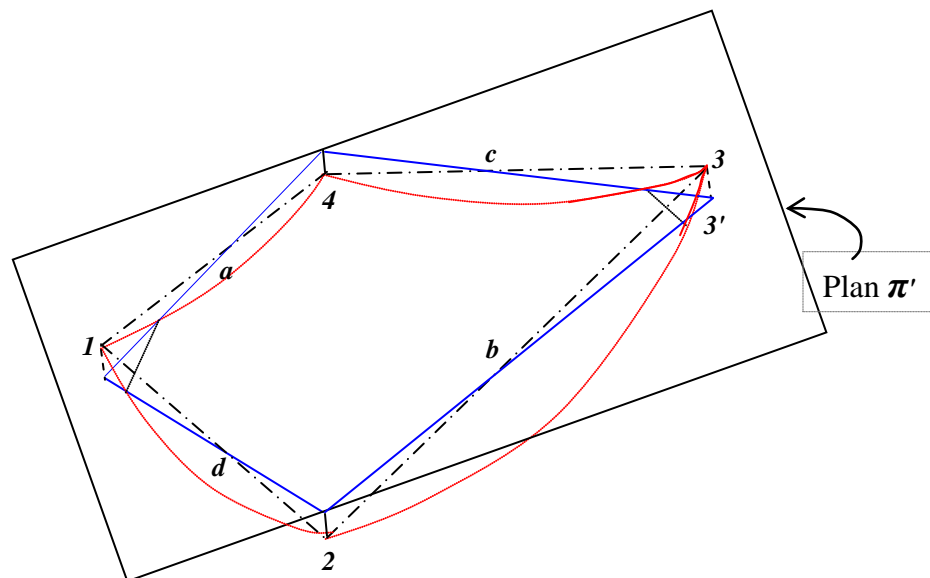
La projection de la géométrie déformée sur le plan de référence introduit une grande erreur. Et la géométrie modélisée est loin de la géométrie déformée réelle (les nœuds du maillage ne coïncident pas avec les points matériels). Ainsi, soit un point (le numéro 3 sur la *figure V-4*) appartenant à deux éléments adjacents, la projection de ce point donne deux points généralement différents (deux points 3'). Ceci conduit à ce que la continuité inter éléments n'est plus assurée, est les résultats obtenus sont loin de la solution exact.

Nous choisissons le système d'axes local comme le présente la *figure (V-5)*, où l'axe  $x$  contient les deux point  $a$ , et  $b$  situent a mi coté (1-4, et 2-3). L'axe  $y$  est perpendiculaire à l'axe  $x$ , les deux axes sont croisés au niveau du point  $o$ . *figure (V-5)* vue en plan, *figure (V-6)* vue dans l'espace.

La projection de la géométrie déformée sur le plan de référence  $\pi'$  minimise l'erreur. La géométrie modélisée est plus proche de la géométrie déformée réel. Cependant la continuité inter éléments reste non assurée. Les résultats obtenus par l'utilisation du plan de référence  $\pi'$  sont très précis comme en verra dan le chapitre suivant.



**Figure (V-5). Plan de référence adopté**



**Figure (V-6). Projection sur le plan de référence**

**V-1-7. CALCUL DES DEPLACEMENTS DANS LE REPERE COROTATIENNEL**

Avant de calculer la matrice de rigidité initiale, et les efforts internes, l'état de déformation de l'élément doit être défini sur le repère  $xyz$  de la *figure (V-1)*, qui est lié à la position de l'élément. Le choix de la première méthode pour la prise des grandes rotations nous amener à suivre la démarche suivante, voir [MEEK & RISTIC 1997] :

- Pour l'état flexionnel :

Dans le cas des éléments triangulaires, en choisissant le repère corotationnel de façon que le déplacement transversal soit nul sur les trois points, et il ne reste que la définition des deux rotations dans le nouveau repère.

Dans ce cas les deux rotations rigides sont faciles à calculer par  $\theta_x^R = \frac{\partial W^R}{\partial x}$ , et  $\theta_y^R = \frac{\partial W^R}{\partial y}$

Pour les éléments quadrilatères il est impossible de suivre le même chemin. En effet les 4 nœuds de l'élément déformé ne se trouvent généralement pas sur le même plan. Donc nous avons deux plans avec quatre rotations rigides, ainsi la relation précédente n'est plus valable.

De cette manière, nous traitons le problème sur les cotés de l'élément comme si nous avions quatre éléments de poutres *figure (V-7)*.

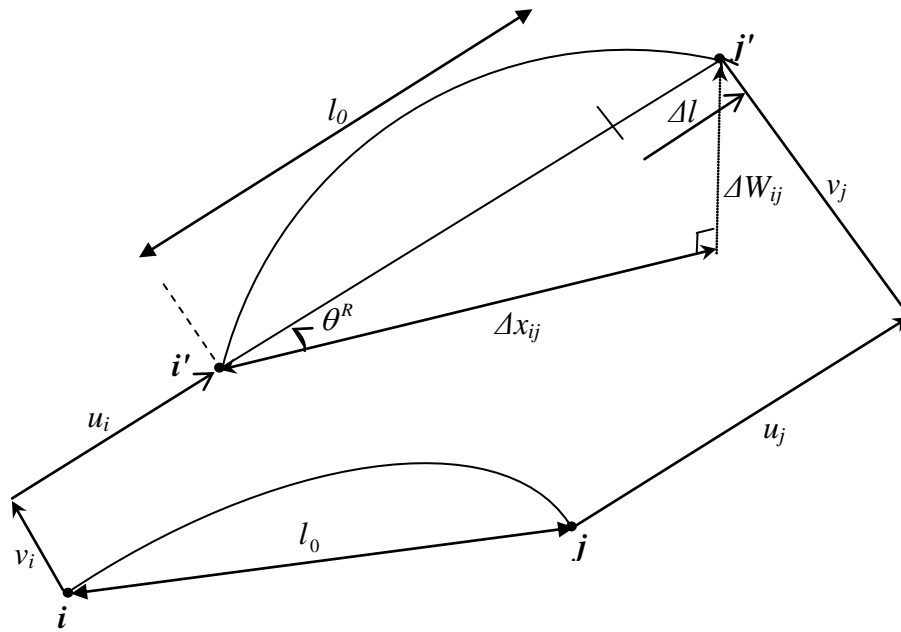
$$\theta^R = \arcsin\left(\frac{\Delta W_{ij}}{\Delta x_{ij}}\right) \quad [V - 31]$$

Et le déplacement transversal prend la valeur  $w = \vec{3}3$  de la *figure (V-7.a)*.

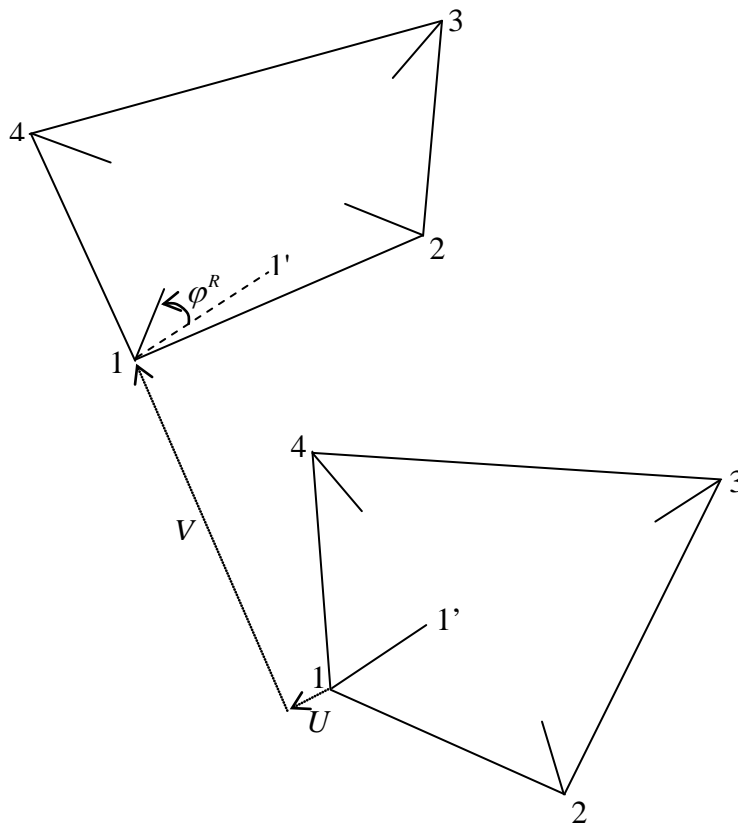
- Pour l'état membranaire :

Pour les déplacements de membrane il s'agit des extensions le long de chaque côté, il suffit de soustraire les translations de l'état précédent de celles de l'état actuel.

Pour la rotation dans le plan "*drilling rotation*" nous considérons que les côtés de l'élément restent rectilignes, et calculons  $\varphi^R$  comme il est illustré par la *figure (V-7.b)*



a - rotation hors plan



b - rotation dans plan

**Figure (V-7). Cinématique des rotations rigides**

## V-2. ANALYSE NON LINEAIRE MATERIELLE :

Cette partie est consacrée à l'implantation de la loi de comportement sous forme discrète, ce qui revient à la construction de l'élément finis coque dans le cadre de l'analyse non linéaire matérielle.

La méthode des noeuds plastique est adoptée ici, c.-à-d. que les déformations plastiques sont considérées concentrées dans les rotules plastiques. La fonction d'écoulement est seulement vérifiée aux noeuds. Si le tenseur de contraintes résultantes satisfait la condition d'écoulement à un noeud particulier, ce noeud est considéré plastifié. Ainsi, dans cette méthode les déformations plastiques sont considérées seulement aux noeuds, alors que l'intérieur de l'élément demeure toujours élastique.

### V-2-1. CRITERE D'ECOULEMENT EN VARIABLES GENERALISEES

La méthode des éléments finis conduit à exprimer le critère d'écoulement "en contraintes" en fonction des contraintes calculées aux points d'intégration de chaque élément.

L'élément quadrilatère que nous avons utilisé n'est pas "à déformation constante", il nécessite quatre points d'intégration en surface, et lorsqu'on a recours à l'intégration à travers l'épaisseur pour exprimer la progression de la plasticité dans le sens transversal le nombre de points d'intégration dans l'épaisseur peut varier de 3 à 11 ou plus suivant le type d'étude. Le produit de ce nombre de points dans l'épaisseur par le nombre de points en surface conduit à de nombreux calculs qui pénalisent le temps d'exécution des problèmes.

De ce point de vue, et plus particulièrement dans le cas des coques, une formulation d'un critère d'écoulement en termes de contraintes généralisées ( $M$ ,  $N$  et  $Q$ ) semble plus intéressante.

La fonction de seuil d'écoulement « d'Ilyushin » exprimée en termes de contraintes généralisées et modifiée pour tenir compte l'influence des efforts tranchants sur le comportement plastique des plaques et des coques en flexion est adoptée. Nous adoptons aussi la modification de Crisfield pour approximer le développement progressif de la déformation plastique à travers l'épaisseur. Une telle forme peut cependant donner des résultats acceptables, mais moins précis pour la modélisation compte tenu des autres imprécisions numériques dues aux fortes non linéarités.

#### V-2-1-1. Critère d'Ilyushin (Critère simplifié) :

Dès 1948, Ilyushin propose une forme simplifiée d'un critère isotrope basé sur celui de Von-Mises en état plan de contraintes pour un matériau élastique parfaitement plastique.

Il est considéré que l'épaisseur est complètement plastifiée ou complètement en régime élastique et donc qu'aucune décharge élastique local, dans cette épaisseur, ne peut se produire.

La fonction d'écoulement est modifiée pour prendre en compte le développement graduel des courbures plastique et des efforts tranchants, comme donné en [VOYIADJIS & WOELKE 2006], [WOELKE & al 2006]. La forme de l'état d'écoulement peut être facilement dérivé de la fonction de Von-Mises et de la définition des contraintes normales en haut et des fonds de la coque, suivant les indications de Bieniek et de Funaro 1976, voir aussi [WOELKE & al 2006].

En supposant que les composantes de contrainte et les termes de rigidité calculés aux nœuds sont constants sur l'épaisseur, La fonction d'écoulement d'Ilyushin peut être écrite :

$$F = \frac{M^2}{M_p^2} + \frac{N^2}{N_p^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{|MN|}{M_p N_p} - \frac{Y(\kappa)}{\sigma_e^2} \quad [V-32]$$

Ou sous la forme (simplifiée) découplée

$$F = \frac{M^2}{M_p^2} + \frac{N^2}{N_p^2} - \frac{Y(\kappa)}{\sigma_e^2} \quad [V-33]$$

Le développement détaillé du critère de Von-Mises de la forme [III-3'] Jusqu'à la forme en contraintes généralisées [V-32] est exposé par [WOELKE & al 2006].

L'hypothèse du découplage au niveau du critère est cohérente avec la formulation énergétique découplée de l'élément coque a facette plane, tel que :

$Y(\kappa)$  est un paramètre qui dépend du paramètre scalaire  $\kappa$  d'érouissage isotrope.

$$\begin{cases} N^2 = N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3N_{xy}^2 \\ M^2 = M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2 \\ MN = M_x N_x + M_y N_y - \frac{1}{2}(M_x N_y + M_y N_x) + 3M_{xy} N_{xy} \end{cases} \quad [V-34]$$

$$\begin{cases} N_p = h\sigma_e \\ M_p = \frac{h^2}{4}\sigma_e \end{cases} \quad [V-35]$$

Dans le cas ou l'état flexionnel est dominant, l'influence des efforts tranchants dans une coque épaisse sur le comportement plastique est très importante, selon Shi et Voyiadjis 1992, nous pouvons inclure l'effet des efforts tranchants  $Q_x, Q_y$  en modifiant une des intensités de contrainte [VOYIADJIS & WOELKE 2006] comme suit :

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3(N_{xy}^2 + Q_{xz}^2 + Q_{yz}^2)$$

Ce critère de contraintes généralisées, rend la structure avec un comportement linéaire jusqu'à ce que la totalité de la section transversale soit plastifiée (formation de rotule plastique). Cependant, au niveau élémentaire, la plastification évolue graduellement à partir des fibres externes de la coque, et le matériau se comporte non-linéairement dès que les fibres externes commenceront à plastifier. Pour exprimer l'évolution des déformations plastiques à travers l'épaisseur, Crisfield en 1981 a introduit un paramètre de courbure plastique  $\alpha(\bar{\chi}_p)$ , dans l'équation [V-32]

$$F = \frac{M^2}{\alpha^2 M_p^2} + \frac{N^2}{N_p^2} + \frac{1}{\sqrt{3}\alpha} \frac{|MN|}{M_p N_p} - \frac{Y(\kappa)}{\sigma_e^2} \quad [V-36]$$

$$\text{Ou } F = \frac{M^2}{\alpha^2 M_p^2} + \frac{N^2}{N_p^2} - \frac{Y(\kappa)}{\sigma_e^2} \quad [V-37]$$

Remplaçant  $N_p$ ,  $M_p$ ,  $K^2 = Y(\kappa)$  dans l'équation [V-37] on aboutit à :

$$F(\{M\}, \{N\}) = \frac{16}{\alpha^2 \cdot h^4} M^2 + \frac{1}{h^2} N^2 - K^2 \quad [V - 38]$$

Là où  $\alpha$  à été choisi tels que  $\alpha \cdot M_p$  suit la relation (moment plastique-courbure) uni axiale. [VOYIADJIS & WOELKE 2006], [DUJC & BRANK 2008] :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{8}{3} \bar{\chi}^p\right) \quad [V - 39]$$

$$\bar{\chi}^p = \sum \Delta \bar{\chi}^p = \frac{Eh}{\sqrt{3} \cdot Y(\kappa)} \sum \left( (\Delta \chi_x^p)^2 + (\Delta \chi_y^p)^2 + \Delta \chi_x^p \Delta \chi_y^p + (\Delta \chi_{xy}^p)^2 / 4 \right)^{\frac{1}{2}} \quad [V - 40]$$

$\bar{\chi}^p$  C'est la courbure plastique équivalente,  $\Delta \chi_x^p$ ,  $\Delta \chi_y^p$  et  $\Delta \chi_{xy}^p$  sont les incréments de la courbure plastique. Cette expression est vérifiée au deux état limites suivants :

- $\bar{\chi}^p = 0 \rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$  en résulte  $\alpha M_p = \frac{\sigma_e \cdot h^2}{6}$  qui représente la première fibre plastifiée.
- $\bar{\chi}^p = \infty \rightarrow \alpha = 1$  qui représente la section transversale complètement plastifiée.

Conformément à la définition qui lie les déformations  $\{\varepsilon\}$  et les contraintes  $\{\sigma\}$  aux variables globaux, équation [I-32], [I-36] on a :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon\}_m + z \{\chi\} \\ \{\sigma\} &= \frac{1}{h} \{N\} + \frac{12}{h^2} z \{M\} \\ \{\tau\} &= \frac{1}{h} \{Q\} \end{aligned}$$

$$M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \cdot \varepsilon_f, \quad N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = S \cdot \varepsilon_m, \quad Q = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = T \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Où  $D$ ,  $S$ ,  $T$  sont les rigidités à la flexion, membrane, et cisaillement transverse.

L'incrément de déformation totale  $d\varepsilon$  est dans ce cas, la somme de la partie élastique  $d\varepsilon^e$ , et celle plastique  $d\varepsilon^p$ , composantes de l'incrément, de sorte que :  $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$

L'incrément de déformation plastique est donné par la règle d'écoulement, équation [III-6] :

$$d\varepsilon^p = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \lambda \cdot a$$

Où  $\lambda$ , et  $a$  sont, respectivement, le multiplicateur plastique et le vecteur d'écoulement.

On le décompose en : déformation plastique de membrane, et déformation plastique de flexion tel :

$$\begin{cases} \{d\varepsilon_m^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial N} \right\} \\ \{d\chi^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\} \\ \{d\varepsilon_c^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\} \end{cases} \quad [V - 41]$$

Où  $d\varepsilon_m^p$ ,  $d\chi^p$ ,  $d\varepsilon_c^p$  sont les parties plastiques des différentielles des déformations de membrane, de courbure, et de cisaillement.

Il est important de noter que le champ de déformations plastiques est interpolé comme celui de l'analyse linéaire élastique qui s'écrit sous la forme incrémentale :

$$\Delta\varepsilon_f^p = \begin{Bmatrix} \Delta\kappa_x^p \\ \Delta\kappa_y^p \\ \Delta\kappa_{xy}^p \end{Bmatrix}, \quad \Delta\varepsilon_m^p = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x^p \\ \Delta\varepsilon_y^p \\ 2\Delta\varepsilon_{xy}^p \end{Bmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon_c^p = \begin{Bmatrix} \Delta\gamma_{xz}^p \\ \Delta\gamma_{yz}^p \end{Bmatrix}$$

L'incrément de déformation plastique est défini à partir des relations d'écoulement suivantes :

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_{xi}^p = \sum_{i=1}^3 \lambda \frac{\partial F_i}{\partial N_{xi}} \\ \Delta\kappa_{xi}^p = \sum_{i=1}^3 \lambda \frac{\partial F_i}{\partial M_{xi}} \\ \Delta\gamma_{xi}^p = \sum_{i=1}^2 \lambda \frac{\partial F_i}{\partial Q_{xi}} \end{cases} \quad [V - 42]$$

Les dérivés partiels de la fonction de charge sont :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial N_x} \quad \frac{\partial F}{\partial N_y} \quad \frac{\partial F}{\partial N_{xy}} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial M_x} \quad \frac{\partial F}{\partial M_y} \quad \frac{\partial F}{\partial M_{xy}} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q_{xz}} \quad \frac{\partial F}{\partial Q_{yz}} \right\rangle = \frac{\partial F}{\partial N} \left\langle \frac{\partial N}{\partial Q_{xz}} \quad \frac{\partial N}{\partial Q_{yz}} \right\rangle \end{aligned}$$

La différentielle de F s'écrit alors :

$$dF = \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle \{dN\} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle \{dM\} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle \{dQ\} + \frac{\partial F}{\partial K} dK \quad [V - 43]$$

D'où :

$$\{d\sigma\} = [D^e] \cdot \{d\varepsilon^{ep}\} = [D^e] \cdot (\{d\varepsilon^e\} - \{d\varepsilon^p\})$$

Alors en écrivant :

$$\begin{cases} \{dN\} = [D_m] \left( \{d\varepsilon_m\} - \lambda \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle \right) \\ \{dM\} = [D_f] \left( \{d\chi\} - \lambda \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle \right) \\ \{dQ\} = [D_c] \left( \{d\gamma\} - \lambda \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle \right) \end{cases} \quad [V - 44]$$

Les travaux de Shi et Voyiadjis en 1992 montrant que :

$$H = -\frac{d\kappa}{\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial \kappa} \quad \text{Donc :}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = -\lambda \cdot H \quad [V - 45]$$

Avec  $H$  le module d'écrouissage voir [VOYIADJIS & WOELKE 2006]

Nous avons démontré précédemment *équation [III-11]* que :  $\lambda = d\varepsilon_{eq}^p$

Par substitution de [V-44] et [V-45] dans l'équation [V-43] nous avons :

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle [D_m] \left( \{d\varepsilon_m\} - \lambda \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle \right) + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle [D_f] \left( \{d\chi\} - \lambda \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle \right) + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle [D_c] \left( \{d\gamma\} - \lambda \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle \right) - \lambda \cdot H = 0 \quad [V - 46]$$

La loi de comportement liant le taux de contrainte au taux de déformation s'écrit de la manière suivante (avec  $H = -\frac{d\kappa}{\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial \kappa}$  le module d'écrouissage)

$$\lambda = \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle [D_m] \{d\varepsilon_m\} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle [D_f] \{d\chi\} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle [D_c] \{d\gamma\}}{\left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle [D_m] \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle [D_f] \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle [D_c] \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle + H} \quad [V - 47]$$

La relation élasto-plastique incrémentale de contrainte-déformation est obtenue sachant que :

$$dF = a^T \cdot d\sigma \quad \text{et} \quad d\sigma = D \cdot d\varepsilon^e = D \cdot d\varepsilon - \lambda \cdot D \cdot a, \quad \text{et finalement s'écrit :}$$

$$d\sigma = D^{ep} \cdot d\varepsilon = \left( D - \frac{a \cdot a^T \cdot D}{a^T \cdot D \cdot a + H} \right) d\varepsilon \quad [V - 48]$$

L'équation [V-44] devient :



$$\begin{cases} \{dN\} = [D_m]^{ep} \{d\varepsilon_m\} \\ \{dM\} = [D_f]^{ep} \{d\chi\} \\ \{dQ\} = [D_c]^{ep} \{d\gamma\} \end{cases} \quad [V - 49]$$

La matrice  $[D]^{ep}$  est appelée matrice élasto-plastique continue [LANDAU & al 1978], [KOZIEY & MIRZA 1997] il s'écrit :

$$[D_m]^{ep} = [D_m] \left[ I - \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial N} \right\} \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle [D_m]}{H + \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle [D_m] \left\{ \frac{\partial F}{\partial N} \right\}} \right] \quad [V - 50]$$

$$[D_f]^{ep} = [D_f] \left[ I - \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\} \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle [D_f]}{H + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle [D_f] \left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\}} \right] \quad [V - 51]$$

$$[D_c]^{ep} = [D_c] \left[ I - \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\} \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle [D_c]}{H + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle [D_c] \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\}} \right] \quad [V - 51']$$

Il en résulte une apparente rigidification subite du matériau, gouvernée par une loi linéaire de la forme :  $Y(\kappa) = \sigma_e + H \cdot \varepsilon_{eq}^p$ . La matrice  $[D^{ep}]$  remplace en analyse incrémentale la matrice d'élasticité  $[D]$ . Elle est symétrique définie positive, excepté en Plasticité non associée qui ne vérifient pas la loi de normalité. Dans ce cas la direction d'écoulement est définie par référence à une autre fonction.  $d\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma}$  ;  $G \neq F$ , dans ce cas  $[D^{ep}]$  est dissymétrique, et elle nécessite l'utilisation d'un algorithme de résolution des systèmes dissymétriques.

### **V-2-2. INTEGRATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE**

Le comportement plastique des solides est régi par des expressions basées sur des quantités différentielles de déformations et de contraintes. Afin de résoudre le problème physique il est nécessaire d'intégrer ces quantités. Cette intégration est faite en considérant les valeurs différentielles en tant qu'incrémentales. La méthode d'intégration de la loi de comportement élasto-plastique utilisée est une méthode de prédiction élastique avec correction radiale, adoptée par entre autre Nguyen (1977) ou Simo et Taylor (1985).

Dans un premier temps, l'incrément de déformation totale  $d\varepsilon$  est calculé via la matrice de rigidité élastique linéaire. Cette déformation est supposée élastique et le tenseur des contraintes est calculé à

partir des lois de Hooke. La contrainte équivalente associée à cet état de contrainte est évaluée puis comparée à la contrainte d'écoulement du matériau (projection sur le critère):

- si  $\sigma_{eq} \leq Y(\kappa)$  alors le point est dans le domaine élastique « *Décharge élastique* » ou « *charge élastique* » : il n'y a pas de variation des paramètres d'écrouissage ni des déformations plastiques, et l'état de contrainte et de déformation en ce point est entièrement défini;
- si  $\sigma_{eq} > Y(\kappa)$  alors le point est dans le domaine plastique « *Charge plastique* » : il y a de la déformation plastique et variation des paramètres d'écrouissage, et il faut déterminer la partie plastique du tenseur de déformation puis réactualiser le tenseur des contraintes.

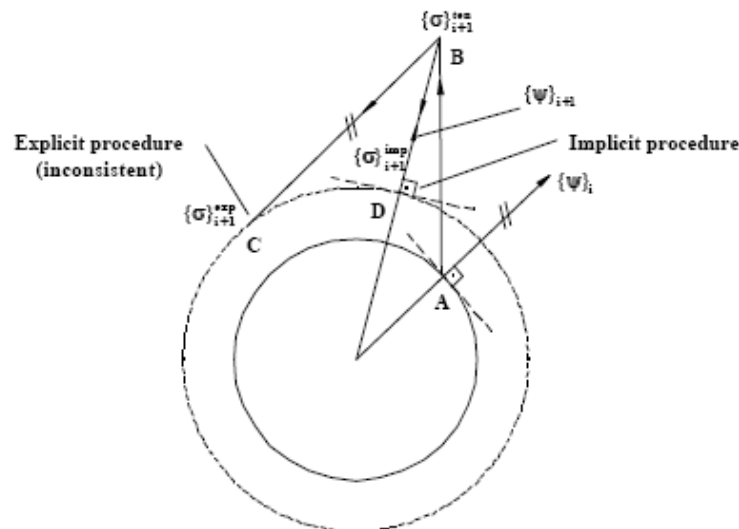
Le développement suivant concerne la résolution d'un problème non linéaire de calcul de structure constitué d'un matériau à histoire par la méthode des contraintes initiales.

### **V-2-2-1. Prédiction des déplacements Correction des contraintes :**

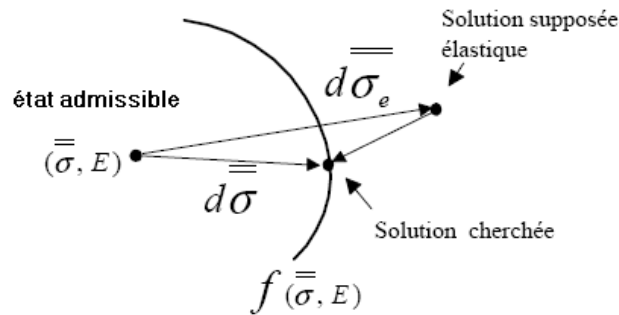
Supposons qu'à un incrément ( $n$ ) la déformation totale  $d\varepsilon$  produit de la prédiction élastique, produise un état de contraintes non admissible  $F(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) > 0$  nous cherchons donc, un coefficient de correction  $R$  (ou de réduction) tel que  $F(\sigma_{ij} + R \cdot \Delta\sigma_{ij}) = 0$ . La portion  $(1-R) \cdot \Delta\sigma_{ij}$  doit être ramener sur la surface d'écoulement ce qui provoque l'apparition des déformations plastiques.

La méthode implicite consiste à projeter un point de l'espace des contraintes (le prédicteur élastique) sur un convexe (la surface d'écoulement) selon la plus petite distance entre le point et le convexe (point D sur la *Figure V-18*), on parle alors de l'algorithme de retour radial, où la projection est idéale *figure (V-9)*. Nous adoptons la méthode explicite où le retour sur la surface d'écoulement se fait de manière arbitraire (point C sur la *figure V-8*) en faisant l'hypothèse de conservation de déplacements plastiques. Il faut effectuer un rabattement sur la surface d'écoulement pour revenir à l'état satisfaisant l'équilibre (point D sur la *Figure V-18*).

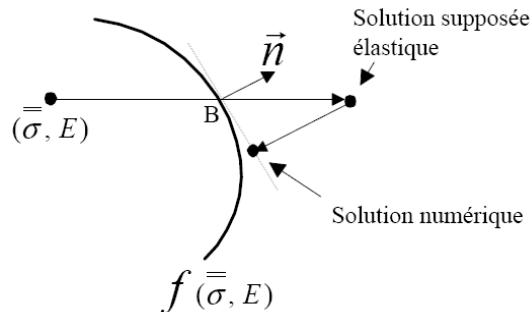
Numériquement on sait évaluer la position du point  $B$ , et la normale en  $B$  au critère. Le schéma numérique de projection sur le critère est présenté par la *figure (V-10)*. L'état de contrainte obtenu à la suite de ces calculs n'équilibre plus l'incrément de charge appliquée.



**Figure (V-8). Projection sur la surface d'écoulement**



**Figure (V-9). Le schéma idéal de projection**



**Figure (V-10). Le schéma numérique de projection**

Pour le calcul de  $R$  en adopte l'approximation suivante :

On a  $F(\{\sigma\}_{i-1}) = F_0 < 0$ , et  $F(\{\sigma\}_{i-1} + \Delta\{\sigma^e\}_i) = F_1 > 0$

$$\text{Supposant } R_1 = \frac{F_0}{F_0 - F_1} \quad [V - 52]$$

La nature non linéaire du critère fait que cette approximation linéaire est souvent insuffisante,

$$F(\{\sigma\}_{i-1} + R_1 \cdot \Delta\{\sigma^e\}_i) = F_2 \neq 0$$

Une deuxième correction dans le domaine élastique est nécessaire on cherche  $R_2$  vérifiant :

$$F(\{\sigma\} + (R_1 + R_2)\{\Delta\sigma^e\}) = 0 \quad [V - 53]$$

Pour un accroissement infinitésimal de contraintes, nous avons  $\Delta F = dF$

$$\Delta F = F(\{\sigma\}_{i-1} + (R_1 + R_2)\{\Delta\sigma^e\}_i) - F(\{\sigma\}_{i-1} + R_1\{\Delta\sigma^e\}_i) = -F_2 \quad [V - 54]$$

Pour un modèle à écrouissage

$$dF = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle \{d\sigma\} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial K} \right\rangle \{dK\} \quad [V - 55]$$

Mais on cherche  $(R_1 + R_2)$  tel que  $\{\Delta\sigma\}$  reste élastique, donc il n'y a pas de plastification c-à-d que le seuil de plasticité est constant, et  $\left\langle \frac{\partial F}{\partial K} \right\rangle \{dK\}$  est nulle.

Pour les accroissements infinitésimaux en peut écrire :

$$dF = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle_i \{\Delta\sigma\}_i = R_2 \left( \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle_i \{\Delta\sigma^e\}_i \right) \quad [V - 56]$$

$$\text{D'où : } R_2 = \frac{F_2}{\left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\rangle_i \{\Delta\sigma^e\}_i} \quad [V - 57]$$

Donc l'accroissement des contraintes pour lequel les déformations restent élastiques est :

$$\{\Delta\sigma\}_i = (R_1 + R_2) \{\Delta\sigma^e\}_i = R \cdot \{\Delta\sigma^e\}_i \quad [V - 58]$$

### **V-2-2-2. Rabattement sur la surface d'écoulement :**

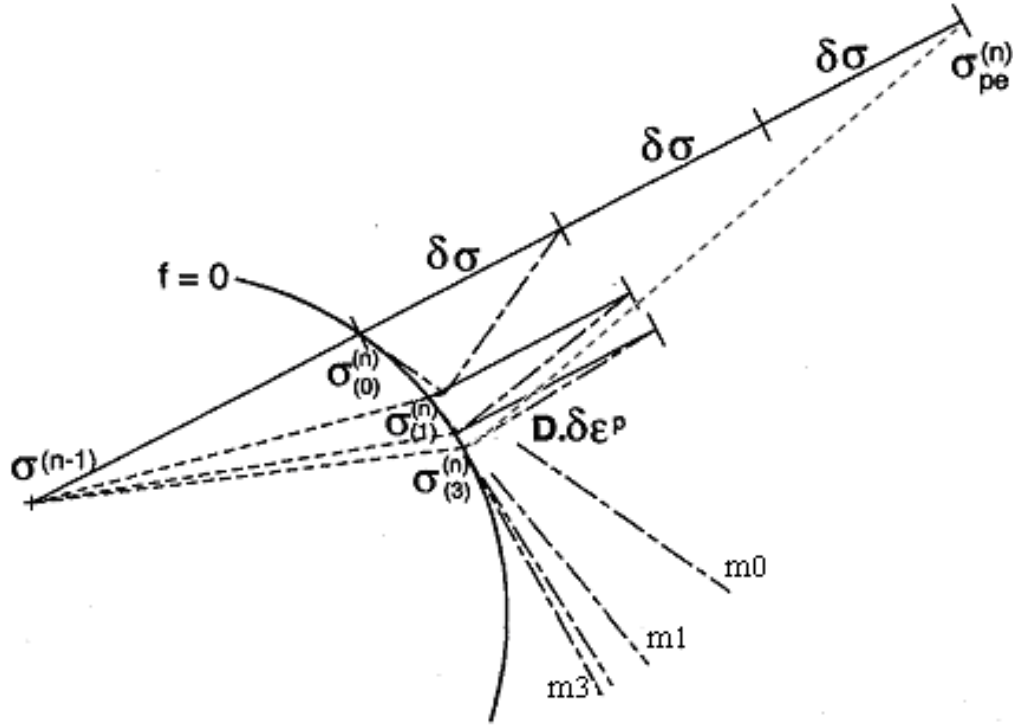
Le calcul de  $R$  permet le retour sur la surface d'écoulement pour cela en fait l'hypothèse de conservation de déformation élasto-plastique totale, sous cette hypothèse l'équation correspondante à  $(1-R)\{\Delta f^e\}_i$  s'écrit :

$$\lambda = (1-R) \left( \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle \{\Delta N^e\}_i + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle \{\Delta M^e\}_i + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle \{\Delta Q^e\}_i}{H + \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle [D_m] \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle [D_f] \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle [D_c] \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle} \right) \quad [V - 59]$$

Ce dernier n'est pas plastiquement admissible, une correction est donc nécessaire.

Un calcul itératif de rabattement sur la surface d'écoulement plastique *Figure (V-11)* permet le retour sur la vraie position (ou l'équilibre est satisfait). Afin de mieux approximer ce multiplicateur, nous divisons  $(1-R)\{\Delta f^e\}_i$  en  $m$  intervalles *Figure (V-11)* tel que :

$$m = \alpha \frac{F_1 - F_2}{F(\sigma)_i} \quad \text{où } \alpha \text{ est un coefficient numérique (dépendant de la précision)}$$



**Figure (V-11). Rabattement sur la surface d'écoulement**

Nous effectuerons  $m$  fois le rabattement de l'accroissement des contraintes généralisés

$\frac{1}{m}(1-R)\{\Delta f\}_i$ , à chaque étape de rabattement en définit le multiplicateur :

$$\lambda = \left( \frac{1-R}{m} \right) \left( \frac{\left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle \{\Delta N^e\}_i + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle \{\Delta M^e\}_i + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle \{\Delta Q^e\}_i}{H + \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle [D_m] \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle [D_f] \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle [D_c] \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle} \right) \quad [V - 60]$$

On peut calculer :

$$\begin{cases} \{\Delta N^p\}^m = \left( \frac{1-R}{m} \right) \cdot \{\Delta N^e\}_i - \lambda [D_m] \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle \\ \{\Delta M^p\}^m = \left( \frac{1-R}{m} \right) \cdot \{\Delta M^e\}_i - \lambda [D_f] \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle \\ \{\Delta Q^p\}^m = \left( \frac{1-R}{m} \right) \cdot \{\Delta Q^e\}_i - \lambda [D_c] \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle \end{cases} \quad [V - 61]$$

Pour garder une homogénéité avec le calcul de  $R$  nous proposons de faire une deuxième approximation sur le calcul de  $\lambda$  à chaque étape de  $m$ .

$$d\lambda = \frac{F(\{M\}_i^m, \{N\}_i^m, \{Q\}_i^m) - F(\{M\}_i^{m-1}, \{N\}_i^{m-1}, \{Q\}_i^{m-1})}{H + \left\langle \frac{\partial F}{\partial N} \right\rangle [D_m] \left\{ \frac{\partial F}{\partial N} \right\} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial M} \right\rangle [D_f] \left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial Q} \right\rangle [D_c] \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\}} \quad [V - 62]$$

Nous aurons :

$$\begin{cases} \{\Delta N^p\}^m = \left( \frac{1-R}{m} \right) \cdot \{\Delta N^e\}_i - (\lambda + d\lambda) [D_m] \left\{ \frac{\partial F}{\partial N} \right\} \\ \{\Delta \varepsilon^p\}^m = (\lambda + d\lambda) \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial N} \right\} \end{cases} \quad [V - 63]$$

$$\begin{cases} \{\Delta M^p\}^m = \left| \frac{1-R}{m} \right| \cdot \{\Delta M^e\}_i - (\lambda + d\lambda) [D_f] \left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\} \\ \{\Delta \chi^p\}^m = (\lambda + d\lambda) \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\} \end{cases} \quad [V - 64]$$

$$\begin{cases} \{\Delta Q^p\}^m = \left( \frac{1-R}{m} \right) \cdot \{\Delta Q^e\}_i - (\lambda + d\lambda) [D_c] \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\} \\ \{\Delta \gamma^p\}^m = (\lambda + d\lambda) \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q} \right\} \end{cases} \quad [V - 64]$$

Le coefficient, et la règle d'érouissage sont réactualisés à chaque étape [MESQUITA & al 1998] :

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + d\kappa_{i+1} = \kappa_i + d\tilde{\varepsilon}_{i+1}^p \quad [V - 65]$$

La règle d'érouissage linéaire est actualisé comme suit :

$$Y(\kappa_{i+1}) = \sigma_e + H \cdot \kappa_{i+1} \quad [V - 66]$$

### **V-2-3. MATRICE DES CONTRAINTES INITIALES ELASTO-PLASTIQUE**

C'est la même matrice de l'analyse non linéaire géométrique, *équation [V-26]*. Cependant dans le cas d'un matériau élasto-plastique, la matrice de stabilisation calculée avec la loi de comportement élastique se trouve trop rigide, on calcule cette matrice en remplaçant le module d'Young par la moyenne des modules d'Young tangents des quatre points d'intégration. Cela permet de rendre adaptatif les termes de stabilisation en fonction de l'état plastique du matériau.

## Chapitre VI

# Méthodes Numériques de Résolution des Systèmes Non Linéaires

**GENERALITES :**

Dans les chapitres précédents nous avons présenté les équations régissant le comportement non linéaire géométrique et matérielle des structures. La discrétisation de ces équations par la méthode des éléments finis conduit à un ensemble d'équations algébriques non-linéaires appelées : *équations des forces résiduelles*.

La résolution numérique d'un système d'équations non linéaires résultant de l'approximation par éléments finis de l'équilibre d'un solide élastique non linéaire, repose le plus souvent sur des algorithmes incrémentaux. La plupart de ces algorithmes sont basées sur la méthode itérative de Newton-Raphson. Ainsi Les logiciels de calcul des structures par éléments finis utilisent cette technique de prédiction correction pour rechercher les solutions des problèmes non linéaires. Le principe de cette méthode consiste à calculer les solutions point par point via une succession de linéarisations et d'itérations pour minimiser le résidu des équations traitées. L'inconvénient de cette technique est son coût car elle décompose une matrice de rigidité tangente à chaque itération. Des variantes de cette méthode ont été proposées et on peut citer la méthode de Newton modifié qui permet d'utiliser une seule matrice pour toutes les itérations ou la méthode dite quasi-Newton qui représente un compromis entre Newton-Raphson et Newton modifié. Cette méthode demande moins d'itérations que celle de Newton modifié mais n'apporte pas d'importantes améliorations. Ces variantes peuvent être avantageuses dans certaines situations (certaines lois de comportement, certains modèles de frottement, ...) pour diminuer le coût de calcul relié à la factorisation de la matrice tangente.

Un technique de pilotage doit être accompagner la méthode itérative tel que (pilotage en charge imposée, déplacement imposé, ...). Ces algorithmes diffèrent dans l'efficacité, la qualité, et la capacité de traiter différents types de comportements non linéaires. C'est dans ce but que plusieurs algorithmes et techniques de résolutions ont été développés et améliorés [CRISFIELD 1979], [GERADIN & al 1980], [RAMM 1982], [HAISLER & al 1977], [CONCEIÇÃO 1999].

En présence de points limites, les techniques de pilotage basées sur l'incrément de charge ne permettent pas de suivre toute la branche solution. On peut alors utiliser des méthodes avec le contrôle d'une composante du vecteur déplacement. Cependant la difficulté de ces techniques réside dans le choix du degré de liberté de contrôle. Afin de surmonter ces problèmes, des méthodes de pilotage automatique, basées sur un pilotage de type longueur d'arc, ont été proposées [WEMPNER 1971], [RIKS 1972], et [CRISFIELD 1981]. Elles permettent de suivre des courbes de solution complexes en passant tout aussi les points limite en charge que les points limites en déplacement

L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode de calcul non linéaire pour des calculs itératif sur une structure dont les caractéristiques géométrique ou matérielle sont susceptibles de varier de façon importante. L'algorithme incrémental de type Newton-Raphson est la base du notre travail.



## VI-1. LES METHODES DE RESOLUTION INCREMENTALES DES PROBLEMES NON LINEAIRES :

Vue la très grande variété des comportements non linéaires pouvant être impliqués dans les applications de la mécanique des solides et des structures, il existe également une très grande variété de méthodes de résolution numérique. Le point commun de la plupart des méthodes de résolution numérique de problèmes d'équilibre dans des conditions non linéaires réside dans leur caractère itératif basées sur la minimisation d'un résidu d'équilibre. Elles procèdent en effet, le plus souvent, par construction d'une suite de solutions approchées dont la limite est la solution exacte des équations issues de la modélisation par éléments finis.

Parmi les principales catégories des méthodes numériques de résolution des problèmes non linéaires, nous nous sommes intéressé à celles qui reposent sur les algorithmes incrémentaux.

On peut citer :

### VI-1-1. METHODE PUREMENT INCREMENTALE

A chaque incrément de charge la matrice de Rigidité ayant une valeur constante calculée à l'aide de la matrice de Rigidité tangente construite sur l'état actuel au début de chaque pas. L'inconvénient de cette méthode est que l'équilibre n'est pas corrigé (pas de processus itératif).

Par conséquent, cette méthode a deux inconvénients majeurs :

- *la déviation du chemin d'équilibre* : dû à la propagation et l'accumulation des erreurs peut conduire à la divergence de la solution, ceci signifie que la solution exacte peut être obtenue seulement en ré exécutant le problème avec plusieurs tailles d'incrément *figure (VI-1)*.

- *temps de calcul informatiques* : Pour réduire l'erreur, beaucoup de petites étapes peuvent être exigées, en particulier dans des régions « *difficiles* », la matrice de rigidité doit être formée et factorisée à chaque étape. Ceci peut être une proposition consommant trop de temps de calcul pour les problèmes tridimensionnels.

### VI-1-2. METHODE INCREMENTALE ITERATIVE

C'est une méthode itérative basée sur la minimisation d'un résidu d'équilibre. Elle est caractérisée par l'utilisation d'un processus itératif pour chaque incrément de charge.

La correction de l'équilibre peut se faire de plusieurs manières définissant plusieurs types de méthodes incrémentales itératives. Elles se distinguent les unes des autres principalement par la nature de la matrice de Rigidité calculée pour la correction.

Parmi ces méthodes :

#### a. Méthode de Newton-Raphson :

Elle exige le calcul de la matrice de Rigidité tangente à chaque itération la convergence est rapide. Cette méthode s'adapte bien à l'analyse des problèmes fortement non linéaire *figure (VI-2)*

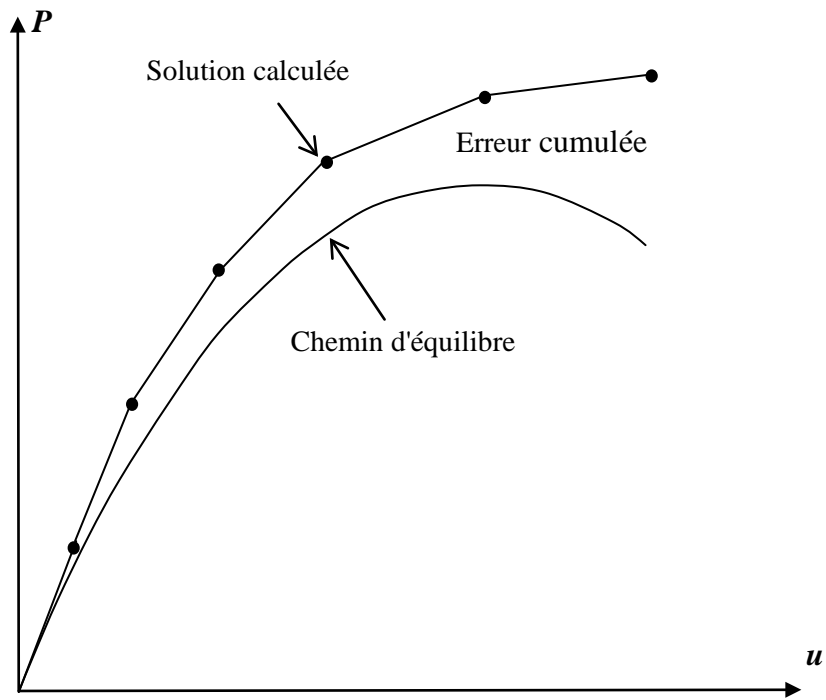
#### b. Méthode de Newton-Raphson modifiée :

La matrice de rigidité calculée au début de chaque incrément reste constante pour toutes les itérations de chaque incrément jusqu'à la convergence. Ceci conduit à un gain sensible du temps de calcul *figure (VI-3)*.

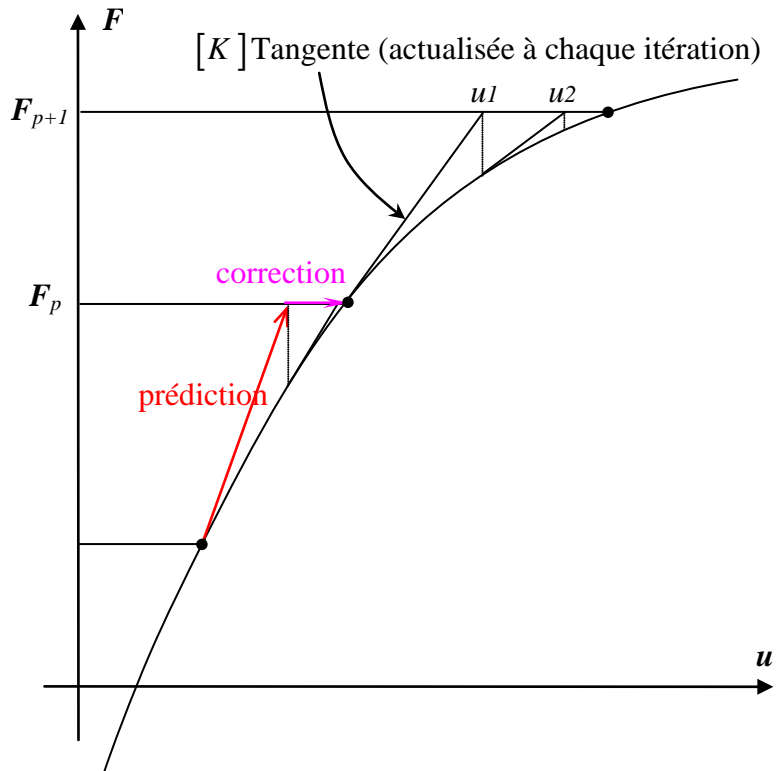
#### c. Méthode de la sécante :

Cette méthode consiste à utiliser la matrice de rigidité sécante à l'intérieur de chaque incrément afin de corriger l'équilibre *figure (VI-4)*.

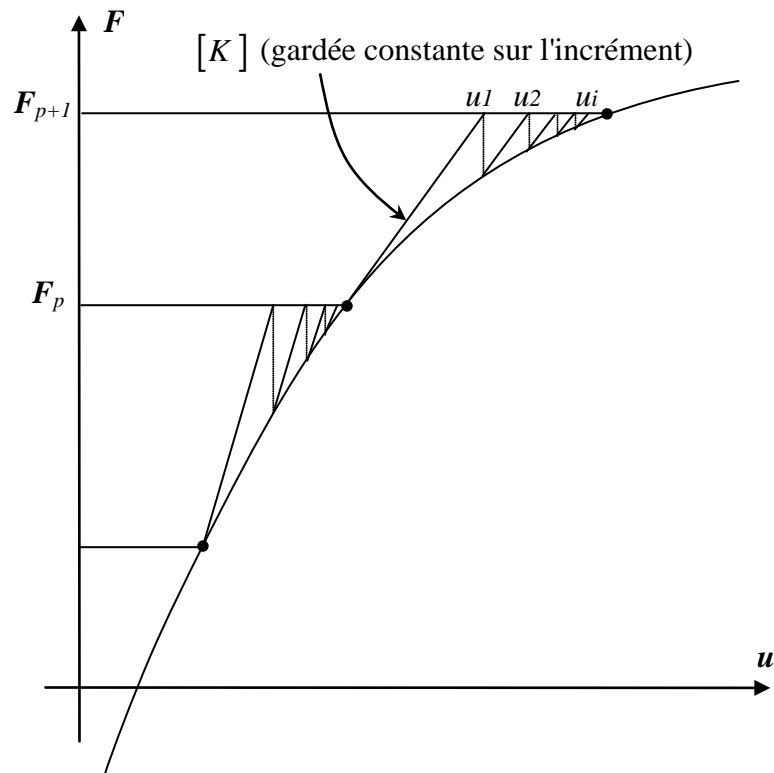
La mise en œuvre numérique est facile mais la convergence est lente.



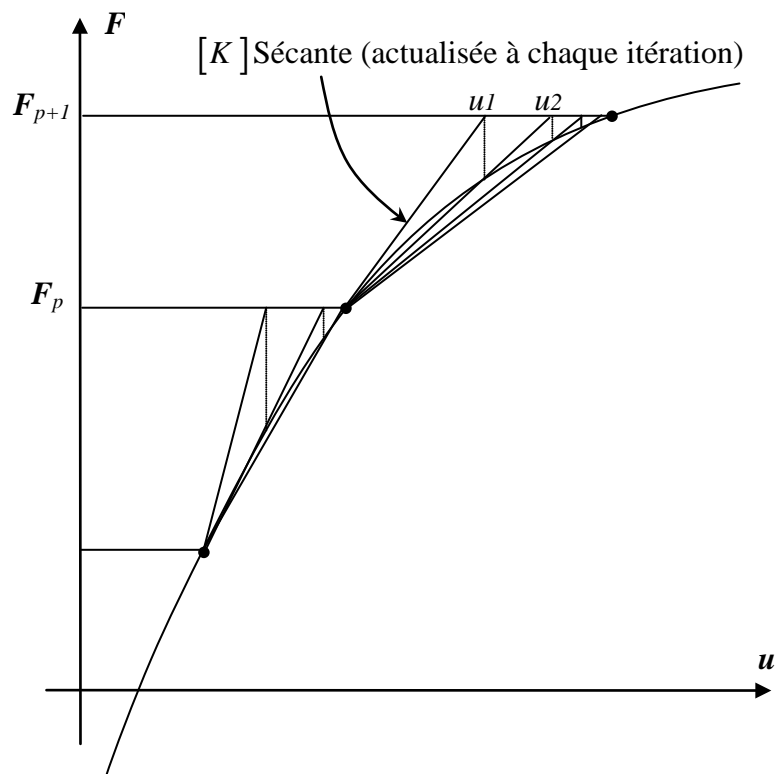
**Figure (VI-1). Méthode purement incrémentale**



**Figure (VI-2). Méthode de Newton-Raphson standard**



**Figure (VI-3). Méthode de Newton-Raphson modifiée**



**Figure (VI-4). Méthode de Newton-Raphson de la sécante**

### VI-1-3. METHODE DES CONTRAINTES INITIALES

Cette méthode est une adaptation de la méthode générale de Newton-Raphson à la plasticité, où la loi de comportement est une fonctionnelle de l'histoire du matériau. Elle consiste à calculer le résidu à chaque itération à partir de l'état de contraintes résiduelles obtenues en faisant à chaque itération la différence entre les contraintes calculées d'une manière élastique et celles élasto-plastiques vérifiant le critère de plasticité. Cette différence de contraintes (considérée élastique) sera minimisée par itérations jusqu'à ce que les forces résiduelles soient suffisamment voisines de zéro.

## VI- 2. PREDICTION - CORRECTION POUR LA RESOLUTION DES PROBLEMES NON LINEAIRES :

Ces méthodes sont bien adaptées pour traiter toutes les non linéarités possibles (non linéarité matérielle, non linéarité géométrique, non linéarité de contact, ...). Elles sont basées sur un processus de prédiction-corrrection, qui consiste, dans une première étape, à linéariser le problème non linéaire de départ et donc d'obtenir d'abord une estimation de la solution et rechercher ensuite une solution correctrice ou une direction qui, additionnée à la solution estimée, permettra de s'approcher de la solution recherchée et ceci d'itération en itération. Pour obtenir cette direction correctrice, on emploie ordinairement les méthodes de type Newton-Raphson, soit la méthode de Newton-Raphson standard ou une variante de celle-ci qu'on appelle modifiée, méthodes déjà présentées précédemment.

### VI-2-1. ÉQUATIONS FONDAMENTALES

L'équation gouvernant l'équilibre d'une structure à comportement non linéaire et discrétisée par éléments finis s'écrit :

$$\{P_{ext}(\{q\}, \lambda)\} - \{Q(\{q\})\} = 0 \quad [VI - 1]$$

Lorsque les efforts extérieurs dépendent de la déformée (charge hydrostatique, par exp), la contribution de la matrice des forces suiveuses dans la matrice de rigidité tangente est essentielle. Dans le cas où les efforts extérieurs ne dépendent pas de la déformée de la structure, la matrice des forces suiveuses est nulle (c'est le cas de notre étude), l'équation [VI-1] s'écrit :

$$\{P_{ext}(\lambda)\} - \{Q(\{q\})\} = 0 \quad [VI - 2]$$

$$\text{Ou bien } \lambda \cdot P_{ext} - \{Q(\{q\})\} = 0$$

$\lambda$  : paramètre de charge.

$Q(\{q\})$  : vecteur des forces internes.

$\{q\}$  : vecteur déplacements nodaux

L'utilisation de la méthode incrémentale nous amène à considérer comme connue la configuration  $C_{(t)}$  à l'instant  $t$ , et à rechercher la configuration  $C_{(t+\Delta t)}$  en équilibre sous le chargement extérieur  $P_{ext}$  appliqué à l'instant  $(t+\Delta t)$ . L'algorithme itératif de Newton-Raphson consiste à construire une suite d'approximations de la configuration d'équilibre recherchée jusqu'à trouver une solution satisfaisant l'équation [VI-1].

**VI-2-2. PREDICTION ELASTIQUE LINEAIRE**

Cette partie de l'algorithme permet d'initialiser les grandeurs pour le calcul de l'équilibre, elle sert à donner une estimation linéaire de l'incrément de déplacement.

Soit un incrément de charge  $\{\Delta P\}$  appliqué à la structure, la solution élastique correspondante est donnée par :

$$\{\Delta U\} = [K]^{-1} \{\Delta P\} \quad [VI - 3]$$

A cette solution correspond pour chaque élément fini un incrément de déformation :

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B] \{\Delta u\} \quad [VI - 4]$$

Avec  $[B]$  matrice des relations déformations – déplacements de l'élément considéré.

L'assemblage des vecteurs élémentaires permet de définir un vecteur force nodale équivalent à l'état de contrainte calculé à partir des lois de comportement.

Le résidu est donc défini par :

$$\{R\} = \{\Delta P\} - \{\Delta Q\} \quad [VI - 5]$$

Si le résidu est nul (à la précision près) c'est que la solution obtenue est bonne (cela correspond à un incrément de charge linéaire de la structure), si le résidu est non nul (supérieur à la précision voulue) il faut itérer en cherchant la nouvelle solution de  $\{\Delta U\} = [K]^{-1} \{\Delta P\}$ , jusqu'à ce que le résidu soit suffisamment voisin de zéro.

**VI-2-3. CORRECTION DE L'EQUILIBRE**

La méthode de Newton-Raphson est un algorithme reposant sur l'écriture, à chaque itération, du résidu autour de l'itération précédente :

$$\{R^{(i+1)}\} = \{R^{(i)}\} + [K^{(i)}] \cdot \{\Delta U^{(i)}\} \quad [VI - 6]$$

$\{\Delta U^{(i)}\} = \{U^{(i+1)}\} - \{U^{(i)}\}$  est la correction apportée à la solution par l'itération en cours.

La correction  $\{\Delta U^{(i)}\}$  est alors trouvée en annulant l'approximation de  $\{R^{(i+1)}\}$ , c'est-à-dire en résolvant le système d'équations linéaire

$$\{R^{(i)}\} + [K^{(i)}] \cdot \{\Delta U^{(i)}\} = \{0\} \quad [VI - 7]$$

$[K^{(i)}]$  est la matrice de rigidité calculée à chaque itération.

Ceci rend la méthode de Newton-Raphson rapide en convergence (donc rapide, en termes de nombre d'itérations). En contrepartie, le prix à payer est le temps calcul de la matrice de rigidité tangente qui sera fait à chaque itération. Il peut alors parfois être avantageux (en termes du temps de calcul total de la procédure itérative) de remplacer la méthode de « Newton-Raphson standard *figure (VI-2)* » par sa variante qui ne possède pas la propriété de convergence quadratique mais nécessite un temps de calcul par itération sensiblement inférieur. L'une de ces variantes : « Newton-Raphson de la sécante *figure (VI-4)* » consiste à utiliser une matrice de rigidité sécante à l'intérieur de chaque incrément de l'état naturel non déformé. La deuxième « Newton-Raphson avec correction *figure (VI-3)* » consiste à utiliser une matrice de rigidité calculée seulement au début de chaque incrément et garde cette valeur pour toutes les itérations.

Le processus itératif s'arrête lorsqu'on satisfait à un critère de convergence choisi a priori. Le critère de convergence contrôle le nombre d'itérations à réaliser dans un incrément, il est formulé soit directement en fonction des forces résiduelle, ou bien indirectement à travers les autres grandeurs (déplacement, déformation, ...)

### VI- 3. PROCEDURE DE RESOLUTION DE NEWTON-RAPHSON :

L'approche incrémentale consiste à appliquer le niveau de sollicitation par incréments successifs à l'aide d'un paramètre de charge normalisé  $\lambda$  en recherchant la réponse de la structure à chaque incrément. Généralement on considère le facteur de chargement  $\lambda$  comme une inconnue supplémentaire du problème.

Pour L'algorithme incrémental itératif de Newton-Raphson on procède comme suit :

Soit une solution non convergée à incrément  $p$  et à l'itération  $(i)$  définie par le couple charge-déplacement suivant :

$$\left( \{q_p^{(i)}\}, \lambda_p^{(i)} \right) \quad [VI - 8]$$

La résolution de l'équation [VI-1] consiste à la détermination de  $(n+1)$  inconnues, qui sont les  $(n)$  déplacements nodales du vecteur  $\{q\}$ , et le paramètre  $\lambda$ , en satisfaisant à l'équation [VI-1] et à une équation scalaire supplémentaire sert à définir le paramètre incrémental à imposer telle que :

$$f(\{q\}, \lambda) = 0 \quad [VI - 9]$$

Cette solution non convergée provoque un déséquilibre entre les forces extérieures et celles intérieures. On écrit dans ce cas, l'équation [VI-1] dans cette position non équilibrée sous la forme suivante :

$$\lambda_p^{(i)} \{P_{ext}\} - \{Q_p^{(i)}(\{q_p^{(i)}\})\} = \{R_p^{(i)}\} \quad [VI - 10]$$

Le déséquilibre du système défini par cette équation peut être éliminé si la solution [VI-8] est corrigée. Le processus de Newton-Raphson nous permet de corriger la solution [VI-8] par une solution à l'itération  $(i+1)$  et à l'incrément  $p$  telle que :

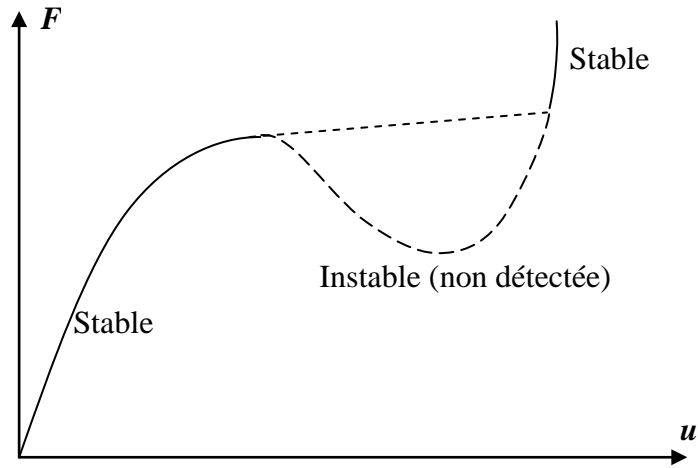
$$\begin{cases} \{q_p^{(i+1)}\} = \{q_p^{(i)}\} + \{\Delta q_p^{(i)}\} \\ \{\lambda_p^{(i+1)}\} = \lambda_p^{(i)} + \Delta \lambda_p^{(i)} \end{cases} \quad [VI - 11]$$

Le couple solution correctif,  $\{\Delta q_p^{(i)}\}, \Delta \lambda_p^{(i)}$ , est obtenu après résolution du système :

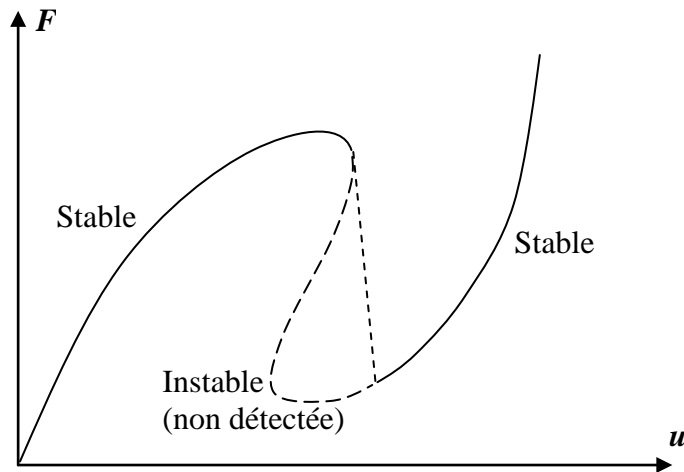
$$\begin{cases} [K_p^{T(i)}] \cdot \{\Delta q_p^{(i)}\} = \Delta \lambda_p^{(i)} \cdot \{P_{ext}\} + \{R_p^{(i)}\} \\ f(\{q_{p+1}\}, \lambda_{p+1}) = 0 \end{cases} \quad [VI - 12]$$

L'équation  $f(\{q_{p+1}\}, \lambda_{p+1}) = 0$  sert à définir le paramètre incrémental à imposer, nous l'explicitant lors de la présentation de chaque technique de pilotage.

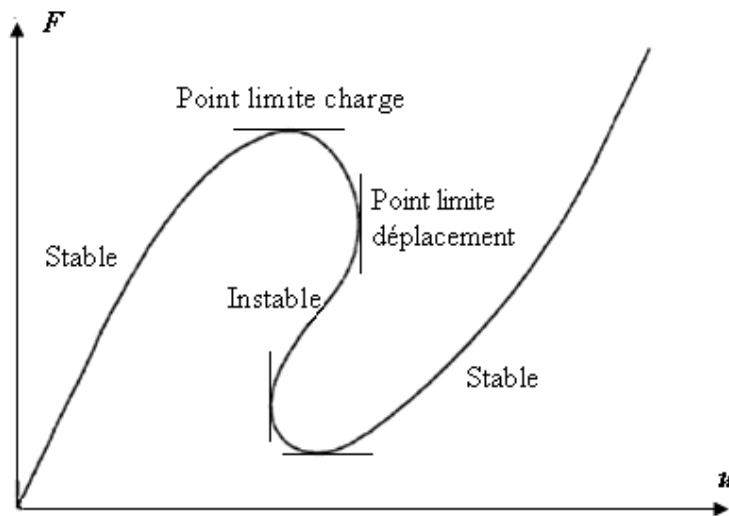
Cette procédure est générale pour les trois techniques de résolution (méthode par contrôle de charge, méthode par contrôle de déplacement, et la méthode de la longueur d'arc). La différence entre l'une et l'autre de ces techniques réside dans la définition de la fonction  $f(\{q_{p+1}\}, \lambda_{p+1})$ .



**Figure (VI-5). Charge imposée (au voisinage du point limite charge)**



**Figure (VI-6). Déplacement imposé (au voisinage du point limite déplacement)**



**Figure (VI-7). Longueur d'arc imposé (franchir tout les points limites)**

**VI-3-1. STRATEGIES DE RESOLUTION**

L'algorithme incrémentale consiste à calculer une succession d'états d'équilibre de façon incrémentale. Selon l'expression de la fonction  $f(\{q\}, \lambda)$ , on retrouve les trois techniques de pilotage suivantes : pour détail voir ([DJEHABA 1990], [LEGAY 2002], [M.BEN TAHAR 2005])

- technique de charge imposée (control d'effort);
- technique de déplacement imposé (control de déplacement);
- technique de longueur d'arc imposé.

- Pour la méthode de contrôle de l'effort, la fonction contrainte s'exprime par :

$$f(\{q\}, \lambda) = \lambda - \bar{\lambda} \quad [VI - 12. a]$$

Avec  $\bar{\lambda}$  constante indiquant le niveau de charge fixé.

Cela peut se représenter schématiquement pour le pas de chargement  $\Delta\lambda$  constant (Le problème se ramène alors à un problème standard de Newton-Raphson) sur la *figure(VI-8)*, ce type d'algorithme ne permet pas de calculer des réponses fortement non linéaires susceptibles de décroître. La description ainsi que la convergence de cet algorithme sont détaillées par [RANNACHER 1991].

- Pour une méthode de contrôle de déplacement, l'approche consiste à imposer le déplacement d'un noeud particulier et résoudre ensuite le problème d'équilibre. Cette méthode a été développée par [BATOZ & al 1979]. La fonction contrainte  $f$  associée est définie par :

$$f(\{q\}, \lambda) = \{q\}_k - \bar{q} \quad [VI - 12. b]$$

Cela revient à fixer la  $k^{eme}$  composante  $\{q\}_k$  du vecteur déplacement. Schématiquement, ceci est présenté à la *figure (VI-9)*

- En présence de points limites, les techniques de pilotage basées sur l'incrément de charge ou l'incrément de déplacement ne permettent pas de suivre toute la branche solution, Si il est nécessaire de tracer le chemin d'équilibre à travers les points limites, une solution technique doit être appliquée, c'est le contrôle en Longueur d'arc introduite initialement par [WEMPNER 1971], [RIKS 1972], et [CRISFIELD 1981]. Comme illustré sur *figure (VI-7)*. Cette méthode assure la convergence du problème d'équilibre avant et après le point limite.

L'incrément de longueur d'arc peut prendre plusieurs formes suivant les auteurs

*-Méthode de la longueur d'arc sphérique : figure (VI-10)*

Cette méthode a la forme de la fonction contrainte la plus générale, elle s'écrit :

$$f(\{q\}, \lambda) = \langle \Delta q \rangle \{ \Delta q \} + \Delta \lambda^2 \cdot b \cdot \langle P_{ext} \rangle \{ P_{ext} \} - \overline{\Delta L}^2 \quad [VI - 12. c]$$

Cette expression revient à imposer que la norme du vecteur  $(\{ \Delta q \}, F_{ext})$  soit égale au rayon  $\Delta L$ , comme illustre la *figure (VI-11.a)*

*-Méthode de la longueur d'arc cylindrique:*

[CRISFIELD 1981] et d'autres auteurs ont noté que pour des problèmes qui présentent un grand nombre de variables, l'effet du terme de chargement devient faible, c'est pourquoi le coefficient  $b$  a été supposé nul. On parle alors de la méthode de longueur d'arc cylindrique *figure (VI-11.b)*

Dans ces conditions, la fonction contrainte s'écrit :

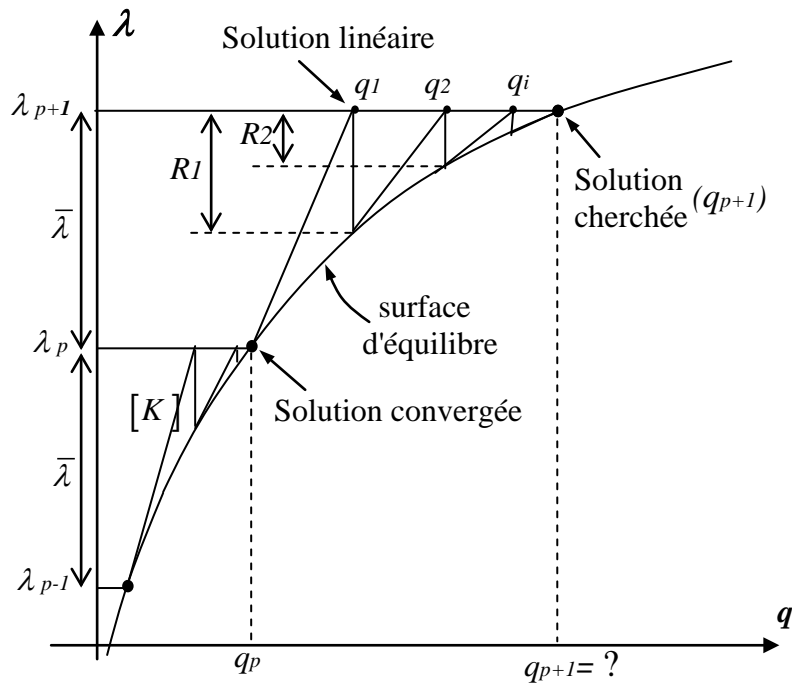
$$f(\{q\}, \lambda) = \langle \Delta q \rangle \{ \Delta q \} - \overline{\Delta L}^2 \quad [VI - 12. c']$$

*-Méthode de la longueur d'arc linéarisée:*

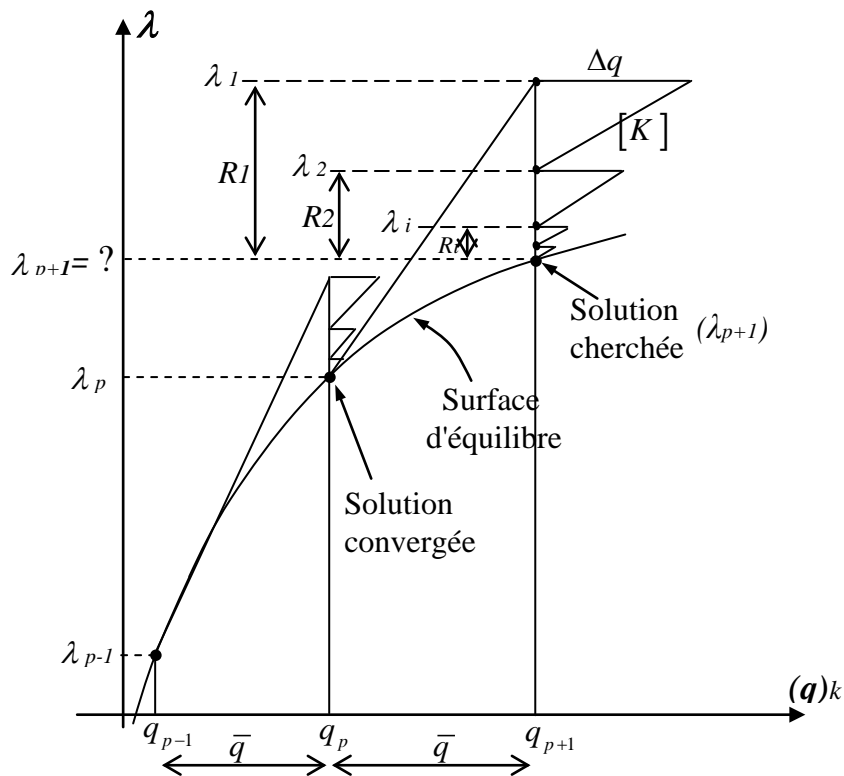
Les méthodes de longueur d'arc linéarisées ont été introduites pour palier au problème du choix des racines de l'équation de contrainte sphérique et cylindrique. Cette famille de méthodes a différentes variantes.



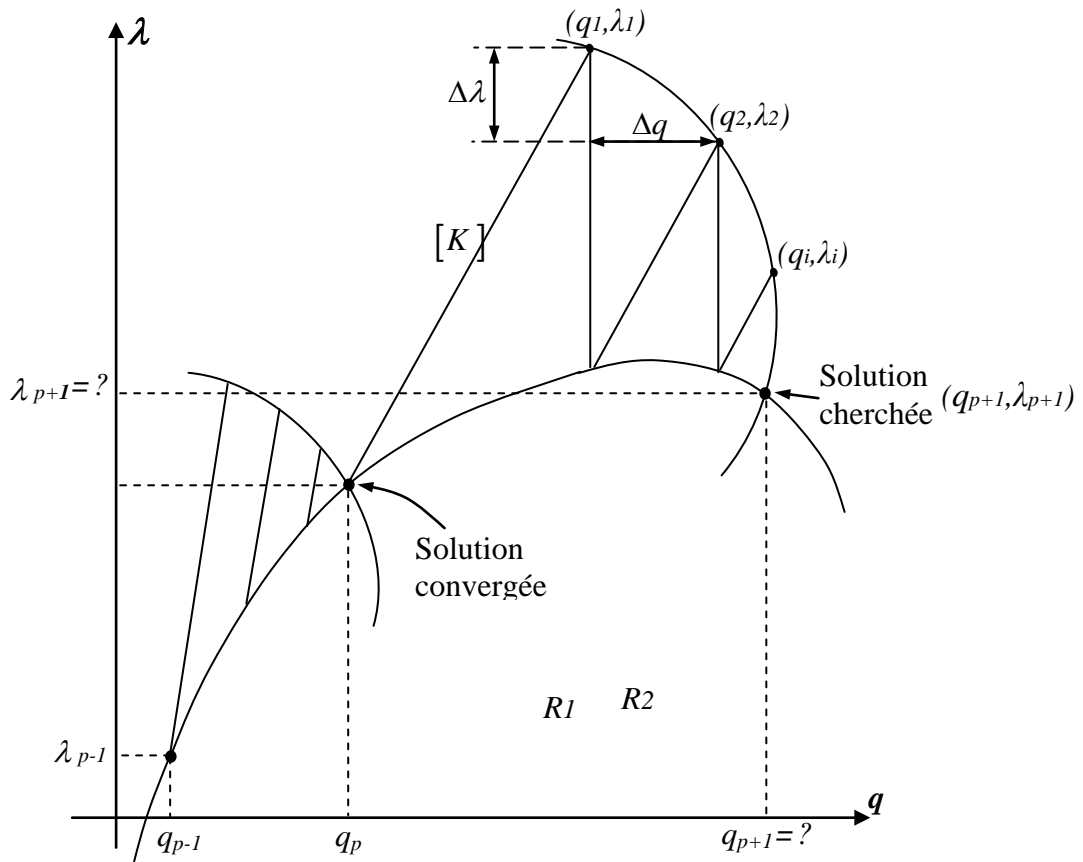
Il est clair que, au voisinage d'un point critique, la matrice tangente devient singulière, mais on constate que cela ne pose en général pas de problèmes, car numériquement, cette matrice n'est jamais singulière [BATOZ & al 1979], [LEE & NUKULCHAI 1998].



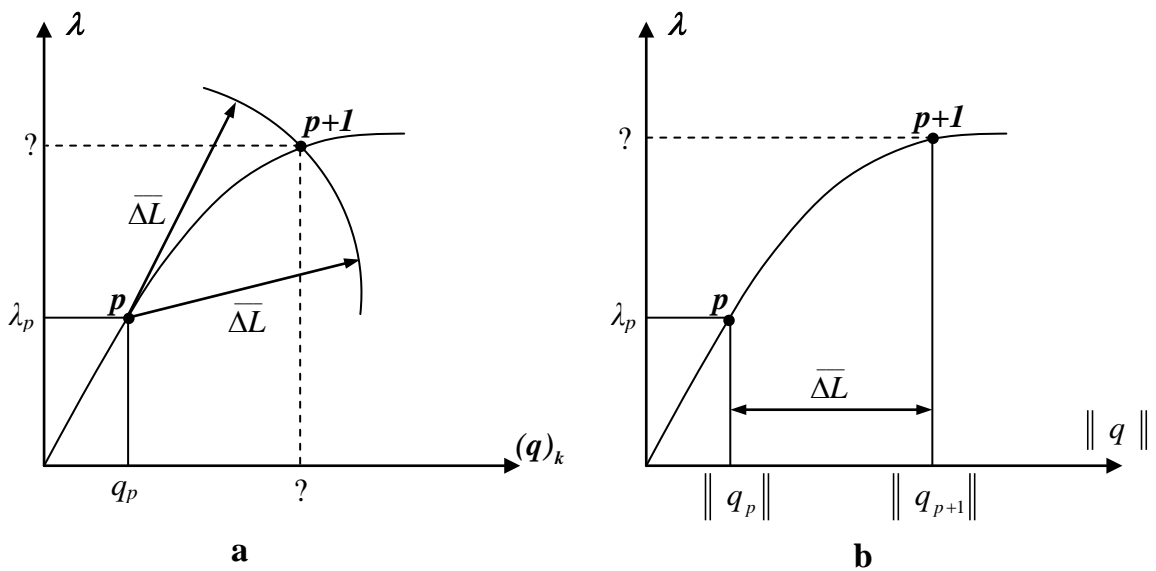
**Figure (VI-8). Pilotage en Charge imposé**



**Figure (VI-9). Pilotage en déplacement imposé**



**Figure (VI-10). Pilotage en longueur d'arc imposé**



**Figure (VI-11). Longueur d'arc imposé : a- pour  $b = 1$ , b: pour  $b = 0$**

**VI-3-2. TECHNIQUE DE PILOTAGE EN CHARGE IMPOSEE****VI-3-2-a. Définition de la fonction  $f$  en charge imposée :**

Soit  $\{q_p\}$  la solution connue à l'incrément  $p$ . La fonction  $f$  de l'équation [IV-9] est définie en charge imposée par l'équation [VI-12.a] :

$$f(\{q\}, \lambda) = \lambda_{p+1} - \bar{\lambda} = 0 \quad [VI - 13]$$

Cela revient à fixer un paramètre de charge :  $\bar{\lambda}$  pour l'incrément  $p+1$  tel que :

$$\bar{\lambda}_{p+1} = \bar{\lambda}$$

Il s'agit ensuite de trouver les  $(n)$  composantes de  $\{q_{p+1}\}$  satisfaisant à l'équation pour la valeur imposée  $\lambda_{p+1}$  du paramètre de charge.

Cette technique est très simple à développer. Elle permet de suivre toute la courbe charge déplacement tant qu'un point limite en charge n'est pas rencontré. Pour des déplacements modérés on peut dans certains cas suivre, tout de suite après le point limite, une branche stable de la courbe. La branche instable n'est pas détectée dans cas. Cependant cette technique conduit souvent, au niveau des points limites, à une divergence. Il est préférable à ce moment là, de changer de paramètres de contrôle.

**VI-3-2-b. Algorithme de résolution de Newton-Raphson avec pilotage charge imposée :**

Soit une solution  $(\{q_p\}, \lambda_p)$  convergée à l'incrément  $p$  :

On impose un incrément de charge à l'incrément  $p+1$  tel que :

$$\begin{cases} f(\{q_{p+1}\}, \lambda_{p+1}) = \lambda_{p+1} - \bar{\lambda} \\ \lambda_{p+1} = \bar{\lambda} \end{cases} \quad [VI - 14]$$

- à l'itération  $i = 1$  : on construit la matrice de rigidité tangente  $K_{p+1}^{T(1)}$ .

On résoud :

$$\left[ K_{p+1}^{T(1)} \right] \cdot \{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \} = (\bar{\lambda} - \lambda_p) \cdot \{ P_{ext} \} \quad [VI - 15]$$

La solution à l'itération  $i = 1$  est :

$$\begin{cases} \{ q_{p+1}^{(1)} \} = \{ q_p \} + \{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \} \\ \lambda_{p+1}^{(1)} = \bar{\lambda} \end{cases} \quad [VI - 16]$$

- à l'itération  $i \geq 2$  :

On actualise la matrice de rigidité  $\left[ K_{p+1}^{T(i)} \right]$  (cas de la correction de Newton-Raphson)

- Le déplacement  $\{ q_{p+1}^{(i-1)} \}$  permet de calculer les forces internes  $\{ Q_{p+1}^i(q_{p+1}^{(i-1)}) \}$

- On calcul ensuite le déséquilibre résiduel :

$$\{ R_{p+1}^{(i)} \} = \bar{\lambda} \{ P_{ext} \} - \{ Q_{p+1}^i \} \quad [VI - 17]$$

- On résoud :

$$\left[ K_{p+1}^{T(i)} \right] \cdot \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \} = \Delta \lambda_{p+1}^{(i)} \cdot \{ P_{ext} \} + \{ R_{p+1}^{(i)} \} \quad [VI - 18]$$

Dans le cas de charge imposée le paramètre de charge est constant sur l'incrément:

$$\begin{cases} \lambda = cte \\ \Delta \lambda = 0 \end{cases} \quad [VI - 19]$$

La résolution se réduit à :

$$\left[ K_{p+1}^T \right] \cdot \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \} = \{ R_{p+1}^{(i)} \} \quad [VI - 20]$$

Ainsi à l'itération (i) la solution est :

$$\begin{cases} q_{p+1}^{(i)} = \{ q_{p+1}^{(i-1)} \} + \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \} \\ \lambda_{p+1}^{(i)} = \bar{\lambda} \end{cases} \quad [VI - 21]$$

Ce résultat constitue une première solution approchée .Si cette solution est non convergée, nous passons à l'itération suivante, si elle est convergée, nous passons à l'incrément suivant (nous définissons par la suite les tests de convergence permettant l'arrêt du processus itératif lorsque la solution convergée est atteint).

### VI-3-3. TECHNIQUE DE PILOTAGE EN LONGUEUR D'ARC IMPOSEE

#### VI-3-3-a. Définition de la fonction F en longueur d'arc imposée de CRISFIELD :

Cette technique consiste à définir la fonction  $f$  de manière à lier par un paramètre incrémental imposé, l'incrément de charge et l'incrément de déplacement, Ce paramètre incrémental imposé est noté  $\Delta L$  et appelé " Longueur d'arc ", Ainsi la fonction  $f$  est définie explicitement par l'équation [VI-12.c] comme suit :

$$f(\{q\}, \lambda) = \langle \Delta q \rangle \{ \Delta q \} + b \cdot \Delta \lambda^2 \cdot \langle P_{ext} \rangle \{ P_{ext} \} - \overline{\Delta L}^2 = 0 \quad [VI - 22]$$

$\overline{\Delta L}$  : longueur d'arc imposée .

$\Delta \lambda$  : paramètre incrémental de charge .

$\{ \Delta q \}$  : déplacement incrémental .

$b$  : paramètre d'échelle entre chargement et déplacement.

Dans notre cas nous allons utiliser la version beaucoup plus simple de cette technique proposée par Crisfield.

Elle consiste à définir la fonction  $f$  telle que :

$$f(\{q\}, \lambda) = \langle \Delta q \rangle \{ \Delta q \} - \overline{\Delta L}^2 \quad [VI - 23]$$

Cela revient à imposer la longueur d'arc  $\Delta L$  égale à la norme euclidienne de l'accroissement du vecteur déplacement  $\{q\}$ . Cette méthode utilisée aussi par de nombreux auteurs, est simple à mettre en œuvre et d'une grande efficacité.

Cette technique permet de suivre toute la courbe charge déplacement en passant tous les points limites éventuels, que ce soit en charge ou en déplacement. Cependant et contrairement à l'imposition d'une charge ou d'un déplacement , il est plus difficile , à priori , d'imposer une valeur de longueur d'arc pour un type de structure donnée .Une possibilité consiste de démarrer le processus ,pour le premier incrément , en charge ou en déplacement imposé .La norme du vecteur déplacement résultat est prise comme valeur pour la longueur d'arc à l'incrément suivant Les possibilités de cet algorithme étant supérieures à celles des deux précédent , nous nous proposons de rendre automatique l'incrémentation de la longueur d'arc , en ajustant d'un incrément à l'autre la valeur de cette longueur d'arc.

En posant :

$I_{max}$  : nombre maximum d'itération possible par incrément

$\Delta L_p$  : longueur d'arc à l'incrément  $p$ .

- Si la convergence n'est pas atteinte à  $I_{max}$  itérations, on reprend le calcul avec  $(\Delta L_p)_a$  ajustée telle que :

$$\overline{(\Delta L_p)_a} = 0,5 \overline{\Delta L_p} \quad [VI - 25]$$

- En choisissant un nombre moyen possible d'itération  $I_d$  pour chaque incrément (entre 3 et 6) d'après [CRISFIELD 1981], il est possible de calculer la longueur d'arc à l'incrément  $p+1$  en se basant sur le nombre d'itération  $I_p$  nécessaire à la convergence à l'incrément  $p$  ainsi :

$$\overline{\Delta L_{p+1}} = \overline{\Delta L_p} \sqrt{\frac{I_d}{I_p}} \quad [VI - 26]$$

**VI-3-3-b. Algorithme de résolution de Newton-Raphson avec pilotage en longueur d'arc imposée de CRISFIELD ( $b = 0$ ) :**

Soit une solution  $(\{q_p\}, \lambda_p)$  convergée à l'incrément  $p$  :

À l'incrément  $p+1$  on impose une longueur d'arc  $\Delta L$  telle que :

$$\begin{cases} f(\{q_{p+1}\}, \lambda_{p+1}) = \langle \Delta q \rangle \{ \Delta q \} - \overline{\Delta L}_{p+1}^2 = 0 \\ \overline{\Delta L}_{p+1} = \|\Delta q\| \end{cases} \quad [VI - 27]$$

$\|\Delta q\|$  : norme euclidienne du vecteur incrément de déplacement  $\{ \Delta q \}$  .

Le système [VI-12] peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \{ \Delta q \}_{p+1}^{(i)} \\ \Delta \lambda_{p+1}^{(i)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [K_{p+1}^{T(i)}] & - \{ P_{ext} \} \\ 2 \langle \Delta q \rangle & 2 \cdot \Delta \lambda \cdot b \cdot \langle P_{ext} \rangle \{ P_{ext} \} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{p+1}^{(i)} \\ f \end{bmatrix} \quad [VI - 28]$$

C'est le système complet à résoudre à chaque itération, il est connue sous le nom de matrice (bordée) en raison de sa forme particulière où la matrice classique de raideur  $[K]$  est bordée par une ligne et une colonne supplémentaire. Ce système a l'avantage de ne pas être singulier aux points critiques (lorsque la matrice de raideur l'est au voisinage d'un point limite), mais a l'inconvénient de n'être ni symétrique, ni de type bande.

- à l'itération  $i = 1$  : on a la matrice de rigidité tangente  $[K_{p+1}^{T(1)}]$

On résoud :

$$[K_{p+1}^{T(1)}] \left\{ \left\{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \right\}_R + \Delta \lambda_{p+1}^{(1)} \cdot \left\{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \right\} \right\} = \left\{ \left\{ R_{p+1}^{(1)} \right\} + \Delta \lambda_{p+1}^{(1)} \cdot \left\{ P_{ext} \right\} \right\} \quad [VI - 29]$$

Pour  $i = 1$  nous avons :  $\left\{ R_{p+1}^{(1)} \right\} = 0$ , et  $\left\{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \right\}_p = 0$

On résoud ainsi :

$$[K_{p+1}^{T(1)}] \left\{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \right\}_F = \left\{ P_{ext} \right\}$$

L'incrément de déplacement pour  $i = 1$  s'écrit :

$$\Delta q_{p+1}^{(1)} = \Delta \lambda_{p+1}^{(1)} \cdot \left\{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \right\}_F \quad [VI - 30]$$

Il reste donc à évaluer  $\Delta \lambda_{p+1}^{(1)}$

Avec [VI-27] on écrit :

$$\Delta \lambda_{p+1}^{(1)} = \pm \frac{\overline{\Delta \lambda}_{p+1}}{\|\Delta q_{p+1}^{(1)}\|_F} \quad [VI - 31]$$

Le choix de la bonne valeur de  $\Delta\lambda_{p+1}^{(1)}$  est déterminé de manière à avoir un angle positif entre le vecteur déplacement incrémental à l'itération  $(i-1)$  et le vecteur déplacement incrémental à l'itération courante  $(i)$ .

Dans le cas où  $i = 1$ , le déplacement incrémental à l'itération  $i-1$  est pris en considérant les déplacements à la l'incrément  $p-1$  et  $p$  et est calculé tel que :  $\{q_p - q_{p-1}\}$

Le déplacement incrémental à l'itération courante  $i = 1$  est :

$$\Delta\lambda_{p+1}^{(1)} \cdot \{\Delta q_{p+1}\}_F$$

Ainsi la bonne valeur de  $\Delta\lambda_{p+1}^{(1)}$  est choisie telle que :

$$(q_p - q_{p-1}) \cdot \left( \Delta\lambda_{p+1}^{(1)} \cdot \{\Delta\lambda_{p+1}^{(1)}\}_F \right) > 0 \quad [VI - 32]$$

Ainsi la solution à l'itération  $i = 1$  est :

$$\begin{cases} \{q_{p+1}^{(1)}\} = \{q_p\} + \Delta\lambda_{p+1}^{(1)} \cdot \{\Delta q_{p+1}\}_F \\ \{\lambda_{p+1}^{(1)}\} = \{\lambda_p\} + \Delta\lambda_{p+1}^{(1)} \end{cases} \quad [VI - 33]$$

- à l'itération  $i \geq 2$  : on actualise la matrice de rigidité tangente  $[K_{p+1}^{T(i)}]$  (cas Newton-Raphson)

on calcul le déséquilibre (résidu) et les forces internes :  $Q_{p+1}^{(i)}(\{q_{p+1}^{(i-1)}\})$

$$\{R_{p+1}^{(i)}\} = \lambda_{p+1}^{(i)} \cdot \{P_{ext}\} - \{Q_{p+1}^{(i)}\} \quad [VI - 34]$$

On résout le système :

$$\begin{cases} [K_{p+1}^{T(i)}] \cdot \{\Delta q_{p+1}\}_R = \{R_{p+1}^{(i)}\} \\ [K_{p+1}^{T(i)}] \cdot \{\Delta q_{p+1}\} = \{P_{ext}\} \end{cases} \quad [VI - 35]$$

L'incrément de déplacement résultat s'écrit :

$$\{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} = \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_R + \Delta\lambda_{p+1}^{(i)} \cdot \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_F \quad [VI - 36]$$

Ainsi le déplacement total est :

$$\{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_{p+1}^{(i-1)}\} + \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\} \quad [VI - 37]$$

La longueur d'arc s'écrit :

$$\overline{\Delta L}_{p+1}^2 = \langle q_{p+1}^{(i)} - q_p \rangle \{q_{p+1}^{(i)} - q_p\} \quad [VI - 38]$$

En combinant [VI-36], [VI-37] et [VI-38] on obtient une équation de second degré en  $\Delta\lambda_{p+1}^{(i)}$  à résoudre à chaque itération vers l'équilibre telle que :

$$A \cdot (\Delta\lambda_{p+1}^{(i)})^2 + B \cdot \Delta\lambda_{p+1}^{(i)} + C = 0 \quad [VI - 39]$$

Avec :

$$\begin{cases} A = \langle \Delta q_{p+1}^{(i)} \rangle_F \cdot \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_F \\ B = 2 \cdot \langle \Delta q_{p+1}^{(i)} \rangle_F \cdot \left\{ \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_R + \{q_{p+1}^{(i)} - q_p\} \right\} \\ C = \langle D \rangle \cdot \{D\} - \overline{\Delta L}^2 \end{cases} \quad [VI - 40]$$

Et en posant

$$\{D\} = \{\Delta q_{p+1}^{(i)}\}_R + \{q_{p+1}^{(i-1)} - q_p\} \quad [VI - 41]$$

La résolution de l'équation conduit à deux racines qui doivent être réelles. Dans la cas contraire on reprend le calcul en réduisant la longueur d'arc (avec [VI-25] par exemple). Le choix de la valeur de  $\Delta\lambda_{p+1}^{(i)}$  est fait de la même manière qu'au début de l'incrément ainsi  $\Delta\lambda_{p+1}^{(i)}$  est choisie de façon que :

$$\langle q_{p+1}^{(i-1)} - q_p \rangle \{q_{p+1}^{(i)}\} > 0 \quad [VI - 42]$$

Avec :

$$\{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_{p+1}^{(i-1)}\} + \left( \left\{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \right\}_R + \Delta\lambda_{p+1}^i \cdot \left\{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \right\}_F \right)$$

La solution à l'itération (i) est :

$$\begin{cases} \{q_{p+1}^{(i)}\} = \{q_{p+1}^{(i-1)}\} + \left( \left\{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \right\}_R + \Delta\lambda_{p+1}^i \cdot \left\{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \right\}_F \right) \\ \lambda_{p+1}^{(i)} = \lambda_{p+1}^{(i-1)} + \Delta\lambda_{p+1}^{(i)} \end{cases} \quad [VI - 43]$$

Si cette première solution est convergée on passe à l'incrément suivant, Soit en imposant une autre valeur de la longueur d'arc, soit utilisant le processus automatique déjà défini. Dans le cas contraire le processus itératif est continué sur les itérations suivantes jusqu'à la convergence.

#### VI- 4. METHODE DES CONTRAINTES INITIALES POUR LES PROBLEMES ELASTO-PLASTIQUES :

Dans le cas de l'analyse non linéaire matérielle, la correction de l'état d'équilibre peut porter sur l'un des trois termes  $\{\sigma\}$ ,  $[D_{ep}]$ , ou  $\{\varepsilon\}$ . Dans le cas où la correction porte sur  $\{\sigma\}$  elle est dite de "contraintes initiales", lorsque la correction porte sur  $\{\varepsilon\}$  la méthode est dite de

"déformations initiales", si elle porte sur  $[D_{ep}]$  la méthode est dite de "raideur variable".

La méthode des contraintes initiales est une adaptation de la méthode de Newton-Raphson à la plasticité en utilisant la méthode implicite de rabattement. Elle est proposée par Zienkiewicz et Nayak en 1972. Elle consiste à calculer le résidu à chaque itération à partir de l'état de contraintes résiduelles obtenues, cette différence des contraintes (le résidu) est considérée comme contrainte initiale redistribuée élastiquement sur toute la structure où il est possible que les contraintes s'éloignent quelque peu de la frontière élastique. Pour éviter cet inconvénient, il est nécessaire qu'au terme de chaque itération les contraintes soient ramenées sur la frontière élastique de manière à vérifier la condition d'écoulement plastique. Un processus itératif se répète jusqu'à ce que les forces de redistribution vérifient le critère de convergence.

Cette méthode est plus répandue et largement utilisée (Reynouard 1974, Lemaire 1975, Frantzeskakis 1987, Assan 2002).

##### VI-4-1. PROCEDURE DE RESOLUTION PAR LA METHODE DES CONTRAINTES INITIALES

Si la loi de comportement est telle qu'on puisse déterminer l'état de contraintes correspondante à un état de déformations donné ; c'est-à-dire si elle peut se mettre sous la forme :  $\sigma = f(\varepsilon) + \sigma_0$

On peut alors faire coïncider la loi de comportement élasto-plastique, avec la relation ci-dessus et ceci par ajustement convenable de la valeur de  $\{\sigma_0\}$ , et on est ramené alors à la résolution par une méthode itérative d'une équation du type [VI-7] qui s'écrit :

$$\{R^{(i)}\} + [K^{(i)ep}] \cdot \{\Delta U^{(i)}\} = \{0\} \quad [VI - 44]$$

Comme dans la stratégie de résolution par charge imposée, l'aspect incrémental de la méthode des contraintes initiales consiste à appliquer le niveau de sollicitation par incréments successifs à l'aide d'un paramètre de charge normalisé  $\bar{\lambda}$  défini a priori.

Soit une solution non convergée à l'incrément ( $P$ ) et à l'itération ( $i$ ) définie par le couple charge-déplacement de l'équation [VI-8] :

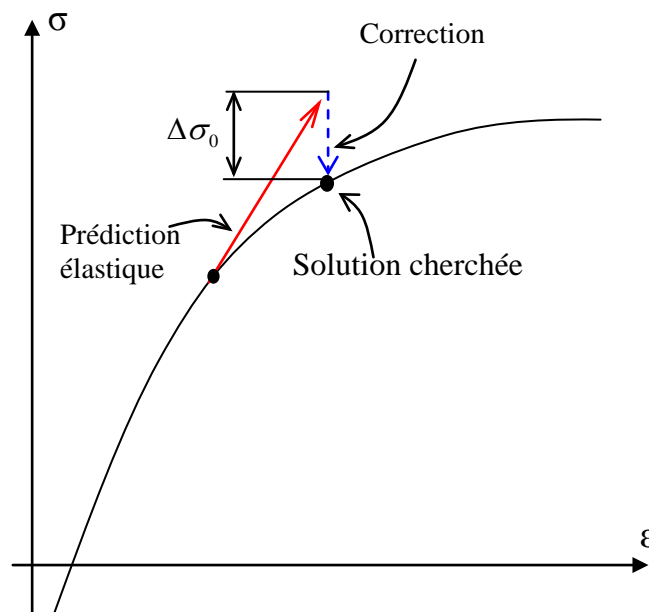
$$\left( \{q_p^{(i)}\}, \lambda_p^{(i)} \right)$$

Cette solution non convergée provoque un déséquilibre entre les forces extérieures et celles intérieures décrit à l'aide de l'équation [VI-10] comme suit:

$$\bar{\lambda}_p \cdot \{P_{ext}\} - \{Q_p^{(i)}(\{q_p^{(i)}\})\} = \{R_p^{(i)}\} \quad [VI - 45]$$

Le déséquilibre du système défini par cette équation peut être éliminé si la solution non convergée  $(\{q_p^{(i)}\}, \bar{\lambda}_p)$  est corrigée. La méthode des contraintes initiales nous permet de corriger cette solution par une solution à l'itération ( $i + 1$ ) et après de ramener les contraintes résiduelles (plastiquement non admissibles) sur la surface d'écoulement plastique, c-à-d que les contraintes sont ramenées à la valeur correcte en introduisant une contrainte initiale  $\{\Delta\sigma_0\}$  figure (VI-12).

Il faut noter que en tout point d'intégration, il ne peut y avoir transition du domaine élastique au domaine plastique ou inversement qu'au cours de l'incrément de chargement; cet état demeure ensuite inchangé pour les itérations suivantes



**Figure (VI-12). Principe de la méthode des contraintes initiales**



### VI-4.2. ALGORITHME DE RESOLUTION DE LA METHODE DES CONTRAINTES INITIALES

Soit une solution  $(\{q_p\}, \bar{\lambda}_p)$  convergée à l'incrément  $p$  :

On impose un incrément de charge  $p+1$  tel que :

- à l'itération  $i = 1$  : on construit la matrice de rigidité tangente  $K_{p+1}^{T(1)}$  telle que :

$$K_{p+1}^{T(1)} = K_{p+1}^{(1)ep} + K_{p+1}^{(1)\sigma} \quad [VI - 46]$$

On résoud :

$$\left[ K_{p+1}^{T(1)} \right] \cdot \{ \Delta q_{p+1}^{(1)} \} = (\bar{\lambda} - \lambda_p) \cdot \{ P_{ext} \} \quad [VI - 47]$$

- à l'itération  $i = 1$  :

La solution est considérée élastique car l'état du matériau dans l'espace des contraintes n'est pas encore défini. Les équations d'équilibre sont satisfaites, mais le calcul des contraintes peut donner l'un des cas suivants :

$F(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}^e) < 0$  et  $F(\sigma_{ij}) < 0$  : le comportement reste élastique et l'évaluation de  $\{ \Delta\sigma_{ij}^e \}$  est correct.

$F(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}^e) < 0$  et  $F(\sigma_{ij}) = 0$  : il y a décharge élastique,  $\{ \Delta\sigma_{ij}^e \}$  est correct.

$F(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}^e) > 0$  : une plastification s'est produite au cours de cette itération. Le calcul des contraintes supposé élastique conduit à un état plastiquement non admissible *figure (IV.13.a)* et *figure (IV.13.b)*. On doit effectuer une correction sur le tenseur de contraintes (calcul du rabatement) afin de le ramener sur la surface d'écoulement en appuyant sur l'approche de rabatement de la méthode implicite. On utilisant les relations :

$$\begin{cases} \{ \Delta N^p \} = |1-R| \cdot \{ \Delta N_i^e \} - \lambda \cdot [D_m] \left\{ \frac{\partial F}{\partial N} \right\} \\ \{ \Delta \varepsilon^p \} = \lambda \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial N} \right\} \end{cases} \quad [VI - 48]$$

$$\begin{cases} \{ \Delta M^p \}^m = |1-R| \cdot \{ \Delta M_i^e \} - \lambda \cdot [D_f] \left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\} \\ \{ \Delta \chi^p \}^m = \lambda \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial M} \right\} \end{cases} \quad [VI - 49]$$

- à l'itération  $i \geq 2$  :

On actualiser la matrice de rigidité  $[K_{p+1}^{T(i)}]$  (cas de la correction de Newton-Raphson)

- Le déplacement  $\{ q_{p+1}^{(i-1)} \}$  permet de calculer les forces internes  $\{ Q_{p+1}^i(q_{p+1}^{(i-1)}) \}$
- On calcul ensuite le déséquilibre résidu par l'équation [VI-17] :

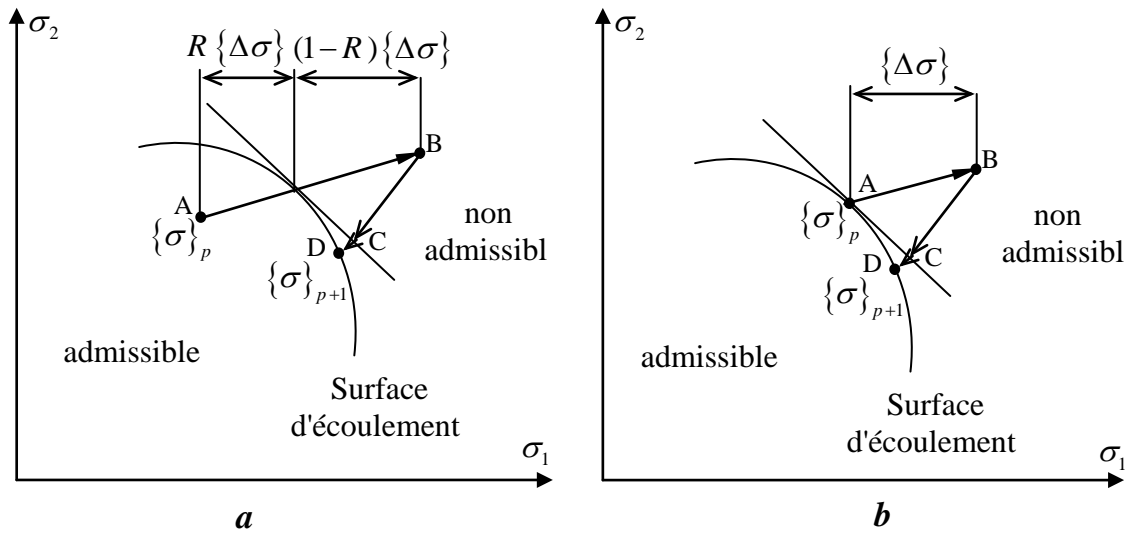
$$\{ R_{p+1}^{(i)} \} = \bar{\lambda} \{ P_{ext} \} - \{ Q_{p+1} \}$$

Ce résidu est considéré élastique. On résoud l'équation [VI-20] :

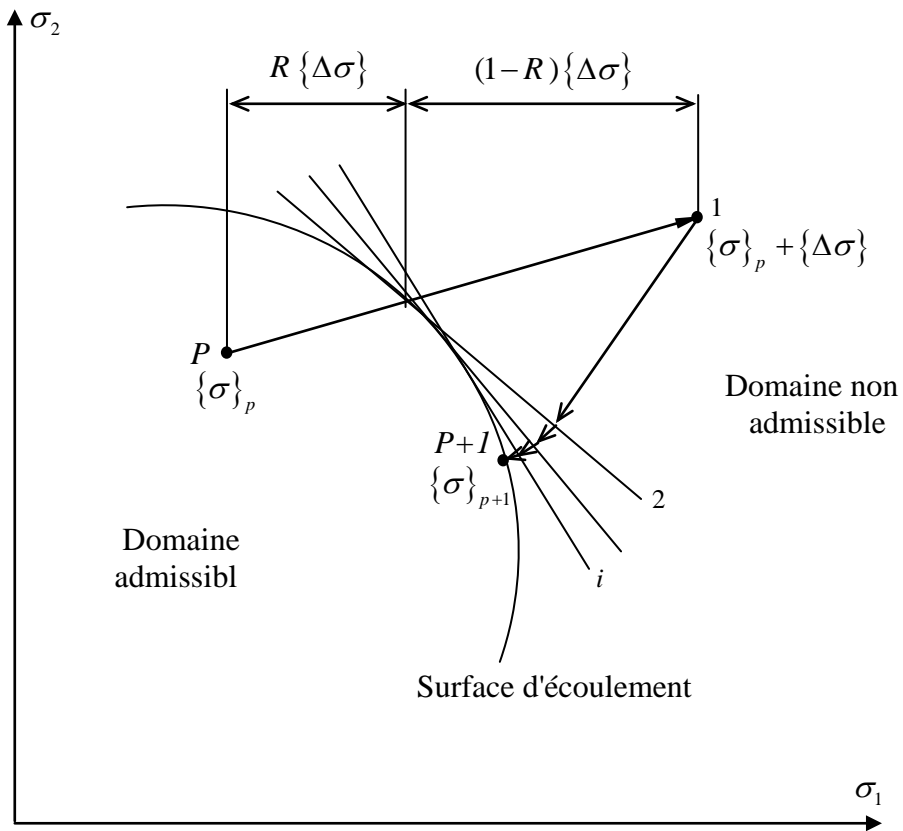
$$\left[ K_{p+1}^{T(i)} \right] \cdot \{ \Delta q_{p+1}^{(i)} \} = \{ R_{p+1}^{(i)} \}$$

Ainsi le calcul des contraintes peut donner l'un des cas précédents cités à l'itération (1).

Si cette solution est convergée le processus est continué sur les incréments suivants, si non nous passons à l'itération suivante jusqu'à la convergence.



**Figure (VI-13). a- Etat élasto-plastique ( $R \neq 0$ ), b- Etat complètement plastique ( $R = 0$ )**



**Figure (VI-14). Rabattement par la méthode des contraintes initiales**

La différence entre la méthode implicite de rabattement et la méthode des contraintes initiales c'est que la première divise l'incrément de contraintes en  $m$  parties pour tous les incréments, au contraire la méthode des contraintes initiales ne divise pas l'incrément de contraintes, mais elle s'appuie sur la minimisation du résidu, On cherche la partie qui garde le critère vérifié et on redistribue le reste de manière à faire apparaître des déformations plastiques et satisfaire les équations d'équilibre *figure (VI-14)*, cela assure la précision et la rapidité à la fois.

#### VI- 4. CRITERE DE CONVERGENCE :

le processus de redistribution des forces nodales résiduelles se continue à cause du manque d'équilibre jusqu'à ce qu'elles deviennent négligeables. Un critère de convergence est donc nécessaire pour vérifier la condition d'équilibre. Ainsi l'équilibre du solide est jugé satisfaisant quand la norme du résidu d'équilibre (sur un incrément) est suffisamment petite comparativement à la norme du premier résidu.

- Le critère de forces s'écrit : 
$$\frac{\|R_p^1\|}{\|R_p^i\|} \leq \varepsilon_r$$

Où  $\varepsilon_r$  est le seuil de convergence du résidu.

$\|R_p^1\|, \|R_p^i\|$  sont respectivement le résidu à l'itération (1), et le résidu à l'itération (i).

Dans la pratique, il est observé que pour certains cas, ce critère est insuffisant et même pour une faible valeur du  $\varepsilon_r$  on peut observer des variations au niveau du vecteurs de champ du déplacement.

Pour garantir que la solution obtenue constitue une bonne mesure du champ du déplacement il faut assurer aussi que la norme de la dernière correction  $\|\Delta q_p^{(i)}\|$  est suffisamment petite par rapport au déplacement cumulé sur l'incrément.

- Le critère de déplacements s'écrit : 
$$\frac{\|\Delta q_p^{(i)}\|}{\|q_p^{(i)} - q_{p-1}\|} \leq \varepsilon_d$$

$\{\Delta q_p^{(i)}\}$  : Déplacement incrémental à l'itération (i)

$\{q_p^{(i)}\}$  : Solution actuelle à vérifier

$\{q_{p-1}\}$  : Solution convergée de l'incrément  $p-1$

$\varepsilon_d$  est le seuil de convergence du vecteur déplacements.

La valeur de  $\varepsilon_d = 10^{-3}$  conduit généralement à des résultats très satisfaisants.

La norme à utilisée soit pour le résidu ou bien pour le déplacement peut être choisit indifféremment parmi les trois normes classiques (la norme absolue, euclidienne, ou la norme du maximum).

On fixe aussi un nombre maximum d'itération, si le critère de convergence n'est pas satisfait après ce nombre le processus s'arrête est la solution est considérée divergée.

## Chapitre VII

# Tests et Validation Numérique

**INTRODUCTION :**

Les éléments plaques et coques peuvent être classés selon la géométrie en plan en deux types : éléments triangulaires et éléments quadrilatéraux. Les éléments triangulaires ont l'avantage par rapport aux éléments quadrilatéraux dans leur efficacité de maillage des géométries courbes et singulières et leur faible sensibilité à la distorsion du maillage. D'un autre côté, en analyse non linéaire géométrique et en formulation lagrangienne actualisée les éléments quadrilatéraux ont l'inconvénient que la géométrie actualisée peut se défaire de la géométrie déformée réel parce que 4 noeuds du quadrangle déformé ne se trouvent pas obligatoirement dans le même plan comme nous l'avons vu dans (V-I-6). Notre objectif est d'introduire quelques améliorations à la formulation de l'élément quadrilatère pour le rendre plus efficace.

A cette fin, dans ce travail nous avons développé, l'élément fini de membrane avec "*Drilling rotation*" proposé par [IBRAHIMBEGOVIĆ 1990] pour le coupler à des éléments quadrilatères plaque de type Kirchhoff ou de type Mindlin-Reissner pour fournir un élément efficace de coque à 4 noeuds. Ainsi nous disposons dans notre programme les éléments cités appliqués aux analyses suivantes :

**En analyse non linéaire géométrique :**

$DKQ$  + membrane avec rigidité fictive : est appelé "Quad"

$DKQ$  + membrane avec "*Drilling rotation*" : est appelé "Qdrill"

**En analyse non linéaire matérielle :**

$DKQ$  + membrane avec "*Drilling rotation*" : est appelé "QKirch"

$Q4\gamma$  + membrane avec "*Drilling rotation*" : est appelé "Qmind"

### **VII- 1. PROGRAMME ET DEVELOPPEMENT INFORMATIQUE**

La programmation des éléments développés est implantée sur programme principale par E.F développé au laboratoire de génie civil d'Annaba ces dernières années. Ce programme constitue une ossature de code source ouvert au développement à de nouveaux élément et de nouvelles analyse par Élément finis ; Il est écrit en langage fortran 90 et s'exécute au moyen d'un fichier de donné. L'exécution de ce programme pour les tests, a été menée sur un micro ordinateur à processeur P4.

La structure des programmes développés ainsi que le programme principale dans lequel sont implantés les éléments ainsi que les algorithmes utilisés sont détaillé dans les organigrammes des annexes *III, IV, V, VI et VII*

### **VII- 2. VALIDATION DES ELEMENTS DEVELOPPES**

Afin de vérifier le comportement des éléments proposé sous différentes formulations, nous nous proposons d'illustrer leurs performances par un certain nombre d'exemples numériques. Ces éléments ont été appliqués à des exemples dans le but d'étudier certains aspects du comportement des structures à parois minces.

Nous commençons par rappeler que l'élément est intégré selon un schéma de 2x2 points de Gauss. Il passe le patch test, qui est un test simple et académique pour vérifier le minimum requis pour sa fiabilité et ceci en tant qu'élément de flexion ou en tant qu'élément de membrane (voir chapitre *IV*). Nous nous proposons maintenant de montrer les propriétés de convergence de l'élément fini proposé par sa validation dans des problèmes typiques et convenablement choisis en analyse non linéaire.

Cette validation est devisée en deux parties. La première est consacrée aux problèmes de la non linéarité géométrique, basée sur une formulation lagrangienne corotationnelle permettant de résoudre les problèmes de grand déplacement accompagné de grandes rotations. La deuxième est consacrée à l'analyse non linéaire matérielle basée sur une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par d'autres auteurs, ainsi qu'avec l'élément triangulaire de coque basé sur la superposition des éléments DKT, CST avec rigidité fictive. Cet élément a déjà été développé et implanté dans le même code source que nous avons utilisé actuellement dans le laboratoire de génie civil. La comparaison a aussi été faite avec des solutions analytiques exactes ou des solutions expérimentales qui sont disponibles dans la littérature. Ces problèmes sont choisis pour examiner des possibilités prédictives de l'élément fini pour le grand déplacement/rotations et grande déformation des plaques et coques. La convergence des solutions est évaluée en rapportant des valeurs de déplacements des points significatifs aux solutions de référence.

### VII- 3. NON LINEAIRITE GEOMETRIQUE

Dans cette partie des exemples de moyenne et forte non linéarité sont traités. Ils sont présentés pour vérifier la formulation en grand déplacement et grand rotation adoptée et surtout pour vérifier la précision, la robustesse, et l'économie de l'élément fini proposé. Les cas d'intérêt particulier, tels que les coques avec des raidisseurs, ont aussi été traités.

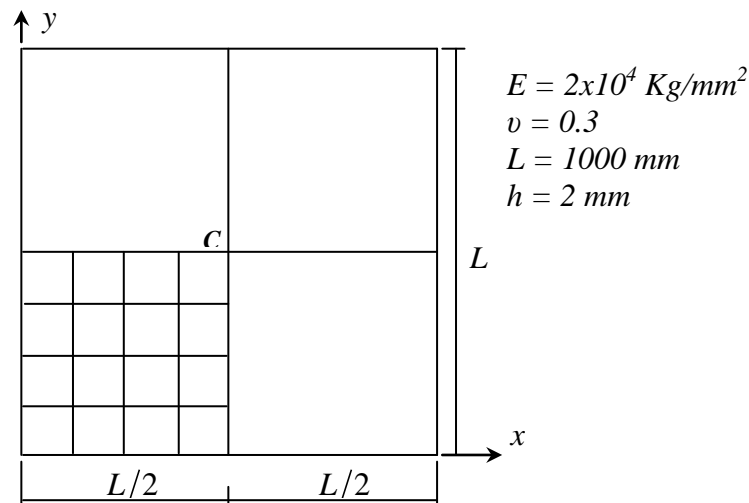
Comme la résolution numérique est basée sur un algorithme incrémentale itérative, les résultats obtenus dépendent de la tolérance utilisée pour la convergence de la solution. Il est adopté alors une valeur de précision de convergence de  $\varepsilon = 0.001$  et ceci que ce soit pour les tests sur le déplacement ou sur la force.

#### VII-3-1. Plaque carrée sous charge uniformément répartie :

##### \*cas de la plaque encastrée

Le premier exemple sert à vérifier le comportement d'une coque de géométrie initiale plane modélisée par des éléments coplanaire pour examiner la validité de l'interpolation choisie pour  $\theta_z$ . L'exemple est une plaque mince ( $L/h = 500$ ) carrée encastrée sur les quatre côtés, dont la géométrie et les caractéristiques mécaniques sont présentées sur la *figure (VII-1)*. La plaque est soumise à l'action d'une charge uniformément répartie croissante  $q$ . En raison de la double symétrie de la géométrie, des conditions limites, et du chargement, seulement un quart de la plaque est modélisé par 4 x 4 éléments rectangulaires.

La réponse de la plaque en analyse non linéaire géométrique est présentée par la courbe charge – déplacement vertical du point  $c$  de la *figure (VII-2)*.



**Figure (VII-1). Plaque Carrée sou charge répartie : Géométrie, et maillage**

Cet exemple a été traité par plusieurs auteurs [RAMESH & KRISHNAMOORTHY 1995], [CHOI & PAIK 1996], [WANJI & SHIJIE 1998], [HONG & al 2001], [CHUL & YONG 2002], [ZHANG & CHEUNG 2003]. La solution obtenue est comparée avec la solution analytique de Rayleigh-Ritz obtenu par Way (1938) issue de la référence [Hong & al 2001], *figure (VII-2)*.

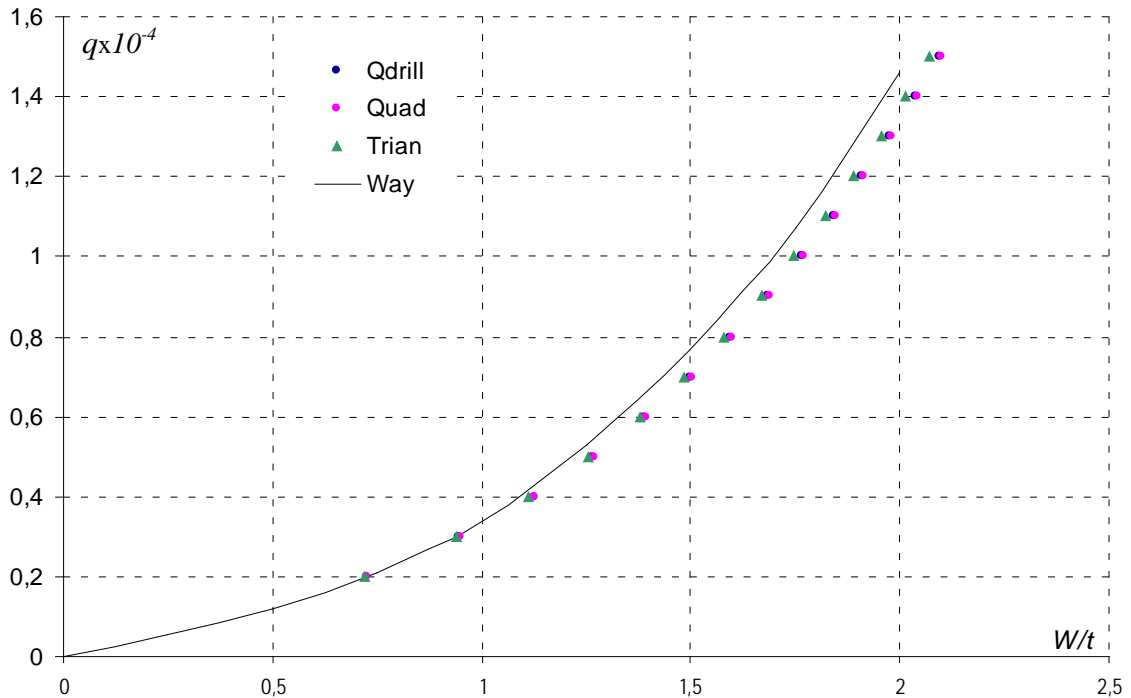
Les résultats obtenus par "Qdrill" et "Quad" sont très voisins avec ceux obtenus par l'utilisation de l'élément triangulaire DKT coque avec rigidité fictive avec un nombre d'itération convenable. Mémé si les résultats obtenus ne sont pas confondus avec la solution analytique elles restent en accord avec les résultats numérique d'autres auteurs. Cet exemple a constitué pour nous un premier test de validation vérifiant le bon fonctionnement de l'élément

##### \*cas de la plaque encastrée

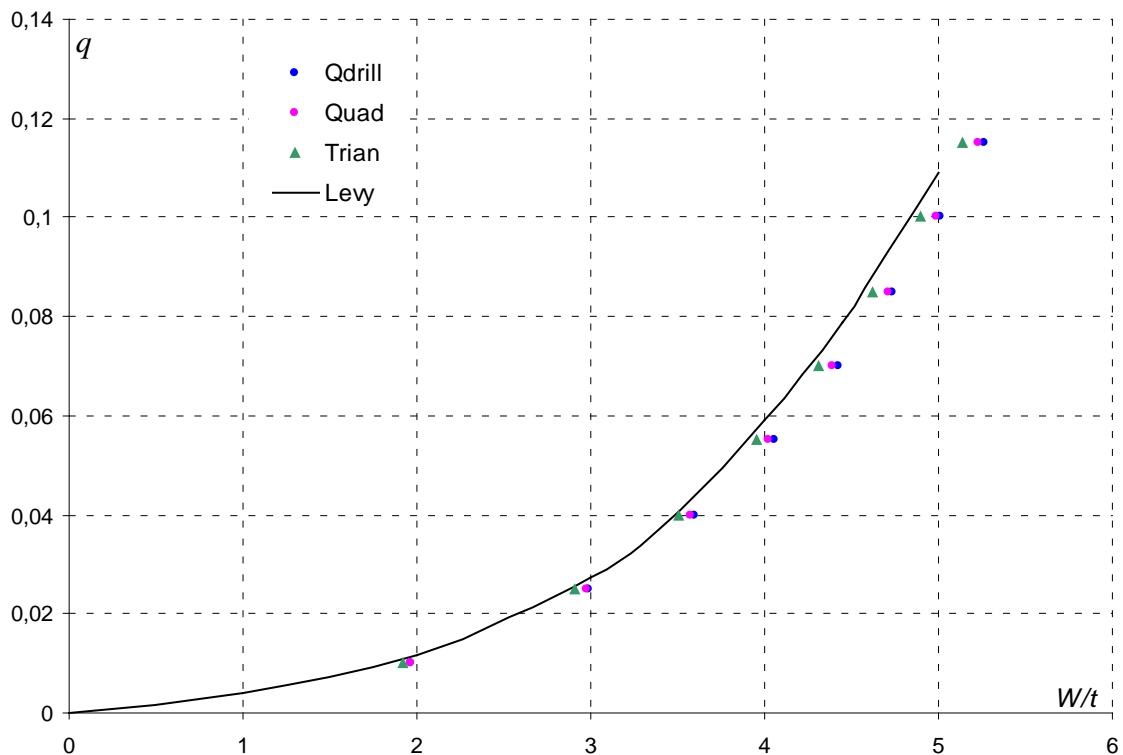
Une autre plaque est ensuite analysée mais cette fois elle est simplement supporté sur le contour, avec les propriétés suivantes : Longueur de côté  $L = 416 \text{ mm}$ , épaisseur  $h = 2.54 \text{ mm}$ ,

module de Young  $E = 211 \text{ kN/mm}^2$ , et coefficient de Poisson  $\nu = 0.316$ . Le comportement de la plaque sous l'action de la charge uniformément répartie est illustré par la courbe de la *figure (VII-3)*, où nos résultats sont comparés avec la solution analytique de Levy (1942) issue de la référence [MEEK & RISTIC 1997].

**Remarque:** Lors de la modélisation de cet exemple et tout les autres exemples par l'élément "Qdrill", aucune précaution n'à prendre pour ce qui concerne la 6<sup>ème</sup> ddl contrairement aux éléments avec rigidité fictive où il faut bloquer la 6<sup>ème</sup> ddl dans les noeuds du contour.



**Figure (VII-2). Plaque encastree : Courbe Charge – Déplacement**



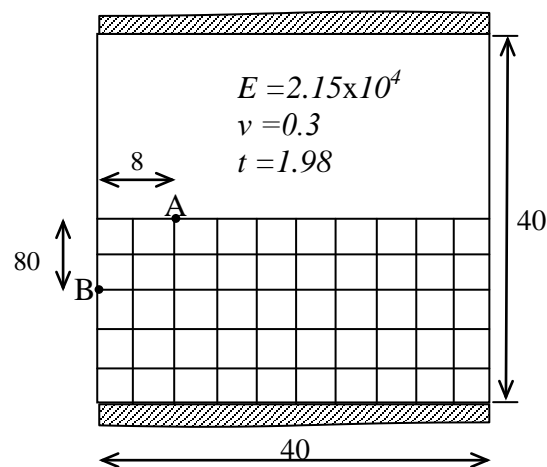
**Figure (VII-3). Plaque simplement appuyee : Courbe Charge – Déplacement**



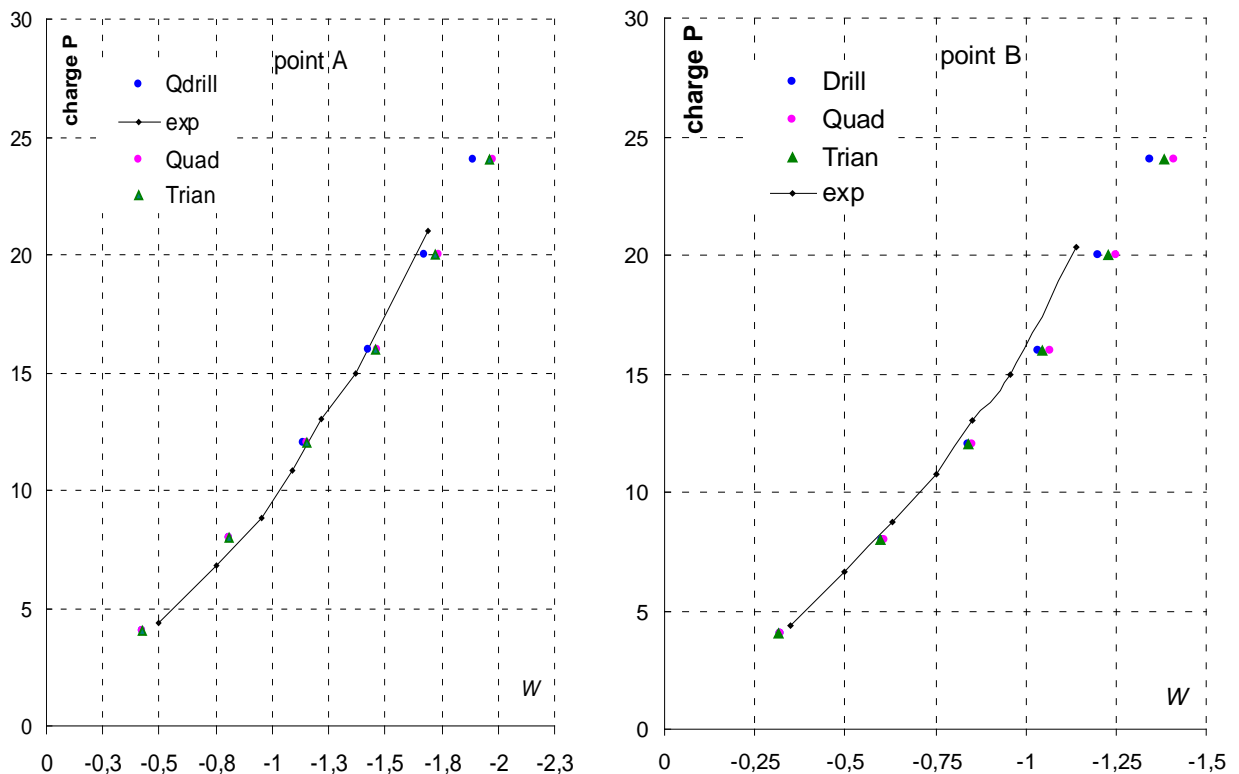
### VII-3-2. Plaque carrée sous charge concentrée :

Cet exemple concerne une plaque carrée encadrée sur deux bords opposés et libre sur les deux autres, avec les caractéristiques présentés à la *figure (VII-4)*. La charge appliquée dans ce cas est une charge concentrée agissant sur le point A. par raison de la symétrie de géométrie, conditions limites, et chargement, seulement un demi de la plaque est modélisé en (5 x 10) éléments rectangulaires. La courbe charge déplacement vertical du point A, et B obtenue est mise en comparaison avec le résultat expérimental issue de la référence [PACOSTE 1998]. Les résultats sont présentés par la *figure (VII-5)*.

L'élément "Qdrill" montre une meilleure concordance avec le résultat expérimental par rapport au deux autres éléments. Cela montre que la solution avec "drilling rotation" est meilleure que la solution avec rigidité fictive. Dans l'autre coté l'analyse par "Qdrill" en pilotage de type charge imposée nécessite un nombre d'itérations total égale 29 et légèrement supérieur au nombre d'itérations dans le cas des éléments a rigidité fictive. (26)



**Figure (VII-4). Plaque Carrée sous charge concentrée : Géométrie, maillage, et CL**



**Figure (VII-5). Plaque sous charge concentrée : Courbe Charge – Déplacement du point A et B**

**VII-3-3. Arc de Williams :**

Un arc de géométrie présenté par la *figure (VII-6)* à été proposé par Williams [WILLIAMS 1964], il est constitué de deux branches droites forment un V renversé encastré à ces deux extrémités est analysé lorsqu'elle est chargée en son centre.

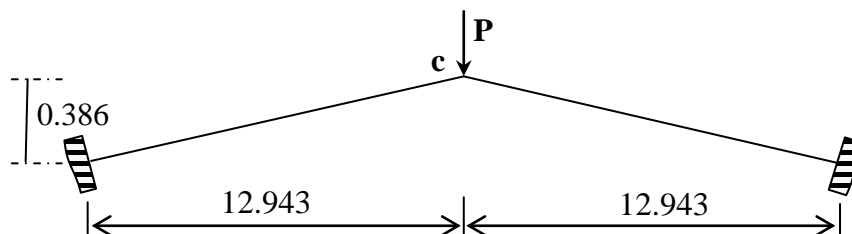
Les caractéristiques de la section de cette structure sont les suivants :

Largeur  $b = 0.753$ , épaisseur  $h = 0.243$ , Module de Young  $E = 103.10^5$ , et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . L'avantage de symétrie, nous permet de modéliser seulement un demi de l'arc en utilisant six rectangles comme dans la *figure (VII-7)*.

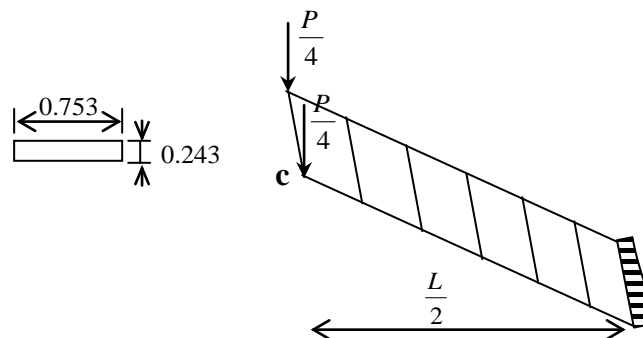
Une modélisation avec l'élément "Qdrill" donnant l'évolution de la flèche du point central en fonction de la charge est présenté par la *figure (VII-9)*. Cette courbe est comparée à la courbe solution analytique de Williams [WILLIAMS 1964], et aussi [YANG & al 2007-a].

Les résultats obtenus en utilisant les éléments "Qdrill", et "Quad", sont parfaitement confondus avec la solution de référence de Williams, l'élément triangulaire donne aussi de bons résultats.

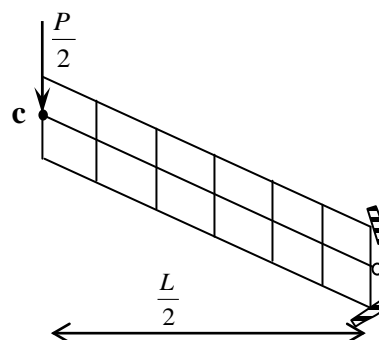
Nous avons un nombre total d'itérations égal à 63 pour les éléments quadrilatères, et 56 pour l'élément triangulaire, en utilisant un pilotage de type longueur d'arc imposé. Cet exemple simple est souvent utilisé pour tester un programme d'analyse non linéaire avec branche instable



**Figure (VII-6). Arc de Williams : géométrie, et conditions limites**

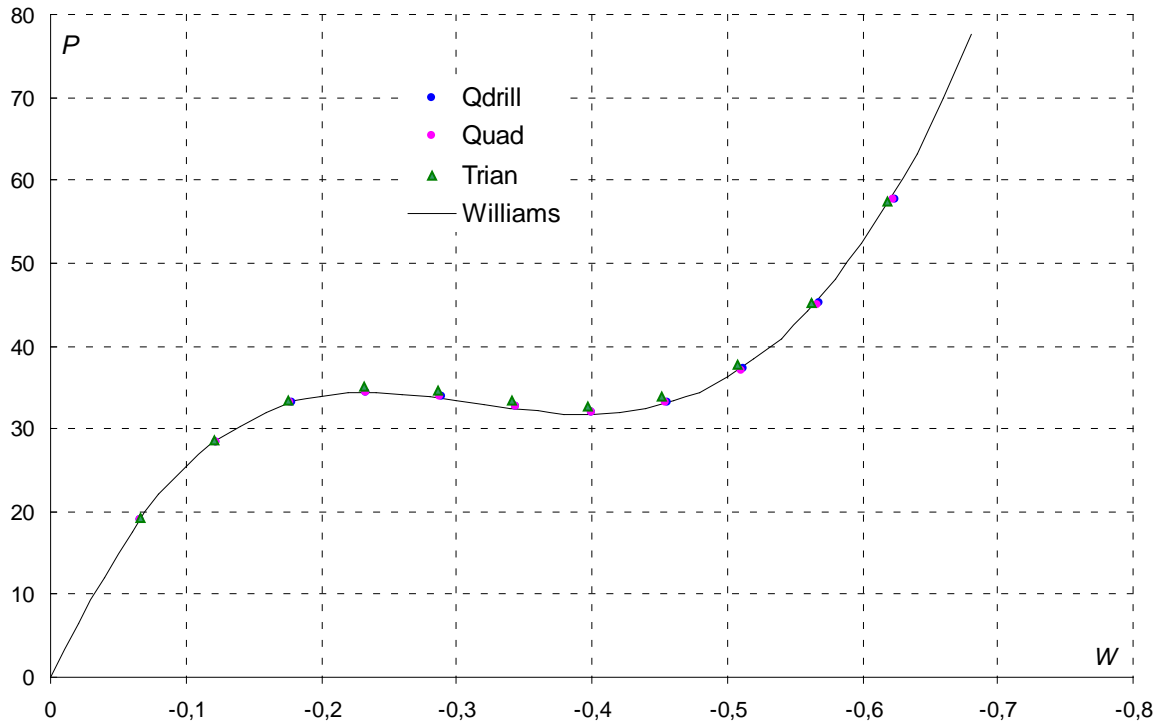


**Figure (VII-7). Arc de Williams: géométrie, et maillage pour un quart**

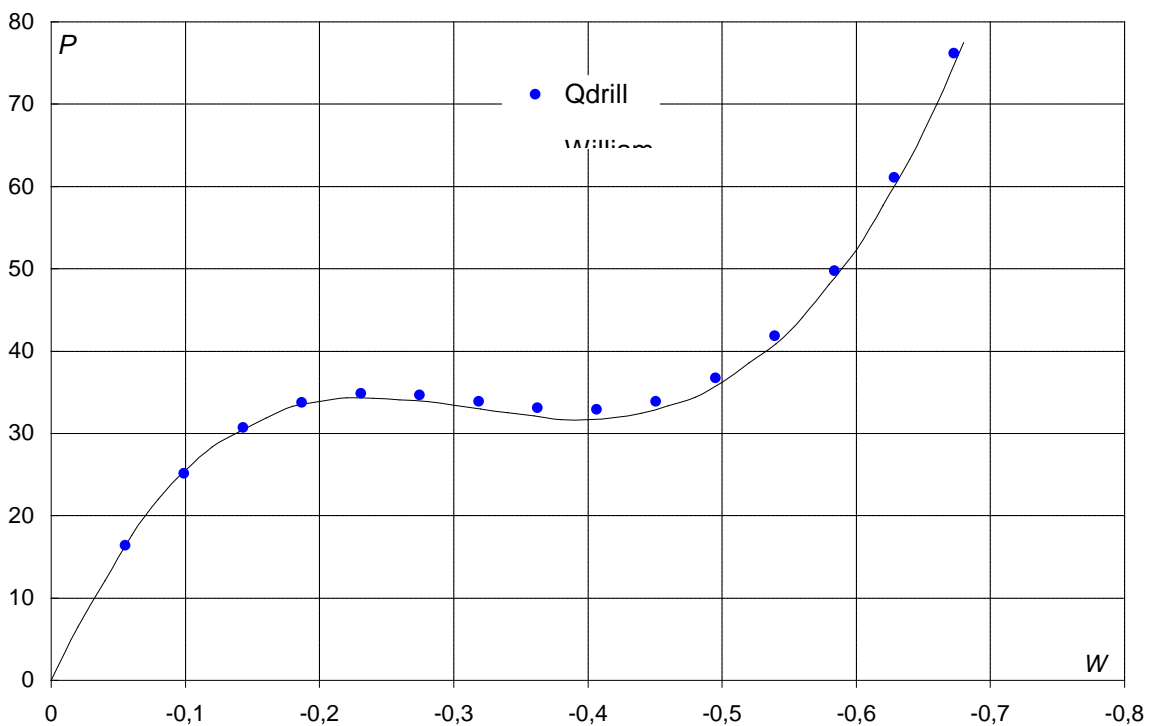


**Figure (VII-8). Arc de Williams: deuxième possibilité de modélisation**

**Remarque :** Un test plus sévère consiste à changer la manière de la modélisation de cet exemple. En effet contrairement à la première modalisation où elle est faite sur la largeur, dans ce cas la modélisation est faite suivant l'épaisseur *figure (VII-8)*. Il est à noter dans ce cas les éléments ont une dimension très faible par rapport à l'autre. Dans ce cas seul l'élément avec *Drilling rotation* "Qdrill" donne des résultats corrects. Cette manière de modélisation donne de bons résultats bien que les éléments soient distordus et la force est membranaire et dénote des bonnes performances de l'élément avec drilling rotation pour des situations de discrétisation sévères



**Figure (VII-9). Arc de Williams: courbe charge déplacement**



**Figure (VII-10). Arc de Williams: courbe charge déplacement (deuxième modalisation)**

### VII-3-4. Coque Cylindrique sous charge Concentrée :

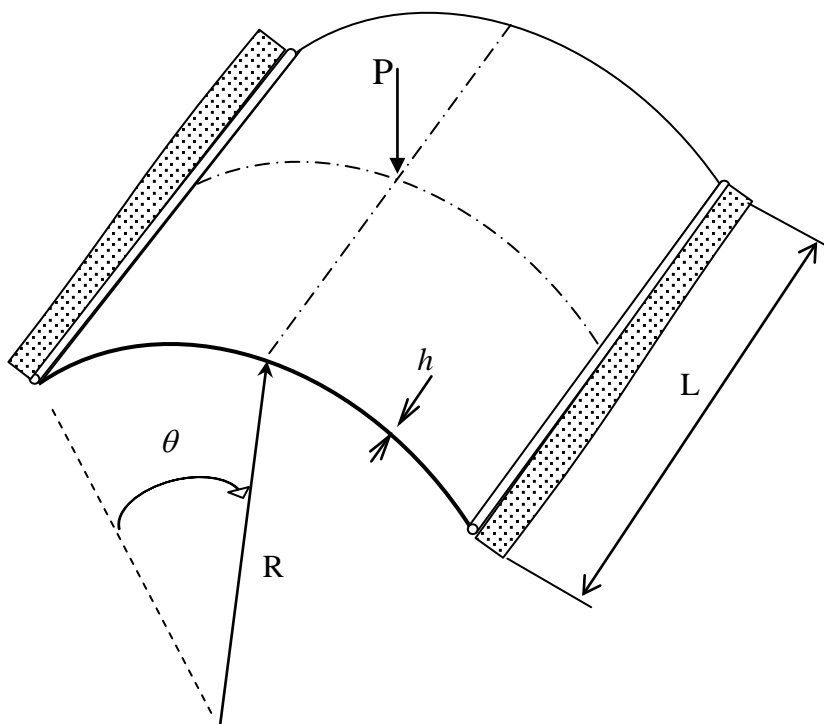
Dans cet exemple, le comportement d'une coque cylindrique mince, sous l'action d'une charge concentrée est étudié. Le cylindre est simplement supportée le long des côtés droite, libre le long des coté courbes, comme le montre la *figure (VII-11)*. Une charge centré croissante  $P$  est appliquée au point  $c$  *figure (VII-12)*.

Les caractéristiques géométriques et physiques du cylindre sont les suivantes :

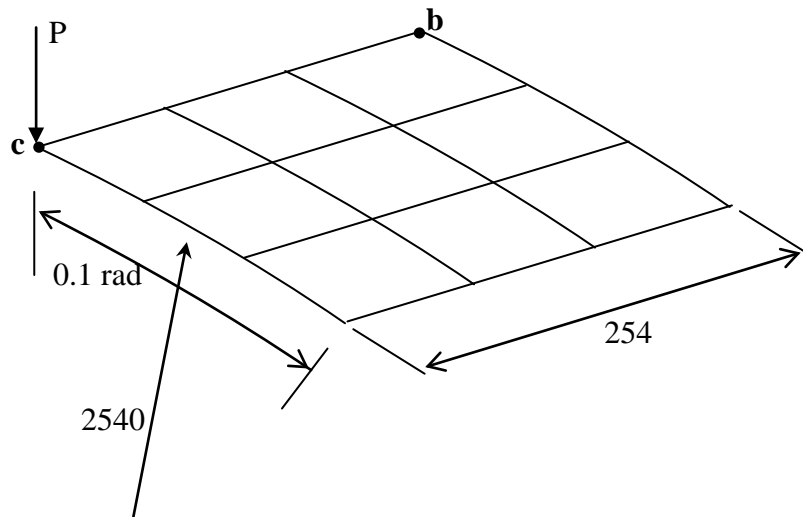
Rayon de courbure  $R = 2540 \text{ mm}$ , Longueur de côté  $L = 508 \text{ mm}$ , épaisseur  $h = 12.7 \text{ mm}$ ,  $2 \cdot \theta = 0.2 \text{ rad}$ , module de Young  $E = 3.10275 \text{ kN/mm}^2$ , et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

En raison de la double symétrie de la géométrie, des conditions limites, et du chargement, seulement un quart de la coque est considéré et modélisé avec un maillage de (3 x 3) éléments rectangulaires.

Le premier objectif de cet exemple est d'examiner la sensibilité du comportement de la coque à la variation de l'épaisseur  $h$ . A cet effet deux cas sont considérés : un premier cas avec une épaisseur  $h=12.7 \text{ mm}$ , l'autre avec  $h=6.35 \text{ mm}$  ( $c\text{-à-d } R/h = 200$  et  $R/h = 400$  respectivement). Cet exemple est un test très populaire et très utilisé en analyse non linéaire géométrique. Il a été étudié par plusieurs auteurs [RAMESH & KRISHNAMOORTHY 1995], [CHOI & PAIK 1996], [MEEK & RISTIC 1997], [PACOSTE 1998], [FERREIRA & BARBOSA 2000], [MASSIN & AL MIKDAD 2002], [ZHANG & CHEUNG 2003], [AREIAS & al 2005], [LEE & NUKULCHAI 1998], [YANG & al 2007-b], [ANDRADE & al 2007], [HAN & al 2008]. Ce test est utilisé pour vérifier la formulation éléments finis pour l'analyse non linéaire et pour tester les capacités de l'algorithme à trouver tout le chemin d'équilibre dans un cas de forte non linéarité. L'analyse menée dans ce travail montre qu'il n'est pas possible de tracer la branche instable de cet exemple par élément quadrilatéral avec rigidité fictive "Quad", les résultats à illustrés dans ce qui de suit sont obtenus par l'élément "Qdrill" et l'élément Triangulaire.



**Figure (VII-11). Coque Cylindrique : géométrie, et conditions limites**

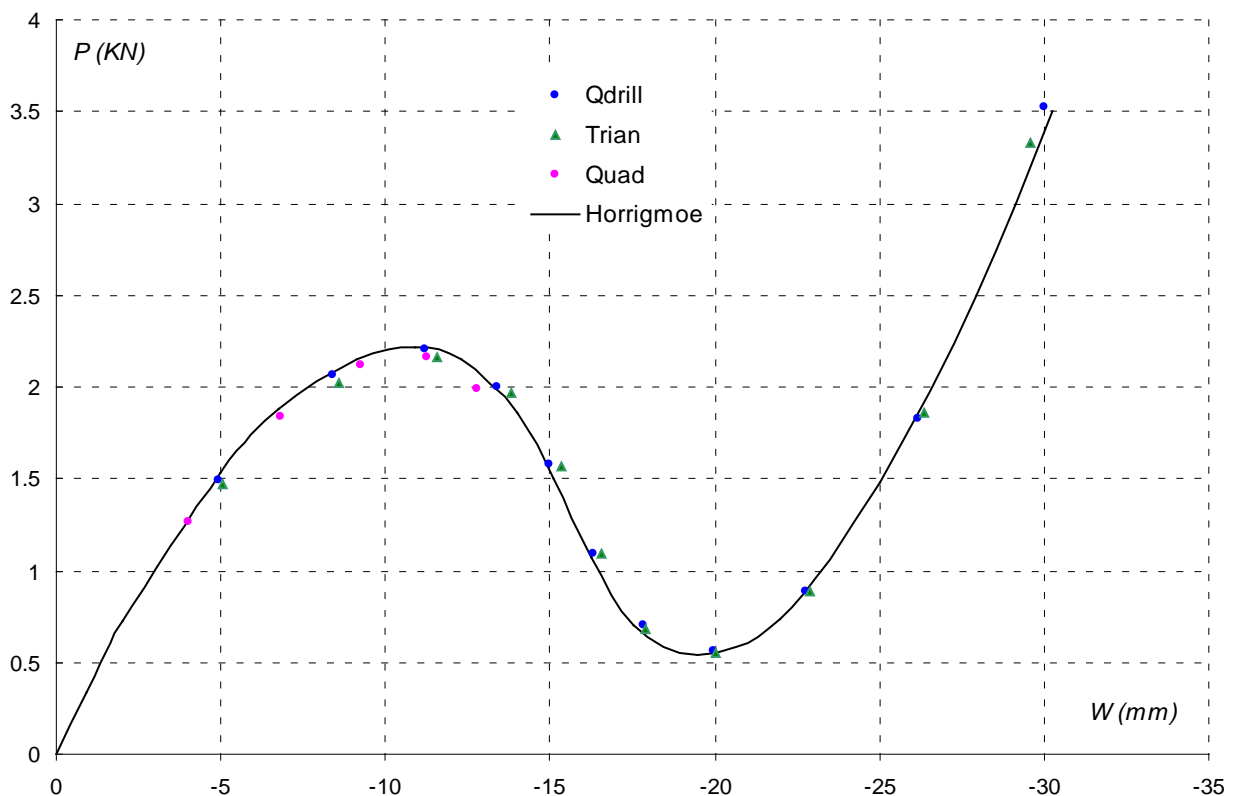


**Figure (VII-12). Coque cylindrique : Dimensions, et maillage pour un quart**

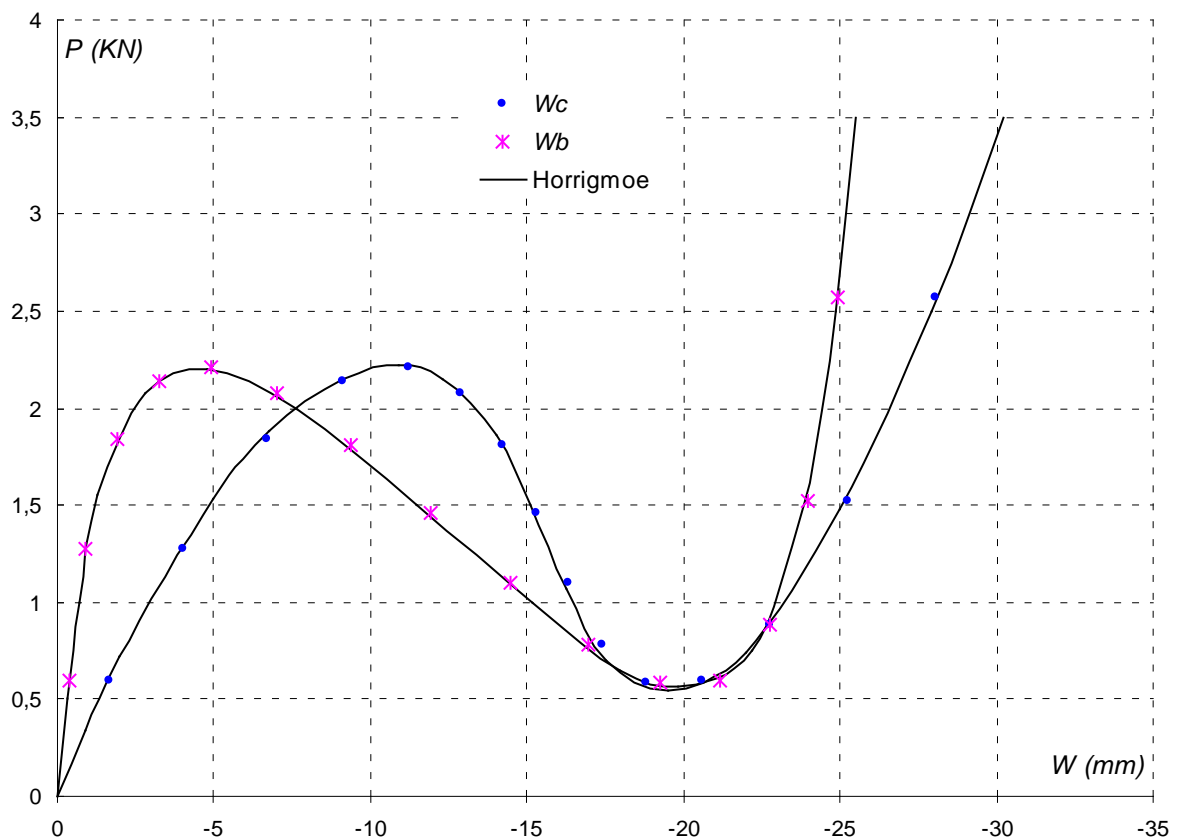
*\*Cylindre à épaisseur 12,7 mm*

Pour le cylindre de 12.7 mm d'épaisseur, le déplacement vertical du point central  $W_c$  obtenu est présenté par la *figure (VII-13)*, la courbe est obtenue par un pilotage longueur d'arc imposé. Pour la comparaison de nos résultats nous référons aux courbes charge déplacement de Horrigmoe et Bergan, issue de [Han & al 2008]. Les résultats obtenus par l'élément "Qdrill" présentent une convergence précise vers la solution de référence.

Le nombre total d'itérations nécessaire pour tracer la courbe de la *figure (VII-13)* pour l'élément "Qdrill" est 51, tandis que l'élément triangulaire nécessite 61 itérations. L'élément "Quad" ne réussit pas à traverser la branche instable de la courbe de réponse et le nombre d'itérations est très élevé. Le déplacement du bord  $W_b$  est présenté devant le déplacement du centre à la *figure (VII-14)*, en utilisant l'élément "Qdrill"



**Figure (VII-13). Coque cylindrique 12.7 : courbe charge déplacement central**



**Figure (VII-14). Coque cylindrique 12.7 : courbe charge déplacement  $W_c$ , et  $W_b$**

*\*Cylindre à épaisseur 6.35 mm*

Lorsque l'épaisseur est réduite de moitié :  $h = 6.35 \text{ mm}$ , le comportement non linéaire du cylindre change radicalement. Nous remarquons l'apparition de deux points limites charge, et deux points limites déplacement sur la courbe de réponse de la structure.

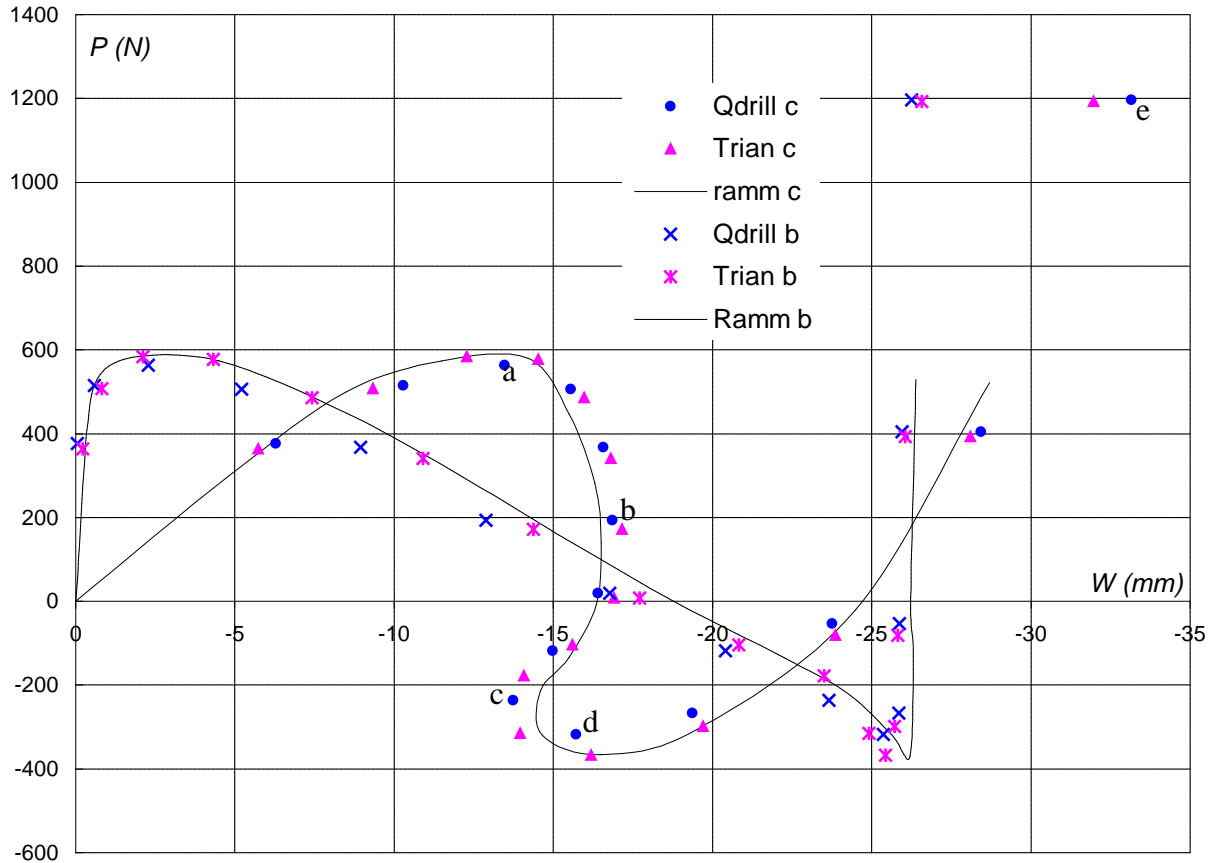
La courbe charge déplacement vertical des points  $c$  et  $b$  est présentée par la *figure (VII-15)*. La comparaison de cette dernière avec la courbe de la *figure (VII-14)* indique que la réduction d'épaisseur à la moitié produit non seulement la réduction de la charge limite mais conduit aussi à un cloquage très prononcé *figure (VII-17)*. Ce test est largement utilisé pour vérifier la formulation ainsi que la performance d'algorithme de pilotage.

Pour la comparaison de nos résultats nous nous référons aux courbes charge-déplacement de [CRISFIELD 1979], [RAMM 1982], Horrigmoe et Bergan 1978 tiré de la référence [Han & al 2008], et de Sabir et Lock 1972 tiré de la référence [RAMM 1982] *figure (VII-16)*.

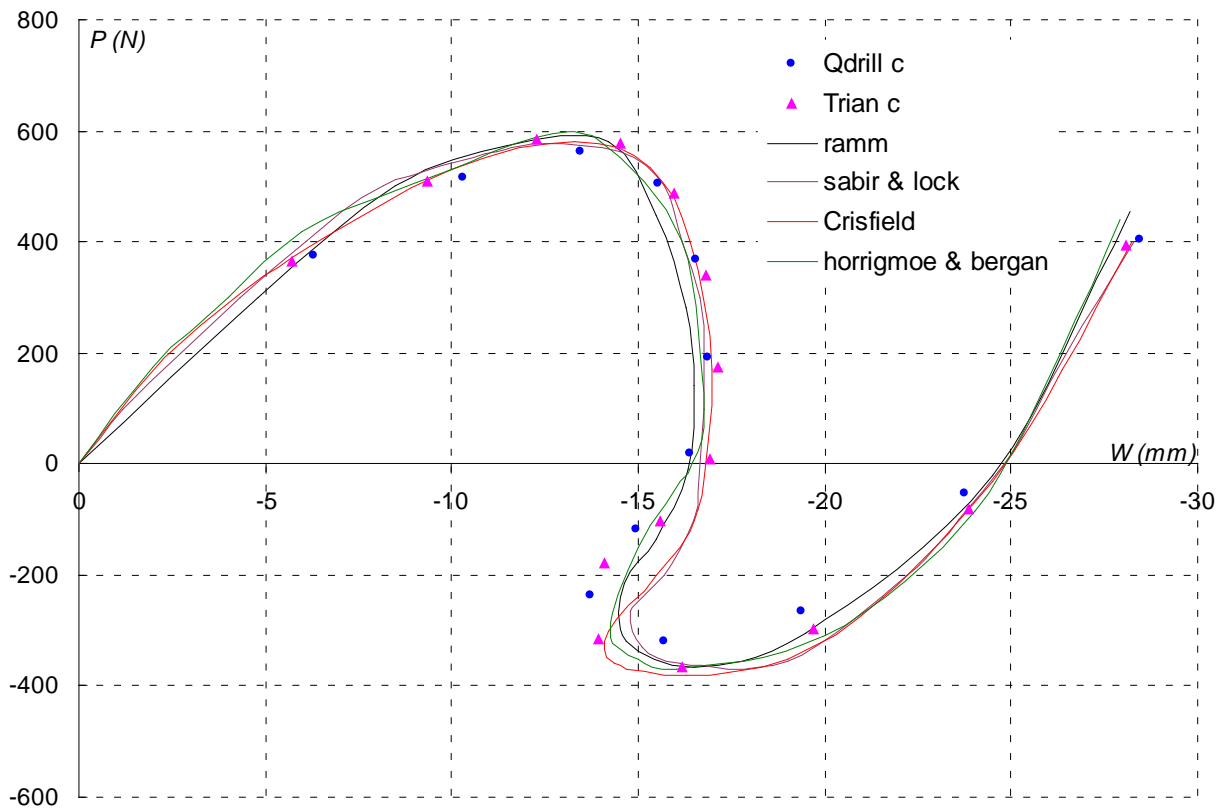
Le nombre total d'itérations nécessaire pour tracer la courbe de la *figure (VII-13)* est 94 itérations pour les deux éléments "Qdrill" et pour le triangle DKT coque.

La comparaison des résultats de l'élément "Qdrill" avec les résultats des autres auteurs montre que le résultat de l'élément "Qdrill" est plus souple car dans ce cas nous n'avons pas bloqués les  $ddl$  rotationnel autour de l'axe "z" de tous les nœuds comme c'est le cas pour l'élément "Quad".

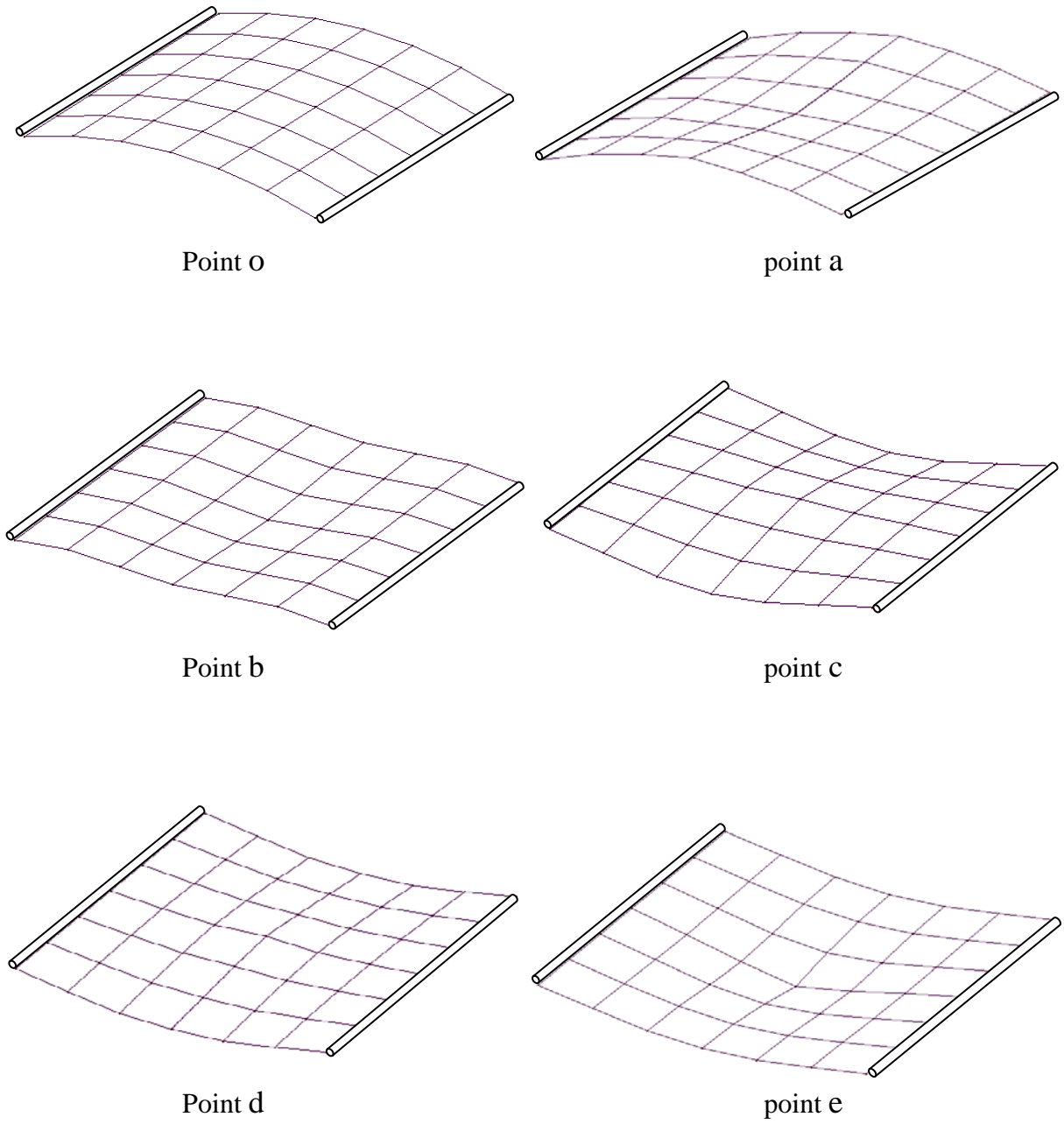
La charge correspondante au premier point limite charge présente environ (4 %) de différence relative avec le résultat de (Ramm 1982), alors que la différence du déplacement vertical du premier point limite déplacement est de (2.5 %) environ. Ainsi la différence des résultats des deux derniers points limites (charge et déplacement) obtenu est de (5 %) environ.



**Figure (VII-15). Coque cylindrique 6.35 : courbe charge déplacement  $W_c$ , et  $W_b$**



**Figure (VII-16). Coque cylindrique 6.35 : courbe charge déplacement central**



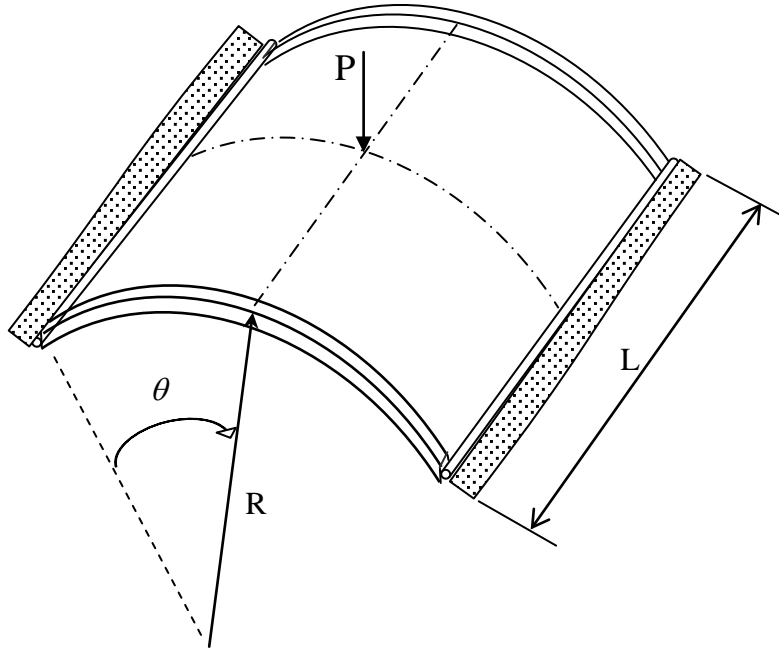
**Figure (VII-17). Coque cylindrique : configurations déformées**



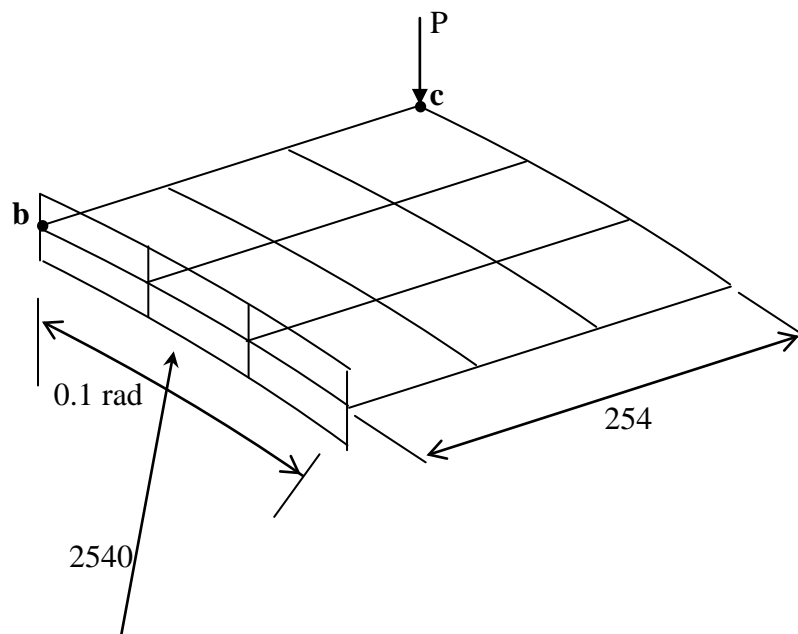
**VII-3-5. Coque Cylindrique raidie sous charge Concentrée :**

Il s'agit du même exemple précédent de la coque cylindrique simplement supportée sur les bords droits avec épaisseur de  $12.7\text{ mm}$  soumise à l'action de la charge concentrée  $P$  mais avec des raidisseurs sur les deux côtés libres (les côtés courbes) *figure (VII-18)*.

Les raidisseurs sont des poutres de section transversale  $b \times h = (12.7 \times 25.4)\text{ mm}^2$ , les mêmes propriétés mécaniques de la coque sont adoptés pour les raidisseurs.



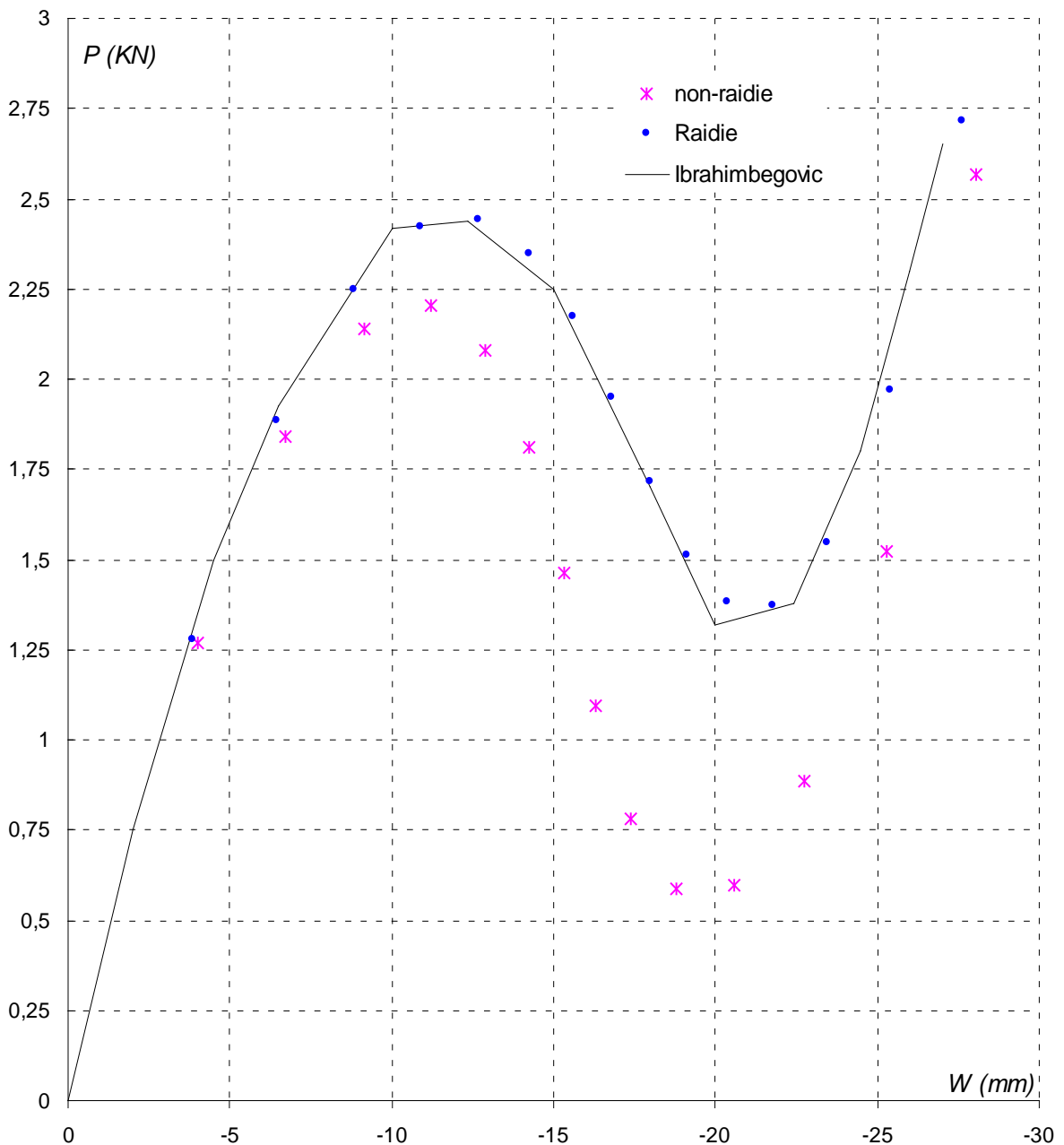
**Figure (VII-18). Coque Cylindrique raidie : géométrie, et conditions limites**



**Figure (VII-19). Coque cylindrique raidie : Dimensions, et maillage pour un quart**

Cet exemple présente la possibilité de simuler un cas de plaque/coque raidie par des éléments coques avec "drilling rotation" sans recours à des éléments poutres, car les raidisseurs sont représentés ici par des éléments coques croisés avec le cylindre *figure (VII-19)*

Nous considérons les deux cas avec et sans raidisseurs. la courbe charge déplacement vertical du cylindre raidi est présentée par la *figure (VII-20)* devant celle du cylindre non raidi. Nous constatons un gain de la charge critique par rigidification des bords libres. Ainsi les résultats obtenus sont en accord avec les résultats de [IBRAHIMBEGOVIĆ 1995] obtenus par des éléments poutres utilisé comme des raidisseurs. Il est à noter que l'élément sans "drilling rotation" ne permet pas de mener à terme cette analyse.



**Figure (VII-20). Coque cylindrique raidie : courbe charge déplacement central**

### VII-3-6. Coque Sphérique sous charge Concentrée :

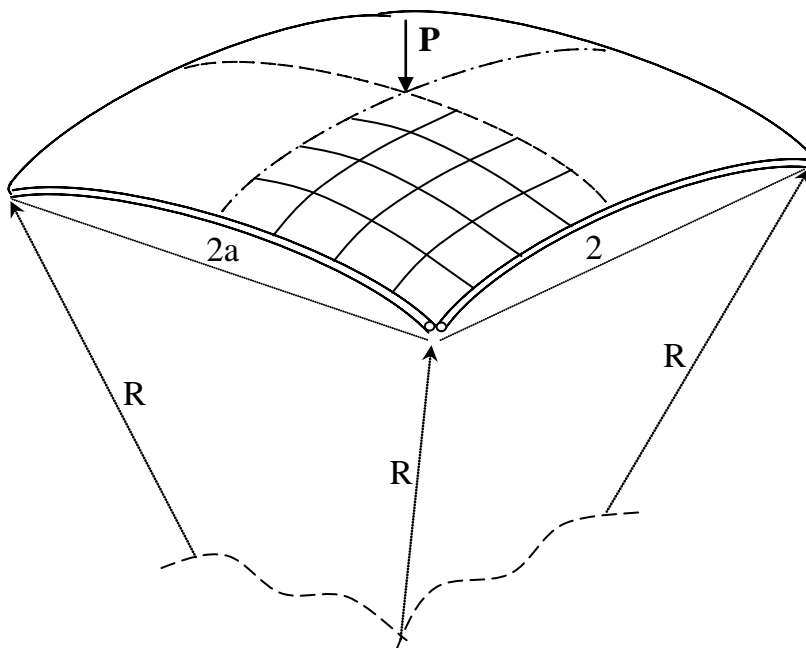
La figure (VII-21), (VII-22) présente la géométrie d'une coque sphérique de base carrée, simplement supportée sur les 4 côtés, soumise à l'action de la charge P appliquée transversalement au centre. Les caractéristiques de la coque adoptées sont les suivantes :

Longueur de côté  $2a = 1569.8 \text{ mm}$ , épaisseur  $h = 99.45 \text{ mm}$ , rayon de courbure  $R = 2540 \text{ mm}$ , module de Young  $E = 68.95 \text{ N/mm}^2$ , et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

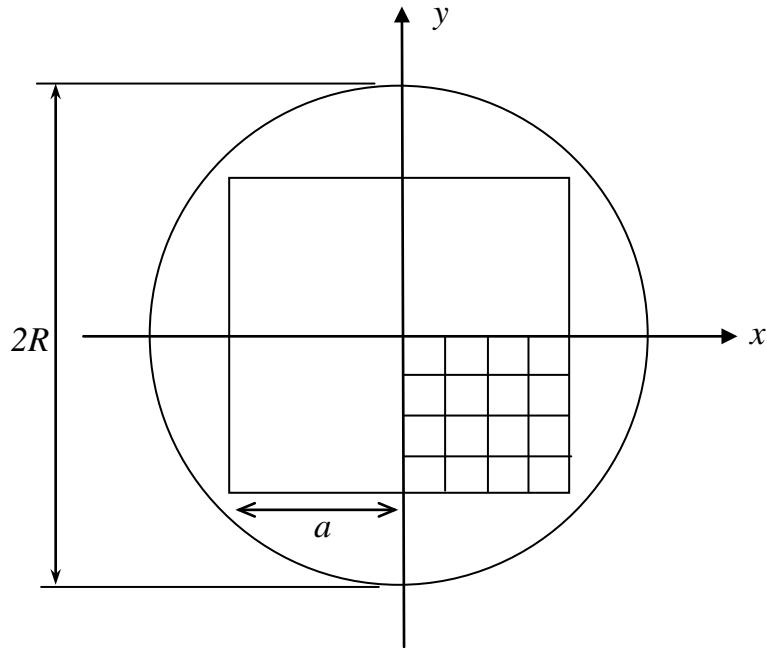
Cet exemple a été analysé par Leicester en 1968, Dhatt en 1970, Horrigmoe et Bergan en 1978, Pica et Wood en 1980, Surana en 1983, il est largement utilisé jusqu'à présent dans plusieurs références [RAMESH & KRISHNAMOORTHY 1995], [MEEK & RISTIC 1997], [PACOSTE 1998], [ZHANG & CHEUNG 2003], [YANG & al 2007-b], c'est un exemple important utilisé pour ici pour tester les capacités de l'algorithme lors du traitement des problèmes des coques à double courbure. La modélisation est faite seulement pour un quart de la coque en utilisant ( $4 \times 4$  éléments) figure (VII-23).

La réponse non linéaire de la coque est illustrée par la courbe charge déplacement vertical du point central portée sur la figure (VII-24). Nous recourons à la solution analytique de Leicester (solution analytique de coque surbaissée) issue de la référence [MEEK & RISTIC 1995] pour comparer nos résultats. La présente solution obtenue par l'élément "Qdrill" est parfaitement confondue avec la solution de Leicester de coques surbaissées, le tableau (VII-1) présente l'excellente convergence des résultats. Ainsi le résultat obtenu par l'élément "Quad" est bien précis, tandis que l'élément triangulaire donnant des résultats moins précis surtout dans la branche instable du chemin d'équilibre. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'élément quadrilatère se comporte mieux dans le cas de la double courbure (surtout en membrane) par rapport à l'élément triangulaire qui a le défaut d'un comportement membranaire trop rigide (basée sur une déformation membranaire constante)

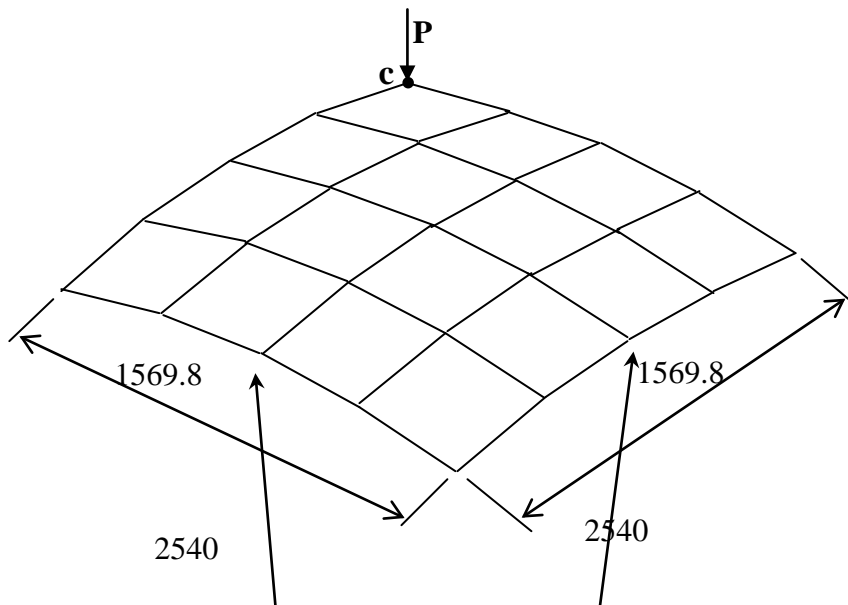
Pour ce qui concerne le nombre d'itérations nécessaire pour tracer la courbe de figure (VII-24) avec le pilotage Longueur d'arc imposé, les éléments quadrilatères "Qdrill", "Quad" nécessitent 69 itérations tandis que l'élément triangulaire nécessite seulement 52 itérations.



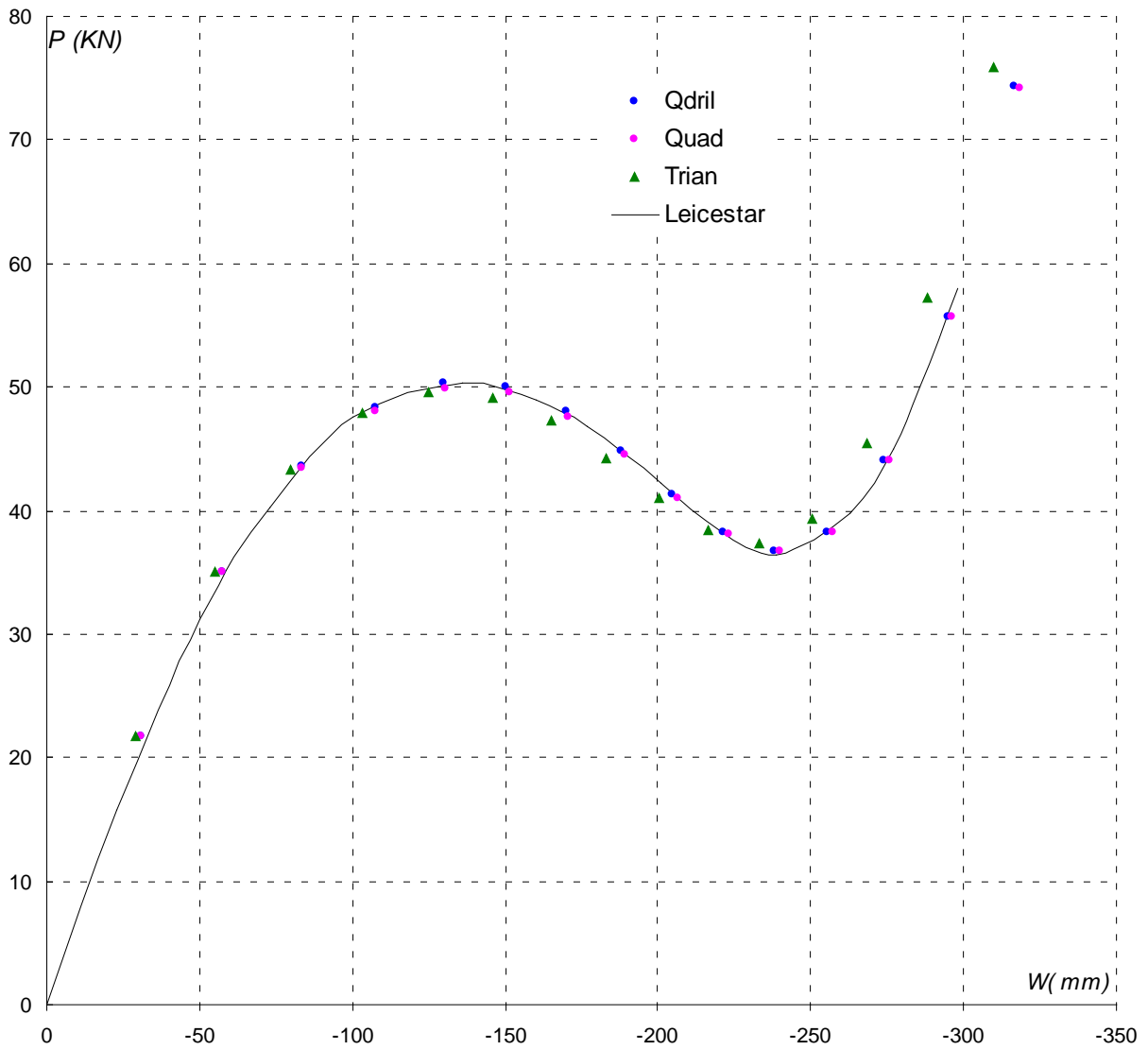
**Figure (VII-21). Coque Sphérique : géométrie, et conditions limites**



**Figure (VII-22). Coque Sphérique : projection en plan**



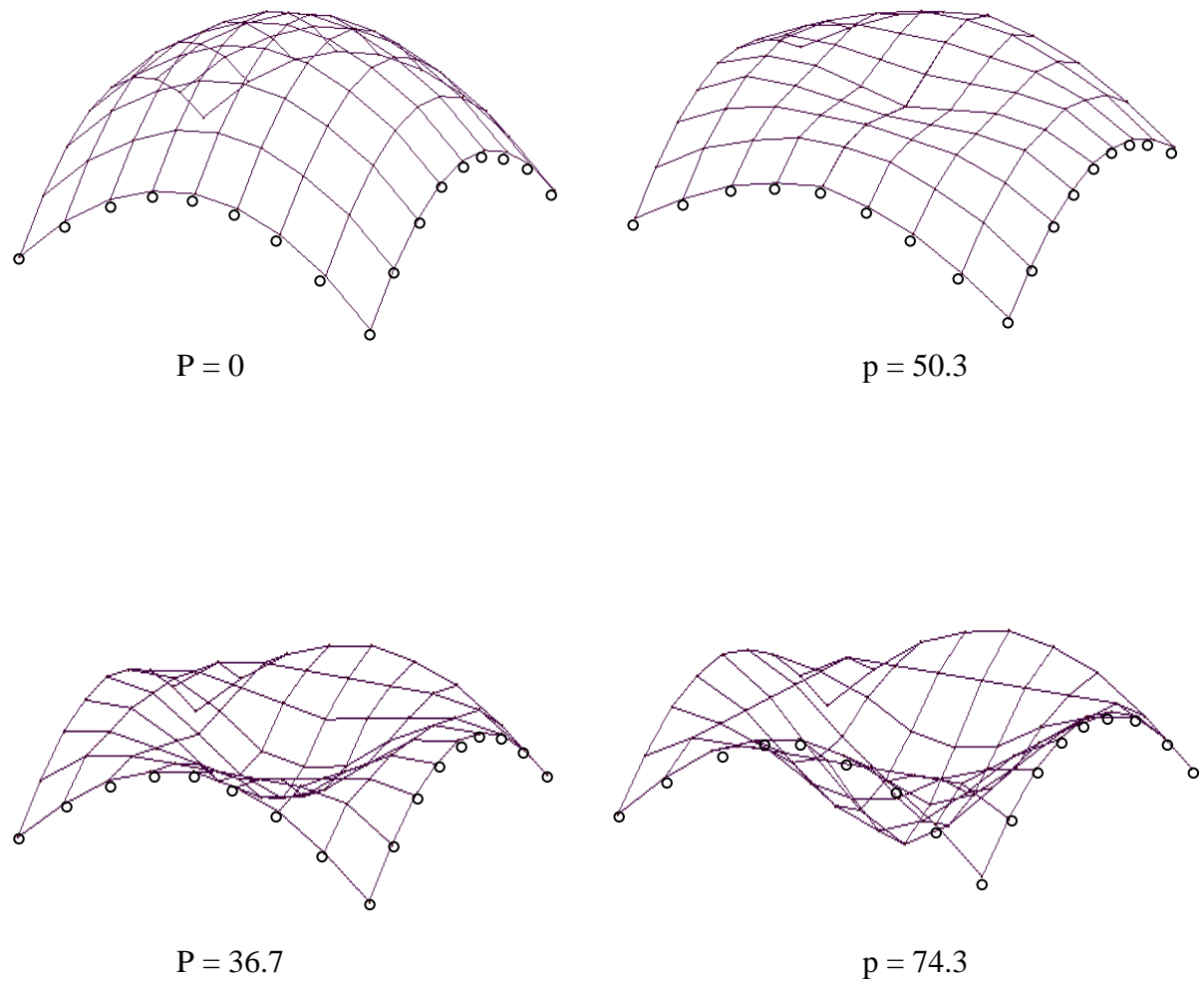
**Figure (VII-23). Coque Sphérique : Dimensions, et maillage pour un quart**



**Figure (VII-24). Coque sphérique : Courbe Charge – Déplacement du point central**

$P(KN)$	La branche stable		La branche instable		
	$Wc$ (mm)		$Wc$ (mm)		
	<i>Ref</i>	<i>Qdrill</i>	<i>Ref</i>	<i>Qdrill</i>	
21.7	32.6	30.6	48.0	169.0	169.8
31.5	58	57.7	44.9	187.6	187.8
43.6	83.8	83.3	41.3	204.6	204.8
48.4	105.5	107.3	38.2	220.4	221.3
50.3	130	129.7	36.7	230.2	237.9

**Tableau (VII-1). Coque sphérique : Tableau charge déplacement**



**Figure (VII-25). Coque sphérique : configurations déformées**

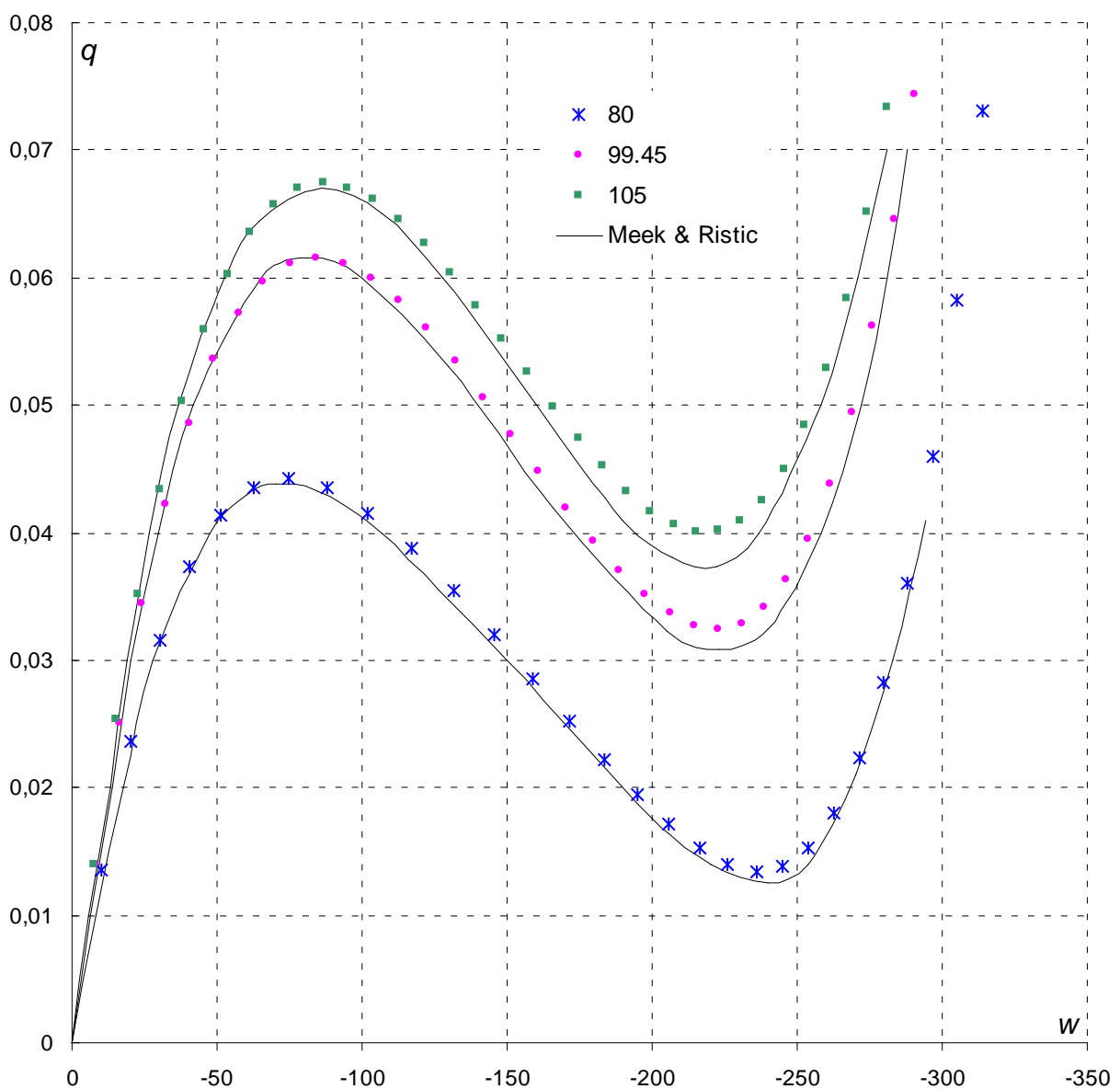
**VII-3-7. Coque Sphérique sous charge uniformément répartie :**

Il s'agit d'étudier le comportement non linéaire géométrique de la même structure initiale sphérique de l'exemple précédant lorsqu'elle est soumise à l'action d'une charge uniformément répartie croissante.

Avec le même maillage de l'exemple précédent en utilisant l'élément "Qdrill", nous adoptons respectivement les valeurs de 80 mm, 99.45 mm, et 105 mm pour l'épaisseur, nous chargeons la structure et traçons les courbes de réponse pour différentes épaisseurs *figure (VII-26)*.

Les solutions obtenues sont comparées avec ceux de [MEEK & RISTIC 1997] sur la *figure (VII-26)* qui présente la courbe charge-déplacement verticale du point central *c*.

Les résultats trouvés montrent que la réponse de la structure garde la même forme, avec variation des valeurs et position des points limites parce que l'instabilité reste locale et ne peut jamais être globale par cause de fixation des bords de la structure.



**Figure (VII-26). Coque sphérique sous charge répartie: Courbe Charge – Déplacement**

**VII-3-8. Poutre console sous l'action d'un moment d'extrémité:**

Il s'agit d'une poutre console (coque de géométrie plate) de section transversale rectangulaire de dimensions  $(b \times h)$ , et d'une longueur  $L$ , dont la première extrémité est encastree et l'autre est sous l'action d'un moment de flexion  $M$ . C'est un exemple délicat à analyser parce que le comportement non linéaire de cette structure donne lieu à de grands déplacements et à de grandes rotations. Cet exemple est largement utilisé pour montrer la validité de formulation adoptée pour la prise en compte des grandes rotations. Ce problème est traité par [LIU & TO 1995-b], [CHEN & al 1996], [ZHU & ZACHARIA 1996], [BETSCH & al 1998], [LEE & NUKULCHAI 1998], [PACOSTE 1998], [HONG & al 2001], [MASSIN & AL MIKIDAD 2002], [AREIAS & al 2005], [KUZNETSOV & LEVYAKOV 2007], [DU & CEN 2008]. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont :

$$L = 12, b = 1, h = 0.1, E = 12 \times 10^5, \nu = 0.$$

La solution analytique (théorie de poutre d'Euler) d'une poutre qui s'enroule jusqu'à former un cercle de rayon  $r$  est donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad \text{avec } M : \text{ le moment appliqué à l'extrémité libre.}$$

Alors on en déduit la valeur du moment à appliquer pour former un cercle complet :

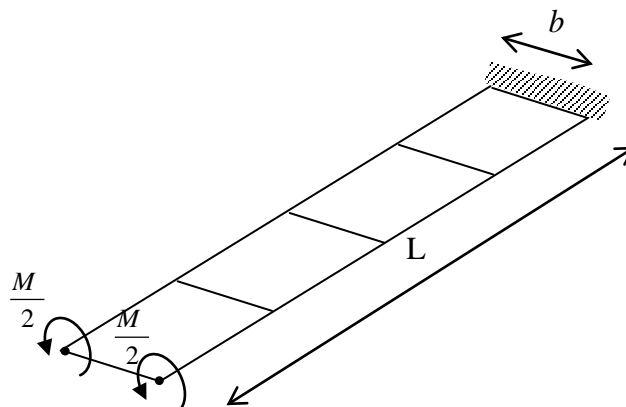
$$M_{max} = \frac{2\pi EI}{L}. \text{ Par substitution de } L, I, \text{ et } E \text{ trouvons } M_{max} = 50\pi/3.$$

Une modélisation par quatre éléments donne une solution s'accordant bien avec la solution analytique exacte soit en utilisant "Qdrill", "Quad", ou bien l'élément triangulaire, le pilotage en charge imposée s'avère suffisant pour suivre toute la courbe charge déplacement.

La courbe charge-déplacement transversal est longitudinal de l'extrémité libre de la poutre en utilisant l'élément "Qdrill" est présentée par la *figure (VII-29)*, la déformé de la poutre jusqu'à la formation d'un cercle est illustrée par la *figure (VII-30)*.

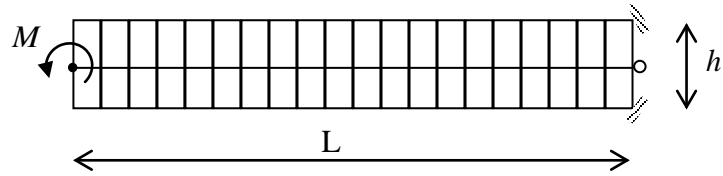
Afin de tester les performances de l'élément de membrane, Reprenons cet exemple en le modélisant pour travailler en mode de flexion dans le plan comme illustré par la *figure (VII-28)* où le moment  $M$  est appliqué dans le plan. Un bon résultat nécessite une modélisation de  $20 \times 2$  éléments. Cet exemple sert à montrer les performances de l'élément de membrane lorsqu'il est exposé à une grande rotation dans le plan (*drilling rotation*) avec distorsion de maillage. Comme il est montré, notre approximation donne des bons résultats même pour des grandes rotations *figure (VII-31)*.

La déformé de la poutre jusqu'à la formation d'un cercle est illustrée par la *figure (VII-33)*.

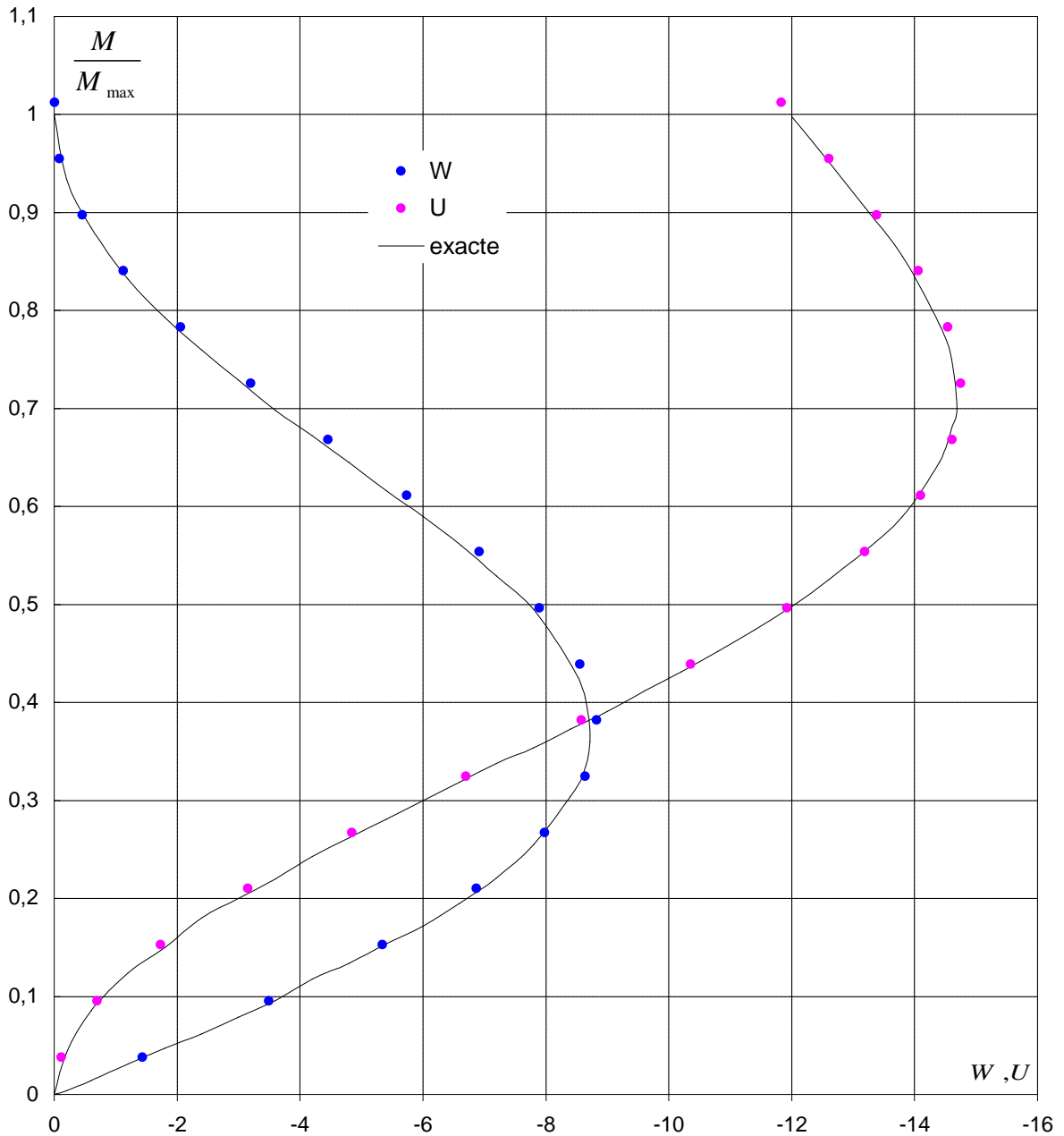


**Figure (VII-27). Poutre console : géométrie, et maillage**

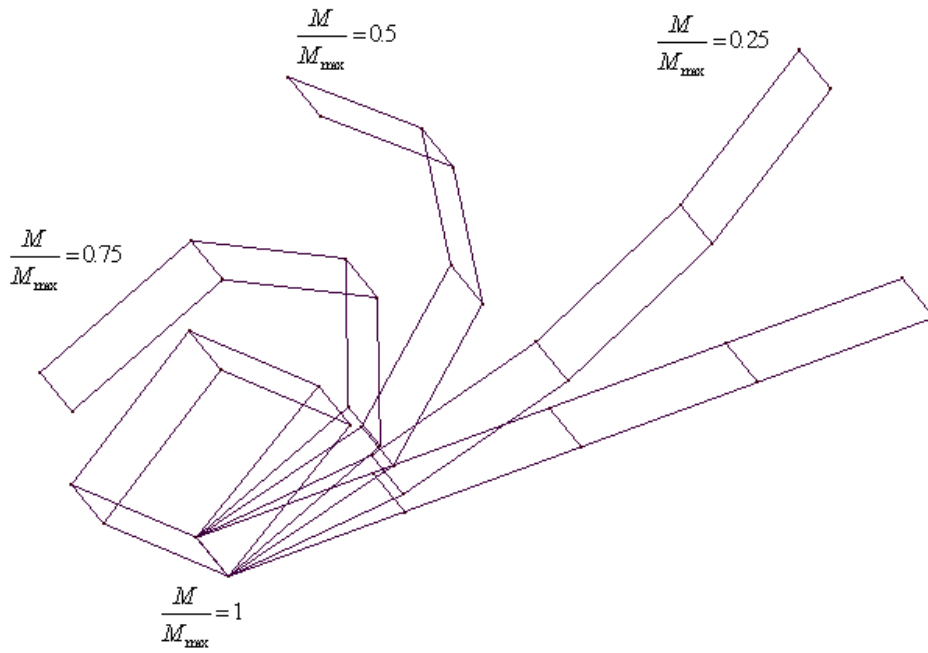




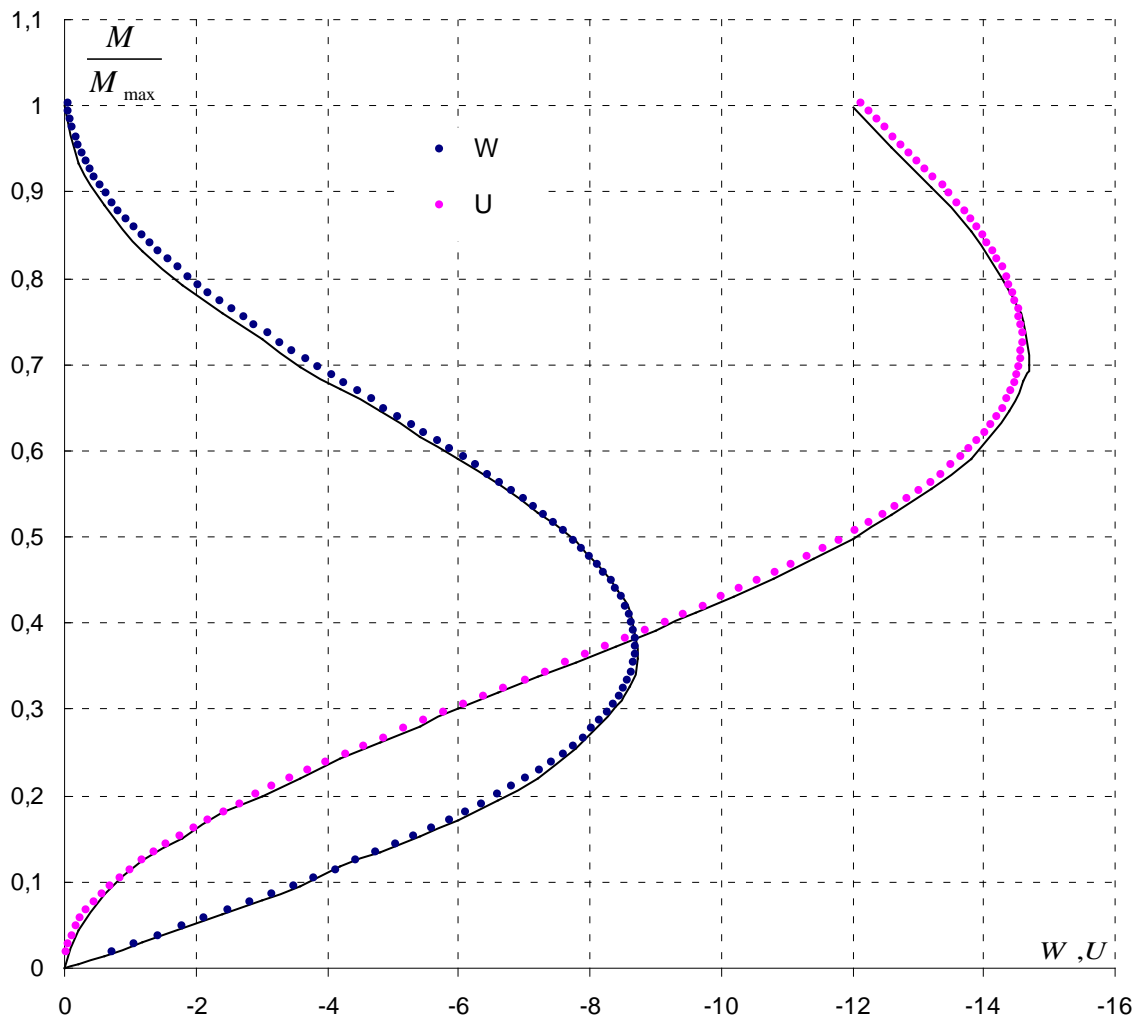
**Figure (VII-28). Poutre console : deuxième possibilité de modélisation**



**Figure (VII-29). Poutre console 4 éléments : Courbe Charge – Déplacement**



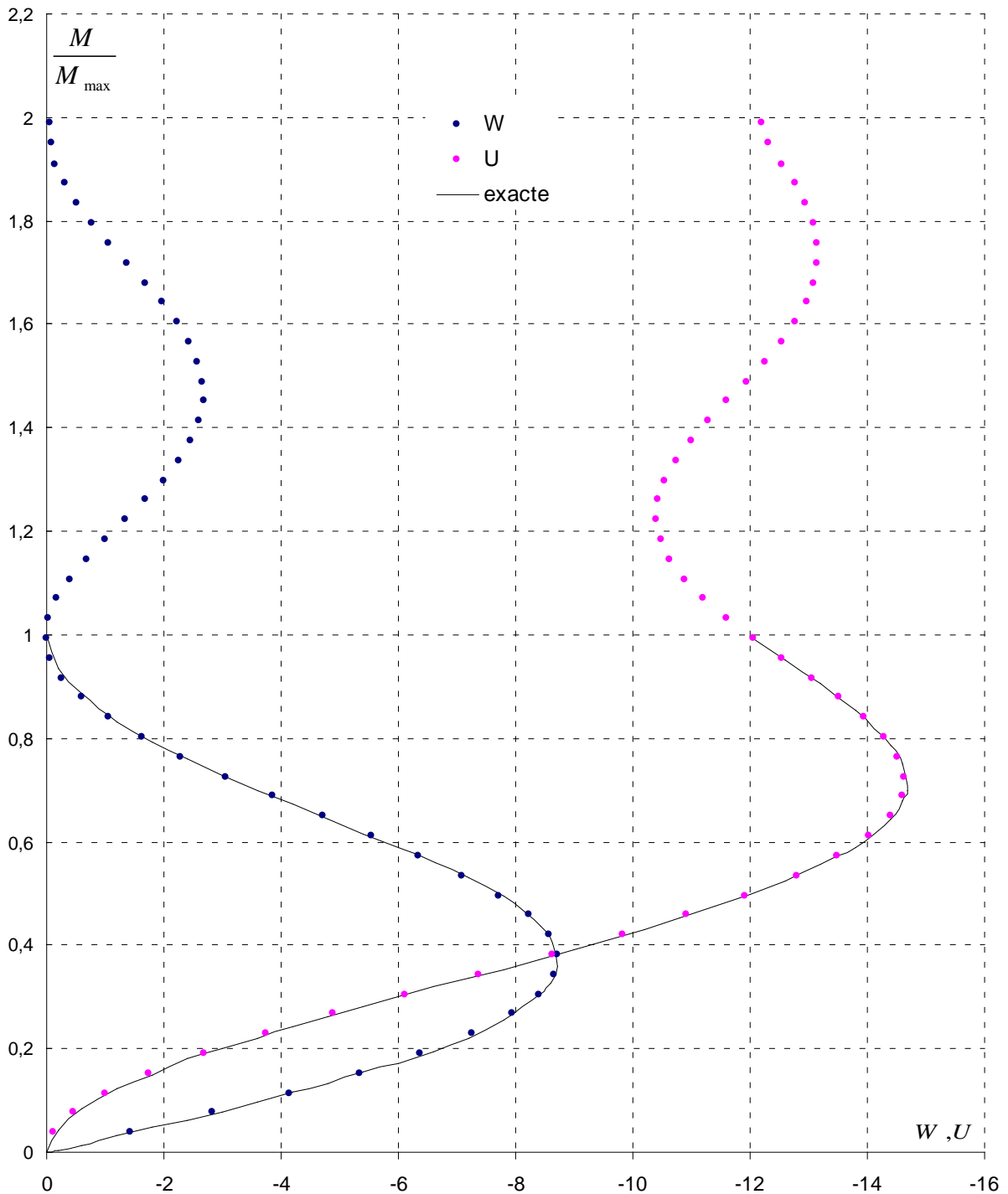
**Figure (VII-30). Poutre console sous flexion: configurations déformées**



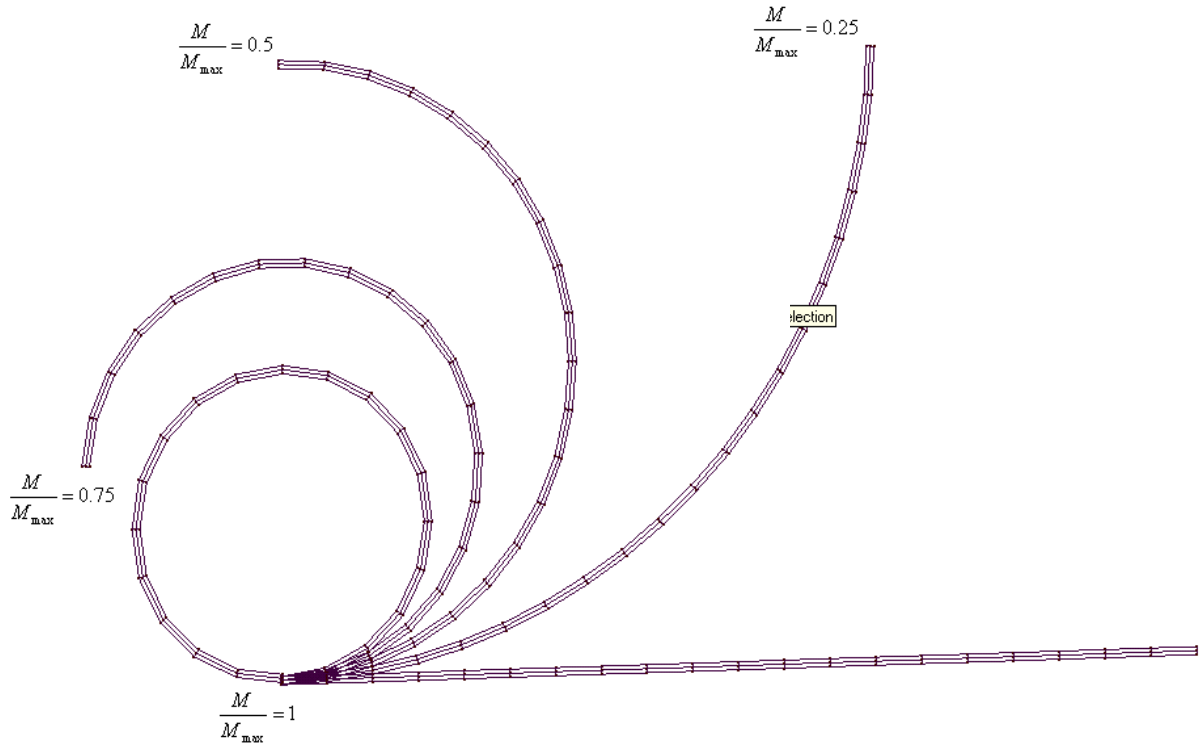
**Figure (VII-31). Poutre console : Courbe Charge – Déplacement (deuxième modélisation)**

Pour aller de la poutre jusqu'à la formation de deux cercles il faudra un maillage de type de la *figure (VII-27)* de 10 éléments, le moment de flexion doit amener jusqu'à la valeur de  $\frac{4\pi EI}{L}$ , ce qui donne  $\ggg M = 2 \cdot M_{\max}$ .

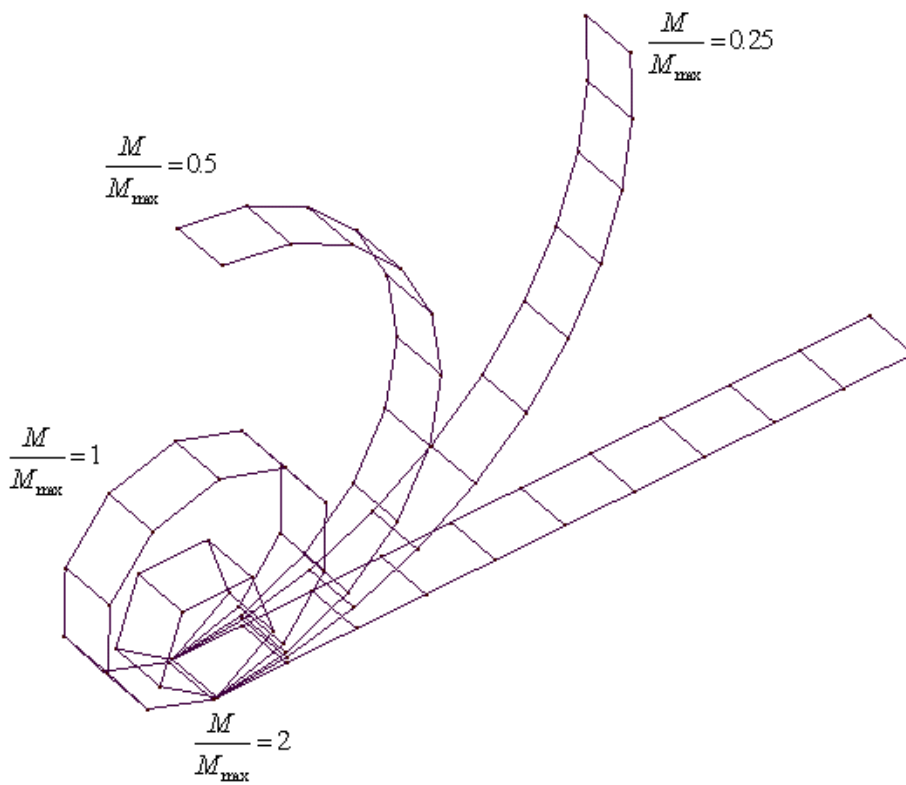
La *figure (VII-32)* présente la courbe charge déplacement jusqu'à  $M = 2 \cdot M_{\max}$ . La déformée de la poutre jusqu'à la formation de deux cercles est illustrée par la *figure (VII-34)*.



**Figure (VII-32). Poutre console 10 éléments : Courbe Charge – Déplacement**



**Figure (VII-33). Poutre console sous flexion : déformé (deuxième modélisation)**



**Figure (VII-34). Poutre console sous flexion : déformé (jusqu'à  $M = 2 \cdot M_{max}$ )**

**Conclusion concernant la validation en analyse non linéaire géométrique**

Les exemples présentés pour la validation des éléments ont démontré la grande efficacité de l'élément "Qdrill", ils permettent de constater que:

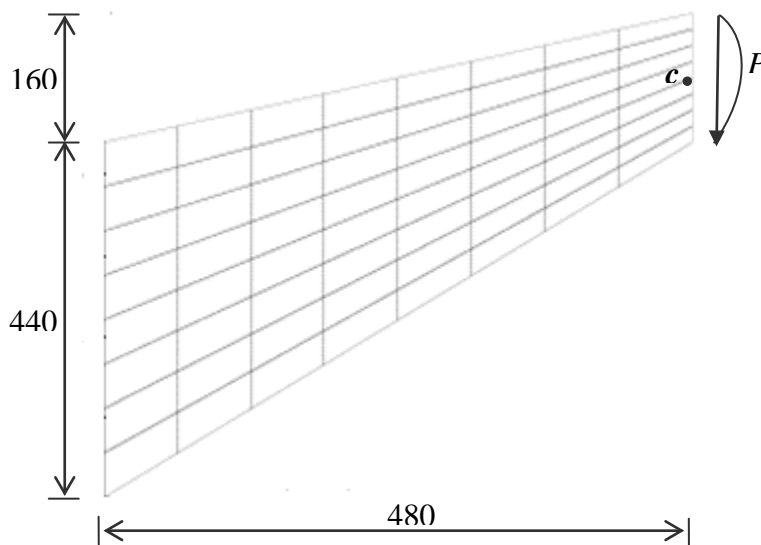
- L'élément est plus consistant est passe tout les exemples contrairement à l'élément quadrilatéral avec rigidité fictive
- Nous remarquons la précision notable par rapport aux éléments avec rigidité fictive pour deux raisons :
  - \* Le champ de déplacement interpolé dans le plan est parabolique;
  - \* La nécessité de bloquer la *ddl* de rotation dans le plan pour le cas des éléments a rigidité fictive gêne la réponse de ces derniers aux actions extérieurs.
- Réduction du nombre d'itérations par rapport aux éléments avec rigidité fictive ce qui conduit à un gain considérable sur le temps de calcul par ordinateur
- L'efficacité notable de la D.L.C pour la prise en compte des grandes rotations même si le nombre d'éléments utilisés lors de la discrétisation est faible.
- Possibilité de traitement des exemples spécifiques (coques raidies, poutres a section variable, ...) par la possibilité de modéliser des croisements des éléments coques offerte par l'interpolation du sixième *ddl*. (drilling rotation)
- meilleure comportement par rapport à l'élément triangulaire dans les situations à comportement membranaire dominant (coque à double courbure par exp.)

### **VII- 4. NON LINEARITE MATERIELLE**

L'analyse non linéaire matérielle "élasto-plastique" en petit déplacement est faite par deux éléments coque : le premier noté "Qkirch" pour les plaques/coques minces, et le deuxième noté "Qmind" pour les plaques/coques épaisses. La membrane de ces deux éléments coques est interpolée avec "Drilling rotation".

La comparaison des résultats obtenus avec des résultats d'autres auteurs a permis de confirmer la validité du modèle. La tolérance utilisée de la convergence de la solution est adopté  $\epsilon=0.001$  que ce soit en déplacement ou en force.

#### **VII-4-1. Problème de Cook :**



**Figure (VII-35). Poutre de Cook : géométrie, et maillage**

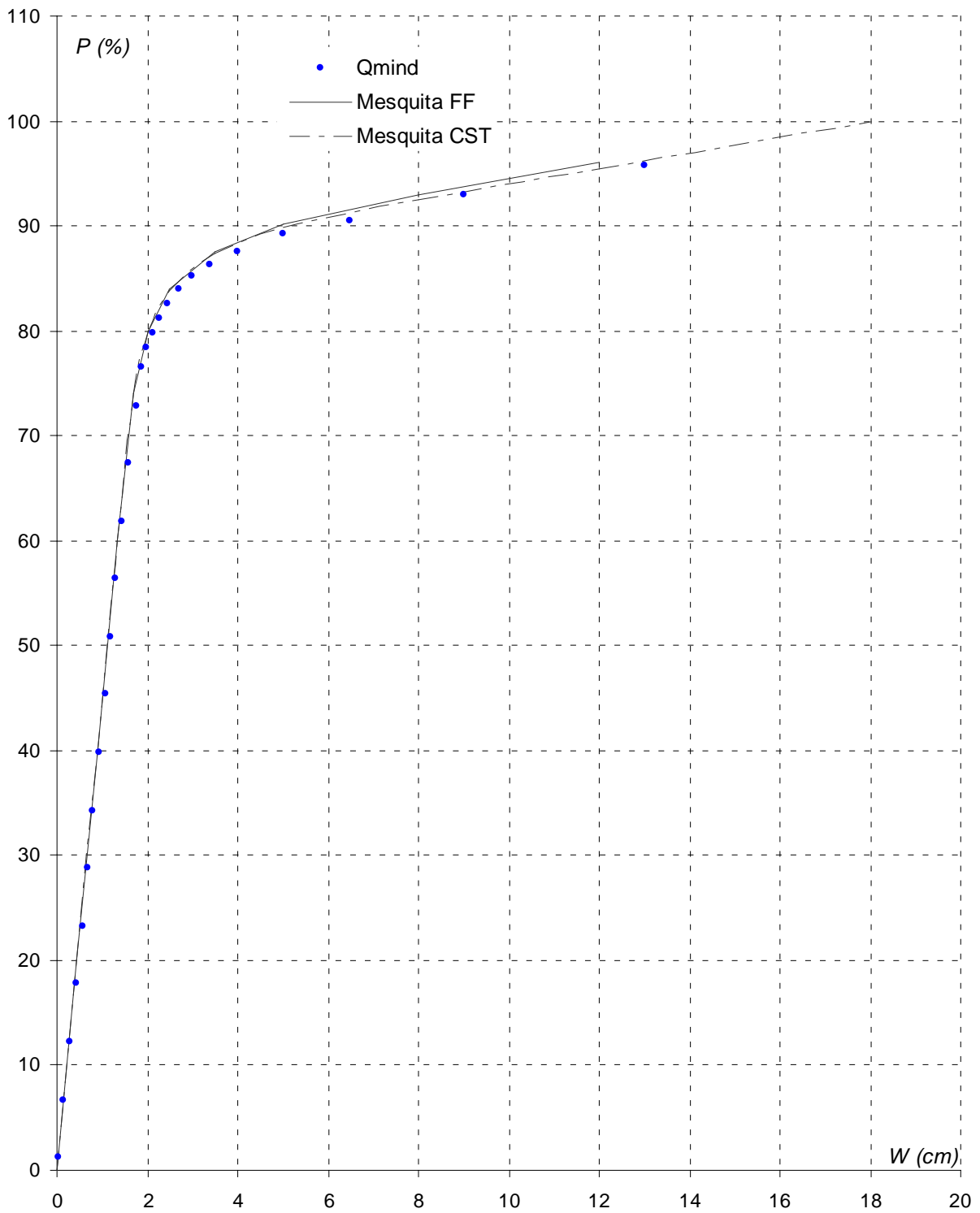
L'exemple de Cook est une poutre console de section transversal variable sous forme de trapèze (figure-VII-35). Le premier bord est encasté, et l'autre est soumis à l'action d'une charge tangentielle parabolique.

Les caractéristiques mécaniques sont :  $E = 21000 \text{ KN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $E_t = 210 \text{ KN/cm}^2$ ,  $\sigma_e = 25 \text{ KN/cm}^2$ , l'épaisseur est de  $10 \text{ cm}$  et les autres dimensions sur la figure sont en  $\text{cm}$ .

Cet exemple est utilisé pour évaluer le comportement de membrane dans un cas de distorsion de maillage. Il est à mode de déformation de cisaillement dominant et il permet aussi de vérifier les performances de membrane en analyse non linéaire matérielle sous l'action d'une force appliquée dans le plan.

Pour examiner la sensibilité à la détorsion de maillage, cette poutre épaisse est modélisée par  $8 \times 8$  éléments quadrilatères distordus.

La bonne performance de l'élément de coque avec "drilling rotation" est claire par comparaisons de la solution de [MESQUITA & al 1998] apportée sur la figure (VII-36). Cet auteur utilise la même discrétisation ( $8 \times 8$ ) par un élément coque triangulaire résultant du couplage d'un élément "DKT" de flexion et un élément de contrainte plane avec "drilling rotation" basé sur la méthode dite "Free formulation". L'auteur présente aussi la solution obtenue par l'élément "CST" avec un maillage de ( $16 \times 16$ ).



**Figure (VII-36). Problème de Cook : Courbe Charge – Déplacement**

**VII-4-2. Plaque mince sous charge uniformément répartie :**

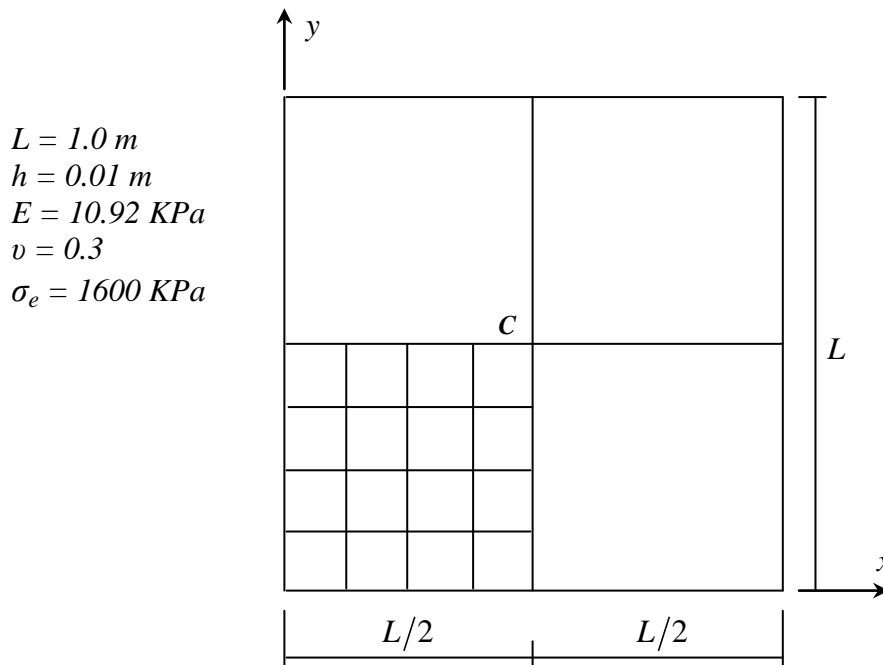
Cet exemple sert à vérifier la validité de l'implantation de la loi de comportement élasto-plastique adopté basé sur le critère d'écoulement d'Ilyushin. Ceci est fait premièrement, en examinant l'élément quadrilatère de Kirchhoff (2x2 points de gauss) nommé "Qkirch", puis en examinant aussi par ce même exemple le comportement de l'élément quadrilatère en théorie de Mindlin nommé "Qmind" pour les plaques/coques minces avant de l'utiliser pour la modélisation des problèmes des plaques et coques épaisses.

La loi de comportement est élastique parfaitement plastique, la géométrie et les caractéristiques de la plaque à examiner sont représentés sur la *figure (VII-37)*, c'est une plaque carrée simplement supportée sur le contour de côté  $L = 1\text{ m}$ , et d'épaisseur  $h = 0.1\text{ m}$  le module de Young est  $E = 10.92\text{ Kpa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_e = 1600\text{ Kpa}$ , soumise à l'action d'un chargement transversal uniformément réparti. Seulement un quart de la plaque est modélisé en profitant de la double symétrie de géométrie, des conditions aux limites, et du chargement.

Nous utilisons une discrétisation de  $4 \times 4$  éléments du quart modélisé que ce soit pour l'élément de plaque mince "Qkirch", ou bien pour l'élément de plaque épaisse "Qmind".

Les résultats obtenus en utilisant "Qkirch", et "Qmind" sont rapportés sur la *figure (VII-38)* devant la solution de référence de Owen par élément de plaque épaisse issu de [VOYIADJIS & WOELKE 2005]. Nous rapportons aussi la solution de plaque mince de Ben-Tahar obtenu par *DKQ* et *DKT* avec  $3 \times 3$  points d'intégration [BEN-TAHAR 1981].

Le bon comportement de l'élément "Qmind" est clair sur la figure, il montre qu'il ne souffre pas du phénomène de verrouillage numérique, et qu'il converge vers la solution des plaques minces.



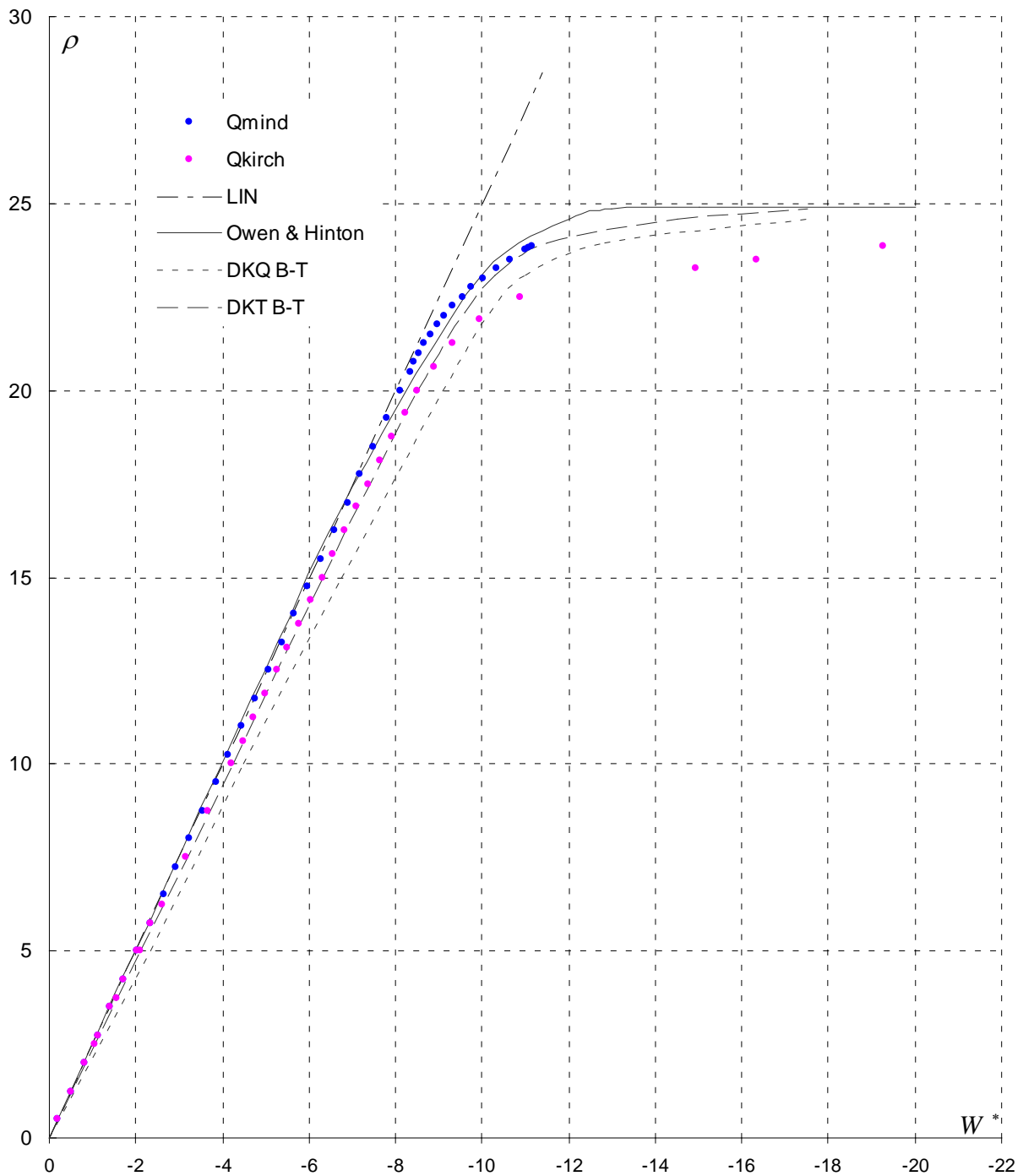
**Figure (VII-37). Plaque carrée simplement appuyée : géométrie, et maillage**



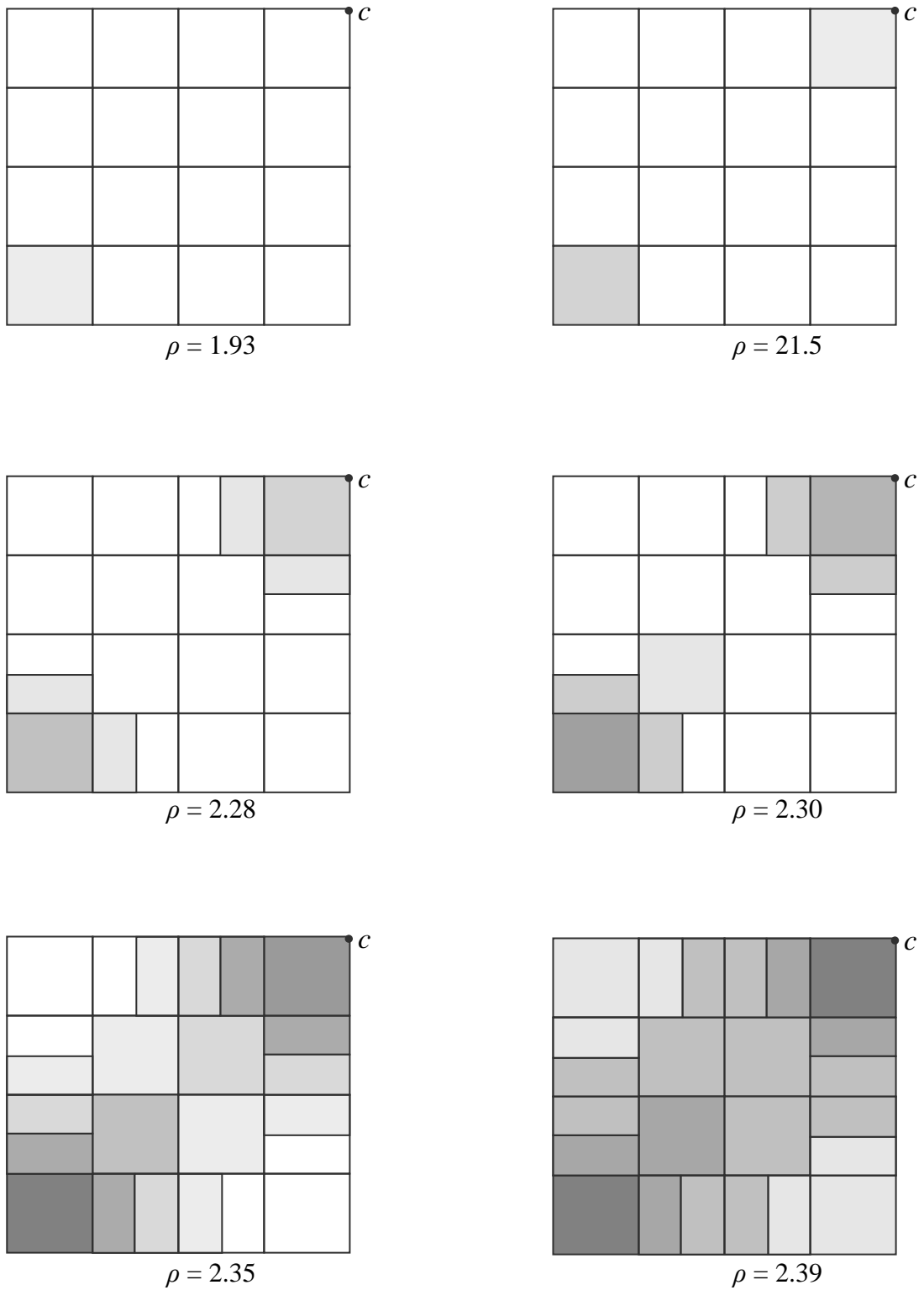
Sur la *figure (VII-38)* la flèche est remplacée par une forme adimensionnelle

$$W^* = \frac{D}{M_p \cdot L^2} \cdot W_c, \text{ et la charge par la forme adimensionnelle } \rho = \frac{q \cdot L^2}{M_p}.$$

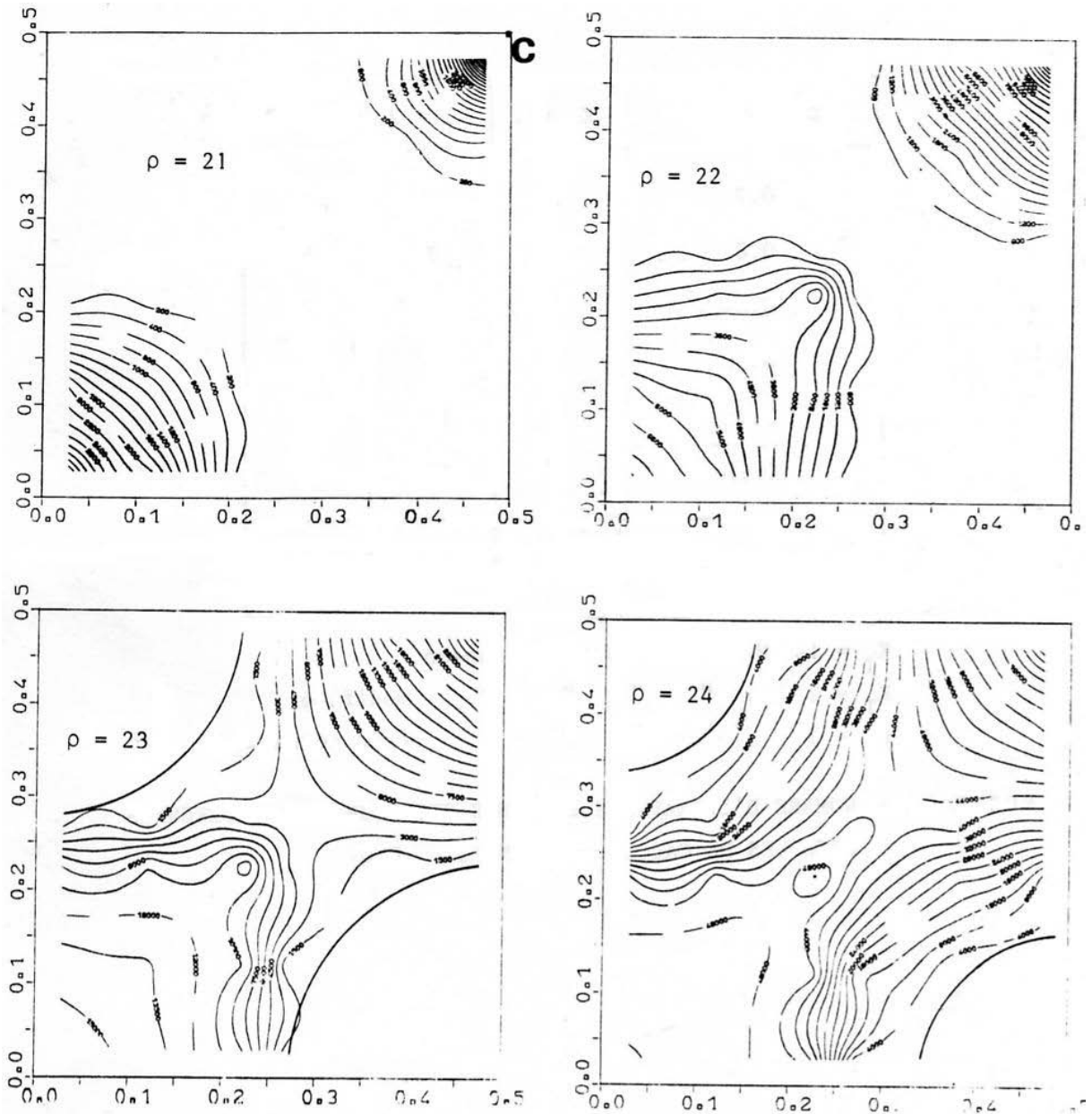
L'évolution des zones plastiques dans la surface du quart modélisé de la plaque pour différents niveaux de chargement est représentée par la *figure (VII-39)*, il est en bon concordance avec celle issu de la référence [BEN-TAHAR 1981] porté sur la *figure (VII-40)*.



**Figure (VII-38). Plaque mince : Courbe Charge – Déplacement**



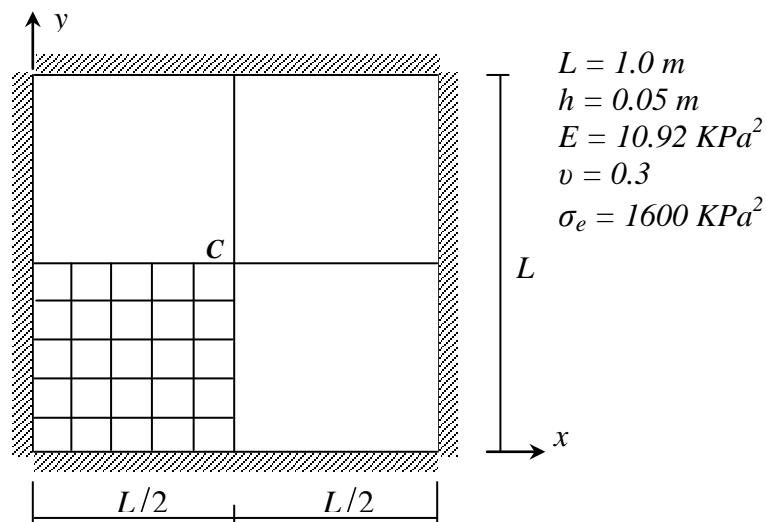
**Figure (VII-39). Plaque carrée mince : évolution des zones plastiques**



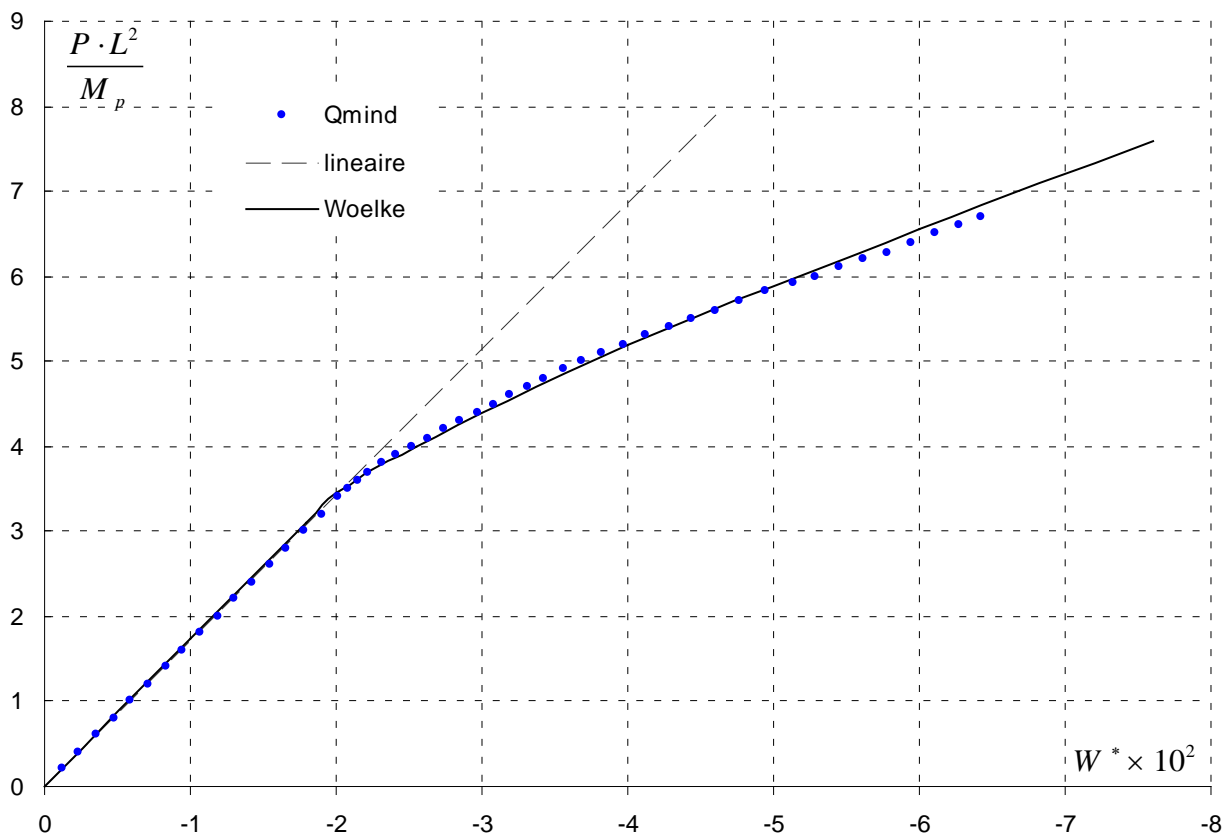
**Figure (VII-40). Plaque carrée mince : évolution des zones plastiques (DKQ de Ben-Tahar)**

### VII-4-3. Plaque épaisse encastrée sous l'action d'une charge centrée :

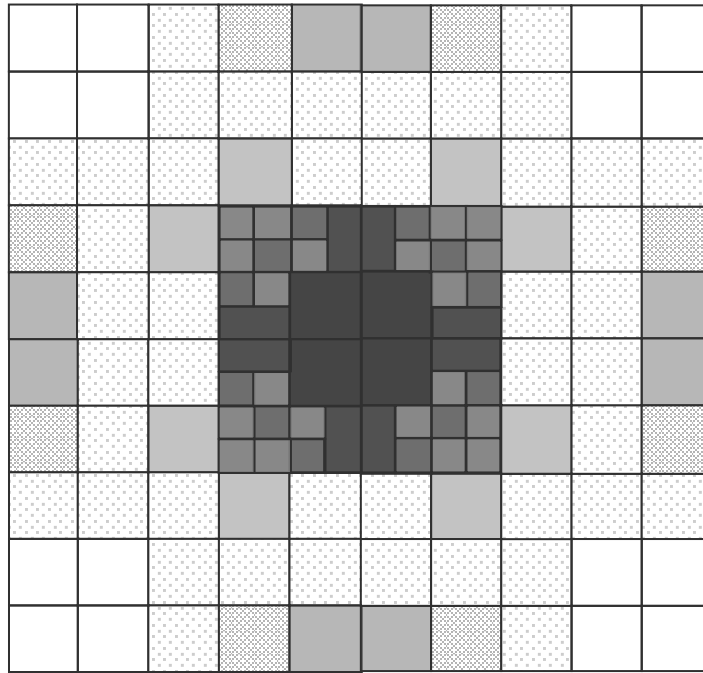
Nous Considérons dans cet exemple une plaque carrée de longueur  $L$  et d'épaisseur  $h$ , dont le rapport  $L/h = 20$ . La plaque est encastrée sur le contour et soumise à l'action d'une charge perpendiculaire concentrée  $P$  appliquée au point  $c$  figure (VII-41). Seulement un quart de la plaque est modélisé en profitant la double symétrie. Ce problème est analysé par [WOELKE & al 2006] par un maillage de  $(4 \times 4)$  éléments rectangulaire, cependant pour notre élément il faut au moins  $(5 \times 5)$  éléments pour obtenir des bons résultats figure (VII-40).



**Figure (VII-41). Plaque carrée encastrée sur les 4 côtés : géométrie, et maillage**



**Figure (VII-42). Plaque épaisse : Courbe Charge – Déplacement**



$$p = 40,52,60,62,66,68,69$$

**Figure (VII-43). Plaque épaisse sous charge concentrée : évolution des zones plastiques**

Remarque : nous reportons sur la figure (VII-44) l'évolution du paramètre  $\alpha$  et on confirme que la plastification à travers l'épaisseur suit effectivement une évolution progressive fonction du coefficient  $\alpha$



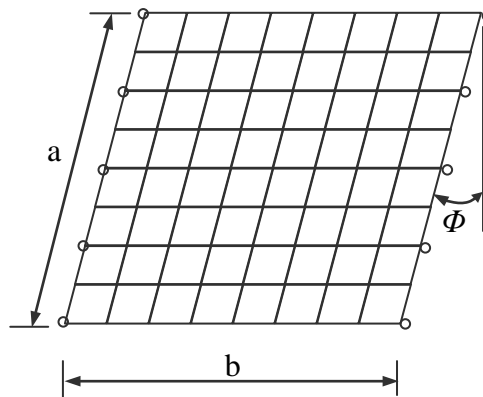
**Figure (VII-44). Plaque épaisse sous charge concentrée : évolution du coefficient  $\alpha$**

#### VII-4-4. Plaque biaise sous charge uniformément répartie :

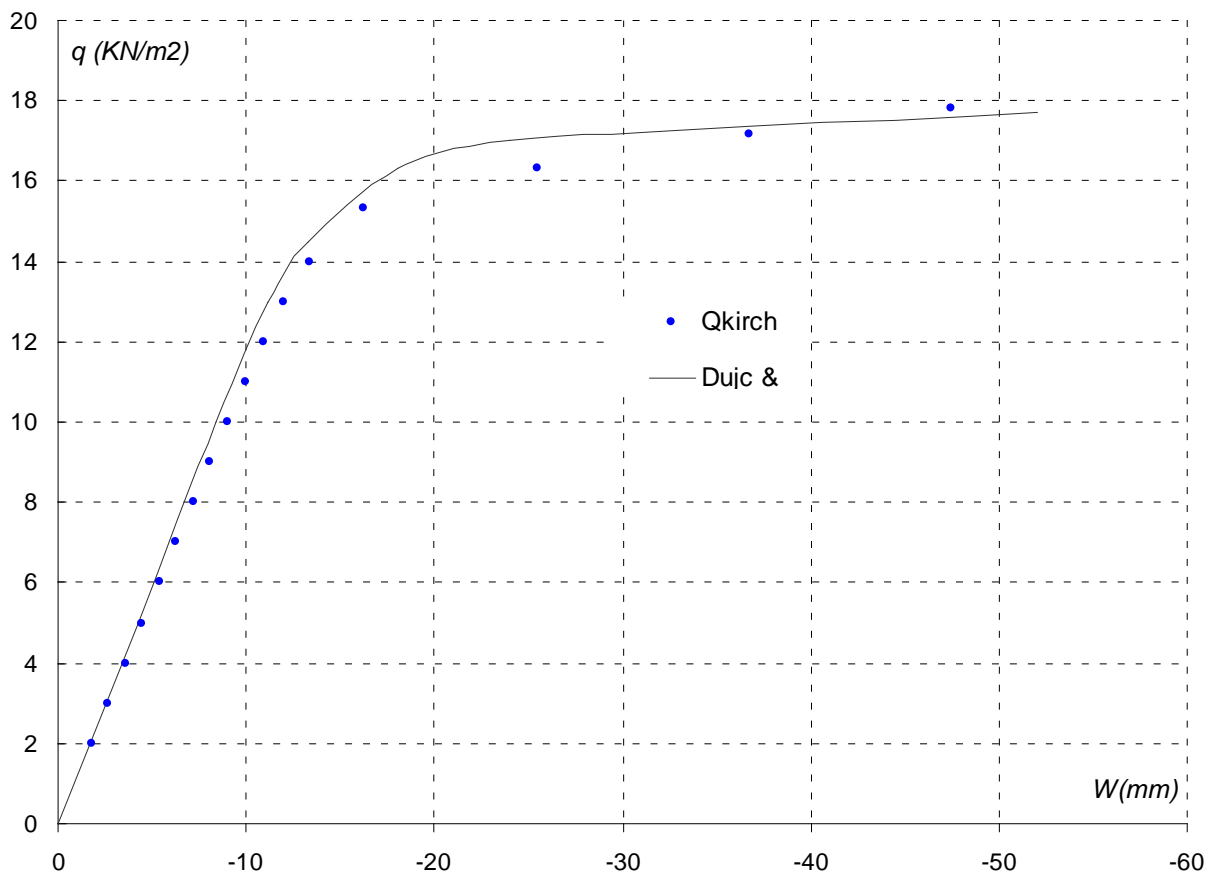
Nous considérons la plaque biaise (oblique) de la *figure (VII-45)* avec les caractéristiques géométriques suivantes :  $a = 135 \text{ cm}$ ,  $b = 150 \text{ cm}$ ,  $\Phi = 45^\circ$ , et l'épaisseur est  $h = 0.5 \text{ cm}$ . Le matériau est élasto-plastique avec écouissage, dont  $E = 21000 \text{ KN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ , et le module d'écrouissage  $H = 2100 \text{ KN/cm}^2$ . La plaque est supportée le long des bords les plus courts par cinq appuis équidistants retenant les déplacements et permettant les rotations.

Le comportement de la plaque est étudié sous l'effet de la charge uniformément répartie  $q$ . La courbe charge – déplacement verticale du point central est apportée sur la *figure (VII-46)* avec la solution de référence de [DUJC & BRANK 2008].

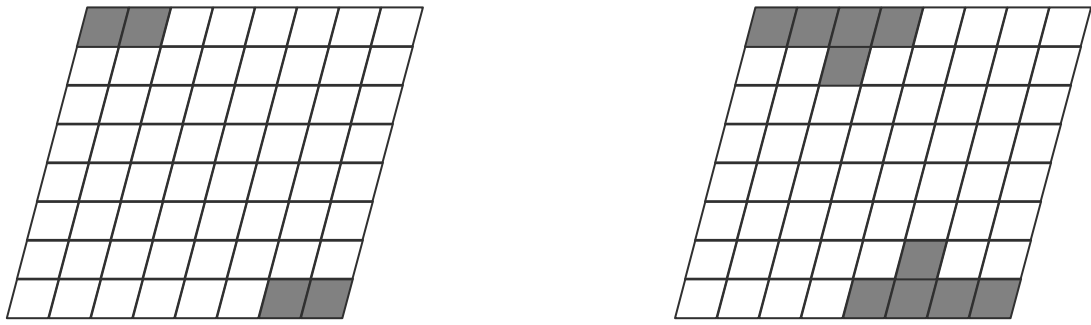
L'évolution des zones plastiques est représentée sur les *figures (VII-47)* et *(VII-48)*.



**Figure (VII-45). Plaque biaise : géométrie et maillage**

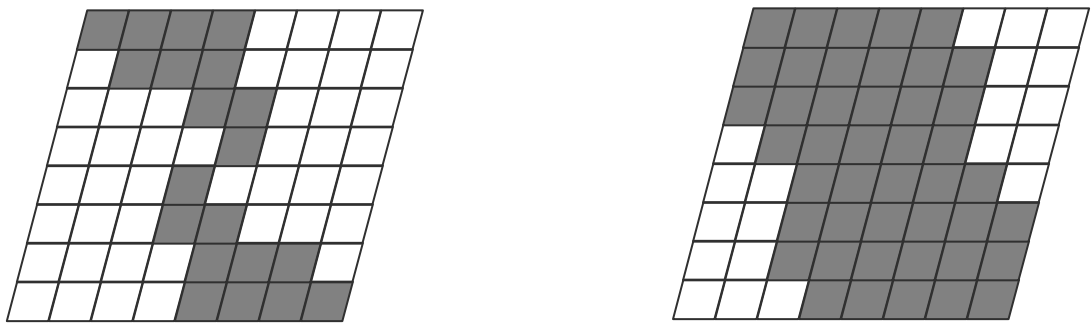


**Figure (VII-46). Plaque biaise : courbe charge - déplacement**



$q = 15.3$

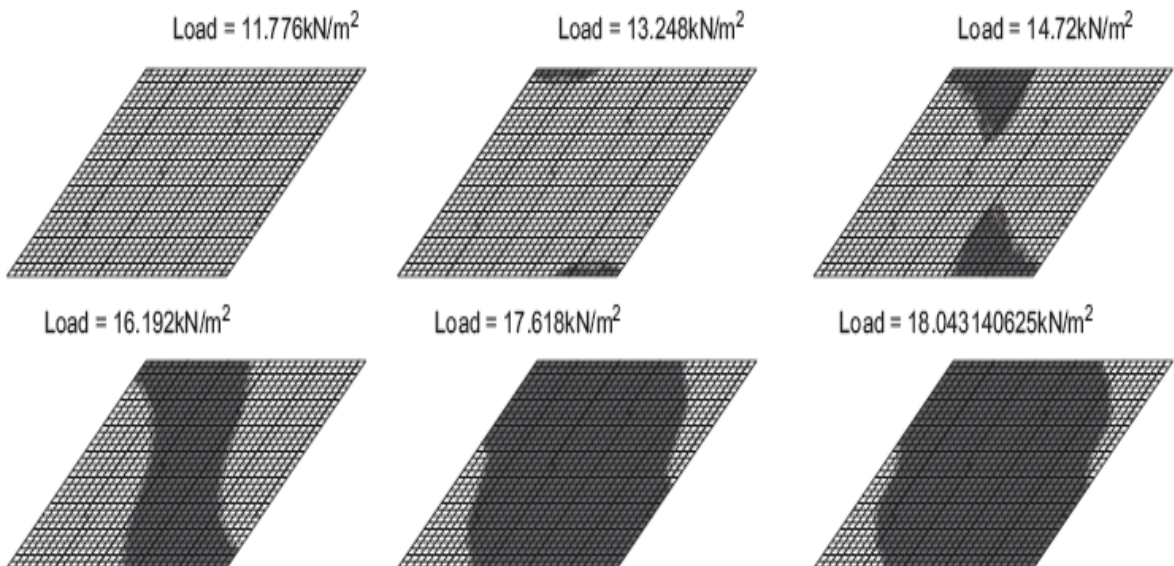
$q = 16.3$



$q = 17.3$

$q = 18.3$

**Figure (VII-47). Plaque biaise : évolution des zones plastiques**



**Figure (VII-48). Plaque biaise : évolution des zones plastiques (quadrilatère de Dujc et Brank)**

**Conclusion concernant la validation en analyse non linéaire matérielle**

L'élément "Qmind" et "Qkirch" sont examinés dans quelques problèmes, ils ont démontrés une grande efficacité en analyse élasto-plastique

- l'élément Q4 $\gamma$  se comporte bien en plasticité malgré sa formulation simple, ainsi cette formulation simple permet une grande réduction du temps de calcul par ordinateur.
- L'effet du cisaillement transversal sur le comportement plastique est correctement identifié
- les résultats de l'élément "Qkirch" montre que cet élément est remarquablement performant.
- L'utilisation d'un critère en contraintes généralisées permet d'une Réduction considérable dans le temps de calcul
- l'approximation de plastification progressive de la section transversale par la modification introduite par Crisfield est un choix judicieux, d'autres méthodes utilisant plus de 11 points d'intégration à travers l'épaisseur.



## CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail nous avons abordé les deux aspects principaux de l'analyse non linéaire qui sont l'analyse non linéaire géométrique et l'analyse non linéaire matérielle.

Nous développons une formulation en analyse linéaire d'un élément fini coque à quatre nœuds résultant de la superposition d'un élément de plaque de flexion et d'un élément de membrane en contrainte plane incorporant le *ddl* rotationnel dit "*drilling rotation*" dans l'interpolation du champ de déplacement. Ce dernier aspect est introduit à la formulation de l'élément de membrane par l'intermédiaire d'une formulation variationnelle. Le résultat de cette superposition est un élément coque efficace à 6 *ddl* en chaque nœud. L'analyse linéaire est étendue ensuite à l'analyse non linéaire géométrique des coques minces et à l'analyse non linéaire matérielle des coques minces et coques épaisses.

Le procédé de traitement des grands déplacements et grandes rotations est présenté en choisissant judicieusement la description lagrangienne corotationnelle (D.L.C). En effet celle ci présente l'avantage, par l'actualisation du système de référence, d'absorber les rotations rigides origines généralement des grande rotations à chaque étape de l'analyse non linéaire incrémental, Il reste ainsi les petites déformations qui peuvent être traités en utilisant la théorie linéaire. Nous ambitionnons ainsi, avec cette Description lagrangienne actualisée avec un système d'axes corotationnel associée à la méthode itérative de Newton-Raphson pour linéariser les équations de l'analyse non linéaire géométrique, de disposer en fin de compte d'un outil simple dans sa mise au point et efficace dans son utilisation. En effet La comparaison des résultats obtenus par l'élément quadrilatère qui incorpore la *ddl* "*drilling rotation*" avec les résultats de l'élément quadrilatère classique et l'élément triangulaire avec rigidité fictive ainsi qu'avec les résultats tirés de la littérature pour l'analyse non linéaire géométrique des coques minces nous a permis de conclure que cet élément est remarquablement performant. Il permet notamment de passer tout les exemples contrairement à l'élément quadrilatéral avec rigidité fictive. Il Possède cette capacité notable par rapport aux éléments avec rigidité fictive pour deux raisons principales :

- \* Le champ de déplacement interpolé dans le plan est parabolique, celui de l'élément avec rigidité fictive est linéaire

- \* La nécessité de bloquer la *ddl* de rotation dans le plan pour le cas des éléments a rigidité fictive gêne la réponse de ces derniers aux actions extérieurs.

Concernant son comportement en analyse non linéaire, on constate une réduction du nombre d'itérations par rapport aux éléments avec rigidité fictive ce qui conduit à un gain considérable sur le temps de calcul par ordinateur.

Associer à la D.L.C et à l'adoption du plan de référence proposé et développé par nos soins dans ce travail, l'élément dénote ainsi d'une efficacité accrue pour la prise en compte des grandes rotations et ceci même si le nombre d'éléments utilisés lors de la discrétisation est faible.

Il faut noter aussi que ce type d'élément à *ddl drilling rotation* permet le traitement des exemples spécifiques (coques raidies, poutres a section variable, ...) par la possibilité de modéliser des croisements d'éléments de coques offerts par l'interpolation du sixième *ddl*. Une dernière constatation nous permet de dire que vue les résultats de tous les exemples testés jusqu'ici, l'élément en question possède un meilleure comportement par rapport à l'élément triangulaire dans les situations à comportement membranaire dominant (coque à double courbure par exp.)

La deuxième partie de ce travail concerne l'extension de l'élément quadrilatéral à l'analyse non linéaire matérielle en petit déplacement. Elle est basée sur la détermination d'une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage. Le critère d'écoulement d'Ilyushin exprimé en termes de contraintes généralisé est modifié selon les propositions de Crisfield pour tenir compte des effets de cisaillement et le développement progressif de la déformation plastique à travers l'épaisseur. Ceci permettra la résolution des équations non linéaire sans discrétisation de la coque

à travers l'épaisseur, ce qui constitue un choix judicieux car comme nous l'avons déjà vu, l'effet du cisaillement transversal sur le comportement plastique est correctement identifié

L'utilisation de la méthode des contraintes initiales combiné avec la méthode de résolution de Newton-Raphson associée au contrôle en charge imposé, nous a permis de disposer d'un outil simple et efficace pour la résolution des équations constitutives non linéaire. L'élément ainsi développé démontre une grande efficacité en analyse élasto-plastique. Nous constatons un bon comportement de l'élément  $Q_4$  en plasticité malgré sa formulation simple, ce qui permet une grande réduction du temps de calcul par ordinateur. D'un autre côté l'utilisation d'un critère en contraintes généralisées permet aussi une réduction considérable en temps de calcul. Nous notons enfin que le modèle permet de suivre correctement l'évolution de la plasticité sur les structures.

En conclusion ce travail a permis de mettre en évidence la bonne performance de l'élément quadrilatéral associé à un élément de contraintes planes avec "drilling rotation", l'ensemble des avantages que nous avons cités dans les conclusions du Chapitre VII, nous conduit à déduire que c'est un élément simple efficace et fiable qui constitue un grand intérêt pour l'analyse non linéaire géométrique des coques minces et épaisses.

### **RECOMMANDATIONS:**

Notre travail a permis de faire une contribution pour la mise au point d'un modèle élément fini pour l'analyse non linéaire en général des problèmes des coques.

Nous pensons que ce travail peut être étendu aux :

- Non linéarité géométrique et matériel combinée plus la prise en compte de la non linéarité due à l'évolution des conditions limites, pour pouvoir simuler les industriels problèmes d'emboutissage;
- La nécessité de disposer d'un élément à interpolation élevée valable pour les plaques minces et épaisses à la fois tel que l'élément de Batoz 1989 ou l'élément de Lardeur 1990
- L'utilisation des processus d'accélération de convergence, ou bien l'utilisation d'autres méthodes de résolution des problèmes non linéaires. Pour réduire encore le temps de calcul.

# BIBLIOGRAPHIE

- [**ABDALLAA & IBRAHIM 2006**] ABDALLAA, J.A. IBRAHIM, A.M. Development of a discrete Reissner–Mindlin element on Winkler foundation. 2006. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 42, p 740-748
- [**ADINI & CLOUGH 1961**] ADINI, A. CLOUGH, B. Analysis of plate bending by the finite element method. 1961. NSF Report G 7337
- [**ALLMAN 1984**] ALLMAN, D.J. A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis. 1984. Computers and Structures. Vol 19, p 1-8.
- [**ALLMAN 1996**] ALLMAN, D.J. IMPLEMENTATION OF A FLAT FACET SHELL FINITE ELEMENT FOR APPLICATIONS IN STRUCTURAL DYNAMICS. 1996. Computers & Structures. Vol 59, No 4, p 657-563
- [**ANDRADE & al 2007**] ANDRADE, L.G. AWRUCH, A.M. MORSCH, I.B. Geometrically nonlinear analysis of laminate composite plates and shells using the eight-node hexahedral element with one-point integration. 2007. Composite Structures. Vol 79, p 571-580
- [**ANNABATTULA 2006**] ANNABATTULA, R.K. PLANAR HYBRID FINITE ELEMENTS WITH DRILLING DEGREES OF FREEDOM. 2006. Int. Conf. on Comput. Fluid Dynam. Acoust. Heat Transfer and Electromag. CFEMATCON-06, July 24-25, Andhra University, INDIA
- [**AREIAS & al 2005**] AREIAS, P.M.A. SONG, J.H and BELYTSCHKO, T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. 2005. Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol 64, p 1166-1206
- [**ARGYRIS & al 2002**] ARGYRIS, J.H. PAPADRAKAKIS, M. KARAPITTA, L. Elasto-plastic analysis of shells with the triangular element TRIC. 2002. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 191, p 3613-3636
- [**AURICCHIO & TAYLOR 1995**] AURICCHIO, F. TAYLOR, R.L. A triangular thick plate finite element with an exact thin limit. 1995. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 19, p 57-68
- [**AYAD & al 2001**] AYAD, R. RIGOLOTT, A and TALBI, N. An improved three-node hybrid-mixed element for Mindlin-Reissner plates. 2001. Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol 51, p 919-942
- [**BARRET 1999**] BARRETT, K.E. Explicit eight-noded quadrilateral elements. 1999. Finite Elements in Analysis and Design, Vol 31, p 209-222
- [**BATOZ & al 1980**] BATOZ, J.L . BATHE, K.J et HO, L.W. A study of three-node triangular plate bending elements. 1980. Int. J. Num. Meth. Engng. Vol 15, p 1771-1812
- [**BATOZ & al 1982**] BATOZ, J.L. BENTAHAR, M et DHATT, G.S. Les elements DKT et DKQ et l'analyse des plaques et coques minces. 1982. présenté à la conférence " Tendances Actuelles en Calcul des Structures " tenue à Sophia-Antipolis, 1-2-3 février
- [**BATOZ & al 2000**] BATOZ, J.L. HAMMADI, F. ZHENG, C. ZHONG, W. On the linear analysis of plates and shells using a new-16 degrees of freedom flat shell element. 2000. Computers and Structures. Vol 78, p 11-20
- [**BATOZ & al 2001**] BATOZ, J.L. ZHENG, C.L. and HAMMADI, F. Formulation and evaluation of new triangular, quadrilateral, pentagonal and hexagonal discrete Kirchhoff plate/shell elements. 2001. Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol 52, p 615-630
- [**BATOZ & DAHATT 1979**] BATOZ, J.L. and DAHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. 1979. Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 14, p 1262-1267
- [**BATOZ & DHATT 1990**] BATOZ, J.L. DHATT, G. Modélisation des Structures par Eléments Finis. Vol2 : Poutres et Plaques. 1990. Edition Hermès
- [**BATOZ & BENTAHAR 1982**] BATOZ, J.L. BENTAHAR, M. Evaluation of a new thin plate quadrilateral element. 1982. Int. J. Num. Meth. Engng. Vol 18, p 1655-1677

- [**BATOZ & GEOFFROY 1983**] BATOZ, J.L. GEOFFROY, P. Evaluation d'un élément finis triangulaire pour l'analyse non linéaire statique de coques minces. Avril 1983. Division Modeles Numériques en mécanique, UT de Compiègne
- [**BATTINI & PACOSTE 2006**] BATTINI, J.M. PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. 2006. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 195, p 6362-6377
- [**BAZELEY & al 1965**] BAZELEY, G.P. CHEUNG, Y.K. IRONS, B.M. ZIENKIEWICZ, O.C. Triangular elements In bending - conforming and non conforming solutions.1965. proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F.B, Ohio
- [**BEN TAHAR 1981**] BEN TAHAR, M. analyse élasto-plastique des plaques et coques minces par elements finis. 1981. Thèse de doctorat. Université de technologie de compiegne, p 130
- [**BERGAN & FELIPPA 1985**] BERGAN, P.G. and FELIPPA, C.A. A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom. 1985. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol 50, p 25-69.
- [**BERNADOU & BOISSERIE 1982**] BERNADOU, M. BOISSERIE, J.K. The Finite Element Method in Thin Shell Theory : Application to Arch Dam Simulations". 1982. Birkhauser, Boston
- [**BERNADOU & CIARLET 1976**] BERNADOU, M. CIARLET, P.G. Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter. 1976. dans Computing Methods in Applied Sciences and Engineering. Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, Vol 134, p 89-136, Springer. Verlag. Berlin.
- [**BETSCH & al 1998**] BETSCH, P. MENZEL, A. STEIN, E. On the parametrization of finite rotations in computational mechanics. A classification of concepts with application to smooth shells. 1998. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 155, p 273-305
- [**BILOTTA & CASCIARO 2002**] BILOTTA, A. CASCIARO, R. Assumed stress formulation of high order quadrilateral elements with an improved in-plane bending behaviour. 2002. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 191, p 1523-1540
- [**BOISSE & al 1996**] BOISSE, P. GELIN, J.C. AND DANIEL, J.L. COMPUTATION OF THIN STRUCTURES AT LARGE STRAINS AND LARGE ROTATIONS USING A SIMPLE Co ISOPARAMETRIC THREE-NODE SHELL ELEMENT. 1996. Computers and Structures. Vol 58, No 2, p 249-261
- [**BRIASSOULIS 1995**] BRIASSOULIS, D. Synthetic-structured finite element analysis of shells. 1995. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 121, p 411-448
- [**BRIASSOULIS 1996**] BRIASSOULIS, D. THE FOUR-NODE  $C^0$  SHELL ELEMENT REFORMULATED. 1996. Int. J. for numerical methods in engineering. Vol 39, p 2417-2455
- [**BRUNET & SABOURIN 2006**] BRUNET, M. and SABOURIN, F. Analysis of a rotation-free 4-node shell element . 2006. Int. J. Numer. Meth. Engrg. Vol 66, p 1483-1510
- [**BUCZKOWSKI & TORBACKI 2001**] BUCZKOWSKI, R. AND TORBACKI, W. Finite element modelling of thick plates on two-parameter plastic foundation. 2001. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. Vol 25, p 1409-1427
- [**CEN & al 2007**] CEN, S. CHEN, X.M. FU, X.R. Quadrilateral membrane element family formulated by the quadrilateral area coordinate method. 2007. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 196, p 4337-4353
- [**CÉSAR DE SÀ & al 2002**] CÉSAR DE SÀ, J.M.A. NATAL JORGE, R.M. FONTES VALENTE, R.A. and ALMEIDA AREIAS, P.M. Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation. 2002. Int. J. Numer. Meth. Engrg . Vol 53, p 1721-1750

- [**CHAPELLE & al 2004**] CHAPELLE, D. FERENT, A. BATHE, K.J. 3D-SHELL ELEMENTS AND THEIR UNDERLYING MATHEMATICAL MODEL. 2004. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol 14, No 1, p 105-142
- [**CHEN & al 1996**] CHEN, J.S. PAN, C. WU, C.T. LIU, W.K. Reproducing Kernel Particle Methods for large deformation analyses of non-linear structures. 1996. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 139, p 195-227
- [**CHEN & al 2004**] CHEN, X.M. CEN, S. LONG, Y.Q. YAO, Z.H. Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method. 2004. Computers and Structures. Vol 82, p 35-54
- [**CHEVALIER 1996**] CHEVALIER, L. Mécanique des Systèmes et des Milieux Déformables. 1996. Ellipses / Edition Marketing S.A
- [**CHIN & al 1993**] CHIN, C.K. AL-BERMANI, F.G.A. KITIPORNCHAI, S. A. finite element method for buckling analysis of structures.1993. Journal of Structural Engineering (ASCE). Vol 119, p 1048-1068
- [**CHIN & al 1994**] CHIN, C.K. AL-BERMANI, F.G.A. KITIPORNCHAI, S. Nonlinear analysis of thin-walled structures using plate elements. 1994. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 37, p1697-1711
- [**CHINOSI & al 1997**] CHINOSI, C. COMODI, M.I. SACCHIV G. A new finite element with 'drilling' D.O.F. 1997. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 143, p 1-11
- [**CHINOSI 1995**] CHINOSI, C. shell elements as a coupling of plate and "drill" elements. 1995. Computers & Structures. Vol 57, No 5, p 893-902.
- [**CHOI & al 2006**] CHOI, N. CHOO, Y.S. LEE, B.C. A hybrid Trefftz plane elasticity element with drilling degrees of freedom. 2006. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 195, p 4095-4105
- [**CHOI & PAIK 1996**] CHOI, C.K. PAIK, J.G. An Effective Four Node Degenerated Shell Element for Geometrically Nonlinear Analysis. 1996. Thin - Walled Structures. Vol 24, p261-283
- [**CHOÏ 1995**] CHOÏ, D. Sur la Rigidite Geometrique des Surfaces, Application à la Theorie des Coques Elastiques Minces. 1995. Thèse Doctorat. Université Pierre et Marie Curie
- [**CHUL & YONG 2002**] CHUL, H.H. YONG, H.K. A partial assumed strain formulation for triangular solid shell element. 2002. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 38. p 375-390
- [**CONCEIÇÃO & TRIGO 2000**] CONCEIÇÃO, A.C.A. TRIGO, B.J. and SIMAS, D.L. Optimal design of beam reinforced composite structures under elasto-plastic loading conditions. 2000. Struct Multidisc Optim. Vol 19, p 50-63 Springer-Verlage
- [**CONCEIÇÃO 1999**] CONCEIÇÃO. A.C.A. Optimisation of geometrically non-linear composite structures based on load-displacement control. Composite Structures 1999. Vol 46, P 345-356
- [**COOK 1986**] COOK, R.D. On the Allman Triangle and a Related Quadrilateral Element. 1986. Computers and Structures. Vol 22, p 1065-1067
- [**CRISFIELD 1979**] CRISFIELD, M.A. A faster modified Newton-Raphson iteration. 1979. Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng. Vol 20, p 267-278
- [**CRISFIELD 1981**] CRISFIELD, M.A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. 1981. Computers and Structures. Vol 13. p 55-62
- [**DARILMAZ & KUMBASAR 2006**] DARILMAZ, K. KUMBASAR, N. An 8-node assumed stress hybrid element for analysis of shells. 2006. Computers and Structures. Vol 84, p 1990-2000
- [**DE VEUBEKE 1974**] DE VEUBEKE, F.B. Variational principles and the Patch Test. 1974. Int. J. Numer. Methods Engng. Vol 8, p 783-801
- [**DEMASI 2007**] DEMASI, L.  $\infty^3$  Hierarchy plate theories for thick and thin composite plates: The generalized unified formulation. 2008. Composite Structures. Vol 84, Issue 3, P 256-270

- [**DESTUYNDER & SALAIIN 1998**] DESTUYNDER, PH. SALAIIN, M. Approximation of shell geometry for nonlinear analysis. 1998. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol 156, p 111-148
- [**DJEGHABA 1990**] DJEGHABA, K. Contribution à l'analyse non linéaire Géométrique des Coques Minces en Théorie de Margueur. 1990. Thse de doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, p 327
- [**DU & CEN 2008**] DU, Y. CEN, S. Geometrically nonlinear analysis with a 4-node membrane element formulated by the quadrilateral area coordinate method. 2008. *Finite Elements in Analysis and Design.* Vol 44, Issue 8, P 427-438
- [**DUAN & al 1999**] DUAN, M. MIYAMOTO, Y. IWASAKI, S. DETO, H. 5-node hybrid/mixed finite element for Reissner-Mindlin plate. 1999. *Finite Elements in Analysis and Design.* Vol 33, p 167-185
- [**DUAN & LIANG 2003**] DUAN, H.Y. LIANG, G.P. Mixed and nonconforming finite element approximations of Reissner–Mindlin plates. 2003 . *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol 192 , p 5265-5281
- [**DUJC & BRANK 2008**] DUJC, J. BRANK, B. On stress resultant plasticity and viscoplasticity for metal plates. 2008. *Finite Elements in Analysis and Design.* Vol 44, p 174-185
- [**EBERLEIN & WRIGGERS 1999**] EBERLEIN, R. WRIGGERS, P. Finite element concepts for finite elastoplastic strains and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis. 1999. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol 171, p 243-279
- [**EL-KHALDI 1987**] EL-KHALDI, F. Contribution au Traitement des Phénomènes de Blocage de Membrane et Cisaillement dans le Modelisation des arcs et des coques minces en Théorie de Margueurre. 1987. Thèse de Doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de LYON, p 305
- [**FEATHERSTON 2001**] FEATHERSTON, C.A. Imperfection sensitivity of flat plates under combined compression and shear. 2001. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* Vol 36, p 249-259
- [**FERREIRA & BARBOSA 2000**] FERREIRA, A.J.M. BARBOSA, J.T. Buckling behaviour of composite shells. 2000. *Composite Structures.* Vol 50, p 93-98
- [**FOREST & al 2006**] FOREST, S. AMESTOY, M. CANTOURNET, S. DAMAMME, G. KRUCH, S. Mécanique Des milieux continues. 2006. Ecole des Mines de Paris
- [**FREY & STUDER 2000**] FREY, F. STUDER, M.A. Analyse des structures et milieux continues. 2000. Vol 5, Presses polytechniques et universitaires Romandes
- [**FREY 1990**] FREY, F. Shell Finite Elements with Six Degrees of Freedom per Node. 1990. *Analytical and Computational Models of Shell, CED.* Vol 3, p 291-316
- [**GALLAGHER 1976**] GALLAGHER, R.H. Introduction aux Eléments Finis. 1976. Edition Pluralis – traduction française
- [**GALLEE 2005**] GALLEE, S. Caractérisation expérimentale et simulation numérique des procédés d'emboutissage profond : application aux aciers inoxydables austénitiques. 2005. Thèse de doctorat. Ecole doctorale pluridisciplinaire. Laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux. UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD, p 184
- [**GERADIN & al 1980**] GERADIN, M. IDELSOHN, S. and HOGGE, M. Computational strategies for the solution of large non linear problems via Quasi-Newton methods. 1980. *Comp and Struct.* Vol 13, p 73-81
- [**GEYER & GROENWOLD 2003**] GEYER, S and GROENWOLD, A.A. On reduced integration and locking of flat shell finite elements with drilling rotations. 2003. *Commun. Numer. Meth. Engrg.* Vol 19, p 85–97

- [GOSWAMI 2006] GOSWAMI, S. A  $C^0$  plate bending element with refined shear deformation theory for composite structures. 2006. Composite Structures. Vol 72, p 375-382
- [GRUTTMANN & WAGNER 2005] GRUTTMANN, F. WAGNER, W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. 2005. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 194, p 4279-4300
- [GUO & al 2002] GUO, Y.Q. GATI, W. NACEUR, H. BATOZ, J.L. An efficient DKT rotation free shell element for springback simulation in sheet metal forming. 2002. Computers and Structures. Vol 80, p 2299-2312
- [HAISLER & al 1977] HAISLER, W.E. and STRICKLIN, J.A. & KEY, J.E. Displacement incrementation in non linear structural analyses by the self-correcting method. 1977. Int. J. Num. Met. Eng. Vol 25, N° 5, p 665-675
- [HAN & al 2008] HAN, S.C. HAM, H.D. NUKULCHAIC, W.K. Geometrically non-linear analysis of arbitrary elastic supported plates and shells using an element-based Lagrangian shell element. 2008. International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol 43, p 53-64
- [HAN & LIEW 1999] HAN, J.B. LIEW, K.M. Static analysis of Mindlin plates: the differential quadrature element method (DQEM). 1999. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 177, p 51-75
- [HEGYI & al 2006] HEGYI, D. SAJTOS, I. GEISZTER, G. HINCZ, K. Eight-node quadrilateral double-curved surface element for membrane analysis. 2006. Computers and Structures. Vol 84, p 2151-2158
- [HONG & al 2001] HONG, W.I. KIM, J.H. KIM, Y.H. and LEE, S.W. An assumed strain triangular curved solid shell element formulation for analysis of plates and shells undergoing finite rotations. 2001. Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol 52, p 747-761
- [HONG & TENG 2002] HONG, T. TENG, J.G. Non-linear analysis of shells of revolution under arbitrary loads. 2002. Computers and Structures. Vol 80, p 1547-1568
- [HUGHES & al 1989] HUGHES, T.J.R. BREZZI, F. MASUD, A. and HARARI, I. Finite Elements with Drilling Degrees of Freedom : Theory and Numerical Evaluations. 1989. Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering, Computational Mechanics Publications, Ashurst, U.K, p 3-17
- [HUGHES & al 1995] HUGHES T.J.R, MASUD, A. HARARI, I. Numerical assessment of some membrane elements with drilling degrees of freedom. 1995. Computers and Structures. Vol 55, N° 2, p 297-314
- [HUGHES & BREZZI 1989] HUGHES, T.J.R. BREZZI, F. On Drilling Degrees of Freedom. 1989. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol 72, p 105-121
- [IBRAHIMBEGOVIĆ & TAYLOR 1990] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. TAYLOR, R.L. and WILSON, E.L. A Robust Quadrilateral Membrane Finite Element with Drilling Degrees of Freedom. 1990. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 30, p 445-457
- [IBRAHIMBEGOVIĆ 1995] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory : three-dimensional curved beam elements. 1995. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol 122, p 11-26
- [IMAI & FRANGOPOL 2000] IMAI, K. FRANGOPOL, D.M. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. I : theory. 2000. Computers and Structures. Vol 77, p 677-691
- [IMBERT 1995] IMBERT, J.F. Analyse des Structures par Eléments Finis. 1995. Cépaduès Editions – 3<sup>ème</sup> édition
- [JAAMEI 1988] JAAMEI, S. "JET" Thin Finite Element With Drilling Rotations. 1988. IREM Internal Report, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne



- [**JETEUR 1986**] JETEUR, Ph. A Shallow Shell Element with In-plane Rotational Degrees of Freedom. 1986. IREM Internal Report mars, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
- [**KAPANIA & LI 2003**] KAPANIA, R.K. LI, J. A formulation and implementation of geometrically exact curved beam elements incorporating finite strains and finite rotations. 2003. Computational Mechanics. Vol 30, p 444-459
- [**KERROUAULT 2001**] KERROUAULT, N. Fissuration à chaud en soudage d'un acier inoxydable austénitique. 2001. Thèse doctorat. Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux / ECP (UMR CNRS 8579). Laboratoire Moderne de Soudage / CEA Saclay – CEREM
- [**KHOSRAVI & al 2008**] KHOSRAVI, P. GANESAN, R. SEDAGHATI, R. An efficient facet shell element for corotational nonlinear analysis of thin and moderately thick laminated composite structures. 2008. Computers and Structures. Vol 86, p 850-858
- [**KIKUCHI 1975**] KIKUCHI, F. On the finite element scheme based on the discrete Kirchhoff assumption. 1975. Numer. Math. Vol 24, P 211-231
- [**KIKUCHI 1981**] KIKUCHI, F. On the discrete Kirchhoff approach for plate bending problems. 1981. Theoretical and Applied Mechanics. Vol 31, University of Tokyo Press
- [**KIM & al 2002**] KIM, J.G. LEE, J.K. and PARK, Y.K. A new 3-node triangular flat shell element. 2002. Communication in. Numer. Meth. Engng. Vol 18, p 153-159
- [**KIM & al 2003**] KIM, K.D. LOMBOY, G.R. and VOYIADJIS, G.Z. A 4-node assumed strain quasi-conforming shell element with 6 degrees of freedom. 2003. Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol 58, p 2177-2200
- [**KIM & al 2007-a**] KIM, K.D. LEE, C.S. HAN, S.C. a 4-node co-rotational ANS shell element for laminated composite structures. 2007. Composite Structures. Vol 80, p 234-252
- [**KIM & al 2007-b**] KIM, K.D. HAN, S.C. SUTHASUPRADITA, S. Geometrically non-linear analysis of laminated composite structures using a 4-node co-rotational shell element with enhanced strains. 2007. International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol 42, p 864-881
- [**KIM & LOMBOY 2006**] KIM, K.D. LOMBOY, G.R. A co-rotational quasi-conforming 4-node resultant shell element for large deformation elasto-plastic analysis. 2006. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 195, p 6502-6522
- [**KIM & VOYIADJIS 1999**] KIM, K. VOYIADJIS, G.Z. Non-linear finite element analysis of composite panels. 1999. Composites : Part B. Vol 30, p 365-381
- [**KIM et al 1998**] KIM, K.D. PARK, T. VOYIADJIS, G.Z. Postbuckling analysis of composite panels with imperfection damage. 1998. Computational Mechanics. Vol 22, p 375-387
- [**KOITER & SIMMONS 1972**] KOITER, W.T and SIMMONS, G. Foundation of shell theory. 1972. in proceeding of thirteenth Inter congress of theoretical and Applied Mechanics. Moscou, p 39-71
- [**KOLAHY & CRISFIELD 2001**] KOLAHY, A.S. and CRISFIELD, M.A. A large-strain elasto-plastic shell formulation using the Morley triangle. 2001. Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol 52, p 829-849
- [**KOZIEY & MIRZA 1997**] KOZIEY, B.L. and MIRZA, F.A. CONSISTENT THICK SHELL ELEMENT. 1997. Computers & Structures. Vol 65, N<sup>o</sup> 4, p 531-549
- [**KUZNETSOV & LEVYAKOV 2007**] KUZNETSOV, V.V. LEVYAKOV, S.V. Phenomenological invariant-based finite-element model for geometrically nonlinear analysis of thin shells. 2007. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 196, p 4952-4964
- [**LANDAU & al 1978**] LANDAU, L. WROSEL, L.C. and EBECKEN, N.F.F. ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF SHELL STRUCTURES. 1978. computers and structures. Vol 9, p 351-358
- [**LEE & NUKULCHAI 1998**] LEE, S.J. and NUKULCHAI, W.K. A NINE-NODE ASSUMED STRAIN FINITE ELEMENT FOR LARGE-DEFORMATION ANALYSIS OF LAMINATED SHELLS. 1998. Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol 42, p 777-798

- [**LEGAY & COMBESCURE 2003**] LEGAY, A. and COMBESCURE, A. Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS. 2003. Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol 57, p 1299-1322
- [**LEGAY 2002**] LEGAY, A. Une méthode de calcul efficace pour l'étude paramétrique du flambage non-linéaire de structures tridimensionnelles : application à la fiabilité. 2002. Thèse de doctorat. École Normale Supérieure de Cachan/CNRS/Paris, p 154
- [**LEVY & GAL 2001**] LEVY, R. GAL, E. geometrically nonlinear three-noded flat triangular shell elements. 2001. Computers & structures. Vol 79, p 2349-2355
- [**LI & al 2004**] LI, L.X. KUNIMATSU, S. HAN, X.P. XU, S.Q. The analysis of interpolation precision of quadrilateral elements. 2004. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 41, p 91-108
- [**LI & CHEN 2003**] LI, Q.S. CHEN, J.M. Nonlinear elastoplastic dynamic analysis of single-layer reticulated shells subjected to earthquake excitation. 2003. Computers and Structures. Vol 81, p 177-188
- [**LI & ZHAN 2000**] LI, M. ZHAN, F. The finite deformation theory for beam, plate and shell. Part V. The shell element with drilling degree of freedom based on Biot strain. 2000. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 189, p 743-759
- [**LIU & TO 1995-a**] LIU, M.L. and TO, C.W.S. HYBRID STRAIN BASED THREE NODE FLAT TRIANGULAR SHELL ELEMENTS - I. NONLINEAR THEORY AND INCREMENTAL FORMULATION. 1995. Computers & Structures Vol 54. No 6, p 1031-1056
- [**LIU & TO 1995-b**] LIU, M.L. and TO, C.W.S. HYBRID STRAIN BASED THREE NODE FLAT TRIANGULAR SHELL ELEMENTS - II. NUMERICAL INVESTIGATION OF NONLINEAR PROBLEMS. 1995. Computers & Structures. Vol 54. No 6, p 1057-1076
- [**LIU & TO 1998**] LIU, M.L. TO, C.W.S. A further study of hybrid strain-based three-node flat triangular shell elements. 1998. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 31, p 135-152
- [**LU & al 2006**] LU, H. ITO, K. KAZAMA, K. NAMURA, S. Development of a new quadratic shell element considering the normal stress in the thickness direction for simulating sheet metal forming. 2006. Journal of Materials Processing Technology. Vol 171, p 341-347
- [**M. BEN TAHAR 2005**] M. BEN TAHAR, M. Contribution a l'Etude et la Simulation du Procédé d'Hydroformage. 2005. Thèse de doctorat, l'École des Mines de Paris, p 260
- [**MASSIN & AL MIKIDAD 2002**] MASSIN, P. AL MIKIDAD, M. Nine node and seven node thick shell elements with large displacements and rotations. 2002. Computers and Structures. Vol 80, p 835-847
- [**MEEK & RISTIC 1997**] MEEK, J.L, RISTIC, S. Large Displacement Analyses of thin plates and shells using a flat facet finite element formulation. 1997. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. Vol 145, p285-299
- [**MELOSH 1961**] MELOSH, R.J. A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. 1961. J. Aero. Space Sci. Vol 28, p 34-42
- [**MESQUITA & al 1998**] MESQUITA, A.D. CODA, H.B. and PROENÇA, S.P.B. A Finite Element for Elastoplastic Analysis of Thin Plates and Shells. 1998. Computational Mechanics New Trends and Applications ©CIMNE, Barcelona, Spain
- [**MORLEY 1986**] MORLEY, L.S.D. The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems. 1968. Aero. Quart. Vol 19, p 149-169
- [**NAGHDI 1963**] NAGHDI, P.M. Foundations of Elastic Shell Theory. 1963. Progress in Solid Mechanics. Vol 4, p 1-90 North-Holland, Amsterdam.
- [**NAGHDI 1972**] NAGHDI, P.M. The Theory of Shell and Plates. 1972. Handbuch der Physik. Vol VI a-2, p 425-640, Springer-Verlag, Berlin.

- [**NZENGWA & SIMO 1999**] NZENGWA, R. SIMO, B.H.T. A two-dimensional model for linear elastic thick shells. 1999. International Journal of Solids and Structures. Vol 36, p 5141-5176
- [**OZKUL & TURE 2004**] OZKUL, T.A. TURE, U. The transition from thin plates to moderately thick plates by using finite element analysis and the shear locking problem. 2004. Thin-Walled Structures. Vol 42, p 1405-1430
- [**ÖZTORUN 2006**] ÖZTORUN, N.K. A rectangular finite element formulation. 2006. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 42, p 1031-1052
- [**PACOSTE 1998**] PACOSTE, C. Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses. 1998. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 156, p 75-110
- [**PIMPINELLI 2004**] PIMPINELLI, G. An assumed strain quadrilateral element with drilling degrees of freedom. 2004. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 41, p 267-283
- [**PROVIDAS & KATTIS 2000**] PROVIDAS, E. KATTIS, M.A. An assessment of two fundamental flat triangular shell elements with drilling rotations. 2000. Computers and Structures Vol 77, p 129-139
- [**RAMESH & KRISHNAMOORTHY 1995**] RAMESH, G. KRISHNAMOORTHY, C.S. Geometrically non-linear analyses of plate and shallow shells by dynamic relaxation. 1995. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. Vol 123, p15-32
- [**RAMM 1982**] RAMM, E. The Riks/Wempner approach – An extension of the displacement control method in non linear analyses.1982. Recent Advances in nonlinear Computational Mechanics – ed. by E. HINTON, D.R.J. OWEN and C. TAYLOR, university of SWANSEA, England, p 63-89
- [**RANNACHER 1991**] RANNACHER, R. On the convergence of the Newton-Raphson method for strongly nonlinear equations. 1991. In. Nonlinear. Com. Mech, P 11-30
- [**RAZAQPUR & al 2003**] RAZAQPUR, A.G. NOFAL, M. VASILESCU, M. An improved quadrilateral finite element for analysis of thin plates. 2003. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 40, p 1-23
- [**REDDY & KISSNER 1997**] REDDY, B.D. KISSNER, M. The four-noded quadrilateral with a 2 x 1 integration rule: Application to plates and other problems. 1997. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 149, p 101-112
- [**RENGARAJAN & al 1995**] RENGARAJAN, G. AMINPOUR, M.A. KNIGHT, N.F. IMPROVED ASSUMED-STRESS HYBRID SHELL ELEMENT WITH DRILLING DEGREES OF FREEDOM FOR LINEAR STRESS, BUCKLING, AND FREE VIBRATION ANALYSES. 1995. NASA-CR-192816.
- [**RIKS 1979**] RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. 1979. Int. J. of. Solids and Struct. Vol 15, p 524-551
- [**ROBERT 1999**] ROBERT, F. Contribution à l'analyse non linéaire Géométrique et Matérielle des Ossatures Spatiales en Génie Civil Application aux Ouvrages d'Art. 1999. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, p 248
- [**SABIR & SFENDJI 1995**] SABIR, A.B. SFENDJI, A. Triangular and Rectangular Plane Elasticity Finite Elements. 1995. Thin-Walled Structures. Vol 21, p 225-232
- [**SABIR 1985**] SABIR, A.B. A Rectangular and a Triangular Plane Elasticity Element with Drilling Degrees of Freedom. 1985. Proceedings of the Second International Conference on Variational Methods in Engineering, " Brebbia C. A. (ed.), Southampton University, Springer-Verlag, berlin", p 17-25
- [**SAETHER 1996**] SAETHER E. AN EXPLICIT PLANE QUADRILATERAL ELEMENT FOR NONLINEAR MATERIAL ANALYSIS. 1996. Computers & Structures. Vol 61, No 3, p 529-538

- [SEKI & ATLURI 1995] SEKI, W. ATLURI, S.N. On newly developed assumed stress finite element formulations for geometrically and materially nonlinear problems. 1995. Finite Elements in Analysis and Design. Vol 21, p 75-110
- [SHI 2002] SHI, Z.C. Nonconforming finite element methods. 2002. Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol 149, p 221-225
- [SOH & al 2001] SOH, A.K. CEN, S. LONG, Y.Q. LON, Z.F. A new twelve DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates. 2001. Eur. J. Mech. A/Solids. Vol 20, p 299-326
- [SURANA 1982] SURANA, K.S. Geometrically Non-Linear Formulation for the Three Dimensional Solid-Shell Transition Finite Elements. 1982. Computers & Structures. Vol 15, N°5, p 549-566
- [SZE & ZHU 1999] SZE, K.Y. ZHU, D. A quadratic assumed natural strain curved triangular shell element. 1999. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 174, p 57-71
- [TABIEI & TANOV 2002] TABIEI, A. and TANOV, R. Sandwich shell finite element for dynamic explicit analysis. 2002. Int. J. Numer. Meth. Engrg. Vol 54, p 763-787
- [TAIG & KERR 1964] TAIG, I.C. and KERR, R.I. Some problems in the discrete element representation of aircraft structures. 1964. in Matrix Methods of Structural Analysis, ed. by B. M. Fraeijs de Veubeke, Pergamon Press, London
- [TAYLOR & al 2003] TAYLOR, R.L. FILIPPOU, F.C. SARITAS, A. AURICCHIO, F. A mixed finite element method for beam and frame problems. 2003. Computational Mechanics. Vol 31, p 192-203
- [TURNER & al 1956] TURNER, M.J. CLOUGH, R.W. MARTIN, H.C. and TOPP, L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. 1956. J. Aero. Sci., p 23
- [VIDRASCU 1984] VIDRASCU, M. Comparaison numérique entre les solutions bidimensionnelles et tridimensionnelles d'un problème de plaque encastree. 1984. Rapport de Recherche.
- [VOYIADJIS & WOELKE 2006] VOYIADJIS, G.Z. WOELKE, P. General non-linear finite element analysis of thick plates and shells. 2006. Int. J. of Solids and Structures. Vol 43, p 2209-2242
- [WANG & al 2001] WANG, C.M. XIANG, Y. CHAKRABARTY, J. elastic/plastic buckling of thick plates. 2001. Int. J. of solids and structure. Vol 38, p 8617-8640
- [WANG & HU 2006] WANG, Z. HU, B. Research of combined hybrid method applied in the Reissner-Mindlin plate model. 2006. Applied Mathematics and Computation. Vol 182, p 49-66
- [WANJI & CHEUNG 2001] WANJI, C and CHEUNG, Y.K. Refined 9-dof triangular Mindlin plate elements. 2001. Int. J. Numer. Meth. Engrg. Vol 51, p 1259-1281
- [WANJI & SHIJIE 1998] WANJI, C. and SHIJIE, Z. REFINED HYBRID DEGENERATED SHELL ELEMENT FOR GEOMETRICALLY NON-LINEAR ANALYSIS. 1998. Int. J. Numer. Meth. Engrg. Vol 41, p 1195-1213
- [WEMPNER & al 1971] WEMPNER, G. ODEN, J.T. Et KROSS, D. finite element analyses of thin shells. 1971. J. Engng. Mech. Div. ASCE. Vol 94, p 1273-1294
- [WILLIAMS 1964] WILLIAMS, F. W. An approach to the nonlinear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections. 1964. Quart. Journ. Mech. And Applied Math. Vol XVII, p 451-469
- [WISNIEWSKI & TURSKA 2006] WISNIEWSKI, K. TURSKA, E. Enhanced Allman quadrilateral for finite drilling rotations. 2006. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 195, p 6086-6109
- [WOELKE & al 2006] WOELKE, P. VOYIADJIS, G.Z. and PERZYNA, P. Elasto-plastic finite element analysis of shells with damage due to microvoids. 2006. Int. J. Numer. Meth. Engrg. Vol 68, p 338-380
- [XIAO & al 2007] XIAO, J.R. BATRA, R.C. GILHOOLEY, D.F. GILLESPIE JR, J.W. MCCARTHY, M.A. Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable

- plate theory and MLPG method with radial basis functions. 2007. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol 196, p 979-987
- [XUAN & al 2008] XUAN, H.N. RABCZUK, T. BORDAS, S. DEBONGNIE, J.F. A smoothed finite element method for plate analysis. 2008. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol 197, p 1184-1203
- [YANG & al 2007-a] YANG, Y.B. LIN, S.P. LEU, L.J. Solution strategy and rigid element for nonlinear analysis of elastically structures based on updated Lagrangian formulation. 2007. *Engineering Structures.* Vol 29, p 1189-1200
- [YANG & al 2007-b] YANG, Y.B. LIN, S.P. CHEN, C.S. Rigid body concept for geometric nonlinear analysis of 3D frames, plates and shells based on the updated Lagrangian formulation. 2007. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol 196, p 1178-1192
- [YAQUN & al 2003] YAQUN, Z. ZHONGQIN, L and WEIGANG, Z. A quadrilateral thin shell element based on area co-ordinate for explicit dynamic analysis. 2003. *Commun. Numer. Meth. Engrg.* Vol 19, p 169-178
- [ZENG & al 2001] ZENG, Q. COMBESCURE, A. ARNAUDEAU, F. An Efficient Plasticity Algorithm for Shell Elements Application to Metal Forming Simulation. 2001. *Computers and Structures.* Vol 79, p 1525-1540
- [ZHANG & al 2007] ZHANG, Y.X. BRADFORD, M.A. GILBERT, R.I. A layered cylindrical quadrilateral shell element for nonlinear analysis of RC plate structures. 2007. *Advances in Engineering Software.* Vol 38, p 488-500
- [ZHANG & CHEUNG 2003] ZHANG, Y.X. and CHEUNG, Y.K. A refined non-linear non-conforming triangular plate/shell Element. 2003. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol 56, p 2387-2408
- [ZHANG & KIM 2006] ZHANG Y.X. KIM, K.S. Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements. 2006. *Composite Structures.* Vol 72, p 301-310
- [ZHANG & YANG 2006] ZHANG, Y.X. YANG, C.H. A family of simple and robust finite elements for linear and geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates. 2006. *Composite Structures.* Vol 75, p 545-552
- [ZHU & ZACHARIA 1996] ZHU, Y. ZACHARIA, T. A new one-point quadrature, quadrilateral shell element with drilling degrees of freedom. 1996. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol 136, p 165-203
- [ZIENKIEWICZ 1977] ZIENKIEWICZ, O.C. *The Finite Element Method.* 1977. Third Expanded and Revised Edition, McGraw-Hill, U.K.

*ANNEXES*

**LES FONCTIONS DE FORMES DE L'ELEMENT "DKQ"**

Pour les valeurs suivantes de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , et  $e$  :

$$a_k = \frac{3}{4}C_k \cdot S_k = \frac{3}{4} \frac{x_{ij} \cdot y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$b_k = \frac{1}{2}C_k^2 - \frac{1}{4}S_k^2 = \left(\frac{1}{4}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}y_{ij}^2\right)/l_{ij}^2$$

$$c_k = \frac{S_k}{l_{ij}} = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$d_k = \frac{1}{2}S_k^2 - \frac{1}{4}C_k^2 = \left(\frac{1}{4}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}x_{ij}^2\right)/l_{ij}^2$$

$$e_k = -\frac{C_k}{l_{ij}} = -\frac{y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

Les fonctions de forme de l'élément *DKQ* s'écrivent :

$$H_1^x = \frac{3}{2}(c_5N_5 - c_8N_8)$$

$$H_2^x = a_5N_5 + a_8N_8$$

$$H_3^x = N_1 - b_5N_5 - b_8N_8$$

$$H_4^x = \frac{3}{2}(c_6N_6 - c_5N_5)$$

$$H_5^x = a_6N_6 + a_5N_5$$

$$H_6^x = N_2 - b_6N_6 - b_5N_5$$

$$H_7^x = \frac{3}{2}(c_7N_7 - c_6N_6)$$

$$H_8^x = a_7N_7 + a_6N_6$$

$$H_9^x = N_3 - b_7N_7 - b_6N_6$$

$$H_{10}^x = \frac{3}{2}(c_8N_8 - c_7N_7)$$

$$H_{11}^x = a_8N_8 + a_7N_7$$

$$H_{12}^x = N_4 - b_8N_8 - b_7N_7$$

$$H_1^y = \frac{3}{2}(e_5N_5 - e_8N_8)$$

$$H_2^y = -N_1 + d_5N_5 + d_8N_8$$

$$H_3^y = -a_5N_5 - a_8N_8$$

$$H_4^y = \frac{3}{2}(e_6N_6 - e_5N_5)$$

$$H_5^y = -N_2 + d_6N_6 + d_5N_5$$

$$H_6^y = -a_6N_6 - a_5N_5$$

$$H_7^y = \frac{3}{2}(e_7N_7 - e_6N_6)$$

$$H_8^y = -N_3 + d_7N_7 + d_6N_6$$

$$H_9^y = -a_7N_7 - a_6N_6$$

$$H_{10}^y = \frac{3}{2}(e_8N_8 - e_7N_7)$$

$$H_{11}^y = -N_4 + d_8N_8 + d_7N_7$$

$$H_{12}^y = -a_8N_8 - a_7N_7$$

**INTERPOLATION DE LA FLECHE POUR LA CONSTRUCTION  
DE LA MATRICE DES CONTRAINTES INITIALES**

Nous utilisons le polynôme bi-cubique incomplet suivant :

$$P(\xi, \eta) = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \xi\eta \quad \xi^3 \quad \eta^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \xi^3\eta \quad \xi\eta^3 \rangle$$

Nous trouvons les fonctions d'interpolation suivantes :

$$N_{w_1}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\xi - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi^3\eta - \frac{1}{8}\xi\eta^3$$

$$N_{w_2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\xi - \frac{3}{8}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi^3\eta + \frac{1}{8}\xi\eta^3$$

$$N_{w_3}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\xi + \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi^3\eta - \frac{1}{8}\xi\eta^3$$

$$N_{w_4}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\xi + \frac{3}{8}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi^3\eta + \frac{1}{8}\xi\eta^3$$

$$N_{\theta_{x1}}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi\eta^2 - \frac{1}{8}\xi\eta^3$$

$$N_{\theta_{x2}}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta^3$$

$$N_{\theta_{x3}}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{8}\xi\eta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta^3$$

$$N_{\theta_{x4}}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{1}{8}\xi\eta^2 - \frac{1}{8}\xi\eta^3$$

$$N_{\theta_{y1}}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2\eta + \frac{1}{8}\xi^3\eta$$

$$N_{\theta_{y2}}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^2\eta + \frac{1}{8}\xi^3\eta$$

$$N_{\theta_{y3}}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2\eta - \frac{1}{8}\xi^3\eta$$

$$N_{\theta_{y4}}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^2\eta - \frac{1}{8}\xi^3\eta$$



