

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

Université Badji Mokhtar d'Annaba
Faculté des sciences de l'ingénieur



Thèse
Présentée pour obtenir le diplôme
de Magistère en Génie Civil
Option : Structures et matériaux

Par
BRIKI LYAMINE

THEME

ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE DES PLAQUES MINCES ET EPAISSES PAR ELEMENTS FINIS

Soutenue publiquement le 15/12/2004

DEVANT LE JURY

M. DJEGHABA Kamel	Maître de conférences U. Annaba	<i>Président</i>
M. BELARBI Mohamed Tahar	Maître de conférences U. Biskra	<i>Rapporteur</i>
M. HADIDENE Yazid	Maître de conférences U. Annaba	<i>Examineur</i>
M. BELOUNAR Lamine	Chargé de cours U. Biskra	<i>Examineur</i>

RESUME :

Dans cette thèse, il est présenté un model d'éléments finis plaques avec formulation en déplacements pour l'analyse des plaques minces et épaisses dans le domaine non linéaire.

Ce dernier est un model rhéologique isotrope basé sur la théorie de Mindlin/Reissner avec prise en compte de cisaillement transversal. La non linéarité matérielle considérée est du type élasto-plastique et les systèmes d'équations résultants sont résolus en utilisant une approche incrémentale itérative.

Ce travail a permis de mettre en évidence la bonne performance de l'élément hétérosis par rapport aux éléments plaques standard.

MOTS CLES:

Eléments finis, plaques, non linéarité matérielle, méthode de résolution non linéaire.

SOMMAIRE

Introduction générale	1
I. TRAVAUX ANTERIEURS	3
I.1 Plasticité	3
I.1.1 Historique	3
I.2 Eléments plaques	4
I.2.1 Travaux relativement anciens	4
I.2.1.1 Eléments rectangulaires	5
I.2.1.2 Eléments triangulaires	6
I.2.1.3 Triangles non conformes	6
I.2.1.4 Quadrilatères et triangles conformes	8
I.2.2 Travaux relativement récents	9
II. THEOREMES ENERGETIQUES ET ELASTO-PLASTICITE	12
II.1 Théorèmes énergétiques	12
II.1.1 Approche variationnelle	12
II.1.1.1 Définitions	12
II.1.1.2 Conditions aux limites	12
II.1.1.3 Champ de déplacement cinématiquement admissible	12
II.1.2 Energie potentielle totale	12
II.2 Elasto-plasticité	14
II.2.1 Domaines d'élasticité	14
II.2.1.1 L'expérience de traction simple ; limites d'élasticité	14
II.2.2 Plasticité unidimensionnelle	16
I.2.2.1 Modélisation	16
II.2.2.2 Critère d'épuisement	17
II.2.2.3 Règle d'écrouissage	17
II.2.2.3.1 Ecrouissage isotrope	17
II.2.2.3.2 Ecrouissage cinématique	18
II.2.2.3.3. Ecrouissage mixte	19
II.2.3 Règle de chargement	20
II.2.4 Règles d'écoulement	20
II.2.5 Résolution numérique et organigramme	21
II.2.6 Plasticité multiaxiale	24
II.2.6.1 Critère de limite élastique et grandeurs effectives	24
II.2.6.2 Ecrouissage	26
II.2.6.2.1- Ecrouissage isotrope	26
II.2.6.2.2 Ecrouissage cinématique	27
II.2.6.2.3 Ecrouissage mixte	28
II.2.7 Règle d'écoulement et potentiel plastique	29
II.2.8 Relations élasto-plastiques incrémentales	30
II.2.8.1 Ecrouissage isotrope	30

II.2.8.2 Ecrouissage mixte	32
II.2.9 Critère de chargement	33
II.2.10 Organigramme élasto-plastique général	34
II.2.11 Différents critères élasto-plastiques	37
II.2.11.1 Critère de Tresca	38
II.2.11.2 Critère de Von Mises	39
II.2.11.3 Critère de Mohr-Coulomb	40
II.2.11.4 Critère de Drucker-Prager	41
II.2.12 Gradient des critères	43
II.2.13 Points singuliers de la surface d'écoulement	44
III. FORMULATION EN ELEMENTS FINIS	45
III.1 Concept d'élément fini	45
III.2 Modèle déplacement	45
III.3 Concept d'élément isoparamétrique	45
III.4 Les expressions des éléments finis	46
III.5 Plaques en flexion	47
III.5.1 Introduction	47
III.5.2 Théories des plaques en flexion	48
III.5.2.1 Hypothèses fondamentales	48
III.6 Eléments basés sur la théorie de Mindlin/Reissner	53
III.6.1 Introduction	53
III.7 Plasticité dans les plaques unicouches	57
III.8 Résumé du procédé de résolution	58
III.9 Fonctions de forme des éléments isoparamétriques utilisés	59
III.9.1 Quadrangle à 4 nœuds (Q4)	59
III.9.2 Quadrangle à 8 nœuds (Q8)	59
III.9.3 Quadrangle à 9 nœuds (Q9)	60
III.10 Élément Hétérosis pour la plaque de Mindlin	61
III.10.1 Introduction	61
III.10.2 Formulation hiérarchique de l'élément Hétérosis	61
III.11 Intégration numérique	62
III.11.1 Introduction	62
III.11.2 Intégration numérique à une dimension	64
III.11.2.1 Méthode de Gauss	64
III.11.2.2 Méthode de Gauss-Legendre	66
III.11.3 Intégration numérique pour les problèmes bidimensionnels	67
III.13.4 Choix du nombre de points d'intégration (ordre d'intégration)	68
IV. ANALYSE NON LINEAIRE DES STRUCTURES	70
IV.1 Introduction	70
IV.2 Sources de non linéarité	70

IV.2.1 Non linéarité matérielle	71
IV.2.2 Non linéarité géométrique	71
IV.3 Formulation des problèmes non linéaires	71
IV.3.1 Non linéarité matérielle seulement	71
IV.3.2 Grands déplacements	71
IV.4 Méthodes de résolution des systèmes non linéaires	72
IV.4.1 Méthodes incrémentales	73
IV.4.2 Méthodes itératives	73
IV.4.3. Méthodes mixtes	74
IV.5 Principales méthodes numériques en analyse non linéaire	75
IV.5.1. Méthode de Newton-Raphson	75
IV.5.2 Méthode de la rigidité sécante	76
IV.5.3 Méthode de la rigidité initiale	76
IV.6 Critères de convergence	77
IV.7 Conclusion	78
IV.8 Risques de divergence et remèdes	79
IV.9 Organigramme (non linéarité matérielle)	80
V. PRESENTATION DU PROGRAMME	81
V.1 Introduction	81
V.1.1 Incrémentation du chargement	81
V.1.2 Calcul des forces résiduelles	81
V.1.3 Test de convergence	81
V.2 Programme	81
V.3 Structure générale du programme	82
V.3.1 Lecture et organisation des données	83
V.3.2 Construction de la matrice de rigidité [K] et du vecteur force {F}	83
V.3.3 Résolution du système d'équations non linéaires	83
V.3.4 Impression des résultats	84
V.4 Organigramme de quelques sous-routines	84
V.4.1 Subroutine FFORM2D	84
V.4.2 Subroutine NONLIN	86
V.4.3 Subroutine FORCEPLQ	86
V.4.4 Subroutine GAUSS	88
V.4.5 Subroutine DEPL	89
VI. VALIDATION ET EXPERIMENTATION NUMERIQUE	90
VI.1 Introduction	90
VI.2 Validation	90
VI.2.1 Domaine élastique	90
VI.2.1.1 Exemple1	90
VI.2.1.2 Exemple2	93

VI.2.2	Domaine élasto-plastique	94
VI.2.2.1	Exemple	94
VI.3	Expérimentation numérique	95
VI.3.1	Simulation de la propagation de la plasticité pour l'élément	96
	Hétéro-sis	
VI.3.1.1	Exemple1	96
VI.3.1.2	Exemple2	97
VI.3.1.3	Interprétation	98
VI.3.1.4	Exemple3	99
VI.3.1.5	Interprétation	101
VI.4	Comparaison entre les critères de Von-Mises et Tresca	101
VI.4.1	Exemple4	101
VI.5	Comparaison entre la méthode de rigidité initiale et la méthode de rigidité tangentielle	103
VI.5.1	Exemple5	103
VI.5.2	Interprétation	103
VII.	CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS	104
VII.1	Conclusions	104
VII.2	Recommandations	104
	Références bibliographiques	

INTRODUCTION GENERALE

L'analyse élasto-plastique des structures en plaques est un problème ayant un intérêt continu. L'analyse devient attrayante si des lois de comportement réalistes capables de simuler le comportement réel observé sont utilisées.

Différentes techniques ont été proposées pour l'analyse, mais la méthode qui s'est imposée comme l'outil numérique le plus puissant est la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est une méthode générale pour résoudre les problèmes industriels en construisant très efficacement des modèles de simulation. Elle est actuellement appliquée dans les domaines très divers pour résoudre des problèmes de la mécanique des solides et/ou de mécanique des fluides, des problèmes thermiques, d'électricité, d'électromagnétisme etc.

Apparue dans les années 50 avec les premiers calculateurs digitaux, la méthode n'a cessé de se développer depuis, pour répondre aux besoins de plus en plus complexes de l'industrie. C'est le secteur industriel qui a été l'un des moteurs de son développement à travers les demandes des industries de pointe (génie civil pour les grands ouvrages, aviation, nucléaire et aujourd'hui automobile).

Il est certain que, d'une part, la méthode des éléments finis se prête bien à la programmation sur ordinateur (les procédures numériques peuvent être rendues automatiques et modulaires) et que, d'autre part, la méthode des éléments finis se caractérise par son universalité et son adaptabilité au traitement des problèmes les plus divers ; d'où l'idée de développer des codes généraux. C'est ainsi que vers 1965 on assiste en Europe et aux U.S.A au développement intensif de tels programmes sous l'impulsion d'universités, d'agences gouvernementales et de groupes industriels. Parmi les logiciels industriels, on peut citer ABAQUS, ADINA, ANSYS, ASKA, MARC, ASTER, CASTEM 2000, CASTOR, MSC/MARC, MSC/NASTRAN, SAMCEF, SYSTUS, DYNA3D, LS-DYNA, PAM-CRASH, OPTRIS, SESAM, ASAS, SAP/NONSAP, et bien d'autres ^[1]

Objectif de la thèse:

Ce travail de recherche a pour but d'élaborer un code en éléments finis permettant d'étudier aussi bien les plaques minces qu'épaisses dans le domaine non linéaire.

Dans cette étude, on se propose de présenter une formulation par éléments finis unicouches pour l'analyse élasto-plastique des plaques. Celle-ci permet d'étudier le comportement anélastique des plaques et de suivre la propagation de la plastification.

En plus, on aura dans ce travail, à :

- ❖ tester quelques éléments finis usuel comme l'élément de Lagrange mais surtout l'élément hétéroseris.

- ❖ appliquer les critères de plasticité des plus connus concernant notre problème.

Plan de la thèse:

Dans le présent travail, on s'intéresse à des plaques de Mindlin qui tiennent compte de l'influence des efforts tranchants et qui donnent une précision comparable aux meilleurs éléments de Kirchhoff. L'étude se fera pour des éléments plaques à quatre, huit et neuf nœuds et en plus pour l'élément hétéroisis.

Mais d'abord pour commencer, on a jugé nécessaire de consacrer le premier chapitre aux travaux antérieurs relatifs à la modélisation des structures planes. Le deuxième chapitre portera sur les théorèmes énergétiques et l'élasto-plasticité ainsi que les critères utilisés dans la détermination du comportement élasto-plastique des matériaux. Le troisième chapitre concerne la définition de l'élément plaque en flexion avec les hypothèses qui en découlent puis sa discrétisation et formulation en éléments finis et enfin un aperçu sur son intégration numérique. On abordera dans le quatrième chapitre les techniques de résolution des systèmes non linéaires. Ceci étant, si on peut le dire, la partie théorique, elle sera complétée en cinquième chapitre par un programme développé dans cette étude en langage FORTRAN 90. Le sixième chapitre est consacré à la validation des éléments employés, des résultats concernant les déplacements sont interprétés et comparés à des résultats théoriques dans le domaine élastique puis à ceux de Hinton dans le domaine élasto-plastique. Cette partie sera parachevée par une expérimentation numérique et l'interprétation des résultats obtenus. On aboutit enfin à une conclusion générale et des recommandations.

TRAVAUX ANTERIEURS

I.1 Plasticité :

I.1.1 Historique :

Les initiaux travaux scientifiques relatifs à la plasticité remontent à 1864 avec la mémoire de Tresca sur le critère de la contrainte de cisaillement maximal. La formulation actuelle de la théorie a été faite en 1870 par Saint-Venant. Levy plus tard en 1870 avait obtenu les équations générales en trois dimensions. Une généralisation similaire aux résultats de Levy était établie indépendamment par Von Mises dans un papier en 1913. En 1924, Prandtl étend les équations de St-Venant \ Levy \ Von Mises du problème plan continu pour inclure la composante élastique de déformation, et Reuss en 1930 avait mis en pratique leur extension à trois dimensions. En 1928, Von Mises généralisa son travail prévu pour un solide rigide parfaitement plastique pour inclure une fonction générale d'écoulement et discuta la relation entre la direction du taux de déformation plastique (incrément) et la surface d'écoulement régulier.

En 1928, Prandtl tenta de formuler les relations générales pour le comportement d'écrouissage et Melan en 1938, généralisa les concepts précédents de plasticité parfaite et donna les relations incrémentales pour les solides écrouissables avec surface d'écoulement régulier.

La loi d'écoulement isotrope était formulée dès 1871 par Saint Venant et Levy mais il a fallu attendre les années 1950 pour en voir une utilisation dans les problèmes de structures grâce aux théorèmes limites, puis les années 1970 pour en voir des applications pratiques grâce à l'avènement des ordinateurs rapides et de grande capacité. Indépendamment du travail de Lelan en 1938, Prager, dans un papier signifiant publié en 1949, est arrivé à une ossature générale (similaire à celle discutée par Melan en 1938) pour les relations constitutives plastiques pour les matériaux écrouissables avec surfaces d'écoulement régulières.

En 1958, Prager avait étendu davantage cette ossature générale pour inclure les effets thermiques (déformation plastique non iso-thermique), en permettant à la surface d'écoulement de changer sa forme avec la température.

Un aspect très signifiant de travail d'écrouissage, désigné par le postulat de stabilité du matériau, était proposé par Drucker en 1951. Ce dernier avait, en 1959, assez rendu son postulat pour inclure le phénomène de dépendance du temps tels que fluage et viscoélasticité linéaire.

Les postulats fournissant les hypothèses qui jouent un rôle équivalent dans le développement de l'ossature des relations de plasticité ont été donnés par Hill en 1948 et ont été étendu par Bishop et Hill en 1951 en une étude des agrégats polycristallins et par Ilyshin en 1961 à travers la considération de travail non négatif en un cycle de résistance (connu comme le postulat de Ilyshin pour stabilité du matériau). Cependant, il peut être noté que l'approche pour le développement des

relations de plasticité basées entièrement sur le postulat de Drucker semble loin d'être la plus possible.

Les formulations précises des deux théorèmes fondamentaux des analyses limites (les théorèmes appelés limite supérieure et inférieure) étaient données dans deux papiers par Drucker, Greenberg et Prager en 1951 et en 1952, pour un matériau parfaitement plastique (ou idéalement plastique), et par Hill (1951, 1952) du point de vu des matériaux rigides idéalement plastiques. Il paraît, cependant que la référence en avance aux théorèmes des analyses limites était probablement due à Gvozdev en 1936 (une traduction de son papier du Russe était produite par Haythornthwaite en 1960). Les théorèmes sont remarquablement simples et en accord avec l'intuition. Depuis lors, l'application de ces théorèmes aux analyses de différentes classes de problème (par exemple : poutres et portiques, plaques et coques, procédé formation, métal) a augmenté très rapidement (nom seulement pour les structures métalliques mais aussi pour les matériaux de béton ou de sols). Dans son papier lumineux de 1953, Koitier avait montré que la théorie appelée théorie erronée de plasticité introduite originalement par Batdorf et Budiansky en 1949 et conçue comme une formulation alternative à la théorie classique d'écoulement est un type particulier de la théorie incrémentale d'écoulement avec une condition d'écoulement singulière.

Le concept était ensuite étendu par Sanders en 1955, qui a aussi proposé un mécanisme pour la formulation des surfaces d'écoulement précédentes. Des discussions supplémentaires à propos de ce sujet peuvent être trouvées dans le papier de 1960 de Koitier et dans le papier de 1953 de Prager parmi plusieurs autres.

Il convient toutefois de signaler que des travaux de recherche effectués au cours des trente dernières années ont abouti à la mise sur pied, de la théorie de l'élasto-plasticité en transformation finie (entre autres : Lee, 1969 ; Teodosiu, 1970 ; Mandel, 1971, 1973 ; Zarka, 1973 ; Brun, 1992)^[2].

I.2 Eléments plaques :

I.2.1 Travaux relativement anciens

Les premiers résultats ont été publiés en 1960, mais ce n'est qu'en 1965 seulement que les modèles rectangulaires ont donné des résultats satisfaisants.

La construction d'éléments rectangulaires fiables pour modéliser les plaques et coques d'une géométrie arbitraire a mis en évidence plus de difficultés qu'attendu. Cependant, ces échecs, ont abouti à une meilleure compréhension de la théorie de base de la méthode des éléments finis, et motivé plusieurs avancées prises en compte aujourd'hui. La source majeure de difficultés pour les plaques est due aux exigences strictes de la continuité. Il est très difficile de construire des éléments de formulation simple qui respectent la continuité inter-éléments et la continuité de la pente normale aux interfaces. En 1963, les chercheurs ont opté pour d'autres voies pour contourner ces problèmes. Il a été reconnu que la complétude, dans la forme de représentation exacte de corps rigide et modes de courbure constantes, était fondamentale pour la convergence vers la solution analytique, c'était un premier critère établi par Melosh

^[3]. L'effet de violation de la compatibilité était plus difficile à comprendre jusqu'à la mise au point du Patch-test ^[4].

I.2.1.1 Éléments rectangulaires :

De nombreux auteurs ont développé un élément rectangulaire. Le premier élément était développé par Adini et Clough ^[5]. Cet élément basé sur un champ complet du 3^{ème} degré plus deux termes supplémentaires x^3y et xy^3 comprend 12 termes qui peuvent être déterminés en fonction des 12 degrés de liberté (w, θ_x, θ_y) en chacun des quatre nœuds. L'élément satisfait aussi bien la complétude que la continuité de la rotation transversale mais la continuité de la pente normale est maintenue seulement aux quatre points nodaux. Le même élément résultant d'une autre approche a été proposée par Melosh (1963) ^[6], lequel par erreur a postulé que cet élément satisfait la continuité C^1 .

D'autres auteurs ^{[7], [8]} ont développé un élément rectangulaire (ACM) basé sur un champ incomplet du 4^{ème} degré dont les 12 termes (Figure 1.1) peuvent être déterminés en fonction de 12 degrés de liberté (w, θ_x, θ_y) en chacun des quatre nœuds. Cet élément ne respecte pas la continuité de la pente normale. Néanmoins, il converge.

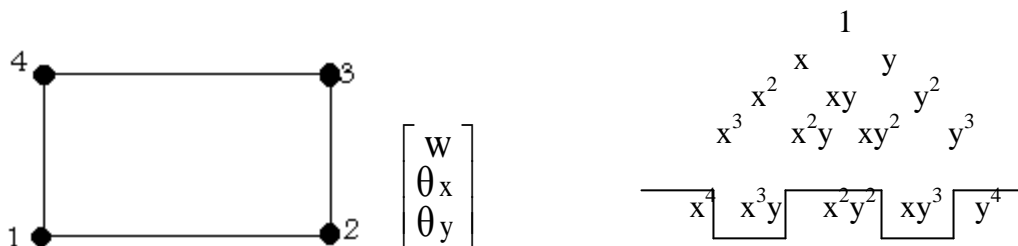


Figure 1.1 : Élément de plaque rectangulaire (ACM) et sa base polynomiale

Cependant la recherche pour un champ de déplacement compatible suivait son cours pour essayer d'aboutir à une convergence monotone. Un élément rectangulaire à 12 degrés de liberté complètement compatible a été développé par Papanfuss ^[9]. Cet élément a été reformulé plusieurs fois. La dérivation la plus simple peut être faite avec les produits des polynômes d'Hermite du troisième degré. Malheureusement l'état de torsion constant est non inclus dans l'approximation et par conséquent l'élément ne satisfait pas à l'exigence de la complétude, en convergeant monotonement vers une solution de la torsion-courbure nulle.

Dans un papier bref mais important, Irons et Draper ^[10] ont souligné l'importance de la complétude pour les modes de déformation constante (modes de la courbure constante dans le cas de la flexion des plaques). Ils ont prouvé qu'il est impossible de construire un élément plaque de forme polygonale avec seulement 3 degrés de liberté par nœud et des courbures nodales continues qui peuvent maintenir simultanément la conformité de la pente normale et l'inclusion d'un mode de torsion constante. Ce résultat négatif, a effectivement fermé la porte à la construction d'éléments

isoparamétriques analogues pour les plaques en flexion. La construction des approximations en polynômes complètement compatibles de plusieurs degrés pour les formes rectangulaires, a été résolue par Bogner et Al en 1965 ^[11] à travers des fonctions d'interpolation d'Hermite.

I.2.1.2 Éléments triangulaires :

Les éléments de plaques triangulaires plans ont un champ d'application plus large que les éléments rectangulaires du fait qu'ils sont plus commodes pour l'analyse des plaques et coques de forme géométrique arbitraire pour les petits et grands déplacements. Mais comme noté au dessus, le développement d'approximations cinématiques adéquates n'a pas été un problème facile.

Le succès d'éléments rectangulaires incompatibles est du au fait que les approximations polynomiales supposés pour w peuvent être considérées comme « mode de la déformation naturelle ». Ils sont intimement liés à géométrie de l'élément car le système local est adopté le long de deux directions choisies

La formulation des éléments de plaque ne nécessite que l'approximation de la composante transversale du déplacement w .

Leur conformité nécessite d'une part la possibilité de représenter correctement les états de courbure constante ce qui implique une approximation par polynômes complets de 2^{ème} degré au moins en x et y d'autre part, le respect de la continuité C^1 inter-éléments et donc la continuité de w et de la pente normale aux interfaces. Il est très difficile de construire des éléments de formulation simple qui à la fois satisfont ces conditions et présentent des performances de convergence acceptables. En ce qui concerne la définition des degrés de liberté aux nœuds, le choix minimum consiste à adopter le déplacement transversal w et les deux rotations θ_x et θ_y avec :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

Les premiers éléments développés ont été des triangles basés sur un polynôme du troisième degré pour approximer le déplacement w soit pour un polynôme complet :

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

Ce type d'approximation exige la définition de 10 paramètres ce qui n'est pas possible avec les 9 degré de liberté du triangle précédent. Par ailleurs, il faut noter que les lois de variation des pentes normales aux interfaces sont quadratiques et que l'identité des rotations aux nœuds ne permet d'assurer que la compatibilité de variations linéaires de la pente normale aux interfaces. Aussi, de par sa formulation même, ce type d'élément ne respecte pas les conditions de conformité.

I.2.1.3 Triangles non conformes :

Les premiers éléments triangulaires développés pour les plaques en flexion sont basés sur un polynôme incomplet ou complet du 3^{ème} degré pour w et 9 degrés de liberté pour l'élément avec (w, θ_x, θ_y) en chaque nœud.

Adini a proposé un élément (A) basé sur un polynôme incomplet en omettant le terme en xy , soit :

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

Ce polynôme ne respecte aucun des critères de conformité :

- complétude : il manque le type en xy correspondant à $w = C^{ste}$
- compatibilité : pas de continuité C^1 .

Cet élément ne converge pas.

Tocher a proposé un élément (T) basé sur un polynôme complet à 9 termes obtenu en regroupant les termes en x^2y et xy^2 , soit :

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8(x^2y + xy^2) + a_9y^3$$

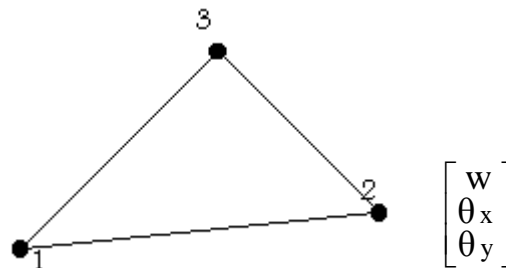


Figure 1.2 : Elément T10

Cet élément ne respecte pas la condition de continuité w et le critère d'invariance géométrique. Sa convergence est problématique. Tocher a également développé un élément basé sur un polynôme complet de 3^{ème} degré et donc sur 10 coordonnées généralisées définies à partir de 10 degré de liberté : les 9 degré de liberté habituels (w , θ_x , θ_y en chaque nœud) ainsi que le déplacement w au centre de l'élément, ce degré de liberté additionnel étant finalement éliminé par condensation. Cet élément ne respecte pas la condition de continuité de w et ne converge pas.

La technique d'élimination de Bazely ^[12] était plus prospère et a produit un élément qui est encore en usage aujourd'hui.

Zienkiewicz ^[12] a proposé un élément triangulaire (ZO) basé sur un champ incomplet du 3^{ème} degré exprimé en coordonnées barycentriques, soit :

$$\begin{aligned} w(L_1, L_2, L_3) = & a_1L + a_2L_2 + a_3L_3 + a_4(L_1^2 L_2 + \frac{L_1L_2L_3}{2}) + a_5(L_2^2 L_1 + \frac{L_1L_2L_3}{2}) + \dots \\ & + a_6(L_2^2 L_3 + \frac{L_1L_2L_3}{2}) + a_7(L_3^2 L_2 + \frac{L_1L_2L_3}{2}) + a_8(L_3^2 L_1 + \frac{L_1L_2L_3}{2}) \\ & + a_9(L_1^2 L_3 + \frac{L_1L_2L_3}{2}) \end{aligned}$$

Cet élément ne respecte pas la continuité des pentes normales mais converge néanmoins de façon monotone.

Remarque :

Il est également intéressant de mentionner un élément non conforme proposé par Morley ^[13] basé sur une hypothèse d'état de courbure constante et donc ayant 6 degrés de liberté ; les déplacements w aux trois sommets et les trois pentes normales aux milieux des côtés. Cet élément donne des résultats intéressants compte tenu de sa simplicité.

I.2.1.4 Quadrilatères et triangles conformes :

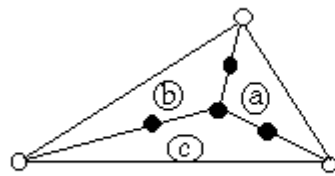
Les quadrilatères arbitraires peuvent être construits en assemblant plusieurs triangles, et éliminer les degrés de liberté internes. Cela représente une procédure effective pour ne prendre en considération que les quatre nœuds. L'article de Clough et Felippa présente le premier élément quadrilatère.

Une construction directe d'un quadrilatère arbitraire avec 16 degrés de liberté a été présentée par de Veubeke ^[14]. Le quadrilatère est formé par un macroassemblage de quatre triangles par les deux diagonales qui sont sélectionnées comme un système de coordonnées cartésiennes obliques pour développer les champs des éléments finis.

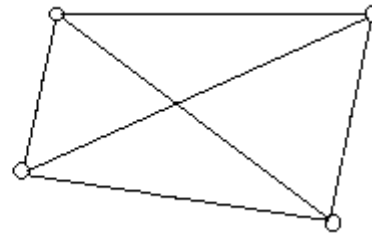
Zienkiewicz ^[12], a développé une variante conforme (ZA) de son élément (ZO) mentionné précédemment. Sa formulation est basée sur l'introduction d'une correction au champ des déplacements de manière à rendre linéaire la variation de la pente normale aux interfaces, ce qui rend l'élément conforme. Cependant, l'élément conforme ainsi obtenu est malheureusement moins précis que l'élément non conforme initial.

D'autres auteurs ont proposé une autre approche basée sur une formulation par sous-domaines :

Clough et Tocher ont développé un triangle conforme (élément HCT ^[15], figure 1.3) dont la formulation est basée sur une subdivision en trois triangles. Dans chaque sous-élément, on utilise une approximation incomplète du 3^{ème} degré à 9 termes (soit 27 degrés de liberté pour l'élément complet) dans un système d'axes locaux de telle sorte que la variation du déplacement sur chaque côté externe soit quadratique et donc que la pente normale soit linéaire. Parmi les 27 degrés de liberté de l'élément, on utilise 18 degrés de liberté d'une part, en écrivant les conditions de compatibilité entre sous-éléments et d'autre part, par condensation, de façon à aboutir au triangle habituel à 9 degrés de liberté. Néanmoins, la conformité ainsi obtenue se paie par une excessive rigidité.



9 d.d.l

(a) Triangle conforme HCT
(Clough-Tocher)

16 d.d.l

(b) Quadrilatère conforme CQ
(Fraeijs de Veubeke)**Figure 1.3 : Formulation par sous-domaines pour les éléments de plaque**

Un élément incompatible appelé le triangle BCIZ, a été obtenu en éliminant le 10^{ème} degré de liberté d'un polynôme cubique complet telle que la complétude a été maintenue. Cet élément est incompatible. Les expériences numériques ont montré qu'il a convergé pour quelques modèles de maillage mais pas pour les autres. Ce comportement mystérieux était une piste pour l'invention du Patch-test.

Le Patch-test a été développé par Irons^[4] et d'autres chercheurs dans les années 1970. Fraeijs de Veubeke^{[16], [17]} a développé un quadrilatère conforme (élément CQ) avec des nœuds additionnels d'interface en subdivisant l'élément en quatre triangles suivant ses diagonales.

Un polynôme cubique complet est utilisé pour approximer le déplacement dans chaque triangle ce qui correspond donc à 40 degrés de liberté pour l'élément complet. L'utilisation de coordonnées obliques et le respect de la compatibilité entre les triangles permettent d'éliminer 24 degrés de liberté avec une technique particulière d'élimination. Il reste ainsi 16 degrés de liberté dont 12 degrés de liberté correspondant aux degrés de liberté habituels (w , θ_x , θ_y) aux sommets et 4 degrés de liberté correspondant aux pentes normales aux nœuds d'interface. Ces degrés de liberté additionnels d'interface peuvent être éliminés en imposant une variation linéaire de la pente normale, au détriment de la précision. Cet élément est certainement l'élément de plaque de Kirchhoff présentant le meilleur compromis simplicité-précision.

I.2.2 Travaux relativement récents :

Les éléments complètement conformes développés au milieu des années 60 ont prouvé qu'ils étaient sans danger pour les programmes en éléments finis car la convergence pouvait être garantie. Les éléments triangulaires se sont avérés excessivement rigides. Une amélioration considérable dans la performance a été accomplie par Razzaque^[18] qui a remplacé les fonctions de forme des courbures par des fonctions de moindres carrés. Cette technique sera reconnue plus tard comme étant l'équivalent à la formulation contraintes-hybride.

La première application de fonctionnels mixte aux éléments finis était au problème de la flexion des plaques. Herrman^[19] a développé un modèle triangulaire mixte dans lequel les déplacements transversaux et les moments de flexion sont sélectionnés

comme variables maîtres. Une variation linéaire a été supposée pour les deux variables. Ce travail était basé sur le principe variationnel de Hellinger-Reissner^[20] et a inclue l'énergie du cisaillement transversal.

Les éléments admis pour la flexion des plaques ont aussi été construits par la formulation de Pian^[21] (contraintes-hybride) les 9 degrés de liberté triangulaires dans cette classe sont normalement dérivés en supposant que la variation est cubique, que la pente est linéaire le long des côtés de l'élément, et que la variation du champ du moment interne est linéaire. Les formulations effectives de tels éléments ont été publiées^[22]. Généralement, les éléments hybrides donnent une meilleure précision par rapport aux éléments conformes en déplacement. Cependant, la dérivation de ces éléments est plus compliquée car elle nécessite de trouver des champs des moments équilibrés au sein de l'élément, champs qui ne sont pas simples à déterminer surtout pour des variations importantes des moments.

Une grande partie de la recherche récente sur les modèles en déplacement s'est concentrée sur la relaxation ou l'abandon des hypothèses de la théorie des plaques minces de Kirchhoff. La relaxation de ces suppositions a permis la formulation d'éléments basés sur la théorie discrète de Kirchhoff^[23]. Dans cette méthode l'approximation fondamentale est faite sur les rotations de la plaque. Les rotations sont liées aux libertés nodales par l'introduction des conditions de normalité des plaques minces en des points choisis sur les bords et par la suite en interpolant les déplacements et les rotations le long de la frontière. Les applications initiales de cette méthode paraissent indûment compliquées. Un article clair et relativement simple est donné par Batoz, Bathe et Ho^[24]. Le plus réussi de ces éléments jusqu'au aujourd'hui est le DKT (Triangle Kirchhoff Discret), une formulation explicite de qui a été présentée par Batoz^[25].

Un pas plus important consiste l'abandon de la théorie de Kirchhoff en faveur de la théorie des plaques modérément épaisses de Reissner-Mindlin. Les exigences de la continuité pour l'approximation du déplacement sont baissées à C^0 (d'où le nom " C^0 éléments de flexion"), mais le cisaillement transversal devient une partie intégrante de la formulation.

Historiquement les premiers éléments plaques complètement triangulaires n'étaient pas ceux de Clough-Tocher mais les éléments C^0 appelés "éléments de facette" qui ont été développés vers la fin de 1950, bien qu'un article sur leur formulation n'ait été publié jusqu'à 1965^[26]. Cependant, les éléments à facettes souffrent de problèmes numériques sévères pour les plaques minces et conditions d'angle obtus. L'approche a été ranimée par Argyris^[27] dans le contexte des éléments "brique" dégénérés.

Des éléments quadrilatéraux C^0 réussis ont été développés par Hughes, Taylor et Kanolkulchai^[28], Pugh, Hinton et Zienkiewicz^[29], MacNeal^[30], Crisfield^[31], Tessler et Hughes^[32], Dvorkin et Bathe^[33], et Park et Stanley^[34].

Les éléments triangulaires dans cette classe ont été présentés par Belytschko, Stolarski et Carpenter^[35]. La construction des éléments de flexion C^0 robustes est délicate, car ils sont susceptibles à l'effet du "verrouillage" dans le cas des plaques minces s'ils sont complètement intégrés, et aux défauts cinématiques (modes parasites) s'ils ne le sont pas. Quand ils sont adéquatement utilisés, de bons résultats

ont été rapportés pour les éléments quadrilatères et, plus récemment, pour les éléments triangulaires ^[36].

Une autre trajectoire a été prise par Bergan et d'autres chercheurs qui ont retenu la formulation classique de Kirchhoff mais en conjonction avec l'utilisation des fonctions de forme non conformes de classe C^{-1} . Ils ont montré que la continuité entre les éléments n'est pas un obstacle pour la convergence à condition que les fonctions de forme satisfont une certaine continuité de l'énergie et aux conditions d'orthogonalité des forces ^[37] ou bien si la matrice de rigidité est construite en utilisant la formulation libre ^[38] plutôt que la formulation de l'énergie potentielle standard. La caractéristique principale de ces formulations est la séparation prudente entre les degrés de base et supérieure des fonctions de déplacements choisies. Les résultats pour les éléments triangulaires de flexion tirés à travers cette approche se sont avérés performants ^[39]. Un de ces éléments basé sur fonctions de forme d'ordre supérieur à forces orthogonales a été classé en 1983 comme le plus performant dans sa classe ^[40].

La recherche relative aux éléments finis de plaque de Mindlin ait connu un grand développement (1970-1995). Le premier élément de type Mindlin fut un triangle présenté en 1965 par Melosh. Utilisant des degrés de liberté de même nature que dans la théorie de Kirchhoff, et offrant l'effort tranchant en sus, ces éléments sont devenus très populaires chez les ingénieurs.

L'élément avec intégration sélective (LR) développé par Hughes ^[41] qui est certainement l'élément de plaque le plus simple présentant des performances satisfaisantes. Il existe certaines variantes de cet élément, c'est le cas de l'élément QUAD4 ^[42] avec correction de flexibilité résiduelle de flexion.

Mais ils ont leurs difficultés numériques propres. En particulier, le phénomène de verrouillage est si virulent qu'il a fallu près de vingt ans pour le maîtriser.

Aujourd'hui, un équilibre s'est établi entre les éléments de type Mindlin et ceux de type Kirchhoff.

THEOREMES ENRGETIQUES ET ELASTO-PLASTICITE

II.1 Théorèmes énergétiques:

Les méthodes énergétiques ou variationnelles constituent en mécanique des structures le fondement de base de la méthode des éléments finis et sont un outil très puissant dans la formulation des équations des éléments.

II.1.1 Approche variationnelle :

II.1.1.1 Définitions :

On se restreint à la résolution du problème classique $F = K u$, la matrice de raideur étant constante, les déformations et rotations restant infinitésimales et les déplacements petits.

II.1.1.2 Conditions aux limites :

Sur la surface externe S d'un solide ne peuvent exister que deux types de conditions aux limites : soit des déplacements imposés, nuls ou non nuls, soit des efforts.

Les conditions aux limites portant sur les déplacements sont dites cinématiques. Les conditions aux limites portant sur les efforts sont dites statiques ou de type équilibre.

II.1.1.3 Champ de déplacement cinématiquement admissible :

Un champ de déplacement cinématiquement admissible satisfait les conditions de continuité inter élément, et les conditions aux limites cinématiques.

II.1.2 Energie potentielle totale :

Le travail élémentaire des forces extérieures de volume $\{b\}^e$ et de surface $\{P\}^e$ appliquées à un élément e sera donné par :

$$W_{\text{ext}}^e = \int_{V_e} [U]^e \{b\}^e dv + \int_{S_e} [U]^e \{P\}^e ds + [u]^e \{F_r\}^e \dots \dots \dots (2-1)$$

On remplace $\{U\}^e = [N] \{u\}^e$ dans (2-1) on aura :

$$W_{\text{ext}}^e = \int_{V_e} [N]^e \{u\}^e \{b\}^e dv + \int_{S_e} [N]^e \{p\} \{p\}^e ds + [u]^e \{f_r\}^e$$

$\{f_r\}^e$: vecteur interaction entre éléments

$$W_{\text{ext}}^e = [u]^e \left[\int_{V_e} [N]^e \{b\}^e dv + \int_{S_e} [N]^e \{p\}^e ds + \{f_r\}^e \right]$$

$$W_{ext}^e = [u]^e \{F\}^e: \{F\}^e = \{F_v\}^e + \{F_s\}^e + \{F_r\}^e$$

L'énergie élémentaire de déformation est déterminée par :

$$W_{int}^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\sigma] \{\varepsilon\} dv \dots\dots\dots (2-2)$$

Toutes substitutions faites, on aura :

$$W_{int}^e = \frac{1}{2} [u]^e \left[\int_{V_e} [B]^{eT} [H][B]^e dv \right] \{u\}^e$$

$$W_{int}^e = \frac{1}{2} [u]^e [K]^e \{u\}^e \dots\dots\dots (2-3)$$

Avec :

$$[K]^e = \int_{V_e} [B]^{eT} [H][B]^e dv \dots\dots\dots (2-4)$$

L'énergie potentielle totale pour un élément sera donc :

$$\pi^e = W_{ext}^e - W_{int}^e$$

$$\pi^e = \frac{1}{2} [u]^e [K]^e \{u\}^e - [u]^e \{F\}^e \dots\dots\dots (2-5)$$

Il faut noter qu'on doit apporter toutes les variables au système d'axes globaux. L'énergie potentielle totale de la structure s'obtient par simple sommation des énergies potentielles totales élémentaires, soit :

$$\pi = \sum_{e=1}^n \pi^e$$

n : Nombre total d'éléments.

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n ([u]^e [K]^e \{u\}^e) - \sum_{e=1}^n ([u]^e \{F\}^e)$$

$$\pi = \frac{1}{2} [u][K]\{u\} - [u]\{F\} \dots\dots\dots (2-6)$$

Où :

{u} : Vecteur global des déplacements nodaux.

[K] : Matrice de rigidité globale.

{F} : Vecteur global des charges.

Finalement, on applique le principe des travaux virtuels. Pour qu'il y ait équilibre de structure, il faut que la variation de l'énergie potentielle totale soit nulle.

Soit :

$$\delta\pi = \frac{1}{2} .2[\delta u][K]\{u\} - [\delta u]\{F\}=0$$

$$[K]\{u\} = \{F\} \dots\dots\dots (2-7)$$

[K] est une matrice carrée symétrique.

On aboutit à un système d'équations algébriques ou le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues.

En prenant en compte des conditions aux limites, le système d'équations sera défini positif. Sa résolution se fait avec l'une des méthodes de résolution couramment utilisées, on peut citer entre autres les techniques de Gauss, Gauss Seidel, Choleskey...

On a donc exposé les différentes étapes suivies lors de l'application de la méthode des éléments finis au calcul des structures dans le cadre de la formulation déplacement basée sur le critère de l'énergie potentielle totale comme critère d'équilibre.

La formulation déplacement est la plus utilisée, c'est le cas dans cette étude.

II.2 Elasto-plasticité :

Le schéma élasto-plastique pour le comportement des matériaux, a été initialement élaboré à partir de constatations expérimentales relatives au comportement tridimensionnel des métaux.

Les domaines d'applications de cette modélisation débordent maintenant ce cadre. On résout actuellement, par voies analytiques ou numériques, des problèmes d'élasto-plasticité en calcul des structures (structures réticulées, structures à barres fléchies), des plaques et coques métalliques, et l'on utilise aussi ce modèle pour l'analyse de structures en béton ou d'ouvrages de géotechnique.

Le modèle de comportement élasto-plastique classique laisse de côté, en ce qui concerne la plasticité, tout effet de vieillissement et de viscosité du matériau.

Le modèle de comportement élasto-plastique s'appuie sur:

- les domaines d'élasticité, qui généralisent la notion de limites d'élasticité mise en évidence dans les expériences en sollicitations uniaxiales (traction simple par exemple) avec le phénomène essentiel d'écrouissage ;
- la règle d'écoulement plastique qui définit, dans le cas des sollicitations multiaxiales, la façon dont évolue la déformation plastique.

II.2.1 Domaines d'élasticité :

II.2.1.1 L'expérience de traction simple ; limites d'élasticité :

La figure (2.1a) représente le diagramme effort-allongement relevé dans une expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette en acier inoxydable (communiqué par H.D. Bui)

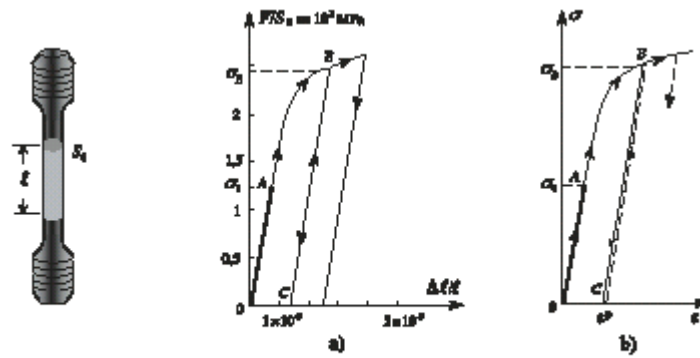


Figure 2.1 : Expérience de traction simple pour un matériau écrouissable

Soit σ_0 le seuil, à partir duquel le comportement du matériau devient irréversible. L'éprouvette ayant été chargée au-delà de A jusqu'en B, on effectue une décharge : celle-ci suit sur le diagramme le chemin BC et non le trajet BAO. En particulier, on note qu'après décharge totale, il reste une déformation de l'éprouvette représentée par OC sur la figure (2.1.a) : cette déformation permanente est la déformation plastique. On procède alors à une nouvelle charge : tant que la contrainte reste inférieure à σ_B celle-ci s'effectue en suivant le trajet CB identique, au sens de parcours près, à celui décrit lors de la décharge ; le comportement demeure réversible tout au long de CB. Quand σ dépasse σ_B , le point figuratif suit la courbe de première charge au-delà de B, c'est à dire la courbe représentant la traction sans décharge. Ainsi lors de la nouvelle charge effectuée à partir de C, σ_B apparaît comme le nouveau seuil en traction. Sur ce diagramme (figure 2.1b), σ_0 est la limite initiale d'élasticité ou seuil initial de plasticité. Après charge jusqu'au niveau σ_B , la limite actuelle d'élasticité ou seuil actuel de plasticité est égale à σ_B : ce résultat est parfois appelé « Principe de Coulomb » (Bouasse, 1920). La déformation permanente après décharge est la déformation plastique ϵ^P .

Ainsi la figure (2.2a) représente le diagramme relevé dans le cas de l'expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette d'acier doux : on constate que celui-ci présente un palier pour des déformations allant de 10^{-3} à 10^{-2} (ordres de grandeur). Un tel comportement est modélisé selon le diagramme de la figure (2.2b) avec un palier plastique illimité et l'on dit que le matériau correspondant est élastique parfaitement plastique. Ainsi, pour le modèle élastique parfaitement plastique, la contrainte ne peut dépasser la valeur σ_0 et, lorsqu'elle atteint cette valeur il y a possibilité d'allongement illimité.

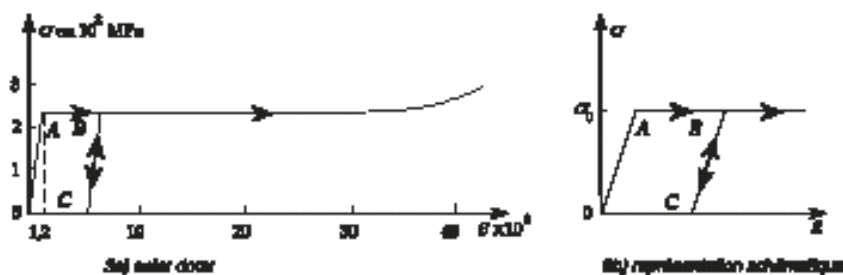


Figure 2.2 : Expérience de traction simple pour un matériau élastique parfaitement plastique

En figure (2.3), l'écroissage en traction qui correspond à un relèvement de la limite d'élasticité en traction, s'accompagne d'une diminution (en valeur absolue) de la limite d'élasticité en compression. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Bauschinger.

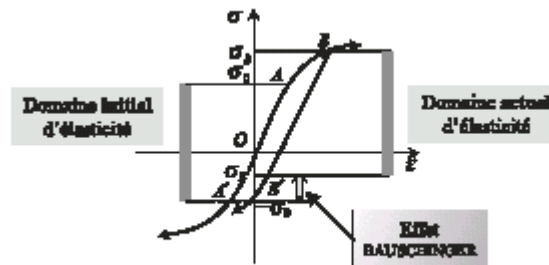


Figure 2.3 : Expérience de traction-compression : effet Bauschinger

II.2.2 Plasticité unidimensionnelle :

Dans un essai uniaxial, traction simple par exemple, seule σ_1 est non nulle. Les différents phénomènes observés en pratique (figure 2.3) sont pris en compte en définissant trois notions importantes :

1 Critère de limite élastique ou d'épuisement : Donnant des contraintes au début de l'écoulement plastique.

2 Règle d'écroissage : Décivant comment évolue la condition (critère) d'épuisement pendant l'écoulement plastique.

3 Règle d'écoulement : Liant l'incrément des déformations plastiques aux contraintes.

II.2.2.1 Modélisation :

Le comportement réel est modélisé soit par la courbe élasto-plastique parfaite sans effet Bauschinger (Figure 2.4.a) ou la courbe élasto-plastique avec un écroissage (linéarité ou non) et donc un module élasto-plastique tangent E^{ep} (constant ou non, figure 2.4.b) ce dernier cas est général car pouvant représenter l'élasto-plasticité parfaite [$E^{ep} = 0$], le durcissement [$E^{ep} > 0$], et l'adoucissement [$E^{ep} < 0$].

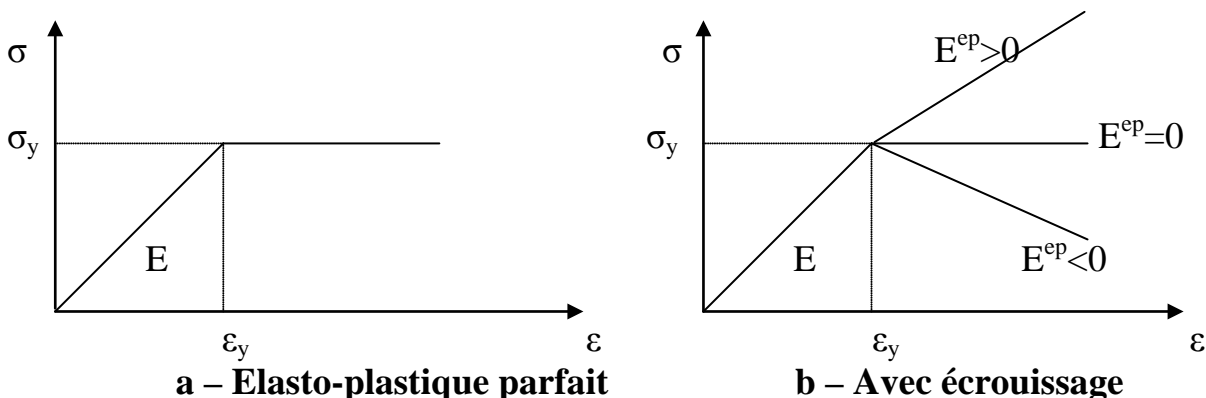


Figure 2.4 : Modélisation du comportement élasto-plastique

L'écrouissage signifie que les déformations sont élastiques et plastiques à la fois.

Dans le cas uniaxial, l'élasto-plasticité parfaite signifie qu'au delà de la limite élastique, le comportement réversible cesse et les déformations sont purement plastiques.

Dans le cas multiaxial, le problème est plus complexe car les vecteurs des contraintes et déformations ont six composantes chacun et en général après plastifications le comportement est élastique et plastique à la fois.

Si l'écrouissage est positif la variation des contraintes est purement élastique.

La plasticité est une extension logique de l'élasticité et le critère de limite élastique constitue la condition de plastification.

II.2.2.2 Critère d'épuisement :

Le critère d'épuisement est atteint quand $\|\sigma\|$ atteint σ_y .

On utilise les valeurs absolues pour accommoder la compression ou la traction ou les deux à la fois (charge inversée).

σ_y est la limite élastique initiale et est considérée positive.

σ est la contrainte courante comptée algébriquement.

Le critère s'exprime par :

$$\|\sigma\| - \sigma_y = F(\sigma, \sigma_y) = 0 \dots\dots\dots(2-8)$$

II.2.2.3 Règle d'écrouissage :

Cette règle doit donner la limite élastique actuelle y (positive) et décrire l'effet Bauschinger éventuel.

Après l'écoulement initial, le niveau de contrainte auquel apparaissent des déformations plastiques additionnelles doit dépendre du degré courant de déformabilité plastique. Un tel phénomène est appelé écrouissage.

II.2.2.3.1 Ecrouissage isotrope :

Supposant que les conditions d'épuisement en compression et en traction sont affectées de la même manière (figure 2.5).

Si on décharge et on inverse le chargement à partir du point B l'écoulement plastique dans l'autre sens commencera à la contrainte $-\sigma_B$. Il y a dans ce cas une symétrie par rapport à l'axe $\sigma = 0$. L'origine O est le milieu (centre) fixe de segment entre les points limites mais celui-ci subit une expansion isotrope symétrique (figure 2.5b)

Dans le cas biaxial, il s'agira d'une courbe délimitant une surface et dans le cas tridimensionnel, c'est une surface couvrant un volume. Cela s'exprime par :

$$F(\sigma, y) = \|\sigma\| - y = 0 \dots\dots\dots(2-9)$$

y est la limite élastique actuelle toujours positive et dépend de la déformation plastique ϵ^p (figure 2.5c).

$$y = \sigma_y + \left| \int H d \epsilon^p \right| \dots\dots\dots (2-10)$$

H est une caractéristique du matériau (module d'écrouissage), si H est constant :

$$y = \sigma_y + H |\epsilon^p| \dots\dots\dots (2-11)$$

En élasto-plasticité parfaite $y = \sigma_y = \text{constante}$ et $H=0$

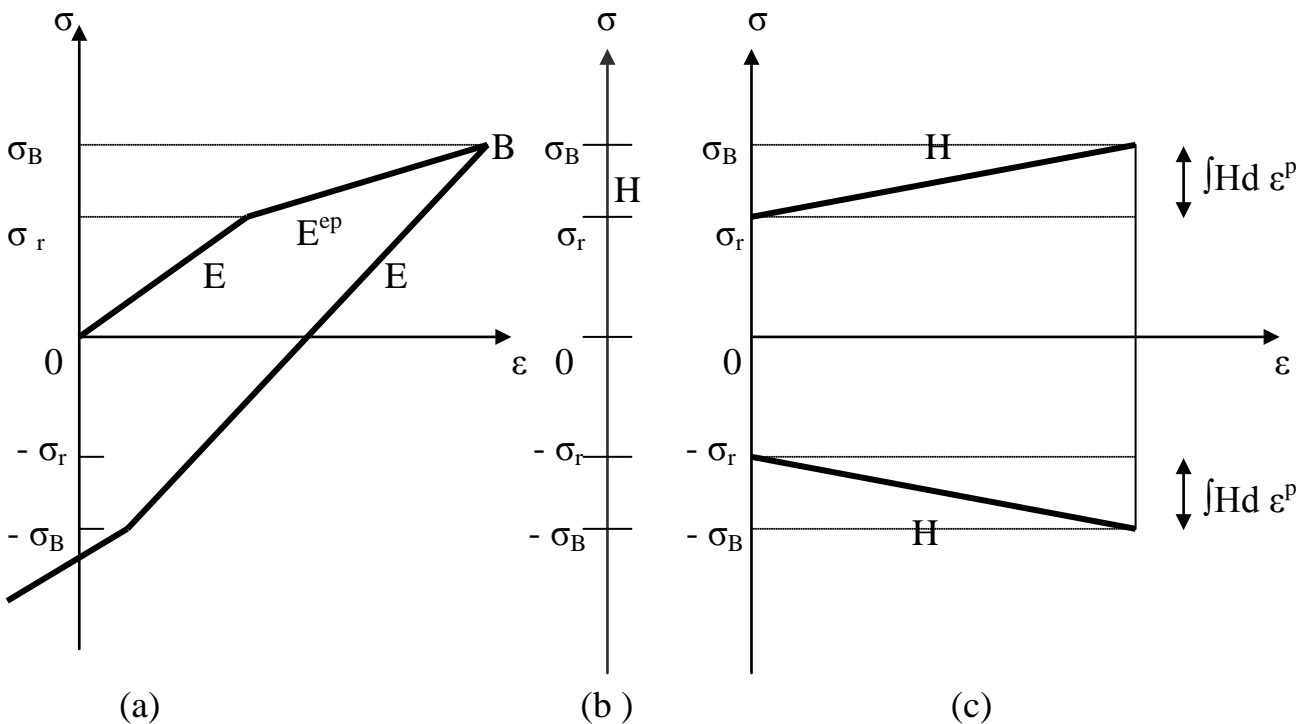


Figure 2.5 : Ecrouissage isotrope

II.2.2.3.2 Ecrouissage cinématique:

Dans ce cas on suppose que la même marge élastique de $2 \sigma_y$ est conservée quand le chargement est inversé (figure 2.6).

Cela signifie que le segment entre les points limites garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance (constante) α (figures 2.6b et 2.6c).

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_y) = F(\sigma - \alpha, \sigma_y) = F(\bar{\sigma}, \sigma_y) = |\bar{\sigma}| - \sigma_y = 0 \dots\dots\dots(2-12)$$

α est l'ordonnée du centre du segment.
 $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$ est appelée contrainte réduite.

La déformation de l'ordonnée α peut se faire avec une des règles d'érouissage cinématique ; celle de Prager nous donne :

$$d\alpha = db \varepsilon^p \text{ donc } \alpha = \int db \varepsilon^p \dots\dots\dots(2-13)$$

b est une caractéristique du matériau égale à H si l'érouissage est purement cinématique (figure 2.6c)

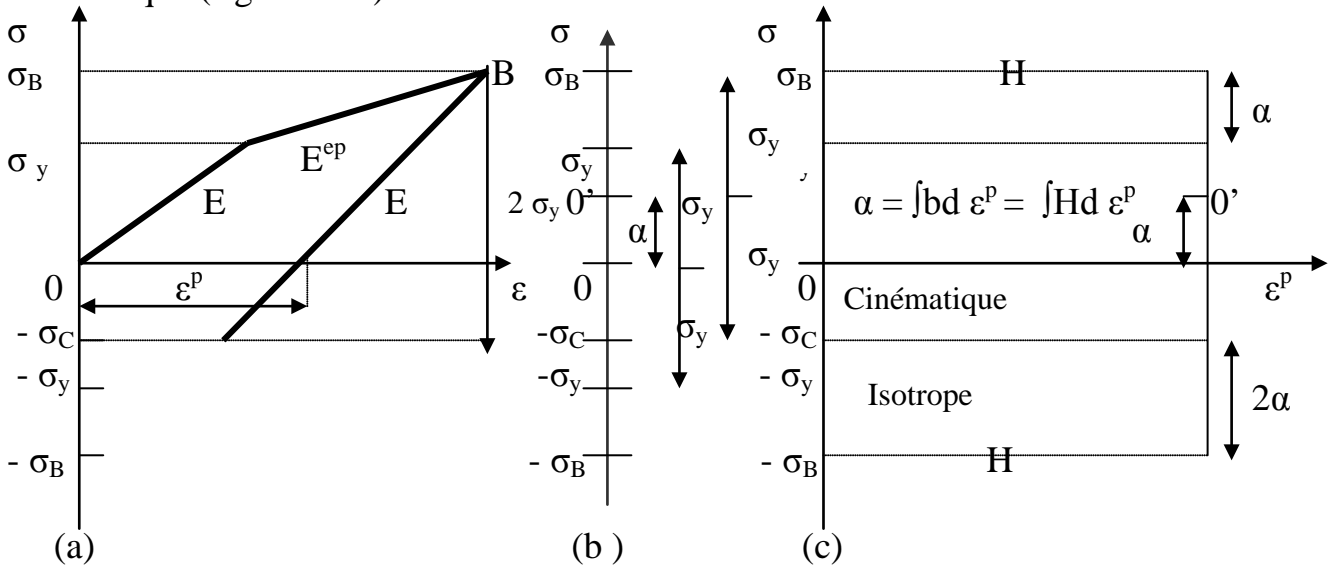


Figure 2.6 : Ecrouissage cinématique

II.2.2.3.3 Ecrouissage mixte :

L'érouissage isotrope est adéquat pour un chargement monotone mais ignore complètement l'effet Bauschinger en cas de chargement inversé. Dans l'érouissage cinématique, cet effet est maximal car l'augmentation de la limite élastique par érouissage dans un sens est totalement perdue dans l'autre sens. Cela est en contradiction avec les observations expérimentales.

L'érouissage mixte est une combinaison des deux, le segment de charge subit une expansion et une translation en même temps.

$$F(\sigma, \alpha, Y) = F(\bar{\sigma}, Y) = |\bar{\sigma}| - Y = 0 \dots\dots\dots(2-14)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha \dots\dots\dots(2-15)$$

L'incrément des déformations plastiques se décompose en une partie isotrope et une autre cinématique :

$$d \varepsilon^p = d \varepsilon^{pi} + d \varepsilon^{pc}$$

Avec :

$$d \varepsilon^{pi} = M d \varepsilon^p \text{ et } d \varepsilon^{pc} = (1 - M) d \varepsilon^p$$

M est le coefficient de mixité tel que $0 \leq M \leq 1$

Alors :

$$Y = \sigma_Y + M \left| \int H d \varepsilon^p \right| \quad \alpha = (1 - M) \int b d \varepsilon^p$$

L'érouissage mixte est donc similaire à l'érouissage isotrope en remplaçant σ par sa valeur réduite.

Dans ce cas les modules d'érouissage cinématique et isotrope sont différents : $b \neq H$.

II.2.3 Règle de chargement :

Avec les règles d'érouissage précédentes décrivant l'évolution du critère de plastification F , les règles de charge et décharge sont :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } F < 0 : \text{ domaine élastique} \\ \text{Si } F = 0 : \text{ plastification} \\ \text{Si } F > 0 : \text{ impossible} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2-16)$$

Quand $F=0$, il y a chargement si $dF > 0$ et déchargement si $dF < 0$

II.2.4 Règles d'écoulement :

A cause de la dépendance de la réponse de l'histoire du chargement et du problème de non-unicité de la solution qui peut se poser, la loi constitutive élasto-plastique ne peut se formuler que de manière incrémentale. L'incrément total des déformations se compose en général de deux parties : un incrément élastique $d\epsilon^{e1}$ et un incrément élasto-plastique $d\epsilon^{ep}$ (figure 2.7). Ce dernier se décompose lui même en une partie élastique $d\epsilon^{e2}$ et une partie purement plastique $d\epsilon^p$

$$d\epsilon = d\epsilon^{e1} + d\epsilon^{ep} = d\epsilon^{e1} + d\epsilon^{e2} + d\epsilon^p \dots\dots\dots(2-17)$$

Dans le domaine élastique ou en cas de décharge, la composante $d\epsilon^{e1} = 0$.
L'incrément total des contraintes $d\zeta$ est dû aux déformations élastiques seulement

$$d\sigma = d\sigma^e + d\sigma^{ep} = E d\epsilon^e = E(d\epsilon^{e1} + d\epsilon^{e2}) \dots\dots\dots(2-18)$$

La composante élasto-plastique $d\sigma^{ep}$ peut être liée aux déformations élasto-plastiques $d\epsilon^{ep}$ ou plastiques $d\epsilon^p$ (figures 2.7 et 2.5c) par :

$$d\sigma^{ep} = E^{ep} d\epsilon^{ep} \dots\dots\dots(2-19)$$

$$d\sigma^{ep} = H d\epsilon^p \dots\dots\dots(2-20)$$

E^{ep} est le module tangent et H est le module d'érouissage. Ils ne sont pas forcément constants.

En élasto-plasticité parfaite : $E^{ep} = H = 0$

En substituant, on trouve :

$$H = \frac{E^{ep}}{1 - \frac{E^{ep}}{E}} \dots\dots\dots (2-21)$$

Et:
$$E^{ep} = E \left[1 - \frac{E}{E+H} \right] \dots\dots\dots (2-22)$$

Où:
$$\frac{1}{E^{ep}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \dots\dots\dots (2-23)$$

Les modules E^{ep} et H sont liés mais l'utilisation de ce dernier est préférable car il est directement lié à la déformation plastique et sa généralisation aux problèmes multiaxiaux est plus facile.

La relation (2-19) est la règle d'écoulement plastique.

La relation incrémentale générale est :

$$d\sigma = E_t d\varepsilon \dots\dots\dots(2-24)$$

En posant : $d\varepsilon^{e1} = r d\varepsilon$ et $d\varepsilon^{ep} = (1-r) d\varepsilon$ avec $0 \leq r \leq 1$
 $d\sigma = E d\varepsilon^{e1} + E^{ep} d\varepsilon^{ep} = r E d\varepsilon + (1-r)E^{ep} d\varepsilon = [r E + (1-r)E^{ep}] d\varepsilon$

Donc :
$$E_t = r E + (1-r)E^{ep} \dots\dots\dots(2-25)$$

II.2.5 Résolution numérique et organigramme :

La méthode utilisée est incrémentale (itérative) avec une rigidité constante ou variable (tangente).

La méthode de rigidité tangente est plus rapide mais peut poser des problèmes numériques en élasto-plasticité parfaite.

Les relations incrémentales infinitésimales précédentes se réécrivent en fonction des incréments finis $\Delta\varepsilon, \Delta\sigma, \Delta\alpha, \dots$

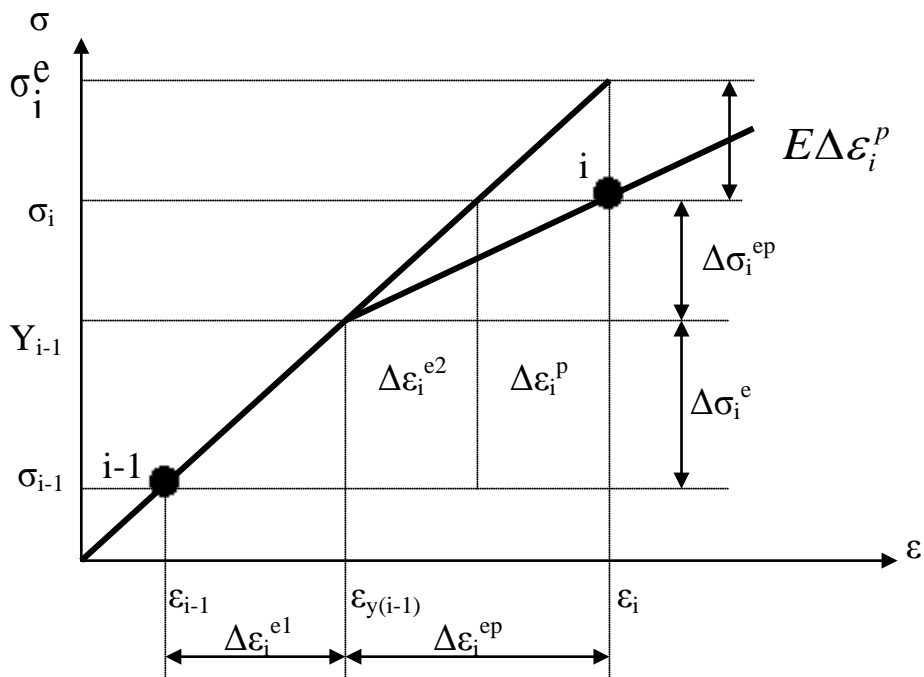


Figure 2.7 : transition élasto-plastique

σ_{i-1} et ε_{i-1} : contrainte et déformation obtenues à l'itération i-1 après convergence.

Y_{i-1} et $\varepsilon_{Y(i-1)}$: contrainte et déformation de limite élastique à l'itération i-1

σ_i et ε_i : contrainte et déformation à l'itération i inconnue.

σ_i^e : contrainte fictive à l'itération i obtenue en supposant un comportement élastique.

Entre deux itérations (ou incréments) successives i-1 et i, quatre cas peuvent se présenter selon l'état des contraintes (élastique ou plastique) à chacune des deux itérations.

- plastique-plastique : $E_t = E^{ep}$ ($r = 0$)
- plastique-élastique : $E_t = E$ (décharge) ($r=1$)
- élastique-élastique : $E_t = E$ ($r = 1$)
- élastique-plastique : $E_t = rE + (1-r) E^{ep}$ ($0 < r < 1$)

Pour déterminer la valeur de r, il faut effectuer deux tests sur les contraintes aux itérations i-1 et i (voir organigramme).

La contrainte élastique fictive σ_i^e est calculée systématiquement. Les contraintes à l'itération i-1 sont élastiques si :

$$Y_{i-1} > |\sigma_{i-1}|$$

$$\sigma_i^e = \sigma_{i-1} + E\Delta\varepsilon_i = \sigma_i + E\Delta\varepsilon_i^p \dots\dots\dots(2-26)$$

Le rapport r pour une transition élasto-plastique est :

$$r = \frac{Y_{i-1} - |\sigma_{i-1}|}{|\sigma_i^e - \sigma_{i-1}|} = \frac{Y_{i-1} - |\sigma_{i-1}|}{E|\Delta\varepsilon_i|} \dots\dots\dots(2-27)$$

$$Y_{i-1} = \sigma_Y + \int_0^{\varepsilon_{i-1}^p} H |d\varepsilon^p| = \sigma_Y + \sum_{j=1}^{i-1} H |\Delta\varepsilon_j^p| \dots\dots\dots(2-28)$$

Si $H = C^{ste}$ alors

$$Y_{i-1} = \sigma_Y + H |\varepsilon_{i-1}^p| \dots\dots\dots(2-29)$$

La déformation plastique totale est calculée par cumul :

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_i^p + \Delta\varepsilon_i^p \dots\dots\dots(2-30)$$

$$\Delta\varepsilon_i^p = \frac{\Delta\sigma_i^{ep}}{H} = (1-r) \frac{E^{ep}}{H} \Delta\varepsilon_i = (1-r) \frac{E}{E+H} \Delta\varepsilon_i = (1-r) \left[1 - \frac{E^{ep}}{E} \right] \Delta\varepsilon_i \dots\dots\dots(2-31)$$

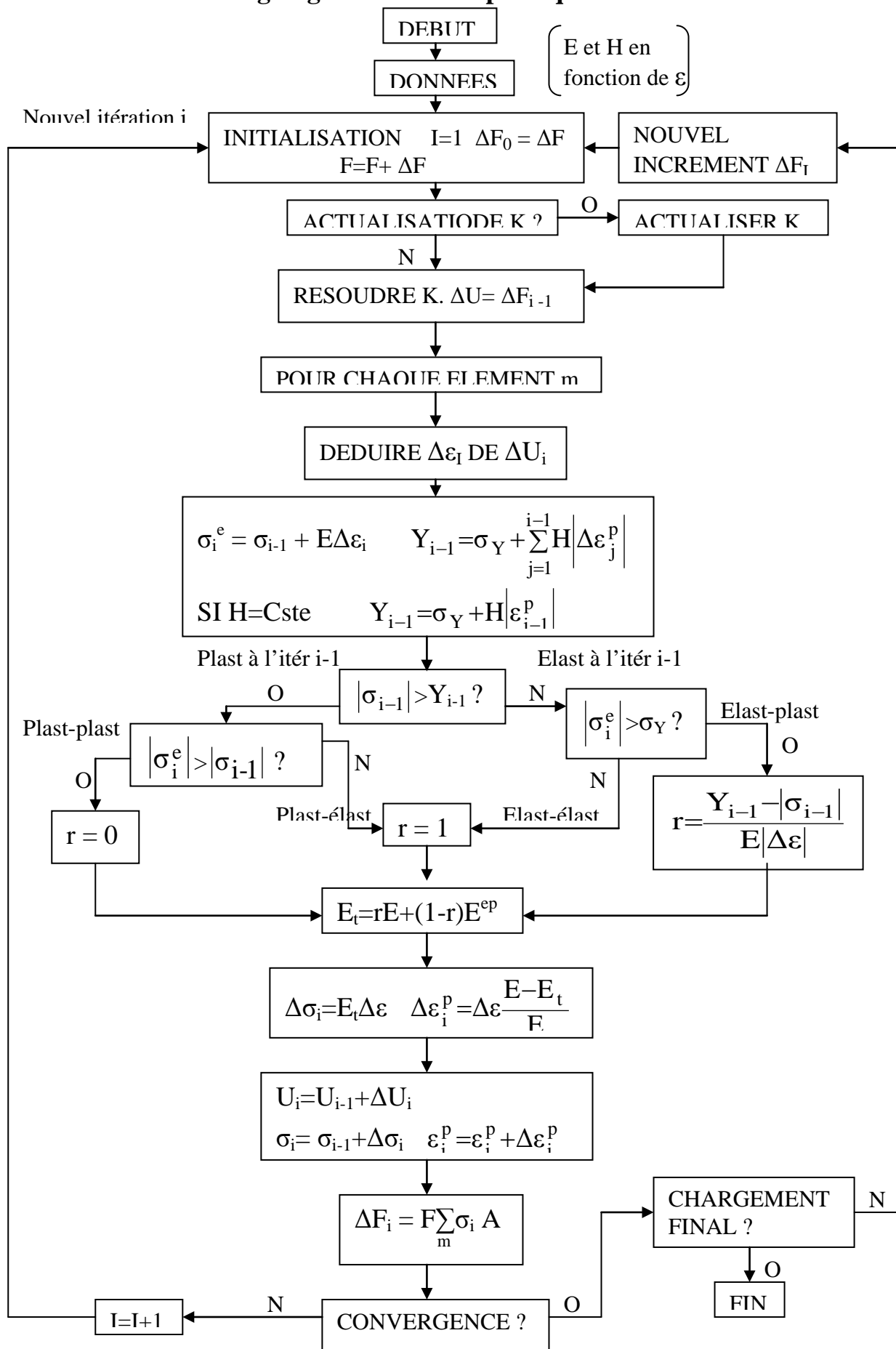
Où à partir de (2-26) :

$$\Delta\varepsilon_i^p = \frac{\sigma_i^e - \sigma_i}{E} = \Delta\varepsilon_i \frac{E - E_t}{E} \dots\dots\dots(2-32)$$

Les forces internes F_I sont :

$$F_I = \sum \sigma_i A$$

Organigramme élasto-plastique uniaxial



Les forces résiduelles sont $\Delta F = F - F_1$

La convergence sera atteinte quand les forces résiduelles deviennent inférieures à une certaine tolérance.

II.2.6 Plasticité multiaxiale:

La théorie tridimensionnelle est une généralisation des notions définies précédemment dans le cas uniaxial avec utilisation de grandeurs vectorielles, matricielles et tensorielles.

II.2.6.1 Critère de limite élastique et grandeurs effectives :

Il est fonction de l'état de contraintes et d'autres paramètres liés aux propriétés d'érouissage du matériau.

$$F(\sigma, k) = 0 \dots\dots\dots (2-33)$$

Pour les matériaux isotropes, la fonction de charge dépend des trois contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$) :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0 \dots\dots\dots (2-34)$$

La fonction de charge F est en général une combinaison unidimensionnelle des différentes composantes des contraintes.

Cette combinaison est appelée contrainte effective se réduisant à la contrainte uniaxiale pour un problème unidimensionnel. Ainsi les résultats expérimentaux uniaxiaux serviront à l'étude des problèmes multidimensionnels.

$$F(\sigma) = \sigma_{ef}$$

Cette contrainte effective sera comparée à la limite élastique courante Y obtenue par un essai uniaxial.

Le paramètre d'érouissage k dépend de la déformation plastique effective (il est égal au travail plastique) :

$$dk = \sigma^t d\varepsilon^p = Y d\tilde{\varepsilon}^p = \tilde{\sigma} d\tilde{\varepsilon}^p = F(\sigma) d\tilde{\varepsilon}^p \dots\dots\dots (2-35)$$

Donc :

$$d\tilde{\varepsilon}^p = \frac{\sigma^t d\varepsilon^p}{F(\sigma)}$$

Le module d'érouissage obtenu par un essai uniaxial serait alors : $H = \frac{dy}{d\tilde{\varepsilon}^p}$

Pour les métaux, l'expérience a montré que la limite élastique est indépendante de la pression hydrostatique c'est à dire de l'invariant I_1 .

On peut donc exprimer les critères en fonction des invariants J_2 et J_3 du déviateur

$$F(J_2, J_3, k) = 0 \dots\dots\dots(2-36)$$

Les critères de Tresca et Von Mises font partie de cette famille.

Avec l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement plastique ($\nu=0.5$) et d'indépendance de la pression hydrostatique (l'écoulement plastique dépend des composantes des déviateurs).

La définition de la déformation plastique effective est alors :

$$\tilde{\epsilon}^p = \frac{2}{3} \left[(e^p)^T (e^p) \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(2-37) \quad e : \text{est le tenseur déviateur des déformations.}$$

Cette définition reproduit bien la valeur uniaxiale car :

$$\epsilon^p = \left[\frac{2}{3} \left[\epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{2} - \frac{\epsilon^p}{2} \right] \left[\epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{2} - \frac{\epsilon^p}{2} \right]^T \right]$$

La définition correspondante de la contrainte effective devant conserver le travail :

$$\epsilon^p \sigma = \tilde{\epsilon}^p \tilde{\sigma}$$

$$\tilde{\sigma} = \left[\frac{3}{2} (S)^T (S) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \sqrt{J_2} \quad S : \text{est le tenseur déviateur des contraintes.}$$

Cependant pour certains matériaux les contraintes les sols et bétons, l'expérience a montré que des variations de volume apparaissent pendant l'écoulement plastique. Ceci signifie que les critères doivent dépendre en plus de l'invariant I_1 donnant la partie sphérique (critères de Mohr-Coulomb et Druker-Parger)

Le critère s'exprime donc en général en fonction des trois invariants I_1, J_2 et J_3

$$F(I_1, J_2, J_3, k) = 0 \dots\dots\dots (2-38)$$

I_1, J_2 et J_3 sont respectivement le premier invariant du tenseur des contraintes et le deuxième et troisième invariant de tenseur déviateur S ; Les composantes de ce dernier en utilisant la notation indicelle (somme sur l'indice répété) sont :

$i, j = x, y, z$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{ii}}{3} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{I_1}{3} \dots\dots\dots (2-39)$$

S_{ij} est le symbole de Kronecker delta défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Les invariants s'expriment par rapport aux axes principaux 1, 2, 3 ou par rapport aux axes quelconques i, j, k (x, y, z) par :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ij} \\ J_2 &= \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}{2} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \\ J_3 &= S_1 S_2 S_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} = \text{Det } S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2-40)$$

Dans le cas multiaxial, les critères sont représentés par des surfaces, appelées surfaces de charge.

La surface de charge en élasto-plasticité parfaite est une surface limitée tandis que dans les cas de l'écroutissage, elle évolue.

Le début de l'écoulement plastique signifie donc que la contrainte effective a atteint une certaine limite.

II.2.6.2 Ecroutissage :

Après l'écoulement initial, le niveau de contraintes auquel apparaissent des déformations plastiques additionnelles doit dépendre des degrés courant de déformabilité plastique.

Un tel phénomène est appelé : écroutissage.

De cette façon, la surface d'écoulement va varier à chaque étape de la déformation plastique, avec les surfaces d'écoulements ultérieurs devenant dépendantes des déformations plastiques en quelque sorte.

II.2.6.2.1- Ecroutissage isotrope :

Il y a écroutissage isotrope si les surfaces d'écoulement ultérieures ont une expansion uniforme de la courbe d'écoulement originale sans translation comme indiquée sur la figure (2.8).

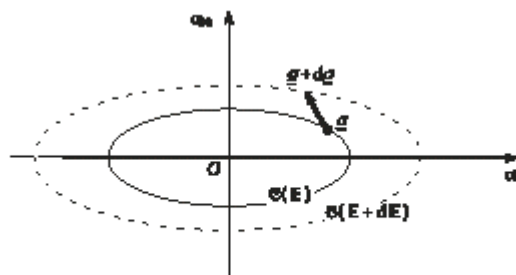


Figure 2.8 : Ecroutissage isotrope

Cet écroutissage est obtenu simplement en supposant que la surface de charge garde la même forme F s'étend sans translation ni distorsion de manière isotrope. Son centre O ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) reste fixe et seule sa dimension change.

L'équation de la surface de charge est :

$$F = (\sigma, k) = 0 \dots\dots\dots (2-41)$$

Le paramètre d'écrouissage k est en général égal au travail plastique (Work hardening) ou à la déformation plastique effective ϵ^p_{ef} (strain harding) :

$$dk = \sigma^T d\epsilon^p \quad k = \int \sigma^T d\epsilon^p \dots\dots\dots(2-42)$$

Ou bien

$$dk = \frac{2}{3} \left[\{d\epsilon^p\}^T \{d\epsilon^p\} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(2-43)$$

La relation (2-42) du travail plastique est la plus utilisée.

La règle de chargement plastique $df = 0$ donne alors :

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \frac{\partial F}{\partial k} dk = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0$$

L'écrouissage isotrope est simple mais ne convient qu'au chargement monotone car il ne tient pas compte de l'effet Bauschinger observé en pratique.

II.2.6.2.2 Ecrouissage cinématique :

Si les surfaces ultérieures des contraintes d'écrouissage préservent leurs forme et orientation mais translatent dans l'espace des contraintes comme un corps rigide comme indiqué sur figure (2.9), un écrouissage cinématique est appelé à prendre place. Tel modèle d'écrouissage donne une augmentation de l'effet Bauschinger observé expérimentalement en chargement cyclique.

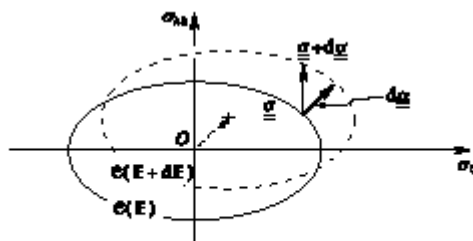


Figure 2.9 : Ecrouissage cinématique

Donc le moyen le plus simple de prendre en compte l'effet Bauschinger est de considérer que la surface de charge se déplace par une translation de corps rigide.

L'équation de la surface de charge est dans ce cas :

$$F = (\sigma, \alpha, k) = F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \dots\dots(2-44)$$

k est une constante et α est le vecteur des coordonnées du centre de la surface, $\bar{\sigma}$ est appelé vecteur des contraintes réduites.

Les règles d'écroissage cinématique consistent à déterminer les coordonnées.

La règle d'écroissage de Prager définit les coordonnées α par un déplacement linéaire du centre de la surface :

$$d\alpha = b d\varepsilon^P \text{ d'où } \alpha = \int b d\varepsilon^P \dots\dots\dots(2-45)$$

Dans le cas unidimensionnel $b = H$.

Dans la règle d'écroissage de Ziegler la translation de la surface de charge a lieu dans la direction du vecteur des contraintes réduites :

$$d\alpha = a (\sigma - \alpha) d\varepsilon_{ef}^P \dots\dots\dots (2-46)$$

La condition de consistance donne :

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \sum \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\alpha = 0..(2-47)$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\} = - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}$$

Donc :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d(\sigma - \alpha) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\bar{\sigma} = 0$$

a est une caractéristique positive du matériau et ε_{ef}^P est la déformation plastique effective.

Dans l'écroissage cinématique, l'effet Bauschinger est total et cela aussi est en contradiction avec l'expérience.

II.2.6.2.3 Ecrouissage mixte :

Une combinaison des écrouissages isotrope et cinématique de charge est donc

$$F = (\sigma, \alpha, k) = F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \dots\dots\dots(2-48)$$

Le centre de la surface subit une translation définie par les coordonnées α . La surface garde sa forme définie par F mais subit une expansion définie par k (à partir du centre de la surface)

$$dk = (\sigma - \alpha) d\varepsilon^P = \bar{\sigma} d\varepsilon^P \text{ d'où } k = \int \bar{\sigma} d\varepsilon^P \dots\dots\dots(2-49)$$

La règle de consistance donne :

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \sum \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial F}{\partial k} dk = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\alpha + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \dots (2-50)$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\bar{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0$$

L'écoulement mixte est le plus général et ressemble à l'écoulement isotrope mais avec les valeurs réduites.

II.2.7 Règle d'écoulement et potentiel plastique :

La notion dérivée des déformations élastiques à partir d'une fonction potentielle élastique a été étendue au domaine plastique. L'incrément de déformation plastique est relié au gradient de G par une fonction scalaire des contraintes σ appelée potentiel plastique telle que :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \dots \dots \dots (2-51)$$

Cette relation est appelée règle d'écoulement lie la fonction de charge à la loi constitutive σ - ε .

$d\lambda$ est un facteur scalaire de proportionnalité positif ou nul.

$d\lambda$ n'est positif qu'en présence d'écoulement plastique.

Les notions de plasticité associée sont attribuées à supposer $G = F$ ou $G \neq F$ respectivement. Où F est la fonction de charge.

$$\text{Si : } F = G \quad d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \dots \dots \dots (2-52)$$

L'équation (2-52) est appelée règle de plasticité associée ou règle de normalité car elle nécessite que le vecteur de déformation plastique ε^p_{ef} soit normal à la surface de charge.

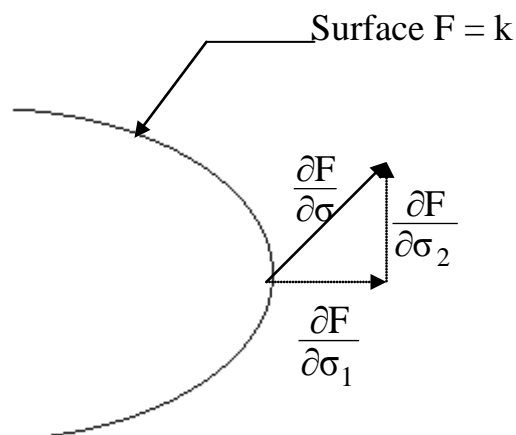


Figure 2.10 : Représentation géométrique de la règle de normalité de la plasticité associée

Des observations théoriques indiquent que la condition de normalité est une hypothèse acceptable pour les métaux, mais la question de normalité dans les roches et sols est encore ouverte au débat.

On démontre que cette règle de normalité implique la convexité de la surface de charge et l'unicité de la solution aux frontières.

Ces deux propriétés sont également déduites du postulat de stabilité de Drucker.

Ce postulat exprime que le travail effectué par une action extérieure (faisant varier les contraintes de σ^* à σ puis à σ^*) est positif pour un matériau stable.

$$(\sigma - \sigma^*) d\varepsilon^p \geq 0 \dots\dots\dots(2-53)$$

On démontre que ce postulat constitue une condition suffisante mais n'est pas nécessaire pour établir les relations élasto-plastique.

II.2.8 Relations élasto-plastiques incrémentales :

II.2.8.1 Ecoulement isotrope :

Nous traitons d'abord le cas d'un écoulement isotrope et la généralisation au cas d'un écoulement mixte sera plus facile.

Après l'écoulement initial, le comportement du matériau va être partiellement élastique et partiellement plastique.

Durant un incrément de contraintes, les variations des déformations sont supposées être divisibles en composantes élastiques tel que :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \dots\dots\dots(2-54)$$

L'incrément des contraintes est élastique.

$$d\sigma = D d\varepsilon^e = D (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \dots\dots\dots(2-55)$$

En remplaçant $d\varepsilon^p$ par son expression (2-51), on obtient :

$$d\sigma = Dd\varepsilon - D \frac{\partial G}{\partial \sigma} d\lambda \dots\dots(2-56)$$

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk \dots\dots\dots (2-57)$$

$$dF = \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma - A d\lambda = 0 \dots\dots\dots(2-58)$$

Remplaçant $d\sigma$ par son expression on obtient :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left(Dd\varepsilon - D \frac{\partial G}{\partial \sigma} d\lambda \right) - A d\lambda = 0 \dots\dots\dots (2-59)$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon - d\lambda \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A \right] \dots\dots\dots (2-60)$$

D'où :

$$d\lambda = \frac{D \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A} d\varepsilon \dots\dots\dots(2-61)$$

En substituant dans l'équation (2-58), on tire :

$$d\sigma = D - \frac{D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A} d\varepsilon = D^{ep} d\varepsilon \dots\dots\dots(2-62)$$

$$D^{ep} = D - \frac{D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A}$$

Cette matrice D^{ep} est la généralisation du module E^{ep} de (2-24).

En élasto-plasticité parfaite $A=0$ mais $D^{ep} \neq 0$ alors que dans le cas uniaxial E^{ep} est nul en élasto-plasticité parfaite.

En élasto-plasticité non associée ($F \neq G$). D^{ep} est dissymétrique et l'utilisation de la matrice de rigidité tangente nécessite un algorithme de résolution de système avec matrice dissymétrique.

Signification de A :

Pour un écrouissage isotrope $F(\sigma) - Y(k) = 0$

Donc :

$$\frac{\partial F}{\partial k} = - \frac{\partial Y}{\partial k} \dots\dots\dots (2-63)$$

En combinant avec :

$$\left(H = \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_{ef}^p} \right) \text{ et } (dk = Y d\varepsilon_{ef}^p)$$

On trouve :

$$\frac{\partial F}{\partial k} = - \frac{H}{Y}$$

Donc :

$$A = H \frac{\partial \epsilon^p}{\partial \lambda} = H \frac{\sigma^T \epsilon^p}{Y d \lambda} = H \frac{\sigma^T}{Y} \frac{\partial G}{\partial k} \dots\dots\dots (2-64)$$

En vu du théorème d'Euler

$$\sigma^T \frac{\partial F}{\partial k} = Y$$

On déduit que : $A = H$

Donc :

$$D^{ep} = D \frac{D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} H} \dots\dots\dots (2-65)$$

II.2.8.2 Ecrouissage mixte :

Dans le cas d'un écrouissage mixte, la fonction de charge est donnée par la relation :

$$F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0.$$

L'incrément des déformations plastiques se décompose en deux :

$$d\epsilon^p = d\epsilon^{pi} + d\epsilon^{pc} \dots\dots\dots(2-66)$$

$d\epsilon^{pi}$ et $d\epsilon^{pc}$ sont les composantes dues à l'écrouissage isotrope et cinématique respectivement, on peut les exprimer sous la forme :

$$d\epsilon^{pi} = M d\epsilon^p \quad \text{et} \quad d\epsilon^{pc} = (1-M) d\epsilon^p \dots\dots\dots(2-67)$$

M est le coefficient de "mixte" $0 \leq M \leq 1$.

En utilisant l'expression du travail plastique pour le paramètre d'écrouissage isotrope k et la règle d'écrouissage cinématique de Prager, on obtient :

$$dk = \bar{\sigma}^T d\epsilon^{pi} = \bar{\sigma}^T M d\epsilon^p \dots\dots\dots(2-68)$$

$$d\alpha = b d\epsilon^{pc} = (1 - M) b d\epsilon \dots\dots\dots(2-69)$$

Avec : $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$

Avec un développement similaire, le paramètre A de (2-64) devient

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T (1-M)b + \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T M \right] d\epsilon^p \dots\dots\dots(2-70)$$

En remplaçant $d\epsilon^p$ par son expression (2-53) :

$$A = (1-M) b \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} + M \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} \dots\dots\dots(2-71)$$

La matrice élasto-plastique devient alors :

$$D^{ep} = D - \frac{D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} (1-M)b \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} - M \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T \frac{\partial G}{\partial \sigma}} \dots\dots\dots(2-72)$$

$$D^{ep} = D - \frac{D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + (1-M)b \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} + MH}$$

La relation (2-72) donne la matrice élasto-plastique pour un écrouissage mixte en utilisant la règle de Prager pour l'écrouissage cinématique et le travail plastique pour l'écrouissage isotrope. Il suffit de prendre $M = 1$ et $\alpha = 0$ pour retrouver la relation de l'écrouissage isotrope. L'écrouissage cinématique pur est obtenu en prenant $M = 0$ et $Y = \sigma_y$.

On déduit la matrice de rigidité tangente avec :

$$K_t = \int B^T D_t B dv \dots\dots\dots(2-73)$$

Les matrices D^{ep} et D_t sont les généralisations des modules E^{ep} et E_t obtenus dans le cas uniaxial.

II.2.9 Critère de chargement :

D'une manière générale, l'écoulement plastique n'a lieu que si le point se trouve sur la surface de charge et si en plus le vecteur d'incrément des contraintes est dirigé vers l'extérieur de la surface. S'il est tangent, il y a "chargement neutre".

Il faut donc définir un vecteur N_F normal à la surface et étudier le signe de la projection du vecteur contrainte sur cette normale. Cependant pour l'écrouissage négatif, en cas de chargement ou de déchargement, le vecteur des contraintes est dirigé vers l'intérieur de la surface.

Il est donc préférable d'établir un critère en termes de déformations qui reste valable que l'écrouissage soit positif ou négatif et qui évite de faire appel à la normale N_F .

En plus dans la méthode des éléments finis (formulation en déplacements), les déformations sont connues avant les contraintes.

$F < 0$: Domaine élastique.

$F > 0$: Impossible.

$F = 0$: sur la surface.

La condition de chargement peut être tirée de l'équation (2-58) :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon - d\lambda \left(\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A \right) = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon - Hd\lambda = 0$$

On démontre que $Hd\lambda$ est toujours positif ou nul. $d\lambda$ est positif en cas de chargement plastique et nul autrement.

On déduit le critère de chargement et déchargement suivant :

$$\left. \begin{aligned} F = 0 \text{ et } \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon > 0 \text{ chargement} \\ F = 0 \text{ et } \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon < 0 \text{ déchargement} \\ F = 0 \text{ et } \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon = 0 \text{ chargement neutre} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-74)$$

Pendant le chargement les déformations élastique et plastique ont lieu simultanément et la surface de charge évolue.

Pendant le déchargement les déformations sont élastiques et le point devient à l'intérieur de la surface $F < 0$.

Le chargement neutre est caractérisé par des déformations élastiques seulement tout en maintenant le point sur la surface. Le point « glisse » sur la surface et celle-ci n'évolue pas. La notion de chargement neutre n'existe pas ni en élasto-plasticité unidimensionnelle car la surface se réduit à deux points ni en élasto-plasticité multiaxiale parfaite car la surface est limitée.

Avec les critères de charge et décharge précédents, on a :

En cas de chargement plastique : $D_t = D^{ep}$

En cas de déchargement ou de chargement neutre ou élastique : $D_t = D$.

II.2.10 Organigramme élasto-plastique général :

En généralisant l'organigramme uniaxial de la section II.2.5, l'incrément des déformations dans le cas d'une transition élasto-plastique doit être décomposé en une partie élastique $r\Delta\varepsilon$ et une partie élasto-plastique $(1-r)\Delta\varepsilon$.

$$\Delta \varepsilon = r \Delta \varepsilon + (1-r) \Delta \varepsilon.$$

L'incrément des contraintes entre les itérations $i-1$ et i est :

$$\Delta \sigma = \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^i} D (d\varepsilon - d\varepsilon^p) = \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon} D d\varepsilon + \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep} d\varepsilon$$

$$\Delta \sigma = r \Delta \sigma^e + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep} d\varepsilon = r \Delta \sigma^e + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep} (d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

Le facteur r doit être tel que le point revient sur la surface de charge : $F(\sigma + r\Delta\sigma^e) = 0$
L'expression de Taylor donne (Nayak, Chen) une approximation d'ordre 1 :

$$r = \frac{-F(\sigma^i)}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \Delta \sigma^e}$$

On peut également calculer une valeur approchée de r comme dans le cas uniaxial en utilisant les grandeurs effectives.

$$r = \frac{Y_{i-1} - \tilde{\sigma}_{i-1}}{\tilde{\sigma}_i^e - \tilde{\sigma}_{i-1}}$$

$\tilde{\sigma}_i^e$ est la contrainte effective calculée élastiquement.

La valeur de r pour les autres cas est :

Transition élastique – élastique : $r = 1$

Transition plastique – plastique : $r = 0$

Transition plastique – élastique : $r = 1$

Pour les éléments en charge ($r \neq 1$), l'intégrale est calculée numériquement par des algorithmes explicites ou implicites. Les premiers sont les plus utilisés (méthode d'Euler et Runge–Kutta). Dans la méthode d'Euler explicite l'intégrale est calculée par sous-incrémentation en m pas :

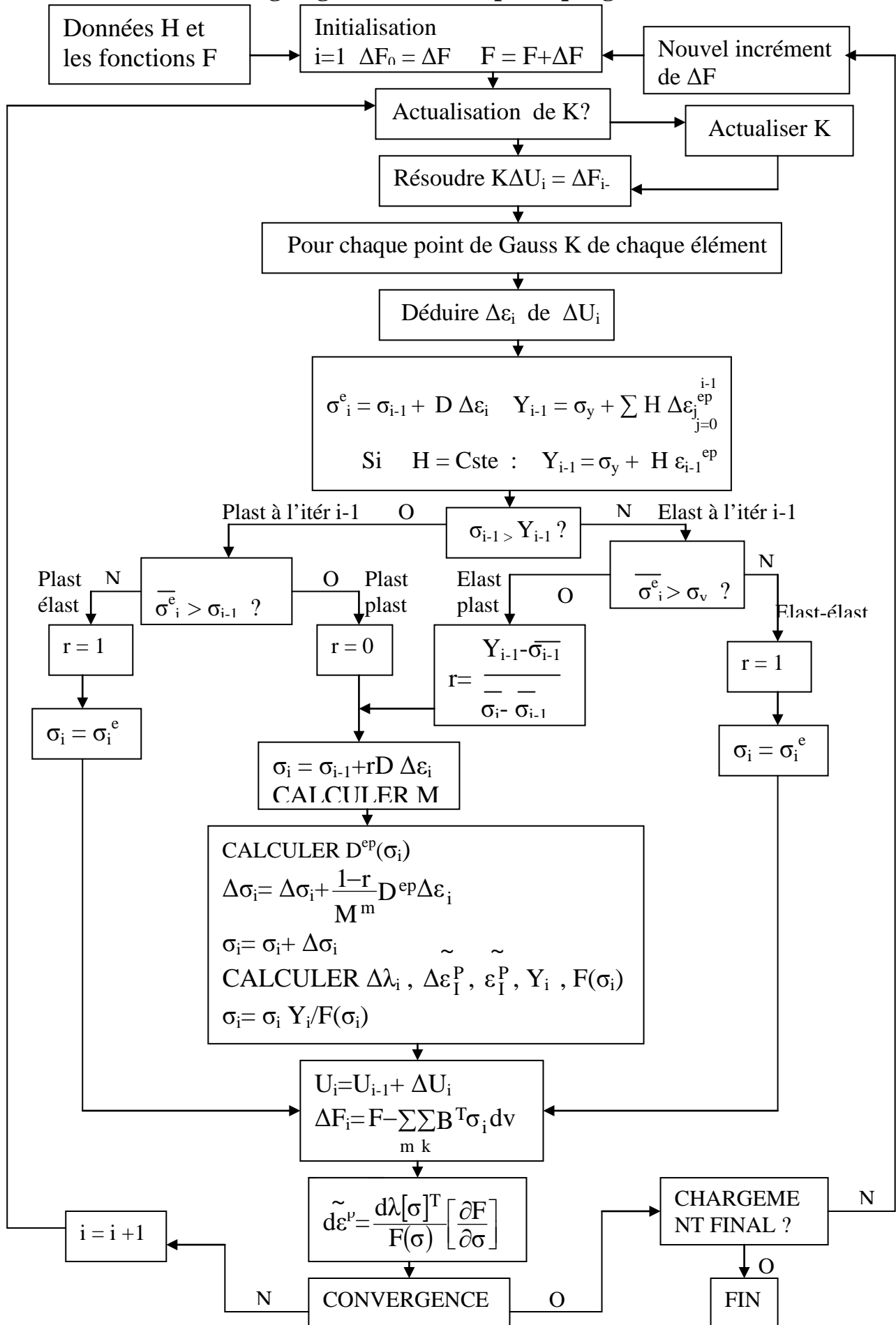
$$\int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep} d\varepsilon = \sum_{j=1}^m D^{ep}_{j-1} \frac{(1-r)\Delta\varepsilon}{m}$$

D_{j-1}^{ep} : signifie que la matrice élasto-plastique D^{ep} est calculée au sous incrément précédent.

Le nombre de sous incréments m doit être suffisant pour obtenir une bonne précision. La valeur idéale de m dépend de l'excès de contrainte. Hinton ^[51] propose l'entier immédiatement supérieur à : $8 (\tilde{\sigma}_i^e - y_{i-1})/\sigma_y$

$$m = \frac{8 (\tilde{\sigma}_i^e - y_{i-1})}{\sigma_y} + 1$$

Organigramme Elasto-plastique général



Dans la méthode Runge-Kutta, la matrice tangente D^{ep} est déterminée au milieu de l'incrément avant d'être utilisée pour la totalité de l'incrément. Cela donne une meilleure précision et permet en plus d'apprécier l'erreur commise (Zienk).

Ces intégrations aboutissent en général à des contraintes qui ne sont pas exactement sur la surface de charge, et des corrections peuvent être effectuées par des réductions (Chen, Krieg).

Une des réductions simples consiste à multiplier les composantes du vecteur contraintes par le rapport des contraintes effectives :

$$\sigma_i = \sigma_i \frac{\sigma_y + H\tilde{\epsilon}_i^p}{F(\sigma_i)} = \sigma_i \frac{y_i}{F(\sigma_i)}$$

$\tilde{\epsilon}^p$ est la déformation plastique effective.

Cette dernière réduction peut être effectuée à l'intérieur, ou à l'extérieur de la boucle de sous incrémentation.

Le calcul de toutes les composantes des déformations plastiques n'est pas indispensable. On se limite à la valeur effective.

L'organigramme est similaire à celui de la section II.2.5.

II.2.11 Différents critères élasto-plastiques ^[44]:

Le critère d'écoulement détermine le niveau de contrainte auquel commence la déformation plastique.

Du point de vu physique, n'importe quel critère d'écoulement doit être indépendant de l'orientation du système de coordonnées employé et d'après le théorème de représentation (Wineman et Pipkin, 1964), il doit être une fonction de trois invariants de contraintes seulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \sigma_{ij} \\ I_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji} \\ I_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \end{array} \right. \dots\dots\dots (2-75)$$

Les observations expérimentales, notamment par Bridgeman, indiquent que la déformation plastique des métaux est essentiellement indépendante de la pression hydrostatique. Par conséquent, les critères d'écoulement dans le cas des métaux, sont définis en fonction des invariants déviateurs des contraintes.

Dans les matériaux sans traction tels que sols, roches, céramiques et béton, l'effet de la pression hydrostatique peut être pris en compte.

Dans ce but quatre critères d'écoulement ont été implémentés dans ce logiciel, qui sont : Von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb et Drucker-Prager. Les deux premiers sont proposés pour les métaux et les deux derniers pour les matériaux sans traction.

En élasto-plasticité, il est commode d'exprimer les critères en fonction de l'angle θ appelé angle de similitude défini comme suit :

$$\theta = \frac{1}{3} \text{Arcsin} \left[\frac{3J_3 \sqrt{3}}{2(J_2)^{3/2}} \right] : \frac{-\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots (2-76)$$

Ces critères étaient exprimés comme étant la condition de première plastification. On peut généraliser leurs expressions en introduisant les paramètres d'écrouissage.

II.2.11.1 Critère de Tresca :

Les états d'écoulement commencent quand le maximum de contraintes de cisaillement atteint une valeur critique. Si les contraintes principales sont : $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ alors l'écoulement commence quand :

$$\text{Max} \left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right] = \frac{Y}{2} \dots\dots\dots (2-77)$$

Y est la contrainte d'épuisement courante en traction simple.

En fonction des invariants, le critère s'exprime par :

$$F(J, \theta) = 2\sqrt{J_2} \cos\theta - Y(k) = 0 \dots\dots\dots (2-78)$$

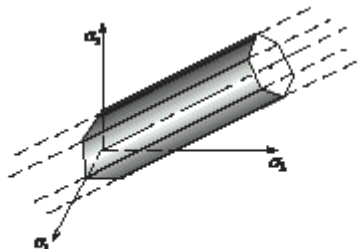


Figure 2.18 : Critère de Tresca (domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales)

La représentation graphique de ce critère dans l'espace des contraintes principales est un prisme hexagonal.

Les axes du prisme coïncident avec l'espace diagonal défini par les points : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, et depuis chaque section normale du prisme est identique, (une conséquence d'hypothèse qu'une contrainte hydrostatique n'aurait pas d'influence sur l'écoulement) il est commode de représenter la surface d'écoulement géométriquement par sa projection sur le plan π ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$).

Y(k) est l'actuelle contrainte de plastification uniaxiale liée au paramètre d'écrouissage k, pour les critères de Tresca et Von Mises.

II.2.11.2 Critère de Von Mises :

Von Mises suggère que l'écoulement se produit quand le second invariant du déviateur de contraintes atteint une valeur critique (égale à la limite d'écoulement pour les métaux).

Il est défini comme suit :

$$F(J_2) = \sqrt{3J_2} - Y(k) = 0 \dots\dots\dots (2-79)$$

Il deux interprétations physiques de la condition d'écoulement de Von Mises :

Nadai (1937) a traduit ce qu'on appelle la contrainte de cisaillement octahedral τ_{oct} qui est la contrainte de cisaillement dans les plans d'un octaèdre régulier dont les sommets coïncident avec les axes principaux des contraintes.

Ces écoulements peuvent être interprétés quand τ_{oct} atteint une valeur critique.

Henky (1924) a démontré que la loi de Von Mises implique que l'écoulement commence quand l'énergie de distorsion atteint une valeur critique.

La représentation graphique dans l'espace des contraintes principales est un cylindre régulier dont la projection sur le plan (π) est un cercle de rayon $\sqrt{2}k$, le tracé bidimensionnel de la surface d'écoulement de Von Mises est l'ellipse de la figure (2.19).

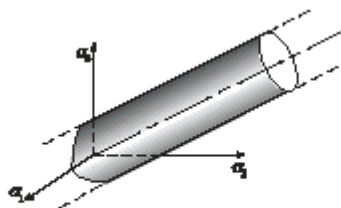


Figure 2.19 : Critère de Von Mises (domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales)

On peut obtenir le sens physique de la contrainte K par la considération d'écoulement des matériaux sous des états simples de contraintes.

Le cas du cisaillement pur ($\sigma_1 = -\sigma_2$, $\sigma_3 = 0$) nécessite que dans l'utilisation de la formule (2-79), k doit être égal à la contrainte limite de cisaillement.

L'état de tension uniaxiale ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) nécessite que $\sqrt{3}k$ soit la contrainte uniaxiale limite.

Le lieu géométrique pour le critère de Tresca est un hexagone distant de $\frac{\sqrt{2}}{3}Y$ de l'origine jusqu'au sommet sur le plan (π) tandis que la surface d'écoulement de Von Mises est un cercle de rayon $\sqrt{2}k$.

En choisissant convenablement la constante Y , le critère peut être construit pour être conforme à chacun des deux et avec l'expérimentation pour un état simple de contraintes.

Ceci doit être choisi arbitrairement, il est conventionnel de faire passer le cercle à travers les sommets de l'hexagone en prenant la constante $Y = \sqrt{3}k$, la contrainte limite en traction simple. Alors le critère diffère beaucoup de l'état de cisaillement pur où le critère de Von Mises donne une contrainte limite $\frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1,15$ fois celle donnée par le critère de Tresca.

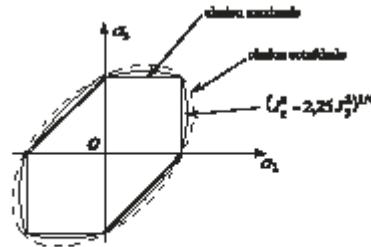


Figure 2.20: Frontières d'écoulement en contrainte plane pour trois critères de cisaillement effectif

Pour beaucoup de métaux, la loi de Von Mises s'accorde avec celle de Tresca. Mais cette dernière se produit plus fréquemment car le critère de Tresca est plus simple dans les applications théoriques.

II.2.11.3 Critère de Mohr-Coulomb :

Ce critère est une généralisation de la loi de rupture par frottement de Coulomb (1773) définie par

Où τ : est la magnitude de la contrainte de cisaillement.

σ_n : est la contrainte normale (contrainte de traction est positive)

c : est la cohésion.

ϕ : est l'angle de frottement interne.

Ce critère est une généralisation de celui de Tresca sauf que la contrainte critique de cisaillement n'est plus constante mais dépend de la contrainte normale (Figure 2.21).

La plastification a lieu quand le rayon du plus grand cercle principal de Mohr est tangent à la courbe enveloppe de Coulomb :

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi \dots \dots \dots (2-80)$$

$$F(I_1, I_2) = \frac{I_1}{3} \sin \phi - \sqrt{\frac{I_2}{2} \left(\cos \theta - \frac{\sin \phi \cos \phi}{\sqrt{3}} \right)} \cos \phi = 0 \dots \dots \dots (2-81)$$

Si $\phi = 0$, le critère se réduit à celui de Tresca et la contrainte intermédiaire σ_2 est également ignorée.

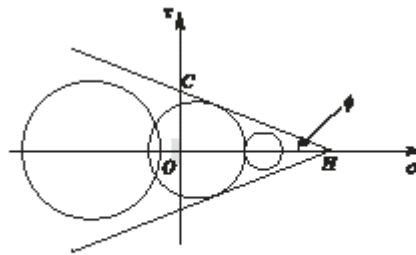


Figure 2.21 : Cercles de Mohr permis par le critère de Coulomb

Graphiquement (2-80) représente une ligne droite tangente au plus grand cercle de contraintes comme indiqué sur figure 2.21 et a été démontré pour la première fois par Mohr (1882).

De la figure 2.22, et pour $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (2-80) peut être écrite comme suit :

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \phi = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \phi}{2} \right) \tan \phi$$

Et en réarrangeant :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2 \cos \phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \dots \dots \dots (2-82)$$

A nouveau, encore comme pour le critère de Tresca la surface complète d'écoulement est obtenue en considérant toutes les autres combinaisons de contraintes qui peuvent causer l'écoulement. Dans l'espace des contraintes principales ceci donne une surface d'écoulement est conique plutôt que cylindrique, la nature de la surface d'écoulement est une conséquence du fait qu'une contrainte hydrostatique va influencer l'écoulement qui est évident à partir du dernier terme de la formule (2-80). Quand $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cot \phi$. Ce critère est applicable aux problèmes de béton, sol et roches.

II.2.11.4 Critère de Drucker-Prager :

Une approximation de la loi de Mohr-Coulomb était présentée par Drucker- et Prager en 1952 comme une modification du critère de Von Mises. L'influence des composantes de la contrainte hydrostatique (contrainte intermédiaire σ_2) sur l'écoulement était introduite par l'inclusion d'un terme additionnel dans l'expression de Von Mises pour donner :

$$F(I_1, J_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = 0 \dots \dots \dots (2-83)$$

Avec :

$$\mu = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \text{et} \quad K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \dots\dots\dots(2-84)$$

C et ϕ sont la cohésion et l'angle de frottement interne respectivement.

Si $\phi=0$, le critère se réduit à celui de Von Mises.

Cette surface d'écoulement à la forme d'un cône circulaire. Pour que le cercle de Drucker-Prager coïncide avec les sommets extérieurs de l'hexagone de Mohr-Coulomb en n'importe quelle section, la formule (2-84) doit être vérifiée.

La coïncidence avec les sommets intérieurs de l'hexagone de Mohr-Coulomb est due à :

$$\mu = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad , \quad K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}$$

Cependant, l'approximation donnée aussi bien par le cône intérieur ou extérieur de la vraie surface de rupture peut être mauvaise pour certaines combinaisons de contraintes.

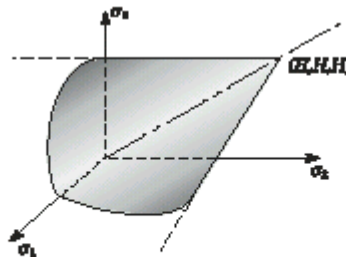


Figure 2.22 : Critère de Drucker-Prager (domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales)

Pour les critères Mohr-Coulomb et Drucker-Prager, c et ϕ sont la cohésion et l'angle de frottement interne qui varient avec les paramètres d'écrouissage (en général ϕ varie très peu).

Les grandeurs équivalentes à la limite élastique courante sont $(c \cos \phi)$ pour le critère de Mohr-Coulomb et k pour celui de Drucker-Prager. Les contraintes effectives sont, dans ce cas, données par les deux premiers termes et sont différentes de la relation car l'hypothèse d'incompressibilité a été levée.

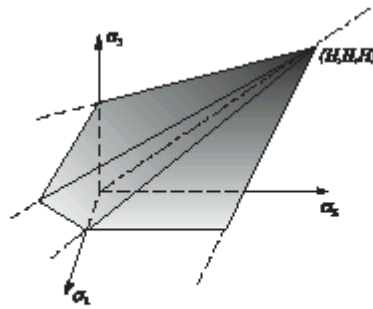


Figure 2.23: Critère de Coulomb (domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principales $H=c \cot(\theta)$)

II.2.12 Gradient des critères :

On remarque que la matrice élasto-plastique dépend du gradient de la fonction de charge $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ quelque soit le critère utilisé, on peut toujours écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \dots\dots\dots (2-85)$$

$\frac{\partial F}{\partial J_2}$ et $\frac{\partial F}{\partial J_3}$ dépendent de $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ car J_2 et J_3 sont liés à θ .

Par définition de l'angle θ , on a :

$$\sin 3\theta = -\frac{3}{2} \sqrt{3} J_2 (J_2)^{-\frac{3}{2}} \dots\dots\dots (2-86)$$

On déduit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_2} = -\frac{\text{tg} 3\theta}{2J_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial J_3} = +\frac{\text{tg} 3\theta}{3J_2} \dots\dots\dots (2-87)$$

On peut donc obtenir les dérivées des critères par rapport aux trois invariants I_1, J_2, J_3 . Les résultats sont résumés dans le tableau 1 :

Critère	$\frac{\partial F}{\partial I_1}$	$2\sqrt{J_2} \frac{\partial F}{\partial J_2}$	$J_2 \frac{\partial F}{\partial J_3}$
Tresca	0	$2\cos\theta (1+\text{tg}\theta\text{tg}3\theta)$	$\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos 3\theta}$
Von Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr-Coulomb	$\text{Sin}\theta/3$	$\cos\theta \left[1+\text{tg}\theta\text{tg}3\theta + \frac{\sin\theta(\text{tg}3\theta-\text{tg}\theta)}{\sqrt{3}} \right]$	$\frac{\sqrt{3}\sin\theta + \sin\theta\cos\theta}{2\cos 3\theta}$
Drucker-Prager	μ	1	0

Tableau 1 : Dérivées des critères par rapport aux invariants

Ces dérivées peuvent être obtenues de la même manière pour n'importe quel autre critère.

En utilisant les expressions des invariants (2-40) on peut obtenir leurs dérivées partielles par rapport aux différentes composantes du vecteur des contraintes.

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = [s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}]^T$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left[s_y s_z - \tau_{zy}^2, \frac{J_2}{3} s_x - \tau_{xz}^2, \frac{J_2}{3} (\tau_{xz} - s_y \tau_x)_{yz}, 2(\tau_{xz} - s_y \tau_y)_{xz}, 2(\tau_{yz} - s_x \tau_z)_{xy} \right] \dots$$

..... (2-88)

II.2.13 Points singuliers de la surface d'écoulement :

Les critères de Tresca et de Mohr-Coulomb comportent des points singuliers ($\theta = \pm 30^\circ$) pour lesquels les gradients $\frac{\partial F}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial J_2}, \frac{\partial F}{\partial J_3} \right\}$ sont indéterminés. Pour

contourner cette difficulté, il suffit de retourner aux expressions initiales des critères en prenant $\theta = \pm 30^\circ$ (Koitier)

Pour le critère de Tresca, l'expression donne une valeur égale à celle du critère de Von Mises. Cela revient à remplacer les zones de coin par l'arc de cercle de Von Mises.

Pour le critère de Mohr-Coulomb, les dérivées $\frac{\partial F}{\partial J_2}$ et $\frac{\partial F}{\partial J_3}$ deviennent comme indiqué sur le tableau 2 :

Critère	$\frac{\partial F}{\partial I_1}$	$2\sqrt{J_2} \frac{\partial F}{\partial J_2}$	$J_2 \frac{\partial F}{\partial J_3}$
Tresca	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr-Coulomb	$\sin\theta/3$	$\frac{1}{3} \left[\sqrt{3} - \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} \right] + 3\theta$ 0	0
		$\frac{1}{3} \left[\sqrt{3} + \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} \right] - 3\theta$ 0	

Tableau 2 : Dérivées des critères aux points singuliers ($\theta = \pm 30^\circ$)

FORMULATION EN ELEMENTS FINIS

III.1 Concept d'élément fini ^[45] :

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensemble aux géométries les plus diverses : barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives.

Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formation de la théorie de l'élasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques).

Cependant, il est bien d'autres types de structures où l'opération de discrétisation n'est pas aussi immédiate ; pour les problèmes de coques ou de plaques par exemple.

Il faut alors utiliser des techniques d'approximation appropriées.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, on étudie un modèle discret basé sur une subdivision du domaine continu en sous domaines de forme géométrique simple que l'on appellera "élément fini" interconnectés en des points remarquables appelés "nœuds".

De plus, on définit dans chaque élément une approximation adéquate de la solution permettant de résoudre le problème en fonction uniquement des valeurs de la solution aux nœuds.

III.2 Modèle déplacement :

Dans la démarche fondamentale de la méthode des éléments finis, il faut distinguer trois aspects :

- la discrétisation de la structure en éléments.
- le choix d'une approximation pour chaque élément.
- le choix de coordonnées généralisées «physiques» (déplacements nodaux) pour chaque élément.

III.3 Concept d'élément isoparamétrique :

Dans la formulation isoparamétrique, les fonctions de forme sont définies pour quelques éléments principaux (exp. carré, cube) avec les coordonnées locales $\xi \in [-1, 1]$.

L'élément principal est ensuite projeté en l'élément réel par une transformation isoparamétrique.

Les caractéristiques principales de la transformation isoparamétrique sont telles que la même fonction de forme $[N]$ est utilisée en déplacement et en géométrie.

$$x(\xi, \mu) = \sum_{i=1}^{nd} N_i(\xi, \mu) x_i \dots \dots \dots (3-1)$$

$$U(\xi, \mu) = \sum_{i=1}^{nd} N_i(\xi, \mu) U_i$$

Le système de coordonnées intrinsèques μ et ξ est placé au centre de l'élément. Dans cette formulation, les éléments courbes et distordus peuvent être considérés facilement. En plus la méthode est plus amenable à l'intégration numérique. Dans une formulation isoparamétrique, les fonctions de forme sont explicitement définies en terme de coordonnées locales, ainsi leurs dérivées en respectant les coordonnées globales sont calculées comme suit :

$$N = J_{ij}^{-1} \frac{\partial N}{\partial \xi_i} \quad \text{où} \quad J_{ij} = \frac{\partial N}{\partial \xi_i} x_j \dots\dots\dots (3-2)$$

Dans laquelle le signe (-) en exposant indique l'inversion de la matrice.

J_{ij} : Sont les éléments du Jacobien.

En plus, l'élément de volume est calculé comme suit :

$$dv = \pi^{nsd}_i dx_i = |J| \pi^{nsd}_i d\xi_i \dots\dots\dots (3-3)$$

Ou : $|J|$ Indique le déterminant.

π : Indique le produit.

$n s d$: Indique la dimension de l'espace.

En utilisant les équations (3-2) et (3-3), toutes les intégrales peuvent être transformées à la forme générale suivante :

$$\int_V f(x) dv = \int_{-1}^{+1} f(\xi) |J| d\xi \dots\dots\dots (3-4)$$

Cette intégrale peut être calculée par intégration numérique.

III.4 Les expressions des éléments finis :

Les expressions fondamentales nécessaires pour la solution peuvent être une autre fois obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels.

Considérer le solide dans lequel les contraintes internes σ , les charges distribuées / volume unités b et les forces extérieures appliquées f forment un champ équilibré, pour supporter un déplacement virtuel arbitraire schématisé par δd^* qui résulte en une déformation compatible $\delta \epsilon^*$ et un déplacement interne δu^* . Puis le principe des travaux virtuels nécessite que :

$$0 = \int_{\Omega} (\delta \epsilon^{*T} \sigma - \delta U^{*T} b) d\Omega - \delta d^{*T} f \dots\dots\dots (3-5)$$

Puis l'élément fini normal discrétisant la procédure même aux expressions suivantes pour les déformations et les déplacements à l'intérieur de n'importe quel élément :

$$\delta \epsilon^* = B \delta d^*, \quad \delta U^* = N \delta d^* \dots\dots\dots (3-6)$$

ou N et B sont respectivement la matrice usuelle des fonctions de forme et la matrice des déformations élastiques puis le traitement d'assemblage élémentaire donne :

$$\int_{\Omega} \delta d^{*T} (B^T \sigma - N^T b) d\Omega - \delta d^{*T} f = 0 \dots\dots\dots (3-7)$$

Où :

Le volume d'intégration sur le solide est la somme des contributions d'éléments individuels

Ainsi cette expression doit rester juste pour n'importe quelle valeur arbitraire de δd^*

$$\int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega - f - \int_{\Omega} N^T b d\Omega = 0 \dots\dots\dots (3-8)$$

Pour la solution des problèmes non linéaires, la formule (3-20) ne sera pas généralement satisfaite à n'importe quel stade de calcul et :

$$\Psi = \int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega - (f + \int_{\Omega} N^T b d\Omega) \neq 0 \dots\dots\dots (3-7)$$

Ψ : est le vecteur des forces résiduelles pour une situation élasto-plastique, l'épaisseur du matériau varie continuellement et la relation incrémentale contraintes déformations est donnée instantanément par : $d\sigma = D_{ep} d\varepsilon$

Dans le but d'évaluer la matrice de rigidité tangentielle K_t du matériau à n'importe quelle étape, la forme incrémentale de (3-7) doit être employée. Ainsi, en incrément de charge, on a :

$$\Delta\Psi = \int_{\Omega} B^T \Delta\sigma d\Omega - (\Delta f + \int_{\Omega} N^T \Delta b d\Omega) \dots\dots\dots (3-8)$$

En substituant pour $\Delta\sigma$, on a :

$$\Delta\Psi = K_T - (\Delta f + \int_{\Omega} N^T \Delta b d\Omega) \dots\dots\dots (3-9)$$

$$K_T = \int_{\Omega} B^T D_{ep} B d\Omega \dots\dots\dots (3-10)$$

L'expression (3-10) est essentiellement identique à ($\Psi = H \varphi + f \neq 0$).

III.5 Plaques en flexion ^[43]:

III.5.1 Introduction :

Les plaques sont des structures complexes mais d'un emploi assez courant. L'assimilation du solide tridimensionnel à une plaque passe par des hypothèses de nature cinématique et statique établissant une correspondance entre le comportement de tout le solide et celui d'une surface moyenne. Cette surface moyenne peut être déduite de considérations purement géométriques (plaques excentrées) ou de considérations à la fois géométriques et matérielles. Dans le cas d'une plaque

multicouche (plaque constituée d'un empilement de couches de propriétés différentes), la surface moyenne peut être définie dans le but de découpler les effets membranaires et flexionnels qui sont habituellement corrélés.

III.5.2 Théories des plaques en flexion :

III.5.2.1 Hypothèses fondamentales :

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres et qui généralement comporte un plan de symétrie.

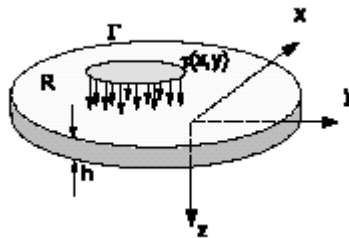


Figure 3.1 : Géométrie de la plaque et forces extérieures

Dans le cas d'un problème de plaques en flexion on applique des charges normales à la surface moyenne, dans la direction z . Ces forces appliquées provoquent une flexion dans la plaque avec un déplacement de la surface moyenne dans la direction z , ce déplacement est habituellement appelé flèche et est noté par w . Le problème de la flexion des plaques formulé par la théorie classique des plaques est l'équivalent en deux dimensions du problème de la poutre de Bernoulli Euler.

Les hypothèses de la théorie classique des plaques sont les suivantes :

- l'hypothèse selon laquelle tout vecteur, initialement normal à la surface moyenne, reste normal dans la déformation (hypothèse de Love Kirchhoff dite de conservation des normales). Cette hypothèse est utilisée pour les plaques minces sans prise en compte des déformations de cisaillement transversal (théorie classique des plaques).

A cela, il faut ajouter l'hypothèse statique qui permet de supposer que la plaque travaille en contraintes planes.

Il est également admis qu'il n'y a pas de variation dans l'épaisseur des plaques

Il convient de noter qu'il existe d'autres théories des plaques qui ne requièrent pas toutes hypothèses de la théorie classique des plaques.

L'hypothèse de la théorie classique des plaques permet de supposer que le mouvement de tous les points se trouvant sur la normale à la surface moyenne est le même, c'est à dire que :

$$W(x, y, z) = w(x, y) \dots\dots\dots (3-11)$$

La figure (3.1) donne une illustration du sens des hypothèses concernant la déformation d'une plaque dans le plan parallèle au plan xz .

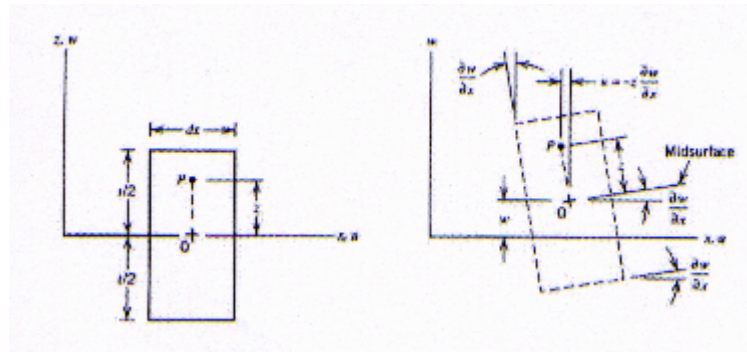


Figure 3.2 : déflexion de la surface neutre d'une plaque mince.

La figure montre que la normale à la surface moyenne de la plaque subit une translation dans la direction verticale ayant la valeur w et subit aussi une rotation égale à la déformée $\partial w / \partial x$ de la surface moyenne. Le déplacement u dans la direction d'un point se trouvant sur la normale de la plaque peut être écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \dots\dots\dots(3-12)$$

Le déplacement v dans la direction y sera lui aussi défini de la même manière :

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \dots\dots\dots(3-13)$$

Les équations (3-12) (3-13) définissent les trois composantes des déplacements en n'importe quel point dans la plaque en fonction de la flèche latérale w de la surface moyenne.

Une fois les composantes de déplacement définies, les déformations sont données par

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3-14)$$

Et les trois autres déformations ε_z , γ_{yz} et γ_{zx} sont nulles.

Les trois autres déformations qui ne sont pas égales à zéro sont définies par (3-14) et sont celles qui existent dans une analyse en contraintes planes, les contraintes correspondantes σ_x , σ_y , τ_{xy} peuvent être obtenues à partir de ces déformations via la matrice d'élasticité E définie par l'équation suivante :

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-15)$$

Ceci implique que les couches minces de la plaque (d'épaisseur dz) sont dans un état de contraintes planes. Les contraintes planes sont données alors par :

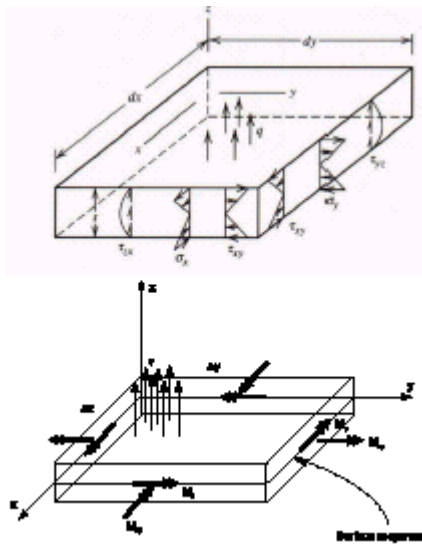
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_z &= \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-16)$$

Les contradictions existantes dans la théorie classique des plaques sont le prix à payer pour avoir une solution simple mais heureusement que leurs effets sont négligeables sur la précision de la solution quand on considère la théorie des petites déformations. Comme pour le cas de la flexion des poutres minces (élancées) il est de tradition et par convenance dans l'analyse des plaques de travailler en termes de moments (moments de flexion et de torsion) des forces de cisaillement au lieu des contraintes; de plus il est d'usage de considérer des moments et des forces par unité de longueur. Les quantités qui contribuent à l'énergie de déformation de la plaque déformée sont les moments de flexion et de torsion. Pour déterminer les expressions pour ces quantités, on considère la figure (3.2) qui montre les contraintes qui s'appliquent à la couche de la plaque. Par commodité, les dimensions latérales de la couche de la plaque sont prises égales à unité. Les moments de flexion par unité de longueur sont :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \dots\dots\dots (3-17a)$$

Et additionnellement la présence de la contrainte tangentielle τ_{xy} donnera naissance à un moment de torsion par unité de largeur qui est défini comme suit :

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \dots\dots\dots (3-17b)$$



Les forces transversales de cisaillement ne contribuent pas à l'énergie de déformation dans la théorie classique des plaques puisque les déformations de cisaillement correspondantes sont égales à zéro. Néanmoins elles existent et elles sont données par les formules :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}.dz \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}.dz \dots\dots\dots (3-18)$$

En réalité Q_x et Q_y peuvent être reliés aux moments en utilisant les équations d'équilibre par les relations :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \dots\dots\dots (3-19)$$

Et donc peuvent être évaluées une fois M_x , M_y et M_{xy} définies. Pour évaluer les moments de flexion et de torsion en fonction des dérivées secondes de w , nous substituons les équations (3-16) dans les équations (3-17) avec comme résultat :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-20)$$

Où

$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \dots\dots\dots (3-21)$$

La quantité D est la rigidité flexionnelle de la plaque (l'équivalant à EI dans la théorie des poutres. Les dérivées secondes de w qui interviennent ici sont liés aux courbures

directes χ_x et χ_y dans les directions x et y et à la courbure de torsion χ_{xy} de la surface moyenne déformée. Ces quantités sont définies comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3-22)$$

Sous forme matricielle on aura une matrice colonne des moments :

$$\sigma_p = \{M_x, M_y, M_{xy}\} \dots\dots\dots(3-23)$$

Et une matrice colonne de courbures :

$$\varepsilon_p = \{\chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}\} \dots\dots\dots(3-24)$$

En utilisant les équations (3-20) et (3-22), les relations moments courbures deviennent:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-25)$$

Or

$$\sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_p \dots\dots\dots(3-26)$$

Il est à noter que l'énergie de déformation du corps élastique ou uniquement les contraintes et les déformations directes dans les directions x et y et ou les contraintes et les déformations de cisaillement dans la plan x y sont importantes, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \iiint_{V_0} [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} .dx.dy.dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \sigma^T \varepsilon .dx.dy.dz = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \varepsilon^T .E.\varepsilon .dx.dy.dz \dots\dots\dots (3-27) \end{aligned}$$

Ou V_0 c'est le volume de solide, E est définie par équation (3-15) et les déformations sont données par les équations (3-14). En utilisant les pseudo contraintes et déformations, l'expression de l'énergie devient :

$$U_p = \frac{1}{2} \iint_{A_0} \varepsilon_p^T \cdot E_p \cdot \varepsilon_p \cdot dx \cdot dy \dots\dots\dots (3-28)$$

Où A_0 est l'aire de la surface moyenne de la plaque. E_p est définie par l'équation (3-26), et les pseudo déformations sont données par les équations (3-24). A partir de l'expression de l'énergie de déformation [équation (3-28)], il sera facile d'établir une expression pour la matrice de rigidité de n'importe quel élément de plaque.

Les charges appliquées agissent dans la direction z et peuvent être des forces de volume ou de surface. Dans la théorie des plaques les charges telles que $q(x,y)$ montrée dans la figure (3.1) sont supposées agir sur la surface moyenne de la plaque de telle sorte que les deux types de forces peuvent être traitées de la même manière. Si $q(x,y)$ est la force par unité de surface agissant sur de la surface moyenne, l'énergie potentielle V_{pd} correspondante est donnée par :

$$V_{pd} = \iint_{A_0} q(x, y) \cdot w(x, y) \cdot dx \cdot dy \dots\dots\dots (3-29)$$

Pour les problèmes des plaques les conditions aux limites géométriques pour des types de support sont souvent fonction de w et de ses dérivées premières. Deux types de côtés peuvent être définis :

Côté simplement appuyé (aucun déplacement mais la rotation est possible) :

$$w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0 \dots\dots\dots (3-30)$$

Côté encastré (il n'y a ni déplacements ni rotations) :

$$w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0 \dots\dots\dots (3-31)$$

L'équation différentielle des plaques minces classiques sous l'effet d'une charge uniforme est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \dots\dots\dots (3-32)$$

III.6 Eléments basés sur la théorie de Mindlin/Reissner :

III.6.1 Introduction :

La théorie classique des plaques (théorie de Kirchhoff) néglige les déformations dues au cisaillement. Cependant, pour les plaques épaisses, il a été établi que les déformations de cisaillement sont très importantes. La théorie des plaques épaisses ou théorie de Mindlin propose une alternative plus réaliste que la théorie de Kirchhoff et prend en compte les déformations de cisaillement.

Les hypothèses utilisées dans la théorie de Mindlin sont :

- 1) Le déplacement de la surface médiane de la plaque est petit ;
- 2) Les contraintes normales transversales sont négligées et ;

3) La normale à la surface moyenne des plaques demeure droite après déformation mais pas nécessairement normale comme indiquée sur la (figure 3 - 3).

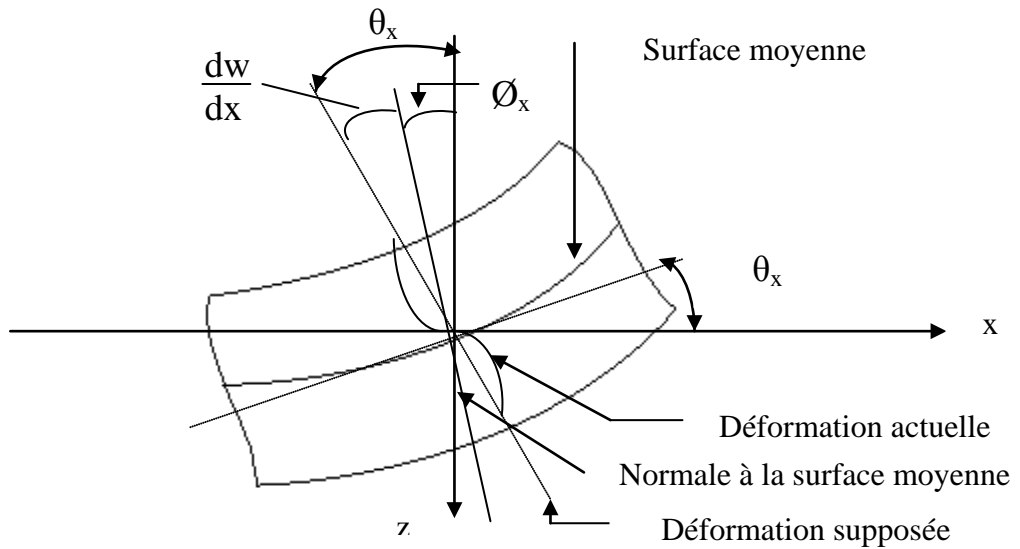


Figure 3.3 : Déformation des plaques basées sur la théorie de Mindlin

Le champ de déplacement peut être exprimé comme suit :

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \theta_x(x, y, z) \\ v &= -z \theta_y(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-33)$$

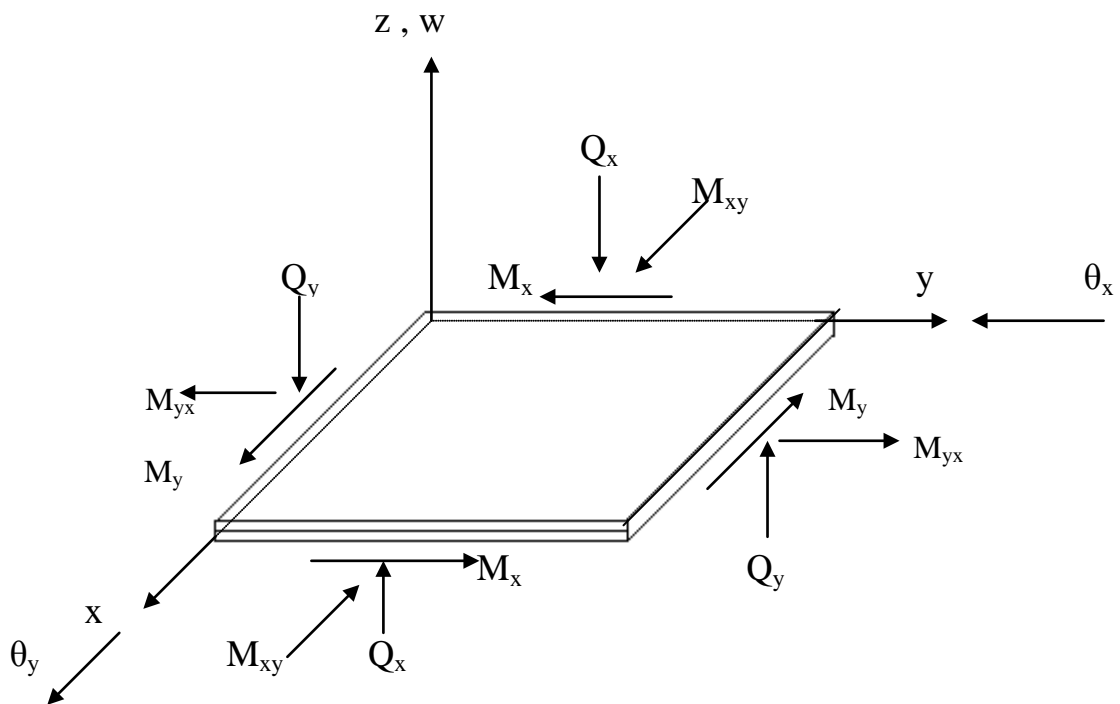


Figure 3.4 : Élément de Mindlin

Où u , v et w sont les composantes des déplacements dans les directions x , y et z respectivement et θ_x et θ_y sont les rotations normales dans les plans xz et yz respectivement comme indiqué sur la figure (3.4).

D'après les hypothèses de Mindlin, θ_x et θ_y sont données par :

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x} - \varnothing_x \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} - \varnothing_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-34)$$

Où \varnothing_x et \varnothing_y sont les rotations transversales dues au cisaillement.

Les déformations flexionnelles qui varient à travers l'épaisseur sont données par :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= -z \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-35)$$

Où bien :

$$[\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}] = [\epsilon_f]^T \dots\dots\dots (3-36)$$

Les déformations de cisaillement sont constantes sur toute la hauteur de la section et peuvent être écrites comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-37)$$

Où bien

$$[\gamma_{xz}, \gamma_{yz}] = [\epsilon_c]^T \dots\dots\dots (3-38)$$

Le déplacement et les rotations en n'importe quel point d'un élément peuvent s'exprimer comme suit :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} \begin{Bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-39)$$

Où bien

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{nn} \{N_i\} \{u_i\} \dots \dots \dots (3-40)$$

Où u_i sont les valeurs nodales w , θ_x et θ_y respectivement au nœud i de l'élément et nn est le nombre de nœuds de chaque élément. Les N_i sont les fonctions de forme associées avec le nœud i et sont exprimées en termes du système de coordonnées local naturel (ζ, η) , $N_i \equiv N_i(\zeta, \eta)$.

Dans une formulation isoparamétrique, les coordonnées de n'importe quel point x et y dans l'élément peuvent être décrites par les mêmes fonctions d'interpolation $N_i(\zeta, \eta)$.

La relation déformation déplacement peut être exprimée sous la forme :

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^{nn} \{B_i\} \{u_i\} \dots \dots \dots (3-41)$$

Où :

$$\{B_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (3-42)$$

Le tenseur de déformation se compose de deux parties :

Une partie flexionnelle définie comme suit :

$$\{\varepsilon_f\} = \sum_{i=1}^{nn} \{B_{fi}\} \{u_i\} \dots \dots \dots (3-43)$$

Où B_{fi} est la matrice courbure – déplacement

$$\{B_{fi}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (3-44)$$

Et une partie de cisaillement donnée par :

$$\{ \varepsilon_c \} = \sum_{i=1}^{nn} \{ B_{ci} \} \{ u_i \} \dots \dots \dots (3-45)$$

Où : B_{ci} : est la matrice de déformation déplacement de cisaillement

$$\{ B_{ci} \} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_i}{\partial x} - N_i & 0 & \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3-46)$$

Les Matrices de rigidité élémentaires sont données par :

$$[K_f] = \int_V [B_f]^T [D_f] [B_f] dV \dots \dots \dots (3-47)$$

$$[K_c] = \int_V [B_c]^T [D_c] [B_c] dV \dots \dots \dots (3-48)$$

Où l'équation (3-47) représente la contribution flexionnelle alors que l'équation (3-48) représente celle du cisaillement.

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad D_c = \frac{Ehk}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k est un coefficient de correction de cisaillement égal à 5/6 pour un matériau isotrope.

III.7 Plasticité dans les plaques unicouches:

Dans l'analyse élasto-plastique unicouche de la plaque de Mindlin, nous supposons que quand le moment atteint la valeur de plastification M_0 , toute la section de la plaque devient plastique instantanément. Alors nous supposons que la fonction de plasticité F est fonction des moments de flexion σ_f , mais pas fonction des forces de cisaillement σ_c . La fonction de plasticité est aussi supposée être en fonction du paramètre de dureté H. Durant la plastification on suppose que σ_f doit rester sur la surface de plasticité alors:

$$F(\sigma_f, H) = 0$$

Ainsi (M_x, M_y, M_{xy}) remplacent $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ et $M_0 = \sigma_0 h^2 / 2$ remplace σ_0 le reste ne change pas et sera comme indiqué au chapitre précédent.

Les relations incrémentales de contrainte déformation sont données par:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_f \\ d\sigma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_{ep})_f & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_f \\ d\varepsilon_c \end{bmatrix}$$

Dans lesquelles:

$$(D_{ep})_f = \begin{bmatrix} D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \\ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A \end{bmatrix}$$

Le travail virtuel peut être exprimé par:

$$\int_A \left[(\delta \varepsilon_f)^T \cdot \sigma_f + (\delta \varepsilon_c)^T \cdot \sigma_c - (\delta u)^T \cdot h \right] dA = 0$$

On aura donc un système d'équations non linéaires, de la forme:

$$K \cdot u - F = 0 \quad \text{où} \quad \Psi_i(d) = 0.$$

La forme incrémentale des équations d'équilibre de la plaque durant l'incrément de charge est :

$$\Psi(d^p) + K_T(d^p) \cdot \Delta d^p = 0$$

La matrice de rigidité tangentielle est donnée par:

$$K_T(d^p) = \int_A \left\{ [B_f]^T [D_{ep}]_f B_f + [B_c]^T D_c B_c \right\} dA$$

Les contributions au vecteur force résiduelle $\Psi = [\Psi_1^T, \dots, \Psi_n^T]^T$ seront évaluées à chaque niveau élémentaire puis assemblées pour former Ψ .

III.8 Résumé du procédé de résolution:

1- Mettre le numéro d'itération $i=1$.

2- Résoudre $\Delta d^i = -[K_T]^{-1} \cdot \Psi^i$

3- Mettre $d^{i+1} = d^i + \Delta d^i$

4- Pour chaque point de Gauss, évaluer les incréments de déformation:

$$\Delta \varepsilon_f^i = z \cdot B_f \cdot \Delta d^i \quad \Delta \varepsilon_c^i = B_c \cdot \Delta d^i$$

5- Utilisant les rigidités élastiques, estimer, à chaque point de Gauss, les incréments de contraintes et les contraintes résultantes:

$$\Delta \sigma_f^i = D_f \cdot \Delta \varepsilon_f \quad \text{et} \quad \sigma_f^{i+1} = \sigma_f^i + \Delta \sigma_f^i$$

$$\Delta \sigma_c^i = D_c \cdot \Delta \varepsilon_c \quad \text{et} \quad \sigma_c^{i+1} = \sigma_c^i + \Delta \sigma_c^i$$

6- A chaque point de Gauss dépendant de l'état de σ_f^i et de σ_f^{i+1} , ajuster σ_f^{i+1} pour satisfaire le critère de plasticité et préserver la condition de normalité.

7- Evaluer le vecteur force résiduelle:

$$\Psi^{i+1} = \int_A \left\{ [B_f]^T \cdot \sigma_f + [B_c]^T \sigma_c \right\} dA - f$$

8- Si la solution converge, continuer, sinon mettre $i=i+1$ et aller à 2

9- Aller à l'incrément de charge prochain.

III.9 Fonctions de forme des éléments isoparamétriques utilisés ^{[46], [49]} :

III.9.1 Quadrangle à 4 nœuds (Q4) :

Les fonctions de forme s'écrivent

$$N_i^e = \frac{1}{4(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)} \dots\dots\dots (3-49) \quad \text{avec } i = 1, 2, 3, 4.$$

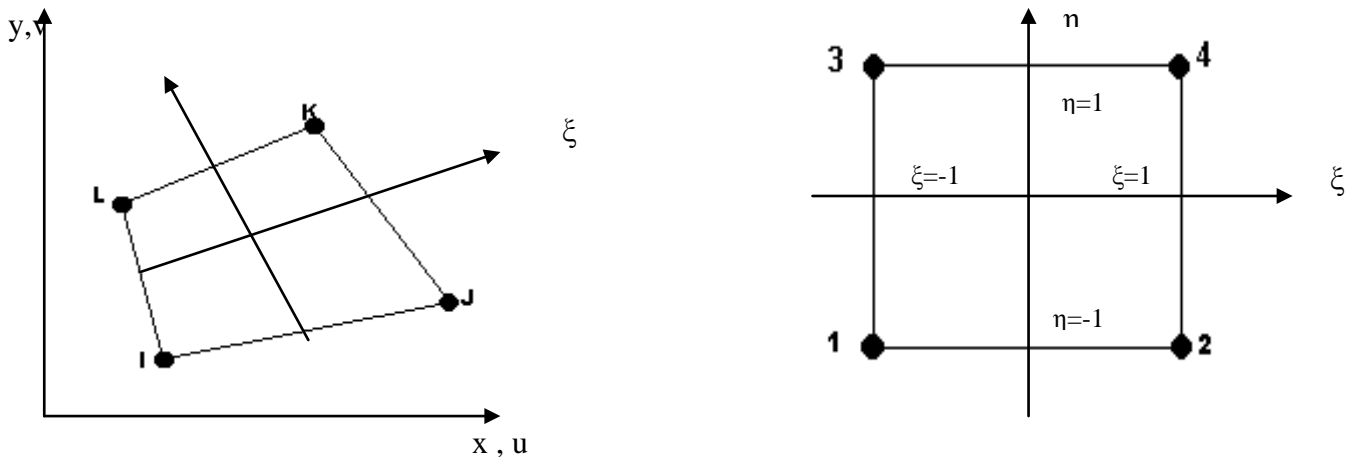


Figure 3.5 : Quadrangle à 4 nœuds

Avec $\xi_p, \eta_p = \pm 1$ coordonnées des nœuds 1, 2, 3, 4 dans l'espace parent.

Les coordonnées et déplacements sont :

$$\begin{aligned} x \text{ (ou } y) &= N_1x_i \text{ (ou } y_i) + N_2x_j + N_3x_k + N_4x_l \\ u \text{ (ou } v) &= N_1u_i \text{ (ou } v_i) + N_2u_j + N_3u_k + N_4u_l \end{aligned} \dots\dots\dots (3-50)$$

La base étant : u ou $x = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta$

III.9.2 Quadrangle à 8 nœuds (Q8) :

Cet élément peut être enrichi de deux façons : hiérarchique ou naturelle. Les fonctions ajoutées sont :

$$\begin{aligned} N_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_6 &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8 &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \end{aligned}$$

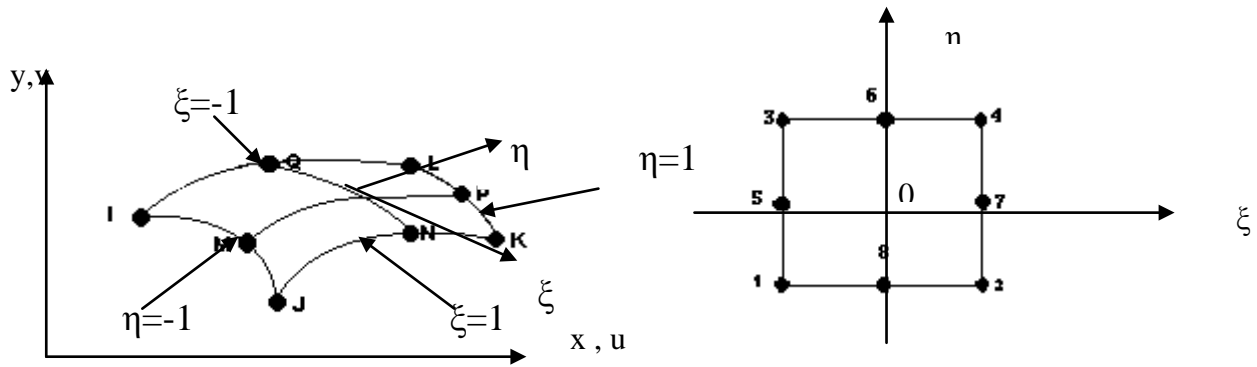


Figure 3.6 : Quadrangle à 8 nœuds

En liaison avec (3-49), les fonctions de forme pour l'élément quadrilatère de Serendip à huit nœuds aux côtés courbes et avec une variation quadratique du champ de déplacement à l'intérieur de l'élément sont les suivantes :

Nœuds aux sommets :

$$N_i^e = 1/4(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \dots \dots \dots (3-51a) \quad i = 1, 3, 5, 7$$

Nœuds médians :

$$N_i^e = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi \xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta \eta_i)(1 - \xi^2) \dots \dots \dots (3-51b) \quad i = 2, 4, 6, 8$$

III.9.3 Quadrangle à 9 nœuds (Q9) :

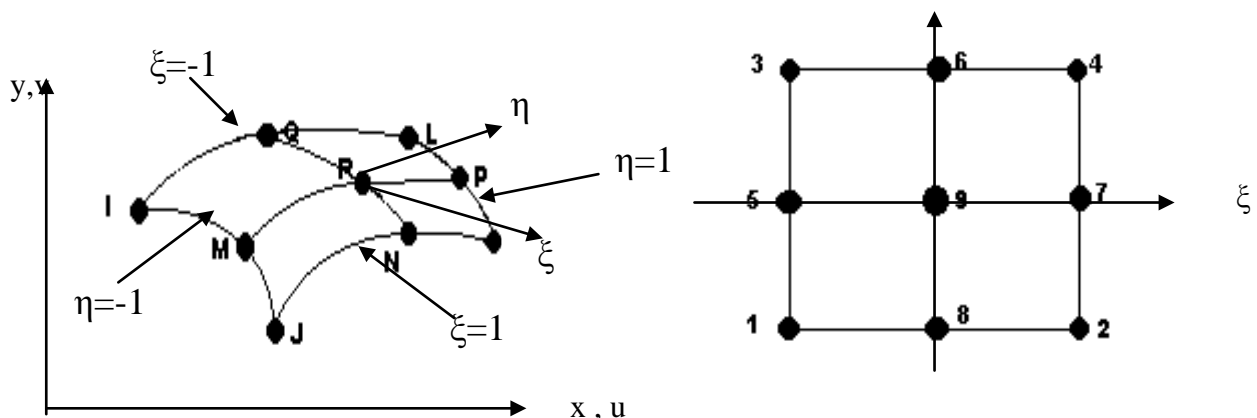


Figure 3.7 : Quadrangle à 9 nœuds

Il est toujours possible de raffiner une approximation nodale ; il suffit pour cela d'augmenter le nombre des points d'approximation, ce qui permet d'augmenter le nombre des termes de la base polynomiale associée, les fonctions de forme gardant évidemment toutes leurs propriétés.

Pour tous ces éléments il existe deux familles polynomiales, dites de Lagrange (L) ou de Serendip (S). La famille de Lagrange utilise le polynôme en ξ et η le plus complet possible en respectant la symétrie (en ξ , η) obligée des termes et en utilisant des nœuds intérieurs, tandis que celle de Serendip n'obéit pas à des règles strictes, sinon celles de minimiser le degré de l'approximation et de n'utiliser, si possible, que les nœuds de contour.

Alors les fonctions de forme sont :

Nœuds aux sommets :

$$N_i^e = \frac{1}{4(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i)} \dots\dots (3-52a) \quad i = 1, 3, 5, 7$$

Nœuds médians:

$$N_i^e = \frac{\xi_i^2}{2}(\xi^2 - \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(\eta^2 - \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \dots\dots (3-52b) \quad i = 2, 4, 6, 8$$

L'élément de Lagrange Q9, utilise la fonction bulle ou interne au nœud central :

$$N_i^e = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \dots\dots\dots (3-52c)$$

III.10 Élément Hétérosis pour la plaque de Mindlin ^[50]:

III.10.1 Introduction :

L'élément Hétérosis à 9 nœuds a été développé par Hughes. L'idée de base qui a mené à son développement c'est que le faux mode énergie nulle est éliminé si les fonctions de forme de Serendip pour 8 nœuds sont utilisées pour le déplacement transversal w . L'élément Hétérosis est donc formulé en utilisant les fonctions de forme de Lagrange à 9 nœuds pour les rotations (ψ_x et ψ_y) et les fonctions de forme de Serendip pour le déplacement latéral w . L'élément Hétérosis, qui a de bonnes caractéristiques, a donné constamment de bonnes performances que l'élément « parent » dans une large gamme de problèmes. Quand il est utilisé avec une intégration sélective, le problème de verrouillage est écarté pour toutes les plaques minces. Il est de rang correct.

III.10.2 Formulation hiérarchique de l'élément Hétérosis :

Dès lors il est utile de faire des recherches dans le but de rendre effectifs les éléments de Serendip à 8 nœuds et les éléments de Lagrange à 9 nœuds comme l'élément Hétérosis de Mindlin. Il est plus convenant d'adopter une formulation hiérarchique pour représenter tous les degrés de liberté. Donc, pour des éléments type e les fonctions d'interpolation de Serendip suivantes sont adoptées pour les nœuds de 1 à 8 :

Pour les nœuds des sommets $i = 1, 3, 5, 7$

$$N_i^e = \frac{1}{4} (1+\xi \xi_i)(1+\eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \dots\dots\dots(3-53)$$

Pour les nœuds du milieu i = 2, 4, 6, 8

$$N_i^e = \frac{\xi_i^2}{2} (1+\xi \xi_i) (1-\eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1+\eta \eta_i) (1-\xi^2) \dots\dots\dots(3-54)$$

Et pour le 9^{ème} nœud on utilise la fonction suivante :

$$N_9^e(\xi, \eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \dots\dots\dots (3-55)$$

Alors, les degrés de liberté hiérarchiques pour 9 nœuds sont perturbés par l'association de l'interpolation de Serendip. La formulation hiérarchique peut être utilisée pour une représentation géométrique comme pour l'interpolation du champ de déplacement.

Pour Mindlin, ni l'élément à 8 nœuds ni l'élément à 9 nœuds ou l'élément Hétérosis peut être choisi où :

- a) Pour obtenir la représentation de l'élément de Serendip à 8 nœuds, tous les degrés de liberté pour le nœud 9 sont considérés nuls.
- b) Pour obtenir un élément équivalent à la représentation de l'élément de Lagrange à 9 nœuds, tous les degrés de liberté pour le nœud 9 sont libres à gauche. Le total des déplacements au nœud 9 est calculé en utilisant l'expression :

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i^e(0,0) a_i^e + a_9^e \dots\dots\dots (3-56)$$

- c) Pour obtenir la représentation de l'élément Hétérosis, seulement l'hiérarchique déplacement latéral au nœud 9 (w_9^e) est restreint à zéro et la formule (3-56) sera utilisée pour interpréter le déplacement au nœud 9.

III.11 Intégration numérique^{[1], [45], [47]} :

III.11.1 Introduction :

Dans la solution numérique des problèmes de la mécanique des solides et structures, on est fréquemment amené à devoir évaluer des intégrales telles que :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) dx dy \text{ etc.}$$

Souvent il est difficile ou impossible de trouver les expressions exactes de ces intégrales. On peut alors les évaluer de manière approchée par une intégration numérique.

Considérons l'intégrale définie A d'une fonction f(x) entre les limites x₁ et x₂

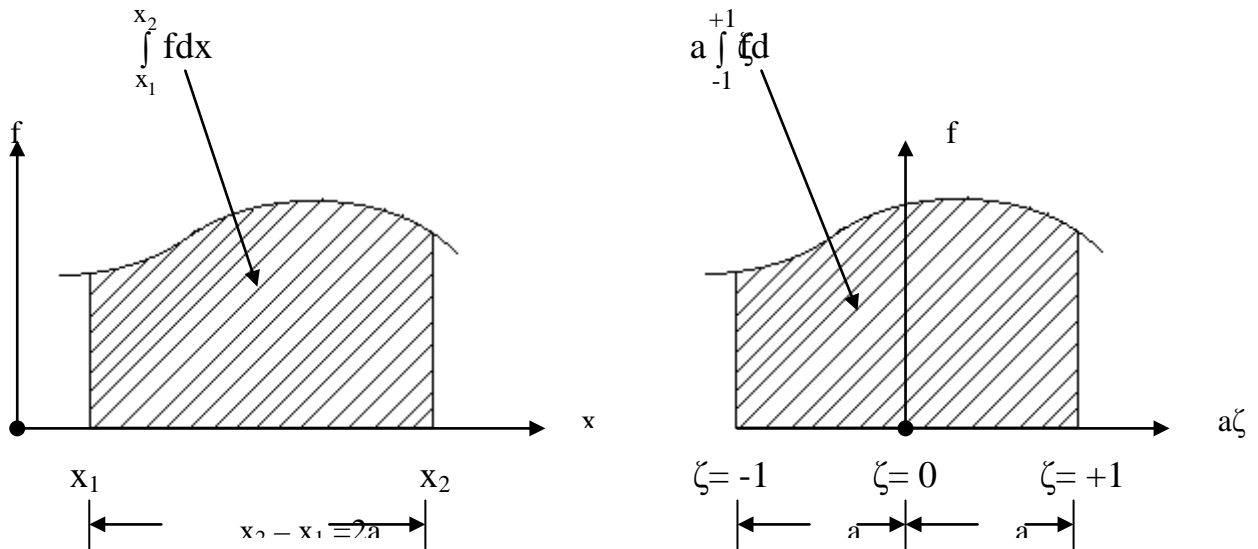


Figure 3.8 : Transformation des coordonnées pour l'intégration numérique

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f dx$$

Le calcul numérique de A est d'ordinaire plus commode si l'on déplace l'origine des coordonnées au milieu de l'intervalle $[x_1, x_2]$ et si l'on introduit une variable non dimensionnelle ζ variant entre -1 (pour $x = x_1$) et $+1$ (pour $x = x_2$) afin d'être indépendant de la demi longueur

$$a = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

De l'intervalle (figure 3.8). De la relation entre x et la nouvelle variable ζ , à savoir

$$x = x_1 + a + a\zeta$$

On tire $dx = a d\zeta$ et $\int_{x_1}^{x_2} f dx = a \int_{-1}^{+1} f(x(\zeta)) d\zeta = aI$

L'intégration numérique de l'intégrale définie

$$I = \int_{-1}^{+1} f d\zeta \dots\dots\dots (3-57)$$

consiste à sélectionner dans l'intervalle $[-1, +1]$ un certain nombre de points $i = 1, 2, 3, \dots, n$ d'abscisse ζ_i , dits points d'intégration, à calculer en ces points (c'est à dire aux points d'abscisse

$x_i = x_1 + a + a\zeta_i$) les valeurs f_i de la fonction, à pondérer ces valeurs par des coefficients w_i et à remplacer finalement l'intégrale I par la somme finie

$$I = \int_{-1}^{+1} f d\zeta \cong \sum_{i=1}^n w_i f_i \dots\dots\dots (3-58)$$

Dans les méthodes des éléments finis, la matrice élémentaire $[K]$ et le vecteur de sollicitations élémentaires $\{f\}$ s'expriment sous formes d'intégrales à une, deux ou trois dimensions, définies sur l'élément réel V^e .

On a vu que :

$$[K] = \int_{V_e} [B]^T [D][B]dv$$

Sur l'élément de référence, cette intégrale devient :

$$\left. \begin{aligned} [K] &= \int_{V_e} [B(\zeta)]^T [D(\zeta)][B(\zeta)]dv^r \\ [K] &= \int_{V_e} [K^*]dv^r \\ [K^*] &= [B(\zeta)]^T [D(\zeta)][B(\zeta)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3-59)$$

Le terme $[K^*]$ est un polynôme ou une fraction rationnelle compliquée. Son intégration n'est facile que s'il est constitué de termes polynomiaux.

Il est en général préférable d'utiliser une intégration numérique de (3-59) de la forme :

$$[K] = \sum_{i=1}^r w_i [K^*(\zeta_i)] \dots\dots\dots(3-60)$$

Où ζ_i : sont les coordonnées des r points d'intégration.

w_i : Sont les coefficients de pondération (ou poids) correspondants.

III.11.2 Intégration numérique à une dimension :

III.11.2.1 Méthode de Gauss :

La quadrature de Gauss (en anglais Gaussian quadrature) est basée sur l'intégration exacte d'une fonction polynomiale remplaçant dans l'intervalle $[-1, +1]$ la fonction f . La position des points d'intégration est considérée comme variable de sorte qu'à chacun des r points s'associent deux paramètres, f_i et ζ_i (figure 3.7). Les $2r$ paramètres définissent un polynôme de degré $m = 2r - 1$ et l'erreur est d'ordre $O(h^{2r})$ avec $h = 2/(2r - 1)$.

Remplaçons l'intégrale d'une fonction polynomiale $f(\zeta)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration ζ_i :

$$\int_{-1}^{+1} f(\zeta)d\zeta = w_1 f(\zeta_1) + w_2 f(\zeta_2) + \dots + w_i f(\zeta_i) + \dots + w_r f(\zeta_n) = \sum_{i=1}^r w_i f(\zeta_i) \dots\dots(3-61)$$

Déterminons les $2r$ coefficients de manière à ce que (3-54) soit vérifiée exactement pour le polynôme suivant :

$$f(\zeta) = a_1 + a_2 \zeta + \dots + a_{2r} \zeta^{2r-1}$$

Remplaçons cette expression dans (3-54), nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} \zeta^\alpha d\zeta = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r w_i \zeta_i^\alpha \quad \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r - 2 \\ \int_{-1}^{+1} \zeta^\alpha d\zeta = 0 = \sum_{i=1}^r w_i \zeta_i^\alpha \quad \alpha = 1, 3, 5, \dots, 2r - 1 \end{array} \right. \dots\dots\dots (3-62)$$

Ce système détermine 2 r paramètres de (3-61) sous les conditions :

$$\left. \begin{array}{l} w_i > 0 \\ -1 < \zeta_i < +1 \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Exemple :

Soit r = 2 ; l'expression (3-54) s'écrit :

$$\int_{-1}^{+1} f(\zeta) d\zeta = w_1 f(\zeta_1) + w_2 f(\zeta_2)$$

Pour que cette approximation soit exacte pour un polynôme de degré 2r - 1 = 3, il faut que le système (3-62) soit vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = w_1 + w_2 \\ 0 = w_1 \zeta_1 + w_2 \zeta_2 \\ \frac{2}{3} = w_1 \zeta_1^2 + w_2 \zeta_2^2 \\ 0 = w_1 \zeta_1^3 + w_2 \zeta_2^3 \end{array} \right.$$

La solution est :

$$w_1 = w_2 = 1; \zeta_1 = -\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ou bien si on utilise deux points d'intégration ($\xi_1 = R, \zeta_2 = -R$), on cherche à calculer l'intervalle en utilisant la formule d'intégration :

$$\begin{aligned} I_{app} &= wf(-R) + wf(+R) \\ I_{app} &= 2w(a_1 + a_3R^2) \end{aligned}$$

D'ou l'expression de l'erreur :

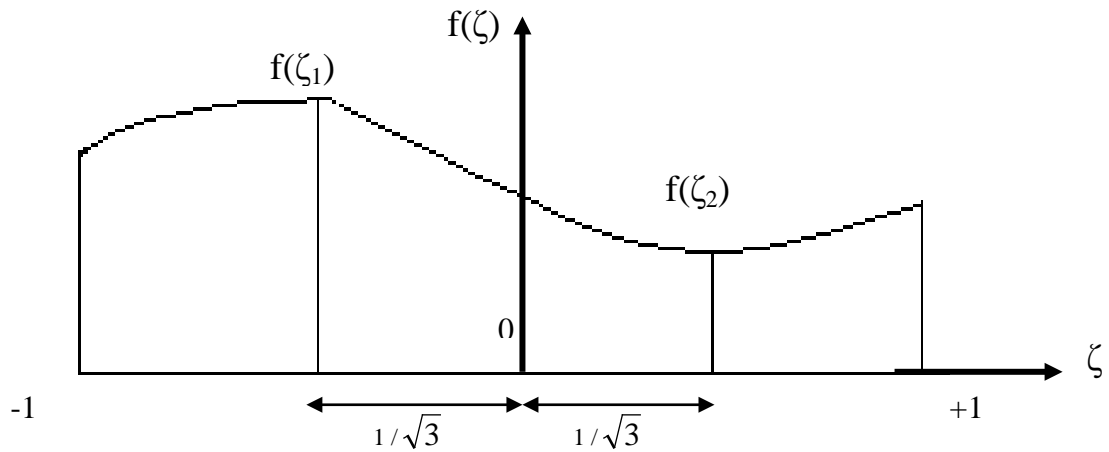
$$\varepsilon = I - I_{app} = 2a_1 (1 - w) + 2 a_3 (\frac{1}{3} - wR^2).$$

On voit alors que l'erreur s'annule quelles que soient les valeurs de a₁ et a₃ si les conditions suivantes sont respectées :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - w = 0 \\ \frac{1}{3} - wR^2 = 0 \end{array} \right.$$

On trouve le même résultat :

$$w = 1 \text{ et } R = \pm (\frac{1}{\sqrt{3}})$$

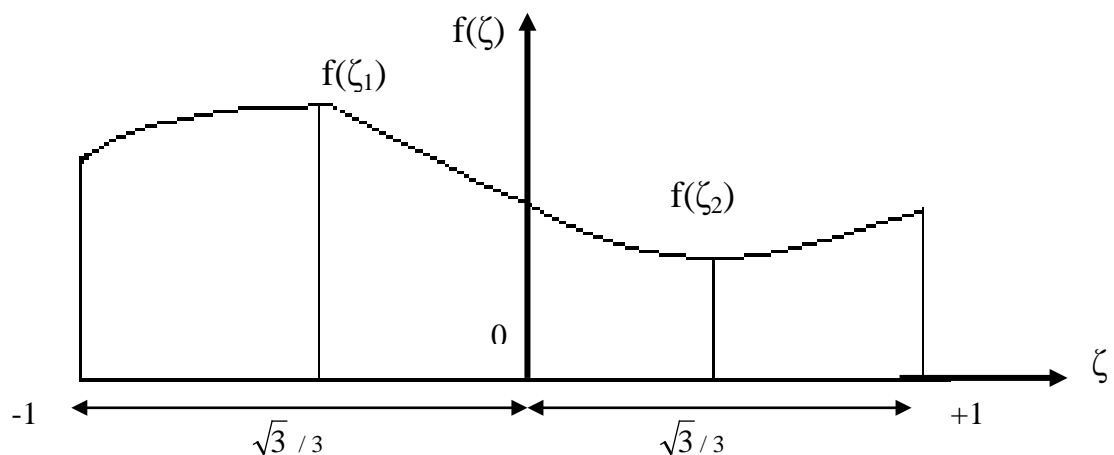


Ce raisonnement simple n'est pas utilisable dans le cas général. Cependant la solution peut être obtenue de façon explicite en utilisant les polynômes de Legendre d'où le nom de méthode de Gauss-Legendre souvent donné à cette méthode.

III.11.2.2 Méthode de Gauss-Legendre :

Soit à intégrer la fonction $f(\zeta)$:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\zeta) d\xi$$



La méthode de Gauss Legendre consiste à évaluer la fonction $f(\zeta)$ en des positions prédéterminées ζ_i et de multiplier les résultats par des coefficients de pondération W_i cette méthode permet d'intégrer des fonctions polynomiales de degré $(2r - 1)$. On dit alors que c'est une méthode à n points de Gauss.

On a donc :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\zeta) d\xi = \sum_{i=1}^r W_i f(\zeta_i)$$

Le tableau ci dessous montre les positions des points d'intégration et les coefficients de pondération des quatre premiers points de Gauss Legendre.

N	ζ_i	W_i
1	0,000000	2,000000
2	$\pm 0,577530$	1,000000
3	0,000000 $\pm 0,774597$	0,888889 0,555556
4	$\pm 0,861136$ $\pm 0,339981$	0,347855 0,652145

Tableau 3 : Point d'intégration et coefficients de pondération dans la méthode de Gauss

III.11.3 Intégration numérique pour les problèmes bidimensionnels :

Soit L'intégrale :
$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\zeta, \mu) d\zeta d\mu$$

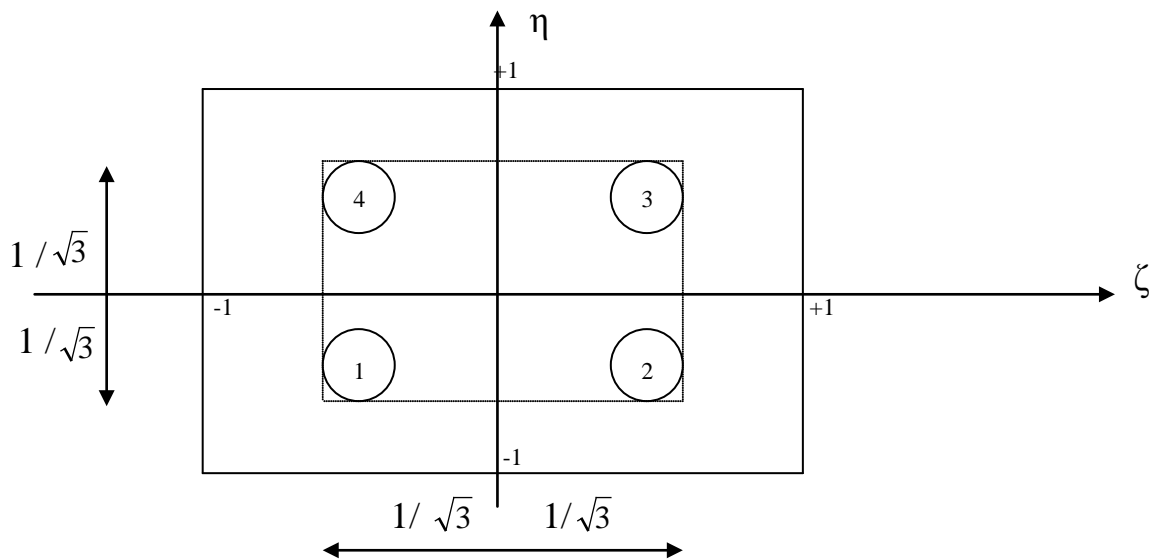
On intègre tout d'abord par rapport à ζ et ensuite par rapport à μ .
En utilisant les formules de Gauss dans le cas unidimensionnel, on a :

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_i w_i F(\zeta, \eta_i) \right] d\eta = \sum_j w_j \sum_i w_i F(\zeta_i, \eta_j) = \sum_i \sum_j w_i w_j F(\zeta_i, \eta_j)$$

Ainsi par exemple, si l'on utilise la méthode de Gauss (2 * 2) avec quatre points, on a :

$$w_i = w_j = 1 \quad \text{et} \quad \zeta_i, \eta_j = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

D'où :
$$I = F(\zeta_1, \eta_1) + F(\zeta_2, \eta_2) + F(\zeta_3, \eta_3) + F(\zeta_4, \eta_4)$$



Intégration de Gauss (2*2) pour les quadrilatères

L'extension de la méthode de Gauss aux problèmes tridimensionnels est évidente.
On obtient facilement dans ce cas :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\zeta, \eta, \xi) d\zeta d\eta d\xi$$

$$I = \sum_i \sum_j \sum_k w_i w_j w_k F(\zeta_i, \eta_j, \xi_k)$$

III.11.4 Choix du nombre de points d'intégration (ordre d'intégration) :

Le choix du nombre de points d'intégration est d'une grande importance en pratique, car d'une part, le coût de l'analyse augmente si un ordre d'intégration élevé est utilisé et d'autre part, en utilisant un ordre d'intégration réduit, les résultats obtenus peuvent être sérieusement affectés.

En pratique, on choisit le plus souvent un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul.

L'expérience a montré que l'intégration réduite peut donner de meilleurs résultats que l'intégration exacte. Par contre il existe pour chaque type d'élément un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel la matrice [K] reste singulière malgré l'introduction des conditions aux limites. Pour un élément à 8 nœuds, l'ordre d'intégration exacte est $3 * 3$ et l'intégration réduite est de $2 * 2$

Pour les éléments isoparamétriques, l'ordre de l'intégration doit permettre l'intégration exacte de $\det(J)$. Ce critère peut être insuffisant dans certains cas par exemple il conduit à utiliser un seul point pour le quadrilatère isoparamétrique, ce qui peut rendre [K] singulière lorsque le nombre d'éléments est faible. En effet, les éléments de plaques avec cisaillement transverse sont limités à la modélisation des plaques relativement épaisses, leur précision se dégrade rapidement lorsque le paramètre d'allongement de la plaque (L/h) devient grand car dans la formulation des éléments finis standards de Mindlin pour les plaques minces, le phénomène de blocage (verrouillage) apparaît quand on utilise l'intégration numérique exacte. Pour y remédier et améliorer la situation on utilisera l'intégration réduite dans le calcul des matrices de rigidité qui est une méthode récente et plus intéressante. L'intégration réduite permet d'obtenir des éléments isoparamétriques simples et performants pour les éléments de plaques avec cisaillement transverse mêmes mince et évite le verrouillage pour la plus part des éléments. Pour améliorer encore les éléments, on va utiliser une technique d'intégration sélective qui consiste à utiliser l'intégration pour évaluer la matrice de rigidité associée à l'énergie de cisaillement afin de soulager ses effets contraignants et pour le reste des termes l'intégration exacte sera employée pour tenter de conserver les exigences d'ensemble des matrices de rigidité.

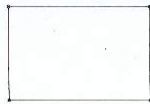

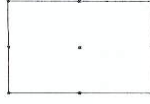

Element type		Integration rule			Shear constraints	Number of mechanisms
		Type	[k _b]	[k _s]		
	Bilinear:	Reduced:	1×1	1×1	2	4
	4 Nodes,	Selective:	2×2	1×1	2	2
	12 d.o.f.	Full:	2×2	2×2	8	0
	Serendipity:	Reduced:	2×2	2×2	8	1
	8 nodes,	Selective:	3×3	2×2	8	0
	24 d.o.f.	Full:	3×3	3×3	18	0
	Quadratic:	Reduced:	2×2	2×2	8	4
	9 nodes,	Selective:	3×3	2×2	8	1
	27 d.o.f.	Full:	3×3	3×3	18	0
	Heterosis:	Selective:	3×3	2×2	8	0
9 nodes,						
26 d.o.f.						

Tableau 4 : Méthodes de l'intégration disponibles, les contraintes de cisaillement et le nombre de mécanismes pour les éléments plaques de Mindlin.

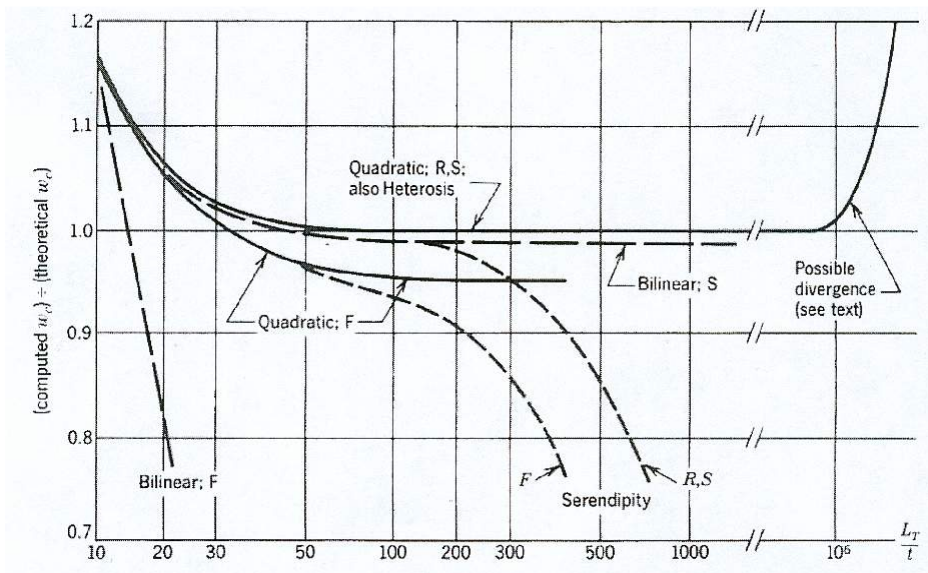


Figure 3.9 : La déflexion du centre pour les éléments plaques de Mindlin sélectionnés sur un carré uniformément chargé d'une plaque avec longueur latérale L_t et épaisseur t . (Cook, R. D., et. al. 1989) l'intégration, du tableau 1, est réduite (R), sélective(S) et complète (F)

L'élément Hétérosis récemment développé par Hughes ^[53], est un élément calculé par intégration sélective. Il est basé sur des fonctions d'interpolation de Serendip pour w et des fonctions d'interpolation de Lagrange pour θ_x, θ_y comme degrés de liberté. Ses performances sont excellentes. Il ne présente aucun mécanisme et permet la modélisation de plaques très minces ($\frac{L}{t} < 10^6$).

ANALYSE NON LINEAIRE DES STRUCTURES

IV.1 Introduction :

Les hypothèses généralement admises en analyse linéaire des structures sont :

- a- petites déformations ;
- b- interaction entre flexion et effort normal négligée ;
- c- matériau élastique linéaire ;
- d- conditions limites constantes durant le chargement.

Avec ces hypothèses, l'analyse statique d'une structure se réduit toujours à la résolution d'un système linéaire : $[K]\{U\}=\{F\}$

Avec :

$[K]$: matrice de rigidité constante et indépendante du chargement, déplacements, déformations et contraintes.

$\{U\}$: vecteur des déplacements nodaux

$\{F\}$: vecteur des forces nodales.

La linéarité se traduit par le fait que si le chargement est multiplié par un coefficient λ , alors les déplacements sont amplifiés de la même manière

$$[K]\{U\}=\{F\} \rightarrow \lambda ([K]\{U\})=\{\lambda F\}$$

$$\rightarrow [K]\{\lambda U\}=\{\lambda F\} \dots \dots \dots (4-1)$$

car $[K]$ est constante

Si cela n'est pas vérifié alors le problème est non linéaire et quelque soit la source de la non linéarité, la matrice de rigidité $[K]$ n'est plus indépendante de $\{F\}$ et de $\{U\}$.

Voyons maintenant comment interviennent les quatre hypothèses précédentes dans l'établissement d'un système linéaire $[K]\{U\}=\{F\}$.

- l'hypothèse a intervient dans l'évaluation de $[K]$ et $\{F\}$, les intégrations se font sur les volumes initiaux des éléments et la matrice B liant les déformations aux déplacements qui est constante pour chaque élément.
- L'hypothèse b influe sur la construction de la matrice $[K]$, car les rigidités flexionnelles sont indépendantes des efforts normaux.
- L'hypothèse c implique que la matrice d'élasticité D liant les contraintes aux déformations est constante.
- L'hypothèse d signifie que les relations décrivant les conditions d'appuis sont constantes.

IV.2 Sources de non linéarité :

La non linéarité peut être causée par plusieurs facteurs, ces facteurs peuvent être classés en deux groupes principaux.

- . non linéarité matérielle (ou constitutive, rhéologique)
- . non linéarité géométrique (ou cinématique)

IV.2.1 Non linéarité matérielle :

Cette non linéarité est propre au matériau (caractéristiques, constitution, rhéologie). Elle peut être instantanée, quand elle existe avec un matériau indépendamment des effets extérieurs.

On peut citer comme exemple un matériau élastique non linéaire par sa :

- rhéologie ;
- plasticité ;
- fissuration.

Comme elle peut être aussi différée, lorsque la cause de son apparition ne provoque pas immédiatement son comportement, mais ce dernier n'apparaît qu'après un certain temps, comme par exemple le fluage, le retrait et la viscosité.

IV.2.2 Non linéarité géométrique :

Quand les déplacements sont grands, les équations d'équilibre basées sur la géométrie initiale ne sont plus valides et doivent être donc modifiées pour tenir compte des variations géométriques. Ceci affecte les relations forces-déplacements car des forces internes supplémentaires sont générées par les variations géométriques. En plus, les grands déplacements causent de grandes déformations, il faudra tenir compte des termes d'ordre supérieur intervenant dans le tenseur de déformation, ce qui engendre des relations non linéaires entre déplacements et déformations. On peut citer comme exemples :

- Interaction entre flexion et effort normal
- Variation des conditions d'appuis.

IV.3 Formulation des problèmes non linéaires :

La formulation d'un problème non linéaire dépend de la source et du degré de la non linéarité étudiée.

IV.3.1 Non linéarité matérielle seulement :

Ce cas se présente lorsque les déplacements et les déformations sont petits, et ou la loi rhéologique $\sigma - \varepsilon$ est non linéaire. Dans ce cas on utilise les contraintes et les déformations classiques.

IV.3.2 Grands déplacements :

Deux cas se présentent :

- a- les déformations sont petites, alors les déplacements sont constitués essentiellement des mouvements des corps rigides.
- b- Les déformations sont grandes, alors elles constituent l'essentiel des déplacements.

Dans le cas de grands déplacements, il faut utiliser les expressions appropriées des tenseurs σ et ε .

IV.4 Méthodes de résolution des systèmes non linéaires ^[49]:

Il n'existe pas de méthode directe de résolution des systèmes non linéaires. Ces derniers, sont toujours solutionnés par linéarisations successives tout en essayant de satisfaire les conditions non linéaires à une certaine précision.

Un problème structurel non linéaire doit vérifier les lois de la mécanique des milieux continus qui sont :

- équilibre ;
- compatibilité ;
- lois constitutives.

Dans la méthode des éléments finis, une des trois conditions est automatiquement vérifiée (compatibilité dans la formulation en déplacements et équilibre dans la formulation en contraintes). Il suffit donc de vérifier les lois constitutives tout en préservant l'équilibre de la structure (ou compatibilité des déplacements). Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes non linéaires. Elles sont dans leur quasi-totalité basées sur un même principe qui est :

A partir d'une approximation initiale des déplacements (éventuellement nulle), on calcule les contraintes selon le modèle constitutif. Ces contraintes sont équivalentes à un système de forces nodales internes $\{F_i\}$ devant équilibrer les forces nodales extérieures $\{F\}$. Généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée « forces résiduelles » ou simplement « résidus »

$$\Delta F = F - F_i \dots\dots\dots(4-2)$$

Ces résidus doivent être éliminés afin d'assurer l'équilibre.

En général, pour un niveau de charge donné, un certain nombre d'itérations linéaires est nécessaire pour réduire les forces résiduelles à un certain degré de précision fixé.

La qualité des résultats finaux dépend des différents paramètres numériques associés à la méthode utilisée, par exemple :

- . dimension de l'incrément ;
- . procédé d'itération ;
- . précision requise ;
- . critère de convergence, etc.

Les nombreuses méthodes non linéaires existantes peuvent être groupées en trois classes :

- incrémentales ;
- itératives ;
- mixtes.

V.4.1 Méthodes incrémentales :

Le chargement est subdivisé en plusieurs incréments pas forcément égaux. Durant chaque incrément, les déplacements sont obtenus par la résolution d'un système linéaire :

$[K]\{U\}=\{F\}$ ou $[K]$ est déduite des résultats de l'incrément précédent, auquel sont ajoutés les déplacements cumulés précédemment. Le procédé est répété jusqu'à chargement final (Figure 4.1)

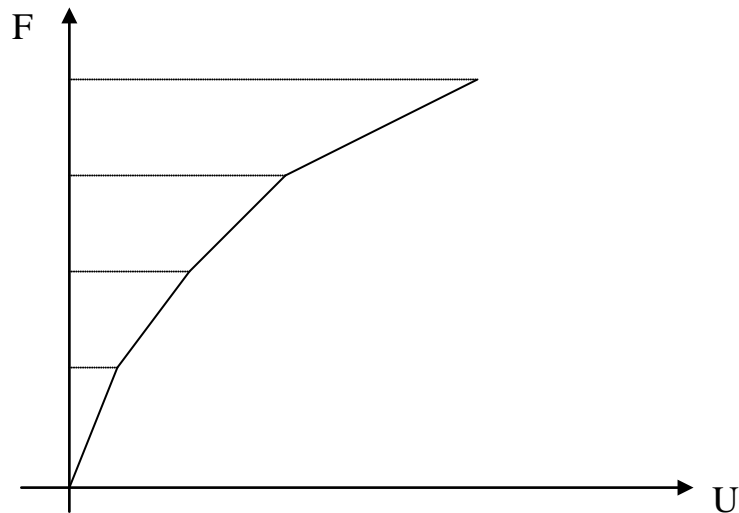


Figure 4.1 : Méthodes incrémentales

Il n'y a aucune itération pour restaurer l'équilibre, l'inconvénient majeur réside dans le cumul des erreurs et dans l'impossibilité de prévoir la taille minimale des incréments pour satisfaire une tolérance fixée.

Une des variantes de la technique est la méthode médiane de Runge-Kutta ou la matrice de rigidité K est évaluée au milieu de l'incrément.

IV.4.2 Méthodes itératives :

Le chargement est appliqué en un seul incrément. Les forces résiduelles déduites des résultats de l'itération précédente sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit ajouter aux précédents. Ces déplacements cumulés donnent des nouvelles contraintes et des nouveaux résidus. Le procédé continue jusqu'à élimination des résidus à la précision désirée.

La redistribution des forces résiduelles peut se faire avec une matrice de rigidité constante ou variable (tangente ou sécante : Figure 4.2).

Les méthodes itératives sont plus lentes que les méthodes incrémentales mais permettent un meilleur contrôle de la précision et le procédé d'itération peut être facilement inclus dans un algorithme linéaire.

L'inconvénient principal est que les contraintes et les déformations ne sont déterminées que pour un seul incrément, sans aucune information sur le chemin non linéaire parcouru.

D'autre part, si le chargement (statique ou dynamique) est variable dans avec le temps, et ou si le chargement final est inconnu (recherche de l'instabilité ou de rupture) et ou si les lois constitutives sont incrémentales et dépendent du chemin parcouru (fluage, plasticité,...), alors la méthode est inutilisable.

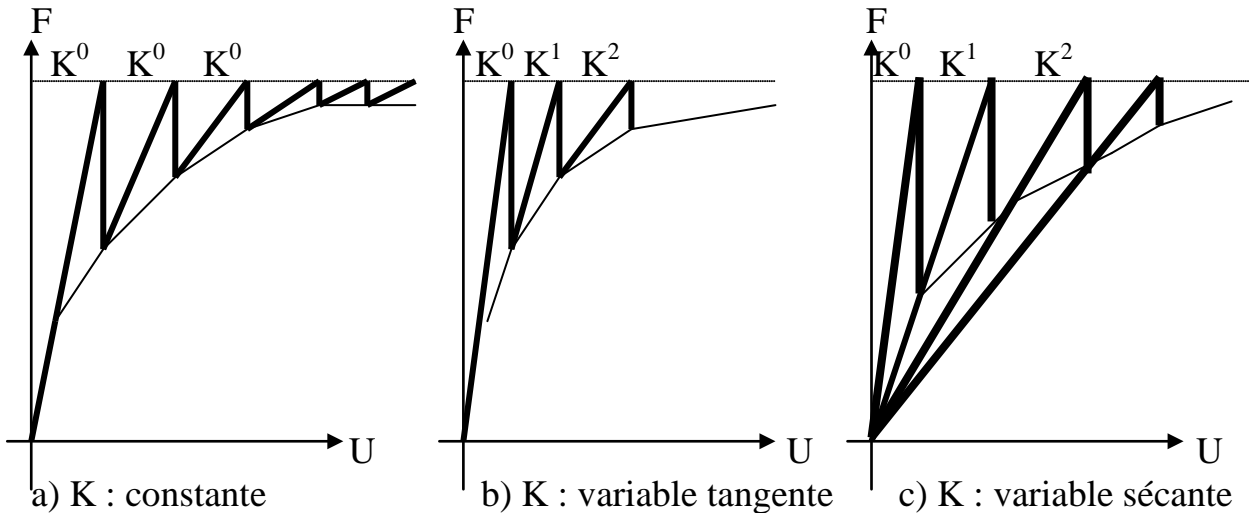


Figure 4.2 : Méthodes itératives

IV.4.3. Méthodes mixtes :

Ces méthodes combinent à la fois les avantages des deux méthodes précédentes et elles sont toutefois plus lentes. Le chargement est appliqué par incréments et dans chaque incrément, plusieurs itérations sont effectuées afin d'assurer la convergence. Les algorithmes de ces méthodes peuvent se ramener aisément à un seul incrément de la méthode itérative (figure 4.3).

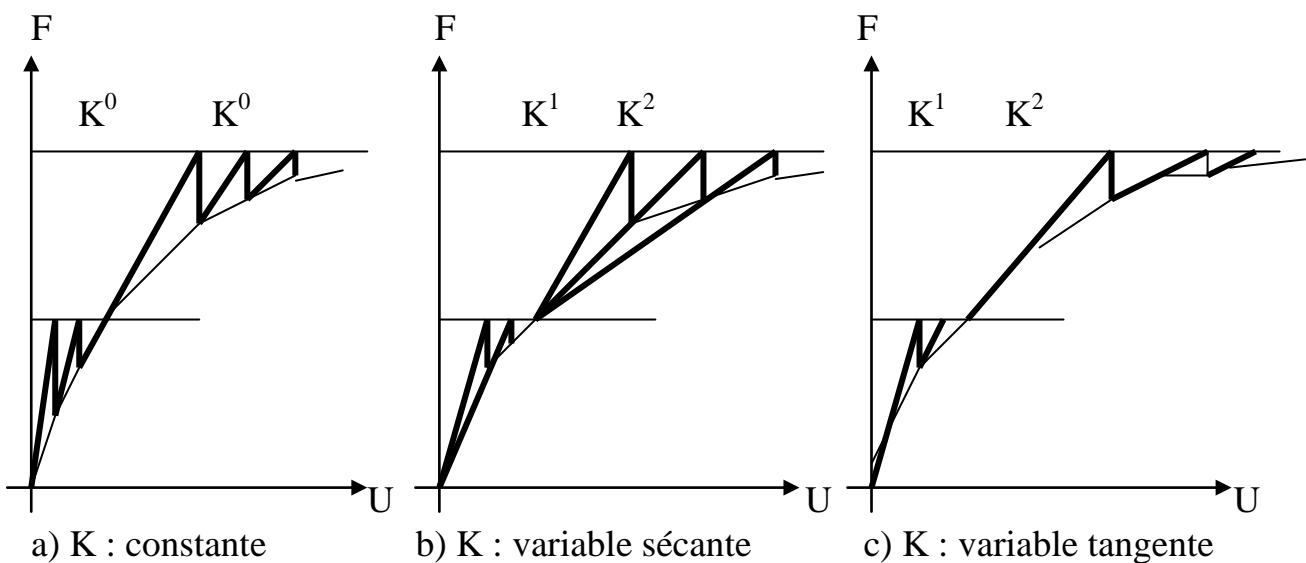


Figure 4.3 : Méthodes mixtes

IV.5 Principales méthodes numériques en analyse non linéaire :

Il existe trois méthodes principales de calcul non linéaire des structures dont les algorithmes sont similaires et consistent à éliminer les forces résiduelles. Le résidu initial ΔF^0 étant bien entendu l'incrément de charge appliquée. Les conditions F^0 et U^0 sont connues. Le résidu appliqué à l'itération est ΔF^0 et est égal à la différence entre les forces extérieures et les forces nodales internes résultant de l'état de contraintes à l'itération $i-1$:

$$\Delta F^{i-1} = F - F_I^{i-1} \dots\dots\dots(4-3)$$

IV.5.1. Méthode de Newton-Raphson : (méthode de rigidité tangente)

Les conditions initiales F^0, U^0 et K^0 sont connues (F^0 et U^0 sont éventuellement nulles), le résidu qu'on doit éliminer est ΔF^0 .
 On calcule ce résidu par $\Delta F^0 = F - F_I^0 = F - K^0 U^0$
 On résout $K^0 \Delta U^1 = \Delta F^0$ et on déduit ΔU^1
 Le déplacement est $U^1 = U^0 + \Delta U^1$ et on déduit F_I^1 et K^1
 On calcule le nouveau résidu $\Delta F^1 = F - F_I^1$
 On résout $K^1 \Delta U^2 = \Delta F^1$ et on déduit ΔU^2
 Le déplacement est $U^2 = U^1 + \Delta U^2$ et on déduit F_I^2 et K^2

L'algorithme de la méthode est :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Résidu } \Delta F^{i-1} = F - F_I^{i-1} \\ \text{Résoudre } K^{i-1} \Delta U^i = \Delta F^{i-1} \text{ et déduire } \Delta U^i \\ \text{Cumuler } U^i = U^{i-1} + \Delta U^i \text{ et déduire } K^i \text{ et } F_I^i \end{array} \right. \dots\dots\dots(4-4)$$

Conditions initiales U^0, F^0, K^0 et $F_I^0 = F^0$
 La méthode converge rapidement mais elle est très coûteuse à cause des actualisations de K_i à chaque itération et de la nécessité de prévoir des algorithmes de résolution des systèmes dissymétriques en cas où K_i perd sa forme symétrique.

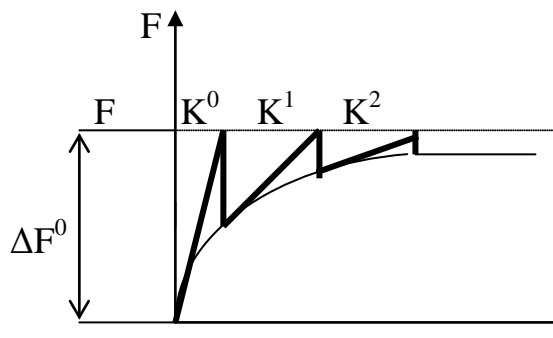


Figure 4.4 : Méthode de la rigidité tangente

IV.5.2 Méthode de la rigidité sécante :

L'algorithme est similaire à celui de Newton-Raphson avec une matrice de rigidité différente (Figure 4.5)

A partir des conditions initiales F^0, U^0, K^0 et $F_I^0 = F^0$

On calcule le résidu initial :

$$\Delta F^0 = F - F_I^0 = F - K^0 U^0$$

On résout $K^0 \Delta U^1 = \Delta F^0$ et on déduit ΔU^1

Le déplacement sera $U^1 = U^0 + \Delta U^1$ et on déduit F_I^1 et K^1 tel que :

$$K^1 U^1 = F_I^1 \quad (K^1 \text{ est donc sécante})$$

$$\text{Résidu } \Delta F^1 = F - F_I^1 = F - K^1 U^1$$

$$\text{Résoudre } K^1 \Delta U^2 = \Delta F^1 \text{ en déduire } \Delta U^2$$

$$\text{Déplacement } U^2 = U^1 + \Delta U^2$$

L'algorithme est donc pour $(i=1,2,\dots,n)$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Résidu } \Delta F^{i-1} = F - F_I^{i-1} = F - K^{i-1} U^{i-1} \\ \text{Résoudre } K^{i-1} \Delta U^i = \Delta F^{i-1} \text{ en déduire } \Delta U^i \dots\dots\dots(4-5) \\ \text{Cumuler } U^i = U^{i-1} + \Delta U^i \text{ et déduire } F^i \text{ et } K^i \end{array} \right.$$

Telle que $K^i U^i = F_I^i$

Avec les conditions U^0, K^0, F^0 et $F_I^0 = F^0$

Cette méthode est également rapide mais coûteuse à cause des actualisations de K à chaque itération.

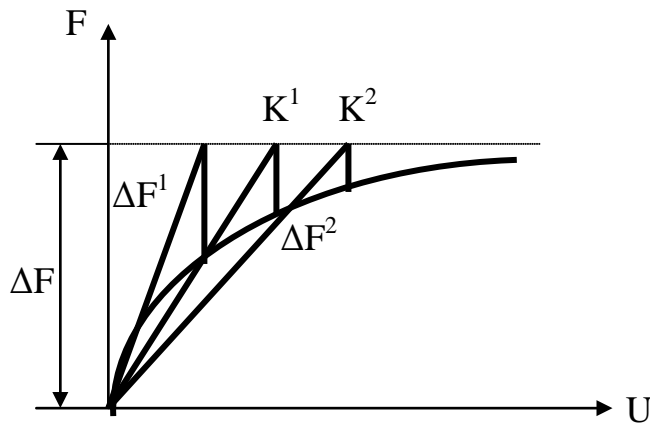


Figure 4.5 : Méthode de la rigidité sécante

IV.5.3 Méthode de la rigidité initiale : (méthode de Newton Raphson modifiée)

Pour éviter les actualisations coûteuses de K , on utilise dans cette méthode une matrice de rigidité constante (figure 4.6)

$$\text{Résidu } \Delta F^0 = F - F_I^0 = F - K^0 U^0$$

$$\text{Résoudre } K^0 \Delta U^1 = \Delta F^0 \text{ en déduire } \Delta U^1$$

$$\text{Cumuler } U^1 = U^0 + \Delta U^1 \text{ et on déduit } F_I^1$$

$$\text{Résidu } \Delta F^1 = F - F_I^1$$

$$\text{Résoudre } K^0 \Delta U^2 = \Delta F^1 \text{ en déduire } \Delta U^2$$

Cumuler $U^2 = U^1 + \Delta U^2$ etc.

L'algorithme est le suivant ($i=1,2,\dots,n$)

$$\left| \begin{array}{l} \text{Résidu } \Delta F^{i-1} = F - F_I^{i-1} \\ \text{Résoudre } K^0 \Delta U^i = \Delta F^{i-1} \text{ en déduire } \Delta U^i \dots\dots\dots(4-6) \\ \text{Cumuler } U^i = U^{i-1} + \Delta U^i \text{ et déduire } F_I^i \end{array} \right.$$

Les conditions initiales U^0, K^0, F^0 et $F_I^0 = F^0$

bien que plus lente, cette méthode est plus économique car elle évite les actualisations répétées de K .

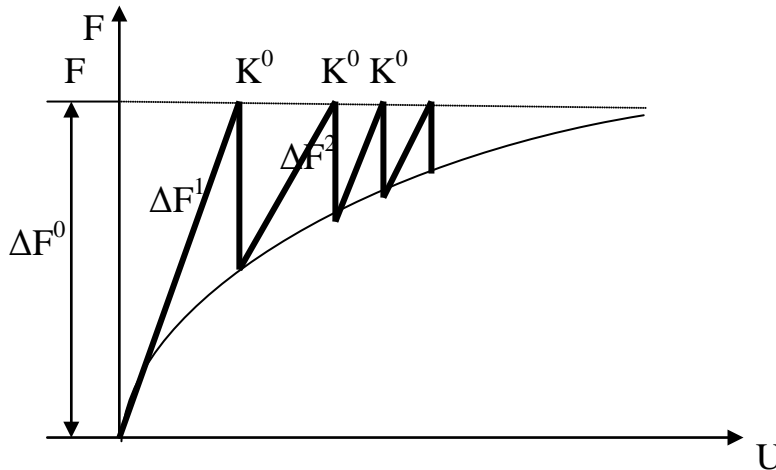


Figure 4.6 : Méthode de la rigidité initiale

IV.6 Critères de convergence :

Le critère de convergence contrôle le nombre d'itérations à réaliser dans un incrément. Le critère de convergence utilisé, ainsi que la tolérance exigée influent sur les résultats, toutefois imposer une limite exagérée risque d'être coûteux pour une précision inutile. Les critères de convergence sont formulés soit directement en fonction des forces résiduelles ou bien indirectement à travers les autres grandeurs (déplacements, déformations, ou contraintes). Il est très difficile et très cher de vérifier la convergence de toutes les composantes des forces, des déplacements ou autres grandeurs. On utilise une estimation globale avec les normes (moindres carrés en général).

Les critères usuels sont :

a- Convergence en forces :

$$\frac{\|\Delta F^i\|}{\|F^i\|} \leq T_F \text{ tolérance en forces}$$

$$\text{Avec } \|F\| = (F^T F)^{1/2} \text{ et } \|\Delta F\| = (\Delta F^T \Delta F)^{1/2}$$

b-Convergence en déplacements :

$$\|\Delta U^i\| \leq T_D \text{ tolérance en déplacements}$$

$$\text{ou bien } \frac{\|\Delta U^i\|}{\|U^i\|} \leq T_D$$

c-Convergence en énergie :

L'utilisation d'un seul critère de convergence en forces ou en déplacements peut s'avérer insuffisant car dans certains cas de discontinuité (fissuration) les forces peuvent augmenter alors que les déplacements diminuent. Le critère le plus objectif est donc celui qui tient compte simultanément des deux précédents :

$$\frac{\Delta U^T \Delta F}{\Delta U^T} \leq T_E \text{ Tolérance en énergie}$$

$$\text{Ou bien } \frac{U^T \Delta F}{U^T F} \leq T_E$$

Les tolérances varient de 0,1 à 1% en général.

IV.7 Conclusion :

D'une manière générale, quelle que soit la méthode de rigidité utilisée, les étapes d'une analyse non linéaire mixte pour les problèmes à lois de comportement non linéaire, sont les mêmes qui sont de nombre 8 :

- Appliquer le $n^{\text{ième}}$ incrément de charge ΔF_n et calculer la première estimation de l'incrément ($n=1$) de déplacement par résolution du système $K*U=F$ avec « K » matrice initiale, sécante ou tangente basée sur les conditions initiales de l'incrément.
- Dédire l'incrément de déformation $\Delta \epsilon_n$ à partir de l'incrément des déplacements.
- Calculer les déplacements et déformations totaux :

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} + \Delta U_n \\ \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + \Delta \varepsilon_n \end{cases}$$

- Calculer les contraintes totales σ_n en utilisant la loi constitutive :

$$F(\sigma, \varepsilon) = 0 \text{ ou } f(\Delta\sigma, \Delta\varepsilon) = 0 \text{ et ;}$$

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \Delta\sigma$$

- Déterminer les forces nodales internes équivalentes dues à σ_n , et déduire les forces résiduelles Ψ avec :

$$\Psi = \int_v B^T \Delta\sigma_0 dv - F_n$$

F_n : Forces extérieures totales ; $F_n = F_{n-1} + \Delta F_n$

- Vérifier les critères de convergence (en forces ou en déplacement ou en énergie). S'ils sont vérifiés, répéter le processus à partir de la première étape.
- Si les critères de convergence ne sont pas vérifiés, appliquer les forces résiduelles et calculer le nouvel incrément correctif de déplacement ΔU_{ni} en résolvant : $KU_i = \Delta U_i$ (à l'itération i de l'incrément n).

K : matrice de rigidité initiale sécante ou tangente selon les conditions initiales de l'itération

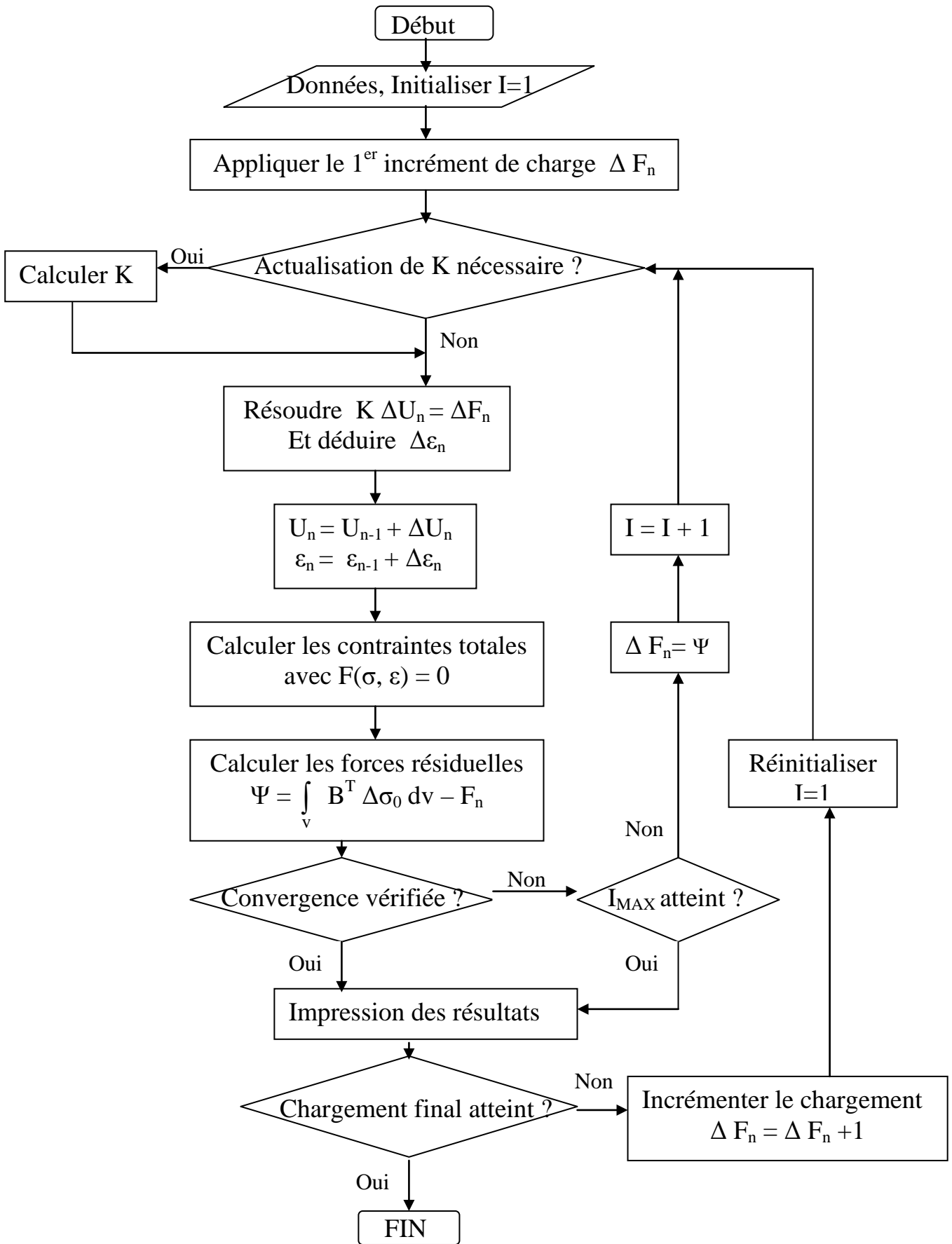
- Répéter à partir de l'étape (2) jusqu'à convergence.

IV.8 Risques de divergence et remèdes:

La convergence dans un problème non linéaire n'est jamais garantie à cent pour cent notamment quand le nombre de degré de liberté est élevé ou quand la solution n'est pas unique. En plus, la convergence peut avoir lieu vers la mauvaise solution en cas de non unicité de solution. Il faut dans ces cas:

- faire un bon choix de la solution initiale;
- appliquer le chargement par petits incréments;
- prévoir un nombre maximal d'itérations afin d'éviter le déroulement infini du programme en cas de divergence.

IV.9 Organigramme (non linéarité matérielle) :



PRESENTATION DU PROGRAMME

V.1 Introduction :

Les problèmes non-linéaires sont toujours solutionnés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires où les conditions non-linéaires sont vérifiées à une certaine tolérance. Dans les programmes de calcul non-linéaires, le principe est le même :

On réalise un programme de résolution linéaire qu'on prolonge par de nouvelles sous-routines (si nécessaire), et sur lequel on établit des itérations. Le programme de résolution linéaire constitue ainsi toujours le noyau du programme non-linéaire.

Donc un programme d'analyse non-linéaire comprend, en plus des blocs fonctionnels d'une analyse linéaire, des blocs fonctionnels supplémentaires destinés à traiter le problème non-linéaire d'une façon incrémentale et de contrôler la convergence de la solution. Ces nouveaux blocs sont :

V.1.1 Incrémentation du chargement :

Une analyse non-linéaire élasto-plastique est procédée d'une manière incrémentale. Donc, le rôle de ce bloc est de contrôler l'incrémentation des charges appliquées.

V.1.2 Calcul des forces résiduelles :

Après chaque itération, on doit évaluer le résidu (forces résiduelles) qui sert comme chargement pour l'itération suivante.

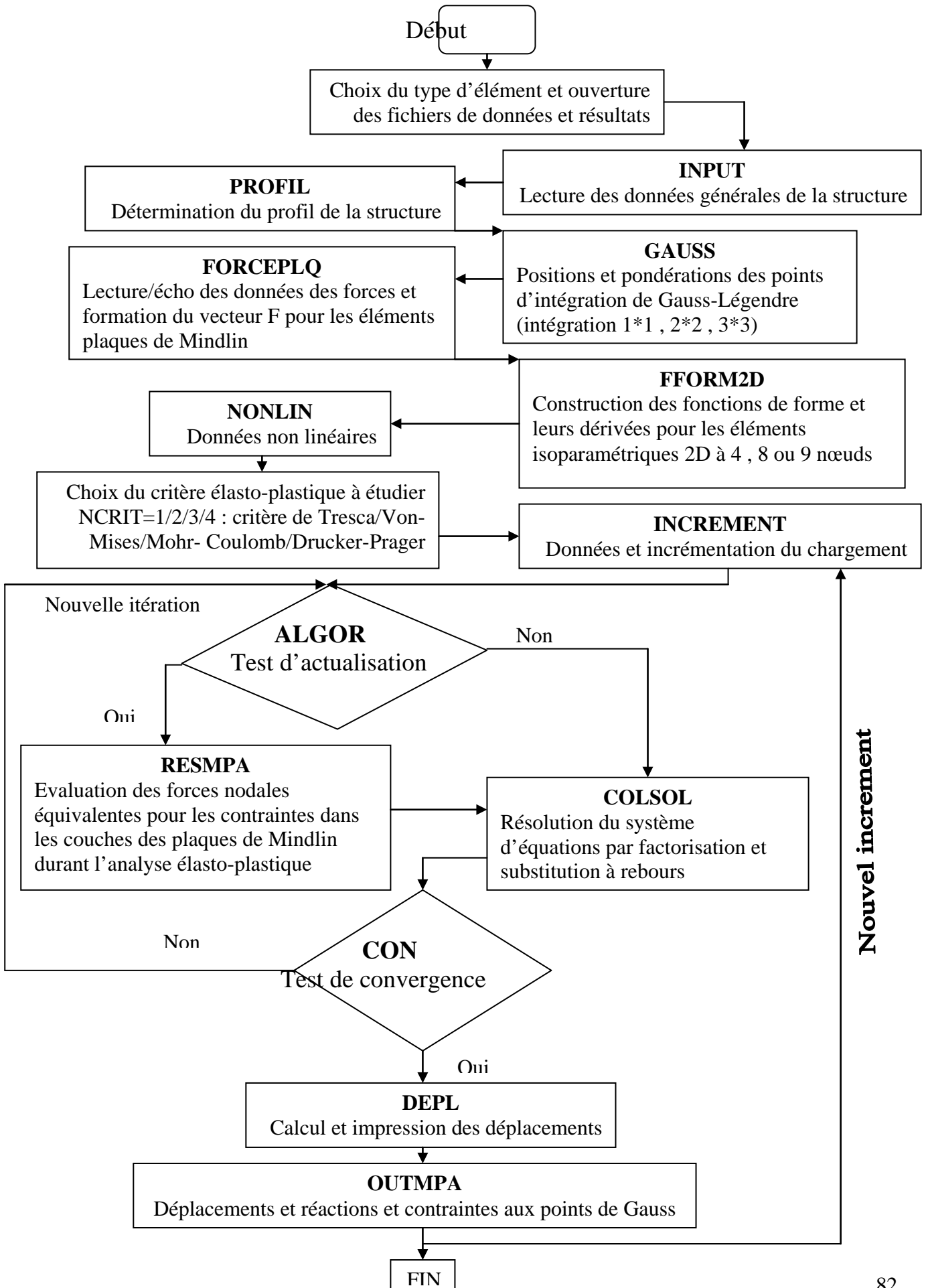
V.1.3 Test de convergence :

Après chaque itération, la convergence est testée avec un critère de convergence approprié.

V.2 Programme :

Le programme développé dans cette étude en langage FORTRAN 90 ^[54] est une adaptation du programme de KADID ABDELKRIM, notre intervention réside dans l'amélioration de certaines sous-routines notamment l'introduction de la formulation de l'élément hétérosis dans.

V.3 Structure générale du programme :



V.3.1 Lecture et Organisation des données :

Elle porte essentiellement sur le fichier de données qui, en général, reflète l'état des nœuds : (Coordonnées, conditions aux limites, ...) et des éléments : (connectivités et les coefficients des propriétés physiques des matériaux).

Le fichier de données, quoiqu'il ne soit pas inséré dans le programme général, reste indépendant, de telle sorte que l'on peut changer les valeurs de ce dernier (pour l'étude par exemple d'un autre état de plaques) sans se préoccuper de changer les instructions du programme général.

V.3.2 Construction de la matrice de rigidité [K] et du vecteur force {F} :

Elle concerne la construction de la matrice de rigidité globale [K] de la structure, ainsi que le vecteur force {F}.

Cette étape s'avère importante dans le programme, car c'est au cours de celle-ci que s'effectue l'ensemble des opérations importantes et utiles pour les phases des calculs préalables elle se résume en :

a) Détermination du profil de la matrice de rigidité

Pour chaque élément de la structure, la matrice de rigidité élémentaire doit être calculée puis assemblée dans la matrice de rigidité globale de la structure.

b) Calcul du vecteur des forces

Formation du vecteur {F} pour l'élément rectangulaire avec prise en compte des conditions aux limites.

Assemblage des forces nodales.

Calcul des forces nodales équivalentes dans le repère global.

Assemblage des forces nodales équivalentes.

V.3.3 Résolution du système d'équations non linéaires :

- 1- La résolution en analyse non linéaire.
- 2- La procédure des boucles sur les itérations et le test d'actualisation
- 3- L'assemblage de la matrice de rigidité globale de la structure
- 4- La factorisation éventuelle de la matrice
- 5- les calculs des forces internes et résiduelles
- 6- le test de Convergence

C'est la plus importante étape de calcul dans le programme, car c'est dans celle-ci que l'ensemble de toutes les opérations nécessaires s'effectue pour l'analyse non linéaire et ceci pour aboutir à un résultat «une solution » qui converge et qui soit précis.

Ces opérations sont les suivantes :

- a) Lecture et écho des données de l'analyse non linéaire.
- b) Insertion du procédé incrémental / itératif plus celui de l'actualisation de la matrice de rigidité [K], utile pour l'analyse non linéaire.
- c) l'introduction de la phase plastique du matériau dans les matrices de rigidité élémentaires pour pouvoir faire l'assemblage des éléments de la structure.
- d) Factorisation et substitution de la matrice en profil par le procédé de CHOLESKY. On doit d'abord faire la réduction du vecteur force {F}, pour passer enfin à la substitution à rebours de la matrice de rigidité assemblée en profil.
- e) Résolution et calcul des forces internes et résiduelles puis passage au test de convergence.

V.3.4 Impression des Résultats :

Après avoir effectué l'ensemble de toutes les opérations nécessaires et utiles pour la résolution du système d'équation non linéaires, on récupère les résultats des déplacements de chaque nœud ainsi que les contraintes et les déformations plastiques respectivement à chaque élément dans un fichier résultat créé de façon indépendante du programme principal et dans lequel figurent les valeurs de l'incrément primaire ainsi que les incréments et les itérations effectuées pour chaque état de structure.

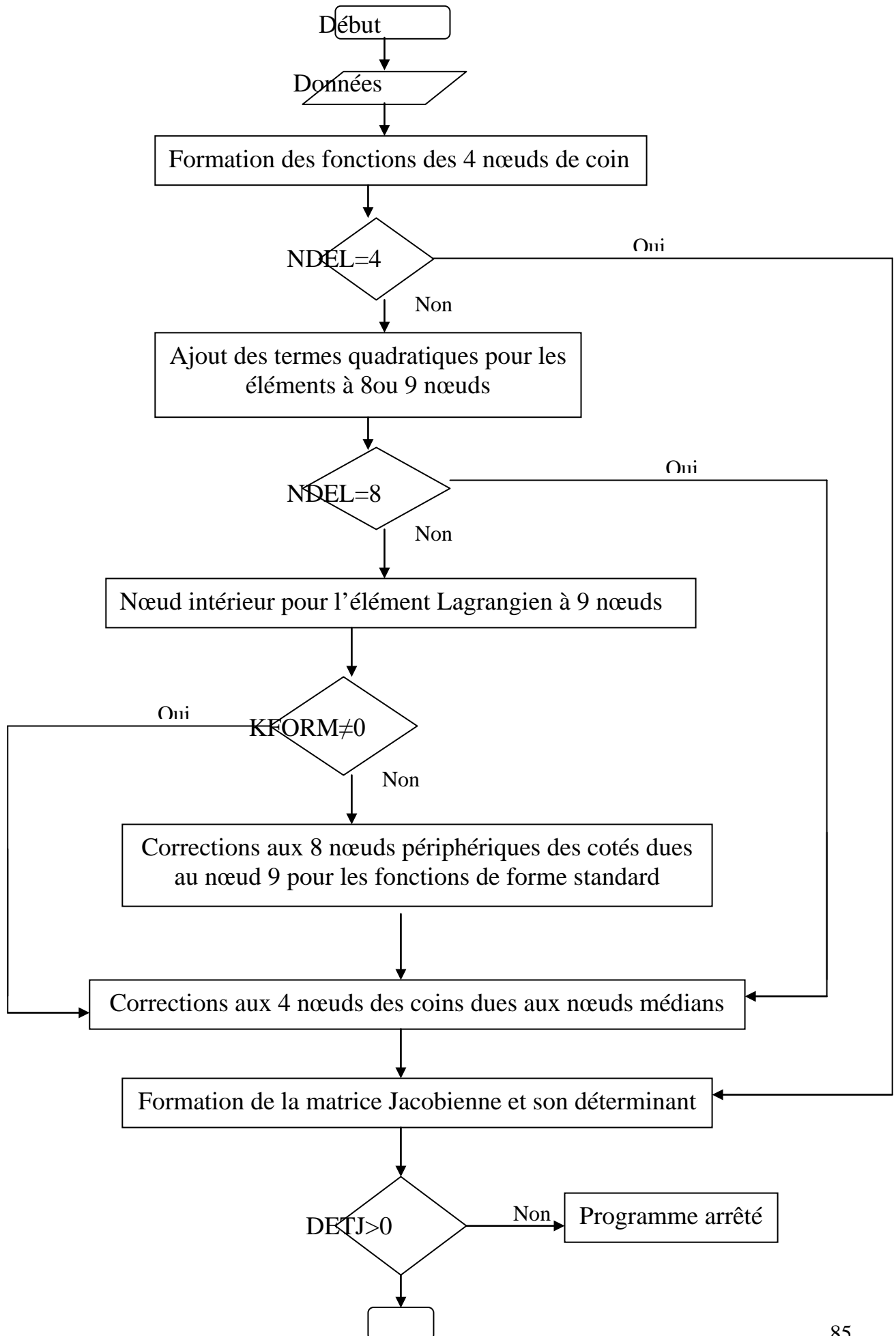
V.4 Organigrammes de quelques sous-routines :

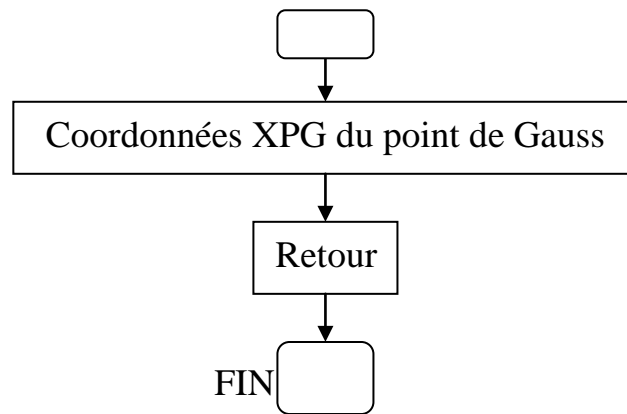
Les appels aux différentes sous-routines sont nécessaires pour effectuer les opérations intermédiaires dont on citera les organigrammes de quelques unes :

V.4.1 Subroutine FFORM2D :

Elle assure la construction des fonctions de forme et leurs dérivées pour les éléments isoparamétriques 2D à 4, 8, ou 9 Nœuds.

- FORM (1, J) sont les fonctions de forme.
- * Standard si KFORM = 0
- * Hiérarchique si KFORM ≠ 0
- FORM (1, J) et FORM (2, J) sont les dérivées :
- * Naturelles si KDER = 0
- * Cartésiennes si KDER ≠ 0





V.4.2 Subroutine NONLIN :

Elle permet la lecture, écho des données d'une analyse non-linéaire.

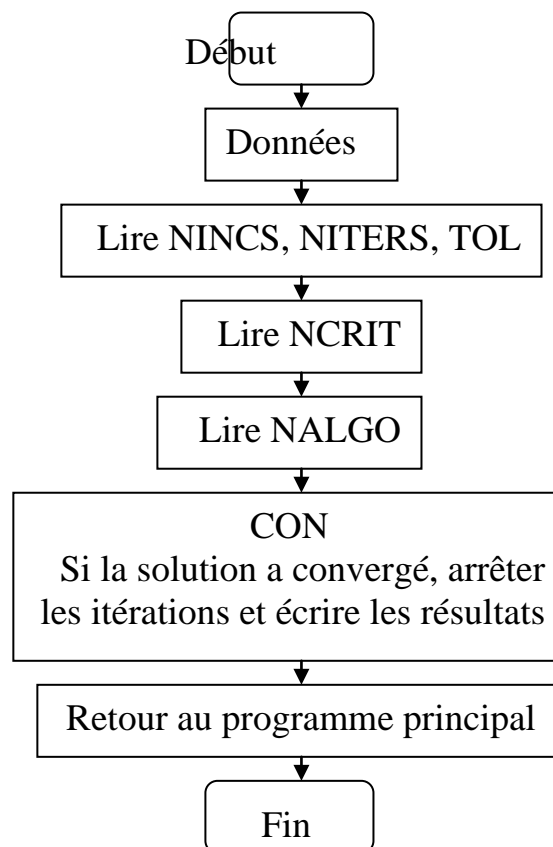
NINCS : nombre d'incréments,

NITERS : nombre d'itérations,

TOL : tolérance.

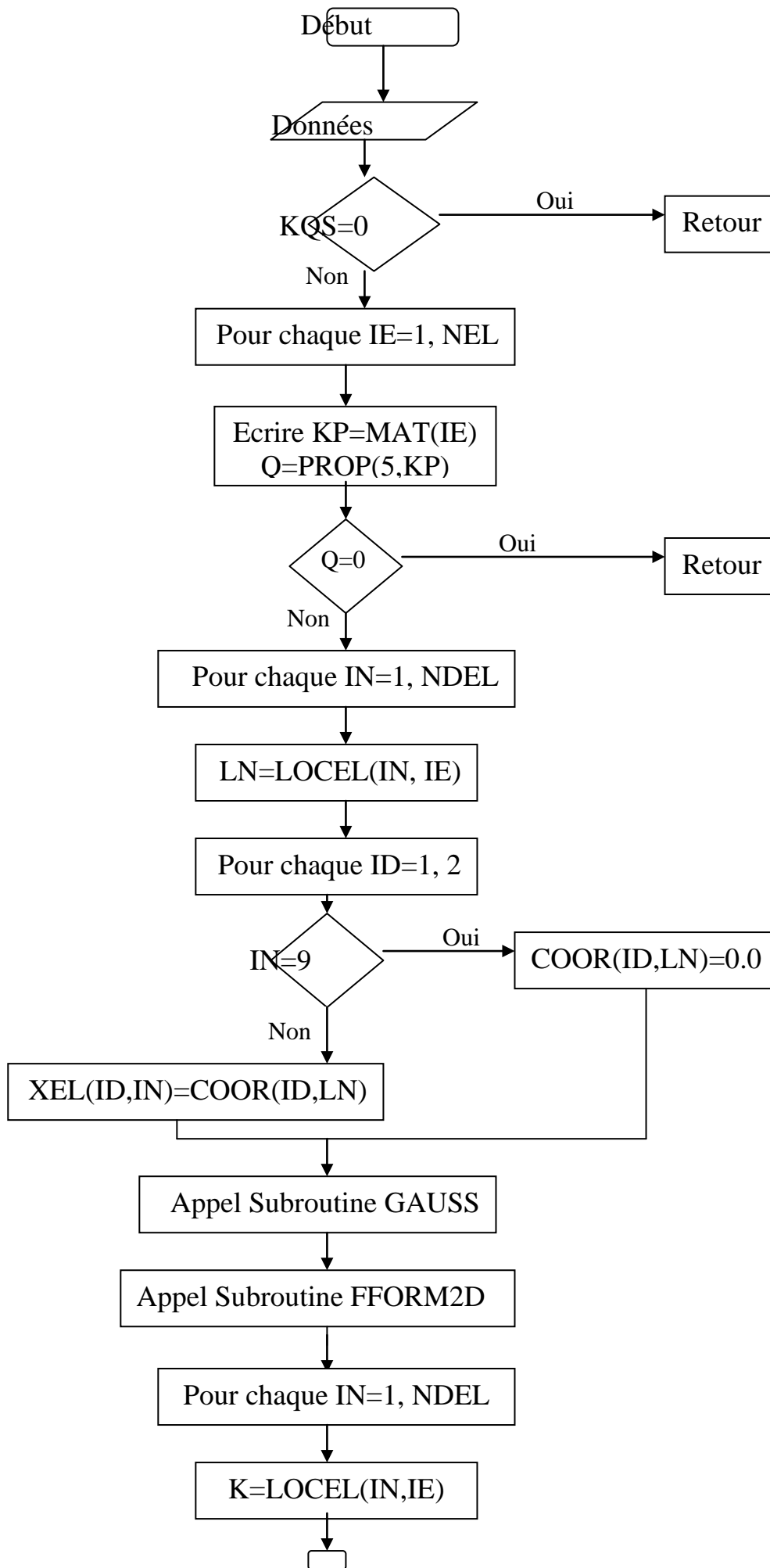
NCRIT= 1/2/3/4 Tresca/Von-Mises/Mohr-Coulomb/Drucker-Prager.

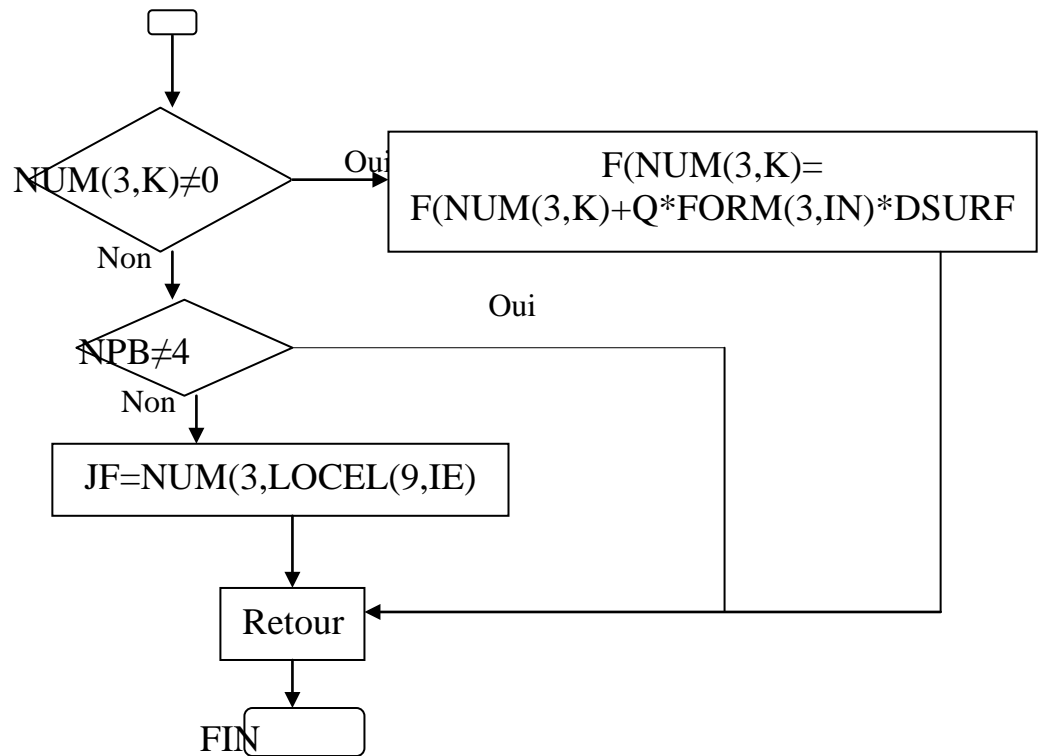
NALGO=1/2/3/4 Rigidité initiale/Newton-Raphson/Newton-Raphson modifiée avec actualisation de la 1^{ère} itération/Newton-Raphson modifiée avec actualisation de la 2^{ème} itération.



V.4.3 Subroutine FORCEPLQ :

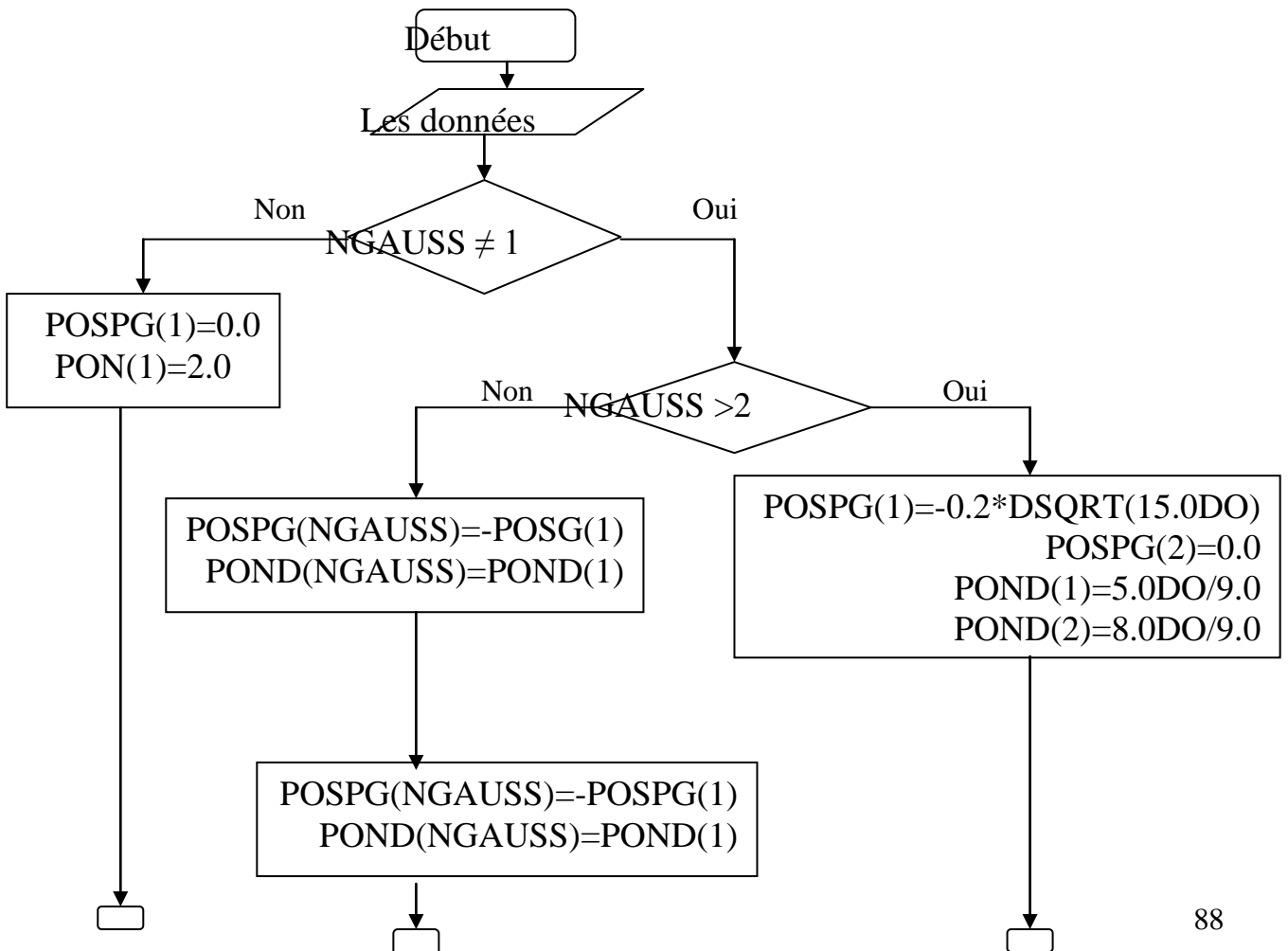
Elle assure la lecture/écho des données des forces et formation du vecteur F pour les éléments plaques de Mindlin.

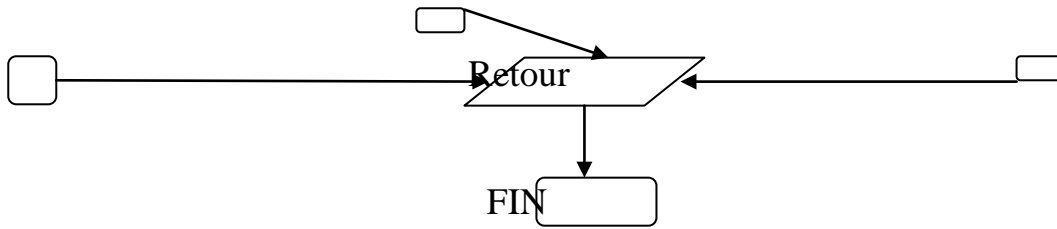




V.4.4 Subroutine GAUSS :

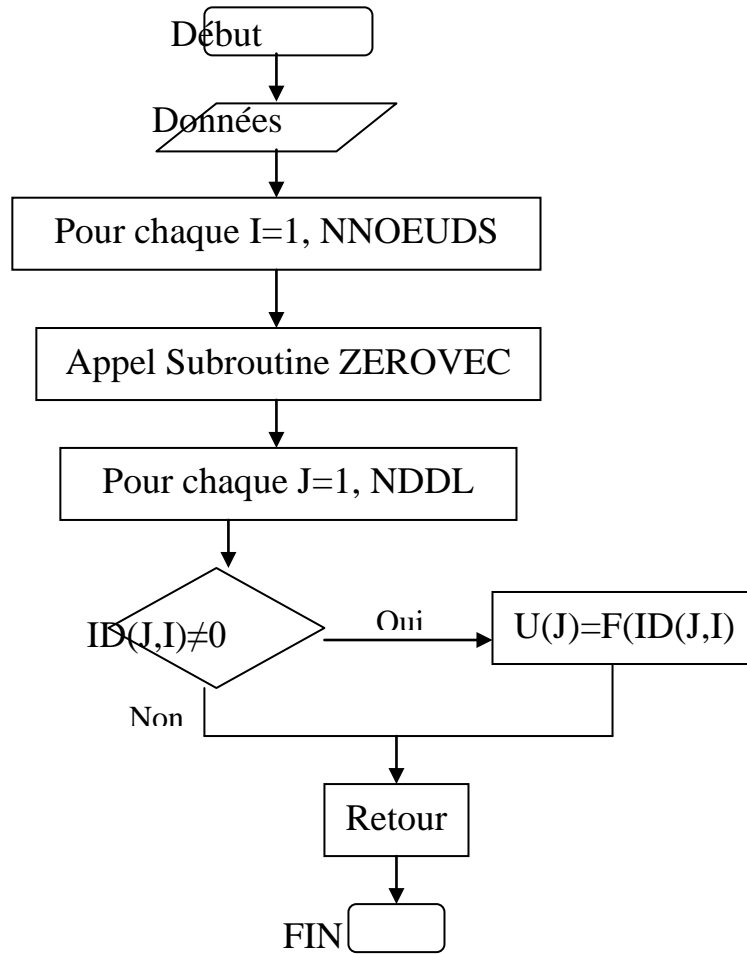
Elle assure les positions et pondérations des points d'intégration de GAUSS. LEGENDRE (Intégration 1x1, 2x2, 3x3 uniquement)





V.4.5 Subroutine DEPL :

Elle assure le calcul et impression des déplacements nodaux.



VALIDATION ET EXPERIMENTATION NUMERIQUE

VI.1 Introduction :

La validation théorique d'un logiciel de calcul par éléments finis consiste, pour un certain nombre de problèmes physiques (mécanique, hydraulique, hydromécanique, etc.), à comparer les résultats numériques avec des solutions réputées exactes. Ces vérifications permettent de contrôler le bon fonctionnement de la programmation et des algorithmes adoptés dans de multiples conditions d'utilisation (géométries, type d'éléments, chargements, etc.).

Ce chapitre portera sur la simulation numérique de la propagation de la plasticité sous différentes conditions avec emploi des éléments plaques en flexion Hétérosis et Lagrange à 9 nœuds, Serendip à 8 nœuds et celui à 4 nœuds.

Mais pour valider le programme, une première partie sera consacrée à la comparaison des résultats du programme utilisé pour la théorie des plaques de Timoshenko dans le domaine élastique, puis aux résultats obtenus des programmes traitant le domaine élasto-plastique notamment celui fourni par Hinton ^[51].

VI.2 Validation :

VI.2.1 Domaine élastique :

Pour la validation, les résultats donnés par notre programme seront comparés à ceux théoriques de Timoshenko ^[54].

VI.2.1.1 Exemple 1

Plaque carrée de dimensions $L=1$ m soumise à une charge uniforme $q = 1\text{kn/mm}^3$

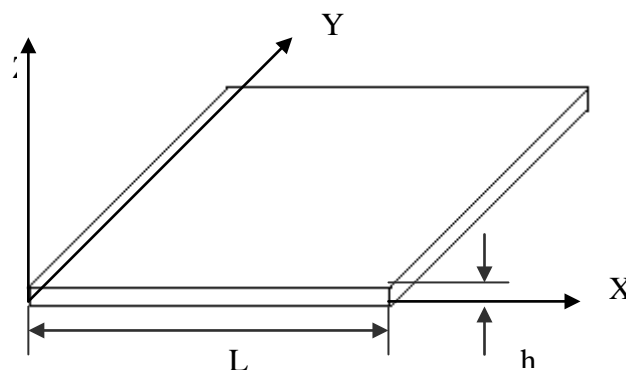
Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$E = 10920\text{Kn/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

L'épaisseur de la plaque h est égale à : 0.1m.

$$\sigma_0 = 1600\text{Kn/mm}^2$$

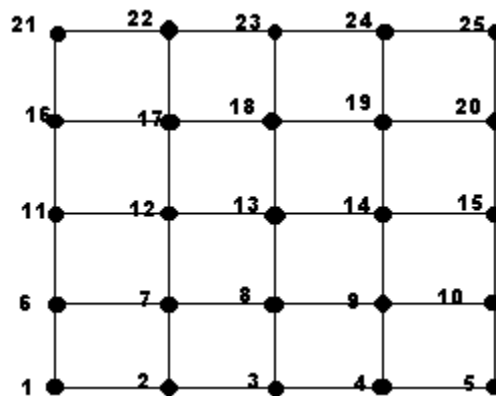


Selon la théorie des plaques de Timoshenko, la flèche maximale d'une plaque carrée dans la direction des z est donnée par :

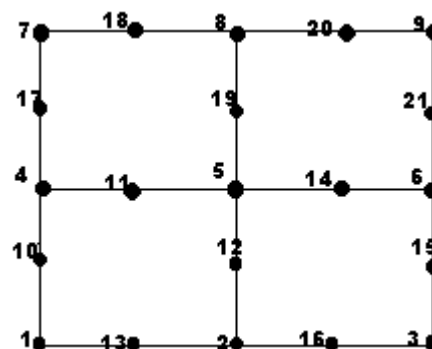
$$W = \alpha \cdot q \cdot \frac{L^4}{D}$$

Où α est un facteur numérique dépendant du rapport de la longueur sur la largeur de la plaque ainsi que de ses côtés
D est la rigidité de la plaque.

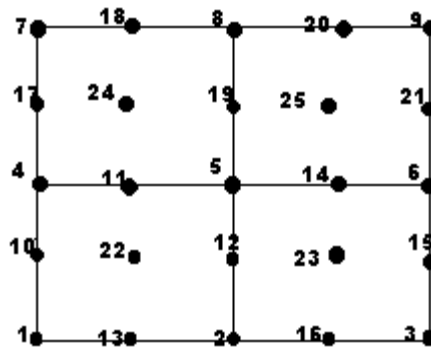
La comparaison se fera avec seize éléments à 4 nœuds désignés par M1,



Par quatre éléments de Serendip à 8 nœuds désignés par M2,



Et quatre éléments de Lagrange et Hétérosis à 9 nœuds désignés par M3 et M4 respectivement



M1 16 éléments à 4 nœuds.

M2 4 éléments Serendip à 8 nœuds

M3 4 éléments Lagrange à 9 nœuds

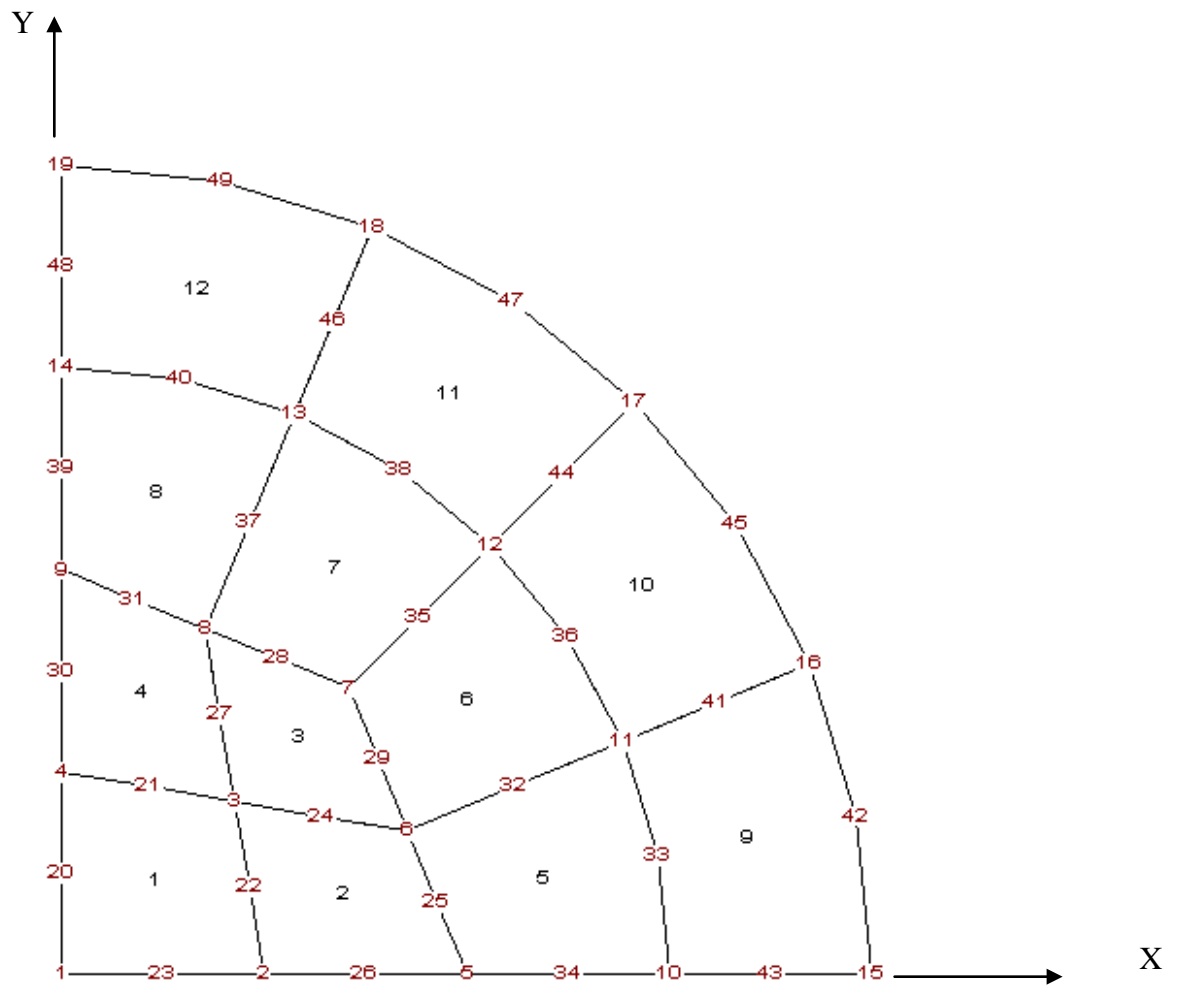
M4 4 éléments Hétérosis à 9 nœuds

Après l'exécution du programme, on aura les résultats suivants :

Conditions d'appui	W_{th}	$W_{cal}(M1)$	$W_{cal}(M2)$	$W_{cal}(M3)$	$W_{cal}(M4)$
Plaque simplement appuyée	$4.06 \cdot 10^{-2}$	$4.45338 \cdot 10^{-2}$	$3.54404 \cdot 10^{-2}$	$4.29771 \cdot 10^{-2}$	$4.53805 \cdot 10^{-2}$
Plaque encastree	$1.26 \cdot 10^{-2}$	$1.61548 \cdot 10^{-2}$	$1.49997 \cdot 10^{-2}$	$1.5309 \cdot 10^{-2}$	$1.56511 \cdot 10^{-2}$
Plaque à un côté encastree et trois en appuis simple	$2.79 \cdot 10^{-2}$	$3.57331 \cdot 10^{-2}$	$2.65461 \cdot 10^{-2}$	$3.16647 \cdot 10^{-2}$	$3.31333 \cdot 10^{-2}$
Plaque à un côté libre et trois en appui simple	$1.286 \cdot 10^{-1}$	$1.2001 \cdot 10^{-1}$	$1.30157 \cdot 10^{-1}$	$1.30257 \cdot 10^{-1}$	$1.28551 \cdot 10^{-1}$
Plaque à 2 côtés opposés en appui simple et 2 encastrés	$1.92 \cdot 10^{-2}$	$2.29687 \cdot 10^{-2}$	$2.06328 \cdot 10^{-2}$	$2.43747 \cdot 10^{-2}$	$2.49124 \cdot 10^{-2}$

Les résultats obtenus sont comparables à ceux donnés par la théorie de Timoshenko.

VI.2.1.2 Exemple 2:



Plaque circulaire encastree au bord de rayon $R=1m$ et uniformement chargee ; modelisee en raison de la symetrie par un quart de cercle.

Les caracteristiques de la plaque sont :
 $E = 10920kn/mm^2$ $\nu = 0.3$ $h = 0.1m$
 $\sigma_0 = 1600kn/mm^2$

Après l'exécution du programme, on aura les résultats du déplacement latéral du nœud 1 suivants :

Conditions d'appui	W_{Hinton}	W_{cal}
Encastrement	$1.633 \cdot 10^{-2}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$

On remarque que les résultats donnés par notre programme sont comparables à ceux donnés par le programme de Hinton.

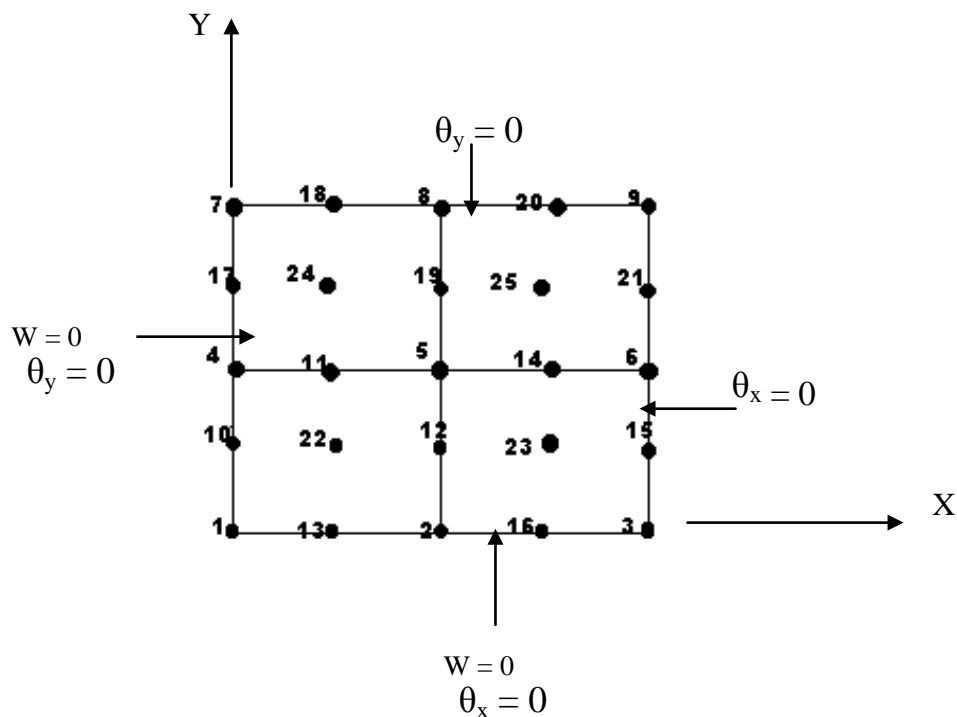
VI.2.2 Domaine élasto-plastique :

VI.2.2.1 Exemple :

Une plaque carrée $L=1\text{m}$ d'épaisseur $h=0,01\text{m}$ supportée sur le contour suivant les conditions de Hinton (en raison de la symétrie) qui sont mentionnées sur la figure ci-dessous.

Matériau $E = 10920\text{kn/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $q = 1$, $\sigma_0 = 400\text{kn/mm}^2$

Critère de plastification Von-Mises appuyé par la méthode de résolution de Newton-Raphson.



En comparant avec l'exemple de plaque en flexion à comportement élasto-plastique cité par Hinton, on arrive à des résultats similaires que nous présentons dans la figure suivante :

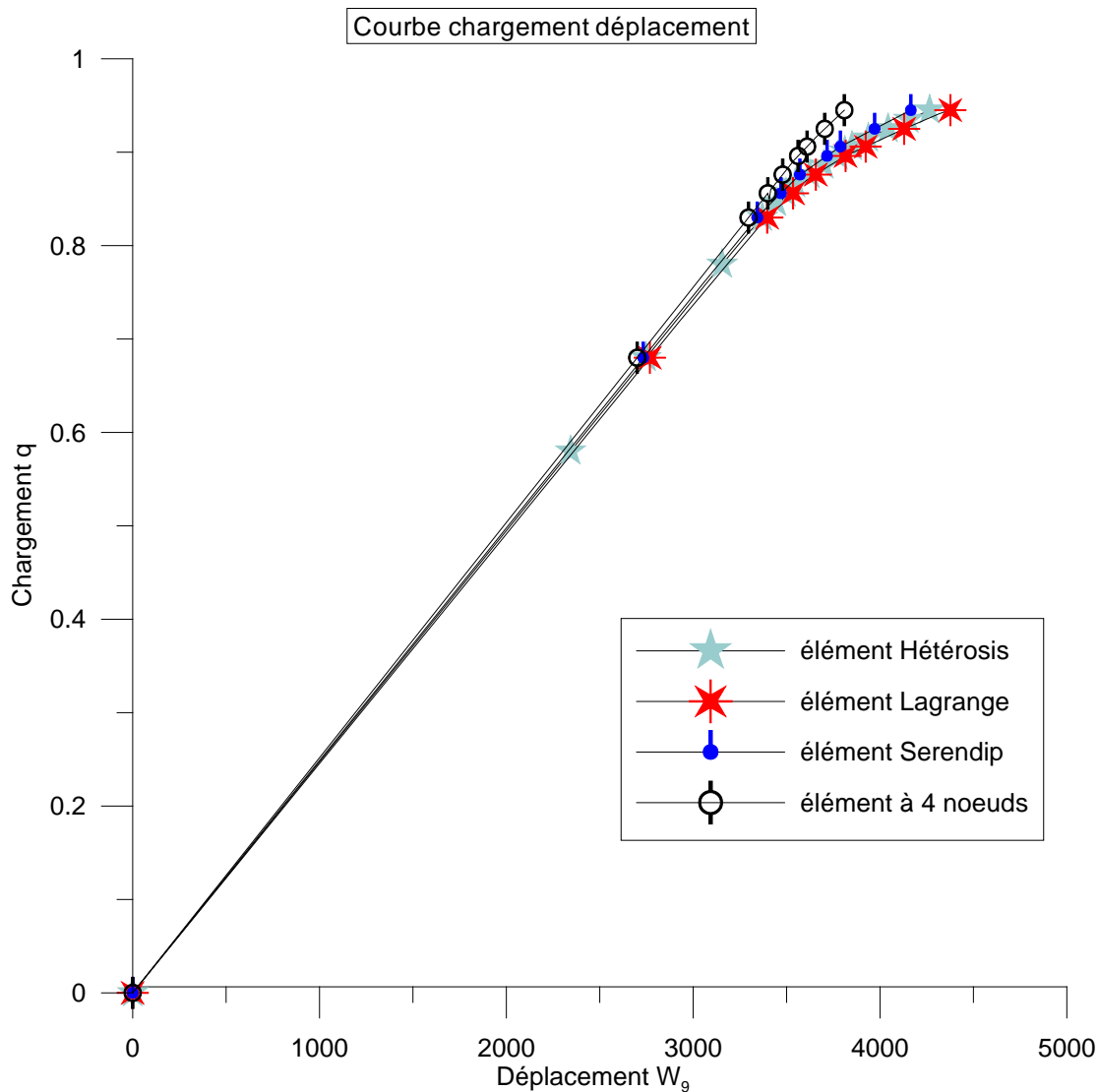


Figure 6.1

La figure 6.1 représente la courbe du déplacement latéral suivant l'axe Z du nœud 9 (W_9) en fonction du chargement appliqué avec variation du type d'élément.

On remarque que ce sont les éléments de Lagrange et Hétérosis à 9 nœuds qui sont les plus performants, leurs courbes sont légèrement plus inclinées du fait que la plasticité des nœuds s'opère d'abord au niveau de ces éléments puis en augmentant encore la charge se produit pour le cas de l'élément Serendip et enfin celui à 4 nœuds.

VI.3 Expérimentation numérique :

Dans cette partie, il s'agit d'exécuter le programme pour différents cas afin d'illustrer la propagation de la plasticité à travers l'élément. Pour cela, les nœuds plastifiés seront présentés en couleur noire dans les simulations

VI.3.1 Simulation de la propagation de la plasticité pour l'élément Hétérosis :

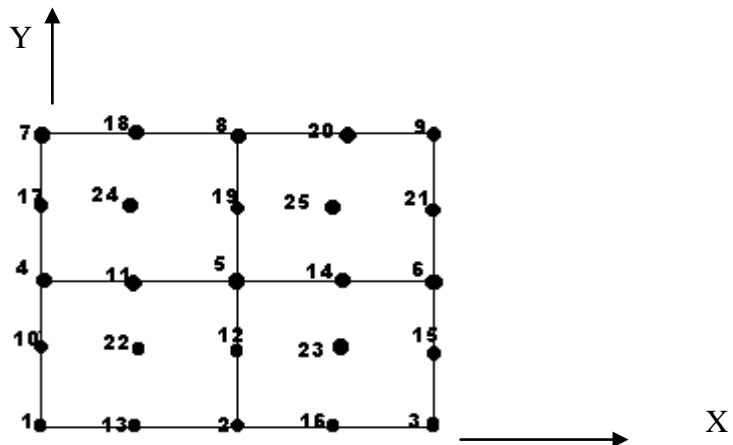
VI.3.1.1 Exemple 1 :

Une plaque complètement encastree (élément Hétérosis)

Les propriétés matérielles et dimensions sont :

$h = 0.01m$, $\sigma_0=180kn/mm^2$, $\nu=0.3$, $q=1kn/mm^3$, $E=10920kn/mm^2$

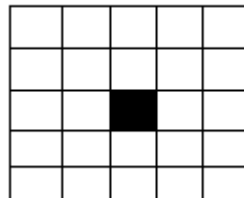
La plastification des noeuds est donnée par le critère de Von-Mises appuyé par la méthode de résolution de Newton-Raphson.



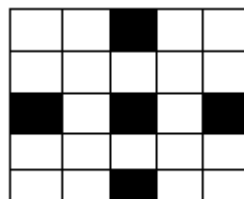
Chargement

Noeuds 7, 18, 8, 20, 9

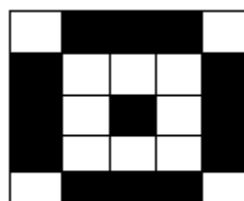
0.52



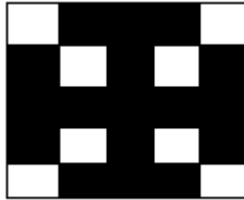
0.68



0.825



0.830



0.862



0.876



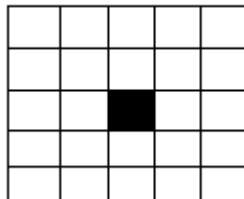
VI.3.1.2 Exemple 2 :

Plaque simplement appuyée avec les mêmes propriétés matérielles et dimensions de l'exemple 1 seulement, $\sigma_0 = 400,436 \text{kn/mm}^2$

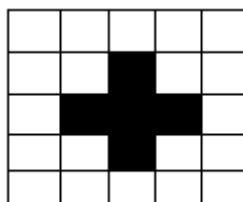
Chargement

Noeuds 7, 18, 8, 20, 9

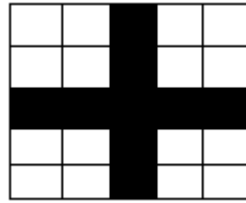
0.68



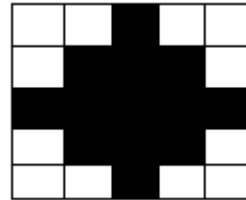
0.82



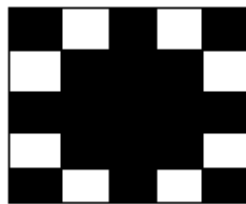
0.890



0.913



0.959



0.963



VI.3.1.3 Interprétation :

D'après les lois de la résistance des matériaux, les calculs des plaques simplement supportées ou encastées sollicitées en flexion, fournissent des flèches plus défavorables au centre.

On remarque ainsi dans les tests effectués sur les deux exemples cités ci-dessus, que la plastification débute au nœud central le plus sollicité et s'étend progressivement aux autres.

Dans le cas d'une plaque encastée la propagation de la plastification s'étend aux alentours des encastresments jusqu'à plastification totale du fait que les rotations sont bloquées suivant les deux directions, ceci se traduit par le fait que le cumul de chargement est répartie entre le centre et les alentours de la plaque, par contre dans le cas d'une plaque simplement appuyée, la propagation de la plastification s'étend aux alentours du nœud central jusqu'à plastification totale du fait que les rotations sont libres, ceci engendre une forte pression au centre suivie par une propagation vers l'extérieur du fait du cumul de chargement.

VI.3.1.4 Exemple 3 :

Dans cet exemple on fait varier l'épaisseur (0.01, 0.015, 0.02) de la plaque pour les éléments Hétérosis et Lagrange à 9 nœuds, Serendip à 8 nœuds et celui à 4 nœuds. On garde les mêmes propriétés matérielles et dimensions de l'exemple précédent sauf $\sigma_0=1600\text{kn/mm}^2$ et les conditions limites suivantes :

Déplacement w nul pour les nœuds 1, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 16, 17.

Rotations θ_x nulle pour les nœuds 1, 2, 3, 6, 9, 13, 15, 16, 21.

Rotations θ_y nulle pour les nœuds 1, 4, 7, 8, 9, 10, 17, 18, 20.

Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur pour l'élément Hétérosis

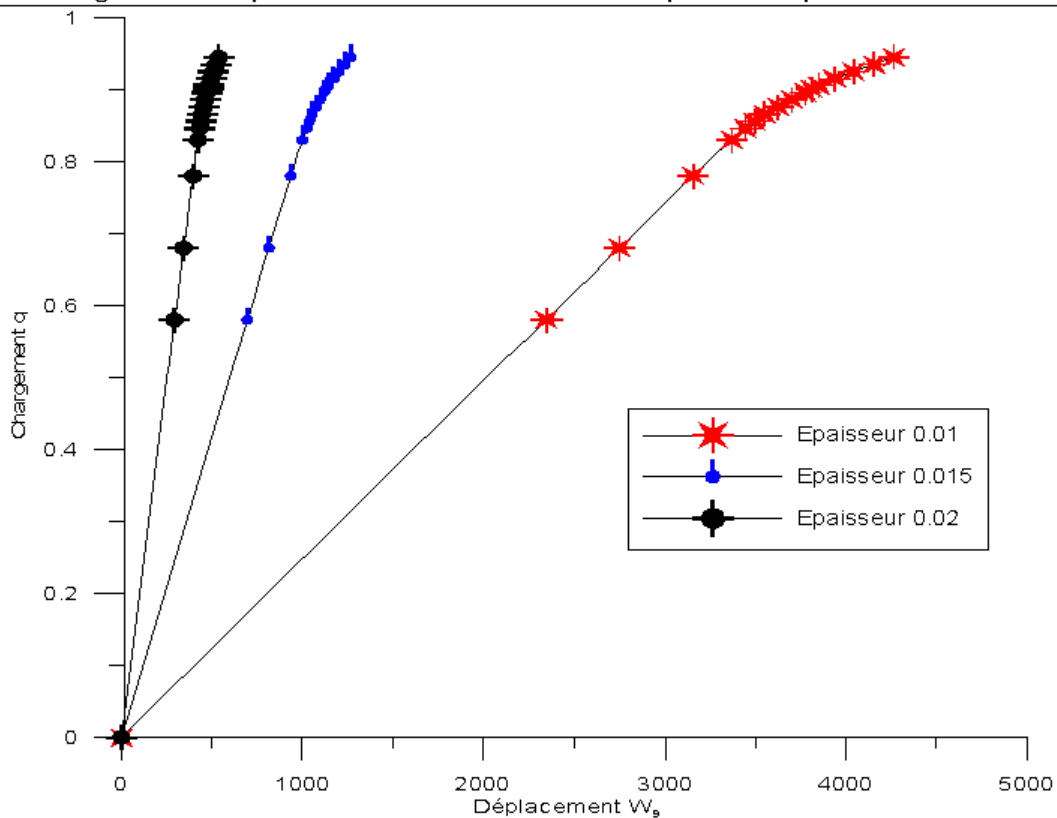


Figure 6.2.1

Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur pour l'élément de Lagrange

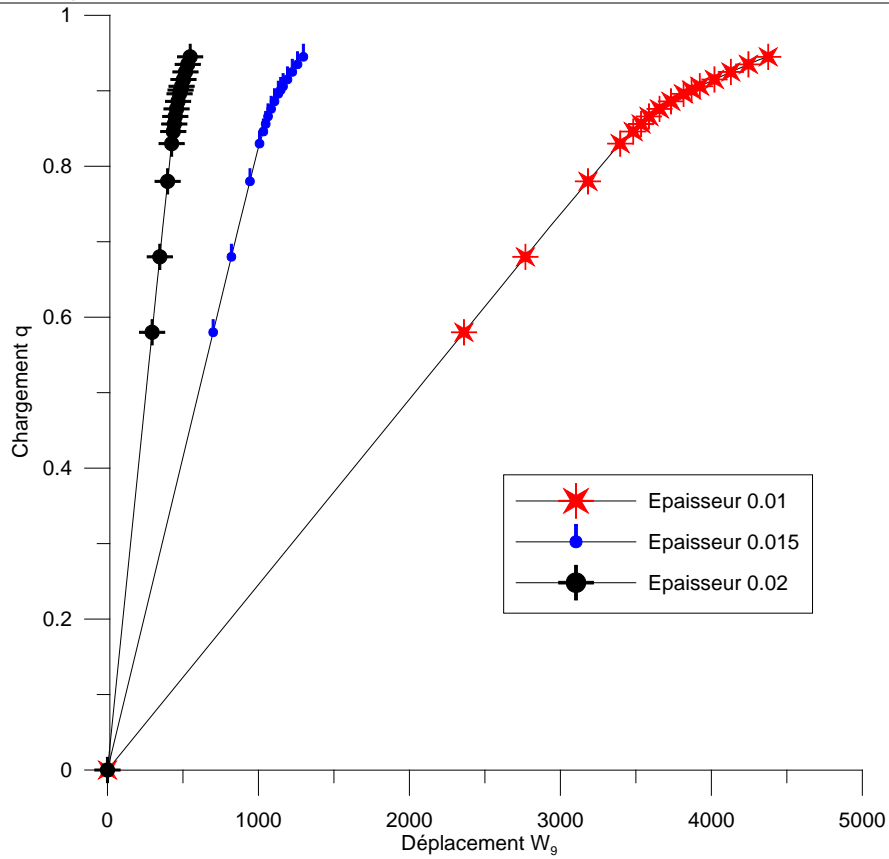


Figure 6.2.2

Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur pour l'élément de Serendip

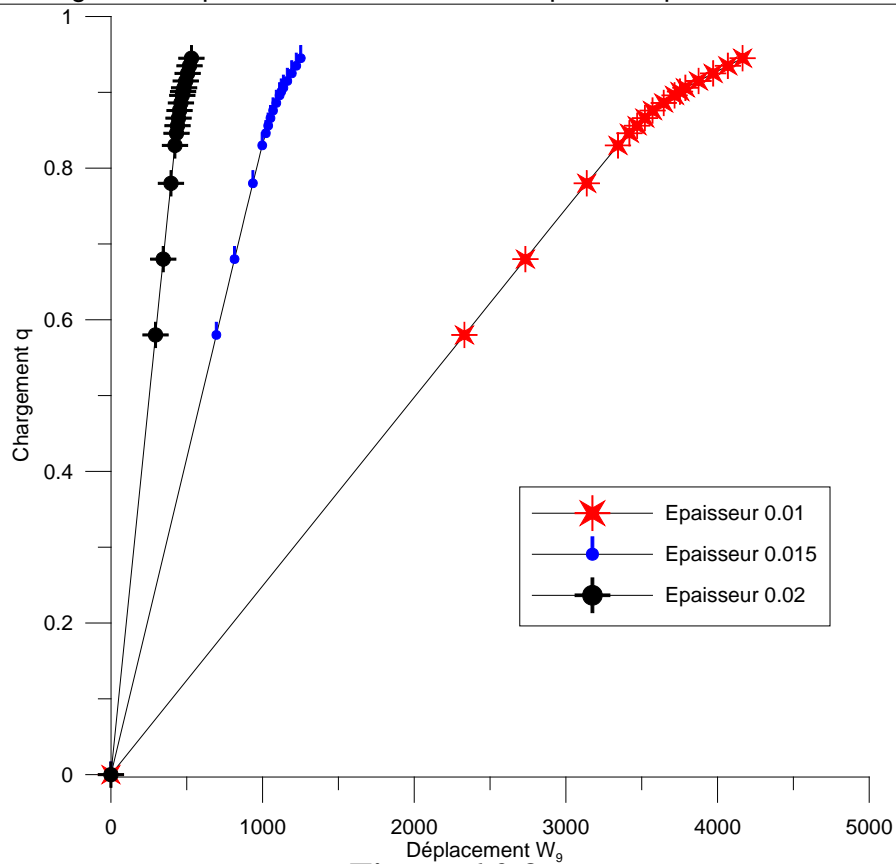


Figure 6.2.3

Courbes chargement déplacement en fonction de l'épaisseur pour l'élément à 4 noeuds

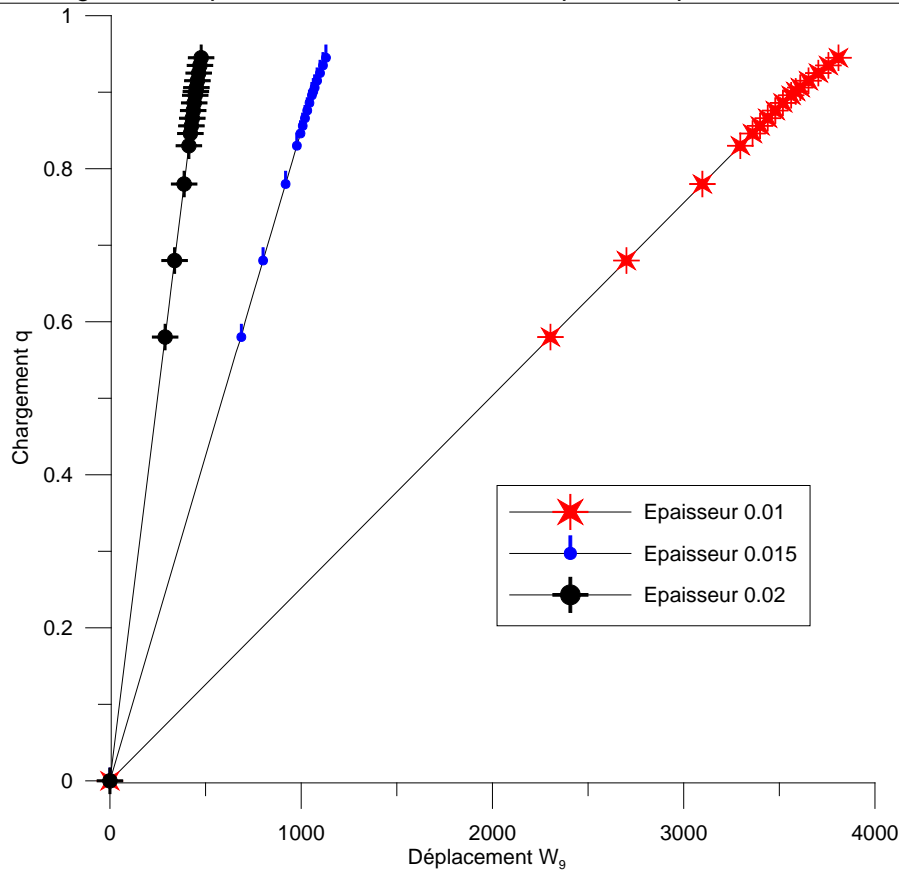


Figure 6.2.4

VI.3.1.5 Interprétation :

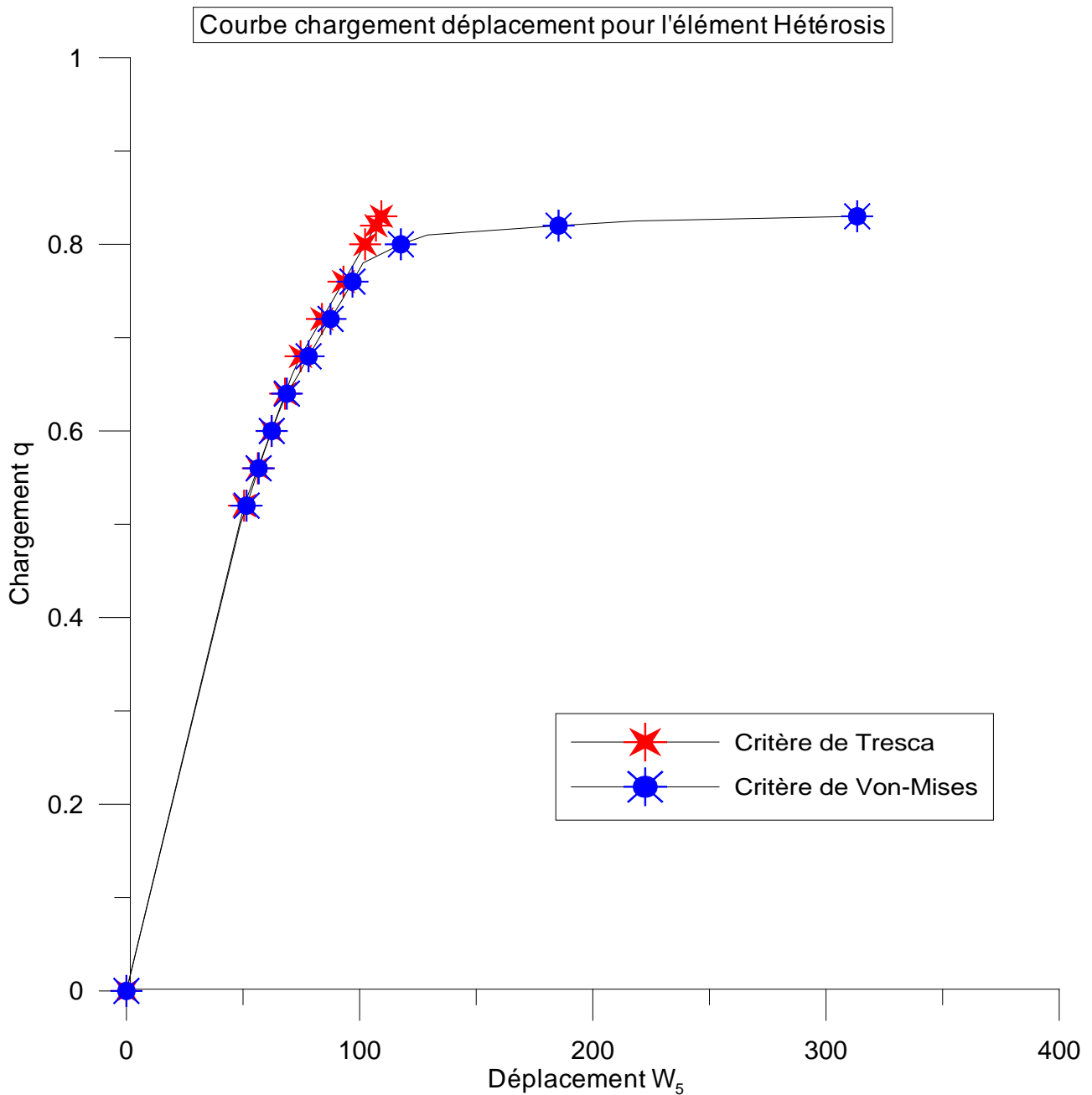
On remarque que la courbe de déplacement latéral du nœud 9 en fonction du chargement (Figure 6.2) s'incline davantage en diminuant l'épaisseur et ainsi la limite élastique diminue. De plus, pour le cas de $h = 0.01 \div 0.015\text{m}$, la courbe reste encore dans le domaine élastique à l'incrément de charge appliqué pour le cas de l'élément à 4 nœuds alors que pour $h = 0.02\text{m}$ la plastification débute.

Si on diminue encore l'épaisseur, en appliquant les mêmes conditions, la plastification de la plaque sera plus immédiate. Ainsi, l'épaisseur joue un rôle dans le phénomène de plastification.

VI.4 Comparaison entre les critères de Von-Mises et Tresca :

VI.4.1 Exemple 4 :

On reprend l'exemple 1 en utilisant les deux critères de Tresca et Von-Mises

**Figure 6.3**

La courbe 6.3 indique que l'utilisation du critère de plasticité de Von-Mises donne de meilleurs résultats puisque la courbe est légèrement plus inclinée. On voit que la plastification des nœuds se déclenche d'abord pour le cas du critère de Von-Mises puis, après l'augmentation de charge, pour celui de Tresca. Par ailleurs, le critère de Von-Mises est recommandé par Naday dans le cas des métaux.

VI.5 Comparaison entre la méthode de rigidité initiale et la méthode de rigidité tangentielle :

VI.5.1 Exemple 5 :

On reprend l'exemple 1 avec deux méthodes de résolution différentes. Il s'agit de la méthode de rigidité tangentielle et la méthode de rigidité initiale.

Courbe Chargement déplacement de l'élément Hétérosis avec variation de la méthode de résolution

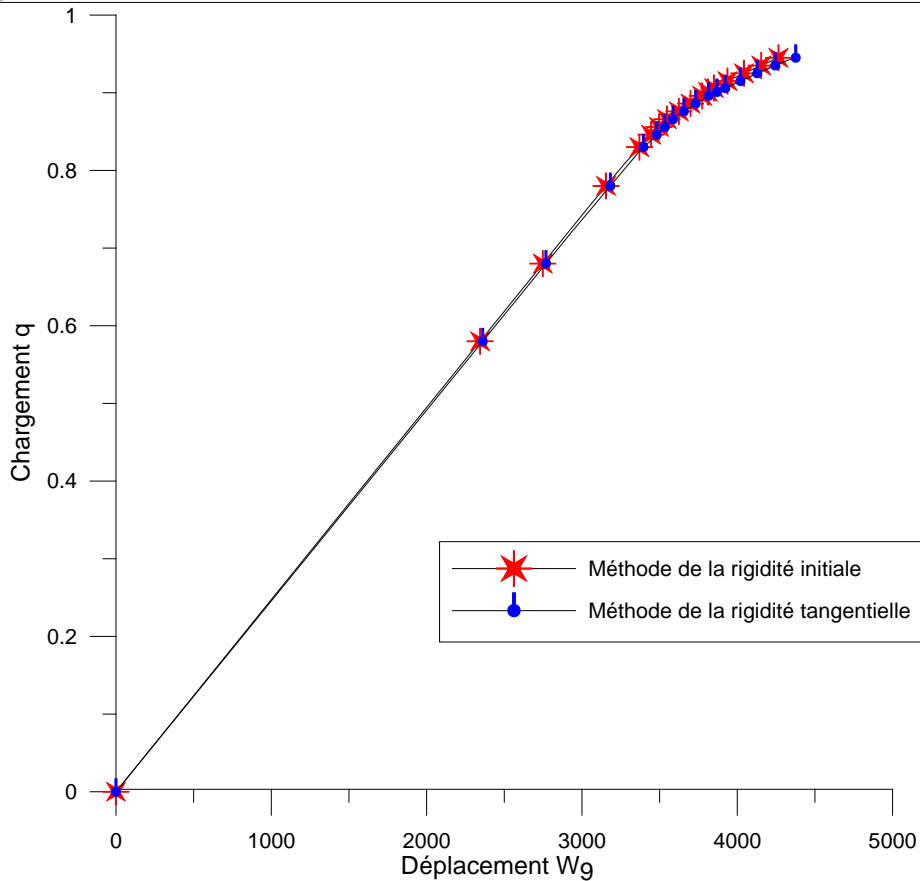


Figure 6.4

VI.5.2 Interprétation :

La figure 6.4 donne le déplacement latéral du nœud 9 en fonction du chargement en utilisant deux méthodes de résolution. On remarque que les résultats de la méthode de rigidité tangentielle sont plus précis que ceux de la rigidité initiale mais il faut à chaque incrément ou itération calculer la matrice de rigidité alors que pour la méthode de rigidité initiale, la matrice de rigidité reste invariable. De plus avec la méthode de rigidité tangentielle il y a risque de singularité de la matrice.

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

VII.1 Conclusions :

La méthode des éléments finis permet de modéliser un comportement élasto-plastique tenant compte des divers phénomènes observés physiquement.

La convergence suit les mêmes règles qu'en analyse linéaire.

Les éléments Hétérosis et Lagrange sont plus performants et le raffinement du maillage garantit une convergence vers la solution exacte.

La formulation isoparamétrique offre un avantage supplémentaire dans une analyse non linéaire ; elle permet grâce à l'intégration numérique de suivre la plastification à l'intérieur des éléments.

L'application judicieuse d'un chargement incrémentale permet de suivre l'apparition et la propagation des zones plastiques.

VII.2 Recommandations :

- modèle élasto-plastique spécifique au béton armé
- combinaison avec la non linéarité géométrique (grands déplacements)
- technique de résolution non linéaire « arc length » qui permet de suivre des chemins non linéaires complexes
- étude dynamique
- modèles multicouches

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] – Gérard Coffignal.- “*mécanique non-linéaire et éléments finis*”. LMSP, ENSAM, 30 janvier 2001 Fascicule 5.
- [2] – Richard H. Gallagher. - “*Introduction aux éléments finis*”. Collection scientifique de l’IPSI.
- [3] – R.J. Melosh.- “*Bases for the derivation of stiffness matrices for solid continua*”. AIAA J., bf 1, 1631-1637, 1963.
- [4] – B.M. Irons and A. Razzaque.- “*Experiences with the patch test for convergence of finite elements, in Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*”. ed. By K. Aziz, Academic Press, New York, 1972.
- [5] – A. Adini and R. W. Clough.- “*Analysis of plate bending by the finite element method*”. NSF report for Grant G-7337, Dept. of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1960. Also A. Adini- “*Analysis of shell structures by the finite element method*”. Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1961.
- [6] – J.L. Tocher and K.K. Kapur.-“*Comment on Melosh’s paper*”. AIAA J., 3, 1215-1216, 1965.
- [7] – A. Adini, R.W. Clough.- “*Analysis of plate bending by the finite element method*”. Report to the Nat. Sci. Found. U.S.A., G7337, 1961.
- [8] – R.J. Melosh.- “*Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method*”. AIAA J1, 1, 1631-1637, 1963.
- [9] – S.W. Papenfuss.-“*Lateral plate deflection by stiffness methods and application to a marquee*”. M.S. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Washington, Seattle, WA, 1959.
- [10] – B.M. Irons and K. Draper.-“*Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending*”. AIAA J., 3, 965-966, 1965.
- [11] – F.K. Bogner, R.L. Fox and L.A. Schmidt Jr.- “*The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas*”. Proc. Conf. on matrix Methods in Structural Mechanics, WPAFB, Ohio, 1965, in AFFDL TR 66-80, pp. 397-444, 1966.
- [12] – G.P. Bazeley, Y, K. Cheung, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz. - “*Triangular elements in plate bending – conforming and nonconforming solutions*”. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, WPAFB, Ohio, 1965, in AFFDL TR 66-80, pp. 547-576, 1966.

- [13] – L.S.D. Morley.- “*The constant moment plate bending element*”. J. Strain Analysis 6, n° 1, pp. 20-24, 1971.
- [14] – B. Fraeijs de Veubeke.- “*A conforming finite element for plate bending*”. Int. J. Solids Struct., 4, 9, 95 – 108, 1968.
- [15] – R.W. Clough, J.L Tocher. - “*Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending*”. Matrix Methods in structural mechanics. AFFDL TR-66-80, Nov. 1965, pp. 515-545.
- [16] – Addendum to Bazeley et. al. paper cited above, 573-576 in AFFDL TR 66-80.
- [17] – B. Faeijs de Veubeke.- “*A conforming finite element for plate bending*”. International J1 Solids Struct., 4, n°1, pp. 95-108, 1968.
- [18] – A. Razzaque.- “*Program for triangular bending elements with derivative smoothing*”. Int. J. Numer. Meth. Engrg., 6, 333 – 343, 1973.
- [19] – L.R. Hermann. - “*A bending analysis for plates*”. in Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics. AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, 577-604, 1966.
- [20] – E.Reissner.- “*the effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*” . J. Appl. Mech., 12, pp.A69-A77, 1945.
- [21] – T.H.H. Pian. - “*Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions*”. AIAA J., 2, 1333 – 1336, 1964.
- T.H.H. Pian and P. Tong.- “*Basis of finite element methods for solid continua*”. Int. J. Numer. Meth. Engrg., 1, 3 – 29, 1969.
- [22] – O.C. Zienkiewicz.- “*The Finite Element Method in Engineering Science*”. McGraw-Hill, New York, 3rd edn., 1977.
- D.J. Allman.- “*Triangular finite elements for plate bending with constant and linearly varying bending moments*”. Proc. IUTAM Conf. on High Speed Computing of Elastic Structures, Liège, Belgium, 105-136, 1970.
- [23] – J. Stricklin, W. Haisler, P. Tisdale and R. Gunderson. - “*A rapidly converging triangular plate bending element*”. AIAA J., 7, 180-181, 1969.
- G. Dhatt.- “*An efficient triangular shell element*”. AIAA J., 8, No. 11, 2100-2102, 1970.
- [24] – J.L. Bathoz, K.-J. Bathe and Lee-Wing Ho. - “*A study of three-node triangular plate bending elements*”. Int. J. Numer. Meth. Engrg., 15, 1771-1812, 1980.
- [25] – J.L. Bathoz. - “*An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element*”. Int. J. Numer. Meth. Engrg., 18, 1077-1089, 1982.
- [26] – R.J. Melosh.- “*A flat triangular shell element stiffness matrix*”. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, WPAFB, Ohio, 1965, in AFFDL TR 66-80, 503-509, 1966.

- [27] – J.H. Argyris, P.C. Dunne, G.A. Malejannakis and E. Schelkle.- “ *A simple triangular facet shell element with applications to linear and nonlinear equilibrium and elastic stability problems*”. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 11, 215-247, 1977.
- [28] – T.J.R. Hughes, R. Taylor and W. Kanolkulchai. - “*A simple and efficient finite element for plate bending*”. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 11, 1529-1543, 1977.
- [29] – E.D. Pugh, E. Hinton and O.C. Zienkiewicz. - “*A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration*”. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 12, 1059-1078, 1978.
- [30] – R.H. MacNeal.- “*A simple quadrilateral shell element*”. *Computers & Structures*, 8, 175-183, 1978.
R.H. MacNeal. - “*Derivation of stiffness matrices by assumed strain distributions*”. *Nucl. Engrg. Design*, 70, 3-12, 1982.
- [31] – M.A. Crisfield. - “*A four-noded thin plate bending element using shear constraints*”. A modified version of Lyons’ element, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 39, 93-120, 1983.
- [32] – A.Tessler and T. J. R. Hughes.- “*A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear*”. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 50, 71-101, 1985.
- [33] – E.N. Dvorkin and K.J. Bathe. - “*A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis*”. *Engrg. Comp.*, 1, 77-88, 1984.
- [34] – G.M. Stanley.- “*Continuum-based shell element*”. Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1985.
K.C. Park and G.M. Stanley. - “*A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains*”. *J. Appl. Mech.*, 108, 278-286, 1986.
- [35] – T. Belytschko, H. Stolarski and N. Carpenter. - “*A C^0 triangular plate element with one-point quadrature*”. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 20, 787-802, 1984.
- [36] – A.Tessler and T.J.R. Hughes. - “*A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear*”. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 50, 71-101, 1985.
- [37] – P.G. Bergan.- “*Finite elements based on energy-orthogonal functions*”. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 11, 1529-1543, 1977.
- [38] – P.G. Bergan and M.K. Nygard. - “*Finite elements with increased freedom in choosing shape functions*”. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 20, 643-664, 1984.
- [39] – P.G. Bergan and L. Hanssen. - “*A new approach for deriving ‘good’ finite elements*”. MAFELAP II Conference, Brunel University, 1975, in *The Mathematics of Finite Elements and Applications*. Vol. II, ed. by J.R. Whiteman, Academic Press, London, 1976.

- L. Hanssen, T.G. Syvertsen and P.G. Bergan.- “ *Stiffness derivation based on element convergence requirements*”. MAFELAP III Conference, Brunel University, 1978, in the Mathematics of Finite Elements and Applications – Vol III, ed.by J.R. Whitemen, Academic Press, London, 1979.
- P.G. Bergan and M.K. Nygard. - “*Nonlinear shell analysis using free formulation finite elements*” Proc. Europe-US Symposium on Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Springer-Verlag, 1986.
- [40] – B.M. Irons. - “*Putative high-performance plate bending element*”. Letter to Editor, Int. J. Numer. Meth. Engrg., 19, 310, 1983.
- [41] – T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, W. Knoknukulchai. - “*A simple and efficient finite element for plate bending*”. Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 11, 1529-1543, 1977
- [42] – R.H Mac Neal.-“*A simple quadrilateral shell element*”. Computers and Structures, vol. 8, pp. 173-183, 1978.
- [44] – Jean-François Remacle.- “*Mécanique des structures*” Université catholique de Louvain Faculté des Sciences Appliquées Unité de Génie Civil et Environnemental Version provisoire – 25 Novembre 2002.
- [45] – A.Barbas R.Frank.- “*Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'élastoplasticité*” INSA Bibliothèque 25 mai 1989.
- [46] – J.F.Imbert.- “*Analyse des structures par éléments finis*” Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
- [47] – P.Trompette.- “*Mécanique des structures par la méthode des éléments finis statique et dynamique*” MASSON Paris Milan Barcelone Bonn 1992.
- [48] – F.Frey J.Jirousek.- “*Analyse des structures et milieux continus par la méthode des éléments finis*” Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne Volume 6.
- [49] – E.Hinton D.R.J.Owen. - “*Finite Element Programming*” Academic Press, INC.
- [50] - Gérard Coffignal.- “*mécanique non-linéaire et éléments finis*”. LMSP, ENSAM, 30 janvier 2001 Fascicule 8.
- [51] – E.Hinton D.R.J.Owen. - “*Finite Element Software for Plates and Shells*” Pineridge Press.
- [52] – T. J. R. Hughes, M. Cohen.- “*The Heterosis finite element for plate bending*” Computers and , vol. 9, pp. 445-450.
- [53] – Claude Delannoy.- “*Programmer en Fortran 90*” Quatrième tirage 2001.
- [54] – Stephen P.Timoshenko S.Woinowsky-Krieger.- “*Theory of Plates and Shells*” International Student Edition. Copyright 1970.