

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Badji Mokhtar-Annaba (UBMA)  
Faculté des sciences de l'ingénieur  
Département Electronique



## THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCE EN AUTOMATIQUE

Présentée à l'Université de Badji Mokhtar Annaba  
en vue de l'obtention du grade de

**Docteur**  
en Automatique

Par

**Sabrina Aouaouda**

Magister en Automatique industrielle-UBMA

**Titre**

**Modélisation multimodèle et commande  
prédictive d'une station d'épuration**

Membres de Jury

<b>M. Djeghaba</b>	Professeur-UBMA	Président
<b>M. Tarek Khadir</b>	Professeur-UBMA	Rapporteur
<b>J. Ragot</b>	Professeur-CRAN, France	Examineur
<b>M. Faouzi Harkat</b>	Maître de Conférences -UBMA	Examineur
<b>A. Lachouri</b>	Maître de Conférences-Univ. Skikda	Examineur
<b>S. Kechida</b>	Maître de Conférences-Univ. Guelma	Examineur

**Année 2012**

*Je dédie cette thèse  
A mes parents et A Hakim  
A mes frères et sœurs  
A mes nièces  
A mes amis d'enfance*

# Remerciements

---

Ce mémoire présente le travail effectué durant quatre ans et conclut ma thèse de doctorat en Automatique et Informatique Industrielle au sein de l'université de Badji Mokhtar Annaba.

Je tiens à remercier Monsieur **M. T. Khadir**, Professeur au laboratoire LBGED, pour la proposition du sujet de cette thèse et pour ces conseils et son soutien tout au long de ce travail.

J'ai été profondément honoré que Monsieur **M. Djeghaba**, Professeur à l'université de Badji Mokhtar Annaba, ait accepté d'examiner ce travail et de présider ce jury.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur **José Ragot**, Professeur à l'INPL-France, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail de thèse et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de l'examiner.

Que Monsieur **M. Faouzi Harkat**, Maître de Conférences à l'université de Badji Mokhtar -Annaba, Monsieur **Abderezak Lachouri**, Maître de Conférences à l'Université de Skikda, et Madame **S. Kechida** Maître de Conférences à l'Université de Guelma, trouvent ici ma respectueuse gratitude pour avoir accepté de prendre d'examiner ce travail de thèse.

J'ai été très honoré de présenter mes travaux de thèse devant un jury de cette envergure. Je vous remercie infiniment.

Mon passage au CRAN a été une aventure passionnante en quête de savoir et compréhension du monde qui nous entoure. Cela constitue pour moi une formidable expérience sur le plan scientifique et le plan humain.

Je remercie vivement Messieurs **Tahar Bouarar**, et **Dalil Ichalal** pour leur soutien tout au long de mes travaux de recherche.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur **Mohammed Chadli**, Maître de conférences à l'Université de Picardie Jules Verne (France), pour l'intérêt qu'il a témoigné à l'égard de mon travail.

Que tous mes amis et collègues trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance.

Enfin, mes remerciements vont à toute ma famille pour son soutien pendant toutes mes études.



# Table des matières

---

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## **Chapitre 1**

<b>Généralités et position du problème.....</b>	<b>5</b>
---	----------

1.1	Introduction.....	6
1.2	Présentation de la structure multimodèle (MM).....	6
1.2.1	Multimodèle de Takagi-Sugeno.....	8
1.2.2	Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S).....	11
1.2.3	Stabilité des modèles Takagi-Sugeno (T-S).....	14
1.3	Estimation d'état.....	15
1.3.1	Généralité.....	15
1.3.2	Observateur pour les systèmes de Takagi-Sugeno.....	17
1.3.2.1	Variable de décision mesurable (VDM).....	18
1.3.2.2	Variable de décision non mesurable (VDNM).....	19
1.4	Commande tolérante aux défauts.....	25
1.4.1	Introduction.....	25
1.4.2	Classification des approches FTC.....	25
1.5	Motivation et position du problème.....	29
1.6	Conclusion.....	30

## **Chapitre 2**

<b>Commande tolérante aux défauts des systèmes Takagi-Sugeno incertains et perturbés .....</b>	<b>32</b>
--	-----------

2.1	Introduction.....	33
2.2	Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire.....	33
2.2.1	Définition des modèles T-S incertains et perturbé (TSIP).....	34
2.2.2	Stratégie de commande tolérante aux défauts.....	35
2.2.3	Objectif.....	36
2.2.4	Variable de décision mesurable.....	37
2.2.4.1	Variable de prémisse non défectueux.....	37
2.2.4.2	Variable de prémisse défectueux.....	45
2.2.5	Variable de décision non mesurable.....	52
2.3	Conclusion.....	60

## **Chapitre 3**

<b>Application à une station d'épuration.....</b>	<b>62</b>
---	-----------

3.1	Introduction.....	63
-----	-------------------	----

3.2	Description du procédé d'épuration d'eaux.....	64
3.2.1	Le procédé d'épuration par boues activées.....	64
3.2.2	Modélisation du procédé.....	68
3.2.3	Écriture du modèle ASM1.....	73
3.3	Analyse de sensibilité.....	75
3.3.1	Introduction.....	75
3.3.2	Modèle ASM1 réduit.....	77
3.3.3	Analyse de sensibilité du modèle ASM1 réduit.....	79
3.3.4	Linéarisation du modèle ASM1 réduit.....	81
3.4	Approche MM pour la commande tolérante aux défauts	87
3.4.1	Modèle ASM1 réduit.....	87
3.4.2	Obtention d'un MM de type T-S pour le modèle ASM1 réduit.....	89
3.4.3	Commande tolérante aux défauts pour le modèle ASM1 réduit.....	92
3.5	Conclusion.....	96

## **Chapitre 4**

### **Commande prédictive floue sous contraintes "Approche LMI".. 98**

4.1	Introduction.....	99
4.2	Commande prédictive.....	101
4.2.1	Position du problème.....	102
4.2.2	Etat de l'art de la stabilité des MBPC.....	104
4.3	La stratégie proposée.....	106
4.3.1	La transformation sous forme LMI.....	109
4.4	Application.....	110
4.4.1	Mise sous forme multimodèle.....	111
4.4.2	Commande prédictive MBPC stabilisante.....	112
4.5	Conclusion.....	116

### **Conclusion générale et perspectives..... 118**

### **Références bibliographiques..... 121**

### **Annexe A..... 132**

### **Annexe B..... 134**

## Table des figures

---

Figure 1.1.	Structure et implémentation d'un modèle T-S Standard.....	11
Figure 1.2.	Secteur non linéaire global.....	12
Figure 1.3.	Secteur non linéaire local.....	12
Figure 1.4.	Principe de l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues.....	16
Figure 1.5.	Architecture FTC.....	27
Figure 2.1.	Architecture de la commande tolérante par poursuite de trajectoire.....	36
Figure 2.2.	Evolution des fonctions d'appartenance.....	49
Figure 2.3.	Comparaison des défauts et leurs estimés.....	50
Figure 2.4.	Commande sans défaut et commande tolérante.....	50
Figure 2.5.	Erreurs d'estimation d'état et de poursuite de trajectoire (Théorème 2.1 en Haut) et (Théorème 2.2 en bas).....	51
Figure 2.6.	Comparaison entre la sortie du système de référence (sans défaut), sortie du Système avec FTC (Théorème 2.1) et sortie du système avec FTC (Théorème 2.2).....	51
Figure 2.7.	Comparaison entre les états du système de référence (sans défaut), états du système avec FTC (Théorème 2.1) et états du système avec FTC (Théorème 2.2).....	52
Figure 3.1.	Schéma du procédé d'épuration par boues activées.....	67
Figure 3.2.	Matrice des cinétiques du modèle ASM1.....	71
Figure 3.3.	Méthodologie de Simplification du modèle.....	76
Figure 3.4.	Structure d'un algorithme évolutionnaire.....	84
Figure 3.5.	Evolution des entrées du système.....	86
Figure 3.6.	Les sorties du modèle linéaire (--) et celle du modèle non linéaire (___).....	86
Figure 3.7.	Evolution des fonctions d'appartenance.....	91
Figure 3.8.	Les entrées réelles du modèle ASM1.....	94
Figure 3.9.	Défaut et son estimé - commande sans défaut et commande tolérante.....	95
Figure 3.10.	Erreurs d'estimation d'état et de poursuite de trajectoire.....	95
Figure 3.11.	Comparaison entre les états du système de référence (sans défaut), états estimés et états du système avec FTC.....	96
Figure 4.1.	Principe de la commande prédictive sur un horizon fixe et glissant.....	101
Figure 4.2.	Schéma de principe de la commande prédictive.....	104
Figure 4.3.	Evolution de la sortie $y_1$ .....	113
Figure 4.4.	Evolution de la sortie $y_2$ .....	114
Figure 4.5.	Evolution de la commande $u$ .....	114
Figure 4.6.	Evolution des erreurs de prédiction.....	115
Figure 4.7.	Evolution des fonctions d'appartenance.....	115

# Notations

---

## Acronymes

LMI(s)	Inégalité(s) matricielle(s) linéaire(s)
LPV	Linéaire à paramètres variants
LTI	Linéaire à temps invariant
MM(s)	Multimodèle(s)
MIMO	Multi-entrée multi-sortie (Multiple Input Multiple Output)
SISO	Mono-entrée mono-sortie (Single Input Single Output)
STEP	Station d'épuration
T-S	Takagi-Sugeno
PIO	Observateur proportionnel-intégral
MFC	Modèle Flou Continu
MFD	Modèle Flou Discret

## Ensembles

$\mathbb{R}$	Ensemble de nombre réels
$\mathbb{R}^+$	Ensemble de nombre réels positifs
$\mathbb{R}^n$	Espace réel Euclidien de dimension $n$
$\mathbb{R}^{n \times q}$	Ensemble des matrices à éléments réels de dimension $(n \times q)$

## Vecteurs et matrices

$O_{n \times m}$	Matrice nulle de dimension $n \times m$
$I_n$	Matrice identité de dimension $n$
$X > 0$	Matrice $X$ symétrique, définie positive
$X^T$	Transposée de $X$
$X^{-1}$	Inverse de $X$
$\begin{bmatrix} A_{11} & * \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique dont le symbole $*$ représente $A_{21}^T$



# Introduction générale

---

L'automatique repose sur la notion de systèmes, représentant un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. L'un des enjeux de l'automatique est de proposer un contrôleur adapté au système à piloter garantissant la réalisation de la tâche souhaitée. De nombreuses approches, pour les systèmes continus, ont été proposées pour la synthèse de lois de commande et peuvent être classées en deux catégories dites « linéaires » ou « non linéaire ».

- L'automatique linéaire considère le fonctionnement du système autour d'un point de fonctionnement donné. La synthèse d'une loi de commande linéaire se base alors sur une théorie bien maîtrisée mais ne garantit pas la stabilité du système sur tout l'espace d'état.
- L'automatique non linéaire repose quant à elle sur des outils plus complexes et qui nécessitent parfois de nouveaux développements théoriques. L'objectif est de garantir la stabilité des systèmes pour lesquels le cas linéaire n'est pas adapté, notamment lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes de stabilité ou d'asservissement sur une plus large région de l'espace d'état.

Lors de l'étape de modélisation, le défi de l'automaticien est de proposer un modèle de connaissance capable de représenter fidèlement les phénomènes physiques rencontrés. Dans ce contexte, il peut être intéressant de tenir compte des imprécisions et incertitudes de modélisation pour pouvoir assurer les performances désirées par le biais de la synthèse de lois de commande robustes [Zhou et Doyle, 1998]. Notons par ailleurs qu'un modèle trop simplifié est souvent loin de la réalité et par conséquent considéré comme « faux », alors qu'un modèle trop détaillé peut être inexploitable avec les outils actuels d'analyse des systèmes. Ainsi, la prise en compte d'incertitudes pour la stabilisation des systèmes non linéaires constitue un compromis entre complexité et validité de la solution et conduit à une alternative intéressante pour la commande des systèmes complexes.

En effet, l'hypothèse de linéarité des relations entrées sorties d'un système permet d'élaborer simplement un modèle approximant son comportement. Ce type de modèles a été largement étudié dans différents contextes : l'identification, l'estimation d'état, la commande et le diagnostic. Cependant, de tels modèles ne permettent la représentation du comportement d'un système qu'autour d'un point de fonctionnement donné, l'hypothèse de linéarité n'étant vérifiée que dans une zone restreinte de l'espace de fonctionnement. Sachant que les systèmes

réels sont de nature non linéaire, les systèmes de commande et de diagnostic développés sur la base de modèles linéaires fournissent des performances dégradées dès qu'on s'éloigne du point de fonctionnement.

Une manière élégante de représenter un système non linéaire repose sur une représentation multi-modèle. Celle-ci consiste en une collection de systèmes linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires. Plusieurs catégories de multi-modèles existent dans la littérature, notamment les systèmes Linéaires à Paramètres Variant dans le temps (LPV) [Henrion et Garulli, 2004] [Zerger et al., 2009] ou les systèmes quasi LPV, encore appelés systèmes Takagi-Sugeno (T-S) [Takagi et Sugeno, 1985]. Notons que ces derniers possèdent une propriété d'approximation universelle des systèmes affines en la commande et présentent l'avantage de pouvoir représenter de manière exacte un modèle de connaissance non linéaire sur un compact de l'espace d'état [Tanaka et Wang, 2001]. Ainsi, l'intérêt majeur de ce type d'approche est qu'elle permet d'étendre de nombreux concepts théoriques de l'automatique linéaire au cas des systèmes non linéaires.

L'intérêt suscité par les méthodes de modélisation sous forme de multi-modèle T-S a été largement démontré. Par ailleurs, il apparaît clairement que la prise en compte d'incertitudes conduirait à une généralisation des résultats applicables à une plus large classe de systèmes physiques. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de recherche de cette thèse visant aussi bien à proposer qu'à étendre des méthodologies de synthèse de lois de commande pour les systèmes T-S incertains et perturbés.

Parmi les études concernant l'estimation des multimodèles, la plupart de ces travaux sont dédiés à l'estimation d'état des multimodèles à Variables de Décision Mesurables (VDM), et plus particulièrement représentés par les variables d'entrée et de sortie du système. Malheureusement, dans beaucoup de situations, ces variables de prémisse sont les variables d'état, dont les mesures ne sont pas toujours disponibles. Seulement quelques résultats [Ichalal, 2009; Yoneyama, 2009] sont dédiés à l'exploitation de ces modèles pour l'estimation. Ceci nous a motivés pour étudier ce dernier type de systèmes, quelques résultats étant proposés au cours de cette thèse.

L'objectif du travail présenté dans cette thèse est d'exploiter la structure T-S à **Variables de Décision Non Mesurables (VDNM)**, afin de concevoir des observateurs d'état pour les systèmes non linéaires. Les observateurs ainsi développés sont utilisés pour la conception d'une stratégie de diagnostic pour systèmes non linéaires permettant l'estimation des défauts. Ces informations sont ensuite exploitées pour élaborer des commandes tolérantes aux défauts. On propose ainsi d'étendre un certain nombre de résultats connus pour les

systèmes T-S à VDM au cas des systèmes VDNM. La stratégie de commande tolérante aux défauts permet de s'accommoder automatiquement de l'effet de certains types de défauts qui peuvent apparaître sur des capteurs, des actionneurs ou sur le système tout en étant capable de maintenir la stabilité de ce dernier et d'éviter les situations catastrophiques.

La voie biologique de traitement des déchets et des effluents consiste en l'utilisation de microorganismes confinés dans des bassins dans lesquels les conditions environnementales et hydrodynamiques doivent être maintenues appropriées pour faciliter la dépollution. A ce titre, elle allie simplicité et atouts environnementaux en utilisant uniquement les capacités épuratoires d'écosystèmes naturels. Un des défis majeurs est alors de développer des procédés fiables, robustes et peu coûteux permettant le traitement simultané ou séquentiel des diverses sources de pollution. Or, du fait de la grande variabilité des intrants et de la mixité des populations microbiennes qui traitent ces pollutions, la stabilité, les performances et la robustesse des systèmes de dépollution ne peuvent être obtenues que par une pénétration très importante de l'automatique dans leur gestion et leur contrôle.

Ainsi est apparue au fil de ces deux dernières décades une automatique du traitement biologique des eaux usées dans le cadre de laquelle s'inscrivent ces travaux. Car si le domaine a bénéficié d'importants efforts de recherche, de nombreux problèmes théoriques demeurent. De plus, l'application de ces méthodes spécifiques de l'automatique dans un contexte industriel, voire même simplement pilote, fait encore largement défaut.

Le mémoire composé de quatre chapitres, est organisé de la façon suivante :

**Le premier chapitre** présente les principes généraux de la structure multimodèle, ainsi que les différentes structures multimodèles existantes. Les modèles de Takagi-Sugeno sont alors introduits en précisant leur intérêt pour l'étude des systèmes non linéaires. Un bref rappel sur des résultats portant sur la stabilité, la stabilisation et la conception d'observateurs pour systèmes T-S est présenté, en mettant en exergue deux classes de modèles T-S : les modèles à variables de décision mesurables et les modèles à variables de décision non mesurables. Cette dernière classe fera l'objet de la majeure partie des travaux qui seront présentés dans ce mémoire. Enfin quelque technique de commande tolérante aux défauts et de diagnostic à base de modèle sont décrite.

**Le second chapitre** constitue une première contribution de ce travail de thèse, en effet l'objectif est de proposer une méthode de synthèse de commande tolérante aux défauts pour des modèles T-S sous forme standard tout en tenant compte des incertitudes de modélisation

et des perturbations externes lors de la synthèse de la loi de commande. L'approche est basée sur la poursuite de trajectoire d'un modèle de référence décrivant le bon fonctionnement du système. Dans ce cas, la commande comprend un terme correspondant à la commande nominale du système à laquelle sont ajoutés des termes tenant compte l'estimation de l'état et des défauts. Les conditions de stabilité et de stabilisation sont exprimées en termes d'Inégalité matricielles linéaire (LMI) pour les modèles T-S incertains et /ou perturbés via une fonction candidate quadratique de Lyapunov. Un observateur Proportionnel-Intégral (PI) est utilisé. L'avantage de cet observateur est la possibilité d'estimer simultanément l'état du système ainsi que les défauts affectant le système.

**Le troisième chapitre** illustre l'efficacité des approches de modélisation, d'estimation d'état et de commande tolérante aux défauts grâce à l'application sur un modèle de station d'épuration. Une structure multimodèle adaptée à ce processus est proposée, la synthèse de la loi de commande tolérante aux défauts évoqués précédemment est achevée.

**Le dernier chapitre** constitue une deuxième contribution de ce travail de thèse, en effet l'objectif est de proposer une stratégie de commande prédictive à base de modèle « MBPC ». Deux idées sont proposées. Tout d'abord, une contrainte supplémentaire sur les actions de contrôle appliquées est utilisée pour assurer la minimisation de la fonction de Lyapunov quadratique, afin de garantir la stabilité de Lyapunov exponentielle du système en boucle fermée. Ensuite, la faisabilité du problème d'optimisation d'horizon finie sous contraintes est assurée en basant sur une solution off-line en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI). L'application de la stratégie proposée sera illustrée par un modèle de bioréacteur réduit.

Enfin, une conclusion générale, suivie de la bibliographie et des annexes terminent ce manuscrit.

# Chapitre 1

## Généralités et position du problème

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Présentation de la structure multimodèle .....</b>	<b>6</b>
1.2.1	Multimodèle de Takagi-Sugeno .....	8
1.2.2	Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S).....	11
1.2.3	Stabilité des modèles Takagi-Sugeno (T-S).....	14
<b>1.3</b>	<b>Estimation d'état.....</b>	<b>15</b>
1.3.1	Généralité.....	15
1.3.2	Observateur pour les systèmes de Takagi-Sugeno .....	17
1.3.2.1	Variable de décision mesurable (VDM) .....	18
1.3.2.2	Variable de décision non mesurable mesurable(VDNM).....	19
<b>1.4</b>	<b>Commande tolérante aux défauts .....</b>	<b>25</b>
1.4.1	Introduction .....	25
1.4.2	Classification des approches FTC .....	25
<b>1.5</b>	<b>Motivation et position du problème.....</b>	<b>29</b>
<b>1.6</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>30</b>

---

*"La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information".  
Albert Einstein*

## 1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet de présenter certains travaux sur la modélisation, l'estimation, et la commande tolérante aux défauts des modèles flous de type Takagi Sugeno (T-S). En effet, la problématique de commande tolérante aux défauts des systèmes flous T-S incertains et perturbés que nous abordons dans cette thèse, repose essentiellement sur les travaux et méthodes détaillés dans ce chapitre. Ainsi, ce dernier sera structuré comme suit. Nous présentons d'abord les différentes techniques d'obtention d'un modèle T-S et donnerons un exemple d'illustration sur la méthode la plus efficace pour y aboutir à partir d'un modèle dynamique non linéaire. Ensuite, les notions d'estimations d'état de ce type de modèles rencontrées dans la littérature seront abordées. Un recensement non exhaustif des approches utilisées pour la conception des observateurs adaptés pour les systèmes T-S à VDM et VDNM sera présenté. Notons que la dernière section de ce chapitre sera consacrée à la présentation de quelques techniques de commande tolérante aux défauts pour les modèles T-S. L'ensemble des notions présentées au cours de ce chapitre permettra alors de positionner notre travail dans le domaine et de poser les problématiques abordées dans cette thèse.

## 1.2 Présentation de la structure multimodèle

Dans le domaine de l'automatique, la prévision, la commande ou la surveillance constituent des thèmes de recherche qui nécessitent l'élaboration de modèles ayant des structures particulières. Différentes structures de modèles non linéaires sont souvent utilisées, comme par exemple : les modèles à blocs structurés (Hammerstein et Wiener par exemple) [Gómez and Baeyens, 2005], les réseaux de neurones, les modèles flous, les séries temporelles, de Volterra, etc. Chacune de ces structures de modèles présente des avantages et des inconvénients. La capacité d'adapter des outils théoriques d'analyse et de synthèse afin d'obtenir une théorie unique, générale et exhaustive s'avère limitée pour chacune des structures. Néanmoins, les outils existants pour l'étude pratique des modèles non linéaires complexes sont eux aussi limités [Leith et Leithhead, 1999]. En conséquence, le compromis entre l'exactitude d'un modèle utilisé et sa simplicité de manipulation dans la pratique a toujours été une tâche assez difficile à accomplir. Le concept ayant le nom générique de *multimodèle (MM)* permet de répondre en large partie à cette demande. En effet, ce concept est basé sur le principe de division d'un phénomène afin de pouvoir l'utiliser et l'interpréter

plus facilement. Appelé “diviser pour régner” dans [Leith et al., 2002], le principe de l’approches MM est largement répandu dans divers domaines tels que l’économie, la statistique, la physique, etc.

Dans le domaine de l’automatique, l’approche MM [Murray-Smith et Johansen, 1997; Leith et Leithead, 1999] constitue une alternative très intéressante et un outil très utilisé actuellement pour la modélisation des systèmes non linéaires. Dans la littérature sont utilisées plusieurs terminologies équivalentes pour définir ce type de modèles : multimodèle [Murray-Smith et Johansen, 1997], modèle flou de Takagi-Sugeno [Takagi et Sugeno, 1985], modèle linéaire polytopique (PLM) [Angelis, 2001]. Parmi les premières publications offrant une présentation complète et générale des approches MMs on peut citer le livre de Murray-Smith et Johansen [1997]. Dans le contrôle des systèmes non linéaires, l’approche multimodèle a également reçu une certaine attention [Tanaka et Wang, 2001; Boulkroune et al., 2008, 2010a]. Grâce à la méthode de transformation proposée dans la prochaine section, les études d’observabilité et de commandabilité développées pour les systèmes sous forme MM s’adressent à une large classe de systèmes non linéaires.

### **Représentation d’état et systèmes non linéaires**

Tout système physique à évolution continue peut s’écrire sous la forme d’une représentation d’état. Celle-ci permet de décrire des relations d’entrées sorties d’un système par le biais d’une modélisation sous la forme d’équations différentielles ordinaires (voir algébriques dans le cadre des systèmes implicites). La forme générale d’une représentation est donnée par :

$$\begin{cases} f(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0 \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x(t)$  est le vecteur d’état du système  $u(t)$  le vecteur d’entrée et  $y(t)$  le vecteur de sortie. La première équation est appelée « équation d’état » et la seconde, « équation de sortie ». Notons que le système (1.1) est donné sous forme générale et inclut la classe des modèles écrits sous la forme d’une représentation d’état, dite « standard » affines en la commande donnée sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = s(x(t)) + m(x(t))u(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $f(x(t))$  est la fonction d'état,  $g(x(t))$  la fonction d'entrée,  $s(x(t))$  la fonction de sortie et  $m(x(t))$  est la matrice de couplage entrée-sortie. Ce type de systèmes, couramment rencontrés en automatique, sera étudié par la suite et constituerons l'objet principal des contributions apportées au long de ce manuscrit.

### 1.2.1 Multimodèle de Takagi-Sugeno (T-S)

Les modèles flous de type Takagi-Sugeno sont représentés dans l'espace d'état par des règles floues de type « Si –Alors » [Takagi et Sugeno, 1985]. Les parties prémises de ces règles floues sont représentatives de l'univers du discours sur lequel le modèle flou est valide et, les parties conclusions correspondent peut être à des modèles locaux invariants dans le temps (représentations d'état linéaires). A titre d'exemple, ce type de modèle flou s'avère utile pour la représentation des systèmes non linéaires tels que les systèmes électriques, chaotiques, etc. La  $i^{\text{ème}}$  règle floue d'un modèle T-S continu (en temps continu) (MFC) s'écrit alors sous la forme :

$$R^i: \quad \text{SI } z_1(t) \text{ est } F_1^i(z_1(t)) \text{ ET } z_2(t) \text{ est } F_2^i(z_1(t)) \dots z_p(t) \text{ est } F_p^i(z_p(t))$$

$$\text{ALORS } \begin{cases} x_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x(t) + D_i u(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $R^i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  règle floue,  $i = 1, \dots, r$ ,  $F_j^i(z_j(t))$  pour  $j = 1, \dots, r$  sont les sous ensembles flous,  $r$  le nombre de règles floues,  $z_j(t)$  sont les variables de prémises qui dépendent de l'entrée et/ou de l'état du système,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le vecteur de commande.  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et  $D_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$  sont des matrices décrivant la dynamique du système. Notons qu'une discrétisation de tels modèles est possible par une représentation d'état en temps discret (MFD). Le temps  $t$  est alors congru à  $k$  et le modèle est alors décrit par les équations de récurrence suivantes :

$$R^i: \quad \text{SI } z_1(k) \text{ est } F_1^i(z_1(k)) \text{ ET } z_2(k) \text{ est } F_2^i(z_1(k)) \dots z_p(k) \text{ est } F_p^i(z_p(k))$$

$$\text{ALORS } \begin{cases} x_i(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\ y_i(k) = C_i x(k) + D_i u(k) \end{cases} \quad (1.4)$$



A chaque règle  $R^i$  est attribuée un poids noté  $w_i(z(t))$ . Ce poids dépend du degré d'appartenance des variables de prémisses  $z_j(k)$  aux sous-ensembles flous  $F_j^i(z_j(k))$  et du connecteur « ET » reliant les prémisses choisis telles que :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t)), \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.5)$$

$F_j^i(z_j(t))$  représente la valeur de la fonction d'appartenance  $z_j(t)$  à l'ensemble flou  $F_j^i$ . On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^l w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0, \forall t \end{cases} \quad (1.6)$$

On pose :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.7)$$

$h_i(z(t))$  représente donc la fonction d'activation de la  $i^{\text{ème}}$  règle du modèle flou. Pour  $i = 1, \dots, r$ , ces fonctions vérifient la propriété d'une somme convexe, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \text{ et } h_i(z(t)) \geq 0$$

Finalement, la défuzzification du modèle flou permet d'obtenir la représentation d'état d'un modèle non linéaire par l'interconnexion de modèles locaux invariants dans le temps par des fonctions d'activation non linéaires. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (1.8)$$

Notons que de la même façon, pour un modèle flou discrétisé (MFD) on a :

$$\begin{cases} \dot{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \\ y(k) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))(C_i x(k) + D_i u(k)) \end{cases} \quad (1.9)$$

Dans le cadre de la modélisation par modèles Takagi-Sugeno, on rencontre souvent les termes: variables de prémisses, fonctions d'appartenance ou d'activation, zones de fonctionnement (sous espaces) et règles floues. Ceux-ci sont précisés par les définitions suivantes :

**Règles floues** : dénombrées par  $r \in \mathbb{N}$  dans la représentation d'état d'un modèle flou T-S. Elles correspondent au nombre de modèles locaux LTI.

**Variables de prémisses** : notées  $z(t) \in \mathbb{R}^j$ . Grandeurs connues et accessibles permettent l'évaluation des fonctions d'appartenance. Elles dépendent éventuellement des variables d'état mesurables et/ou de la commande.

**Fonctions d'appartenance** : notées  $h_i(z(k)) : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$ , ce sont des fonctions non linéaires dépendant des variables de prémisses associées aux différentes zones de fonctionnement. Elles permettent de traduire la contribution d'un modèle local LTI correspondant à un point de fonctionnement par rapport à la zone de fonctionnement du système. Ainsi, elles assurent le passage progressif d'un modèle local LTI aux modèles locaux voisins.

**Les zones de fonctionnement** : représentées par des domaines  $\ell_i$  obtenus via la décomposition de l'espace de fonctionnement du système  $\ell$ , avec  $\ell = \cup \ell_i$ .

La figure 1.1 illustre le schéma détaillé d'un modèle T-S standard. Notons que les modèles flous de type Takagi-Sugeno sont dotés d'une structure mathématique intéressante de point de vue de l'automatique. En effet, ils permettent de diminuer la complexité d'un problème non linéaire à traiter (stabilité, stabilisation, observation, diagnostic,...etc.) en le décomposant en un ensemble de problèmes linéaires locaux. L'ensemble des solutions locales correspondant à ces derniers constitue alors la solution globale du problème non linéaire initial [Bouarar, 2009].

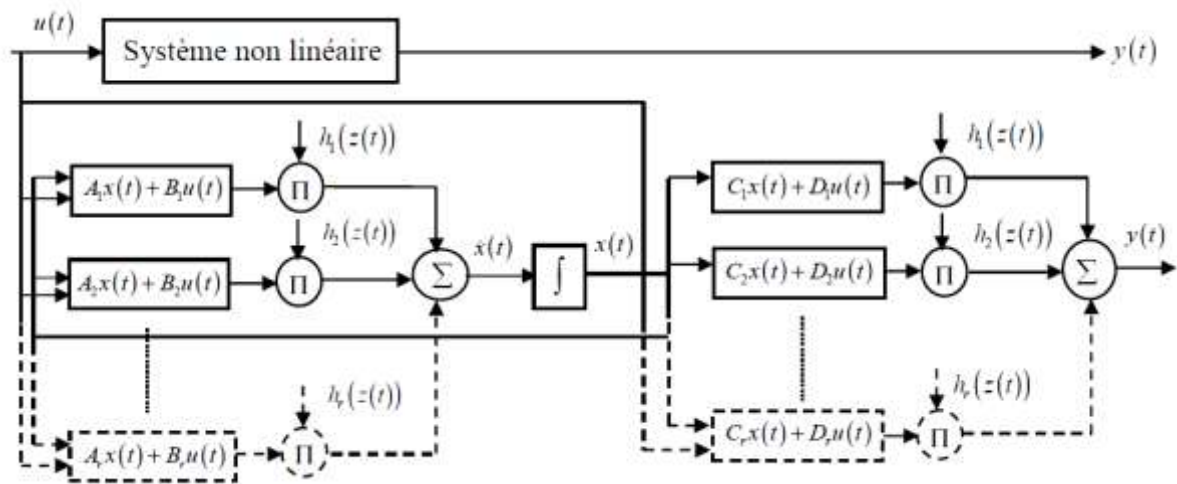


Figure 1.1. Structure et implémentation d'un modèle T-S Standard.

### 1.2.2 Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S)

Dans la littérature, il existe trois approches permettant le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle T-S. Ces approches visent à représenter les systèmes non linéaires complexes sur un large domaine de fonctionnement. Ces différentes approches sont :

- *approche par identification* [Gasso et al., 1999][Gasso et al., 2000]. Les mesures acquises sur les entrées et les sorties du système permettent l'identification des paramètres des modèles locaux autour des différents points de fonctionnement préalablement définis. Dans ce cas, le problème d'identification du modèle non linéaire se réduit à l'identification des modèles locaux (sous-modèles) LTI. Notons que, cette méthode est souvent utilisée dans le cas des systèmes dotés d'une dynamique difficile à décrire à l'aide d'un modèle analytique.
- *approche par linéarisation* [Ma et al., 1998][Tanaka et Wang 2001]. Le principe de cette méthode consiste à linéariser le système non linéaire autour d'un ensemble fini de points de fonctionnement judicieusement choisis, conduisant à un nombre défini de modèles LTI. L'obtention d'un représentant T-S dans ce cas, est réalisé par l'interconnexion de ces modèles LTI à l'aide des fonctions d'appartenance non linéaires judicieusement choisies (gaussiennes, triangulaires, trapézoïdales,...etc.).
- *approche par secteur non linéaire*. Cette méthode a été initiée par [Kawamoto et al., 1992] et étendue par [Tanaka et Wang, 2001] et [Morère, 2001]. Le principe de

celle-ci est basé sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires d'un système dynamique. Autrement dit, cette méthode consiste à trouver un secteur tel que  $a_1x \leq f(x(t), u(t)) \leq a_2x$  avec  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  représente un système non linéaire. Cette méthode garantit la construction d'un modèle T-S représentant exactement un modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état.

Dans la suite de ce manuscrit, l'intérêt est porté sur la troisième méthode, puisqu'elle présente des avantages du point de vue précision et connaissance des fonctions d'appartenance assurant l'interconnexion des modèles locaux LTI. En effet, l'approche par secteur non linéaire par rapport à l'approche par linéarisation permet, d'une part, de minimiser l'erreur lors du passage du modèle analytique non linéaire au modèle T-S, d'autre part d'optimiser le nombre de modèles locaux. Il convient de souligner qu'il peut s'avérer difficile de trouver un secteur global pour un système non linéaire quelconque. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer un secteur non linéaire local. Les figures 1.2 et 1.3 représentent respectivement les secteurs non linéaires global et local [Bouarar. 2009].

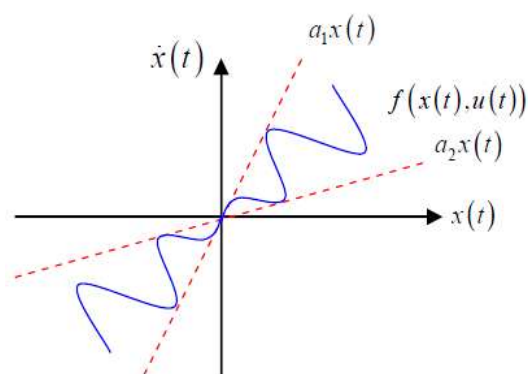


Figure 1.2. Secteur non linéaire global.

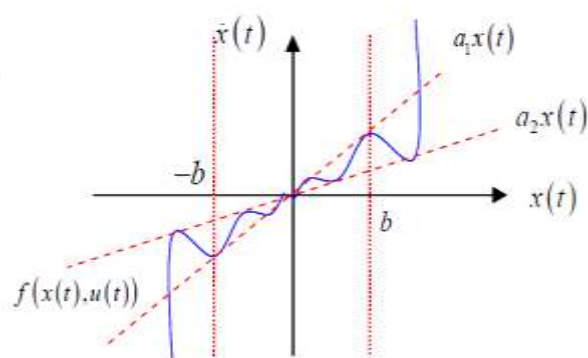


Figure 1.3. Secteur non linéaire local.

Notons que l'approche par secteur non linéaire permet d'associer une infinité de modèles T-S pour un système non linéaire suivant le découpage des non-linéarités réalisé. Une approche systématique de découpage en secteurs non linéaires repose sur le lemme suivant [Morère, 2001] :

**Lemme 1.1 :** Soit  $f(x(t)): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée, il existe toujours deux fonctions  $w_1(x(t))$  et  $w_2(x(t))$  ainsi que, deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$f(x(t)) = \alpha \times w_1(x(t)) + \beta w_2(x(t))$$

avec :  $w_1(x(t)) + w_2(x(t)) = 1, w_1(x(t)) \geq 0$  et  $w_2(x(t)) \geq 0$

**Preuve :**

Sous l'hypothèse que la fonction  $f(x(t))$  est bornée telle que  $\alpha \leq f(x(t)) \leq \beta$  il est possible d'écrire :

$$f(x(t)) = \alpha \times w_1(x(t)) + \beta w_2(x(t)) \quad (1.10)$$

Avec

$$\alpha = \max(f(x(t))), \quad \beta = \min(f(x(t)))$$

$$w_1(x(t)) = \frac{f(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta} \text{ et } w_2(x(t)) = \frac{\alpha - f(x(t))}{\alpha - \beta}$$

**Remarque 1.1**

On considère le système non linéaire  $\dot{x} = f(x(t))$ , avec  $f(0) = 0$ . Selon les propriétés des termes non linéaires rencontrés dans le modèle mathématique non linéaire, nous distinguons deux types de représentant T-S, en effet :

- Si toutes les non-linéarités du système sont **continues** et **bornées** sur  $\mathbb{R}^n$ , alors le modèle T-S représente d'une manière exacte le système non linéaire sur l'intégralité de l'espace des variables d'état  $\mathbb{R}^n$ .
- Si toutes les non-linéarités du système sont **uniquement continues**, alors le modèle T-S représente de façon exacte le système non linéaire sur un sous-espace compact de l'espace des variables d'état  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.1**

Soit le système non linéaire autonome donné par :

$$\dot{x}(t) = x(t)\cos(x(t)) \quad (1.11)$$

Notons que  $f(x(t)) = \cos(x(t))$  est continu et borné par  $[-1,1]$ , d'après le lemme 1, on peut écrire :

$$\cos(x(t)) = \underbrace{\frac{\cos(x(t)) + 1}{2}}_{h_1(x(t))} \times 1 + \underbrace{\frac{1 - \cos(x(t))}{2}}_{h_2(x(t))} \times (-1)$$

D'où un représentant T-S de (1.11) comportant deux règles floues données par :

Si  $x(t)$  est  $F_1^1(h_1(x(t)))$  alors  $\dot{x}(t) = x(t)$

Si  $x(t)$  est  $F_1^2(h_2(x(t)))$  alors  $\dot{x}(t) = -x(t)$

Ainsi le modèle T-S est donné sous sa forme compacte par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) a_i x(t) \quad (1.12)$$

où  $a_1 = 1$  et  $a_2 = -1$ .

### Remarque 1.2

*Les modèles T-S obtenus via une transformation polytopique convexe dépendent directement du nombre des non-linéarités à découper. Ainsi, lorsque l'on a  $nl$  termes non linéaires, alors le modèle T-S est constitué de  $2^{nl}$  règles floues.*

### 1.2.3 Stabilité des modèles Takagi-Sugeno (T-S)

L'étude de la stabilité et la synthèse des contrôleurs flous pour les modèles T-S standards (MTSS) (1.8) sont généralement basées sur la théorie de Lyapunov [Liapounoff, 1907]. Le principe de cette dernière est inspiré d'une réalité physique. En effet, si l'énergie d'un système est continûment dissipée, au final le système va atteindre un point d'équilibre. Dans la suite, sans perte de généralité, on suppose que le point d'équilibre est l'origine. L'étude de la stabilité d'un MTSS autonomes (1.8) permet d'établir si sa dynamique est intrinsèquement stable lorsqu'il n'est soumis à aucune excitation externe ( $u(t) = 0$ ). Les résultats de nombreux travaux sur la stabilité des MTSS sont donnés sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) [Boyd et al., 1994]. Notons que quelques rappels sur les LMI sont présentés en annexe. Le résultat suivant traite de la stabilité des MTSS décrits en temps continu :

**Théorème 1.1 :** [Tanaka et Sugeno, 1992] *Le MTSS continu autonome ( $u(t) = 0$ ) (1.8) (respectivement (1.9) dans le cas discret) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P = P^T$ , telles que les LMI suivantes sont vérifiées pour  $i=1, \dots, r$  :*

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (\text{cas continu})$$

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad (\text{cas discret})$$

**Preuve :** (cas continu) En considérant la fonction candidate quadratique de Lyapunov :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \quad (1.13)$$

Le MTSS autonome (1.8) ( $u(t) = 0$ ) est stable si:

$$V(x(t)) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0 \quad (1.14)$$

C'est-à-dire si :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i^T P + P A_i) \right) x(t) < 0 \quad (1.15)$$

qui est vérifiée si les conditions suffisantes du théorème 1 le sont.

### Remarque 1.3

*Notons qu'aucune information sur les fonctions d'appartenance  $h_i(z(t))$  n'est prise en compte dans le théorème 1.1. De ce fait, les conditions de stabilité LMI sont seulement suffisantes (et non nécessaires) et par conséquent conservatives. En effet, pour obtenir ces conditions, on cherche une solution à un problème d'optimisation en considérant que, pour qu'une somme soit négative, chacun des termes de cette somme doit être négatif. Or, il est évidemment possible de chercher des solutions aux conditions du théorème 1.1 qui autoriseraient certains termes de la somme (1.15) à être positifs alors que l'ensemble restera négatif. Dans ce cas, on obtient des conditions de stabilité dites « relâchées », c'est-à-dire moins conservatives. Dans le cas où l'on peut établir que le système est stable, il peut être intéressant d'améliorer les performances. Dans le cas contraire, il s'avère nécessaire de synthétiser une loi de commande floue stabilisante pour pouvoir ramener le système vers le point d'équilibre. Dans ce contexte et afin d'assurer la stabilité d'un MTSS en boucle fermée, Plusieurs lois de commande floues ont été proposées dans la littérature. Parmi lesquelles on peut citer la stabilisation par retour d'état où les plus répandues se basent sur des lois de commande de type compensation parallèle distribuée (PDC, Parallel Distributed Compensation) [Wang et al., 1996][Tanaka et al., 1998].*

## 1.3 Estimation d'état

### 1.3.1 Généralités

Le comportement dynamique d'un système réel peut être décrit par un modèle mathématique formé d'équations différentielles liant les variables internes d'état. L'évolution dans le temps de ces variables exprime l'évolution du système réel. Cette représentation d'état est très bien adaptée à la synthèse des lois de commande, dont la mise en œuvre demande la connaissance des variables d'état. Comme l'état complet du système peut s'avérer difficile voir impossible à mesurer, à cause des différentes contraintes d'ordre physique, économique

ou technologique, les variables d'état non disponibles doivent être estimés. Cette reconstruction d'état se fait habituellement par le biais d'un capteur logiciel, souvent appelé observateur. La reconstruction d'état -dont le principe est présentée à la figure 1.4- se propose de fournir des estimations des variables d'état en utilisant des grandeurs connues, comme les entrées et les sorties du système. La structure de l'observateur est réalisée en se basant sur un modèle du système réel.

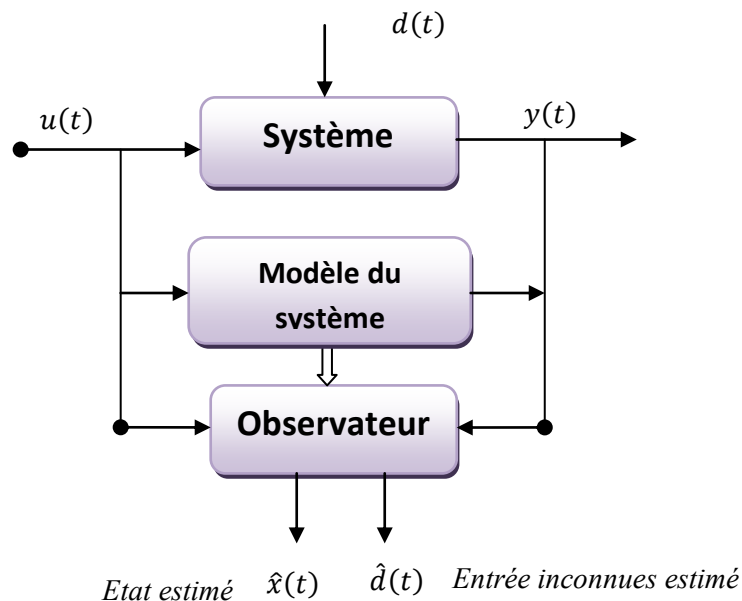


Figure 1.4 – Principe de l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues

L'estimation d'état d'un système joue un rôle important dans le contexte de la surveillance et du diagnostic des systèmes, car elle permet de générer des symptômes de défaillance du système à partir d'une comparaison entre les variables mesurées et celles estimées. En effet, l'observateur est construit à partir d'un modèle de bon fonctionnement du système. En cas de défaillance, les données mesurées ne vérifient plus les relations du modèle. De ce fait, il y aura une incohérence entre les données mesurées et les données estimées [Gertler, 1998; Patton et Frank, 2000]. Comme les systèmes physiques présentent souvent des dynamiques complexes et non linéaires, dans un contexte de diagnostic, il est nécessaire de réaliser l'estimation d'état à partir d'un modèle permettant de représenter le système sur une large plage de fonctionnement. Dans ce cas, l'utilisation des modèles non linéaires est conseillée. L'estimation d'état des systèmes représentés par des modèles non linéaires est un problème difficile à résoudre dans un cadre général.

Dans le cas des systèmes représentés par des multi-modèles, la conception d'un observateur suppose que les modèles locaux sont localement observables, c'est-à-dire que



toutes les paires  $(A_i, C_i)$  sont observables. Diverses approches ont été développées pour la synthèse des observateurs pour des multi-modèles avec et sans incertitudes [Patton et al., 1998]. La synthèse des observateurs à entrées inconnues a été également abordée par de nombreux travaux. Par exemple dans [Akhenak et al., 2004c], [Chadli et al., 2008a] des observateurs robustes pour une classe de systèmes représentés par des multi-modèles incertain et à entrées inconnues ont été développés et appliqués pour le diagnostic des défauts. Bien que les principales méthodes pour construire un MM à partir d'un système non linéaire (à savoir la transformation par secteur non linéaire ou la linéarisation autour de points de fonctionnement) conduisent à des MM à variables de prémisses non mesurables, seuls quelques résultats [Ichalal et al., 2008b, 2009c; Bergsten et al., 2002; Yoneyama, 2009] sont dédiés à l'exploitation de ces modèles pour le diagnostic et la commande ou l'observation. Par la suite, Nous allons rappeler les principaux résultats concernant la conception d'observateurs pour systèmes T-S.

### 1.3.2 Observateurs pour les systèmes de Takagi-Sugeno

La structure d'observateur -basée sur la structure multimodèle- la plus utilisée dans la littérature est une extension de celle de l'observateur de Luenberger proposée pour les systèmes linéaires [Luenberger, 1971]. Ce choix s'avère naturel sachant que la structure multimodèle est une combinaison linéaire de sous-modèles linéaires. Considérons le modèle T-S suivant pour lequel la sortie est une fonction linéaire de l'état :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1.16)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.17)$$

L'observateur proposé, inspiré de celui construit pour le cas linéaire a la forme suivante :

$$\hat{\dot{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (1.18)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (1.19)$$

Afin de déterminer les gains  $L_i$  de l'observateur (1.18), la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état est étudiée, cette dernière étant définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (1.20)$$

Sa dynamique est régie par une équation différentielle qui dépend de la connaissance ou non des variables de décision intervenant dans les fonctions d'activation. On définit alors deux cas selon que les variables de décision sont mesurables ou non mesurables.

### 1.3.2.1 Variables de décision mesurables (VDM)

La majeure partie des travaux effectués sur la conception d'observateurs d'état pour les systèmes T-S s'appuie sur l'hypothèse de disponibilité des variables de décision. De ce fait, l'observateur utilise les mêmes variables de décision que le modèle du système ce qui permet une factorisation par les fonctions d'activation lors de l'évaluation de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état. Plus précisément, cette dernière s'écrit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i - L_i C) e(t) \quad (1.21)$$

Les gains  $L_i$  de l'observateur sont déterminés par analyse de la stabilité du système T-S (1.21). Dans [Patton et al., 1998], l'analyse de la stabilité via une fonction de Lyapunov quadratique a permis l'obtention de conditions LMIs pour la synthèse de l'observateur :

**Théorème 1.1.** ([Patton et al., 1998]) *L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des matrices  $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$P A_i + A_i^T P - K_i C - C^T K_i^T < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (1.22)$$

Les gains de l'observateur sont obtenus à partir de l'équation :

$$L_i = P^{-1} K_i \quad (1.23)$$

**Preuve.** Elle s'appuie sur l'étude de la stabilité par la théorie de Lyapunov en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique  $V(e(t)) = e^T(t)Pe(t)$ . L'importante propriété de somme convexe des fonctions d'activation a permis l'obtention de conditions suffisantes de stabilité du système (1.21) générant l'erreur d'estimation d'état. Afin d'obtenir des inégalités linéaires, le changement de variable  $K_i = PL_i$  est utilisé.

Dans [Patton et al., 1998], une amélioration des performances temporelles de l'observateur a été envisagée par un placement des pôles dans une région LMI, puis une application à la détection et localisation de défauts dans un moteur a été réalisée.

Plus récemment, dans [Akhenak, 2004] et [Rodrigues, 2005], les auteurs ont généralisé l'observateur à entrées inconnues proposé dans [Darouach et al., 1994] pour les systèmes linéaires. La stabilité a été étudiée par la théorie de Lyapunov et les conditions obtenues sont formulées en utilisant des LMIs. Dans [Akhenak, 2004], les observateurs à structures variables (à mode glissant) ont également été développés pour les systèmes T-S incertains. Ces observateurs ont été utilisés pour le diagnostic d'un système à trois cuves et d'un turboréacteur d'avion.

### 1.3.2.2 Variables de décision non mesurables (VDNM)

Dans le cas où les variables de décision ne sont pas connues, leur factorisation n'est plus possible et la dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i C e(t)) \quad (1.24)$$

En analysant la forme de l'équation d'état (1.24), on conclut que les résultats obtenus dans le cas des systèmes T-S à VDM ne sont pas applicables pour la détermination des gains  $L_i$  de l'observateur. Dans ce cas des résultats classiques de stabilité des multimodèles à variables de prémisses non mesurables peuvent être appliqués [Tanaka et Wang, 2001; Bergsten et al., 2002; Ichalal et al., 2009c]. Les résultats proposés dans [Bergsten et al., 2001] proposent des conditions de convergence d'estimation d'état vers zéro en se basant sur l'observateur de Thau-Luenberger [Thau, 1973] :

**Théorème 1.2.** ([Bergsten et Palm, 2000]) *L'erreur d'estimation d'état entre le modèle T-S et l'observateur converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe des matrices symétriques et définies positives  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ainsi qu'un scalaire positif  $\gamma$  tels que :*

$$A_i^T P + P A_i - C^T K_i^T - K_i C < -Q \quad i = 1, \dots, r \quad (1.25)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \gamma^2 & P \\ P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.26)$$

**Preuve.** voir [Bergsten et Palm, 2000].

Des incertitudes de modélisation sont prises en compte dans [Bergsten et al., 2002] où un observateur à mode glissant a été conçu. Les travaux de [Ichalal, 2009] et [Yoneyama, 2009] traitent le problème d'estimation d'état des systèmes sous forme multimodèle avec des variables de prémisses non mesurables en cherchant à réduire le conservatisme des résultats précédents. Dans Ichalal et al. [2009c, 2010] l'approche Lipschitz est améliorée. Deux observateurs, proportionnel intégral et proportionnel multi-intégral à entrées inconnues ont été proposés dans Ichalal et al. [2009b] et représentent une extension de ce type d'observateurs du cas linéaire au cas non linéaire. Dans Ichalal et al. [2009a] et Nagy et al. [2011], l'estimation est réalisée par l'approche  $\mathcal{L}_2$  en considérant un système à incertitudes bornées.

### Approche $\mathcal{L}_2$

L'estimation d'état utilise de façon classique un modèle du système et des mesures collectées sur ce dernier. Cependant, si le modèle du système est imparfait et notamment si les perturbations n'ont pas été prises en compte dans la description, la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation d'état ne peut pas être assurée. À cet effet, la norme  $\mathcal{L}_2$  -extension directe de la norme  $H_\infty$  [Weinmann, 1991; Van der Schaft, 1992] - peut être utilisée afin d'évaluer l'erreur d'estimation et ceci en particulier pour les systèmes à paramètres variables dans le temps. Plus particulièrement, grâce à cette norme, on peut quantifier une borne supérieure du gain entre l'énergie de l'entrée et celle de la sortie pour toutes les trajectoires paramétriques admissibles du système [Bara, 2001].

**Définition 4.1.** *La norme  $\mathcal{L}_2$  d'un signal  $s(t)$  de carré intégrable est notée et définie par :*

$$\|s(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} s(t)^T s(t) dt} \quad (1.27)$$

**Définition 4.2.** La norme  $\mathcal{L}_2$  induite d'un système est définie par

$$\sup_{\|u(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \quad (1.28)$$

En considérant un système de la forme (1.16 -1.17) affecté par des perturbations notées  $d(t)$ , bornées en norme, l'observateur de type proportionnel (1.18 - 1.19), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état dépend de l'erreur mais aussi de la perturbation  $d(t)$ . En effet, dans le cas simple où les variables de prémisses sont mesurables (i.e.  $\mu_i = \hat{\mu}_i$ ) le système (1.21) devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) [(A_i - L_i C)e(t) + (E_i - L_i G)d(t)] \quad (1.29)$$

Ainsi, les gains  $L_i$  de l'observateur règlent directement l'impact de la perturbation  $d(t)$  sur l'erreur d'estimation  $e(t)$ .

*L'objectif de la synthèse d'observateur se pose dans les termes suivants : trouver les gains  $L_i$  de l'observateur (1.18-1.19) pour*

- ✓ *assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état  $e(t)$  en absence de perturbations*
- ✓ *atténuer l'influence de la perturbation  $d(t)$  sur l'erreur d'estimation d'état  $e(t)$*

Cet objectif se traduit par les contraintes de performances suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \text{avec} \quad d(t) = 0 \quad (1.30)$$

$$\|e(t)\|_2 < \gamma \|d(t)\|_2 \quad \text{avec} \quad d(t) \neq 0 \quad \text{et} \quad e(0) = 0 \quad (1.31)$$

La première contrainte garantit la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro si aucune perturbation n'agit sur le système. La seconde assure la précision de la reconstruction en présence d'une perturbation  $d(t)$  sur le système. En effet,  $\gamma$  est un scalaire positif à déterminer qui indique le niveau d'atténuation entre  $d(t)$  et l'erreur  $e(t)$ . Le but est de

minimiser la norme  $\mathcal{L}_2$  entre la perturbation  $d(t)$  et l'erreur  $e(t)$ , la précision de l'estimation étant ainsi fixée au moyen de la valeur de  $\gamma$  qui doit être minimisée.

Ces objectifs sont atteints s'il existe une fonction de Lyapunov  $V(t)$  telle que  $\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0$ . [Boyd et al., 1994]. En choisissant  $V(t) = e^T(t)Pe(t)$  avec  $P = P^T > 0$  on obtient :

**Théorème 1.3.** *L'erreur d'estimation entre l'observateur (1.18-1.19) et le système (1.16-1.17) vérifie (1.30) et (1.31) s'il existe  $P = P^T > 0$ ,  $K_i$  et un scalaire positif  $\gamma$  tels que*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i - C^T K_i^T - K_i C + I & P E_i - K_i G \\ (P E_i - K_i G)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Les gains  $L_i$  sont donnés par  $L_i = P^{-1}K_i$ .

### Approche par isolation des perturbations

Soit le système T-S (1.16) avec des variables de prémisse non mesurables. Pour s'affranchir de cette méconnaissance, une approche consiste à transformer le multimodèle en isolant les variables de prémisse non mesurables dans un terme de perturbation [Ichalal, 2009]. Pour cela, l'idée est de faire intervenir les variables de prémisse estimées dans les fonctions de pondération. On peut alors écrire de façon équivalente l'état du système (1.16) comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + w(t)] \quad (1.33)$$

en traitant dans (1.16) le terme dépendant des variables  $\xi(t)$  non mesurables comme une perturbation  $w(t)$

$$w(t) = \sum_{i=1}^r [\mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t))] [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (1.34)$$

La synthèse d'observateur pour (1.33) consistera alors à minimiser le gain  $\mathcal{L}_2$  de l'entrée  $w(t)$  sur l'erreur d'estimation.

### Approche par incertitudes bornées

Une autre méthode, également basée sur l'introduction des  $\mu_i(\hat{\xi}(t))$  dans l'équation du système, consiste à faire apparaître l'erreur d'estimation des variables de prémisses sous la forme d'incertitudes bornées dans les matrices d'état du système. Pour cela, on définit les matrices :

$$\Delta_A(t) = \sum_{i=1}^r \delta_i(t) A_i \quad (1.35)$$

$$\Delta_B(t) = \sum_{i=1}^r \delta_i(t) B_i \quad (1.36)$$

où

$$\delta_i = \mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t)) \quad (1.37)$$

$$\Delta_A(t) = \mathcal{A} \delta_A I_A \quad (1.38)$$

$$\Delta_B(t) = \mathcal{B} \delta_B I_B \quad (1.39)$$

avec

$$\mathcal{A} = [A_1 \quad \cdots \quad A_r], \quad \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r(t) I_n \end{bmatrix}, \quad I_A = \begin{bmatrix} I_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = [B_1 \quad \cdots \quad B_r], \quad \Sigma_B(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r(t) I_m \end{bmatrix}, \quad I_B = \begin{bmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Grâce aux propriétés de convexité des fonctions de pondération on peut écrire  $-1 \leq \delta_i(t) \leq 1$  d'où :

$$\Sigma_A(t)^T \Sigma_A(t) \leq I \quad (1.41)$$

$$\Sigma_B(t)^T \Sigma_B(t) \leq I \quad (1.42)$$

Le système (1.33) devient un système T-S incertain où les incertitudes sont bornées :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) [(A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B)u(t)] \quad (1.43)$$

### Approche par incertitudes constantes

Soit le système T-S (1.16). Grâce à la propriété de somme convexe des fonctions de pondération on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r [\mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t))] A_i &= \left( \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t)) \right) \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) A_i - \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \right) \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{\xi}(t)) A_j \\ &= \sum_{i,j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) (A_i - A_j) \end{aligned} \quad (1.44)$$

où la notation suivante est utilisée :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^r$$

Compte tenu de (1.44) le système (1.33) peut être écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i,j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) [(A_i - \Delta A_{i,j})x(t) + (B_j - \Delta B_{i,j})u(t)] \quad (1.45)$$

où

$$\Delta A_{i,j} = A_i - A_j \quad (1.46)$$

$$\Delta B_{i,j} = B_i - B_j \quad (1.47)$$

On a ainsi transformé un modèle T-S en un système T-S incertain dans lequel les incertitudes sont parfaitement connues et représentés par des matrices constantes [Ichalal, 2009].

L'approche par incertitudes bornées sera exploitée dans le chapitre suivant.



## 1.4 Commande tolérante aux défauts

### 1.4.1 Introduction

Un système affecté par un défaut dévie de sa trajectoire de référence, conduisant à des performances dégradées jusqu'à provoquer l'instabilité selon la sévérité du défaut pouvant ainsi mettre en cause la sécurité des opérateurs et provoquer des dégâts matériel et écologique (centrales nucléaires, véhicules, machines industrielles,...). Ces défauts proviennent essentiellement des actionneurs, des capteurs, du contrôleur ou du procédé lui-même. Pour faire face à ce problème, différentes stratégies ont été proposées dans la littérature pour maintenir la stabilité avec un certain degré de performances du système commandé en dépit de la présence d'un dysfonctionnement [Patton, 1997], [Blanke *et al.*, 1997]. Une telle commande porte le nom "commande tolérante aux fautes ou aux défauts" (FTC pour Fault Tolerant Control). Son objectif est de s'accommoder aux défauts dès leur apparition avec une réactivité maximale, de telle sorte qu'un faible défaut affectant un sous système n'évolue pas en défaut critique au niveau du système global. Le problème majeur rencontré lors la conception de telles lois de commandes est que la plupart des techniques de diagnostic sont développées comme un outil de surveillance pour détecter et localiser les défauts en boucle ouverte. Elles n'intègrent pas la partie commande. Le problème général qui se pose est donc de savoir comment combiner les techniques de diagnostic et les techniques de contrôle au profit d'une commande tolérante aux défauts.

Le problème de la commande tolérante aux défauts a été largement abordé ces deux dernières décennies et a fait l'objet d'un nombre important de résultats expérimentaux et de publications. Différentes approches et méthodes ont été proposées, à titre d'exemple, on peut citer les travaux de, [Patton, 1997], [Lopez-Toribio *et al.*, 1999], [Patton et Lopez-Toribio, 2000], [Noura *et al.*, 2000], [Niemann et Stoustrup, 2003], [Blanke *et al.*, 2003], [Jiang *et al.*, 2006], [Rodrigues *et al.*, 2007]. [Oudghiri, 2008],

### 1.4.2 Classification des approches FTC

L'objectif d'une commande tolérante aux défauts consiste à déterminer une stratégie de commande qui possède la propriété de limiter, voir d'annuler, les effets d'un défaut sur les performances du système. En présence d'un défaut de faible gravité, une simple commande

robuste peut suffire à maintenir les performances nominales: on parle alors d'accommodation passive du défaut. En revanche, en présence de défauts critiques, un bloc de détection et de localisation du défaut est nécessaire afin de mettre en œuvre une stratégie active de tolérance aux défauts.

#### ❖ *Approche passive*

Dans l'approche passive, les techniques de contrôle robuste sont utilisées de manière à ce que le système en boucle fermée reste insensible à un ensemble connu de défauts avec des régulateurs constants et sans utilisation d'information en ligne des défauts sur le système [Chen et Patton, 2001, Niemann et Stoustrup, 2003]. Les défauts sont alors pris en compte dans la conception du système de commande. La méthode est basée sur l'idée simple que les défauts représentent des perturbations que la loi de commande doit prendre en considération dès sa conception initiale. Elle utilise les techniques de commande robuste par rapport aux incertitudes paramétriques et perturbations extérieures (commande  $H_\infty$ , commande à mode glissant . . .). Pour une vue globale des méthodes des commandes robustes, le lecteur pourra se référer à [Zhou et Doyle, 1998]. Ce type d'approche n'a besoin ni d'un module de diagnostic pour détecter la présence des défauts ni d'un bloc de reconfiguration de la loi de commande et/ou des paramètres du système.

#### ❖ *Approche active*

Dans de nombreuses situations pratiques, la synthèse d'une loi de commande pour un système quelconque est réalisée sans prendre en compte la possibilité d'apparition d'un défaut à un instant donné. Pour des raisons économique et technique, il n'est pas possible de changer la structure du système et de la commande afin de remédier aux défauts. Dans ce cas, une commande tolérante aux défauts peut être synthétisée en utilisant la loi de commande développée pour le cas sans défaut. Pour ce faire, en présence d'un défaut, un bloc de détection/isolation/estimation assure de la détection du défaut sa localisation et son estimation. Ces informations sont alors transmises à un second bloc appelé FTC permettant de les prendre en compte et de calculer une nouvelle loi de commande sur la base de la commande nominale sans défaut en ajoutant un terme relatif au défaut détecté afin de le compenser. La commande active tolérante aux défauts a été développée ces dernières années afin d'améliorer les performances des systèmes et de réduire le conservatisme des méthodes

passives en traitant un ensemble plus large de défauts. Parmi les approches développées dans ce contexte, on peut citer la loi de commande re-séquentée (Control law rescheduling) [Oudghiri, 2008], [Leithead, 1999], qui consiste à calculer un ensemble de gains (retours d'état). Le passage d'un gain à un autre se fait grâce à un mécanisme de commutation développé à partir d'un module FDI. L'inconvénient d'une telle commande réside dans le fait qu'elle nécessite un module FDI très robuste. En effet, une fausse alarme ou un défaut non détecté peuvent conduire à des performances dégradées ou même entraîner l'instabilité du système.

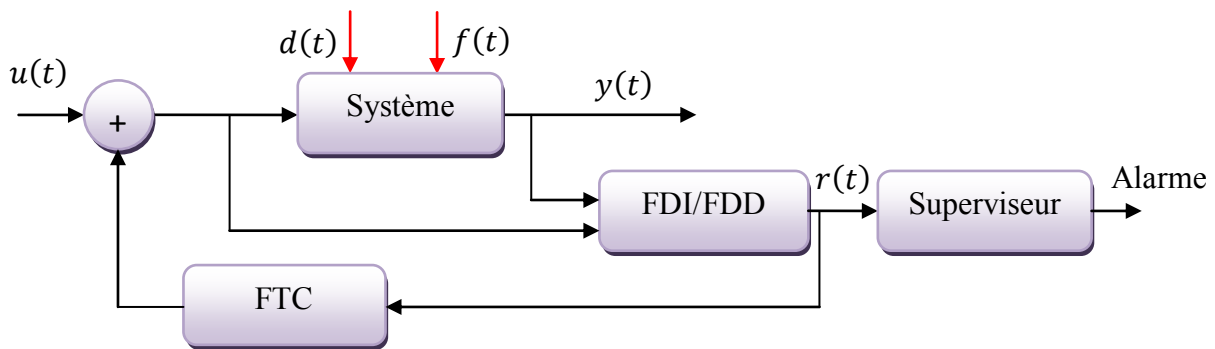


Figure 1.5 – Architecture FTC

La figure 1.5 montre que la commande FTC active contient un superviseur. Son principe est le suivant: sans défaut, la commande nominale qui a été déterminée au préalable pour le système "parfait" rejette les perturbations et assure la stabilité du système en boucle fermée. Dans ce cas le bloc " FDI " ne détecte aucun défaut et la loi de commande ne subit aucun changement. Si un défaut se produit, le bloc "FDI" le détecte, l'isole et l'identifie. Ensuite le bloc "FTC" conçoit une nouvelle loi de commande capable de stabiliser le système défectueux.

Notons qu'une grande partie des travaux dédiés à la commande tolérante aux défauts utilise un modèle linéaire du système. Dans ce cas, parmi les méthodes de FTC active les plus connues, nous pouvons citer la commande tolérante aux défauts par la méthode du *pseudo-inverse* qui a été développée initialement par [Gao et Antsaklis, 1991]. Le principe de cette approche repose sur la minimisation d'une norme de Frobenius conduisant à la détermination du gain de la commande. Soit le système linéaire nominal sans défaut :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.48)$$

Connaissant le vecteur d'état et sous l'hypothèse de commandabilité du système (1.48), une loi de commande par retour d'état stabilisant le système est donnée par  $u(t) = Kx(t)$ . Si l'on se place maintenant dans une situation en défaut de manière générale, le système s'écrira de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u_f(t) \\ y_f(t) = C_f x_f(t) \end{cases} \quad (1.49)$$

La nouvelle loi de commande  $u_f(t)$  permettant d'assurer un fonctionnement acceptable du système (c'est-à-dire proche de celui du système sans défaut) est donnée par  $u_f(t) = K_f x_f(t)$  où  $K_f$  est calculé par la méthode suivante :

$$K_f = \arg \min_{K_f} \|(A - BK) - (A_f - B_f K_f)\|_F \quad (1.50)$$

$$= B_f^+ (A - BK - A_f) \quad (1.51)$$

où  $B_f^+$  représente la pseudo-inverse de la matrice  $B_f$  et  $\|\cdot\|_F$  désigne la norme de Frobenius. Bien que cette méthode apparaisse très simple et adéquate à une implémentation en ligne, son principal inconvénient est que la stabilité du système en boucle fermée n'est pas garantie (voir [Gao et Antsaklis, 1991]). Ce problème a été résolu dans [Gao et Antsaklis, 1992] par l'ajout d'une contrainte assurant la stabilité du système bouclé au problème d'optimisation décrit par (1.50)-(1.51). Récemment, une extension de cette approche a été fournie dans [Staroswiecki, 2005]. Elle est basée sur le calcul de la commande en utilisant un ensemble de modèles admissibles et non une recherche par optimisation. La difficulté de prise en compte des incertitudes de modélisation dans cette approche constitue un inconvénient majeur en plus de la difficulté (voir même de l'impossibilité) d'étendre cette méthode aux systèmes non linéaires.

Dans [Liu et Patton, 1998] une approche basée sur le placement de la structure propre est développée. L'idée principale est de calculer le gain de la commande de manière à faire coïncider les valeurs propres du système bouclé avec défauts avec celles du système nominal sans défaut en minimisant la norme 2 entre ces valeurs propres. Comme pour la méthode par

la pseudo inverse, la prise en compte des incertitudes de modélisation n'est pas facilement réalisable.

Une autre approche intéressante consiste à considérer un modèle de référence correspondant au modèle de bon fonctionnement du système. La commande est généralement composée de deux termes, le premier est un retour d'état classique et le second est relatif à l'erreur de poursuite entre la trajectoire de référence et celle du système. L'objectif est alors de minimiser l'erreur de poursuite de trajectoire ce qui conduit à forcer le système en défaut à se comporter comme le système de référence sans défaut. Cette approche fera l'objet du chapitre 3.

## 1.5 Motivations et position du problème

Dans le contexte de la modélisation d'un système non linéaire à l'aide d'une structure multi-modèle, le problème essentiel se trouve au niveau des techniques d'obtention d'une telle structure. On peut énoncer quelques inconvénients de la majorité des techniques existantes d'obtention d'un multimodèle. Le principal inconvénient est la perte d'information due par exemple à la linéarisation, la difficulté du choix du nombre et de la position des différents points de fonctionnement utilisés pour la linéarisation. Seule la méthode utilisant l'approche par secteur non linéaire, évoquée de façon succincte dans [Tanaka et Wang \[2001\]](#), permet d'obtenir une forme multimodèle équivalente au modèle non linéaire initial, évitant ainsi une perte d'information par rapport à ce dernier. L'approche par secteurs non linéaires représente une des techniques les plus classiques de passage d'un modèle non linéaire à un modèle T-S [[Tanaka et Wang, 2001](#)]. En effet, cette transformation permet l'obtention d'un modèle T-S (1.8) représentant exactement (1.2). Il a été prouvé dans [[Yoneyama, 2009](#)] que si la sortie est bruitée (ce qui est fréquemment le cas en pratique) et est choisie comme variable de prémisse  $\xi(t)$  le modèle T-S obtenu ne représente pas précisément le système (1.2). Il a été également conclu que si la sortie est non linéaire par rapport à l'état du système il est difficile voire impossible d'avoir un modèle T-S par l'approche par secteurs non linéaires avec la sortie comme variable de prémisse. De plus, dans le domaine du diagnostic, si on suppose que la variable de décision  $\xi(t)$  dont dépendent les fonctions d'interpolation ou fonctions d'activation est mesurable i.e  $\xi(t) = u(t)$  ou  $\xi(t) = y(t)$ , cette hypothèse oblige à concevoir des observateurs dont les fonctions d'activation dépendent de l'entrée  $u(t)$ , pour la détection

des défauts capteurs, ou de la sortie  $y(t)$  pour la détection des défauts actionneurs. En effet, si on utilise  $\xi(t) = u(t)$  par exemple, dans les bancs d'observateurs, même si le  $i^{\text{ème}}$  observateur n'est pas piloté par l'entrée  $u_i$ , cette dernière intervient indirectement dans la fonction d'activation et il est difficile de l'éliminer. Pour cette raison, il est donc intéressant de considérer le cas où les fonctions d'activation dépendent de variables non mesurables comme l'état du système. Cette hypothèse permet de représenter une large classe de système non linéaires [Ichalal, 2009; Yoneyama, 2009].

Les travaux décrits dans cette présente thèse concernent principalement les systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables. L'intérêt suscité par les méthodes de modélisation sous forme de multi-modèle T-S a été largement démontré. Par ailleurs, il apparaît clairement que la prise en compte d'incertitudes pour le cas des multimodèles T-S à VDNM conduirait à une généralisation des résultats applicables à une plus large classe de systèmes physiques. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de recherche de cette thèse visant aussi bien à proposer qu'à étendre des méthodologies de synthèse de lois de commande tolérante aux défauts pour la stabilisation robuste des systèmes T-S incertains et perturbés.

De même, on propose la conception d'un observateur pour des systèmes T-S incertains et perturbés à variables de prémisse non mesurables soumis à des entrées inconnues, et affectés par des défauts capteurs, en considérant en plus la présence d'incertitudes dues aux erreurs de modélisation. L'observateur de type proportionnel-intégral utilisé permet d'opérer une estimation simultanée de l'état ainsi que les défauts affectant le système, l'action intégrale améliorant sensiblement l'estimation d'état. À notre connaissance, cette méthode de synthèse n'a pas encore été traitée dans la littérature et représente un intérêt d'un point de vue applicatif, comme cela sera présenté au cours de ce mémoire.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire dans un premier temps la structure multimodèle et plus précisément les modèles de Takagi-Sugeno en présentant succinctement trois méthodes pour leur obtention (identification et linéarisation des systèmes non linéaires). La méthode utilisant les transformations par secteurs non linéaires a fait l'objet d'un rappel détaillé. Par la suite, un panorama des méthodes de synthèse d'observateurs pour les systèmes T-S à VDM et

a VDNM à été réalisé, suivi par un rappel sur la commande tolérante aux défauts ainsi que les différentes stratégies existantes dans la littérature. Les motivations et la problématique abordée dans ce travail ont enfin été exposées en détail en définissant les objectifs à atteindre.

## Chapitre 2

# Commande tolérante aux défauts des systèmes Takagi-Sugeno incertains et perturbés

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b> .....	<b>33</b>
<b>2.2</b>	<b>Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire</b> .....	<b>33</b>
2.2.1	Définition des modèles T-S Incertains et Perturbé (TSIP) .....	34
2.2.2	Stratégie de commande tolérante aux défauts.....	35
2.2.3	Objectif.....	36
2.2.4	Variable de décision mesurable.....	37
2.2.4.1	Variable de prémisse non défectueux .....	37
2.2.4.2	Variable de prémisse défectueux .....	45
2.2.5	Variable de décision non mesurable.....	52
<b>2.3</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>60</b>

---

*"Si une idée ne paraît pas d'abord absurde, alors il n'y a aucun espoir qu'elle devienne quelque chose." Albert Einstein*



## **2.1. Introduction**

Plusieurs techniques pour la surveillance et le diagnostic des défauts dans les systèmes dynamiques ont été développées ces dernières années. Cependant la plupart de ces techniques sont basées sur la surveillance du procédé seul sans la prise en compte de son interaction avec le système de commande. L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode de synthèse de commande tolérante aux défauts pour des modèles T-S sous forme standard tout en tenant compte des incertitudes de modélisation et des perturbations externes lors de la synthèse de la loi de commande. Cette dernière permette de s'accommoder automatiquement de l'effet de certains types de défauts qui peuvent apparaître sur des actionneurs tout en étant capable de maintenir la stabilité de ce dernier et d'éviter les situations catastrophiques. En effet, la prise en compte d'incertitudes permet de réduire les erreurs de modélisation d'un système physique à commander mais aussi de tenir compte de perturbations externes (bruits de mesures et autres). La méthode consiste à utiliser les observateurs PI de manière à estimer les défauts, la commande sera synthétisée en tenant compte du défaut estimé. Le but de la commande générée est de minimiser l'écart entre les états du système affecté par des défauts et les états d'un modèle de référence. On considère dans ce chapitre les deux cas où les variables de prémisses sont mesurables et non mesurables.

## **2.2 Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire**

Dans cette section, une stratégie intéressante de commande tolérante aux défauts est présentée pour une classe de modèles T-S incertains et perturbés. L'approche consiste à considérer un modèle de référence correspondant au modèle de bon fonctionnement du système. La commande est généralement composée de deux termes, le premier est un retour d'état classique et le second est relatif à l'erreur de poursuite entre la trajectoire de référence et celle du système. L'objectif est alors de minimiser l'erreur de poursuite de trajectoire ce qui conduit à forcer le système en défaut à se comporter comme le système de référence sans défaut. Deux cas sont étudiés : le premier concerne les systèmes T-S à VDM et la seconde porte sur les systèmes T-S à VDNM.

### 2.2.1 Définition des modèles T-S Incertains et Perturbés (TSIP)

Dans toutes les disciplines, la modélisation joue un rôle important pour connaître et améliorer le fonctionnement d'un système. Dans la majorité des cas, les modèles mathématiques issus de la modélisation ne représentent pas parfaitement les systèmes physiques. En effet, il existe toujours des incertitudes, dites de modélisation, qui ne permettent pas de décrire parfaitement la dynamique d'un système réel. Néanmoins, lors de la modélisation il est possible de compléter le modèle mathématique nominal par une partie supplémentaire englobant les incertitudes de modélisation. Parmi ces incertitudes, il existe deux formes pouvant influencer la dynamique d'un système. Afin d'illustrer ce propos, on considère le système T-S incertain et perturbé (TSIP) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) ((A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + E_i w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) ((C_i + \Delta C_i)x(t) + (D_i + \Delta D_i)u(t) + G_i w(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrées,  $w(t) \in \mathbb{R}^{d \leq n}$  est le vecteur des perturbations externes,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $\{A_i, B_i, C_i, D_i\}$  sont les matrices des sous systèmes linéaires décrivant la partie nominale du système T-S considéré.  $\Delta A_i, \Delta B_i, \Delta C_i$ , et  $\Delta D_i$  sont des matrices représentant la partie incertaine du système considéré.  $E_i, G_i$  sont les matrices de liaison entre les perturbations externes et la dynamique du système.

#### *Incertaines non structurées*

Ces incertitudes sont dites également non paramétriques dans la mesure où on ne connaît rien de leur influence sur la dynamique du modèle nominal. Ainsi, d'après [Dubuisson, 1990] [Oustaloup et Mathieu, 1999], la seule information dont on dispose est que ces incertitudes sont bornées en norme et qu'elles représentent des dynamiques externes inconnues (bruits de mesures, perturbations externes, etc.). Dans le cas du système (2.1), les incertitudes non structurées sont représentées par les perturbations externes  $w(t)$ , bornées telles que leur énergie est donnée par la norme  $L_2$  c'est-à-dire  $\|w(t)\|_2^2 = \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt < \infty$

#### *Incertaines structurées*

Les incertitudes structurées ou bien paramétriques concernent quant à elles la partie modélisée de la dynamique du modèle et non les dynamiques externes au système. Elles sont

généralement dues à des erreurs de modélisation ou encore aux approximations et simplifications nécessaires pour l'obtention d'un modèle exploitable respectant au mieux la réalité d'un système physique [Dubuisson, 1990][Oustaloup et Mathieu, 1999]. Ce type d'incertitudes est représenté dans le modèle T-S (2.1) par les matrices variables dans le temps  $\Delta A_i(t)$ ,  $\Delta B_i(t)$ ,  $\Delta C_i(t)$  et  $\Delta D_i(t)$  et permettent d'enrichir en informations la dynamique globale du système considéré. Dès lors, elles peuvent être réécrites telles que [Zhou et Khargonekar, 1988] :

$$\Delta Z_i = M_i^Z F_i^Z N_i^Z \quad (2.2)$$

où  $Z \in \{A, B, C, D\}$ , et  $M_i^Z$ ,  $N_i^Z$  sont des matrices connues, constantes et de dimensions appropriées.  $F_i^Z$  sont des matrices inconnues dites Lebesgue mesurables vérifiant les propriétés,

$$\forall t \geq 0: F_i^{Z^T}(t) F_i^Z(t) \leq I \quad (2.3)$$

Notons que, peu de travaux de la littérature ont porté sur la commande tolérante aux défauts des TSIP décrits par (2.1). Ceci sera le propos des sections suivantes.

## 2.2.2 Stratégie de commande tolérante aux défauts

Considérons le système sans défaut (modèle de référence) décrit par la structure T-S :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (2.4)$$

La modélisation des défauts pouvant affecter le système permet d'écrire le système incertain et perturbé en présence de défauts sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( (A_i + \Delta A_i) x_f(t) + (B_i + \Delta B_i) (u_f(t) + f(t)) + E_i w(t) \right) \\ y_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( (C_i + \Delta C_i) x_f(t) + (D_i + \Delta D_i) (u_f(t) + f(t)) + G_i w(t) \right) \end{cases} \quad (2.5)$$

**Hypothèse 2.1.** Dans cette section nous considérons que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- H1.** La stabilité entrée-état du système (2.4) est vérifiée.
- H2.** L'entrée du système est bornée :  $|u(t)| < \rho$
- H3.** les perturbation externes  $w(t)$  sont bornées,

### 2.2.3 Objectif de commande

L'objectif est de concevoir la loi de commande  $u_f(t)$  telle que l'état  $x_f(t)$  du système en défaut converge vers l'état de référence  $x(t)$  donné par le modèle sans défaut (2.4). La stratégie de commande est illustrée sur la figure 2.1.

La loi de commande proposée est alors donnée sous la forme :

$$u_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( K_i \left( x(t) - \hat{x}_f(t) \right) + u(t) - \hat{f}(t) \right) \quad (2.6)$$

Les matrices  $K_i$  sont déterminées pour garantir la stabilité du système et minimiser l'écart entre  $x_f(t)$  et  $x(t)$ . L'analyse de la loi de commande proposée dans (2.6) nécessite la connaissance du vecteur de défauts  $f(t)$  à travers son estimation. Cette estimation est obtenue via un observateur PI qui estime simultanément l'état du système en défaut ainsi que le vecteur de défauts.

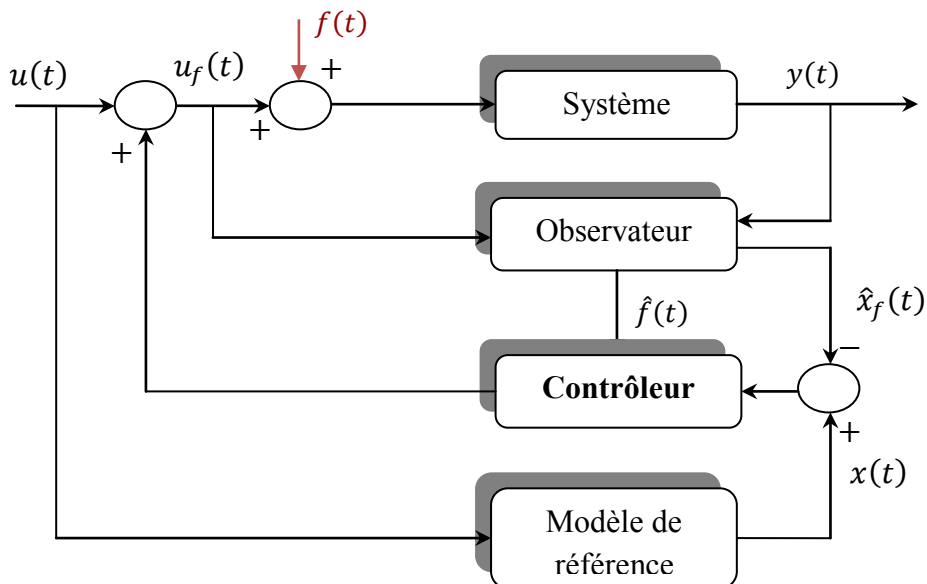


Figure 2.1 – Architecture de la commande tolérante par poursuite de trajectoire

La structure de cet observateur est rappelée ci-dessous :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_f(t) + \mathbf{B}_i (\mathbf{u}_f(t) + \hat{\mathbf{f}}(t)) + \mathbf{H}_i^1 (\mathbf{y}_f(t) - \hat{\mathbf{y}}_f(t)) \right) \\ \hat{\mathbf{f}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( \mathbf{H}_i^2 (\mathbf{y}_f(t) - \hat{\mathbf{y}}_f(t)) \right) \\ \hat{\mathbf{y}}_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_f(t) + \mathbf{D}_i (\mathbf{u}_f(t) + \hat{\mathbf{f}}(t)) \right) \end{cases} \quad (2.7)$$

Où  $H_i^1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$  représentent les gains proportionnels et  $H_i^2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$  les gains intégraux de l'observateur.

## 2.2.4 Variables de décision mesurables

Supposons  $\xi(t)$  mesurable. Pour la synthèse de la commande deux cas sont envisagés selon que la variable de prémisse est affecté par le défaut  $f(t)$  où non. Dans le premier cas  $\xi(t) = \xi_f(t)$ . Pour simplifier supposons que :

$$\bar{A}_i = (A_i + \Delta A_i); \bar{B}_i = (B_i + \Delta B_i); \bar{D}_i = (D_i + \Delta D_i) \quad (2.8)$$

### 2.2.4.1 Variables de prémisse non défectueuses

L'erreur de sortie entre le système (2.7) et l'observateur (2.5) s'écrit :

$$e_y(t) = y_f(t) - \hat{y}_f(t) \quad (2.9)$$

Les erreurs d'estimation d'état et de défaut sont données par :

$$e_s(t) = x_f(t) - \hat{x}_f(t) \quad (2.10)$$

$$e_f(t) = f(t) - \hat{f}(t) \quad (2.11)$$

L'erreur de poursuite d'état est également définie par :

$$e_t(t) = x(t) - x_f(t) \quad (2.12)$$

L'addition et la soustraction du terme  $K_i x_f(t)$  dans l'équation (2.6) permet d'écrire :

$$u_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( K_i e_t(t) + K_i e_s(t) + u(t) - \hat{f}(t) \right) \quad (2.13)$$

Les dynamiques des erreurs  $e_t(t)$ ,  $e_s(t)$  définies précédemment, sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{e}_t(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \left( (A_i - \bar{B}_i K_j) e_t(t) - \bar{B}_i K_j e_s(t) - \bar{B}_i e_f(t) - \Delta A_i x_f(t) \right. \\ & \left. - \Delta B_i u(t) - E_i w(t) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_s(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \left( (A_i + \Delta B_i K_j) e_s(t) + \Delta B_i K_j e_t(t) + \bar{B}_i e_f(t) - H_j^1 e_y(t) \right. \\ & \left. + \Delta A_i x_f(t) + \Delta B_i u(t) + E_i w(t) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Afin de réduire le conservatisme lié au couplage des matrices du système  $C_i$ ,  $D_i$  et de gains de l'observateur  $H_j^1$  une propriété de redondance analytique des systèmes descripteurs est utilisée [Tanaka et al., 2007], [Guelton et al., 2009]. Celles-ci permettent notamment de réduire le conservatisme ainsi que le cout de calcul (diminution du nombre de contraintes) des conditions LMI classique [Tanaka et al., 2007]. De ce fait, il est possible de réécrire (2.9) en introduisant artificiellement une « dynamique virtuelle » telle que :

$$0 \dot{e}_y(t) = e_y(t) - (y_f(t) - \hat{y}_f(t)) \quad (2.16)$$

L'équation (2.16) devient :

$$\begin{aligned} 0 \dot{e}_y(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \left( (C_i + \Delta D_i K_j) e_s(t) + \Delta D_i K_j e_t(t) + \bar{D}_i e_f(t) - e_y(t) \right. \\ & \left. + \Delta D_i + \Delta C_i x_f(t) + G_i w(t) \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

où  $0 \in R^{p \times p}$  est une matrice nulle.

Sous la condition de défaut constant, on a ( $\dot{f}(t) = 0$ ) et la dynamique de l'erreur d'estimation de défaut (2.11) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_f = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \left( (-H_j^2 C_i - H_j^2 \Delta D_i K_j) e_s - H_j^2 \Delta D_i K_j e_t(t) - H_j^2 \bar{D}_j e_f(t) \right. \\ & \left. - H_j^2 \Delta C_i x_f(t) - H_j^2 \Delta D_i u(t) \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

La concaténation de l'erreur de poursuite, l'erreur de sortie et des erreurs d'estimation d'état et de défauts permet de réécrire la dynamique de la boucle fermée sous forme redondante.

On considère le vecteur d'état augmenté :

$$\tilde{x}^T(t) = \left( e_t(t) \ e_s(t) \ e_f(t) \ e_y(t) \ x_f(t) \right) \quad (2.19)$$

Notons que celui-ci introduit un degré de liberté supplémentaire (signal d'erreur de sortie), dit redondant. Ainsi, à partir de (2.14), (2.15), (2.17) et de (2.18), la dynamique de la boucle fermée redondante (BFR) est donnée par le descripteur :

$$E \dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \left( \tilde{A}_{ij} \tilde{x}(t) + \tilde{G}_{ij} \tilde{\omega}(t) \right) \quad (2.20)$$

où :

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{ij} = \begin{bmatrix} -\Delta B_i & -E_i \\ \Delta B_i & E_i \\ -H_j^2 \Delta D_i & 0 \\ \Delta D_i & G_i \\ \bar{B}_i & E_i \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega}^T(t) = \left( u(t) \ w(t) \right)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} (A_i - \bar{B}_i K_j) & -\bar{B}_i K_j & -\bar{B}_i & 0 & -\Delta A_i \\ \Delta B_i K_j & (A_i + \Delta B_i K_j) & \bar{B}_i & -H_j^1 & \Delta A_i \\ -H_j^2 \Delta D_i K_j & -H_j^2 C_i - H_j^2 \Delta D_i K_j & -H_j^2 \bar{D}_i & 0 & -H_j^2 \Delta C_i \\ \Delta D_i K_j & C_i + \Delta D_i K_j & \bar{D}_i & -I & \Delta C_i \\ \bar{B}_i K_j & \bar{B}_i K_j & \bar{B}_i & 0 & \bar{A}_i \end{bmatrix}$$

**Conception de la commande tolérante aux défauts.** Les gains  $K_j$ ,  $H_j^1$  et  $H_j^2$  sont déterminés suivant le théorème 2.1.

**Théorème 2.1.** [Aouaouda et al., 2011a]

le système (2.20) représentant les erreurs de poursuite  $e_t(t)$ , d'estimation d'état  $e_s(t)$  et de défaut  $e_f(t)$  est stable et le gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\tilde{\omega}(t)$  vers  $\tilde{x}(t)$  est borné s'il existe des matrices symétriques et définies positives  $X = X^T \geq 0$ ,  $P_7 = P_7^T \geq 0$ ,  $P_{19}$ ,  $P_{25} = P_{25}^T \geq 0$ ,  $\bar{H}_i^1$ ,  $\bar{H}_j^2$ ,  $K_j$ , et des scalaires  $\varepsilon_{ij}^{1b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{2b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{3b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{6b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{7b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{10b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{11b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{13b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{2a}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{3a}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{4d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{4d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{5d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{6d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{7d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{1c}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{2c}$ , et un taux d'atténuation  $\bar{\gamma}$  est obtenu en résolvant le problème d'optimisation :

$$\min_{X, P_7, P_{19}, P_{25}, \bar{H}_i^1, \bar{H}_j^2, K_j} \bar{\gamma}$$

s.c.

$$\mathfrak{S}_{ii} < 0, i = 1, \dots, r \quad (2.21)$$

$$\frac{2}{r-1} \mathfrak{S}_{ii} + \mathfrak{S}_{ij} + \mathfrak{S}_{ji} < 0, i, j = 1, \dots, r, i \neq j \quad (2.22)$$

où

$$\mathfrak{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} Y_{ij}^{(1,1)} & (*) \\ Y_{ij}^{(2,1)} & Y_{ij}^{(2,2)} \end{pmatrix}$$

$$Y_{ij}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \Sigma_{ij}^{(1,1)} & * & * & * & * & * & * \\ K_i^T B_j^T & \Sigma_{ij}^{(2,2)} & * & * & * & * & * \\ -B_j^T & \Sigma_{ij}^{(3,2)} & \Sigma_{ij}^{(3,3)} & * & * & * & * \\ 0 & \Sigma_j^{(4,2)} & P_{19}^T D_i & \Sigma_{ij}^{(4,4)} & * & * & * \\ 0 & 0 & P_{25}^T B_i & 0 & \Sigma_{ij}^{(5,5)} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_i^T P_{25} & \Sigma_{ij}^{(6,6)} & * \\ -E_i^T & E_i^T P_7 & 0 & G_i^T P_{19} & E_i^T P_{25} & 0 & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{ij}^{(1,1)} = \mathcal{H}(A_i X) - \mathcal{H}(B_i K_j X) + M_i^a M_j^{aT} + (\varepsilon_{ij}^{1b} + (\varepsilon_{ij}^{4b})^{-1} + I) M_i^b M_j^{bT}$$

$$\Sigma_{ij}^{(1,1)} = \mathcal{H}(A_i X) - \mathcal{H}(B_i K_j X) + M_i^a M_j^{aT} + (\varepsilon_{ij}^{1b} + (\varepsilon_{ij}^{4b})^{-1} + I) M_i^b M_j^{bT}$$

$$\Sigma_{ij}^{(2,2)} = \mathcal{H}(P_7 A_i) + \varepsilon_{ij}^{3b} M_i^b M_j^{bT} + I$$

$$\Sigma_{ij}^{(3,2)} = -\bar{H}_j^2 C_i + B_i^T P_7$$

$$\Sigma_j^{(4,2)} = P_{19}^T C_j - \bar{H}_j^1$$

$$\Sigma_{ij}^{(3,3)} = -\mathcal{H}(\bar{H}_j^2 D_i) + (\varepsilon_{ij}^{4b} + \varepsilon_{ij}^{7b}) N_i^{bT} N_j^b + \varepsilon_{ij}^{4d} N_i^{dT} N_j^d + I$$

$$\Sigma_{ij}^{(4,4)} = -\mathcal{H}(P_{19}) + \varepsilon_{ij}^{5d} N_i^{dT} N_j^d + I$$

$$\Sigma_{ij}^{(5,5)} = \mathcal{H}(P_{25} A_i) + (I + \varepsilon_{ij}^{2a} + \varepsilon_{ij}^{3a}) N_i^{aT} N_j^a + \varepsilon_{ij}^{10b} N_i^{bT} N_j^b + (\varepsilon_{ij}^{1c} + \varepsilon_{ij}^{2c}) N_i^{cT} N_j^c$$

$$\Sigma_{ij}^{(6,6)} = -\bar{\gamma}I + (\varepsilon_{ij}^{6d} + \varepsilon_{ij}^{7d}) N_i^{dT} N_j^d + (\varepsilon_{ij}^{11b} + \varepsilon_{ij}^{12b} + \varepsilon_{ij}^{13b}) N_i^{bT} N_j^b$$

$$Y^{(2,2)} = -diag \left[ I \quad I \quad (\varepsilon_{ij}^{1b} + \varepsilon_{ij}^{2b} + \varepsilon_{ij}^{5b}) \quad (\varepsilon_{ij}^{2d} + \varepsilon_{ij}^{1d}) \quad \varepsilon_{ij}^{3b} \right. \\ (\varepsilon_{ij}^{6b} + \varepsilon_{ij}^{9b}) \quad (\varepsilon_{ij}^{8d} + \varepsilon_{ij}^{3d}) \quad (\varepsilon_{ij}^{2b})^{-1} (\varepsilon_{ij}^{13b} + \varepsilon_{ij}^{7b} + (\varepsilon_{ij}^{6b})^{-1}) \\ \varepsilon_{ij}^{2a} \quad \left( (\varepsilon_{ij}^{1d})^{-1} + \varepsilon_{ij}^{4d} + \varepsilon_{ij}^{6d} + (\varepsilon_{ij}^{3d})^{-1} \right) \quad \varepsilon_{ij}^{5d} \quad \varepsilon_{ij}^{1c} \\ \left. \varepsilon_{ij}^{10b} \quad \varepsilon_{ij}^{2c} \quad 2I \quad \varepsilon_{ij}^{3a} \quad (\varepsilon_{ij}^{11b} + (\varepsilon_{ij}^{9b})^{-1} + (\varepsilon_{ij}^{5b})^{-1}) \right]$$



$$Y_{ij}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_i K_j X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i^b K_j X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i^d K_j X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i^b K_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^b K_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^d K_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i^{bT} P_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i^{aT} P_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i^{dT} (\bar{H}_j^2)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i^{dT} P_{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i^{cT} (\bar{H}_j^2)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i^{bT} P_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_i^{dT} P_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_i^{cT} P_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_i^{aT} P_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_i^{bT} P_{25} \end{bmatrix}$$

Les matrices de l'observateur sont déterminées par les équations  $H_i^1 = P_7^{-1} \bar{H}_i^1$ ,  $H_i^2 = \bar{H}_i^2$ . Le taux d'atténuation est obtenu par  $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$ .

**Preuve :**

Les gains  $H_i^1$ ,  $H_i^2$  et  $K_j$  sont obtenus par l'étude de la stabilité de l'équation différentielle (2.20) en utilisant la méthode de Lyapunov. Choisisant comme fonction de Lyapunov:

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) E P \tilde{x}(t) \quad (2.23)$$

avec la condition de symétrie :

$$E P = P^T E \geq 0 \quad (2.24)$$

On considère la matrice de la fonction candidate quadratique de Lyapunov de la forme suivante :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{25} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A partir de (2.24), et (2.25), on obtient  $P_1 = P_1^T \geq 0, P_7 = P_7^T \geq 0, P_{13} = P_{13}^T \geq 0, P_{25} = P_{25}^T \geq 0$  et  $P_{19}$  est une matrice à choix libre. La dynamique de la BFR (2.20) est stable si :

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) = \dot{\tilde{x}}^T(t)EP\tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t)EP\dot{\tilde{x}}(t) < 0 \quad (2.26)$$

En considérant (2.20), (2.27) est vérifiée  $\forall \tilde{x}(t)$  si :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \left( \tilde{x}^T(t) (\tilde{A}_{ij}^T P + P^T \tilde{A}_{ij}) \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P \tilde{G}_{ij} \tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}^T(t) \tilde{G}_{ij}^T P \tilde{x}(t) \right) < 0 \quad (2.27)$$

D'après les hypothèses 2.1, les termes  $u(t)$  et  $w(t)$  sont bornés, ce qui permet d'appliquer les techniques  $\mathcal{L}_2$  pour assurer à la fois la stabilité du système (2.20) et la minimisation de l'influence de  $\tilde{\omega}(t)$  sur l'erreur d'estimation d'état, avec  $\tilde{\omega}^T = [u(t) w(t)]$ .

L'objectif est d'atténuer l'effet de l'entrée  $\tilde{\omega}(t)$  sur le vecteur d'état augmenté  $\tilde{x}(t)$  :

$$\|\tilde{\omega}\|_2 \neq 0, \frac{\|\tilde{x}\|_2}{\|\tilde{\omega}\|_2} < \gamma, \tilde{\omega}(t) \neq 0, \gamma > 0 \quad (2.28)$$

tout en garantissant la stabilité du système augmenté. Comme déjà mentionné, il faut satisfaire la condition suivante :

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) + \tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) - \gamma^2 \tilde{\omega}^T(t)\tilde{\omega}(t) < 0 \quad (2.29)$$

où  $Q = \text{diag}[I \ I \ I \ I \ 0]$ . Par substitution de  $\dot{V}(\tilde{x}(t))$  dans (2.29), on obtient :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \left( \tilde{x}^T(t) (\tilde{A}_{ij}^T P + P^T \tilde{A}_{ij}) \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P^T \tilde{G}_{ij} \tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}^T(t) \tilde{G}_{ij}^T P \tilde{x}(t) \right) + \tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) - \gamma^2 \tilde{\omega}^T(t)\tilde{\omega}(t) < 0 \quad (2.30)$$

qui peut être mis sous la forme :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \begin{pmatrix} \mathcal{H}(P^T \tilde{A}_{ij}) + Q & * \\ \tilde{G}_{ij}^T P & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

Après développement mathématique de (2.31) en basant sur les définitions  $\tilde{A}_{ij}$  et  $\tilde{G}_{ij}$ , et en considérant que  $P_{13} = P_{13}^T = I > 0$  quelque manipulations sont effectuées. Ainsi multipliant (2.31) respectivement à gauche et à droite par  $\text{diag}(X \ I \ I \ I \ I \ I \ I)$  où  $X = P_1^{-1}$ , et après application des changements de variables suivants :

$$(H_i^1)^T P_7 = \bar{H}_i^1, \quad P_{13} H_i^2 = \bar{H}_i^2 \quad (2.32)$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) (\psi_{ij} + \Delta \psi_{ij}) < 0 \quad (2.33)$$

où

$$\psi_{ij} = \left( \begin{array}{ccccc|c} \theta_{ij}^{(1,1)} & * & * & * & * & \\ -K_j^T B_i^T & \theta_i^{(2,2)} & * & * & * & \\ -B_i^T & \theta_{ij}^{(3,2)} & \theta_{ij}^{(3,3)} & * & * & (*) \\ 0 & \theta_i^{(4,2)} & P_{19}^T D_i & \theta^{(4,4)} & * & \\ \theta_{ij}^{(5,1)} & \theta_{ij}^{(5,2)} & P_{25}^T B_i & 0 & \theta_i^{(5,5)} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & B_i^T P_{25} & -\gamma^2 I \\ -E_i^T & E_i^T P_7 & 0 & G_i^T P_{19} & E_i^T P_{25} & \end{array} \right)$$

avec

$$\theta_{ij}^{(1,1)} = \mathcal{H}(A_i X) - \mathcal{H}(B_i K_j X) + X X;$$

$$\theta_i^{(2,2)} = \mathcal{H}(P_7 A_i) + I$$

$$\theta_{ij}^{(3,2)} = -\bar{H}_j^2 C_i + B_i^T P_7$$

$$\theta_{ij}^{(4,2)} = P_{19}^T C_i - \bar{H}_j^1$$

$$\theta_{ij}^{(5,1)} = P_{25}^T B_i K_j X$$

$$\theta_{ij}^{(5,2)} = P_{25}^T B_i K_j$$

$$\theta_{ij}^{(3,3)} = -\mathcal{H}(\bar{H}_j^2 D_i) + I$$

$$\theta^{(4,4)} = -\mathcal{H}(P_{19}) + I$$

$$\theta_i^{(5,5)} = \mathcal{H}(P_{25} A_i)$$

et

$$\Delta \psi_{ij} = \left( \begin{array}{ccccc|c} \bar{\theta}_{ij}^{(1,1)} & * & * & * & * & \\ \bar{\theta}_{ij}^{(2,1)} & \bar{\theta}_{ij}^{(2,2)} & * & * & * & \\ \bar{\theta}_{ij}^{(3,1)} & \bar{\theta}_{ij}^{(3,2)} & \bar{\theta}_i^{(3,3)} & * & * & (*) \\ \bar{\theta}_{ij}^{(4,1)} & \bar{\theta}_{ij}^{(4,2)} & \bar{\theta}_i^{(4,3)} & 0 & * & \\ \bar{\theta}_{ij}^{(5,1)} & \bar{\theta}_{ij}^{(5,2)} & \bar{\theta}_{ij}^{(5,3)} & \bar{\theta}_i^{(5,4)} & \bar{\theta}_i^{(5,5)} & \\ \hline -\Delta B_i^T P_1 & \Delta B_i^T P_7 & \bar{\theta}_{ij}^{(6,3)} & \bar{\theta}_i^{(6,4)} & \Delta B_i^T P_{25} & (0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}_{ij}^{(1,1)} &= -\mathcal{H}(P_1 \Delta B_i K_j X) & \bar{\theta}_{ij}^{(2,1)} &= P_7 \Delta B_i K_j X - K_j^T \Delta B_i^T \\
 \bar{\theta}_{ij}^{(3,1)} &= -\bar{H}_j^2 \Delta D_i K_j X - \Delta B_i^T & \bar{\theta}_{ij}^{(4,1)} &= P_{19}^T \Delta D_i K_j X \\
 \bar{\theta}_{ij}^{(5,1)} &= -\Delta A_i^T + P_{25}^T \Delta B_i K_j X & \bar{\theta}_{ij}^{(2,2)} &= \mathcal{H}(P_7 \Delta B_i K_j) \\
 \bar{\theta}_{ij}^{(3,2)} &= -\bar{H}_j^2 \Delta D_i K_j + \Delta B_i^T P_7 & \bar{\theta}_{ij}^{(4,2)} &= P_{19}^T \Delta D_i K_j \\
 \bar{\theta}_{ij}^{(5,2)} &= \Delta A_i^T P_7 + P_{25}^T \Delta B_i K_j & \bar{\theta}_{ij}^{(3,3)} &= -\mathcal{H}(\bar{H}_j^2 \Delta D_i) \\
 \bar{\theta}_i^{(4,3)} &= P_{19}^T \Delta D_i & \bar{\theta}_i^{(6,4)} &= \Delta D_i^T P_{19} \\
 \bar{\theta}_{ij}^{(5,3)} &= -\Delta C_i^T (\bar{H}_j^2)^T + P_{25}^T \Delta B_i & \bar{\theta}_i^{(5,4)} &= \Delta C_i^T P_{19} \\
 \bar{\theta}_{ij}^{(6,3)} &= -\Delta D_i^T (\bar{H}_j^2)^T & \bar{\theta}_i^{(5,5)} &= \mathcal{H}(P_{25} \Delta A_i)
 \end{aligned}$$

En utilisant la structure des incertitudes définie dans (2.2)  $\Delta\psi_{\mu\mu}$  peut être majorée, à l'aide du lemme 2 (Annexe A) par :

$$\Delta\psi_{ij} \leq \text{diag}[P1_{ij} \quad P2_{ij} \quad P3_{ij} \quad P4_{ij} \quad P5_{ij} \quad P6_{ij}] \quad (2.34)$$

où

$$\begin{aligned}
 P1_{ij} &= \left( (\varepsilon_{ij}^{1b})^{-1} + (\varepsilon_{ij}^{2b})^{-1} + (\varepsilon_{ij}^{5b})^{-1} \right) X K_j^T N_i^{bT} N_i^b K_j X + (\varepsilon_{ij}^{3b})^{-1} K_j^T N_i^{bT} N_i^b K_j \\
 &\quad + \left( (\varepsilon_{ij}^{2d})^{-1} + (\varepsilon_{ij}^{1d})^{-1} \right) X K_j^T N_i^{dT} N_i^d K_j X + (\varepsilon_{ij}^{1a})^{-1} M_i^a M_i^{aT} \\
 &\quad + \left( \varepsilon_{ij}^{1b} + (\varepsilon_{ij}^{4b})^{-1} + (\varepsilon_{ij}^{12b})^{-1} \right) M_i^b M_i^{bT}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P2_{ij} &= \left( (\varepsilon_{ij}^{6b})^{-1} + (\varepsilon_{ij}^{9b})^{-1} \right) K_j^T N_i^{bT} N_i^b K_j + \varepsilon_{ij}^{3b} M_i^b M_i^{bT} + \left( (\varepsilon_{ij}^{3d})^{-1} + \varepsilon_{ij}^{8d} \right)^{-1} K_j^T N_i^{dT} N_i^d K_j \\
 &\quad + (\varepsilon_{ij}^{2a})^{-1} P_7 M_i^a M_i^{aT} P_7 + \left( \varepsilon_{ij}^{2b} + \varepsilon_{ij}^{6b} + (\varepsilon_{ij}^{7b})^{-1} + (\varepsilon_{ij}^{13b})^{-1} \right) P_7 M_i^b M_i^{bT} P_7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P3_{ij} &= \left( (\varepsilon_{ij}^{4d})^{-1} + \varepsilon_{ij}^{1d} + \varepsilon_{ij}^{3d} + (\varepsilon_{ij}^{6d})^{-1} \right) \bar{H}_j^2 M_i^d M_i^{dT} (\bar{H}_j^2)^T + (\varepsilon_{ij}^{4b} + \varepsilon_{ij}^{7b}) N_i^{bT} N_j^b \\
 &\quad + \varepsilon_{ij}^{4d} N_i^{dT} N_i^d + (\varepsilon_{ij}^{10b})^{-1} P_{25} M_i^b M_i^{bT} P_{25} \\
 &\quad + (\varepsilon_{ij}^{5d})^{-1} P_{19}^T M_i^d M_i^{dT} P_{19} + (\varepsilon_{ij}^{1c})^{-1} \bar{H}_j^2 M_i^c M_i^{cT} (\bar{H}_j^2)^T
 \end{aligned}$$

$$P4_{ij} = \left( \varepsilon_{ij}^{2d} + \varepsilon_{ij}^{8d} + (\varepsilon_{ij}^{7d})^{-1} \right) P_{19}^T M_i^d M_i^{dT} P_{19} + \varepsilon_{ij}^{5d} N_i^{dT} N_i^d + (\varepsilon_{ij}^{2c})^{-1} P_{19}^T M_i^c M_i^{cT} P_{19}$$

$$\Pi 5_{ij} = (\varepsilon_{ij}^{3a})^{-1} P_{25} M_i^a M_i^{aT} P_{25} + (\varepsilon_{ij}^{5b} + \varepsilon_{ij}^{9b} + (\varepsilon_{ij}^{11b})^{-1}) P_{25} M_i^b M_i^{bT} P_{25} + (\varepsilon_{ij}^{1a} + \varepsilon_{ij}^{2a} + \varepsilon_{ij}^{3a}) N_i^{aT} N_i^a + (\varepsilon_{ij}^{1c} + \varepsilon_{ij}^{2c}) N_i^{cT} N_i^c + \varepsilon_{ij}^{10b} N_i^{bT} N_i^b$$

$$\Pi 6_{ij} = (\varepsilon_{ij}^{6d} + \varepsilon_{ij}^{7d}) N_i^{dT} N_i^d + (\varepsilon_{ij}^{11b} + \varepsilon_{ij}^{12b} + \varepsilon_{ij}^{13b}) N_i^{bT} N_i^b$$

En appliquant le lemme 2 (Annexe A) pour les termes  $\theta_{ij}^{(5,1)}$ ,  $\theta_{ij}^{(5,2)}$  tout en considérant que

$\Omega_1 = \Omega_2 = I$  l'inégalité (2.33) devient :

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{ij}^{(1,1)} & * & * & * & * & * & * \\ -K_j^T B_i^T & \Lambda_{ij}^{(2,2)} & * & * & * & * & * \\ -B_i^T & \theta_{ij}^{(3,2)} & \Lambda_{ij}^{(3,3)} & * & * & * & * \\ 0 & \theta_i^{(4,2)} & P_{19}^T D_i & \Lambda_{ij}^{(4,4)} & * & * & * \\ 0 & 0 & P_{25}^T B_i & 0 & \Lambda_{ij}^{(5,5)} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_i^T P_{25} & \Lambda_{ij}^{(6,6)} & * \\ -E_i^T & E_i^T P_7 & 0 & G_i^T P_{19} & E_i^T P_{25} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.35)$$

où

$$\Lambda_{ij}^{(1,1)} = \mathcal{H}(A_i X) - \mathcal{H}(B_i K_j X) + X X + \Omega_1^{-1} X K_j^T B_i^T B_i K_j X + \Pi 1_{ij}$$

$$\Lambda_{ij}^{(2,2)} = \theta_{ij}^{(2,2)} + \Omega_2^{-1} K_j^T B_i^T B_i K_j + \Pi 2_{ij}$$

$$\Lambda_{ij}^{(3,3)} = \theta_i^{(3,3)} + \Pi 3_{ij}; \Lambda_{ij}^{(4,4)} = \theta_i^{(4,4)} + \Pi 4_{ij}$$

$$\Lambda_{ij}^{(5,5)} = \theta_i^{(5,5)} + (\Omega_2 + \Omega_1) P_{25}^T P_{25} + \Pi 5_{ij}$$

$$\Lambda_{ij}^{(6,6)} = -\gamma^2 I + \Pi 6_{ij}$$

Enfin en appliquant le complément de Schur, en effectuant le changement de variable  $\bar{\gamma} = \gamma^2$ , l'inégalité (2.35) conduit aux résultats présentés par le théorème 2.1.

#### 2.2.4.2 Variables de prémisse défectueuses

Pour spécifier la trajectoire désirée, le modèle de référence donnée par (2.4) est maintenu inchangé. Alors que pour le système incertain défectueux et l'observateur la variable de prémisse  $\xi_f(t)$  est utilisé au lieu de  $\xi(t)$ . Ainsi, la loi FTC suivante est adoptée :

$$u_f(t) = K(x(t) - \hat{x}_f(t)) + u(t) - \hat{f}(t) \quad (2.36)$$

On procède de la même manière que la première approche. Ainsi la dérivation de la dynamique des erreurs  $e_s(t)$ ,  $e_t(t)$ ,  $e_f(t)$ ,  $e_y(t)$  donne :

$$\begin{cases} \dot{e}_{1t}(t) = \dot{e}_t(t) + \varphi_1(t) \\ \dot{e}_{1s}(t) = \dot{e}_s(t) \\ \dot{e}_{1y}(t) = \dot{e}_y(t) \\ \dot{e}_{1f}(t) = \dot{e}_f(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

où

$$\varphi_1(t) = \sum_{i=1}^r \left( \mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\xi_f(t)) \right) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.38)$$

**Hypothèse 2.2.** On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- **H1.** Le terme  $\varphi_1(t)$  est borné
- **H2.** Le système est stable en boucle ouverte

La concaténation des expressions de la dynamique des erreurs (2.37) permet de réécrire la dynamique de la boucle fermée du système sous forme descripteur en considérant le vecteur d'état augmenté :

$$\tilde{x}^T(t) = [e_t(t) \ e_s(t) \ e_f(t) \ e_y(t) \ x_f(t)] \quad (2.39)$$

Ainsi la dynamique de la redondante (BFR) est donnée par le descripteur :

$$E \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_{\mu\mu} \tilde{x}(t) + G_{1\mu\mu} \tilde{\Gamma}(t) \quad (2.40)$$

où

$$\tilde{\Gamma}^T(t) = (u(t) \ w(t) \ \varphi_1(t)) \quad (2.41)$$

et

$$G_{1\mu\mu} = \begin{bmatrix} -\Delta B_i & -E_i & I \\ \Delta B_i & E_i & 0 \\ -H_i^2 \Delta D_i & 0 & 0 \\ \Delta D_i & G_i & 0 \\ \bar{B}_i & E_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

En considérant la même fonction de Lyapunov quadratique, la synthèse du gain de la commande FTC ainsi que les gains de l'observateur est donnée par le Théorème 2.2 suivant :

**Théorème 2.2.** [Aouaouda et al., 2011a] le système (2.40) représentant les erreurs de poursuite  $e_t(t)$ , d'estimation d'état  $e_s(t)$  et de défaut  $e_f(t)$  est stable et le gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\tilde{\Gamma}(t)$  vers  $\tilde{x}(t)$  est borné s'il existe des matrices symétriques et définies positives  $X = X^T \geq 0, P_7 = P_7^T \geq 0, P_{19}, P_{25} = P_{25}^T \geq 0$ ,  $\bar{H}_i^1, \bar{H}_j^2, K_j$ , et des scalaires

$\varepsilon_{ij}^{1b}, \varepsilon_{ij}^{2b}, \varepsilon_{ij}^{3b}, \varepsilon_{ij}^{6b}, \varepsilon_{ij}^{7b}, \varepsilon_{ij}^{10b}, \varepsilon_{ij}^{11b}, \varepsilon_{ij}^{13b}, \varepsilon_{ij}^{2a}, \varepsilon_{ij}^{3a}, \varepsilon_{ij}^{4d}, \varepsilon_{ij}^{4d}, \varepsilon_{ij}^{5d}, \varepsilon_{ij}^{6d}, \varepsilon_{ij}^{7d}, \varepsilon_{ij}^{1c}, \varepsilon_{ij}^{2c}$ , et un taux d'atténuation  $\bar{\gamma}$  est obtenu en résolvant le problème d'optimisation :

$$\min_{X, P_7, P_{19}, P_{25}, \bar{H}_i^1, \bar{H}_j^2, K_j} \bar{\gamma}$$

s.c.

$$\mathfrak{S}_{ii} < 0, i = 1, \dots, r \quad (2.43)$$

$$\frac{2}{r-1} \mathfrak{S}_{ii} + \mathfrak{S}_{ij} + \mathfrak{S}_{ji} < 0, i, j = 1, \dots, r, i \neq j \quad (2.44)$$

où

$$\mathfrak{S}_{ij} = \begin{pmatrix} \Psi_{ij}^{(1,1)} & (*) \\ \Upsilon_{ij}^{(2,1)} & \Upsilon^{(2,2)} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\Psi_{ij}^{(1,1)} = \begin{pmatrix} \Sigma_{ij}^{(1,1)} & * & * & * & * & * & * & * \\ K^T B_j^T & \Sigma_{ij}^{(2,2)} & * & * & * & * & * & * \\ -B_j^T & \Sigma_{ij}^{(3,2)} & \Sigma_{ij}^{(3,3)} & * & * & * & * & * \\ 0 & \Sigma_j^{(4,2)} & P_{19}^T D_i & \Sigma_{ij}^{(4,4)} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & P_{25}^T B_i & 0 & \Sigma_{ij}^{(5,5)} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_i^T P_{25} & \Sigma_{ij}^{(6,6)} & * & * \\ -E_i^T & E_i^T P_7 & 0 & G_i^T P_{19} & E_i^T P_{25} & 0 & -\bar{\gamma} I & * \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$\Upsilon_{ij}^{(2,1)}, \Upsilon^{(2,2)}$  et  $\Sigma_{ij}$  sont identiques à celles du Théorème 2.1.

**Preuve :** La démonstration est similaire à celle présentée pour le théorème 2.1

### Exemple 2.1 (commande tolérante aux défauts)

Dans cette section, on propose d'illustrer l'efficacité des approches proposées ainsi que l'intérêt du schéma de relaxation, présenté dans le lemme 2.1 (Annexe. A). On considère l'exemple numérique suivant décrivant le système T-S incertain et perturbé (2.2):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 0.2 \\ 0.5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad C_1 = [-1 \quad 0.5 \quad 0] \quad D_1 = -1$$

$$C_2 = [-1 \quad 0.2 \quad 0] \quad D_2 = -0.8$$

Les matrices d'incertitudes  $\Delta A(t), \Delta B(t), \Delta C(t)$  et  $\Delta D(t)$  peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\Delta A(t) = M_i^a F^a N_i^a, \Delta B(t) = M_i^b F^b N_i^b, \Delta C(t) = M_i^c F^c N_i^c, \Delta D(t) = M_i^d F^d N_i^d$$

où

$$M_i^a = N_i^a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}; M_i^b = N_i^b = [0.1 \quad 0.2 \quad 0.3] \\ i = 1,2 \quad M_i^c = N_i^c = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1] \\ M_i^d = N_i^d = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]$$

De ce fait, les fonctions incertaines sont données par:

$$F^a(t) = \sin(1.5t), F^b(t) = \cos(2t), F^c(t) = \cos^2(2t), F^d(t) = \sin(\pi t)/\pi t.$$

Ces fonctions sont bornées sur  $\mathbb{R}, \forall t (F^z(t))^T (F^z(t)) < I, z \in \{a, b, c, d\}$

Afin de réaliser une simulation du système (2.2) en boucle fermée, ce dernier est soumis à une perturbation externe considérée comme un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unitaire. Les matrices correspondantes sont :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 0.25 \end{bmatrix}; G_1 = 0.3, G_2 = -0.3$$

Le défaut  $f(t)$  est un échelon unité apparaissant à l'instant 4 et les fonctions d'activation sont comme suit:

$$\mu_1(u(t)) = (1 - \tanh(0.5 - u(t)))/2 \\ \mu_2(u(t)) = 1 - \mu_1(u(t)).$$

La résolution des LMIs du Théorème2.1 pour une entrée de commande du système sans défaut donnée par  $u(t) = \sin(\cos(2t)0.5t)$  donne les résultats suivants :

$$X = \begin{bmatrix} 1.2944 & -0.0239 & 0.0923 \\ -0.0239 & 1.8377 & 0.2228 \\ 0.0923 & 0.2228 & 1.0162 \end{bmatrix}, P_7 = \begin{bmatrix} 3.3990 & 0.1550 & 0.5143 \\ 0.1550 & 2.5959 & 0.4556 \\ 0.5143 & 0.4556 & 1.8889 \end{bmatrix}$$

$$P_{19} = 2.5813, P_{25} = \begin{bmatrix} 0.5507 & -0.0106 & 0.1198 \\ -0.0106 & 1.3788 & -0.0056 \\ 0.1198 & -0.0056 & 0.6275 \end{bmatrix}$$

$$H_{11} = \begin{bmatrix} -0.2246 \\ 0.6557 \\ -0.5863 \end{bmatrix}, H_{12} = \begin{bmatrix} -0.2614 \\ 0.6200 \\ -0.5514 \end{bmatrix},$$



$$H_{21} = -7.4771$$

$$H_{22} = -7.4212$$

$$K_1 = [-0.5177 \quad -0.5863 \quad 0.6494]$$

$$K_2 = [-0.5053 \quad -0.0416 \quad 0.6669] \text{ et le taux d'atténuation } \gamma = 4.0369$$

Les scalaires sont :

$$\varepsilon_{11}^{1b} = 10.3739, \varepsilon_{22}^{1b} = 9.4398, \varepsilon_{12}^{1b} = 10.3752, \varepsilon_{21}^{1b} = 9.411, \varepsilon_{21}^{3b} = 10.0167, \varepsilon_{21}^{7b} = 5.6221$$

$$\varepsilon_{11}^{2b} = 10.3945, \varepsilon_{22}^{2b} = 10.3943, \varepsilon_{12}^{2b} = 10.3945, \varepsilon_{11}^{3b} = 10.5506, \varepsilon_{22}^{3b} = 10.0139, \varepsilon_{12}^{3b} = 10.5516$$

$$\varepsilon_{11}^{6b} = 10.3956, \varepsilon_{22}^{6b} = 10.3958, \varepsilon_{12}^{6b} = 10.3941, \varepsilon_{11}^{7b} = 8.5276, \varepsilon_{22}^{7b} = 5.6989, \varepsilon_{12}^{7b} = 8.4790$$

$$\varepsilon_{12}^{10b} = 10.4063, \varepsilon_{21}^{10b} = 10.4329, \varepsilon_{11}^{10b} = 10.406, \varepsilon_{11}^{11b} = 10.2676, \varepsilon_{22}^{11b} = 10.9819, \varepsilon_{12}^{11b} = 10.261$$

$$\varepsilon_{22}^{10b} = 10.431, \varepsilon_{21}^{11b} = 10.995, \varepsilon_{21}^{13b} = 10.150, \varepsilon_{11}^{13b} = 10.2404, \varepsilon_{22}^{13b} = 10.1669, \varepsilon_{12}^{13b} = 10.234$$

$$\varepsilon_{11}^{2a} = 6.6695, \varepsilon_{22}^{2a} = 1.8460, \varepsilon_{12}^{2a} = 6.6747, \varepsilon_{21}^{2a} = 1.7958, \varepsilon_{21}^{3a} = 2.0044, \varepsilon_{21}^{5d} = 10.0863$$

$$\varepsilon_{11}^{3a} = 6.6925, \varepsilon_{22}^{3a} = 2.0523, \varepsilon_{12}^{3a} = 6.6978, \varepsilon_{11}^{5d} = 10.0631, \varepsilon_{22}^{5d} = 10.1077, \varepsilon_{12}^{5d} = 10.062$$

$$\varepsilon_{11}^{6d} = 10.5304, \varepsilon_{22}^{6d} = 10.8057, \varepsilon_{12}^{6d} = 10.5307, \varepsilon_{12}^{6d} = 10.8191, \varepsilon_{12}^{7d} = 10.3873, \varepsilon_{21}^{4d} = 9.9766$$

$$\varepsilon_{11}^{7d} = 10.4017, \varepsilon_{22}^{7d} = 10.3876, \varepsilon_{12}^{7d} = 10.4012, \varepsilon_{11}^{4d} = 10.3087, \varepsilon_{22}^{4d} = 9.984, \varepsilon_{12}^{4d} = 10.3024$$

$$\varepsilon_{11}^{1c} = 6.7976, \varepsilon_{12}^{1c} = 2.1460, \varepsilon_{12}^{1c} = 6.8037, \varepsilon_{11}^{2c} = 6.6742, \varepsilon_{22}^{2c} = 1.8311, \varepsilon_{12}^{2c} = 6.6797$$

$$\varepsilon_{21}^{1c} = 2.1014, \varepsilon_{21}^{2c} = 1.7809.$$

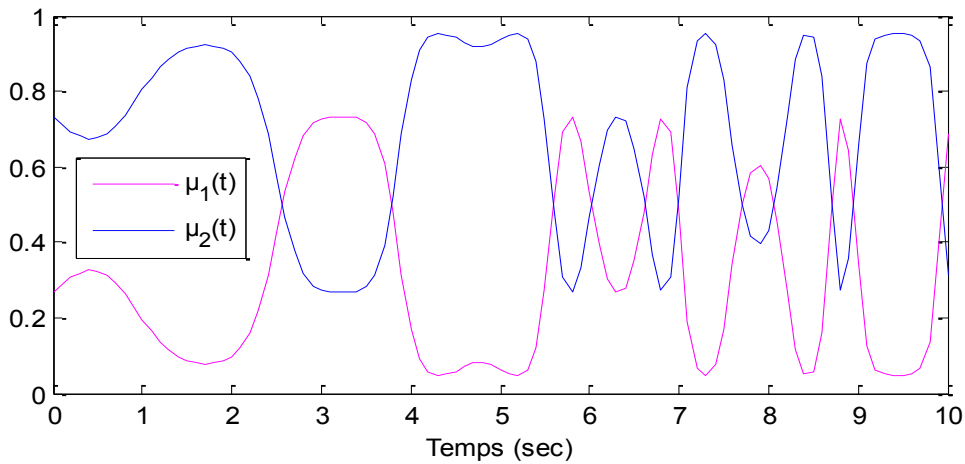


Figure 2.2. Evolution des fonctions d'appartenance.

Les simulations numériques ont été réalisées pour démontrer l'efficacité des approches proposée, en conséquence le problème des LMI a été résolu avec le Toolbox du Matlab. L'observateur fournit l'estimation des états dont les erreurs d'estimation sont illustrées sur la figure (2.5) ainsi que l'estimation du défaut (figure 2.3). La figure 2.5 présente, également,

l'erreur de poursuite entre le système de référence (sans défaut) et le système en défaut avec la commande tolérante au défaut  $u_f(t)$ . Notant que pour l'ensemble des figures (2.4) et (2.3) une comparaison entre les résultats de l'application des deux théorèmes 2.1 et 2.2 est illustrées. Les figures 2.4, 2.6 et 2.7 comparent, d'une part, l'entrée de commande du système sans défaut et la commande tolérante FTC pour les deux théorèmes, la sortie du système avec la commande tolérante au défaut (théorème 2.1), celle du système avec commande tolérante (théorème 2.2), ainsi que celle du système de référence et, d'autre part, les états du système avec la commande tolérante au défaut (théorème 2.1), ceux du système avec commande tolérante (théorème 2.2), ainsi que ceux du système de référence. On constate que la commande tolérante au défaut pour les deux théorèmes a compensé le défaut, et a permis au système d'atteindre son objectif même en présence du défaut. Néanmoins les résultats obtenus par le (théorème 2.1) sont très satisfaisantes.

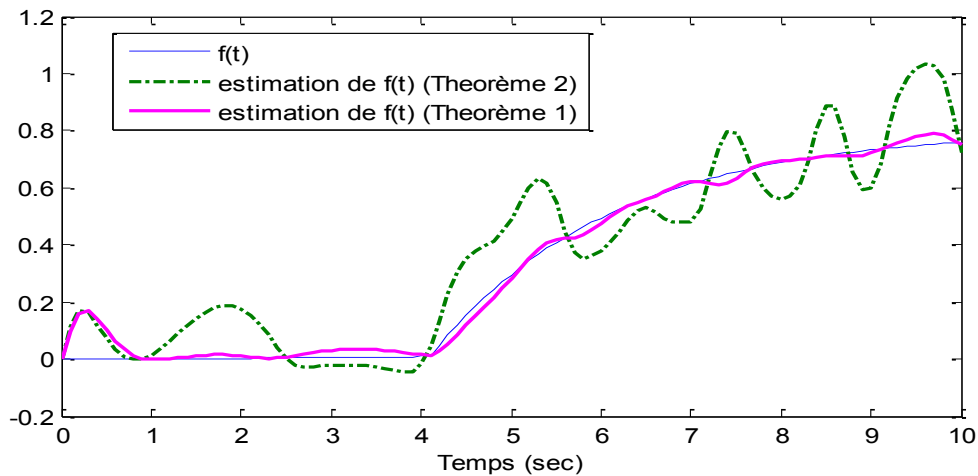


Figure 2.3 Comparaison du défaut et son estimé

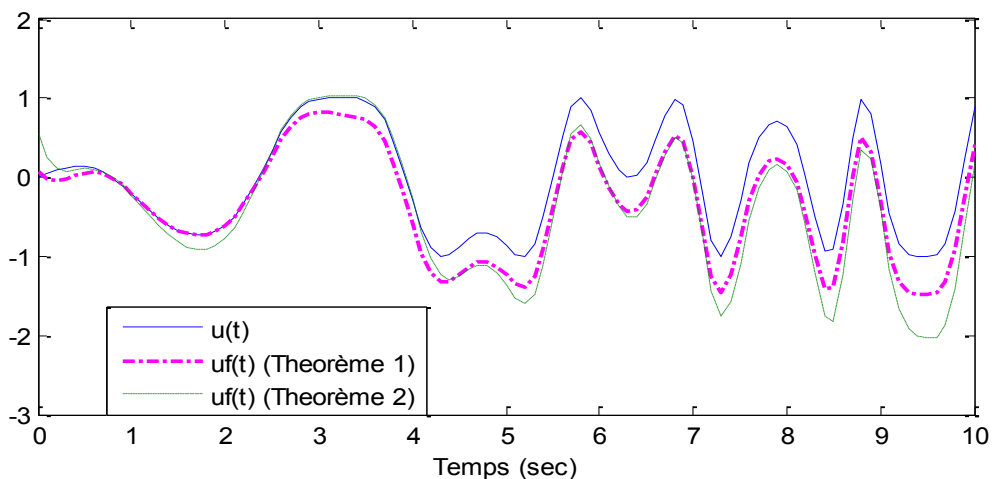


Figure 2.4 Commande sans défaut et FTC

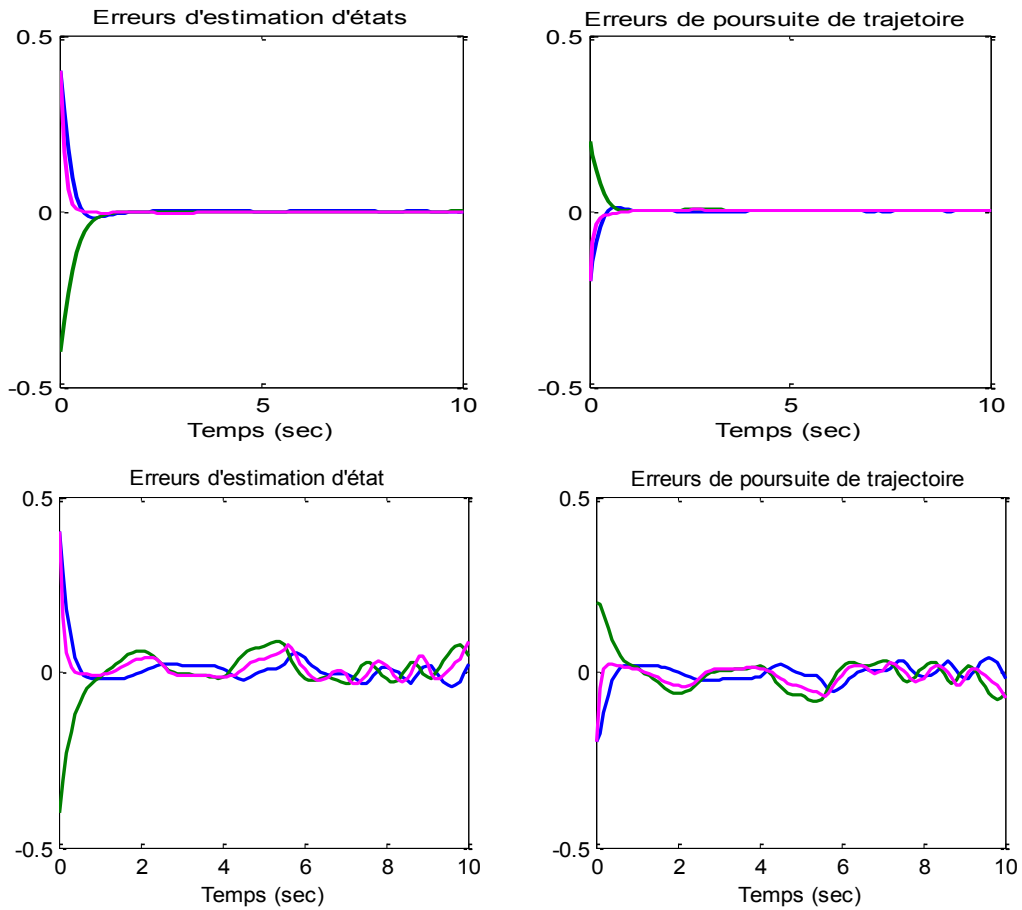


Figure 2.5 Erreurs d'estimation d'état et de poursuite de trajectoire (Théorème 2.1 en haut) et (Théorème 2.2 en bas)

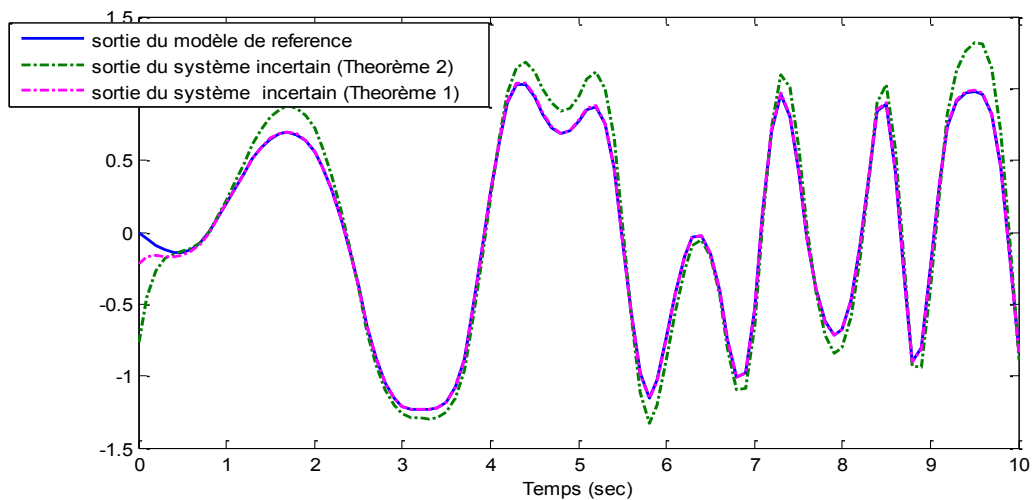


Figure 2.6. Comparaison entre la sortie du système de référence (sans défaut), sortie du système avec FTC (Théorème 2.1) et sortie du système avec FTC (Théorème 2.2)

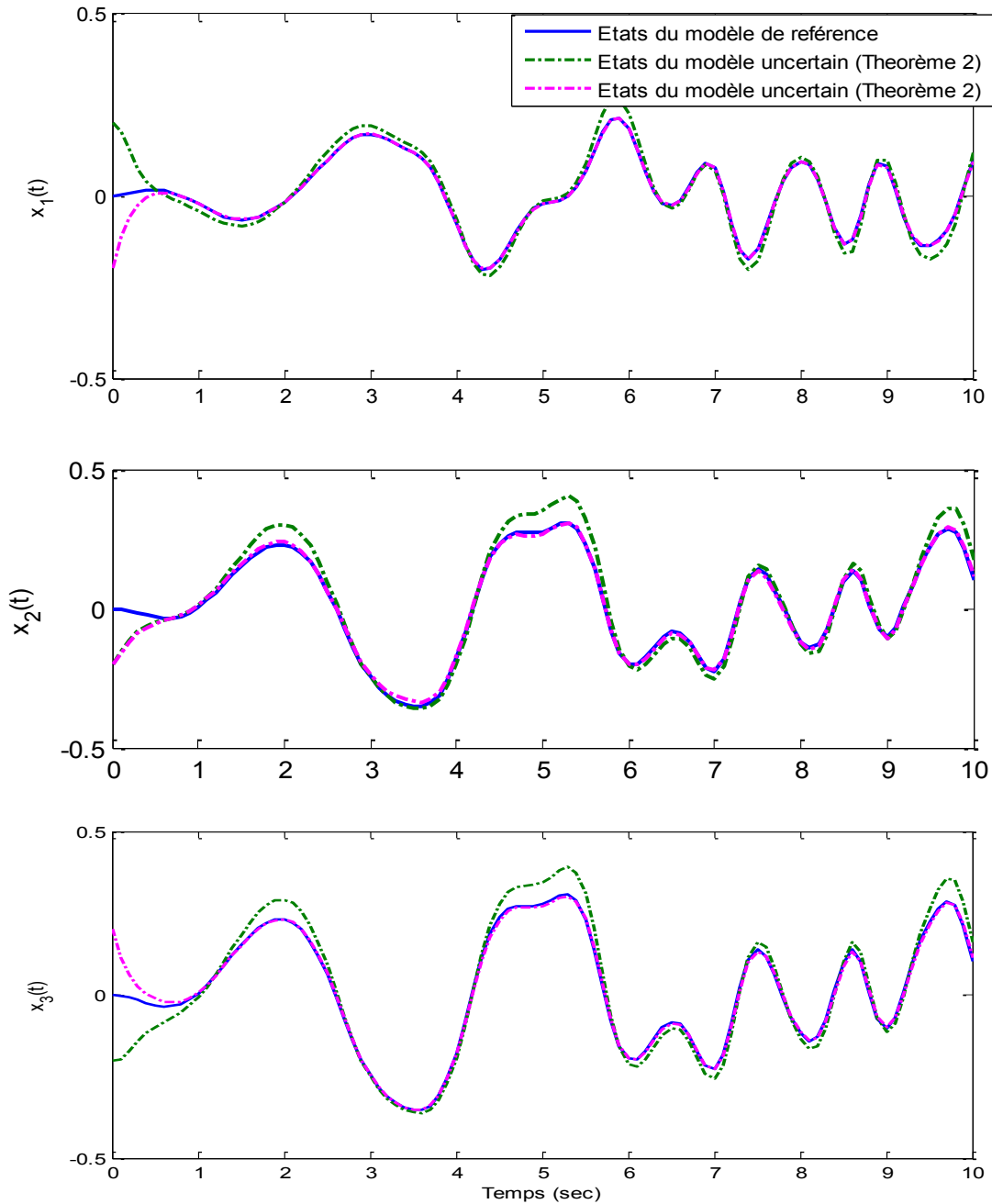


Figure 2.7 Comparaison entre les états du système de référence (sans défaut), états du système avec FTC (Théorème 2.1) et états du système avec FTC (Théorème 2.2)

### 2.2.5 Variables de décision non mesurables

Dans cette section, nous considérons le cas où les fonctions d'activation dépendent (une partie) de l'état du système. Aussi dans plusieurs cas pratiques, la sortie du système est donnée par un ensemble de capteurs mesurant une partie des variables d'état. Considérons que le placement des capteurs ne dépend pas du point de fonctionnement du système d'où

$C_1 = C_2 = \dots = C_r = C$ . On considère également que les matrices d'action de l'entrée sur la sortie sont nulles i.e.  $D_1 = D_2 = \dots = D_r = 0$ . Le système de référence s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) (A_i x + B_i u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.47)$$

Le système T-S incertain et perturbé (2.1) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_f = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi_f) \left( (A_i + \Delta A_i) x_f + (B_i + \Delta B_i) u_f + B_i^f f + E_i d(t) \right) \\ y_f = C x_f + G d(t) + D f \end{cases} \quad (2.48)$$

Puisque l'état  $\xi_f(t)$  n'est pas connu, la loi de commande devient :

$$u_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}_f(t)) K_i \left( x(t) - \hat{x}_f(t) \right) + u(t) - K_i^f \hat{f}(t) \quad (2.49)$$

Afin d'estimer conjointement les états et les défauts, l'observateur proportionnel intégral (*Proportional Integral Observer* PIO) suivant est proposé :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}_f(t)) \left( A_i \hat{x}_f(t) + B_i u_f(t) + B_i^f \hat{f}(t) + H_i^1 \left( y_f(t) - \hat{y}_f(t) \right) \right) \\ \dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}_f(t)) \left( H_i^2 \left( y_f(t) - \hat{y}_f(t) \right) \right) \\ \hat{y}_f(t) = C \hat{x}_f(t) + D \hat{f}(t) \end{cases} \quad (2.50)$$

En suivant la démarche de la section précédente, les dynamiques des erreurs  $e_t(t)$ ,  $e_s(t)$ , sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{e}_t(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi_f(t)) \mu_j(\hat{\xi}_f(t)) & \left( (A_i - \bar{B}_i K_j) e_t(t) - \bar{B}_i K_j e_s(t) - \bar{B}_i K_j^f e_f(t) \right. \\ & \left. - \Delta A_i x_f(t) - \Delta B_i u(t) - E_i d(t) + (\bar{B}_i K_j^f - B_i^f) f(t) + \varphi(t) \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_s(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi_f(t)) \mu_j(\hat{\xi}_f(t)) & \left[ \tilde{B}_{ij} K_j e_t(t) + (A_j + \tilde{B}_{ij} K_j) e_s(t) + (B_j^f + \tilde{B}_{ij} K_j^f) e_f(t) \right. \\ & \left. - H_j^1 e_y(t) + \tilde{A}_{ij} x_f(t) + \tilde{B}_{ij} u(t) + (B_i^f - B_j^f - \tilde{B}_{ij}) f(t) + E_i d(t) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$0 \dot{e}_y(t) = C e_s(t) + D e_f(t) - e_y(t) + G d(t) \quad (2.53)$$

$$\dot{e}_f(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi_f(t)) \mu_j(\hat{\xi}_f(t)) \left( -H_j^2 C e_s(t) + (H_j^3 - H_j^2 D) e_f(t) - H_j^2 G d(t) - H_j^3 f(t) \right) \quad (2.54)$$

où

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^r \left( \mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\xi_f(t)) \right) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.55)$$

$$\bar{A}_i - A_j = \tilde{A}_{ij}, \quad \bar{B}_i - B_j = \tilde{B}_{ij} \quad (2.56)$$

Le système générant les erreurs d'estimation d'état et des défauts et l'erreur de poursuite de trajectoire s'écrit :

$$E \dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi_f(t)) \mu_j(\hat{\xi}_f(t)) \left( \tilde{A}_{ij} \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{ij} \gamma(t) \right) \quad (2.57)$$

où

$$\tilde{x}^T(t) = [e_t(t) \quad e_s(t) \quad e_f(t) \quad e_y(t) \quad x_f(t)]$$

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad Y^T(t) = [u(t) \quad d(t) \quad f(t) \quad \varphi(t)],$$

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} (A_i - \bar{B}_i k_j) & -\bar{B}_i k_j & -\bar{B}_i K_j^f & 0 & -\Delta A_i \\ \tilde{B}_{ij} K_j & (A_j + \tilde{B}_{ij} K_j) & (B_j^f + \tilde{B}_{ij} K_j^f) & -H_j^1 & \tilde{A}_{ij} \\ 0 & -H_j^2 C & -H_j^2 D & 0 & 0 \\ 0 & C & D & -I & 0 \\ \bar{B}_i k_j & \bar{B}_i k_j & \bar{B}_i K_j^f & 0 & \bar{A}_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{ij} = \begin{bmatrix} -\Delta B_i & -E_i & (\bar{B}_i K_j^f - B_j^f) & I \\ \tilde{B}_{ij} & E_i & (B_i^f - B_j^f - \tilde{B}_{ij} K_j^f) & 0 \\ 0 & -H_j^2 G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ \bar{B}_i & E_i & B_i^f - \bar{B}_i K_j^f & 0 \end{bmatrix}$$

**Hypothèse 2.3.** On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- **H1.** Le terme  $\varphi(t)$  est borné
- **H2.** Le système est stable en boucle ouverte

L'analyse de la stabilité du système (2.57) en assurant la minimisation du gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert des perturbations  $Y(t)$  vers le vecteur d'état augmenté  $\tilde{x}(t)$  permet d'énoncer le théorème 2.3

**Théorème 2.3.** [Aouaouda et al., 2012] *La commande tolérante aux défauts (2.49) assurant la convergence de l'état  $x_f(t)$  du système (2.50) vers l'état de référence  $x(t)$  de (2.47) repose sur l'existence des matrices  $X, P_2 = I, P_3, P_5, P_4$ , des gains  $\bar{H}_i^1, \bar{H}_j^2$  et  $K_j$  et les scalaires positive  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, J_{ik}^b, k = 1, \dots, 14$ , et  $J_{ik}^a, k = 1, \dots, 3$  minimisant un scalaire positif  $\bar{\eta}$  tels que les LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\tilde{\mathcal{M}}_{ij} < 0 \quad \text{où} \quad \tilde{\mathcal{M}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{ij}^{(1,1)} & (*) \\ \mathcal{F}_{ij}^{(2,1)} & \mathcal{F}^{(2,2)} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

avec

$$\mathcal{F}_{ij}^{(1,1)} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} \Lambda_{ij}^{(1,1)} & * & * & * & * & \\ \Lambda_{ij}^{(2,1)} & \Lambda_{ij}^{(2,2)} & * & * & * & \\ -K_j^{fT} B_i^T & \Lambda_i^{(3,2)} & \Lambda_j^{(3,3)} & * & * & (*) \\ 0 & \Lambda_i^{(4,2)} & P_4^T D & \Lambda_{ij}^{(4,4)} & * & \\ 0 & \Lambda_{ij}^{(5,2)} & 0 & 0 & \Lambda_i^{(5,5)} & \\ \hline 0 & (B_i - B_j)^T P_2 & 0 & 0 & B_i^T P_5 & \\ -E_i^T & E_i^T P_2 & -G^T \bar{H}_i^{2T} & G^T P_4 & E_i^T P_5 & \mathcal{L} \\ K_j^{fT} B_i^T - B_j^{fT} & \Lambda_{ij}^{(8,2)} & 0 & 0 & (B_i^{fT} - K_j^{fT} B_i^T) P_5 & \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right]$$

$$\Lambda_{ij}^{(1,1)} = \mathcal{H}(A_i X) - \mathcal{H}(B_i K_j X) + (J_{1i}^a)^{-1} M_i^a M_i^{aT} + (J_{6i}^b)^{-1} N_i^{bT} N_i^b + J_{1i}^b M_i^b M_i^{bT}$$

$$\Lambda_{ij}^{(2,1)} = -K_j^T B_i^T + P_2 (B_i - B_j) K_j X + J_{2i}^b M_i^b M_i^{bT}$$

$$\Lambda_{ij}^{(2,2)} = \mathcal{H}(P_2 A_j) + \mathcal{H}(P_2 (B_i - B_j) K_j) + I$$

$$\Lambda_i^{(3,2)} = B_j^{fT} P_2 + K_j^{fT} (B_i - B_j)^T P_2 - \bar{H}_i^2 C$$

$$\Lambda_i^{(4,2)} = -\bar{H}_j^{1T} + P_4^T C; \quad \Lambda_{ij}^{(5,2)} = (A_i - A_j)^T P_2$$

$$\Lambda_j^{(3,3)} = -\mathcal{H}(\bar{H}_j^2 D) + I + J_{4i}^b M_i^b M_i^{bT}$$

$$\Lambda_i^{(5,5)} = \mathcal{H}(P_5 A_i) + (J_{1i}^a + J_{2i}^a + J_{3i}^a) N_i^{aT} N_i^a$$

$$\Lambda_{ij}^{(8,2)} = (B_i^{fT} + B_j^{fT} - K_j^{fT} B_i^T + K_j^{fT} B_j^T) P_2$$

$$\Lambda_i^{(4,4)} = -\mathcal{H}(P_4) + I$$

et

$$\mathcal{F}_{ij}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i^b K_j X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i^b K_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i^b K_j^f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_i K_j X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^b K_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i^{bT} P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i^{bT} P_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i^{aT} P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_i K_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i^b K_j^f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i^{bT} P_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_i K_j^f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_i^{aT} P_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_i^{bT} P_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i^b K_j^f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_j^{fT} B_i^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i^b K_j^f \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2,2)} = & -diag[I \quad (J_{1i}^b + J_{3i}^b + J_{5i}^b) \quad J_{2i}^b \\ & (J_{7i}^b + J_{4i}^b) \quad \delta_1 \quad (J_{10i}^b + J_{8i}^b) \\ & (J_{12i}^b + J_{11i}^b + (J_{3i}^b)^{-1} + (J_{8i}^b)^{-1}) \quad J_{9i}^b \\ & J_{2i}^a \quad \delta_2 \quad (J_{9i}^b)^{-1} \quad J_{13}^b \quad \delta_3 \quad (\delta_1)^{-1} \quad J_{3i}^a \\ & (\delta_2)^{-1} \quad (J_{14i}^b + J_{15}^b + (J_{10i}^b)^{-1} + (J_{5i}^b)^{-1}) \quad (J_{13i}^b)^{-1} \\ & (\delta_3)^{-1} \quad (\delta_4)^{-1} \quad \delta_4 \quad ((J_{12i}^b)^{-1} + (J_{15i}^b)^{-1})] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = -diag[\bar{\eta} I_m + J_{6i}^b M_i^b M_i^{bT} + (J_{11i}^b + J_{14i}^b) N_i^{bT} N_i^b \quad \bar{\eta} I_{n_d} + J_{7i}^b M_i^b M_i^{bT} \quad \bar{\eta} I_q \quad \bar{\eta} I_{n_\phi}]$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :



$$\begin{bmatrix} H_j^1 \\ H_j^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_2^T)^{-1} (\bar{H}_j^1)^T \\ (P_3^T)^{-1} \bar{H}_j^2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

**Preuve :** La démonstration est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique  $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t)EP\tilde{x}(t)$ , le calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov et la substitution de la dynamique du système descripteur décrit par (2.57), donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}(t)) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi_f(t)) \mu_j(\xi_f(t)) \times \\ & \tilde{x}^T(t) \mathcal{H} \left( P^T \begin{bmatrix} (A_i - \bar{B}_i k_j) & -\bar{B}_i k_j & 0 & -\bar{B}_i K_j^f & -\Delta A_i \\ \bar{B}_{ij} K_j & (A_j + \bar{B}_{ij} K_j) & (B_j^f + \bar{B}_{ij} K_j^f) & -H_j^1 & \tilde{A}_{ij} \\ 0 & -H_j^2 C & -H_j^2 D & 0 & 0 \\ 0 & C & D & -I & 0 \\ \bar{B}_i k_j & \bar{B}_i k_j & \bar{B}_i K_j^f & 0 & \bar{A}_i \end{bmatrix} \tilde{x}(t) \right. \\ & \left. + \mathcal{H} \left( \tilde{x}^T(t) P \begin{bmatrix} -\Delta B_i & -E_i & (\bar{B}_i K_j^f - B_j^f) & I \\ \bar{B}_{ij} & E_i & (B_i^f - B_j^f - \bar{B}_{ij} K_j^f) & 0 \\ 0 & -H_j^2 G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ \bar{B}_i & E_i & B_i^f - \bar{B}_i K_j^f & 0 \end{bmatrix} Y(t) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

On utilise le critère suivant :

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) + \tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) - \eta^2(u^T(t)u(t) + d^T(t)d(t) + f^T(t)f(t) + \varphi^T(t)\varphi(t)) < 0 \quad (2.61)$$

où  $Q = \text{diag}[I \ I \ I \ I \ 0]$ . La condition suffisante pour que (2.61) soit vérifiée est :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi_f(t)) \mu_j(\xi_f(t)) \times \left[ \mathcal{H} \left( P^T \begin{bmatrix} (A_i - \bar{B}_i k_j) & -\bar{B}_i k_j & 0 & -\bar{B}_i K_j^f & -\Delta A_i \\ \bar{B}_{ij} K_j & (A_j + \bar{B}_{ij} K_j) & (B_j^f + \bar{B}_{ij} K_j^f) & -H_j^1 & \tilde{A}_{ij} \\ 0 & -H_j^2 C & -H_j^2 D & 0 & 0 \\ 0 & C & D & -I & 0 \\ \bar{B}_i k_j & \bar{B}_i k_j & \bar{B}_i K_j^f & 0 & \bar{A}_i \end{bmatrix} + Q \right) \right] < 0 \quad (*)$$

$$\left[ \begin{array}{c} -\Delta B_i \quad -E_i \quad (\bar{B}_i K_j^f - B_j^f) \quad I \\ \bar{B}_{ij} \quad E_i \quad (B_i^f - B_j^f - \bar{B}_{ij} K_j^f) \quad 0 \\ 0 \quad -H_j^2 G \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad G \quad 0 \quad 0 \\ \bar{B}_i \quad E_i \quad B_i^f - \bar{B}_i K_j^f \quad 0 \end{array} \right]^T P \quad -\eta^2 I$$

(2.62)

L'inégalité matricielle (2.62) ne peut pas être résolue à cause des termes  $\Delta A(t)$  et  $\Delta B(t)$  qui dépendent de  $t$ . Afin d'utiliser le lemme 2.2 (Annexe. A), une transformation de l'inégalité (2.62) permet de séparer les termes constants des termes variables dans le temps. On obtient alors:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi_f(t)) \mu_j(\xi_f(t)) \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{ij}^{1,1} & * \\ \bar{\Sigma}_{ij}^{2,1} & \Sigma^{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \Sigma_{ij}^{1,1} & (*) \\ \Delta \Sigma_i^{2,1} & (0) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.63)$$

où

$$\bar{\Sigma}_{ij}^{1,1} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{ij}^{(1,1)} & * & * & * & * \\ \mathcal{J}_{ij}^{(2,1)} & \mathcal{J}_{ij}^{(2,2)} & * & * & * \\ -K_j^{fT} B_i^T & \mathcal{J}_i^{(3,2)} & \mathcal{J}_j^{(3,3)} & * & * \\ 0 & \mathcal{J}_i^{(4,2)} & P_4^T D & -\mathcal{H}(P_4) + I & * \\ \mathcal{J}_{ij}^{(5,1)} & \mathcal{J}_{ij}^{(5,2)} & P_5 B_i K_j^f & 0 & \mathcal{H}(P_5 A_i) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_{ij}^{(1,1)} = \mathcal{H}(A_i X) - \mathcal{H}(B_i K_j X) + X X; \quad \mathcal{J}_{ij}^{(2,1)} = -K_j^T B_i^T + P_2 (B_i - B_j) K_j X$$

$$\mathcal{J}_{ij}^{(5,1)} = P_5 B_i K_j X; \quad \mathcal{J}_{ij}^{(2,2)} = \mathcal{H}(P_2 A_j) + \mathcal{H}(P_2 (B_i - B_j) K_j) + I$$

$$\mathcal{J}_i^{(3,2)} = B_j^{fT} P_2 + K_j^{fT} (B_i - B_j)^T P_2 - \bar{H}_i^2 C; \quad \mathcal{J}_i^{(4,2)} = -\bar{H}_j^{1T} + P_4^T C$$

$$\mathcal{J}_{ij}^{(5,2)} = (A_i - A_j)^T P_2 + P_5 B_i K_j; \quad \mathcal{J}_j^{(3,3)} = -\mathcal{H}(\bar{H}_j^2 D) + \mathcal{H}(\bar{H}_j^3) + I$$

$$\bar{\Sigma}_{ij}^{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & (B_i - B_j)^T P_2 & 0 & 0 & B_i^T P_5 \\ -E_i^T & E_i^T P_2 & -G^T \bar{H}_i^{2T} & G^T P_4 & E_i^T P_5 \\ K_j^{fT} B_i^T - B_j^{fT} & (B_i^{fT} + B_j^{fT} - K_j^{fT} B_i^T + K_j^{fT} B_j^T) P_2 & 0 & 0 & (B_i^{fT} - K_j^{fT} B_i^T) P_5 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Sigma}^{2,2} = -diag[\eta^2 I_m \quad \eta^2 I_{n_d} \quad \eta^2 I_q \quad \eta^2 I_{n_\varphi}]$$

$$\Delta \Sigma_{ij}^{1,1} = \begin{bmatrix} \check{\psi}_{ij}^{(1,1)} & * & * & * & * \\ \check{\psi}_{ij}^{(2,1)} & \check{\psi}_{ij}^{(2,2)} & * & * & * \\ -K_j^{fT} \Delta B_i^T & \check{\psi}_i^{(3,2)} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ \check{\psi}_{ij}^{(5,1)} & \check{\psi}_{ij}^{(5,2)} & P_5 \Delta B_i K_j^f & 0 & \mathcal{H}(P_5 \Delta A_i) \end{bmatrix}$$

$$\check{\psi}_{ij}^{(1,1)} = -\mathcal{H}(\Delta B_i K_j X); \quad \check{\psi}_{ij}^{(2,1)} = -K_j^T \Delta B_i^T + P_2 \Delta B_i K_j X$$

$$\check{\psi}_{ij}^{(5,1)} = -\Delta A_i^T + P_5 \Delta B_i K_j X; \quad \check{\psi}_{ij}^{(2,2)} = \mathcal{H}(P_2 \Delta B_i K_j); \quad \check{\psi}_i^{(3,2)} = K_j^{fT} \Delta B_i^T P_2$$

$$\check{\psi}_{ij}^{(5,2)} = \Delta A_i^T P_2 + P_5 \Delta B_i K_j$$

$$\Delta \Sigma_i^{2,1} = \begin{bmatrix} -\Delta B_i^T & \Delta B_i^T P_2 & 0 & 0 & \Delta B_i^T P_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_j^{fT} \Delta B_i^T & -K_j^{fT} \Delta B_i^T P_2 & 0 & 0 & -K_j^{fT} \Delta B_i^T P_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Compte tenu de la définition de  $\Delta A(t)$  et  $\Delta B(t)$ , en utilisant le lemme 2.2 (Annexe. A), les matrices  $\Delta \Sigma_{ij}^{1,1}$ ,  $\Delta \Sigma_i^{2,1}$  sont borné par :

$$\Delta \Sigma_{ij} \leq diag[\Pi 1_{ij} \quad \Pi 2_{ij} \quad \Pi 3_{ij} \quad \Pi 4_{ij} \quad \Pi 5_{ij} \quad \Pi 6_{ij} \quad 0 \quad \Pi 8_{ij}] \quad (2.64)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi 1_{ij} = & \left( (J_{1i}^b)^{-1} + (J_{3i}^b)^{-1} + (J_{5i}^b)^{-1} \right) X K_j^T N_i^{bT} N_i^b K_j X + (J_{2i}^b)^{-1} K_j^T N_i^{bT} N_i^b K_j \\ & + \left( (J_{7i}^b)^{-1} + (J_{4i}^b)^{-1} \right) K_j^{fT} N_i^{bT} N_i^b K_j^f + (J_{1i}^a)^{-1} M_i^a M_i^{aT} + (J_{6i}^b)^{-1} N_i^{bT} N_i^b \\ & + J_{1i}^b M_i^b M_i^{bT} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi 2_{ij} = & \left( (J_{10i}^b)^{-1} + (J_{8i}^b)^{-1} \right) K_j^T N_i^{bT} N_i^b K_j + J_{2i}^b M_i^b M_i^{bT} \\ & + \left( J_{3i}^b + J_{8i}^b + (J_{11i}^b)^{-1} + (J_{12i}^b)^{-1} \right) P_2^T M_i^b M_i^{bT} P_2 + (J_{9i}^b)^{-1} P_3^T M_i^b M_i^{bT} P_3 \\ & + (J_{2i}^a)^{-1} P_2^T M_i^a M_i^{aT} P_2 \end{aligned}$$

$$\Pi 3_{ij} = J_{4i}^b M_i^b M_i^{bT} + J_{9i}^b K_j^{fT} N_i^{bT} N_i^b K_j^f + (J_{13}^b)^{-1} P_5^T M_i^b M_i^{bT} P_5$$

$$\begin{aligned} \Pi 5_{ij} = & (J_{1i}^a + J_{2i}^a + J_{3i}^a) N_i^{aT} N_i^a + (J_{3i}^a)^{-1} P_5^T M_i^a M_i^{aT} P_5 \\ & + (J_{5i}^b + J_{10i}^b + (J_{14i}^b)^{-1} + (J_{15}^b)^{-1}) P_5^T M_i^b M_i^{bT} P_5 + J_{13i}^b K_j^{fT} N_i^{bT} N_i^b K_j^f \end{aligned}$$

$$\Pi 6_{ij} = J_{6i}^b M_i^b M_i^{bT} + (J_{11i}^b + J_{14i}^b) N_i^{bT} N_i^b$$

$$\Pi 7_{ij} = J_{7i}^b M_i^b M_i^{bT}$$

$$\Pi 8_{ij} = (J_{12i}^b + J_{15i}^b) K_j^{fT} N_i^{bT} N_i^b K_j^f$$

En utilisant le complément de Schur en utilisant le changement de variable suivant :

$$\bar{\eta} = \eta^2 \quad (2.65)$$

L'inégalité (2.63) conduit aux résultats présentés par le théorème 2.3.

**Remarque 2.1.** *Le résultat obtenu dans cette partie peut être généralisé facilement aux systèmes à sorties non linéaires par rapport à l'état et à l'entrée (i.e.  $C_1 \neq C_2 \neq \dots \neq C_r \neq 0$  et  $D_1 \neq D_2 \neq \dots \neq D_r \neq 0$ ).*

**Remarque 2.2.** *Afin d'illustrer la méthode de commande tolérante aux défauts proposée pour les systèmes T-S incertains et perturbés à variable de décision non mesurable (VDNM), une application réelle correspondant à un modèle réduit ASMI d'une station d'épuration d'eau sera présentée dans le chapitre suivant.*

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la synthèse d'une loi de commande tolérante aux défauts pour des descripteurs T-S incertains et perturbés. La stratégie proposée repose sur le principe de la poursuite d'un modèle de référence qui correspond au modèle du système sans défaut. La stratégie de commande consiste à ajouter deux termes à la loi de commande initiale du système ayant pour objectif de compenser un défaut affectant le système. En présence d'un défaut, cette commande permet de forcer l'état du système en défaut à suivre l'état du modèle de référence. La structure de la loi de commande tolérante aux défauts proposée nécessite la connaissance du défaut qui est alors estimé au moyen d'un observateur PI. Cette approche a été abordée pour les systèmes T-S à VDM présentant des incertitudes de modélisation et des perturbations externes (bruits de mesure et autres). L'extension de cette méthode a été abordée pour les systèmes T-S à VDNM. En utilisant la

technique  $\mathcal{L}_2$  et la théorie de Lyapunov permettent alors l'obtention de conditions de stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état tout en assurant le transfert le plus faible possible des perturbations et des incertitudes (qui sont dues à l'impossibilité de mesurer les variables de décision) vers l'erreur d'estimation. Les conditions trouvées sont exprimées sous forme LMIs permettent de synthétiser les gains de l'observateur et de la loi de commande.

# Application à une station d'épuration

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>63</b>
<b>3.2</b>	<b>Description du procédé d'épuration d'eaux .....</b>	<b>64</b>
3.2.2	Le procédé d'épuration par boues activées.....	64
3.2.3	Modélisation du procédé.....	68
3.2.4	Écriture du modèle ASM1.....	73
<b>3.3</b>	<b>Analyse de sensibilité .....</b>	<b>75</b>
3.3.1	Introduction .....	75
3.3.2	Modèle ASM1 réduit .....	77
3.3.3	Analyse de sensibilité du modèle ASM1 réduit.....	79
3.3.4	Linéarisation du modèle ASM1 réduit.....	81
<b>3.4</b>	<b>Approche MM pour la commande tolérante aux défauts.....</b>	<b>87</b>
3.4.1	Modèle ASM1 réduit .....	89
3.4.2	Obtention d'un MM de type T-S pour le modèle ASM1 réduit.....	92
3.4.3	Commande tolérante au défaut pour le modèle ASM1 réduit.....	96
<b>3.5</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>96</b>

---



*"La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. - La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. - Si la pratique et la théorie sont réunies, rien ne fonctionne et on ne sait pas pourquoi".*

*Albert Einstein*

### 3.1 Introduction

L'utilisation de la simulation dynamique, basée sur des phénomènes physiques rigoureux, est devenue courante en Génie des Procédés. Ces modèles rigoureux permettent de mieux appréhender le comportement dynamique de nombreux systèmes, notamment dans des conditions extrêmes de fonctionnement, et sont particulièrement utiles pour la conduite des procédés. En traitement des eaux, l'adoption par l'Union Européenne de normes de rejets de plus en plus sévères vis-à-vis des rejets des stations d'épuration implique une fiabilisation et un meilleur contrôle de celles-ci. L'utilisation de modèles mathématiques prend alors tout son intérêt pour aider à l'élaboration de stratégies performantes, et éventuellement à la commande en temps réel des unités de traitement. De nombreuses études portant sur la modélisation du procédé à boues activées ont été effectuées au cours des deux dernières décennies. Elles culminent dans la publication par l'IAWQ1 des modèles ASM1 (Activated Sludge Process Model No.1) [Olsson et Newell, 1999], ASM2 [Henze et al., 1999], ASM3 [Gujer et al., 1999]), différents modèles réduits ont été développés [Chachuat et al., 2003; Mulas et al., 2007; Smets et al., 2003; Steffens et al., 1997]. L'utilisation largement répandue de ces modèles dans de multiples domaines d'application a permis d'éprouver leurs capacités de prédiction, mais les nombreux paramètres et variables d'état qu'ils contiennent les rendent cependant inadéquats pour la commande en ligne du procédé. Dans ce chapitre, un modèle non linéaire réduit, inspiré de Weijers [2000] et contenant cinq variables d'état est utilisé. Il est présenté en début de ce chapitre, en section 3.4.1.

L'approche multimodèle peut être utilisée pour réduire la complexité du modèle ASM1 décrivant le processus de biodégradation d'un réacteur à boues activées. Différentes techniques de linéarisation ont été proposées dans la littérature pour simplifier ce modèle, parmi lesquelles une linéarisation autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement [Smets et al., 2006; Steffens et al., 1997], en vue d'obtenir un multimodèle. La perte d'information constitue un premier inconvénient de ces techniques. Le choix des variables de prémisses exprimant différentes non-linéarités du système, ainsi que le choix des différents points de fonctionnement restent encore très délicats, car il faut anticiper différents modes de fonctionnement du processus réactionnel de dégradation. La linéarisation basée sur l'analyse de sensibilité est proposée en chapitre 2 [Aouaouda et al., 2010a, 2010b, 2010c], où un modèle linéaire pour le modèle réduit utilisé sera construit à la section 3.3.4. Grâce à la représentation de Takagi-Sugeno des systèmes dynamiques non linéaires obtenus par la méthode du découpage en secteur non linéaire les inconvénients des méthodes citées

précédemment sont évitées puisqu'elle permet d'aboutir à un représentant exact d'un système non linéaire sur un compact de l'espace d'état [Tanaka et Wang, 2001]. Un multimodèle de type T-S pour le modèle réduit utilisé sera construit à la section 3.4.2. D'autres méthodes basées sur l'identification d'un multimodèle pour un processus de biodégradation d'un réacteur ont été proposées dans la littérature [Ragot et al., 2001; Pekpe et al., 2007], mais ces méthodes d'identification ne font pas l'objet de nos études.

Ce chapitre est organisé comme suit : la description du procédé d'épuration d'eaux usées est réalisée en section 3.2, la linéarisation du modèle bioréacteur à trois variables en basant sur une analyse de sensibilité est réalisée en section 3.3. De plus, l'obtention d'un multimodèle Takagy-Sugeno pour le modèle ASM1 réduit à cinq états est réalisée en section 2.3.2, les résultats d'estimation d'état et de commande tolérante aux défauts proposés dans le chapitre précédent sont appliqués au modèle ASM1 réduit, en section 3.4. Enfin, quelques conclusions seront présentées concernant les résultats obtenus lors de l'application sur le modèle d'une station d'épuration.

## 3.2 Description du procédé d'épuration d'eaux

### 3.2.1 Le procédé d'épuration par boues activées

#### Définition

Une définition des milieux composant le procédé d'épuration est nécessaire, et est donnée par :

- ❖ *Milieu anoxique* : milieu dans lequel l'oxygène n'est pas présent sous forme libre dissoute.
- ❖ *Milieu aérobique* : milieu dans lequel l'oxygène libre est présent en quantité suffisante et joue un certain rôle.
- ❖ *Ammoniaque* : composé gazeux d'azote et d'hydrogène, très soluble dans l'eau.
- ❖ *Biomasse* : représente l'ensemble des êtres vivants, animaux et végétaux, qui sont présents dans le milieu considéré. Les bactéries sont les actrices principales du traitement mais les autres formes biologiques gravitant autour d'elles sont indispensables au bon équilibre de l'écosystème. Les espèces varient suivant le type de station de traitement et sont caractéristiques du fonctionnement d'une station [Canler et al., 1999]. Entre toutes ces espèces se créent alors des relations de compétition,



certaines vont se développer plus facilement au détriment d'autres qui resteront minoritaires ou tendront à disparaître. Les bactéries utilisées dans les procédés à boues activées sont classées en deux catégories :

1. *les bactéries hétérotrophes pouvant se développer en milieu aéré (aérobie) ou non aéré (anoxique) : elles utilisent du carbone organique comme substrat et, selon leur type et le milieu considéré, peuvent dégrader la matière carbonée ou les nitrates-nitrites.*
2. *les bactéries autotrophes ne se développant qu'en milieu aéré (aérobie) : elles utilisent du carbone minéral (CO<sub>2</sub>) comme substrat, elles ne dégradent pas les matières carbonées mais permettent d'éliminer les composés azotés.*

- ❖ *Substrat* : désigne les substances constituant la nourriture nécessaire au développement des micro-organismes. Les composés organiques à dégrader représentent la majorité de ces substances. Si le substrat n'est pas sous une forme directement assimilable par la bactérie, il sera hydrolysé à l'extérieur de la cellule bactérienne par des exoenzymes.
- ❖ L'*azote ammoniacal* et les *phosphates* sont utilisés en tant que nutriments car ils entrent dans la composition des composés cellulaires (protéines, membrane cellulaire, ADN). L'oxygène dissous est également indispensable au développement des bactéries aérobies. Suivant la composition de l'effluent à traiter, il sera nécessaire de rajouter un ou plusieurs de ces composants afin de favoriser le métabolisme des bactéries.

### **Classification des types de pollution**

La plupart des effluents pollués sont des mélanges très complexes dont la composition varie suivant leur provenance : industrielle, agricole ou urbaine. L'évaluation de la pollution est donc basée sur des classifications selon les propriétés globales de l'effluent. La pollution se définit comme l'introduction dans un milieu naturel de substances provoquant sa dégradation. Les effets néfastes peuvent avoir lieu à tous les niveaux (sanitaire, écologique et économique). Une autre classification importante ces composés est fondée sur la capacité des polluants à être dégradés. On distingue deux classes principales :

- ❖ *Matières biodégradables* : elles sont dégradées par les micro-organismes, et peuvent être structurées en deux groupes :

1. *matières rapidement biodégradables* : elles sont dégradées par les micro-organismes, elles sont directement assimilées par les bactéries
  2. *matières lentement biodégradables* : composées de substrats particuliers formés par un mélange de substances organiques solides, colloïdales et solubles. Ces matières sont soumises à certains processus intermédiaires avant d'être assimilées par les populations bactériennes.
- ❖ *Matières non biodégradables* : ces substances inertes ne subissent aucun phénomène biologique de transformation. Elles peuvent être de nature aussi variée que des métaux lourds ou des composés issus de la mortalité des micro-organismes par exemple.

Les polluants nécessitant un traitement biologique sont d'une part les matières carbonées ou organiques biodégradables qui constituent de loin la première cause de pollution des ressources en eau et, d'autre part, les matières azotées qui sont principalement présentes dans les eaux usées urbaines ou industrielles de type agro-alimentaire

### **Description du processus**

La composition d'une eau usée peut donc être très variée suivant son origine et chaque installation est par conséquent conçue pour répondre à un besoin spécifique. Les technologies utilisées se développent et se perfectionnent constamment par la recherche de technologies ou de procédés nouveaux et par la mise en place de nombreux automatismes [[Nagy. 2010](#)].

1. Le *prétraitement* a pour objectif l'extraction des matières les plus grossières (brindilles, feuilles, tissus, ...) et des éléments susceptibles de gêner les étapes ultérieures du traitement. Il comprend : le dégrillage (en capturant les déchets volumineux à l'aide d'une succession de grilles), le dessablage (pour prévenir les dépôts dans les canalisations, protéger les mécaniques -pompes- contre l'abrasion), le dégraissage-déshuilage (pour éviter l'encrassement de la station par des corps gras)
2. Le *traitement primaire* s'effectue par voie physico-chimique avec pour but d'extraire le maximum de matières en suspension et de matières organiques facilement décantables
3. Le *traitement biologique* a pour objectif principal l'élimination des composés solubles d'origine organique. Parallèlement, la floculation de la biomasse permet de piéger les matières en suspension restant à l'issue du traitement primaire. Le principe de ce traitement est de mettre en contact la matière organique contenue dans les eaux usées

avec une population bactérienne. Cette phase est essentielle dans le processus d'épuration et elle sera présentée plus en détail à la section suivante.

Le procédé de traitement biologique est dit "à boues activées" car l'ensemble des conditions favorables à une activité maximale des bactéries est mis en œuvre : un apport en oxygène suffisant, un apport en nutriment si l'effluent ne contient pas tous les composés nécessaires au développement des bactéries, une agitation permanente afin de favoriser le contact entre les bactéries et la matière polluée, une concentration élevée en bactéries pour augmenter l'efficacité du traitement. La chaîne de traitement est composée d'un bioréacteur, d'un clarificateur / décanteur et d'une boucle de recyclage des boues (voir figure 3.1).

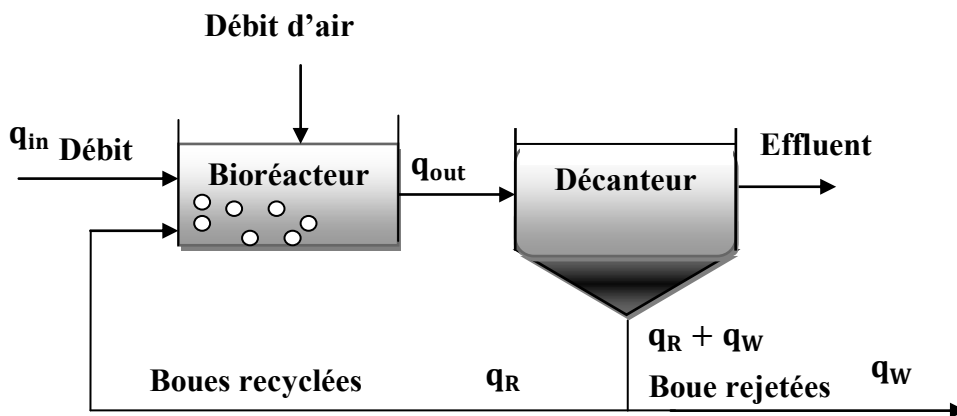


Figure 3.1 – Schéma du procédé d'épuration par boues activées

### Le bioréacteur

L'eau polluée -soumise préalablement à un traitement primaire- provenant d'une source externe, circule dans le bassin d'aération -bioréacteur- dans lequel la biomasse bactérienne dégrade la matière organique. Les micro-organismes s'agglomèrent en flocons et produisent les boues. Le mélange, appelé "liqueur mixte", se compose d'une phase solide (micro-organismes, débris organiques, matières minérales) et d'une phase liquide contenant les matières dissoutes. Pour éliminer la matière azotée, le réacteur biologique peut être séparé en deux zones distinctes : aérobie et anoxique. Dans la majorité des cas, la zone anoxique est placée en amont de la zone aérobie, juste à l'entrée de l'effluent dans le réacteur, pour que les bactéries aient suffisamment de matière organique biodégradable pour effectuer la réaction de dénitrification. Le recyclage de la liqueur mixte de la zone aérobie vers la zone anoxie permet l'élimination des polluants azotés oxydés.

### *Le clarificateur ou décanteur*

En sortie du réacteur, est obtenue une liqueur mixte composée de boues flocculées et d'eau épurée prête à être rejetée dans le milieu naturel. Cette liqueur alimente un clarificateur qui a une fonction de séparation de phase et une fonction d'épaississement afin de ramener la boue la plus concentrée possible dans le réacteur biologique. Du fait de l'absence d'oxygène, le temps de passage des boues doit être le plus faible possible pour éviter qu'elles ne se trouvent en phase anaérobie. Ceci aurait pour conséquence l'apparition d'odeurs désagréables ainsi qu'une détérioration de la qualité mécanique de la boue perturbant tant le traitement biologique de l'eau que le traitement ultérieur des boues.

### *Le recyclage de boues*

La croissance de la biomasse au sein du bioréacteur n'est pas suffisante pour compenser la perte engendrée par le débit de sortie de la liqueur mixte. Pour conserver une concentration en biomasse constante dans le réacteur, une partie des boues du clarificateur est recyclée vers le réacteur. Des purges ont également lieu afin d'extraire la quantité de boues en excès dans le procédé. Les taux de recyclage et de purge permettent également de maîtriser l'âge des boues c'est-à-dire le temps au bout duquel la biomasse est entièrement renouvelée. Ce temps caractérise la forme physiologique de la biomasse dans le réacteur mais aussi la composition de celle-ci. Prenons l'exemple du traitement de la matière azotée : les bactéries autotrophes responsables de la réaction de nitrification ne seront absentes que si l'âge des boues est supérieur à 6 jours, leur temps de duplication étant de 4 jours[Chachuat et al., 2003].

## **3.2.2 Modélisation du procédé**

### **Modèle de référence**

Le modèle ASM 1 [Olsson et Newell, 1999] est le fruit du travail d'une équipe créée par l'association IAWQ en 1983. Le modèle ASM1 décrit les mécanismes biologiques de dégradation des matières organiques, de nitrification et de dénitrification et il est essentiellement utilisé comme modèle de simulation. Il constitue un modèle général capable de représenter de façon précise le comportement du procédé lors du traitement d'un effluent chargé en matières azotées et carbonées.

❖ *Variables d'état*

Nous allons présenter dans ce paragraphe un modèle simplifié, issu du modèle ASM1, comprenant 11 variables d'état [Boukroune. 2008]. Notons que la lettre  $X$  est proposée pour les composés particuliers et la lettre  $S$  pour les composés solubles. Nous pouvons classer ces variables d'état en quatre groupes :

- ✓ *Les substrats* : le substrat rapidement biodégradable ( $S_S$ ) et le substrat lentement biodégradable ( $X_S$ ).
- ✓ *Les biomasses* : la biomasse hétérotrophe ( $X_{BH}$ ) responsable de l'oxydation des matières organiques et de la dénitrification, et la biomasse autotrophe ( $X_{BA}$ ), responsable de la nitrification. La croissance des biomasses est décrite par la loi Monod.
- ✓ *Les composés azotés* : sont distingués en fonction de leurs degrés d'oxydation et repartis en 3 catégories :
  - les formes organiques (solubles ( $S_{ND}$ ) et particulières ( $X_{ND}$ )),
  - les formes ammoniacales ( $S_{NH}$ )
  - les formes oxydées ( $S_{NO}$ ) (nitrates-nitrites)).
- ✓ *L'oxygène dissous* ( $S_O$ ).

Nous constatons que certaines variables d'état correspondent à des espèces chimiques existantes ( $S_{NH}$ ,  $S_{NO}$ ,  $S_O$ ) alors que d'autres sont au contraire plus conceptuelles et ne peuvent pas être directement mesurées ( $X_{BH}$ ,  $X_{BA}$ ).

En conséquence, le modèle comporte au total onze variables d'état réunies dans le vecteur  $x$  :

$$x = [S_I \quad S_S \quad X_I \quad X_S \quad X_{BH} \quad X_{BA} \quad S_{NO} \quad S_{NH} \quad S_{ND} \quad X_{ND} \quad S_O]^T \quad (3.1)$$

❖ *Variables d'entrée*

Les concentrations en composants solubles  $S_{*,in}$  et particuliers  $X_{*,in}$  dans l'eau polluée qui rentrent dans le bassin de réaction sont considérées comme variables d'entrée du modèle. Les débits d'entrée  $q_{in}$ , de recyclage  $q_R$  et d'extraction  $q_W$  font aussi partie de cet ensemble de variables, dont les éléments forment le vecteur d'entrée  $u$  défini par :

$$u = [S_{I,in} \quad S_{S,in} \quad X_{I,in} \quad X_{S,in} \quad X_{BH,in} \quad X_{BA,in} \quad S_{NO,in} \quad S_{NH,in} \quad S_{ND,in} \quad X_{ND,in} \quad S_{O,in} \quad q_{in} \quad q_R \quad q_W]^T \quad (3.2)$$

❖ *Variables de sortie*

Les concentrations en composants solubles  $S_{*,out}$  et particuliers  $X_{*,out}$  de l'eau qui sortent du bassin de réaction sont considérées comme variables de sortie du modèle.

Le débit de sortie  $q_{out}$  fait partie aussi de cet ensemble de variables mesurables ; le vecteur  $x_{out}$  réunit les variables de sortie qui viennent d'être mentionnées :

$$y = [S_{I,out} \ S_{S,out} \ X_{I,out} \ X_{S,out} \ X_{BH,out} \ X_{BA,out} \ S_{NO,out} \ S_{NH,out} \ S_{ND,out} \ X_{ND,out} \ S_{O,out} \ q_{out}]^T \quad (3.3)$$

Les variables d'état du modèle ASM1 sont liées par 8 processus de dégradation. Une brève description de chacun de ces processus est donnée dans les points suivants (figure 3.2).

- **Croissance aérobie des micro-organismes hétérotrophes ( $\rho_1$ )**: une fraction de substrat facilement biodégradable est utilisée pour la croissance de la biomasse et à l'élimination du substrat. Il est ainsi naturellement limité par l'épuisement du substrat  $S_S$ , mais également par le manque d'oxygène dissous et d'ammoniaque.
- **Croissance anoxie des micro-organismes hétérotrophes ( $\rho_2$ )**: en l'absence d'oxygène, les organismes hétérotrophes vont utiliser le nitrate comme récepteur terminal d'électrons, avec le substrat  $S_S$ , pour produire la biomasse et de l'azote gazeux (dénitrification). L'ammoniaque sert de source d'azote pour la synthèse des micro-organismes.
- **Croissance aérobie des micro-organismes autotrophes ( $\rho_3$ )**: l'ammoniaque est oxydé en nitrate (nitrification) ce qui donne comme résultat une production de biomasse autotrophe et une augmentation de la demande d'oxygène. Il est aussi utilisé comme source d'énergie pour la synthèse. L'effet sur la quantité de biomasse produite est très faible. Par contre, la consommation d'oxygène est fortement affectée.
- **Mortalité des micro-organismes hétérotrophes et autotrophes ( $\rho_4, \rho_5$ )** : ces processus sont modélisés selon l'hypothèse de mortalité-régénération. Les micro-organismes meurent à un taux déterminé, et cette biomasse devient une combinaison des produits particuliers et de substrat lentement biodégradable. L'azote organique associé à  $X_S$  est disponible comme azote organique particulière. Les taux de mortalité sont supposés invariants en condition d'aérobie et d'anoxie.
- **Ammonification de l'azote organique soluble ( $\rho_6$ )**: l'azote organique biodégradable est transformé en ammonium par l'action de la biomasse hétérotrophe active. L'alcalinité est aussi modifiée.
- **Hydrolyse des matières organique ( $\rho_7$ )**: le substrat lentement biodégradable correspondant aux substances polluantes est décomposé par un mécanisme extracellulaire, en produisant du substrat facilement biodégradable utilisable par la biomasse. Ce processus a lieu en aérobie et en anoxie.

- Le taux d'hydrolyse en anoxie est réduit par un

Concentrations j		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	Cinétique de la réaction
i	Réaction $\rho_i$	$S_I$	$S_S$	$X_I$	$X_S$	$X_{B,H}$	$X_{B,A}$	$S_{NO}$	$S_{NH}$	$S_{ND}$	$X_{ND}$	$S_O$	
1.	Croissance aérobie des hétérotrophes		$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-i_{NBM}$			$-\frac{1-Y_H}{Y_H}$	$\rho_1 = \frac{S_S}{K_S+S} \frac{S_{NH}}{K_{NH,H}+S_{NH}} \frac{S_O}{K_{O,H}+S_O} X_{B,H}$
2.	Croissance anoxie des hétérotrophes		$-\frac{1}{Y_H}$			1		$-\frac{1-Y_H}{2.86Y_H}$	$-i_{NBM}$				$\rho_2 = \mu_H \frac{S_S}{K_S+S} \frac{S_{NH}}{K_{NH,H}+S_{NH}} \frac{X_{NO,g} X_{B,H}}{X_{KOH}+S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}}$
3.	Croissance aérobie des autotrophes					1		$\frac{1}{Y_A}$	$-\frac{1}{Y_A} - i_{NBM}$			$-4.57 \frac{1}{Y_A}$	$\rho_3 = \mu_A \frac{S_{NH}}{K_{NH,A}+S_{NH}} \frac{S_O}{K_{O,A}+S_O} X_{B,A}$
4.	Mortalité des hétérotrophes			$f_{rXI}$	$1 - f_{rXI}$	-1					$i_{NBM} - f_{rXI} \times i_{NXI}$		$\rho_4 = b_H X_{B,H}$
5.	Mortalité des autotrophes			$f_{rXI}$	$1 - f_{rXI}$	-1					$i_{NBM} - f_{rXI} \times i_{NXI}$		$\rho_5 = b_A X_{B,A}$
6.	Ammonification de l'azote organique soluble								1	-1			$\rho_6 = k_d S_{ND} X_{B,H}$
7.	Hydrolyse de la matière organique absorbée		1		-1								$\rho_7 = k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X+X_S/X_{B,H}} \left( \frac{S_O}{K_{O,H}+S_O} + \frac{\eta_{NO,H}}{K_{O,H}} \frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}} \right) X_{B,H}$
8.	Hydrolyse de l'azote organique absorbé									1	-1		$\rho_8 = k_h \frac{X_{ND}/X_{B,H}}{K_X+X_S/X_{B,H}} \left( \frac{S_O}{K_{O,H}+S_O} + \eta_{NO,H} \frac{S_{NO}}{K_{NO}+S_{NO}} \right) X_{B,H}$

Figure 3.2 – Matrice des cinétiques du modèle ASM1

facteur  $\eta_h (< 0)$  par rapport aux conditions d'aérobie. Il est lié à la biomasse hétérotrophe par une fonction du premier ordre et sature quand la concentration de substrat absorbé devient grande par rapport à la biomasse.

- **Hydrolyse de l'azote organique ( $\rho_8$ )** : l'azote organique particulaire biodégradable est décomposé en azote organique soluble à un certain taux défini par la réaction d'hydrolyse précédemment écrite.

### Hypothèses, restrictions et contraintes du modèle ASM1

Certaines hypothèses ont été faites pour que le modèle soit utilisable en pratique [Nagy, 2010]:

- le bioréacteur et le décanteur sont parfaitement mélangés. Cette hypothèse se traduit par :

$$y(t) = x(t) \quad (3.4)$$

- les réactions biologiques ont lieu seulement dans le bioréacteur.
- le décanteur est parfait : l'eau épurée ne comporte pas de substances particulières et les concentrations des composants solubles sont les mêmes en entrée et en sortie du décanteur:

$$S(t) = S_R(t) \quad (3.5)$$

$$(q_{in}(t) + q_R(t))X(t) = (q_R(t) + q_w(t))X_R(t) \quad (3.6)$$

où  $X$  et  $S$  sont les concentrations respectives de particules et de substrat dans le bioréacteur et  $X_R$  et  $S_R$  les concentrations de particules et de substrat dans le circuit de recirculation des boues [Julien, 1997].

- le système opère à température constante. Si des fluctuations importantes de température sont considérées, les  $\rho_i$  processus doivent être réécrits.
- le pH varie très peu, et surtout reste dans la zone où il n'affecte pas le taux de croissance. Il n'est donc pas nécessaire d'exprimer son influence dans les coefficients stoechiométriques.
- les facteurs de correction en dénitrification,  $\eta_g$  et  $\eta_h$ , fixés et constants, sont spécifiques de l'eau résiduelle traitée.
- la biomasse hétérotrophe est supposée homogène.



### Valeurs typiques des paramètres

Dans le tableau 3.1 sont rassemblées les valeurs des paramètres du modèle ASM1 conformément à Henze et al. [1987]. Ces valeurs correspondent à des caractéristiques d'eaux résiduelles de provenance domestique, à une température de 20°C et pour un pH neutre.

Paramètres	Signification	Valeurs par défaut
$Y_A$	Taux de conversion substrat/biomasse autotrophe	0.24
$Y_H$	Taux de conversion substrat/biomasse hétérotrophe	0.67
$f_{XI}$	Fraction de DCO inertes générés par la biomasse morte	0.08
$f_P$	Taux de conversion biomasse/matière organique inerte	0.08
$i_{XP}$	Fraction d'azote dans la matière organique inerte	0.06
$i_{XB}$	Fraction d'azote dans la biomasse hétérotrophe	0.08
$\mu_H$	Taux de croissance maximal de la biomasse hétérotrophe	4
$\mu_A$	Taux de croissance maximal de la biomasse autotrophe	0.5
$b_H$	Coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe	0.3
$b_A$	Coefficient de mortalité de la biomasse autotrophe	0.05
$K_S$	Coefficient de demi-saturation en substrat rapidement biodégradable	20
$K_{OH}$	Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse hétérotrophe	0.2
$K_{NO}$	Coefficient de demi-saturation du nitrate pour la biomasse hétérotrophe	0.5
$K_{NH}$	Coefficient de demi-saturation de l'azote ammoniacal pour la biomasse autotrophe	1
$K_{OA}$	Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse autotrophe	0.4
$K_X$	Coefficient de demi-saturation pour l'hydrolyse du substrat lentement biodégradable	0.1
$\eta_g$	Facteur de correction pour $\mu_H$ sous condition anoxie	0.8
$\eta_h$	Facteur de correction pour l'hydrolyse sous condition anoxie	0.8
$k_h$	Taux maximal pour l'hydrolyse	3
$k_a$	Taux d'ammonification	0.05

Tableau 3.1 – Valeurs des paramètres du modèle ASM1 (à 20 ° C)

### 3.2.3 Écriture du modèle ASM1

Compte tenu de toutes les hypothèses précédentes, le modèle est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{S}_I(t) = D_{in}(t)[S_{I,in}(t) - S_I(t)]$$

$$\dot{S}_S(t) = D_{in}(t)[S_{S,in}(t) - S_S(t)] - \frac{1}{Y_H}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] + \rho_7(t)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_I(t) &= D_{in}(t)X_{I,in}(t) - [D_{in}(t) - D_R(t)] \frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)} X_I(t) + f_{XI}[\rho_4(t) + \rho_5(t)] \\
 \dot{X}_S(t) &= D_{in}(t)X_{S,in}(t) - [D_{in}(t) - D_R(t)] \frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)} X_S(t) + (1 - f_{XI})[\rho_4(t) + \rho_5(t)] \\
 &\quad - \rho_7(t) \\
 \dot{X}_{BH}(t) &= D_{in}(t)X_{BH,in}(t) - [D_{in}(t) - D_R(t)] \frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)} X_{BH}(t) + \rho_1(t) + \rho_2(t) \\
 &\quad - \rho_4(t) \\
 \dot{X}_{BA}(t) &= D_{in}(t)X_{BA,in}(t) - [D_{in}(t) - D_R(t)] \frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)} X_{BA}(t) + \rho_3(t) - \rho_5(t) \\
 \dot{S}_{NO}(t) &= D_{in}(t)[S_{NO,in}(t) - S_{NO}(t)] - \frac{1 - Y_H}{2.86Y_H} \rho_2(t) + \frac{1}{Y_A} \rho_3(t) \\
 \dot{S}_{NH}(t) &= D_{in}(t)[S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] - \left( i_{XB} + \frac{1}{Y_A} \right) \rho_3(t) + \rho_6(t) \\
 \dot{S}_{ND}(t) &= D_{in}(t)[S_{ND,in}(t) - S_{ND}(t)] - \rho_6(t) + \rho_8(t) \\
 \dot{X}_{ND}(t) &= D_{in}(t)X_{ND,in}(t) - [D_{in}(t) - D_R(t)] \frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)} X_{ND}(t) \\
 &\quad + \left( i_{XB} - f_{XI}i_{XP} \right) [\rho_4(t) + \rho_5(t)] - \rho_8(t) \\
 \dot{S}_O(t) &= D_{in}(t)[S_{O,in}(t) - S_O(t)] + Kq_a(t)[S_{O,sat}(t) - S_O(t)] - \frac{1 - Y_H}{Y_H} \rho_1(t) \\
 &\quad - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \rho_3(t)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Les termes  $\rho_i$   $i = 1, \dots, 8$  représentent les processus définis dans la matrice de cinétiques :

$$\begin{aligned}
 \rho_1(t) &= \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\
 \rho_2(t) &= \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \eta_g X_{BH}(t) \\
 \rho_3(t) &= \mu_A \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OA} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\
 \rho_4(t) &= b_H X_{BH}(t) \\
 \rho_5(t) &= b_A X_{BA}(t) \\
 \rho_6(t) &= k_a S_{ND}(t) X_{BH}(t)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\rho_7(t) = k_h \frac{X_S(t)/X_{BH}(t)}{K_S + X_S(t)/X_{BH}(t)} \left( \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \right) X_{BH}(t)$$

$$\rho_8(t) = k_h \frac{X_{ND}(t)/X_{BH}(t)}{K_S + X_S(t)/X_{BH}(t)} \left( \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \right) X_{BH}(t)$$

Les termes avec l'indice *in* correspondent à l'alimentation des différents composés formant le vecteur de commande. Les termes  $D_{in}(t) = \frac{q_{in}(t)}{V}$ ,  $D_R(t) = \frac{q_R(t)}{V}$  et  $D_W(t) = \frac{q_W(t)}{V}$  représentent les taux de dilution relatifs à l'entrée, à la boue recyclée et à la purge de boues,  $V$  étant le volume du bioréacteur. L'alcalinité  $S_{alk}$  est omise puisqu'elle n'intervient pas dans les dynamiques des autres variables du modèle.

## 3.3 Analyse de Sensibilité

### 3.3.1 Introduction

Une des principales difficultés lors de la modélisation d'un procédé est la détermination des réactions essentielles permettant de le décrire, tout en conduisant à une mise en équations la plus simple possible. L'obtention d'un modèle réduit permet de simplifier donc l'analyse et la simulation des systèmes et ainsi que la conception de leurs commandes. Pour les procédés à boues activées, le problème de la complexité des modèles rendent les possibilités de contrôle dans le cas pratique très limitées [Gómez-Quintero. 2002]. Le modèle standard où le principe de fonctionnement varie suivant que l'objectif est de traiter le carbone ou le carbone et l'azote et/ou le phosphore est quasiment intraitable pour des fins d'estimation et de commande en ligne. Pour vue de résoudre de tels problèmes plusieurs méthodes de simplification et de réduction ont été proposées au cours de ces dernières années. Une première tentative a été réalisée par Jeppsson et al [Jeppsson, U., et al., 1993]. Quelques années après, Steffens et al [Steffens et al., 1997] ont proposé un algorithme pour l'élimination des variables d'états, basé sur l'étude de leurs dynamiques dans le temps. Pour cela, ils se basent sur deux méthodes mathématiques : l'association des valeurs propres à l'état du système, et la méthode des perturbations singulières. Julien et al [Julien et al., 1999], ont obtenu un modèle simplifié composé de deux sous-modèles : un sous-modèle pour la phase aérobie, et un autre pour la phase anoxie. Dans [Gomez-Quintero et al., 2004] Gomez-Quintero et al, ont proposée un modèle non linéaire réduit de quatre variables et treize paramètres. La stratégie de réduction adoptée a été appuyée sur des considérations de simplification biochimique suivie d'un groupement de paramètres. Une amélioration de ce

travail a été récemment présentée par Queinnec [Queinnec et al., 2009] où une méthodologie de linéarisation du modèle a été détaillée. Benhalla [Benhalla et al., 2010] propose une linéarisation du modèle standard en vue d'étude d'interactions. Il s'agit d'une approximation linéaire des termes représentant les cinétiques de réactions. Le résultat est un modèle localement linéaire équivalent au modèle initial. D'autres approches de réduction basées sur l'utilisation des multimodèles ont été adoptées par plusieurs travaux [Smets et al., 2006; Steffens et al., 1997]. Dans [Nagy et al., 2010] Nagy a proposé une application d'une méthode analytique de décomposition de système non-linéaire dynamique en plusieurs sous systèmes linéaires au modèle d'un réacteur à boues activées. Le modèle qui est traité dans cet article est un modèle de réacteur à boues activées réduit représentant le processus de dégradation de la pollution carbonée. Il comporte trois variables d'état (le substrat facilement biodégradable, la biomasse hétérotrophe et l'oxygène dissous). Une stratégie de linéarisation est proposée pour simplifier les complexités de ce modèle. Dans cette stratégie le modèle linéaire obtenu requiert un certain nombre de spécifications. Ce dernier doit conserver sans modification, la dimension, les entrées, les sorties et les variables d'état du modèle initial du réacteur, avec leurs interprétations biologiques. En général, les approximations utilisées dans l'approche proposée préservent la structure générale du modèle de base. La méthodologie de réduction est décomposée en trois étapes (figure 3.3) [Aouaouda et al., 2011b].

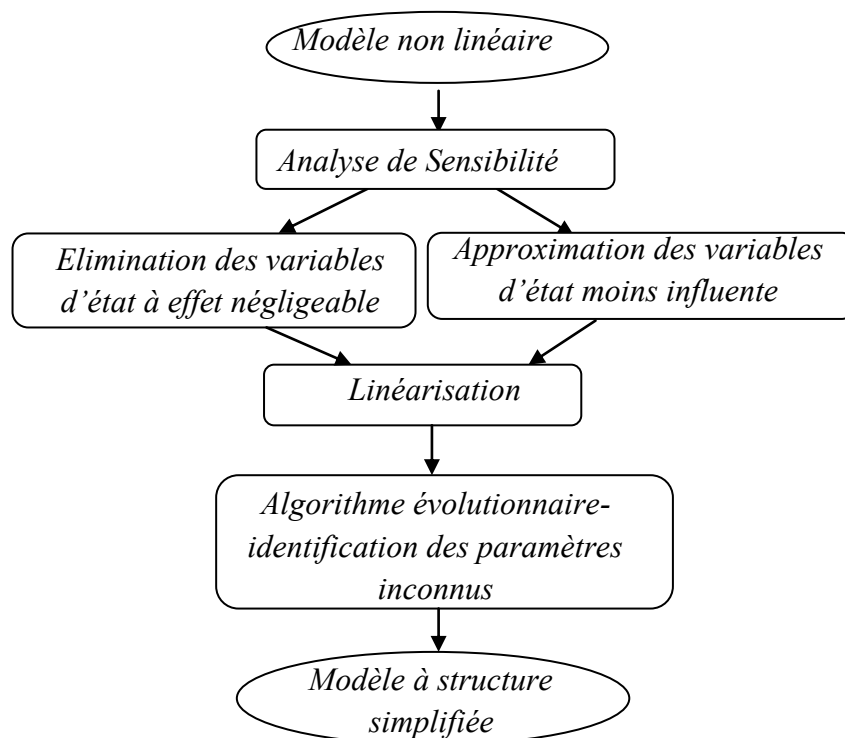


Figure 3.3 Méthodologie de Simplification du modèle.

Premièrement, une analyse de sensibilité du modèle vis-à-vis les variables d'état est faite. Cela permet de mesurer l'influence des variables d'état sur les sorties du modèle ce qui aide à simplifier les cinétiques de réactions. Ensuite, un modèle linéaire est dérivé suite à une approximation des cinétiques de réactions non linéaires en combinaisons linéaires pondérées des variables d'intérêt. Cette approximation est basée essentiellement sur les conclusions tirées de l'analyse effectuée dans l'étape précédente. Dans la dernière étape, une procédure d'identification des paramètres inconnus intervenant dans les termes linéaires trouvés est appliquée en utilisant un algorithme évolutionnaire. L'objectif de ce travail est d'obtenir une approximation efficace et linéaire à temps invariant équivalente au modèle initiale. Cela permet par la suite d'étudier plus facilement les problèmes de commande et d'analyse de stabilité.

### 3.3.2 Modèle ASM1 réduit

Dans cette section, le modèle réduit d'un réacteur à boues activées est présenté (pollution carbonée considérée). Le modèle d'un réacteur à boues activées peut être représenté par le système non-linéaire suivant [Nagy et al., 2010]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(t)}{dt} &= q_{in}(t) - q_{out}(t) \\
 \frac{d(V \cdot X_{BH})(t)}{dt} &= q_{in}(t) \cdot X_{BH,in}(t) - q_{out}(t) \cdot X_{BH,out}(t) + r_H \cdot V(t) \\
 \frac{d(V \cdot S_S)(t)}{dt} &= q_{in}(t) \cdot S_{S,in}(t) - q_{out}(t) \cdot S_{S,out}(t) + r_S \cdot V(t) \\
 \frac{d(V \cdot S_O)(t)}{dt} &= q_{in}(t) \cdot S_{O,in}(t) - q_{out}(t) \cdot S_{O,out}(t) + \\
 &\quad K \cdot q_a(t) \cdot V(t) \cdot (S_{O,sat} - S_O(t)) + r_O \cdot V(t)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$r_H, r_S$  et  $r_O$ , représentant les cinétiques des réactions de la biomasse hétérotrophe  $X_{BH}$ , du carbone  $S_S$ , et respectivement de l'oxygène  $S_O$  en milieu hétérotrophe et aérobie, sont modélisés par :

$$\begin{cases}
 r_H = \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) - b_H X_{BH}(t) \\
 r_S = \frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) - (1 - f) b_H X_{BH}(t) \\
 r_O = \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t)
 \end{cases} \tag{3.10}$$

Les différents coefficients intervenant dans (3.9) et (3.10) sont:  $S_{O,sat} = 10 [g/m^3]$  (Concentration de saturation de l'oxygène),  $K_S = 20 [g/m^3]$ ,  $K_{OH} = 0.2 [g/m^3]$  (Constante de demi-saturation),  $Y_H = 0.6 gDCO/m^3$  et  $f = 0.1$  (taux de conversion des différents produits dans les différents processus réactionnels (croissance ou mortalité).  $b_H = 0.4 [1/24h]$  et  $\mu_H = 3.733 [1/24h]$  (Coefficient cinétique hétérotrophe).  $K = 2.3 [1/m^3]$  (Gain du régulateur en oxygène). Sous l'hypothèse d'homogénéité du réacteur, on a les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} X_{BH,out}(t) = X_{BH}(t) \\ S_{S,out}(t) = S_S(t) \\ S_{O,out}(t) = S_O(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

Le système (1) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = q_{in}(t) - q_{out}(t) \\ \dot{X}_{BH}(t) = r_H - \frac{q_{in}(t)}{V(t)} (X_{BH}(t) - X_{BH,in}(t)) \\ \dot{S}_S(t) = r_S - \frac{q_{in}(t)}{V(t)} (S_S(t) - S_{S,in}(t)) \\ \dot{S}_O(t) = r_O + Kq_a(t)(S_{O,sat} - S_O(t)) - \frac{q_{in}(t)}{V(t)} (S_O(t) - S_{O,in}(t)) \end{cases} \quad (3.13)$$

Si on remplace les quantités  $r_H$ ,  $r_S$  et  $r_O$  par leurs expressions (3.10). Et si on considère que le volume  $V$  est constant, alors le système (3.13) devient :

$$\begin{cases} \dot{X}_{BH}(t) = -\frac{q_{in}(t)}{V} (X_{BH}(t) - X_{BH,in}(t)) + \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) - b_H X_{BH}(t) \\ \dot{S}_S(t) = -\frac{q_{in}(t)}{V} (S_S(t) - S_{S,in}(t)) - \frac{\mu_H}{Y_H} \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) - (1-f)b_H X_{BH}(t) \\ \dot{S}_O(t) = -\frac{q_{in}(t)}{V} (S_O(t) - S_{O,in}(t)) + Kq_{a,ct} (S_{O,sat} - S_O(t)) \\ \quad - \frac{1-Y_H}{Y_H} \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

Dans la suite le vecteur des états et le vecteurs de commandes sont définis par :

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_{BH}(t) \\ S_S(t) \\ S_O(t) \end{bmatrix} \quad U(t) = \begin{bmatrix} X_{BH,in}(t) \\ S_{S,in}(t) \\ q_a(t) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.3.3 Analyse de sensibilité du modèle ASM1 réduit

L'analyse de sensibilité consiste à étudier l'impact de variabilité des entrées du modèle sur la variabilité de sa sortie. En effet cette analyse permet d'affirmer sur la fidélité du modèle au processus qu'il modélise, tout en répondant aux questions suivantes [Saltelli et al., 2000 ; Jacques, 2005]:

- Quelles sont les variables qui contribuent le plus à la variabilité de la réponse du modèle?
- Quelle sont également les variables les moins influentes, dont les effet sont suffisamment négligeables.
- Quelles variables interagissent avec quelles autres?

Il existe deux types de contribution d'un variable d'entrée à la variation de la sortie : une contribution marginale appelée effet élémentaire, correspondant à son influence seule et une contribution collective due à ces interactions avec les autres variables d'entrées. La somme de toutes ces contributions est appelée effet total [Tarantola et al., 2006]. Les méthodes d'analyse de sensibilité se divisent en trois classes : les méthodes de screening, présentées par Saltelli et al [Saltelli et al., 2000 ], les méthodes d'analyse locale [Jacques, 2005] et les méthodes d'analyse de sensibilité globale [Iooss et al., 2009]. Le but de cette section est d'appliquer l'analyse de sensibilité au modèle d'un réacteur à boues activées afin de dévoiler les possibilités de la réduction de ce modèle. Dans un premier temps nous décrirons les indices de sensibilité utiles. Par la suite nous illustrons nos propos en appuyant sur quelques méthodes choisis.

#### *A. Indice de sensibilité*

Afin d'identifier les variables d'entrées les plus importantes d'un modèle, une méthode plus efficace a été proposée par Sobol [Sobol, 1993], basée sur la décomposition de la variance du modèle. Les indices de sensibilité de Sobol nécessitent uniquement une hypothèse d'indépendance des variables d'entrées.

Considérons  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_p)$  un modèle à une sortie et à  $p$  entrées indépendantes. Sobol [Sobol, 1993] montre qu'il est toujours possible de décomposer la sortie de la manière suivante :

$$Y = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i(X_i) + \sum_{i=1}^p \sum_{j>i}^p f_{ij}(X_i, X_j) + \sum_{i=1}^p \sum_{j>i}^p \sum_{k>j}^p f_{ijk}(X_i, X_j, X_k) + \dots \quad (3.16)$$

En effet, il est possible de montrer que la variance de la sortie peut s'écrire :

$$V(Y) = V(E(Y|X_i)) + E(V(Y|X_i)) \quad (3.17)$$

Où  $V(\cdot)$  dénote la variance, et  $E(\cdot|.)$  l'espérance mathématique conditionnée.  $V(E(Y|X_i))$  est un indicateur de l'importance de la variable d'entrée  $X_i$ . Plus la variable  $X_i$  sera très influente, plus cette quantité sera grande. Les indices de sensibilité d'ordre deux définis par:

$$S_{ij} = \frac{V(E(Y|X_i, X_j)) - E(Y|X_i) - E(Y|X_j)}{V(Y)} = \frac{V_{ij}}{V} \quad (3.18)$$

Expriment la sensibilité de la variance de  $Y$  à l'interaction des variables  $X_i$  et  $X_j$ . Lorsqu'il existe une interaction entre les variables d'entrées, la relation entre la variable de sortie considérée et les variables d'entrées sera fortement non linéaire. Dans ce cas une grande part de la variance de la sortie est due à ces interactions. L'indice de sensibilité total en conditionnant par rapport à  $X_{\sim i}$  est défini de la manière suivante :

$$S_{Ti} = \frac{V(E(Y|X_{\sim i}))}{V(Y)} \quad (3.19)$$

Où  $X_{\sim i}$  signifie que toutes les variables d'entrées sont connues sauf  $X_i$ . En effet une variable ayant un indice total faible a un effet négligeable sur la sortie, peut être fixée à une valeur quelconque dans son domaine de variation, sans conséquence sur la prédiction du modèle. L'estimation de ces indices est faite par des méthodes stochastiques telles que la méthode de Sobol ou la méthode FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) [Saltelli et al., 2000 ; Jacques, 2005].

### **B. Sensibilité du modèle vis-à-vis les variables d'état**

Les méthodes de Sobol et FAST sont appliquées pour une analyse des effets élémentaires et totaux de chaque variable d'entrée  $S_S$ ,  $S_O$  et  $X_{BH}$  sur les sorties considérées en adoptant une distribution de probabilité triangulaire pour chaque variable d'entrée dans son domaine de variation. Les calculs numériques d'indices de sensibilité ont été réalisés en utilisant l'interface Eikos [Ekstrom. 2005] sous Matlab. Les résultats obtenus sont exposés par les tableaux 3.2, 3.3. Il est clair que :



- Pour la concentration de la biomasse en sortie  $X_{BH}$ , la concentration de l'oxygène  $S_O$  a un effet négligeable car ses indices sont très faibles. Par contre les concentrations du substrat  $S_S$  et de la biomasse  $X_{BH}$  ont des valeurs considérables (valeurs en gras) d'où les deux variables sont influentes et ces effets sont considérés non linéaires liées à des interactions avec les autres variables d'entrées.
- La concentration de substrat  $S_S$  est très influée par la concentration de la biomasse  $X_{BH}$  avec un effet relativement linéaire (valeurs en gras), tandis que la concentration de l'oxygène  $S_O$  a un effet presque négligeable sur la concentration du substrat  $S_S$ .
- La concentration de l'oxygène dissous  $S_O$  quand à elle est très influée par la variable  $S_O$  en entrée, avec un effet totalement linéaire, de plus les concentrations du substrat  $S_S$  et de la biomasse  $X_{BH}$  ont les deux un effet négligeable sur la concentration de l'oxygène  $S_O$ .

	$X_{BH}$		$S_S$		$S_O$	
	SI	TSI	SI	TSI	SI	TSI
$S_O$	0.0450	0.0440	-0.0478	0.0391	<b>1.7245</b>	<b>0.9838</b>
$S_S$	0.4293	<b>0.3793</b>	0.0518	<b>0.4431</b>	-0.0347	0.0089
$X_{BH}$	0.3085	<b>0.6961</b>	<b>1.4477</b>	<b>1.0245</b>	-0.1778	0.0568

Tableau 3.2 – Résultats de l'analyse de Sobol (SI : Indice Principal ; TSI Indice Total)

	$X_{BH}$		$S_S$		$S_O$	
	SI	TSI	SI	TSI	SI	TSI
$S_O$	0.0008	0.0447	0.0027	0.0254	<b>0.9796</b>	<b>0.9982</b>
$S_S$	0.3723	<b>0.3839</b>	0.0031	<b>0.4273</b>	0.0013	0.0188
$X_{BH}$	0.6106	<b>0.6424</b>	<b>0.9752</b>	<b>0.9978</b>	0.0020	0.0218

Tableau 3.3 – Résultats de l'analyse par la méthode FAST

### 3.3.4 Linéarisation du modèle ASM1 réduit

Cette section est consacrée à la linéarisation du modèle réduit non linéaire du réacteur à boues activées. En appuyant sur les informations tirées de l'analyse de sensibilité concernant les propriétés intrinsèques des variables du modèle (la pertinence d'une variable par rapport à une autre). Les non linéarités présentés sous forme de produits des variables d'état ou produits états variables de commande ont été remplacés par des sommes de termes linéaires de ces variables. Cette méthode a l'avantage d'éviter la destruction de la structure du modèle non-linéaire original. Les équations du modèle non linéaire sont rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{BH}(t) &= -\frac{q_{in}(t)}{V} (X_{BH}(t) - X_{BH,in}(t)) + \mu_H \rho_1(t) - b_H X_{BH}(t) \\
 \dot{S}_S(t) &= -\frac{q_{in}(t)}{V} (S_S(t) - S_{S,in}(t)) - \frac{\mu_H}{Y_H} \rho_2(t) - (1-f) b_H X_{BH}(t) \\
 \dot{S}_O(t) &= -\frac{q_{in}(t)}{V} (S_O(t) - S_{O,in}(t)) + K q_a S_{O,sat} - K \rho_4(t) - \frac{1-Y_H}{Y_H} \mu_H \rho_3(t)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Avec les processus non-linéaires :

$$\begin{aligned}
 \rho_1(t) = \rho_2(t) = \rho_3(t) &= \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\
 \rho_4(t) &= q_a S_O(t)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Nous linéarisons le système (3.14) et nous basant sur les considérations suivantes :

- Les non-linéarités sont remplacées par des termes de types:  $V_x V_y = \alpha_1 \bar{V}_x V_y + \alpha_2 V_x \bar{V}_y$  avec  $\bar{V}_x$  et  $\bar{V}_y$  des valeurs moyennes constantes des variables  $V_x$  et  $V_y$  respectivement. Les paramètres  $\alpha_1, \alpha_2$  sont à estimer. Cette approximation est justifiée par le besoin de respecter en partie le caractère non-linéaire du modèle qui est détruit par des méthodes de linéarisation telle que la méthode de Taylor.
- Pour les processus  $\rho_1(t)$  et  $\rho_2(t)$  la concentration de l'oxygène dissous  $S_o$  est simplifiée du fait que son effet est négligeable sur les deux sorties du système. Elle est donc fixée à sa valeur moyenne.
- Concernant le processus  $\rho_3$ , les deux concentrations de la biomasse hétérotrophe et du substrat biodégradable n'influents pas sur la sortie  $S_o$ , d'où leurs valeurs sont aussi fixées aux valeurs moyennes.

Les cinétiques simplifiées sont données dans le tableau.3.4.

Processus	Expression simplifié
$\tilde{\rho}_1(t)$	$\frac{\bar{S}_O}{K_{OH} + \bar{S}_O} (a_1 \bar{S}_S X_{BH}(t) + a_2 \bar{X}_{BH} S_S(t))$
$\tilde{\rho}_2(t)$	$\frac{\bar{S}_O}{K_{OH} + \bar{S}_O} (b_1 \bar{S}_S X_{BH}(t) + b_2 \bar{X}_{BH} S_S(t))$
$\tilde{\rho}_3(t)$	$\left( \frac{\bar{X}_{BH}}{K_{OH} + \bar{S}_O} \frac{\bar{S}_S}{K_S + \bar{S}_S} \right) S_O(t)$
$\tilde{\rho}_4(t)$	$c_1 \bar{S}_O q_a + c_2 \bar{q}_a S_O$

Tableau 3.4 – Cinétiques des processus du modèle linéaire

Les cinétiques des processus ayant été simplifiées, le modèle linéaire peut être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $x(t) = [X_{BH}(t) S_s(t) S_o(t)]^T$  est le vecteur de variables d'états, et  $u(t) = [X_{BH-in}(t) S_{s-in}(t) q_a(t)]$ , est le vecteur des entrées.  $C$  est la matrice d'identité, et  $y(t) = [X_{BH}(t) S_s(t) S_o(t)]^T$  est le vecteur de sorties. Le débit d'entrée  $q_{in}(t)$  est considéré comme constant dans cette analyse. Les matrices  $A$  et  $B$  sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{q_{in}}{V} - b_H + \tilde{a}a_1\bar{S}_s & \tilde{a}a_2\bar{X}_{BH} & 0 \\ \tilde{b}b_1\bar{S}_s - (1-f)b_H & -\frac{q_{in}}{V} + \tilde{b}b_2\bar{X}_{BH} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{q_{in}}{V} + \tilde{c} + Kc_2\bar{q}_a \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Kc_1\bar{S}_o + Ks_{o,sat} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\tilde{a} = \mu_H \frac{\bar{S}_o}{K_{OH} + \bar{S}_o}, \tilde{b} = -\frac{\mu_H}{Y_H} \frac{\bar{S}_o}{K_{OH} + \bar{S}_o}$$

$$\tilde{c} = -\frac{1 - Y_H}{Y_H} \mu_H \left( \frac{\bar{X}_{BH}}{K_{OH} + \bar{S}_o} \frac{\bar{S}_s}{K_s + \bar{S}_s} \right)$$

L'ensemble de paramètres inconnus  $\theta$  du modèle linéaire (13) est composé par:  $\theta = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ . Une méthode d'identification de ces paramètres est détaillée dans la section suivante.

### Identification paramétrique du modèle linéaire

Dans cette section on s'intéresse à l'optimisation paramétrique d'une structure linéaire. Pour cela un algorithme évolutionnaire a été choisi. Une des raisons qui ont motivé ce choix est qu'à partir d'une initialisation aléatoire des paramètres, l'algorithme permet à la fois d'estimer et d'optimiser ces valeurs.

#### A. Algorithme évolutionnaire

Les algorithmes évolutionnaires sont une classe de stratégies d'optimisation réalisant un compromis équilibré et raisonnable entre l'exploration et l'exploitation de l'espace de recherche [Casillas et al., 2005 ; Bonarini. 1996 ]. Leur fonctionnement repose sur une

heuristique très simple basée sur une minimisation d'une fonction objective. La figure 3.4 illustre la structure générale d'un algorithme évolutionnaire.

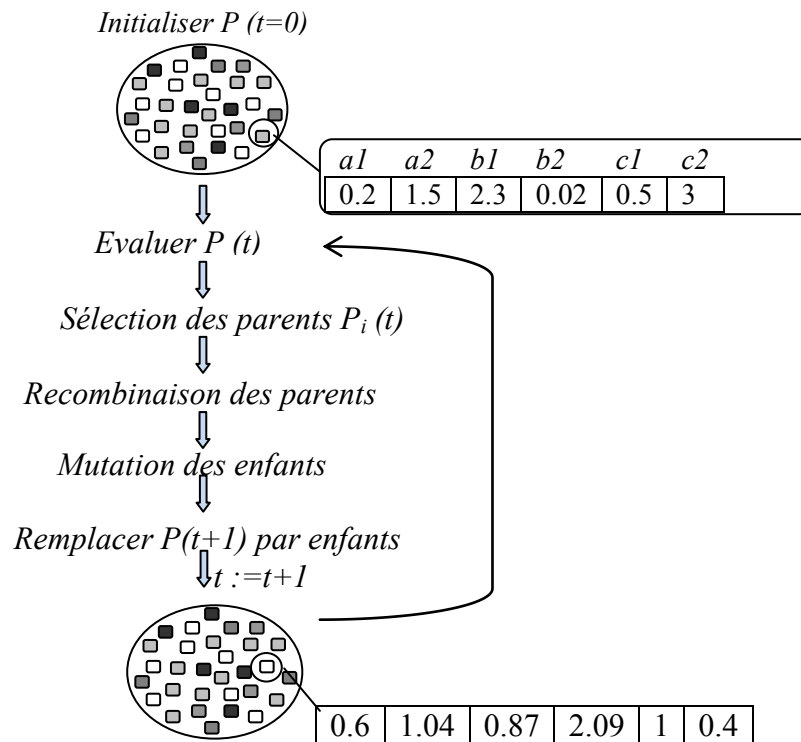


Figure 3.4 – Structure d'un algorithme évolutionnaire

L'identification de l'ensemble des paramètres de chaque processus  $\tilde{\rho}_i$   $i = 1, 2, 4$  est effectuée indépendamment des autres processus. La proposition de l'algorithme d'optimisation des paramètres est comme suit :

- L'objectif (fonction d'évaluation) : la méthode d'optimisation que nous avons choisie est basée sur la minimisation du critère quadratique défini par :

$$MSE = \frac{1}{2N} \sum_{l=1}^N (y_L^l(\theta, t) - y^l(t))^2 \quad (3.23)$$

Avec  $N$  est l'horizon d'observation, et  $\theta$  représente le vecteur des paramètres à identifier.  $y_L(t)$  est la sortie approximée du modèle linéaire, et  $y(t)$  celle du modèle non linéaire.

- Un codage réel est employé pour les chromosomes de la population, cela permet de conserver la structure du problème.
- Opérateur de croisement : le croisement max-min arithmétique est considéré.

- Opérateur de mutation: un opérateur de mutation uniforme est adopté avec une probabilité de 0.2.
- Opérateur de sélection : la roue de sélection ainsi que l'élitisme qui assure le choix du meilleur individu de la génération précédente sont considérés.

### B. Résultats de simulation

Pour forcer l'identification vers un ensemble admissible, des valeurs initiales approximatives des paramètres ont été calculées préalablement en utilisant les expressions du tableau 3.4, ainsi que les informations disponibles sur le processus au régime de fonctionnement statique. Ce chromosome est injecté dans la population initiale afin de garantir la convergence de l'algorithme vers une solution minimale globale. Les paramètres du modèle linéaire obtenus après optimisation sont présentés sur le tableau 3.5.

Paramètre	Valeur identifiée
$a_1$	0.015
$a_2$	0.0273
$b_1$	0.060
$b_2$	0.150
$c_1$	0.690
$c_2$	0.775

Tableau 3.5 – Paramètres du modèle linéaire

Les simulations ont été effectuées pour les conditions initiales suivantes:  $(X_{BH}(0), S_s(0), S_o(0))^T = (800, 2.5, 5)^T$ . Le volume est donné en  $m^3$  et le débit en  $m^3/\text{jours}$ . La figure 3.5 montre l'évolution des entrées appliquées. La figure 3.6 illustre l'approximation des variables d'états  $X_{BH}(t)$ ,  $S_s(t)$ ,  $S_o(t)$  du modèle non linéaire réduit du réacteur à boues activées. La solution du modèle linéaire (trait discontinu), la solution du modèle de référence (trait continu). Les courbes de la concentration du substrat biodégradable et celle de l'oxygène dissous montrent une très bonne concordance entre les deux modèles. Il est clair que les performances du modèle linéaire sont très satisfaisantes, bien que la concentration de la biomasse hétérotrophe apparaisse légèrement sur-évaluée par le modèle linéaire.

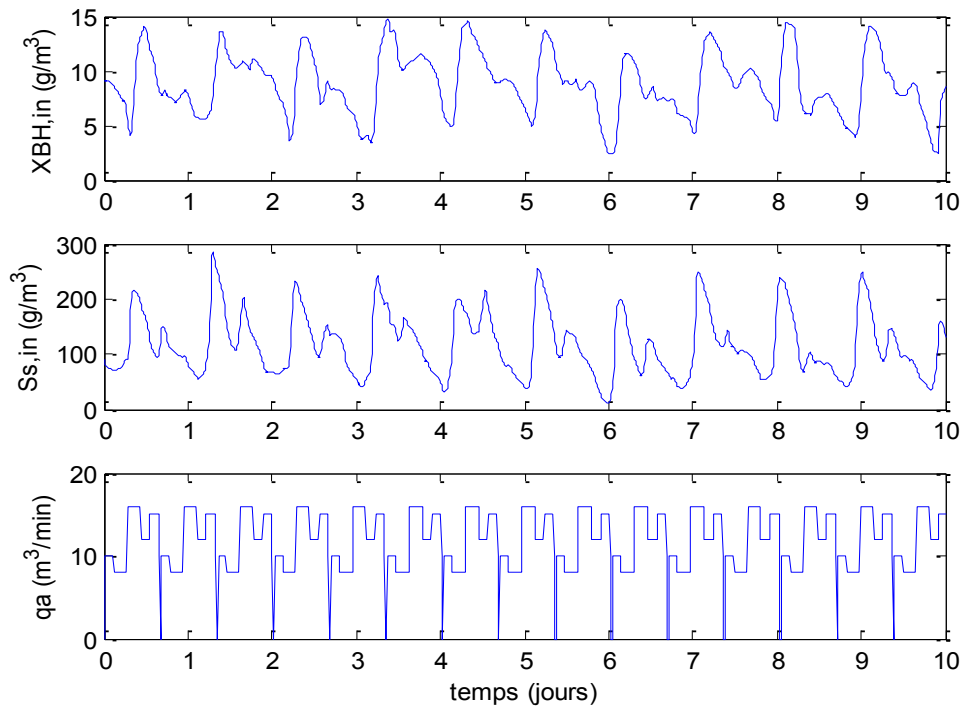


Figure 3.5 – Evolution des entrées du système

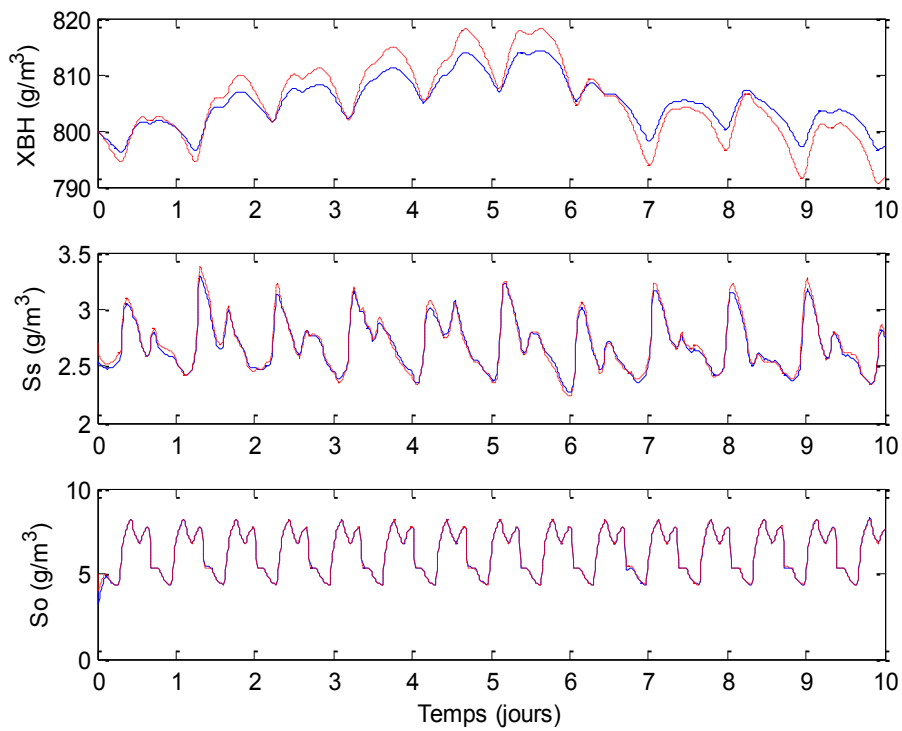


Figure 3.6 – Les sorties du modèle linéaire (--) et celle du modèle non linéaire (—)

## 3.4 Approche Multimodèle pour la commande tolérante au défaut

### 3.4.1 Modèle ASM1 réduit

Plusieurs hypothèses simplificatrices peuvent être appliquées pour la réduction du modèle ASM1, ici on considère une simplification concernant les composants du modèle, proposée par Weijers [2000]. Ainsi, pour des raisons de concision, nous considérons seulement la dégradation biologique du carbone et de l'azote présents dans les eaux usées, impliquant les cinq composants suivants : substrat rapidement biodégradable  $S_S$ , substrat lentement biodégradable  $X_S$ , oxygène dissous  $S_O$ , biomasse hétérotrophe  $X_{BH}$ , ammoniac  $S_{NH}$ , nitrate  $S_{NO}$  et biomasse autotrophe  $X_{BA}$ . D'autre part, les deux autres fractions azotées (l'azote organique particulaire  $X_{ND}$  et l'azote organique soluble  $S_{ND}$ ) décrivant la transformation interne de  $S_{NH}$  dans les processus d'hydrolyse et d'ammonification, peuvent être simplifiées puisqu'elles représentent seulement une petite partie des décharges de l'azote. Les composants suivants ne sont pas considérés : les composants inertes ( $X_I, S_I, X_P$ ), l'alcalinité ( $S_{alk}$ ). Comme dans la pratique le processus de mesure de la Demande Chimique en Oxygène (DCO) ne permet pas de distinguer la partie soluble  $S_S$  de la partie particulaire  $X_S$  [Weijers, 2000; Smets et al., 2003 ; Nagy et al., 2011], un seul composant organique, noté  $X_{S_S} = X_S + S_S$ , est considéré, en ajoutant les deux concentrations soluble et particulaire. Le vecteur d'état est alors le suivant:

$$x(t) = [X_{S_S}(t), S_O(t), X_{BH}(t), S_{NH}(t), X_{BA}^T] \quad (3.24)$$

Le vecteur réunissant les entrées du processus est :

$$u(t) = [X_{S_S,in}(t), q_a(t), S_{O,in}(t), S_{NH,in}(t), X_{BH,in}(t), X_{BA,in}(t)]^T \quad (3.25)$$

L'équation de conservation de la masse pour ces composants contient une partie réaction ( $r$ ) donnée par :

$$r_{X_{S_S}}(t) = \mu_H \rho_1(t) X_{BH}(t) + (1 - f_p)(b_H X_{BH}(t) + b_A X_{BA}(t))$$

$$r_{X_{BH}}(t) = \mu_H \rho_1(t) X_{BH}(t) - b_H X_{BH}(t)$$

$$r_{X_{BA}}(t) = \mu_A \rho_2(t) X_{BA}(t) - b_A X_{BA}(t) \quad (3.26)$$

$$r_{S_{NH}}(t) =$$

$$-i_{XB}\mu_H\rho_1(t) X_{BH}(t) - \left[ i_{XB} + \frac{1}{Y_A} \right] \mu_A\rho_2(t) X_{BA} + (i_{XB} - f_P i_{XP})(b_H X_{BH}(t) + b_A X_{BA}(t))$$

$$r_{S_O}(t) = - \left[ \frac{1 - Y_H}{Y_H} \right] \mu_H\rho_1(t) X_{BH}(t) - \left[ \frac{4.75 - Y_A}{Y_A} \right] \mu_A\rho_2(t) X_{BA}(t)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \frac{XS_S(t)}{K_S + XS_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH} + S_{NH}(t)} \\ \rho_2(t) &= \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le volume du bioréacteur est supposé constant. On peut alors écrire :

$$q_{out}(t) = q_{in}(t) + q_R(t) \quad (3.28)$$

En général,  $q_R(t)$  et  $q_W(t)$  représentent des fractions du débit d'entrée  $q_{in}(t)$ :

$$q_R = f_R q_{in}, \quad 1 \leq f_R \leq 2 \quad (3.29)$$

$$q_W = f_W q_{in}, \quad 0 < f_W < 1 \quad (3.30)$$

Considérons la forme explicite du modèle ASM1 caractérisée par le vecteur d'état réduit (3.24) et les réactions (3.26) :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{S_S}(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \cdot (X_{S_S,in}(t) - X_{S_S}(t)) + r_{X_{S_S}}(t) \\ \dot{S}_O(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \cdot (-S_O(t)) + K \cdot q_a(t) \cdot (S_{O,sat} - S_O(t)) + r_{S_O}(t) \\ \dot{X}_{BH}(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \cdot \left[ X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BH}(t) \right] + r_{X_{BH}}(t) \\ \dot{S}_{NH}(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \cdot (S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)) + r_{S_{NH}}(t) \\ \dot{X}_{BA}(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \cdot \left[ X_{BA,in}(t) - X_{BA}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BA}(t) \right] + r_{X_{BA}}(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pour l'application numérique, les paramètres définis dans le tableau 3.1 sont utilisés. Les valeurs des fractions  $f_R$  et  $f_W$  prises en compte dans cette application sont :  $f_R = 1.1$  et  $f_W = 0.04$ . Le volume du bioréacteur  $V$  considéré est  $1333[m^3]$ .



Définissons tout d'abord le vecteur de mesures, le vecteur de commande et le vecteur d'entrées inconnues afin de pouvoir construire une structure multimodèle T-S adaptée au processus d'épuration et à l'application des méthodes d'estimation et de commandes proposées dans ce mémoire.

**Hypothèse 3.1.** *On suppose nulle la concentration d'oxygène dissous à l'entrée du réacteur ( $S_{O,in}$ ). On peut aussi supposer que  $X_{BA,in} \sim 0$ , ce qui est en conformité avec le benchmark du programme européen Cost 624 [Alex et al., 1999]. En pratique les concentrations  $X_{S,in}$ ,  $S_{NH,in}$  et  $X_{BH,in}$  ne sont pas mesurées en temps réel. Le système devient non observable si ces concentrations sont considérées comme non mesurables. Ainsi une approximation souvent faite en pratique est de remplacer ces concentrations par leurs moyennes journalières respectives. Les autres concentrations seront considérées comme entrées inconnues [Nagy et al., 2011]. Les mesures des trois concentrations en sortie du réacteur ( $X_{S,S}$ ,  $S_O$ ,  $S_{NH}$ ) sont disponibles en temps réel.*

En conséquence, le vecteur de mesures est :

$$y(t) = [X_{S,S}(t), S_O(t), S_{NH}(t)]^T \quad (3.32)$$

Le vecteur des entrées connues se réduit à :

$$u(t) = [X_{BH,in}(t), q_a(t)]^T \quad (3.33)$$

et celui des entrées inconnues est :

$$d(t) = [X_{S,S,in}(t), S_{NH,in}(t)]^T \quad (3.34)$$

### 3.4.2 Obtention d'un système T-S pour le modèle ASM1 réduit

On cherche à construire un multimodèle de type T-S afin de l'utiliser pour la synthèse d'une commande tolérante au défaut ainsi qu'un observateur permettant l'estimation des états et du défauts affectant du modèle ASM1 réduit.).

En considérant les équations du processus d'épuration (3.31), il est naturel de définir les variables de prémisse suivantes :

$$\begin{aligned}\eta_1(u(t)) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \\ \eta_2(x(t)) &= \frac{XS_s(t)}{K_s + XS_s(t)} \frac{1}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH} + S_{NH}(t)} X_{BH}(t) \\ \eta_3(x(t)) &= \frac{1}{K_{NH} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} X_{BA}(t)\end{aligned}\quad (3.35)$$

Le système (3.31) peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A(x(t), u(t))x(t) + B(u(t))u(t) + E(u(t))d(t) \quad (3.36)$$

où les matrices  $A(x(t), u(t))$ ,  $B(u(t))$ , et  $E(u(t))$  sont exprimées en utilisant les variables de prémisses définies précédemment (3.35) :

$$A(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} -\eta_1(u(t)) & \mu_H \eta_2(x(t)) & (1 - f_p)b_H & 0 & (1 - f_p)b_A \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & \mu_H \eta_2(x(t)) & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & (i_{XB} - f_P i_{XP})b_H & a_{44} & (i_{XB} - f_P i_{XP})b_A \\ 0 & \mu_A \eta_2(x(t)) & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix} \quad (3.37a)$$

$$B(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & KS_{O,sat} \\ \eta_1(u(t)) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E(u) = \begin{bmatrix} \eta_1(u(t)) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \eta_1(u(t)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37b)$$

où :

$$\begin{aligned}a_{22} &= -\eta_1(u(t)) - K \cdot q_a - \left[ \frac{1 - Y_H}{Y_H} \right] \mu_H \eta_2(x(t)), & a_{23} &= - \left[ \frac{4.75 - Y_A}{Y_A} \right] \mu_A \eta_3(x(t)) \\ a_{33} &= \eta_1(u(t)) \left[ f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} - 1 \right] - b_H, & a_{44} &= -\eta_1(u(t)) - \left[ i_{XB} + \frac{1}{Y_A} \right] \mu_A \eta_3(x(t)) \\ a_{42} &= -i_{XB} \mu_H \eta_2(x(t)), & a_{55} &= \eta_1(u(t)) \left[ f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} - 1 \right] - b_A\end{aligned}\quad (3.37c)$$

La décomposition des trois variables de prémisse (3.35) est réalisée en utilisant la méthode des secteurs non linéaire détaillé dans la section (1.2.2).

Sous les hypothèses :

$$\begin{cases} \eta_1^{\min} \leq \eta_1(u(t)) \leq \eta_1^{\max} \\ \eta_2^{\min} \leq \eta_2(x(t)) \leq \eta_2^{\max} \\ \eta_3^{\min} \leq \eta_3(x(t)) \leq \eta_3^{\max} \end{cases} \quad (3.38)$$

Les fonctions de pondération locales sont définies par :

$$\begin{aligned} W_1^0 &= \frac{\eta_1(u(t)) - \eta_1^{\min}}{\eta_1^{\max} - \eta_1^{\min}}, & W_1^1 &= \frac{\eta_1^{\max} - \eta_1(u(t))}{\eta_1^{\max} - \eta_1^{\min}}, \\ W_2^0 &= \frac{\eta_2(x(t)) - \eta_2^{\min}}{\eta_2^{\max} - \eta_2^{\min}}, & W_2^1 &= \frac{\eta_2^{\max} - \eta_2(x(t))}{\eta_2^{\max} - \eta_2^{\min}}, \\ W_3^0 &= \frac{\eta_3(x(t)) - \eta_3^{\min}}{\eta_3^{\max} - \eta_3^{\min}}, & W_3^1 &= \frac{\eta_3^{\max} - \eta_3(x(t))}{\eta_3^{\max} - \eta_3^{\min}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Finalement les  $r = 8$  fonctions de pondération  $\mu_i(\eta)$  sont obtenues :

$$\begin{aligned} \mu_1(\eta) &= W_1^0 W_2^0 W_3^0, & \mu_2(\eta) &= W_1^0 W_2^0 W_3^1, & \mu_3(\eta) &= W_1^0 W_2^1 W_3^0, & \mu_4(\eta) &= W_1^0 W_2^1 W_3^1 \\ \mu_5(\eta) &= W_1^1 W_2^0 W_3^0, & \mu_6(\eta) &= W_1^1 W_2^0 W_3^1, & \mu_7(\eta) &= W_1^1 W_2^1 W_3^0, & \mu_8(\eta) &= W_1^1 W_2^1 W_3^1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

où:

$$\eta = [\eta_1 u(t) \quad \eta_2(x(t)) \quad \eta_3(x(t))]^T \quad (3.41)$$

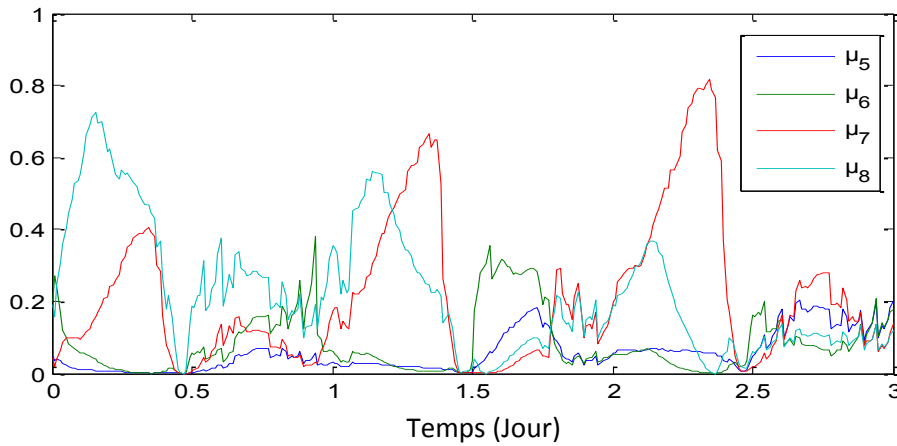


Figure 3.7 – Evolution des fonctions d'appartenance

Les matrices constantes  $A_i, B_i$  et  $E_i$  associées aux 8 sous-modèles, sont déterminées en utilisant les matrices  $A(x(t), u(t))$ ,  $B(u)$  et  $E(u)$ , (3.37a), (3.37b) et les scalaires  $\eta_j^{min}, \eta_j^{max}, j = 1, \dots, 3$

Finalement, le modèle non linéaire (3.31) est écrit de façon équivalente sous une forme Takagi-Sugeno :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(x(t), u(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.42)$$

avec

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

### 3.4.3 Commande tolérante au défaut pour le modèle ASM1 réduit

Dans ce qui suit les résultats de la commande tolérante aux défauts des systèmes T-S incertains et perturbés affectés par des défauts (section 2.2) sont appliqués ici au modèle ASM1 réduit (3.31) ou de façon plus aisée au modèle équivalent (3.42).

#### Représentation sous forme de T-S incertain et défectueux du modèle ASM1

La structure T-S utilisée pour le modèle ASM1 réduit est celle construite en section précédente 3.4.2. Les matrices constantes et les fonctions de pondération correspondant à la structure T-S initiale sont fixées et données par les équations (3.37a)-et (3.37b). Cette structure est légèrement modifiée afin de prendre en compte d'éventuelles incertitudes pouvant intervenir sur les paramètres :  $b_H$  et  $b_A$ . Ces paramètres interviennent dans les coefficients de la matrice  $A(x(t), u(t))$  (3.27a), ce qui peut donc dans (3.42) de séparer la partie incertaine  $\Delta A(t)$ . La plage de variation de ces paramètres est : pour  $b_H$  de 20% de la valeur nominale, pour  $b_A$  de 25% de la valeur nominale. L'effet des incertitudes est pris en compte au niveau de la matrice  $A + \Delta A(t)$ , on peut alors écrire :

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2\Delta b_H(t) & 0 & 0.25\Delta b_A(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2\Delta b_H(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2\Delta b_H(t) & 0 & 0.25\Delta b_A(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25\Delta b_A(t) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

où le terme incertain est écrit sous la forme  $\Delta A(t) = M^a F^a(t) N^a$  avec les matrices :

$$M^a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F^a(t) = \begin{bmatrix} 0.2\Delta b_H(t) & 0 \\ 0 & 0.25\Delta b_A(t) \end{bmatrix}, N^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

où  $F^a(t)$  a la propriété  $F^{aT}(t)F^a(t) \leq I$ .

Des défauts sont injectés, au cours du temps exprimé en jour [ j ] sur les sorties du bioréacteur (3.42) de la façon suivante :

- un défaut  $f_1$  sur la première sortie  $y_1(t) = XS_5(t)$  apparaît à partir de 1.5[j]
- un défaut  $f_2$  sur la deuxième sortie  $y_2 = S_o$  intervient à 2[day]

Dans tous les cas, ces défauts ont une amplitude constante approximativement égale à 25% de l'amplitude maximale de chaque sortie. Donc, les nouvelles équations (3.42) sont :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(x(t), u(t)) \left( (A_i + \Delta A(t))x_f(t) + B_i u(t) + B_{1i} f(t) + E_i d(t) \right) \\ y_f(t) = Cx(t) + Df(t) \end{cases} \quad (3.46)$$

où :

$$f = [f_1 \quad f_2]^T, B_{1i} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 8 \text{ et } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

### Synthèse de la commande tolérante au défaut et résultats d'estimation d'état

Dans ce qui suit on applique la procédure de la commande tolérante au défaut pour les systèmes T-S incertains et perturbées présentée au théorème 2.3 dans chapitre 2. En appliquant ce théorème, l'observateur (2.50) est construit.

On rappelle la structure de l'observateur PI :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}_f(t)) (A_i \hat{x}_f(t) + B_i u_f(t) + B_i^f \hat{f}(t) + H_i^1 (y_f(t) - \hat{y}_f(t))) \\ \dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}_f(t)) (H_i^2 (y_f(t) - \hat{y}_f(t))) \\ \hat{y}_f(t) = C \hat{x}_f(t) + D \hat{f}(t) \end{cases} \quad (3.48)$$

**Remarque 3.1.** Il faut noter que les données d'entrée (figure 3.8) et de sortie sont générées par le modèle ASM1 complet (3.7), alors que le modèle utilisée pour obtenir la structure T-S –et implicitement l'estimation d'état– est celui réduit à cinq états (3.31).

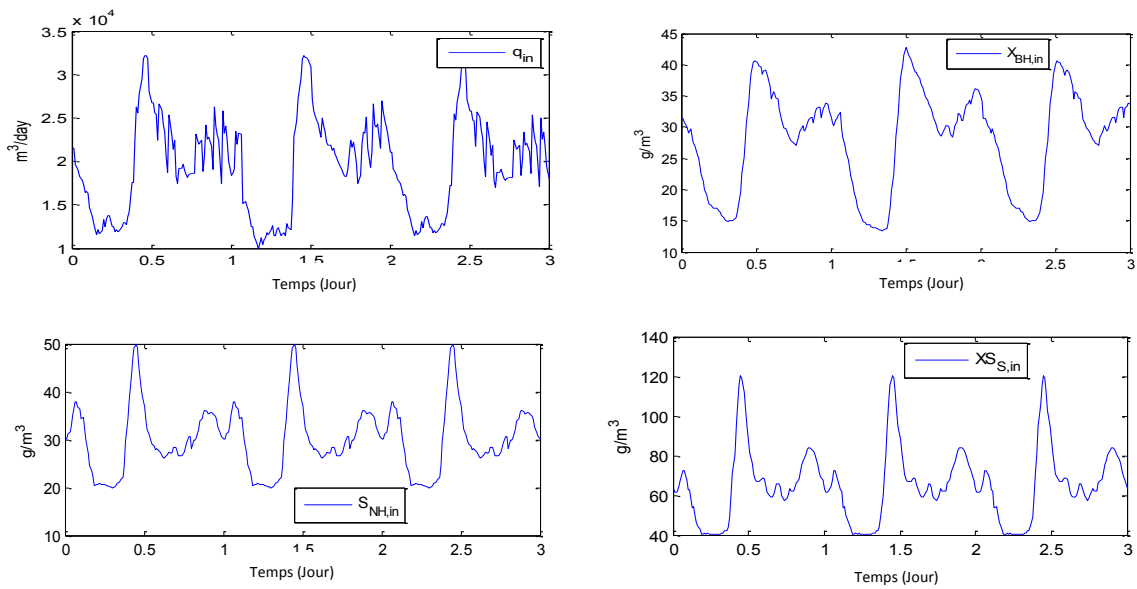


Figure 3.8 – Les entrées réelles du modèle ASM1

La valeur numérique du taux d'atténuation des entrées  $Y(t)$  vers l'état argumenté  $\tilde{x}(t)$  est  $\bar{\eta} = 6.32$ . L'observateur fournit l'estimation des états dont les erreurs d'estimation sont illustrées sur la figure 3.10 ainsi que l'estimation du défaut (figure 3.9). La figure 3.10 présente, également, l'erreur de poursuite entre le système de référence (sans défaut) et le système en défaut avec la commande tolérante au défaut  $u_f(t)$ . Les figures 3.9 et 3.11 comparent, d'une part, l'entrée de commande du système sans défaut et la commande tolérante et, d'autre part, les états du système incertain avec la commande tolérante au défaut, ceux des états estimés, ainsi que ceux du système de référence. On constate que la commande tolérante au défaut a compensé le défaut et a permis au système d'atteindre son objectif même en présence du défaut.

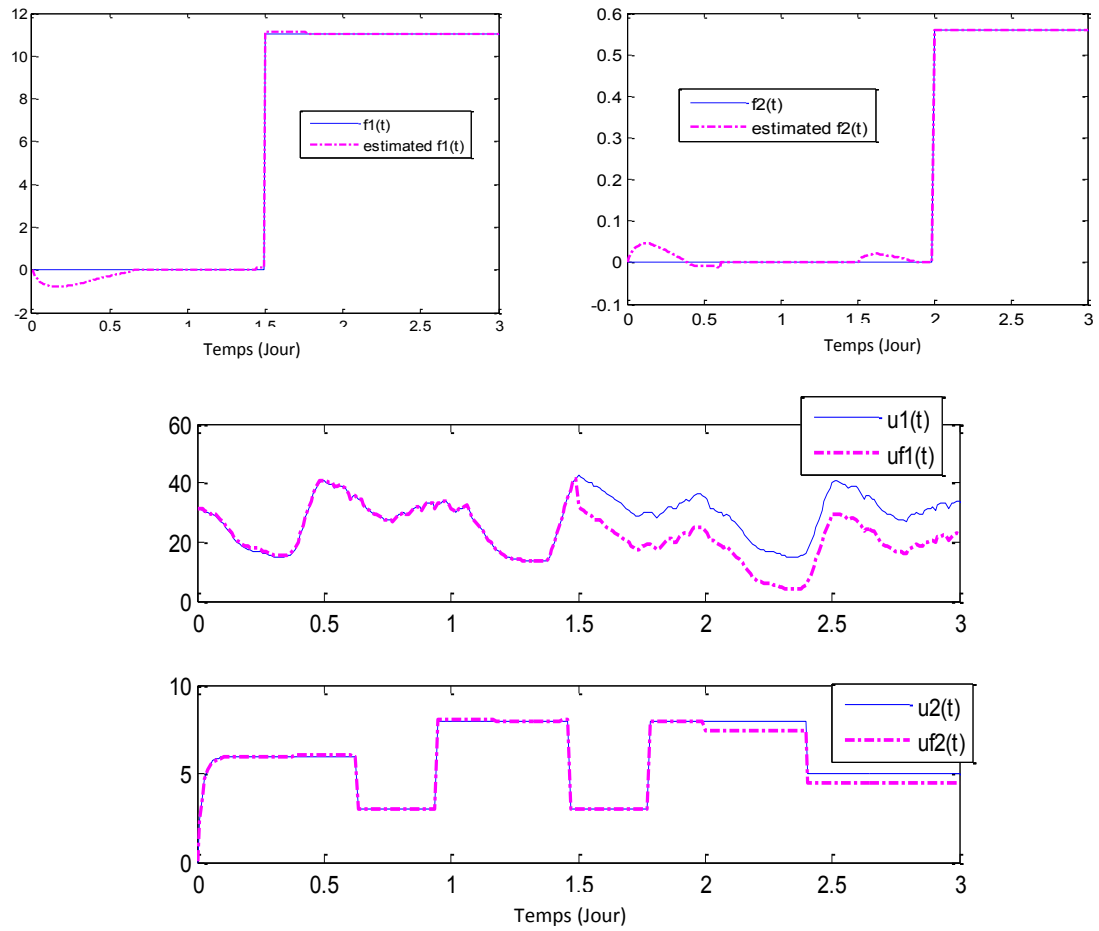


Figure 3.9 – Défaut et son estimé - commande sans défaut et commande tolérante

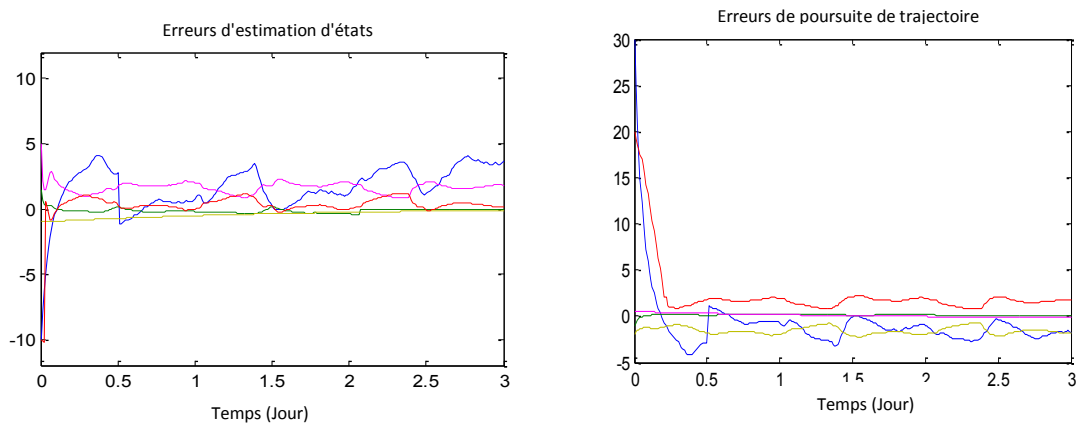


Figure 3.10 – Erreurs d'estimation d'état et de poursuite de trajectoire

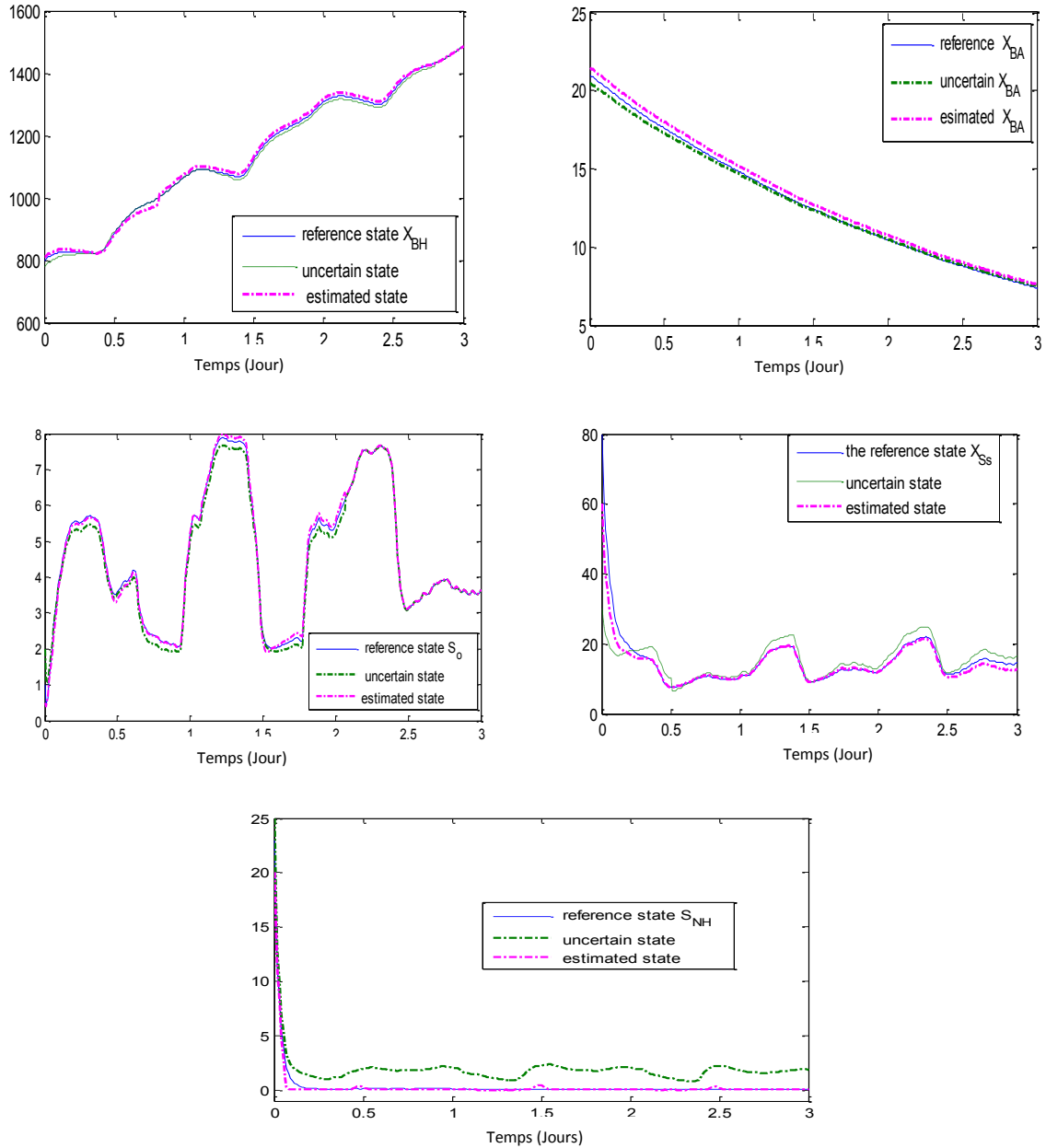


Figure 3.11 – Comparaison entre les états du système de référence (sans défaut), états estimées et états du système avec FTC

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre a permis la mise en œuvre des différentes méthodes de modélisation, d'estimation d'état et de commande tolérante aux défauts proposées au cours du chapitre 1 à travers une application sur un modèle réduit à cinq états du modèle ASM1. Premièrement une stratégie de linéarisation a été appliquée au modèle d'un réacteur à boues activées à trois variables d'états. Cette stratégie a permis d'obtenir un modèle réduit linéaire à temps invariant, tout en préservant l'interprétation biologique des variables d'états ainsi que l'ordre



du modèle originale. La stratégie proposée a été effectuée en trois étapes : premièrement une analyse de sensibilité du modèle vis-à-vis les variables d'états a été réalisée. Puis une approche de linéarisation basée essentiellement sur les conclusions tirées de l'étape précédente a été développée. Dans cette approche une approximation des cinétiques de réactions non linéaires a été présentée afin d'éviter la destruction de la structure générale du modèle de base. Deuxièmement la méthode, proposée en chapitre 1, d'extraction d'un modèle non linéaire sous forme multimodèle de type Takagy-Sugeno a été mise en œuvre avec succès pour le modèle ASM1 considéré. Le système T-S obtenu a permis la synthèse d'observateurs d'état proposés en chapitre 1. La représentation d'un T-S incertain a permis la synthèse d'un observateur proportionnel-intégral capable de reconstruire l'état et les défauts affectant le système en présence d'incertitudes paramétriques. Enfin, la stratégie de commande tolérante aux défauts proposée au chapitre 2 a été exploitée pour le modèle T-S incertain représentant le modèle ASM1 réduit. Elle est basée sur la poursuite d'un modèle de référence qui correspond au modèle du système ASM1 sans défaut. La stratégie de commande consiste à ajouter deux termes à la loi de commande initiale du système ayant pour objectif de compenser le défaut affectant le système.

## Chapitre 4

# Commande prédictive floue sous contraintes "Approche LMI"

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>99</b>
<b>4.2</b>	<b>Commande prédictive .....</b>	<b>101</b>
4.2.1	Position du problème .....	102
4.2.2	Etat de l'art de la stabilité des MBPC.....	104
<b>4.3</b>	<b>La stratégie proposée .....</b>	<b>106</b>
4.3.1	La transformation sous forme LMI.....	109
<b>4.4</b>	<b>Application .....</b>	<b>110</b>
4.4.1	Mise sous forme multimodèle .....	111
4.4.2	Commande prédictive MBPC stabilisante .....	112
<b>4.5</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>116</b>

---

## 4.1 Introduction

Ces dernières années la commande prédictive est largement utilisée dans le domaine industriel et a été appliquée avec succès pour différentes applications. La commande prédictive à base de modèle notée « MBPC » (Model Based Predictive Control) est apparue vers la fin des années 70. MBPC n'indique pas une stratégie de commande spécifique mais plutôt un ensemble d'algorithmes de contrôles qui utilisent explicitement un modèle du processus pour déterminer la commande à appliquer tout en minimisant une fonction coût. L'idée principale des commandes prédictives est basée sur l'utilisation d'un modèle du système à commander pour prédire sa sortie sur un certain horizon, l'élaboration d'une séquence de commandes futures minimisant une fonction coût, l'application du premier élément de la séquence optimale précédente sur le système et la répétition de la procédure complète à chaque instant d'échantillonnage [Mayne et al., 2000]. C'est le principe de l'horizon fuyant. La raison principale du succès de cette méthode est la capacité de contrôler de façon optimale les systèmes multivariables sous contrainte [Belarbi et Megri, 2007]. Plusieurs chercheurs se sont alors penchés sur ce sujet. Le résultat de ces recherches a été assez fructueux pour les systèmes à base de modèle de prédiction linéaire. Si le modèle est linéaire sans contraintes, une solution analytique peut être obtenue [Clarke et al., 1987a], [Clarke et al., 1987b]. L'utilisation de contraintes dans la stratégie de commande prédictive assure des performances de fonctionnement très proches de la réalité. La considération des contraintes sur les entrées permet de prendre en compte la modélisation des saturations et de la vitesse de variations de ces contraintes sur les actionneurs. Outre, les contraintes de sorties sont utilisées pour assurer la sécurité de fonctionnement des procédés [Espinosa et al., 2005]. En présence de contraintes, le problème peut être formulé comme un programme d'optimisation quadratique (QP), pour lequel des algorithmes avec solution efficace sont développés [Maciejowski., 2002]. Toutefois, si le modèle est non linéaire, le problème d'optimisation devient non convexe ainsi les procédures de solution sont très complexes [Mayne et al., 2000]. Dans [Espinosa et al., 2005], trois approches sont données pour résoudre ce problème en temps réel générant une solution sous-optimale avec une performance assez proche de la solution optimale.

La logique floue est largement utilisée dans la commande prédictive à base de modèle. Deux grandes catégories sont distinguées [Belarbi et Megri, 2007]. Dans la première catégorie, un modèle flou est utilisé comme un prédicteur. L'avantage de l'utilisation de modèles flous, portent sur le traitement d'informations disponibles sur le processus [Espinosa

et al.,2005]. La deuxième catégorie dépend des décisions floues importées par ce type de système [Bellman et Zadeh., 1970]. La fonction objective et les contraintes sont floues, tandis que le modèle du système peut être flou [Feng, 2006; Flores et al., 2005]. L'étude de la stabilité des modèles basés sur des contrôleurs prédictifs a été l'objectif principal de plusieurs recherches au cours des deux dernières décennies [Mayne et al., 2000]. Dans [Keerthi et Gilbert., 1988 ], la fonction cout était une fonction de Lyapunov afin de garantir la stabilité de la commande prédictive non Linéaire des systèmes en temps discret. de plus plusieurs techniques basées sur les contraintes point final sont utilisées pour stabiliser les systèmes MBPC [Belarbi et Megri, 2007, Chisci et al ., 1996, Magni et al.,2001, Mayne et al., 2000]. Dans ces techniques, le but du contrôleur prédictif est de ramener les états du système à une région où une stabilisation locale du contrôleur est assurée. L' inconvénient principale de ces techniques est qu'il n'ya aucune garantie que la commande floue prédictive conduit les états à cette région. Une manière de résoudre le problème ci-dessus est de choisir un long horizon de prédiction, ou d'augmenter progressivement l'horizon de prédiction en résolvant à chaque fois le problème d'optimisation, jusqu'à ce que les états rejoignent la région finale [Belarbi et Megri, 2007, Scokaert et al., 1999]. Dans [Molloy et al., 2002], les contraintes sur le signal de commande et son incrément sont utilisés pour garantir la stabilité asymptotique et robuste du système à commande prédictive. Cette méthode peut être utilisée pour les processus stable en boucle ouverte (bounded input-bounded output (BIBO)) avec un modèle d'incertitude borné par  $l_1$ -norm. Aussi les contraintes ajoutées entraînent une réponse très lente. In [ Khairy et al., 2010] une nouvelle approche permettant d'assurer la stabilité exponentielle du système MBPC en boucle fermé a été suggéré. Deux idées sont proposées. Tout d'abord, une contrainte supplémentaire sur les actions de contrôle appliquées est utilisé pour assurer la minimisation de la fonction de Lyapunov quadratique, et ainsi de garantir la stabilité de Lyapunov exponentielle du système en boucle fermée. Ensuite, la faisabilité du problème d'optimisation d'horizon finie avec les contraintes ajoutée est assurée en basant sur une solution off-line en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). In [ Bououden et al., 2012] , une loi de commande prédictive à base de modèle flou est conçu en résolvant un problème d'optimisation convexe à conditions LMI. Le contrôleur est conçu pour maintenir une qualité de puissance satisfaisante durant le fonctionnement d'une éolienne dans des zones de vent à haute vitesse tout en réduisant les charges mécaniques.

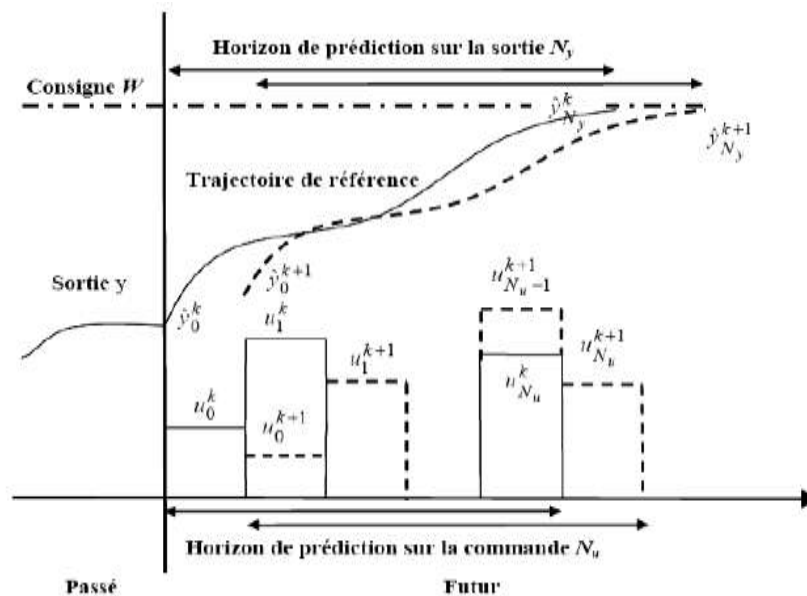
Ce chapitre est organisé comme suit : des généralités sur la commande prédictive et quelques définitions concernant la stabilité seront détaillé en section 4.2, la stratégie permettant d'assurer la stabilité exponentielle du système MBPC en boucle fermé est

proposée en section 4.3. L'application de la stratégie proposée est illustrée par un modèle de bioréacteur réduit, en section 4.4. Enfin, quelques conclusions ont présentées concernant les résultats obtenus.

## 4.2 Commande prédictive

Le principe de la commande prédictive consiste à créer pour le système asservi un effet anticipatif par rapport à une trajectoire à suivre connue à l'avance, en se basant sur la prédiction du comportement futur du système et en minimisant l'écart de ces prédictions à la trajectoire au sens d'une certaine fonction coût, tout en respectant des contraintes de fonctionnement. Les techniques de commande prédictive s'appuient sur un modèle de prédiction déterminé hors ligne. Cette particularité permet de classer la commande prédictive dans la grande famille des commandes à base de modèles, dite 'MBC' (Model Based Control). A partir d'une trajectoire de référence à suivre, elle réalise en temps réel à chaque pas d'échantillonnage les étapes suivantes :

- Calculer les prédictions des variables de sortie  $\hat{y}$  sur un horizon de prédiction sur la sortie  $N_p$ ,
- Minimiser un critère quadratique à horizon fini portant sur les écarts entre la sortie prédite du système et la consigne future en réglant une séquence de commandes futures sur un horizon de commande  $N_c$  pouvant être différent de  $N_p$ ,
- Appliquer uniquement la première valeur de cette séquence sur le système,
- Répéter ces étapes à l'instant d'échantillonnage suivante, selon le principe de l'horizon fuyant.



**Figure 4.1.** Principe de la commande prédictive sur un horizon fixe et glissant [GONZALEZ, 2001].

Le problème simple issu de la minimisation du critère prédictif dans le cas d'un système linéaire invariant sans contrainte se complique singulièrement lorsque l'on envisage le cas de la commande prédictive d'un système non-linéaire sous contraintes. En ce qui concerne les contraintes en particulier, la meilleure solution consiste à considérer les contraintes depuis l'étape de synthèse, imposant ainsi leur présence au sein du problème d'optimisation [Mayne, et al 2000].

*Parmi les avantages de la commande MPC on peut citer :*

- MPC a l'avantage de considérer les contraintes sur la commande, les variables d'états et de sorties dès la phase de conception,
- MPC fournit une loi de commande en boucle fermée à cause de la résolution à chaque pas d'échantillonnage d'un problème d'optimisation et de l'application de la première partie de la séquence de commande seulement,
- MPC possède de bonnes performances en poursuite de trajectoire parce qu'elle utilise à chaque pas d'échantillonnage une fenêtre (qui se déplace) du signal de référence, qui peut ainsi exploiter toute information non causale disponible au moment de la synthèse.
- MBPC est facile à régler, une fois un modèle valide du système développé. En effet, les deux paramètres principaux seront les horizons de prédiction et de commande.

*Parmi les inconvénients de la commande MPC on peut citer :*

- MPC requiert un certain temps de calcul pour résoudre le problème d'optimisation. Ce temps de calcul doit être inférieur à la période d'échantillonnage du système, donc la commande MPC doit gérer des contraintes temps réel pour les systèmes avec une dynamique rapide. Ce problème a reçu une attention spécifique dans les dix dernières années par le calcul des contrôleurs explicites hors-ligne. Cet inconvénient ne concerne pas les systèmes lents, par conséquent la station d'épuration des eaux.
- Trouver un modèle valide peut être un problème.

#### 4.2.1 Position du problème

Soit le système non linéaire discret suivant :

$$x(t + 1) = f(x(t), u(t)) \quad (4.1)$$

Où  $f(x(t), u(t))$  une fonction continue et bornée sur le domaine  $D \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , et  $u_k \in \mathbb{R}^m$ . L'objectif est ainsi l'élaboration d'une séquence de commandes futures optimales minimisant une fonction coût  $\mathfrak{J}$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(u(k), x(k), x_r(k)) = & \sum_{t=k+1}^{k+N_p} (x_r(t) - x(t))^T \mathbf{Q} (x_r(t) - x(t)) \\ & + \sum_{t=k}^{k+N_c} (u(t)^T \mathbf{R} u(t) + \delta u(t)^T \mathbf{S} \delta u(t)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Où  $k$  est l'indice d'itération actuel,  $x_r(t)$  contient la description du comportement référence de l'état du procédé,  $N_c$  est l'horizon de commande,  $N_p$  est l'horizon de prédiction.

$\delta u(t) = u(t) - u(t - 1)$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$  sont des fonctions semi définie positive et  $\mathbf{R}$  est une fonction définie positive. Toute fois en optimisant il faut tenir compte des contraintes :

$$\begin{aligned} y_{min} \leq y(t) \leq y_{max} \quad \forall t = k + 1, \dots, k + N_p \\ u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad \forall t = k, \dots, k + N_c \end{aligned} \quad (4.3)$$

Où  $y$  est la sortie du système. La stratégie de commande prédictive est basée sur une optimisation de l'horizon fuyant, calculée en ligne à chaque pas d'échantillonnage. La solution du problème d'optimisation (4.2) est compliquée, puisque il s'agit d'un problème d'optimisation sous contraintes linéaire (non convexes optimisation). La solution exacte de ce problème ne peut être calculée en temps réel. Dans [Espinosa et al.,2005], trois approches sont proposée pour résoudre ce problème en temps réel générant ainsi une solution sous optimale avec une performance assez proche de la solution optimale. L'idée de ces approches est la conception d'une commande prédictive basé sur la linéarisation locale du système autour d'un point de fonctionnement de la trajectoire actuelle. Une fois la commande est conçu, le problème d'optimisation peut être formulé par un Programme Quadratique (PQ). A chaque instant d'échantillonnage, le PQ est résolu avec de nouveaux paramètres. Les trois approches sont basés sur ce concept, la seule différence était la manière dont les paramètres du PQ sont obtenus à partir du modèle non-linéaire.

Dans ce qui suit un algorithme est développé assurant la stabilité de Lyapunov exponentielle du système en boucle fermée. Le système étudié est représenté par un modèle de type Takagi-Sugeno développé dans le premier chapitre. Il présente les avantages suivants :

- 1) Aucune simulation n'est nécessaire pour obtenir les paramètres du PQ. Le système linéaire local utilisé pour construire la commande prédictive peut être généré directement à partir de l'inférence du système flou.

- 2) L'approche est plus fiable dans le domaine de l'industrie, vue la structure générale du model T-S représentant une combinaison de modèles locaux identifiés autour de différents points de fonctionnement.

La figure 4.2 résume le principe de la commande prédictive dans le cas général d'un problème de commande optimale sous contraintes sur un horizon glissant.

La section prochaine, décrit brièvement l'état de l'art sur l'étude de la stabilité dans le cadre de commande prédictive à base de modèles MBPC.

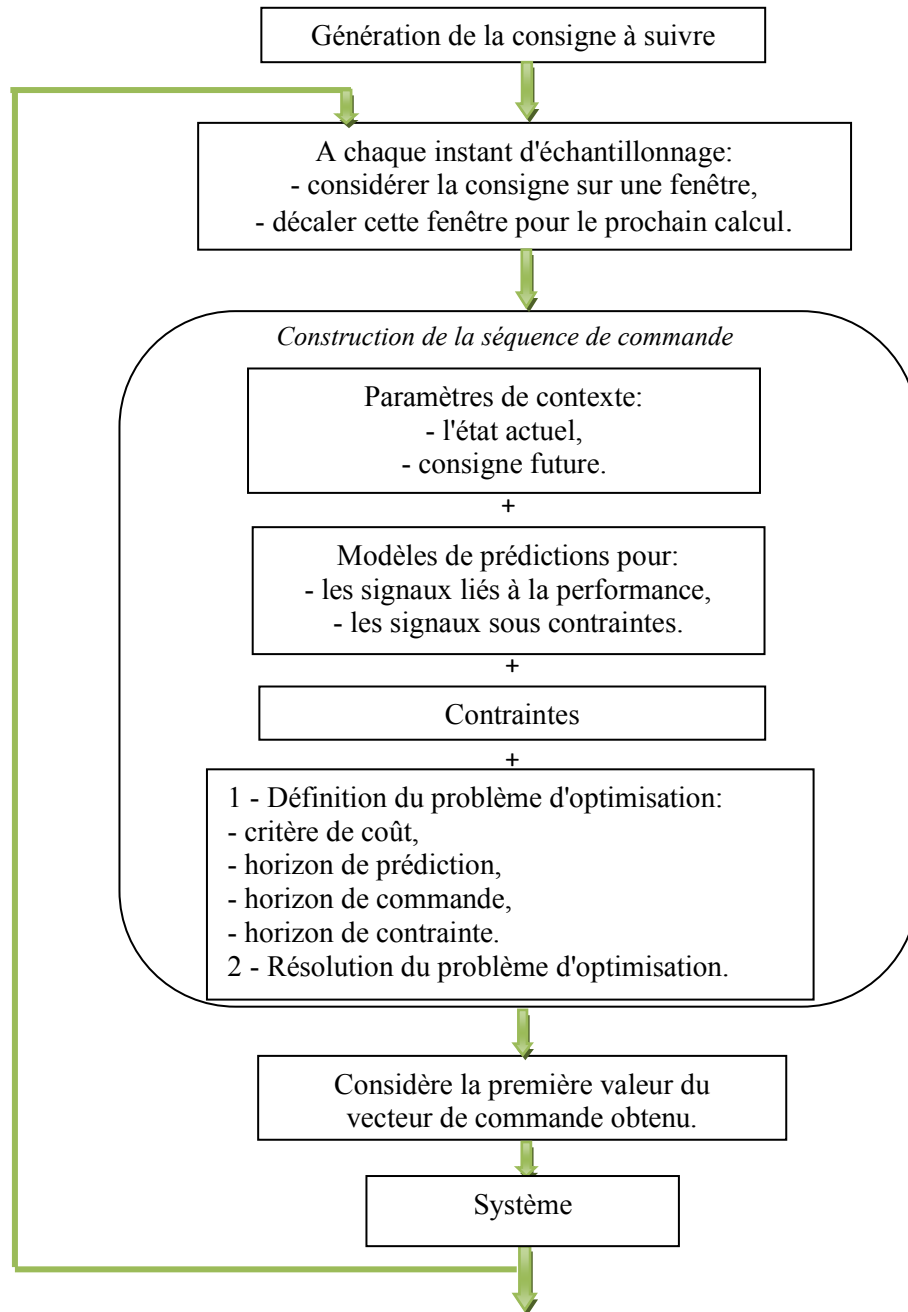


Figure 4.2 Schéma de principe de la commande prédictive.



#### 4.2.2 Etat de l'art de la stabilité des MBPC

L'objectif principal des recherches en MBPC dans les deux dernières décennies a été de concevoir une commande MBP stable. La plupart des techniques dépendent de l'addition de pénalités à la fonction cout et/ou des contraintes sur les états a la fin de l'horizon de prédiction [Mayne et al., 2000]. En outre, il est intéressant de mentionner qu'il ya quelques commande MBP floues qui dépendent de l'utilisation d'une loi de commande explicite (aucune optimisation en ligne est nécessaire). Dans ce cas, la stabilité asymptotique est vérifiée sous certaines hypothèses. Cependant, cette méthode choisie une loi de commande qui minimise l'erreur entre la sortie du procédé et la sortie d'un modèle de référence grâce à un horizon choisi [Khairy et al., 2010]. La commande MBP floue proposée fournit plus de flexibilité en sélectionnant les commandes qui minimise une fonction de coût générale des erreurs a travers un horizon de prédiction, les commandes a appliquées à travers un horizon de contrôle, et les incréments des commandes grâce à un horizon de contrôle. En outre, les algorithmes de [Blazic et Skrjanc., 2007] garantissent la stabilité asymptotique seulement pour certaines sélections de l'horizon de coïncidence (égal au degré relatif du système en cas de la commande des systèmes à minimum de phase, et des horizons de coïncidence très longue en cas de la commande en boucle ouverte des systèmes stables). Dans la partie suivante de cette section, deux méthodes seront discutées :

**Méthode M1:** Dans cette méthode, les contraintes de point final sont ajoutés. Le but de la commande prédictive est de conduire les états à une région terminale, où un contrôleur local de stabilisation ( $u = Kx$ ) est employé [Belarbi et Megri, 2007, Magni et al.,2001]. L'algorithme de stabilisation non linéaire a horizon glissant [Magni et al.,2001] est utilisé. Les inconvénients principaux de cette méthode sont:

- Il n'ya aucune garantie que la commande prédictive du modèle converge les états vers la région terminale [Belarbi et Megri, 2007]. Pour résoudre ce problème, le choix de longue prédiction et horizons de contrôle est exigée. Sinon, augmenter progressivement l'horizon de prédiction et résoudre à chaque fois le problème d'optimisation, jusqu'à ce que l'état rejoint la région finale [Belarbi et Megri, 2007, Scokaert et al., 1999]. Ces solutions nécessitent de temps de calcul très longs. Par conséquent, la résolution en ligne du problème d'optimisation peut être irréalisable. Dans [Belarbi et Megri, 2007], la recherche en utilisant la méthode branch and bound [Minoux., 1986] est utilisée pour réduire le temps de calcul.

- La difficulté du calcul pratique de la région d'attraction de la commande auxiliaire [Magni et al.,2001].
- La variation de la dynamique locale du système en fonction des points de fonctionnement différents. Les calculs doivent être répétés plusieurs fois hors ligne pour différentes valeurs de référence.

**Méthode M2:** Dans cette méthode, des contraintes sur le signal de commande et son incrémentation sont utilisés pour parvenir à la stabilité robuste du système a base de MBPC. Pour obtenir une poursuite de référence sans erreurs, une commande feed-forward est recalculée à chaque instant d'échantillonnage pour obtenir un gain unitaire entre la sortie et la référence (stabilité asymptotique robuste) [Mollov et al., 2002].

### 4.3 La stratégie proposée

Considérons le système non-linéaire (4.1). Il s'agit de concevoir une commande prédictive stabilisante à base de modèle pour ce système. L'idée repose sur l'addition d'une contrainte au problème d'optimisation qui assure la stabilité exponentielle de Lyapunov du système en boucle fermée. Soit  $x_e$  le vecteur d'erreur donné par:

$$x_e(k) = x_r(k) - x(k) \quad (4.4)$$

$V(k)$  est une fonction de Lyapunov quadratique, définie comme suit:

$$V(k) = x_e^T(k)Px_e(k) \quad (4.5)$$

où  $P$  est une matrice définie positive. la variation de la fonction de Lyapunov (4.5) est donnée par:

$$\Delta V(k) = V(k + 1) - V(k) = x_e^T(k + 1)Px_e(k + 1) - x_e^T(k)Px_e(k) \quad (4.6)$$

Quelque soit les états initiaux, on peut prouver que  $\Delta V(k)$  est toujours négatif,  $V(k)$  décroît, et l'état  $x_e$  converge vers l'origine (la stabilité asymptotique). Comme  $V(k)$  est quadratique, la stabilité exponentielle est également vérifiée. Soit  $U_n$  la séquence de commande suivante:

$$U_n = \begin{bmatrix} u(k/k) \\ u(k + 1/k) \\ \vdots \\ u(k + N_c/k) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$u(k + i/k)$  désigne l'action de commande à l'instant  $k + i$  calculée à partir de la résolution du problème d'optimisation à l'instant  $k$ . pour la commande MBP, seul le premier élément du vecteur de séquence de commande ( $u(k/k)$ ) est appliquée. Une contrainte est ajoutée sur  $u(k/k)$  afin d'assurer la négativité de  $\Delta V(k)$ . Parmi les séquences de commande vérifiant les contraintes, la séquence de commande qui minimise la fonction de coût (4.2) est sélectionnée. Seul le premier élément de la séquence de commande est appliquée au système et la procédure est répétée à chaque pas d'échantillonnage.

**Définition 4.1.** A l'instant  $k$ ,  $U^*$  désigne l'ensemble des séquences de commande assurant que:

$$\Delta V(k) < 0 \quad \forall U_n \in U^* \quad (4.8)$$

**Remarques :**

1. Le système non-linéaire (1) associé à la commande prédictive a base de modèle flou sous la contrainte suivante:  $U_n \in U^*$  est exponentiellement stable. Ceci peut être expliqué comme suit. Considérons le problème d'optimisation à l'instant  $k$ . Si la contrainte  $U_n \in U^*$  est garanti, la séquence de commande optimale vérifie:  $\Delta V(k) < 0$  (Définition1).i.e

$$V(k + 1) < V(k) \quad (4.8a)$$

Comme la stratégie de l'horizon fuyant est utilisée, la même procédure se répète à chaque pas d'échantillonnage, donc:

$$V(k + i) < V(k + i - 1), \quad i \in \mathbb{R}^+ \quad (4.9)$$

En fonction du temps la fonction de Lyapunov  $V$  décroît. Ainsi,  $x_e$  atteindra l'origine (la stabilité asymptotique). Comme  $V$  est une fonction de Lyapunov quadratique (4.5), le taux de décroissance exponentielle est achevé (stabilité exponentielle).

2. Pour obtenir un certain taux de décroissance à l'origine [Tanaka et Wang., 2001], la condition  $\Delta V(k) < 0$  est modifiée par:

$$\Delta V(k) < (\alpha^2 - 1)V(k), \quad \alpha < 1 \quad (4.10)$$

**Méthode M3:**

Sélectionnez  $P$  comme une matrice diagonale. Les éléments diagonaux  $P_{11}, \dots, P_{nn}$  sont des nombres positifs choisis pour contrôler le taux de décroissance des différents états.

Par exemple, si on cherche à augmenter le taux de décroissance de l'état  $x_{e1}$ , il faut augmenter  $P_{11}$ . Bien que cette méthode est simple, l'existence d'une séquence de commandes, qui vérifie que  $\Delta V(k) < 0$  sous la contrainte d'entrée  $u_{min} \leq u(k) \leq u_{max}$  n'est pas toujours garantie. La méthode M4 est introduite pour résoudre ce problème.

**Méthode M4:** Cette méthode est utilisée pour garantir l'existence d'une solution faisable au problème d'optimisation avec la contrainte de stabilité. L'idée de cette méthode est de résoudre un ensemble de LMIs hors ligne (voir lemme 1 ci-dessous) pour obtenir une commande PDC qui accomplit:

- la stabilité exponentielle du modèle T-S floue.
- la commande est dans les limites de saturation.

La matrice  $P$  définie positive, obtenu à partir de la solution des LMIs, est utilisée dans (4.5). Cela garantit que, à tout pas  $k$ , au moins une commande prédictive faisable  $u(k)$  existe (la commande obtenus à partir du PDC( Parallel Distributed Compensation) assurant la stabilité exponentielle du système en boucle fermée.

**Lemme 4.1:** (Tanaka et Wang., 2001 ). Pour obtenir une commande PDC stabilisante pour le système T-S flou discret suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \\ y(k) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))(C_i x(k)) \end{cases} \quad (4.11)$$

Trouvez  $X > 0$  et  $M_i (i = 1, \dots, r)$  tel que les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées:

$$\begin{bmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} X & \left\{ \frac{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i}{2} \right\}^T \\ \left\{ \frac{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i}{2} \right\} & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad i < j \quad \text{s.t. } \mu_i \cap \mu_j \neq \emptyset \quad (4.12)$$

où

$$\begin{aligned} X &= P^{-1} \\ M_i &= F_i X \end{aligned}$$

Supposons que la condition initiale  $x(0)$  est connue, la contrainte  $\|u(k)\|_2 \leq \mu$  est vérifiée à tout moment, si les LMIs suivantes sont ajoutées [Tanaka et Wang., 2001]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} &\geq 0 \\ \begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Où  $F_i$  est le gain de retour d'état de la règle floue  $i$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Les gains de retour d'état et la matrice  $P$  commune peuvent être obtenue par:

$$\begin{aligned} P &= X^{-1} \\ F_i &= M_i X^{-1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

le théorème 1 discute la faisabilité du problème d'optimisation avec la contrainte de stabilité.

**Théorème 4.1.** Supposons que les LMIs ((4.12) et (4.13)) sont faisables et la matrice  $P$  définie positive dans (4.5) est calculée en utilisant (4.14), alors le problème d'optimisation MBPC avec la contrainte de stabilité  $U_n \in U^*$  est toujours possible ( $\forall k$ ).

**Preuve.** Comme les LMIs (4.12) et (4.13) sont faisables à chaque instant d'échantillonnage  $k$ , la loi de commande PDC  $u_{PDC}(k)$  satisfait:

- $u_{min} \leq u_{PDC}(k) \leq u_{max}$
- $\Delta V(k) < 0$

Considérons le problème d'optimisation à l'instant  $k$  : Le problème est faisable, si  $\exists U_n$  qui satisfait:

- la commande appliquées  $u(k/k)$  vérifie:  $u_{min} \leq u(k/k) \leq u_{max}$
- $\Delta V(k) < 0$

Soit  $U'$  l'ensemble des séquences de commande tel que:  $u(k/k) = u_{PDC}(k)$ .

- $\forall U_n \in U'$  les deux conditions de faisabilité sont atteintes.
- Alors  $\exists U_n$  tels que les conditions de faisabilité sont garantie.
- Le problème d'optimisation avec la contrainte de stabilité est faisable.  
L'algorithme de la Méthode M4 peut être résumé comme suit.

**Algorithme .A.**

*Hors ligne:* Résoudre le LMI (4.12) et (4.13). Calculer la matrice  $P$  définie positive en utilisant (4.14).

*En ligne:* A chaque instant d'échantillonnage, résoudre le programme d'optimisation quadratique sous la contrainte de stabilité ( $U_n \in U^*$ ) (voir Annexe B). Seul le premier élément de la séquence de commande optimale est appliqué au système.

**Remarque:** pour les systèmes linéaires, la solution globale est obtenue facilement puisque le problème revient à résoudre un problème de programmation quadratique comme dans le cas de la méthode QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control) [Garcia and Morshedi, 1986]. Cet algorithme est largement accepté et utilisé par les industriels, en particulier dans le secteur des hydrocarbures et de la pétrochimie [Khadir, 2002].

### 4.3.1 La transformation sous forme LMI

Dans cette section, le programme d'optimisation quadratique décrit dans l'Annexe B est reformulé en utilisant l'approche LMI. Un problème d'optimisation LMI exige que le problème initial est restructuré de manière à avoir une forme linéaire de la fonction coût et des contraintes d'inégalité strictes.

En général, la minimisation de la fonction quadratique convexe  $\mathfrak{J}(\Delta U_n)$  peut être obtenue par la stratégie de réduction équivalente suivante: minimiser  $\gamma$  afin de trouver  $\Delta U_n$  admissible, satisfaisant:

$$\mathfrak{J}(\Delta U_n) < \gamma \quad (4.15)$$

où

$$\mathfrak{J}(\Delta U_n) = J_{min} + 2 \left[ (\Gamma - Y_{ref})^T Q_1 \Lambda - \bar{U}_{k-1}^T \right] \Delta U_n + \Delta U_n^T [\Lambda^T Q_1 \Lambda + R_1 + S_1] \Delta U_n \quad (4.16a)$$

et

$$J_{min} = Y_{ref}^T Q_1 Y_{ref} + \Gamma^T Q_1 \Gamma - 2 Y_{ref}^T Q_1 \Gamma + \bar{U}_{k-1}^T S_1 \bar{U}_{k-1} \quad (4.16b)$$

Les contraintes d'entrée et de sortie peuvent être représentés comme suit:

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \\ \Lambda \\ -\Lambda \end{bmatrix} \Delta U_n \leq \begin{bmatrix} U_{max} \\ -U_{min} \\ Y_{max} - \Gamma \\ -Y_{min} + \Gamma \end{bmatrix} \quad (4.16c)$$

En effet, les problèmes d'optimisation liés à la commande prédictive appartiennent à la classe des problèmes d'optimisation convexe vu que la fonction de coût (4.16a) et l'ensemble des contraintes admissibles (4.16c) sont convexes [Bazara et al., 1993].

En conséquence, le problème consiste à minimiser une fonction convexe (4.15), sur un domaine convexe (4.16c). Cette minimisation convexe a un minimum global unique seulement si le Hessian de la fonction objectif est définie positive [Fletcher, 1991]. Dans ce sens, l'équation matricielle (4.15) peut être réécrite comme suit:

$$\min \Delta U_n(k)^T H \Delta U_n(k) - P^T \Delta U_n(k) \quad (4.16e)$$

sous les contraintes d'inégalités (4.16c). la matrice de Hessian  $H$  est définie positive si la matrice  $\Lambda$  satisfaite:

$$\text{rank}(\Lambda) = H_u \quad (4.17)$$

D'où, les contraintes (4.16c) peuvent être structurer sous un simple formalisme qui peut être exploiter facilement par des algorithmes d'optimisation:

$$A \Delta U_n(k) \leq b \quad (4.18)$$

Pour transformer le critère non linéaire (4.16e) sous une forme LMI, le complément de Schur est utilisé [Boyd *et al.*, 1994]. Ce formalisme permet de minimiser une fonction de coût linéaire sous contraintes LMI:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & F(x) < 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

où  $F(x)$  est une matrice symétrique dépendent du variable  $x$  et  $c$  est un vecteur réelle. la solution est donc de minimiser le terme linéaire " $c^T x$ ".

L'équation (4.15) peut être transformé sous forme de contraintes LMI en utilisant le complément de Schur comme suit [Bououden *et al.*, 2012]:

Min  $\gamma \in R^+$

Subject to:

$$\begin{bmatrix} 2 \left[ (\Gamma - Y_{ref})^T Q_1 \Lambda - \bar{U}_{k-1}^T \right] \Delta U_n + J_{min} + \gamma & \Delta U_n^T \\ \Delta U_n & -[\Lambda^T Q_1 \Lambda + R_1 + S_1]^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

Les contraintes d'entrée et de sortie (B.14), donnée dans l'annexe B peuvent être représentés sous une forme diagonale par la définition des matrices symétriques dans l'espace convexe. Par conséquent, la forme définitive du problème en termes d'LMI est le suivant:

Min  $\gamma \in R^+$

Subject to:

$$\begin{bmatrix} 2 \left[ (\Gamma - Y_{ref})^T Q_1 \Lambda - \bar{U}_{k-1}^T \right] \Delta U_n + J_{min} + \gamma & \Delta U_n^T \\ \Delta U_n & -[\Lambda^T Q_1 \Lambda + R_1 + S_1]^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

$$\text{diag}(I \Delta U_n - U_{max}) \leq 0$$

$$\text{diag}(-I \Delta U_n + U_{min}) \leq 0$$

$$\text{diag}(\Lambda \Delta U_n - Y_{max} + \Gamma) \leq 0$$

$$\text{diag}(-\Lambda \Delta U_n + Y_{min} - \Gamma) \leq 0 \quad (4.22)$$

Dans la section suivante, un modèle réduit de bioréacteur est utilisé pour tester l'application de la stratégie proposée.

## 4.4 Application

Dans cette section, l'approche de conception d'une commande prédictive stabilisante sous contraintes MBPC est appliquée sur un modèle de bioréacteur. Noter que ce type de système est largement utilisé dans les procédés de traitement des eaux usées (stations d'épurations). En réalité ce processus est difficile à modéliser à cause de sa complexité, son caractère non linéaire et de la très grande variabilité de l'eau à l'entrée. Le système considéré est réduit à deux équations d'état non linéaire représentées par:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{ax_1(t)x_2(t)}{x_2(t) + b} - x_1(t)u(t) \\ x_2(t) = -\frac{cax_1(t)x_2(t)}{x_2(t) + b} + (d - x_2(t))u(t) \end{cases} \quad (4.23)$$

où  $x_1(t)$  représente la concentration en biomasse,  $x_2(t)$  est la concentration en substrat et  $u(t)$  est le taux de dilution. Les paramètres  $a, b, c$  et  $d$  sont fixés aux valeurs numériques  $a = 0.5, b = 0.07, c = 0.7, d = 2.5$

### 4.4.1 Mise sous forme multimodèle

Afin d'écrire le système (4.23) sous forme multimodèle de type T-S, on utilise la transformation par secteurs non linéaire permettant l'obtention d'un modèle équivalent au modèle (4.23) [Tanaka et Wang, 2001][Nagy et al., 2010]. Pour ce faire, en observant les non-linéarités du modèle (4.23), on choisit les variables de prémisses:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= -u(t) \\ \xi_2(x) &= \frac{ax_1(t)}{x_2(t) + b} \\ \xi_3(x) &= -u(t) - \frac{cax_1(t)}{x_2(t) + b} \end{aligned} \quad (4.24)$$



un modèle T-S est obtenu sur un compact de l'espace d'état conduisant ainsi à définir les intervalles de variations de  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(x)$  et  $\xi_3(x)$  par  $\xi_1(t) \in [-1, -0.2]$ ,  $\xi_2(x) \in [0.004, 15]$ ,  $\xi_3(x) \in [-1.72, -0.2]$ . les fonctions d'activation locales sont définies par:

$$W_j^0 = \frac{\xi_j - \xi_j^{\min}}{\xi_j^{\max} - \xi_j^{\min}}, W_j^1 = \frac{\xi_j^{\max} - \xi_j}{\xi_j^{\max} - \xi_j^{\min}}, j = 1, \dots, 3 \quad (4.25)$$

où

$$\begin{aligned} \xi_j^{\min} &= \min_{x,t} \{\xi_j(\cdot)\} \\ \xi_j^{\max} &= \max_{x,t} \{\xi_j(\cdot)\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Les fonctions d'appartenance sont alors:

$$\begin{aligned} \mu_1(\xi) &= W_1^0 W_2^0 W_3^0, & \mu_2(\xi) &= W_1^0 W_2^0 W_3^1, & \mu_3(\xi) &= W_1^0 W_2^1 W_3^0, & \mu_4(\xi) &= W_1^0 W_2^1 W_3^1 \\ \mu_5(\xi) &= W_1^1 W_2^0 W_3^0, & \mu_6(\xi) &= W_1^1 W_2^0 W_3^1, & \mu_7(\xi) &= W_1^1 W_2^1 W_3^0, & \mu_8(\xi) &= W_1^1 W_2^1 W_3^1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

compte tenu des valeurs minimales et maximales des variables de prémisse, ce choix conduit à 8 sous modèles définis par:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.2 & 15 \\ -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 15 \\ -1.72 & -0.2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.004 \\ -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.004 \\ -1.72 & -0.2 \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} -1 & 15 \\ -0.2 & -1 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} -1 & 15 \\ -1.72 & -1 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} -1 & 0.004 \\ -0.2 & -1 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} -1 & 0.004 \\ -1.72 & -1 \end{bmatrix} \\ B_i &= B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi le modèle T-S obtenu est:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B u(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (4.28)$$

#### 4.4.2 Commande prédictive MBPC stabilisante

La résolutions des LMIs (4.12) et (4.13) du Lemme 1, permet de calculer la matrice P définie positive en utilisant (4.14) correspondant au modèle du bioreacteur (4.28).

les résultats obtenus sont:

$$X = \begin{bmatrix} 634.8383 & 22.1702 \\ 22.1702 & 7.1208 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.0018 & -0.0055 \\ -0.0055 & 0.1576 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= [0.0981 \quad -2.5355], F_2 = [-0.0014 \quad -0.0234], F_3 = [-0.0014 \quad -0.0234], \\
 F_4 &= [-0.0014 \quad -0.0234], F_5 = [-0.0013 \quad -0.0240], F_6 = [-0.0014 \quad -0.0234], \\
 F_7 &= [-0.0012 \quad -0.0203], F_8 = [-0.0014 \quad -0.0234]
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

La matrice  $P$  trouvée est utilisée pour construire la fonction de Lyapunov (4,5), pour formuler la contrainte de stabilité (4,8). La commande prédictive stabilisante sous contraintes MBPC est appliquée sur le model de bioréacteur dans le cadre d'une poursuite de trajectoire pour  $x_1$  et  $x_2$ .

L'implantation est faite avec les paramètres suivants :

- L'horizon de prédiction  $N_p$  est fixé à 12.
- L'horizon de commande  $N_c$  est fixé à 3.
- Contraintes sur la commande  $\begin{cases} u_{max} = 0.5 (h^{-1}) \\ u_{min} = 0.2 (h^{-1}) \end{cases}$
- Contraintes sur la sortie  $\begin{cases} y_{1max} = 4 (h^{-1}) & y_{2max} = 3 (h^{-1}) \\ y_{1min} = 0.1 (h^{-1}) & y_{2min} = 0.1 (h^{-1}) \end{cases}$
- Période d'échantillonnage : 10min
- Les matrices de pondération de la fonction cout (4,2), sont choisies comme suit:

$$Q = 4, R = 0.5, S = 0.54 \tag{4.30}$$

Les résultats de simulation avec les conditions initiales  $x_1 = 0.1, x_2 = 2.5$  sont illustrés sur les figures 4.3 , 4.4 , 4.5 et 4.6. Les fonctions d'appartenance associées aux états et à la commande sont illustrées sur la figure 4.7.

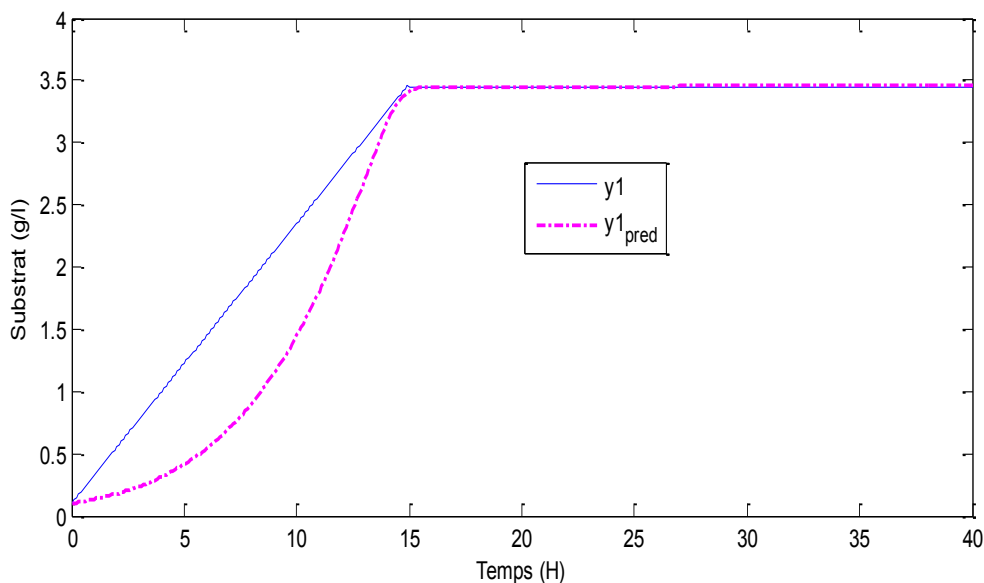


Figure 4.3- Evolution de la sortie  $y_1$ .

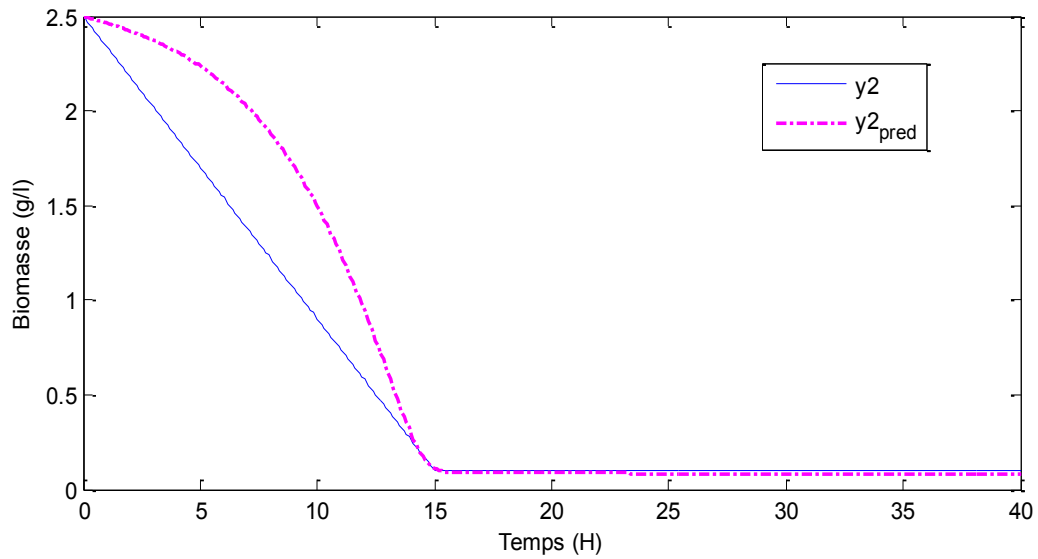


Figure 4.4 - Evolution de la sortie  $y_2$ .

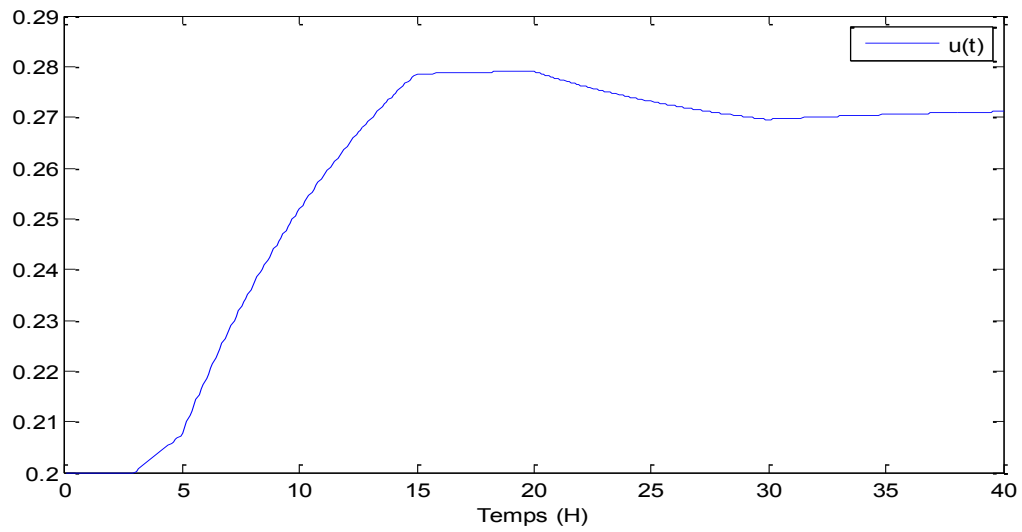


Figure 4.5 - Evolution de la commande  $u$

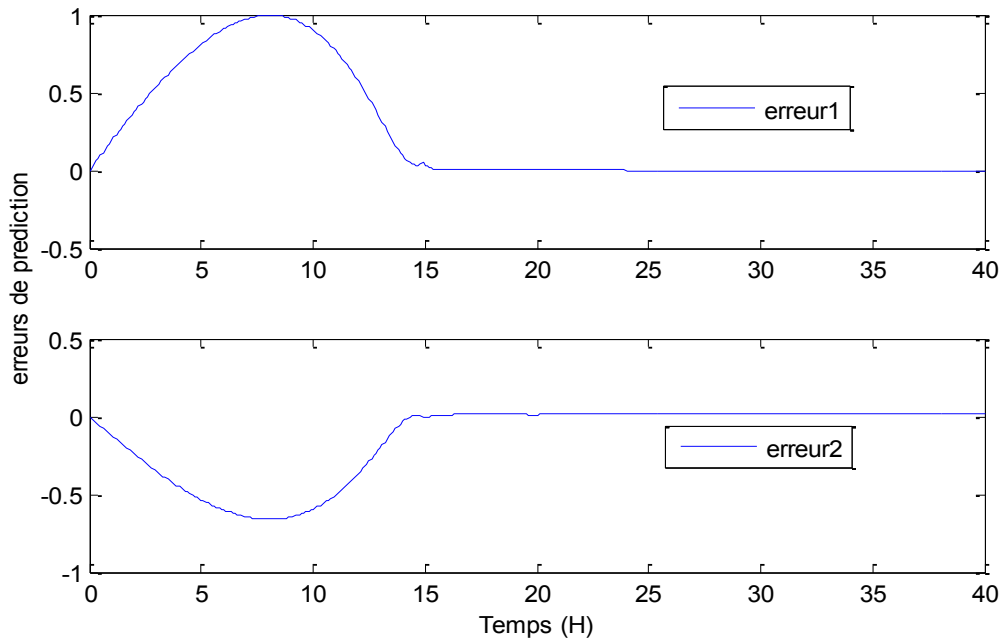


Figure 4.6 - Evolution des erreurs de prédiction.

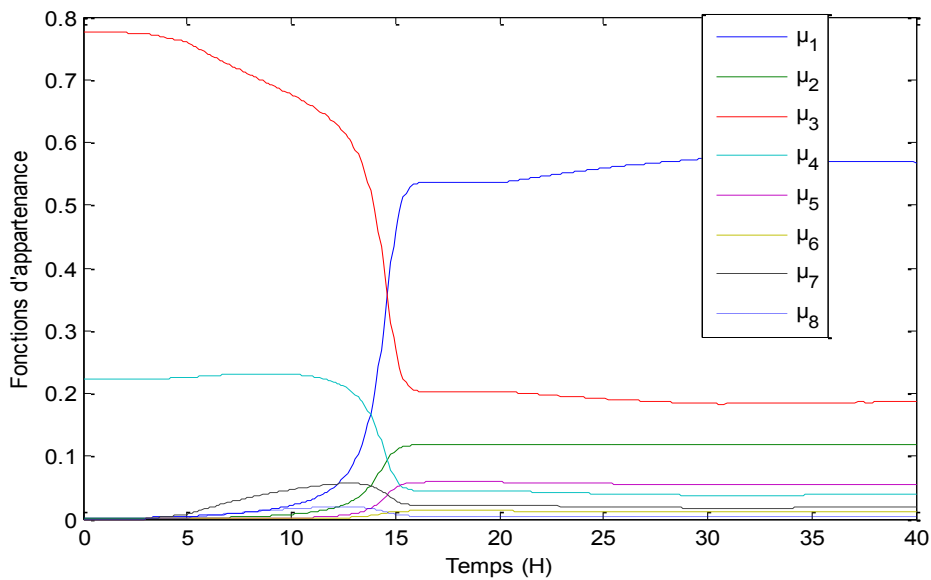


Figure 4.7- Evolution des fonctions d'appartenance.

D'après les figures, les résultats obtenus sont tout à fait encourageants : en effet les contraintes sur la commande sont respectées et la dynamique de la réponse, temps de réponse et dépassement, est de bonne qualité. La loi de commande proposées ont donc jusqu'ici été validée en simulation dans une configuration nominale, en supposant qu'il n'y avait pas d'erreur de modèle entre le système – le bioréacteur réel – et le modèle utilisé pour la

synthèse de la commande. Or, dès lors que l'objectif final est l'implantation de la structure de commande sur un bioréacteur réel, de nombreuses sources d'incertitudes et de perturbations vont se manifester, en particulier une mauvaise connaissance des paramètres du système et l'influence de bruits de mesures. En effet, en pratique, le modèle ne reflète jamais parfaitement le système, surtout dans le domaine des bioprocédés. La modélisation des bioprocédés en général reste une tâche difficile, et les modèles de commande utilisés sont toujours simplifiés.

## **4.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux méthodologies de solution pour la commande prédictive floue stabilisante à base de modèle d'état. Nous avons analysé la solution basée sur la combinaison de la commande prédictive sous contraintes et l'approche LMI. La faisabilité de l'algorithme MBPC sous contraintes est assurée, si les conditions LMI spécifiques sont résolues. Une contrainte supplémentaire sur la commande appliquée est utilisée pour assurer la diminution d'une fonction de Lyapunov quadratique, ainsi la stabilité exponentielle est garantie. L'application de l'approche proposée sur un procédé biologique a permis d'obtenir des résultats satisfaisants pour la poursuite de trajectoire.

*"La science comporte des savoirs jamais définitivement acquis et des questionnements incessants sur chaque parcelle d'inconnu et de connu. Le bon sens n'est qu'un ramassis de préjugés"*  
*Albert Einstein*

## **Conclusion générale et perspectives**

---

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse apportent sur deux contributions principales : La première porte sur l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  pour les problèmes d'estimation d'état, de diagnostic et de commande tolérante aux défauts des systèmes non linéaires, ces derniers étant représentés à l'aide d'un modèle de Takagi-Sugeno. Deux cas peuvent être considérés : les modèles T-S incertains et perturbés à variables de décision mesurables et les modèles T-S à variables de décision non mesurables. La plus grande partie des travaux développés porte sur les systèmes non linéaires décrits par un modèle T-S à VDNM. Une deuxième contribution concerne la proposition d'une stratégie de commande prédictive stabilisante. L'algorithme développé repose sur la dérivation de conditions de faisabilité sous forme de contraintes d'inégalité matricielle.

Nous avons commencé par introduire les concepts élémentaires de l'estimation et de la commande des systèmes T-S, notamment pour les classes des systèmes T-S standards (explicites). L'approche multimodèle a été choisie pour les nombreux avantages qu'elle apporte au niveau de l'analyse de stabilité et de la synthèse de contrôleurs/observateurs. Cette structure a fait l'objet de nombreuses études dans différents domaines comme l'identification, la commande ou l'estimation d'état. Par la suite un bref aperçu des principaux travaux de la littérature sur la synthèse d'une loi de commande tolérante aux défauts été présenté.

Dans le contexte d'une commande tolérante aux défauts des systèmes T-S incertains et perturbés, une approche utilisant la loi de commande nominale a été proposée. La nouvelle loi de commande est alors composée de la commande nominale à laquelle sont ajoutés deux termes relatifs au défaut et à une erreur de poursuite d'état entre le système réel et un modèle de référence. Les deux termes ajoutés nécessitent la connaissance du vecteur d'état pour réaliser la poursuite de trajectoire et la connaissance du défaut afin de le compenser. La nécessité de connaître l'évolution temporelle des défauts nous a amené à considérer un observateur appelé observateur Proportionnel-Intégral dédié aux systèmes T-S incertains /perturbés affectés par des défauts. Son avantage principal réside dans l'estimation

simultanée de l'état et des défauts et tient en compte la présence d'incertitudes de modélisation. De plus, il fournit une meilleure estimation de ces dernières au moyen d'une action intégrale améliorant l'estimation d'état.

L'application des résultats évoqués dans ce mémoire au modèle ASM1 d'une station d'épuration débouche sur : une linéarisation du modèle ASM1 réduit en basant sur la notion de l'analyse de sensibilité, la construction d'un multimodèle équivalent au modèle initial choisi et finalement, la synthèse de la loi de commande tolérante aux défauts exposés en chapitre 2. Cette étude basée sur des données générées par un simulateur communément utilisé dans la communauté de traitement des eaux (modèle ASM1, de dimension 11) montre des résultats encourageants quant à l'application des méthodes proposées pour la commande tolérante aux défauts de STEP.

Finalement, une stratégie de commande prédictive à base de modèle a été suggéré. L'approche permet d'assurer la stabilité exponentielle du système MBPC en boucle fermé tout en basant sur l'addition d'une contrainte de stabilité. Les conditions de faisabilité ont été obtenues se forme de LMI.

Les résultats proposés dans cette thèse ouvrent un certain nombre de perspectives :

- la structure de la commande tolérante aux défauts proposée dans ce mémoire a une forme multimodèle. Il serait intéressant d'explorer d'autres structures, notamment une forme linéaire qui réduirait le nombre de LMIs à résoudre. L'objectif serait de proposer une commande moins contraignante, facile à implémenter et garantissant les spécifications d'un cahier des charges.
- la construction d'un observateur à gain proportionnel multi-intégral (en remplaçant la seule action intégrale par une chaîne d'actions intégrales) permettant de prendre en compte des formes plus générales de défauts.
- l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non quadratique. Celle-ci permet notamment d'obtenir les conditions de stabilité globale les moins conservatives à ce jour.
- l'extension des résultats obtenus dans le cadre de l'application de l'estimation et du diagnostic de STEP avec le modèle ASM1 à six états au modèle complet.





## Références bibliographiques

---

### A

[Aouaouda et al., 2010a] S. Aouaouda, M.T Khadir, G. Mourot, J. Ragot, “ Analyse des interactions et des couplages dans un modèle de réacteur à boues activée ”, *In 1er Colloque International Francophone, Ingénierie et Environnement, CIFIE, Annaba, Algérie, 18-19 Octobre, 2010.*

[Aouaouda et al., 2010b] S. Aouaouda, M.T Khadir, G. Mourot, J. Ragot, “ Linéarisation d’un modèle de réacteur à boues activée ”, *In the Second International conference on Image & Sgnal Processing and their Applications, ISPA, Biskra, Algérie, 6-8 Décembre 2010.*

[Aouaouda et al., 2010c] S. Aouaouda, M.T Khadir ,G. Mourot, J. RAGOT, “ A Systematic Approach for Linearizing an Activated Sludge Reactor”, *In 11th international Conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering, STA, Monastir, Tunisia, 19-21, December, 2010.*

[Aouaouda et al., 2011a] S. Aouaouda, M.T. Khadir, T. Bouarar, D. Ichalal, and M. Chadli “ Fault tolerant tracking controller design for T-S disturbed systems with uncertainties subject to actuator faults”, *in 16 th International conference on Emerging Technologies and factory automation, ETFA'2011, September 5-9, Toulouse, France, pp.1-8 (DOI: 10.1109/ETFA.2011.6059077).*

[Aouaouda et al., 2011b] S. Aouaouda, M.T. Khadir, G. Mourot, J. Ragot, “Systematic simplification methodology applied to an activated sludge reactor model”, *in 7th IEEE International Workshop on System, Signal Processing and their application, WOSSPA'11, Tipaza, Algeria, pp.143 - 146.(DOI: 10.1109/WOSSPA.2011.5931435)*

[Aouaouda et al., 2012] S. Aouaouda M. Chadli, M.T. Khadir , T. Bouarar," Robust fault tolerant tracking controller design for unknown inputs T-S models with unmeasurable premise variables", *J. Process Control (2012), DOI:10.1016/j.jprocont.2012.02.016.*

[Akhenak et al., 2004c] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, et D. Maquin. “State estimation of uncertain multiple model with unknown inputs,” *43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantic, Bahamas, 2004.*

[Akhenak , 2004] A. Akhenak. “Conception d’observateurs non linéaires par approche multi-modèle: application au diagnostic,” *Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine,Nancy, France. 2004.*

[ALCATRAZ , 2001] G.V.Alcatraz , “Estimation et Commande Robuste Non Linéaire des Procédés Biologiques de Dépollution des Eaux Usées : Application à la Digestion Anaerobie, “ [Rapport] : *Thèse de doctorat. - Perpignan : [s.n.], 2001.*

[Alex *et al.*,1999] J. Alex , J. F.Beteau, J. B.Copp, C. Hellinga, U.Jeppsson, S. Marsili-Libelli, , M. N. Pons, H. Spanjers, et H.Vanhooren, “ Benchmark for evaluating control strategies in wastewater treatment plants ,” *In European Control Conference*, Karlsruhe, Germany. 1999.

[Angelis, 2001] G. Z Angelis, “ System Analysis, Modeling and Control with Polytopic Linear Models,” *PhD thesis*, Technische Universiteit Eindhoven, Pays Bas. 2001.

## B

[Bara, 2001] G. I Bara ,“Estimation d’état des systèmes linéaires à paramètres variants,” *PhD thesis*, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France. 2001.

[Bazaraa *et al.*, 1993] Bazaraa MS, Sherali HD, Shetty CM. Nonlinear Programming. Theory and algorithms. 2nd ed. John Wiley and Sons; 1993.

[Belarbi *et Megri*.2007] K. Belarbi, F. Megri, “A stable model-based fuzzy predictive control based on fuzzy dynamic programming,” *IEEE Trans. Fuzzy systems* 15 (4) (2007) 746–754.

[Bellman *et Zadeh* ,1970] R.E. Bellman, L. Zadeh, “Decision-making in a fuzzy environment, Manage,” *Sci.* 17 (1970) 141–164.

[Benhalla *et al.*,2010] A. Benhalla, M.Houssou, M. Charif ,“ Linearization of the full activated sludge model No1for interaction analysis,” *Bioprocess Biosyst Eng*, DOI 10.1007/s00449-009-0404-z, 2010.

[Bergsten *et al.*, 2002] P. Bergsten, , R.Palm, et D. Driankov, “ Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems,” *EEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, 32:114–121. 2002.

[Blanke *et al.*, 2003] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, et M. Staroswiecki. Diagnosis et “fault-tolerant control,” *Springer-Verlag*, 2003.

[Blanke *et al.*, 1997] M. Blanke, R. Azadi-Zamanabadi, SA. Bgh, et CP. Lunau. “ Fault tolerant control systems,”. *Control Eng. Prcatice*, pages 693:702, 1997.

[Blazic *et Skrjanc*,2007] S. Blazic, I. Skrjanc, “Design and stability analysis of fuzzy model-based predictive control-a case study,” *J. Intelligent Robotic Syst.* 49 (3) (2007) 279–292.

[Bonarini,1996] A. Bonarini, “ Evolutionary Learning of Fuzzy Rules: Competition and Cooperation. W. Pedryez, editor, Fuzzy Modelling: Paradigms and Practice,” *Kluwer Academic Press*, pp.265-284. 1996.

[Bouarar, 2009] T. Bouarar, “Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés,” *PhD thesis*, Université de Reims Champagne Ardenne, Reims, France. 2009.

[Bououden *et al.* ,2012] S. Bououden, M. Chadli, S. Filali, A. El Hadjaji, Fuzzy model based multivariable predictive control of a variable speed wind turbine: *LMI approach, Renewable Energy*, 37 (2012) 434-439.

[Boulkroune *et al.*, 2008] A. Boulkroune, M. Tadjine, M. M'Saad, et M. Farza, “ How to design a fuzzy adaptive controller based on observers for uncertain affine nonlinear systems,” *Fuzzy Sets and Systems*,159(8) :926–948. 2008.

[Boulkroune, 2008] B.Boulkroune, “Estimation de l'état des systèmes non linéaires µa temps discret. Application à une station d'épuration ,”. *PhD thesis*, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France. 2008.

[Boulkroune *et al.*, 2010a]. A. Boulkroune, M. M'Saad, et M. Farza, “ Adaptive fuzzy controller for multivariable nonlinear state time-varying delay systems subject to input nonlinearities,” *Fuzzy Sets and Systems*, 164 (1), 45–65, February, 2011.

[Boulkroune *et al.*, 2010b]. A. Boulkroune, M. Tadjine, M .M'Saad, et M. Farza, “ Fuzzy adaptive controller for MIMO nonlinear systems with known and unknown control direction,” *Fuzzy Sets and Systems*, 161(6) :797–820. Theme : Fuzzy Control. 2010.

[Boyd *et al.*, 1994] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, , et V. Balakrishnan, “Linear Matrix Inequalities in system and control theory,” *Studies in Applied and Numerical Mathematics*, Philadelphia. 1994.

## C

[Canler *et al.* ,1999] J. P. Canler, J. M .Perret , P. Duchene , et E. Cotteux , “ Aide au diagnostic des stations d'épuration par l'observation microscopique des boues activées,” *Technical report*, Cemagref, France. 1999.

[Chachuat *et al.*,2003 ] B. Chachuat , N.Roche , et R. Latifi , “ Reduction of the ASM1 Model for Optimal Control of Small-Size Activated Sludge Treatment Plants,” *Revue des Sciences de l'Eau*,16(1): 5–26. In french. 2003.

[Casillas *et al.*, 2005] J. Casillas, O. Cordon, J. Maria, et F.Herrera, “Genetic Tuning of fuzzy rule Deep structures preserving interpretability and its interaction with fuzzy rule set reduction,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 5. 2005.

[Clarke *et al.* ,1987a] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tufs, “Generalized predictive control, part 1. The basic algorithm,” *Automatica* 23 (2) (a1987) 137–148.

[Clarke *et al.* ,1987b] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tufs, “Generalized predictive control, part 2. Extensions and interpretations,” *Automatica* 23 (2) (1987b) 149–160.

[Chadli *et al.*, 2008a] M. Chadli, A. Akhenak, D. Maquin, et J. Ragot. “ Fuzzy observer for fault detection and reconstruction of unknown input fuzzy models,” *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 3, 2008.

[Chen *et Patton*, 2001] J. Chen et R.J. Patton , “Fault-tolerant control systems design using the linear matrix inequality approach,” *Europeen Control Conference*, 10, 2001.

[Chisci et al .,1996] L. Chisci, A. Lombardi, E. Mosca, “Dual receding horizon control of constrained discrete-time systems,” *Eur. J. Control* 2 (1996) 278–285.

## D

[Darouach et al., 1994] M. Darouach, M. Zasadzinski, et S. Xu, “ Full-order observers for linear systems with unknown inputs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3): 606–609. 1994.

[Dubuisson, 1990] B. Dubuisson, “Diagnostic et reconnaissance des formes,”. *Hermes*, Paris. 1990.

## E

[Ekstrom .,2005] P.A. Ekstrom , “A Simulation Toolbox for Sensitivity Analysis in Matlab,” *Proceedings of The 2<sup>nd</sup> International Conference on Radioactivity in the Environment in Nice*, France, ISBN 82-90362-21-8, pp. 361-364. 2005.

[Espinosa at al .,2005] J. Espinosa, J. Vandewalle, V. Wertz, “Fuzzy Logic, identification and Predictive Control,” *Springer*, Berlin, 2005.

## F

[Feng ,2006] G. Feng , “A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems ,” *IEEE Trans. Fuzzy Systems* 14 (5) (2006) 676–697.

[ Fletcher . 1991]Fletcher R. Practical methods of optimization. John Wiley & Sons; 1991.

[Flores et al .,2005] A. Flores, D. Saez, J. Araya, M. Berenguel, A. Cipriano, “Fuzzy predictive control of a solar power plant ,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 13 (1) (2005) 58–68.

## G

[Gao et Antsaklis, 1991] Z. Gao, et P.Antsaklis, “Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems,” *International Journal of Control*, 53(3) :717–729. 1991.

[Gao et Antsaklis , 1992]. Z. Gao, et P. Antsaklis, “ Reconfigurable control system design via perfect model following,” *International Journal of Control*, 56(4) :783–798. 1992.

[Garcia and Morshedi. 1986] Garcia, C.E., and Morshedi, A.M., 1986. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). *Chem. Eng. Commun.*, 46, 73-87. 1986.

[Gasso et al., 1999] K. Gasso, G. Mourot, A. Boukhriss et J. Ragot, “Optimisation de la structure d’un modèle de Takagi-Sugeno,” *Actes des rencontres francophones (LFA)*, Valenciennes, France, 1999.

[Gasso , 2000] K. Gasso, “Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèles,” *Thèse de doctorat de l’INPL*, Décembre, 2000.

[Gertler, 1998] J. Gertler, “ Fault detection and diagnosis in engineering systems,” Marcel Dekker, New York

[Gómez-Quintero, 2002] C. Gómez-Quintero , “ Modélisation et estimation robuste pour un procédé boues activée en alternance de phases,” PhD Thesis. Université Paul Sabatier, Toulouse, France. 2002.

[Gómez-Quintero et al.,2004] C. Gómez-Quintero , I. Queinnec , M. Spérandio , “A reduced linear model of an activated sludge process,” *In: International IFAC Symposium on Computer Applications in Biotechnology (CAB)*, Nancy, France. 2004.

[Gómez and Baeyens, 2005] J. Gómez, E. Baeyens," Subspace-based Identification Algorithms for Hammerstein and Wiener Models ,"*In European Journal of Control*, 11(2) - 2005 - pp.127-136 - doi:10.3166/ejc.11.127-136.

[Gujer et al .,1999 ] W. Gujer, M. Henze, M. Loosdrecht, , et T. Mino , “Activated Sludge Model no.3,” *Water Science and Technology*, 39(1) :183–193. 1999.

[Guelton et al.,2009] K. Guelton, T. Bouarar, N. Manamanni, “ Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems- A descriptor redundancy approach,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160, no. 19, pp. 2796-2811, October 2009.

[GONZALEZ ,2001] Gonzalez Victor Alcaraz Estimation et Commande Robuste Non Linéaire des Procédés Biologiques de Dépollution des Eaux Usées : Application à la Digestion Anaérobie : Thèse de doctorat. - Perpignan , 2001.

## H

[Henrion et Garulli, 2004] D. Henrion and A. Garulli, “*Stabilization of LPV Systems*,” *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, 2004.

[Henze et al ., 1999 ] M.Henze , W. Gujer, T.Mino, T .Matsuo, M. C. Wetzel, G. Marais , et M. C. Van Loosdrecht , “Activated sludge process model no. 2d,” *Water Science and Technology*, 39(1) :165–182. 1999.

## I

[Ichalal et al., 2008b] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, et D. Maquin, “ Multi-observateurs à entrées inconnues pour un système de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables,” *In 5<sup>ème</sup> Conférence Internationale Francophone d’Automatique*, Bucarest, Roumanie. 2008.

[Ichalal et al .,2009a] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, et D. Maquin “ An approach for the state estimation of Takagi-Sugeno models and application to sensor fault diagnosis,” *In 48<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, China. 2009.

[Ichalal et al .,2009b] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, et D. Maquin “ Simultaneous state and unknown inputs estimation with PI and PMI observers for Takagi-Sugeno model with

unmeasurable premise variables,” In *Mediterranean Conference on Control and Automation*, Thessalonique, Grèce. 2009.

[Ichalal *et al.* , 2009c] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, et D. Maquin “State estimation of nonlinear systems using multiple model approach,”. In *American Control Conference*, St. Louis, Missouri, USA. 2009.

[Ichalal, 2009] D. Ichalal, “ Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno,” *PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine*, Nancy, France. 2009.

[Ichalal *et al.* ,2010] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, et D. Maquin “State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables,” *IET Control Theory & Applications*, 4(5) :897–908. 2010.

[Iooss, et Ribatet, 2009] B. Iooss ,et M. Ribatet , “Global sensitivity analysis of computers models with functional inputs,” *Reliability Engineering & System Safety*. 2009.

## J

[Jacques, 2005] J. Jacques , “Contributions à l’analyse de sensibilité et à l’analyse discriminante généralisée,” *Thèse de l’Université Joseph Fourier*. 2005.

[Jeppsson et Olsson, 1993] U. Jeppsson, G. Olsson , “Reduced order models for on-line parameter identifications of the activated sludge process,” *Water Science Technology*, Vol.28, No.11/12, pp.173–183. 1993.

[Jiang *et al.*, 2006] B. Jiang, M. Staroswiecki, et V. Cocquempot, “ Fault accommodation for nonlinear dynamic systems,” *IEEE Transactions on Automatic Contontrol*, 51, 2006.

[Julien, S. 1997.] S. Julien , “Modélisation et estimation pour le contrôle d’un procédé boues activées éliminant l’azote des eaux résiduaires urbaines,” *PhD thesis*, Institut National Polytechnique de Toulouse, France. 1997.

[Julien *et al.* , 1999 ] S. Julien , P. Lessard , JP.Babary , “ A reduced order model for control of a single reactor activated sludge process ,” *Math Comp Modell Dyn Syst*, Vol. 5, No.4, pp.337–350. 1999.

## K

[Kawamoto *et al.*, 1992] S. Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame et T. Taniguchi, “An approach to stability analysis of second order fuzzy systems,” *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*: 1427–1434. 1992.

[Keerthi et Gilbert ,1988] S.S. Keerthi, E.G. Gilbert, “Optimal infinite horizon feed-back laws for a general class of constrained discrete time systems: stability and moving-horizon approximations,” *J. Optim. Theory Appl.* 57 (1988) 265–293.



[Khadir. 2002] Khadir .M.T " Modelling and Predictive Control of a Milk Pasteurisation Plant" Ph.D Thesis, Control System Group, School of Electronic Engineering, Dublin City University. 2002.

[Khairy et al .,2010] M. Khairy, A.L. Elshafei, Hassan M. Emara , “LMI based design of constrained fuzzy predictive control ,” *Fuzzy Sets and Systems* 161 (2010) 893-918.

## L

[Leith, et al., 2002] D. J.Leith , W. E. Leithead, E. Solak, et Murray-Smith, R ,Divide & conquer ,“ Identification using gaussian process priors,” In *4<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 624–629, Las Vegas, Nevada, USA. 2002.

[Leith. et Leithead , 1999] D. J. Leith, et W. E Leithead,“Analytic framework for blended multiple model systems using linear local models,” *International Journal of Control*, 72(7) :605–619. 1999.

[Liapounoff, 1907] A. Liapounoff, (1907). “Problème général de la stabilité du mouvement,” *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (9):203–474. (traduction en français du mémoire Russe). 1907.

[Luenberger, 1971] D. G. Luenberger, “ An introduction to observers,” *IEEE Transactions on AutomaticControl*, 16 :592–602. 1971.

[Lopez-Toribio et al., 1999] C.J. Lopez-Toribio, R.J Patton, et S. Daley. “ A multiple model approach to fault-tolerant control using takagi-sugeno fuzzy modelling: real applicationto an induction motor drive system,” *Europeen Control Conference*, 1999.

[Leithead , 1999] W .Leithead, “ Survey of gain-scheduling analysis design,” *International Journal of Control*, 73 :1001–1025. 1999.

[Liu, G. et Patton, R, 1998] G. Liu, et R .Patton, “ Eigen structure Assignment for Control Systems Design,” *JohnWiley & Sons*.1998.

## M

[Ma et al., 1998] X. J. Ma, Z. Q. Sun et Y. Y. He, “Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer,” *Transactions on Fuzzy Systems*, 6(1): 41-50, 1998.

[Maciejowski ,2002]J.M. Maciejowski, “Predictive Control with Constraints, Prentice-Hall, Pearson Education Limited ,” *Harlow*, UK. 2002.

[Magni et al .,2001]L. Magni, G. De Nicolao, L. Magnani, R.A. Scattolini, “Stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems,” *Automatica* 37 (2001) 1351–1362.

[Mayne , et al 2000] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, P.O.M. Scockaert, “Constrained model predictive control: Stability and optimality”, *Automatica*, Vol. 36, pp. 789-814, 2000.

[Minoux , 1986] M. Minoux , “Mathematical Programming, Theory and Practice,” *Wiley*, New York. 1986.

[Mayne et al ,2000] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, P.O.M. Scokaert, “Constrained model predictive control: stability and optimality ,” *Automatica* 36 (2000) 789–814.

[Mollov et al., 2002] S. Mollov, T. Van den Boom, F. Cuesta, A. Ollero, R. Babuska , “Robust stability constraints for fuzzy model predictive control,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 10 (1) (2002) 50–64.

[Morère, 2001] Y. Morère, “Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno,” *Thèse de doctorat*, LAMIH-SF, de l’Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2001.

[Murray-Smith et Johansen, 1997] R. Murray-Smith, et T. A. Johansen, “ Multiple model approaches to modeling and control,” *Taylor & Francis*, London. 1997.

[Mulas et al .,2007] M. Mulas , S.Tronci, , et R. Baratti , “ Development of a 4-measurable states activated sludge process model deduced from the ASM1,” In *8th International IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, volume 1, pages 213–218, Cancun, Mexico. 2007.

## N

[Nagy et al., 2011] Nagy, A .M. Kiss, B. Marx, G. Mourot, G. Schutz, J. Ragot, “ Observer design for uncertain Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. Application to a wastewater treatment plant,” *Journal of Process control*, Vol.21, No.7, pp 1105-1114. 2011.

[Nagy ,2010 ] A. M. Nagy , “ Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d’épuration,” *PhD thesis*, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France. 2010.

[Nagy et al., 2010 ] A.M.Nagy , G.Mourot , J.Ragot , “Systematic Multimodeling Methodology Applied to an Activated Sludge Reactor Model,” *Ind. Eng. Chem. Res*, Vol.49, No.6, pp. 2790–2799. 2010.

[Niemann et Stoustrup, 2003] H. Niemann et J. Stoustrup.“ Passive fault tolerant control of double inverted pendulum-a case study example,” *Symposium Safeprocess*, 10 :1029:1034, 2003.

[Noura et al., 2000] H. Noura, D. Sauter, F. Hamelin, et D. Theilliol.“ Fault-tolerant control in dynamic systems : Application to a windingmachine,” *IEEE Control Systems Magazine*, 20, 2000.

## O

[Olsson et Newell 1999] G. Olsson, et B. Newell , “Wastewater Treatment Systems. Modelling,” *Diagnosis and Control*. IWA Publishing. 1999.



[Oudghiri, M, 2008] M. Oudghiri, “ Commande multimodèles tolérante aux défauts : application au contrôle de la dynamique d’un véhicule automobile,” *Thèse de doctorat*, Université de Picardie JulesVerne, Amiens, France. 2008.

[Oustaloup et Mathieu, 1999] A. Oustaloup et B. Mathieu “La commande crone” *Hermès Science Publications*, Paris, 1999.

## P

[Patton *et al.*, 1998] R. J. Patton, J. Chen, et C. J. Lopez-Toribio. “ Fuzzy observer for nonlinear dynamic systems fault diagnosis,” *IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA. 1998.

[Patton et Frank, 2000]. R. J. Patton, et P. M .Frank, “ Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems,” *Springer*.2000.

[Patton, 1997] R. J. Patton. “ Fault tolerant control,” *IFAC SAFEPROCESS'97*, 2 :1033 :1055, 1997.

[Patton et Lopez-Toribio, 2000] R.J. Patton et C.J. Lopez-Toribio. “ Multiple-model fault tolerant control of an induction motor in the presence of uncertainty,” *IFAC SAFEPRO-CESS*, 2000.

[Pekpe *et al.* , 2007 ] K. M.Pekpe, J. P.Cassar, et S.Cheniker , “Identification of Takagi-Sugeno model of a bioreactor,” In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, London, UK. Imperial College. 2007.

## Q

[Queinnec et Gómez-Quintero, 2009] I. Queinnec , C .Gómez-Quintero, “Reduced Modeling and State Observation of an Activated Sludge Process,” *Biotechnol, Prog.* Vol.25, No.3, pp.654-666. 2009.

## R

[Ragot *et al.* , 2001] J. Ragot , G. Grapin, P. Chatellier , et F.Colin , “Modelling of a water treatment plant. A multi-model representation,” *Environmetrics*, 12(7) :599–611. 2001.

[Rodrigues, 2005] M .Rodrigues, “ Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires,” *Thèse de doctorat*, Université Henri Poincaré (UHP), Nancy, France. 2005.

[Rodrigues *et al.*, 2007] M. Rodrigues, D. Theilliol, S. Aberkane, et D. Sauter, “ Fault tolerant control design for polytopic lpv system,” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17, 2007.

## S

[Saltelli *et al.* ,2000 ] A. Saltelli , K. Chan , et E.M. Scott, editors. *Sensitivity analysis*. Wiley. 2000.

[Sobol, I.M. 1993] I.M. Sobol, "Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models", *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, vol.1, pp. 407–414. 1993.

[Scokaert et al.,1999] P.O.M. Scokaert, D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, "Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability) ," *IEEE Trans. Autom. Control* 44 (3) (1999) 648–654.

[Smets et al., 2003] I. Y.Smets , J. V.Haegebaert, R. Carrette , et J. F. Van Impe, Linearization of the activated sludge model ASM1 for fast and reliable predictions. *Water Research*, 37 :1831–1851. 2003.

[Smets et al ., 2006 ] I. Y. Smets , L. Verdickt, et J. Van Impe , "A linear ASM1 based multi-model for activated sludge systems," *Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems*,12(5) :489–503. 2006.

[Staroswiecki, 2005] M. Staroswiecki, " Fault tolerant control the pseudo-inverse method revisited," In *16thIFAC World Congress*, Seoul, Korea. 2005.

[Steffens et al ., 1997 ] M. A. Steffens, P. A. Lant , et R. B. Newell , "A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatment models," *Water Research*, 31(3) :590–606. 1997.

## T

[Takagi et Sugeno,1985] T.Takagi et M .Sugeno , " Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15 :166–172.1985.

[Tanaka et Wang ,2001] K. Tanaka, et H. O. Wang , " Fuzzy Control System Design and analysis. A Linear Matrix Inequality Approach ," *John Wiley & Sons Inc.*2001.

[Tanaka et Sugeno, 1992] K. Tanaka et M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, 45(2): 135-156,1992.

[Tanaka et al., 1998] K. Tanaka, T. Ikeda et H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs," *Transactions on Fuzzy Systems*, 6 (2), May 1998.

[Tanaka et al., 2007] K. Tanaka, H. Ohtake, H.O. Wang, "A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions," *Transaction on Fuzzy Systems*, 15(3): 333- 341, 2007.

[Tarantola et al .,2006] S.Tarantola , D.Gatelli , T.A.Mara , "Random balance design for the estimation of first order global sensitivity indices," *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 91, pp. 717-727. 2006

## V

[Van der Schaft, 1992] A. Van der Schaft, “L<sub>2</sub> - gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback  $H_{\infty}$  control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):770–784. 1992.

## W

[Wang et al., 1996] H. O. Wang, K. Tanaka et M. Griffin, “An approach to fuzzy control of non linear systems: Stability and design issues,” *Transactions on Fuzzy Systems*, (4): 14-23, 1996.

[Weinmann, 1991] A. Weinmann, “Uncertain models and Robust Control,” *Springer-Verlag Wien, NewYork*. 1991.

[Weijers, 2000] S. R. Weijers , “Modelling, identification and control of activated sludge plants for nitrogen removal,” *PhD thesis*, Technische Universiteit Eindhoven, Pays Bas. 2000.

## Y

[Yoneyama, J, 2009] J .Yoneyama, “  $H_{\infty}$  filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables: An uncertain system approach,” *Fuzzy Sets and Systems*, 160(12) :1738–1748. 2009.

## Z

[Zerar et al., 2009] M. Zerar, F. Cazaurang and A. Zolghadri, “Coupled LPV and Flatnessbased Approach for Space Reentry Vehicles Guidance,” *Control Theory and Applications* 3(8)1081-1092, 2009.

[Zhou et Doyle, 1998] K. Zhou et J. C. Doyle. “Essentials of robust control,” *Prentice Hall*, 1998.

[Zhou et Khargonekar, 1988] K. Zhou and P.P. Khargonekar, “Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty,” *Systems Control Letters*, 10: 17-20, 1988.

[Zhou et Doyle, 1996] K. Zhou and J.C. Doyle, “Robust optimal control”, *Printice Hall Int. Ed.*, New Jersey, 1996.

## Transformations matricielles

Une source de conservatisme peut provenir de l'interaction engendrée par les modèles croisés dans les conditions de stabilité LMI. Plusieurs solutions ont été proposées afin de réduire cette source de conservatisme. Parmi ceux-ci, nous adoptons le lemme suivant :

**Lemme 2.1 :** [Tuan et al., 2001]

Pour  $j = 1, \dots, r$ ,  $\forall \mu_i > 0$ ,  $\forall \mu_j > 0$ , la condition  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \mathfrak{S}_{ij} < 0$  si les conditions suivantes le sont

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{ii} < 0, i = 1, \dots, r \\ \frac{2}{r-1} \mathfrak{S}_{ii} + \mathfrak{S}_{ij} + \mathfrak{S}_{ji} < 0, i, j = 1, \dots, r, i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

**Lemme 2.2 :**

Soient  $W(x)$  et  $N(x)$  deux matrices de dimensions appropriées, l'inégalité suivante est vérifiée s'il existe  $Q > 0$  ou  $\tau > 0$  tels que :

$$W(x)(N(x))^T + N(x)(W(x))^T \leq \tau W(x)(W(x))^T + \frac{1}{\tau} N(x)(N(x))^T \quad (\text{A.2})$$

$$W(x)(N(x))^T + N(x)(W(x))^T \leq W(x)Q(W(x))^T + N(x)Q^{-1}(N(x))^T \quad (\text{A.3})$$

Le but des propriétés (A.2) et (A.3) est de pouvoir éliminer les termes anti-diagonaux dans une matrice symétrique et de les ramener dans les blocs diagonaux. Cette transformation permet de réécrire certains problèmes non convexes en termes de LMI. L'exemple suivant permet d'illustrer le principe de cette transformation.

### Exemple

Soient les matrices  $N(x)$ ,  $M(x)$ ,  $Q(x)$  et  $R(x)$  de dimensions appropriées, formant la matrice bloc suivante :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & (N(x))^T (M(x))^T \\ M(x)N(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.4})$$

Notre objectif est de ramener les termes  $M(x)$  et  $N(x)$  sur la diagonale. Ainsi, (A.4) peut être réécrite :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & 0 \\ 0 & R(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(x) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N(x))^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (M(x))^T \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.5})$$

En appliquant (A.2), on obtient

$$\begin{bmatrix} Q(x) & (N(x))^T (M(x))^T \\ M(x)N(x) & R(x) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} Q(x) + \frac{1}{\tau} (N(x))^T N(x) & 0 \\ 0 & R(x) + \tau M(x) (M(x))^T \end{bmatrix} < 0$$

### Programme d'optimisation quadratique

Cette section résume la méthodologie de construction du programme quadratique (QP) sous contraintes, à chaque pas d'échantillonnage.

La procédure suivante peut être utilisée [Espinosa et al.,2005]:

Supposons que les prédictions de sortie peuvent être représentée comme suit:

$$Y_n = \Gamma + \Lambda U_n \quad (\text{B.1})$$

où  $Y_n \in \mathbb{R}^{N_p n_0}$ ,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{N_p n_0}$ ,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{N_p n_0 \times (N_c + 1)n_i}$ , et  $U_n \in \mathbb{R}^{(N_c + 1)n_i}$ .  $n_0$  et  $n_i$  sont respectivement le nombre de sorties et d'entrées du système.  $\Gamma$  est appelé la réponse libre de sortie ( elle ne dépend pas de la séquence de commande), et  $\Lambda U_n$  est appelée la réponse de la sortie forcée car elle dépend de la séquence de commande sélectionné.

*A chaque pas k d'échantillonnage:*

- 1) Calculer la réponse libre  $\Gamma$  en posant  $U_n = 0$ , et évaluer les sorties du système de  $k + 1$  à  $k + N_p$  en utilisant le modèle T-S flou discret (4.11).
- 2) Construire les matrices  $A(k)$ ,  $B(k)$ , et  $c(k)$  en utilisant les équations suivantes:

$$\begin{aligned} A(k) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(k)) A_i \\ B(k) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(k)) B_i \\ c(k) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(k)) c_i \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

- 3) Utiliser  $A(k)$ ,  $B(k)$ , et  $c(k)$  pour construire la matrice  $\Lambda$ :

$$\Lambda = [C_n H \ 0] \quad (\text{B.3})$$

où

$$C_n = \begin{bmatrix} c(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c(k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p n_0 \times N_p n_s} \quad (\text{B.4})$$

$$H = \begin{bmatrix} B(k) & 0 & \dots & 0 \\ A(k)B(k) & B(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_p-2}(k)B(k) & A^{N_p-3}(k)B(k) & \dots & \sum_{i=0}^{N_p-N_c-1} A^i(k)B(k) \\ A^{N_p-1}(k)B(k) & A^{N_p-2}(k)B(k) & \dots & \sum_{i=0}^{N_p-N_c} A^i(k)B(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p n_s \times N_c n_i} \quad (\text{B.5})$$

où  $n_s$  est l'ordre du système.

4) Le PQ est

$$\mathfrak{J}(U_n) = J_{min} + 2 \left[ (\Gamma - Y_{ref})^T Q_1 \Lambda - \bar{U}_{k-1}^T S_1 \Delta \right] U_n + U_n^T [\Lambda^T Q_1 \Lambda + R_1 + \Delta^T S_1 \Delta] U_n \quad (\text{B.6})$$

où

$$J_{min} = Y_{ref}^T Q_1 Y_{ref} + \Gamma^T Q_1 \Gamma - 2Y_{ref}^T Q_1 \Gamma + \bar{U}_{k-1}^T S_1 \bar{U}_{k-1} \quad (\text{B.7})$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p n_o \times N_p n_o} \quad (\text{B.8})$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} S & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_c+1)n_i \times (N_c+1)n_i} \quad (\text{B.9})$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_c+1)n_i \times (N_c+1)n_i} \quad (\text{B.10})$$

$$\bar{U}_{k-1} = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_c+1)n_i} \quad (\text{B.11})$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -I & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -I & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_c+1)n_i \times (N_c+1)n_i} \quad (\text{B.12})$$

$Y_{ref}$  est le vecteur des valeurs de référence des sorties pendant l'horizon de prédiction

$$Y_{ref} = \begin{bmatrix} Y_{ref}(k+1) \\ \vdots \\ Y_{ref}(k+N_p) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p n_o} \quad (\text{B.13})$$

Les contraintes d'entrée et de sortie peuvent être représentés comme suit:

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \\ \Lambda \\ -\Lambda \end{bmatrix} U_n \leq \begin{bmatrix} U_{max} \\ -U_{min} \\ Y_{max} - \Gamma \\ -Y_{min} + \Gamma \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

où

$$Y_{min} = \begin{bmatrix} y_{min}(k+1) \\ \vdots \\ y_{min}(k+N_p) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p n_o} \quad (\text{B.15})$$

$$Y_{max} = \begin{bmatrix} y_{max}(k+1) \\ \vdots \\ y_{max}(k+N_p) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p n_o} \quad (\text{B.16})$$

$$U_{min} = \begin{bmatrix} U_{min}(k) \\ \vdots \\ U_{min}(k+N_c) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_c+1)n_i} \quad (\text{B.17})$$

$$U_{max} = \begin{bmatrix} U_{max}(k) \\ \vdots \\ U_{max}(k+N_c) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_c+1)n_i} \quad (\text{B.18})$$

Le QP ((B.6) avec les contraintes ajoutée (B.14)) est résolu pour obtenir la séquence de commande optimale. La même procédure se répète à chaque pas d'échantillonnage. Une contrainte de stabilité devrait être ajoutée aux contraintes d'entrée et de sortie, pour garantir la stabilité asymptotique du système en boucle fermée.



## Résumé :

Cette thèse traite le problème de l'estimation d'état, de commande tolérante aux défauts et de la commande prédictive des systèmes non linéaires représentés par des multi-modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) incertains et/ou perturbés. La difficulté de cette étude provient du fait que le multimodèle utilisé dépend de variables de prémisses non mesurables, situation qui n'est pas intensivement étudiée, alors qu'elle est naturellement issue de l'approche par transformation de système non linéaire vers un multimodèle. La synthèse d'observateurs robustes vis-à-vis des perturbations, des imperfections de modélisation et des entrées inconnues a été présentée en se basant sur un observateur proportionnel intégral (PI). L'observateur PI est utilisé pour estimer simultanément l'état et les défauts du système. Ensuite, une loi de commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire d'un modèle de référence est proposée en exploitant les observateurs PI. Dans ce cadre, une solution basée sur une fonction candidate quadratique de Lyapunov a été développée. Celle-ci permet la synthèse de la loi de commande par la résolution d'un ensemble de contraintes LMIs (Inégalités Linéaires Matricielles) tout en minimisant l'effet des entrées inconnues par la technique  $\mathcal{L}_2$ . En effet, l'écriture classique de la dynamique de la boucle fermée introduit des termes croisés entre la commande et le modèle au sein des conditions LMIs à résoudre. L'utilisation de la propriété de redondance des descripteurs a alors permis de pallier cette source de conservatisme. Enfin, une commande prédictive pour les systèmes flous non linéaires a été proposée. L'approche permet d'assurer la stabilité exponentielle du système en boucle fermée tout en basant sur l'addition d'une contrainte de stabilité. Les conditions de faisabilité ont été obtenues sous forme de LMIs. Les travaux proposés sont appliqués au modèle d'une station d'épuration, Activated Sludge Model No.1, qui est largement utilisé dans le domaine du traitement des eaux usées.

**Mots-clés** . Système non linéaire, Descripteurs, Modèles Takagi-Sugeno, multimodèle, estimation d'état et de défaut, LMI, commande tolérante aux défauts, Commande prédictive, station d'épuration.

## Abstract

This thesis deals with state estimation, fault diagnosis, fault tolerant control, and Model Predictive Control of uncertain and/or disturbed nonlinear systems represented by fuzzy Takagi-Sugeno models. The difficulty of these studies comes from the fact that the multiple model depends on unmeasurable premise variables, this case being not intensively studied, whereas it results naturally from the method of transforming nonlinear system to multiple models. Robust observer's synthesis with respect to perturbations, modeling uncertainties and unknown inputs is afterward presented based on Proportional-Integral (PI) observers. The strategy uses PI observers in order to estimate simultaneously the state and the faults of the system. After that, a fault tolerant control law is proposed by reference trajectory tracking based on the use of PI observers. In this context, results based on a quadratic candidate Lyapunov function have been proposed in terms of LMIs (Linear Matrix Inequalities) using  $\mathcal{L}_2$  optimization to attenuate the unknown inputs effect. Indeed, the classical way to express the closed-loop dynamic leads to introduce crossing-terms in the set of LMIs to be solved. Therefore, to overcome this source of conservatism, the descriptor redundancy property has been used to rewrite the closed-loop dynamic. Finally, Model Predictive Control of nonlinear fuzzy systems is considered. Using LMI technique combined with predictive approach, a control law is designed easily by solving convex optimization problem under stability constraint. The performances of the proposed approaches are pointed out by accentuating on a model of wastewater treatment plant (WWTP) through numerical results.

**Keywords** . Nonlinear systems, Descriptor, TS fuzzy systems, Multi-model, fault and state estimation, LMI, fault tolerant control, Model Predictive Control, wastewater treatment plant

## ملخص

هذه الأطروحة تعالج مشكل تحديد القيم الحالية للنظام و التحكم المضاد للأخطاء و التحكم التنبؤي للأنظمة اللاخطية المعبر عنها بالأنظمة المتعددة الغامضة الغير المؤكدة و المشوشة (نظام تاكاجي سوجينو). الصعوبة في هذه الدراسة ناتجة عن كون نموذج المنظومة المتعددة المستخدمة يعتمد على قيم حالات النظام التي لا يمكن قياسها ، و هو الوضع الذي لم يتم دراسته على نطاق واسع ، في حين أنه نتيجة طبيعية لنهج التحول من النظام اللاخطي إلى الأنظمة المتعددة الغامضة الخطية. و قد تم خلال هذه المذكرة استحداث أنظمة مراقبة ذات بنية تكيفية مع التشويشات و عيوب النمذجة و المدخلات غير المعروفة ، بالاعتماد أساسا على نظام مراقبة نسبي تكاملي. في هذا السياق تم تطوير حل يعتمد على دراسة الدالة المربعة يابونوف. هذا الأخير يسمح بالتوصل لقانون التحكم بناءا على إيجاد حل لمجموعة من القيود ، و هذا بتقليل تأثير المدخلات الغير معروفة بالاعتماد على تقنية  $L_2$  .

أخيرا تم اقتراح نظام تحكم تنبؤي للأنظمة الغامضة اللاخطية. النظام التحكمي المقترح يسمح بضمان الاستقرار الكامل لنظام الدائرة المغلقة من خلال إضافة قيود الاستقرار، شروط التحكم تم التوصل إليها على شكل قيود مصفوفة خطية. البحث المقترح تم تطبيقه على نموذج لمحطة معالجة مياه الصرف .

## مصطلحات

نظام لاخطي ، التحكم المضاد للأخطاء ، أنظمة الرقابة ، الأنظمة المتعددة الغامضة الخطية ، نظام تحكم تنبؤي ، الدالة المربعة يابونوف ، محطة معالجة مياه الصرف