وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar Annaba

Badji Mokhtar University - Annaba

جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3ème cycle en Mathématiques
Option : Probabilités

Chaos de Wiener par rapport au G-mouvement Brownien

Par:
GRABSIA Imen

Devant le jury

Présidente :	DJELLAB Nathalia	Prof.	UBMA
Rapporteur :	BOUTABIA Hacène	Prof.	UBMA
Examinateur :	SPITERI Pierre	Prof.	ENSEEIHT Toulouse
Examinateur :	YOUSFAT Abderrahmane	Prof.	Univ. Sidi Bel Abbes
Examinatrice :	SEDDIK AMEUR Nacira	Prof.	UBMA

Année: 2014

Table des matières

Résumé(Arabe) iii

Abstract iv

Résumé v

Remerciements vi

Introduction viii

1 Généralités sur l'espérance sous linéaire **1**
- 1.1 Espérance sous linéaire 1
  - 1.1.1 Représentation d'une espérance sous-linéaire 3
  - 1.1.2 Distribution et indépendance 4
  - 1.1.3 Distribution $G-$normale 8
  - 1.1.4 Théorème de la Limite Centrale 12

2 $G-$Mouvement Brownien et $G-$intégrale d'Itô **13**
- 2.1 $G-$Mouvement Brownien 13
  - 2.1.1 Existence du $G-$mouvement Brownien et $G-$espérance conditionnelle 16
- 2.2 $G-$Intégrales stochastiques 20
  - 2.2.1 Processus de variation quadratique 25
  - 2.2.2 $G-$formule d'Itô 31

3 Polynômes et moments des $G-$intégrales stochastiques **33**
- 3.1 Résultats préliminaires sur les polynômes 33
- 3.2 $G-$inégalité de Burkholder-Davis-Gundy 35

4 $G-$intégrales stochastiques multiples et chaos **39**
4.1 $G-$intégrales stochastiques multiples 39
4.2 $G-$chaos de Wiener 41
4.3 Preuve de "l'orthogonalité des $\mathcal{Z}_n$" 45
4.4 Preuve du théorème du $G-$Chaos de Wiener 46

Résumé(Arabe)

Abstract

Motivated by uncertainty problems in volatility, Peng proposed the $G-$expectation, as a supremum of expectations with respect to a family of probability measures, that has received very strong attention in recent years, under which the canonical process $(B_t)_{t\geq 0}$ is a $G-$Brownian motion and the related $G-$stochastic calculus was developed. In this thesis, we prove the $G-$Wiener chaos in the framework of sublinear expectation space. Moreover we establish some relationship between Hermite polynomials and $G-$stochastic multiple integrals. An equivalent of the orthogonality of Wiener chaos was found. Further we propose an algebraic method for proving the Burkholder-Davis-Gundy inequality in the case of stochastic integrals with respect to $G-$Brownian motion.

Résumé

Motivé par des problèmes d'incertitude de la volatilité, Peng a proposé la $G-$espérance, comme étant le supremum des espérances classiques pris sur une famille de mesures de probabilités, ayant récemment reçu une très forte attention, en vertu de laquelle le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $G-$mouvement Brownien qui a permis au développement du $G-$calcul stochastique. Dans cette thèse, on démontre le $G-$chaos de Wiener dans le cadre d'un espace d'espérance sous-linéaire. En outre, on établit une relation entre les polynômes d'Hermite et les $G-$intégrales stochastiques multiples. Un équivalent de l'orthogonalité des chaos de Wiener a été trouvé. On propose également une méthode algébrique pour prouver l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy dans le cas des intégrales stochastiques par rapport au $G-$mouvement Brownien.

Remerciements

C'est avec une profonde émotion que je rends grâce au bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce modeste travail que j'ai tant attendu et espéré.

Je tiens tout d'abord à adresser ma gratitude la plus profonde et mes remerciements les plus chaleureux à mon directeur de thèse, Prof. Boutabia Hacène, qui a supervisé mon travail et m'a aiguillé vers un sujet de thèse original et exigeant, pour son aide précieuse, ses conseils, ses encouragements qui m'ont permis de mener à bien cette thèse et pour toutes les belles mathématiques qu'il m'a inlassablement fait découvrir. Je lui suis aussi reconnaissante pour son enthousiasme en tant que chercheur et pour sa disponibilité sans faille malgré son emploi du temps surchargé. Qu'il soit remercié pour avoir guidé mes pas de jeune chercheur.

Je suis très honorée de la présence de Prof. Djellab Nathalia . Je tiens à la remercier chaleureusement et à lui assurer ma profonde reconnaissance pour avoir accepté d'évaluer cette thèse et d'en présider le jury.

J'exprime aussi mes très sincères remerciements au Prof. Pierre Spiteri et au Prof. Yousfat Abderrahmane, d'avoir accepté la lourde tâche d'examiner ma thèse, pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail et pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce manuscrit. Je les remercie pour le déplacement qu'ils ont fait pour faire partie de mon jury, je suis enchantée de faire leur connaissance le jour de la soutenance.

Je remercie vivement Prof. Seddik Ameur, pour avoir accepté d'assister à la soutenance et pour l'intérêt qu'elle porte à cette thèse.

A titre plus amical, Je ne saurai comment remercier mon ami Belkacemi Mohamed Charef Eddine, qui m'a toujours aidé à aller de l'avant et *à surmonter mon stress. Je tiens à le remercier surtout pour son soutien moral indéfectible dans les moments difficiles et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse : son amitié m'est chère.*

Qu'il me soit enfin permis d'exprimer toute ma gratitude à mes parents, qui m'ont tant encouragés et soutenu dans mon travail ; c'est grâce à eux que j'ai pu entreprendre des études longues, dont cette thèse est l'aboutissement. Je veux aussi remercier ma famille, qui a toujours était un soutien à mes côtés, ainsi que mes camarades et amis qui m'ont entourés pendant la préparation de la thèse.

Introduction

Depuis la publication du travail de Choquet [4], la théorie d'espérance non linéaire a suscité un grand intérêt chez les chercheurs pour ces applications potentielles dans les problèmes d'incertitude et ces nombreux outils riches, souples et élégants. C'est aussi le point de départ d'une nouvelle théorie du calcul stochastique qui nous donne un nouvel aperçu pour caractériser et pour calculer les différents types des risques financiers.

En particulier, Peng [10] a étudié le théorème de représentation d'une espérance sous-linéaire qui peut être exprimée comme un supremum des espérances linéaires et a établit la théorie fondamentale de la $G-$espérance [20], où G est la fonction génératrice d'une équation de la chaleur non linéaire. La notion de $G-$espérance s'est développée très récemment et a ouvert la voix à l'introduction de variables aléatoires $G-$normales, du $G-$mouvement Brownien et plus généralement des $G-$intégrales stochastiques de type Itô, en vertu de laquelle Peng [21, 26, 28] a introduit également la $G-$normale distribution ainsi que le théorème de la limite centrale et le concept du $G-$mouvement Brownien correspondant. Peng dans [27] et [24] a systématiquement développé le calcul stochastique sous la $G-$espérance.

Contrairement au mouvement Brownien standard qui est construit dans un espace d'espérance linéaire où une telle supposition de linéarité n'est pas faisable dans de nombreux domaines d'applications car beaucoup de phénomènes incertains ne peuvent pas être bien modélisé en utilisant ces espérances [15], le $G-$mouvement Brownien se base essentiellement sur la $G-$espérance qui peut prendre l'incertitude en considération d'une façon systématique, belle et robuste.

Brièvement parlant, le $G-$mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu à accroissements stationnaires et indépendants à l'identique de la $G-$normale distribution, ce qui signifie qu'il peut caractériser l'incertitude de la volatilité, il a une nouvelle structure très riche et intéressante qui généralise non trivialement celle du cas classique. Par conséquent le calcul stochastique correspondant a été établie, notamment les intégrales stochastique d'Itô et le processus de variation quadratique $\langle B_t \rangle_{t\geq 0}$ qui lui est associé[23]. Un phénomène très intéressant du $G-$mouvement Brownien est que son processus quadratique n'est généralement pas un processus déterministe, mais un processus stochastique qui a également des accroissements indépendants qui sont identiquement distribués. On souligne ici que la définition du $G-$mouvement Brownien est cohérente avec celle du modèle classique dans le sens où il n'y a pas de volatilité incertaine.

Récemment, beaucoup de chercheurs s'intéressent aux applications des $G-$intégrales stochastiques d'Itô qui sont de plus en plus large [36]. Par conséquent, Panyu [19] a introduit les $G-$intégrales stochastiques multiples d'Itô en vertu de la $G-$espérance. La difficulté principale réside dans le fait que le $G-$espérance est intrinsèque dans le sens où elle n'est pas définie sur un espace de probabilité linéaire donné, ceci nous a donné espoir de développer davantage l'analyse stochastique.

Lié a cette difficulté de la $G-$espérance, il ya beaucoup d'outils dans le calcul stochastique classique d'Ito qui n'ont pas encore traduit à la $G-$analyse stochastique, notamment l'inégalité générale de Burkh-Davis-Gundy. En outre, Gao [9] a prouvé cette dernière pour les $G-$ intégrales d'Itô sur l'espace $G-$espérance.

Dans cette thèse, le but principal est de faire un développement chaotique dans l'espace $G-$espérance, qui vise à démontrer un théorème de type chaos de Wiener. En effet, on démontre le théorème équivalent de l'orthogonalité des chaos de Wiener en s'appuyant sur les propriétés de la fonction génératrice G. On a établi une relation entre les polynômes d'Hermite et les $G-$intégrales stochastiques multiples, qui nous a permis par la suite de démontrer le théorème principale du $G-$chaos de Wiener. On propose également une méthode algébrique pour prouver la $G-$inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, la caractéristique principale de cette approche est qu'on utilise des propriétés générales qualitatives des racines des polynômes algébriques. L'idée de prouver la $G-$inégalité de Burkholder-Davis-Gundy par l'utilisation des polynômes d'Hermite a déjà été exploré par différents auteurs dans le cas classique. Cependant, les preuves précédentes utilisent les propriétés des polynômes d'une manière différente et dans le cas où $n \leq 4$. Notre preuve est valable pour n général et, en outre, peut être étendue à donner des estimations pour les autres types généraux d'intégrales stochastiques.

La thèse est composée de 4 chapitres.

Ainsi, dans le premier chapitre on rappelle les notations de bases et les préliminaires de l'espérance sous linéaire et les espaces d'espérance sous linéaire associés. On donne aussi le théorème de représentation de l'espérance sous linéaire et certaines définitions qu'on utilise par la suite à savoir les notions de distribution et d'indépendances en vertu de l'espérance sous linéaire.

Par suite, dans le chapitre 2 on introduit le concept du $G-$mouvement Brownien et les $G-$intégrales stochastiques de type Itô passant par les définitions et les propriétés nécessaires, ainsi que le processus a variation quadratique associé.

Dans le chapitre 3, on s'inspire au travail de Langovoy [16] en adaptant certains résultats sur les polynômes et moments des $G-$intégrales stochastiques pour démontrer la $G-$inégalité de Burkholder-Davis-Gundy via les polynômes d'Hermite.

Enfin, le dernier chapitre contient l'essentiel de notre travail de recherche où on démontre le résultat principale qui est le théorème du $G-$chaos de Wiener. Un résultat intermédiaire sur l'équivalent du théorème sur l'orthogonalité des chaos de Wiener pour les $G-$intégrales stochastiques multiples a été prouvé.

Ce travail a permis la production scientifique suivante :

•Publication internationale :

Chaotic expansion in the $G-$expectation space by HacèneBoutabia and Imen Grabsia, published in "Opuscula Mathematica".

•Communications internationales :

$1-$ *Wiener chaos expansion and stochastic multiple integrals under $G-$Brownian motion*, HacèneBoutabia and Imen Grabsia, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM $2-5$ june 2013,Istanbul, Turkey).

$2-$ *$G-$chaos of Wiener*, HacèneBoutabia and Imen Grabsia, Journées Internationales de Probabilités et Statistiques (JIPS $20-22$ Nov 2011, Alger).

$3-$ *Preliminaries of $G-$ Wiener chaos*, HacèneBoutabia and Imen Grabsia, Colloque International Modélisation Stochastique et Statistique (MSS $21-23$ Nov 2010, Alger).

•Communications nationales :

$1-$ *Stochastic multiple integrals under $G-$Brownian motion and preliminaries of Wiener chaos*, HacèneBoutabia and Imen Grabsia, $8^{ème}$ Rencontre d'Analyse Mathématiques et ses Applications (RAMA'8 $26-29$ Nov 2012, Alger).

Chapitre 1

Généralités sur l'espérance sous linéaire

Une espérance sous-linéaire peut être exprimée comme un supremum des espérances linéaires. Elle est souvent appliquée à des situations où les modèles de probabilités sont incertains et elle s'avère être un outil de base pour mesurer les pertes de risque en finance. Dans ce chapitre on donne les notations de bases et les préliminaires de la théorie d'espérance sous-linéaire et le $G-$mouvement Brownien connexe. Plus de détails peuvent être trouvés dans Peng [22] .

1.1 Espérance sous linéaire

Soit Ω un ensemble donné et soit $\mathcal{H}$ un espace linéaire de fonctions à valeurs réelles définie sur Ω. On suppose que $\mathcal{H}$ satisfait $c \in \mathcal{H}$ pour chaque constante c et $|X| \in \mathcal{H}$ si $X \in \mathcal{H}$. L'espace $\mathcal{H}$ peut être considéré comme l'espace des variables aléatoires.

Définition 1.1.1 *Une espérance sous linéaire* $\widehat{\mathbb{E}}$ *est une fonction* $\widehat{\mathbb{E}} : \mathcal{H} \longmapsto \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(**i**)***Monotonie :***

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] \geq \widehat{\mathbb{E}}[Y] \quad si\ X \geq Y$$

(**ii**)***Préservation des constantes :***

$$\widehat{\mathbb{E}}[c] = c \quad pour\ c \in \mathbb{R}$$

(**iii**)***Sous-additivité :*** *Pour tout* $X, Y \in \mathcal{H}$,

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] - \widehat{\mathbb{E}}[Y] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y]$$

(**iv**) ***Homogénéité positive :***

$$\widehat{\mathbb{E}}[\lambda X] = \lambda \widehat{\mathbb{E}}[X], \ \textit{pour tout } \lambda \geq 0$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ *est appelé* **espace d'espérance sous linéaire**. *Si seulement* (**i**) *et* (**ii**) *sont satisfaites,* $\widehat{\mathbb{E}}$ *est appelée espérance non linéaire et le triplet* $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ *est appelé espace d'espérance non linéaire.*

Définition 1.1.2 *Soient* $\widehat{\mathbb{E}}_1$ *et* $\widehat{\mathbb{E}}_2$ *deux espérances non linéaires définies sur* $(\Omega, \mathcal{H})$. $\widehat{\mathbb{E}}_1$ *est dite dominée par* $\widehat{\mathbb{E}}_2$ *si*

$$\widehat{\mathbb{E}}_1 [X] - \widehat{\mathbb{E}}_1 [Y] \leq \widehat{\mathbb{E}}_2 [X - Y] \quad \textit{pour } X, Y \in \mathcal{H}$$

Remarque 1.1.1 *Si l'inégalité* (**iii**) *est une égalité, alors* $\widehat{\mathbb{E}}$ *est une espérance linéaire classique, i.e.,* $\widehat{\mathbb{E}}$ *est une fonction linéaire satisfaisant* (i) *et* (ii).

Remarque 1.1.2 *Si* (**iii**) *et* (**iv**) *sont satisfaites alors on dira que* $\widehat{\mathbb{E}}$ *est sous-linéaire. Cette sous-linéarité implique*

(**v**) ***Convexité :***

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\alpha X + (1-\alpha) Y\right] \leq \alpha \widehat{\mathbb{E}}\left[X\right] + (1-\alpha) \widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right] \quad \textit{pour } \alpha \in [0,1]$$

Notons que la propriété (**iv**) *est équivalente à la propriété suivante*

$$\widehat{\mathbb{E}}[\lambda X] = \lambda^+ \widehat{\mathbb{E}}[X] + \lambda^- \widehat{\mathbb{E}}[-X] \quad \textit{pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dans ce qui suit, on considère le type d'espace d'espérance non linéaire suivant $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$: si $X_1, ..., X_n \in \mathcal{H}$ alors $\varphi(X_1, ..., X_n) \in \mathcal{H}$ pour tout $\varphi \in C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$ où $C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace linéaire de fonctions localement Lipschtizienne φ satisfaisant

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq C(1 + |x|^m + |y|^m)|x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ \textit{pour } C &> 0, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dans ce cas $X = (X_1, ..., X_n)$ est appelé un vecteur aléatoire à $n-$dimension , noté $X \in \mathcal{H}^n$.

Remarque 1.1.3 *Il est clair que si* $X \in \mathcal{H}$ *alors* $|X|$, $X^m \in \mathcal{H}$. *Plus généralement,* $\varphi(X)\psi(Y) \in \mathcal{H}$ *pour tout* $X, Y \in \mathcal{H}$ *et pour tout* $\varphi, \psi \in C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$. *En particulier, si* $X \in \mathcal{H}$ *alors* $\widehat{\mathbb{E}}[|X^n|] < \infty$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$.

Ici, on utilise $C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$ seulement pour la commodité des techniques. En fait, l'exigence essentielle est que $\mathcal{H}$ contient toutes les constantes et, en outre, $X \in \mathcal{H}$ implique $|X| \in \mathcal{H}$. En général, $C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$ peut être remplacé par l'un des espaces de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ suivant.

•$L^\infty(\mathbb{R}^n)$:Espace de fonctions bornées Borel-mesurables,
•$C_{unif}(\mathbb{R}^n)$:Espace de fonctions bornées et uniformément continues,
•$C_{b \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$:Espace de fonctions continues, Lipschitziennes et bornées,
•$Lip(\mathbb{R}^n)$:Espace des fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Représentation d'une espérance sous-linéaire

Une espérance sous-linéaire peut être exprimée comme un supremum des espérances linéaires. Elle est souvent appliquée à des situations où les modèles de probabilité sont incertains.

Théorème 1.1.1 *Soit $\widehat{\mathbb{E}}$ une fonction définie sur un espace linéaire $\mathcal{H}$ satisfaisant la sous-additivité et l'homogénéité positive. Alors il existe une famille de fonctions linéaires $\{E_\theta : \theta \in \ominus\}$ définies sur $\mathcal{H}$ telle que*

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] = \underset{\theta \in \ominus}{Sup} E_\theta[X] \quad pour\ X \in \mathcal{H}$$

et, pour tout $X \in \mathcal{H}$, il existe $\theta_X \in \ominus$ de telle sorte que $\widehat{\mathbb{E}}[X] = E_{\theta_X}[X]$.

En outre, si $\widehat{\mathbb{E}}$ est une espérance sous-linéaire, alors E_θ est une espérance linéaire.

Preuve. Soit $Q = \{E_\theta : \theta \in \ominus\}$ la famille de toutes les formes linéaires définies sur $\mathcal{H}$, dominées par $\widehat{\mathbb{E}}$ i.e., $E_\theta[X] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X]$, pour tout $X \in \mathcal{H}$ et pour tout $E_\theta \in Q$.

Tout d'abord on montre que Q est non vide. Pour $X \in \mathcal{H}$ donné, on note $L = \{aX : a \in \mathbb{R}\}$ qui est un sous-espace de $\mathcal{H}$. On définit $I : L \to \mathbb{R}$ par $I[aX] = a\widehat{\mathbb{E}}[X], \forall a \in \mathbb{R}$, alors $I[.]$ est une fonction linéaire sur $\mathcal{H}$ et $I \leq \widehat{\mathbb{E}}$ sur L. Comme $\widehat{\mathbb{E}}$ est sous-additive et positivement homogène, alors d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonction linéaire E sur $\mathcal{H}$ tel que $E = I$ sur L et $E \leq \widehat{\mathbb{E}}$ sur $\mathcal{H}$. Ainsi E est une fonction linéaire dominée par $\widehat{\mathbb{E}}$ et telle que $\widehat{\mathbb{E}}[X] = E[X]$.

On définit maintenant

$$\widehat{\mathbb{E}}_Q[X] = \underset{\theta \in \ominus}{Sup} E_\theta[X] \quad pour\ X \in \mathcal{H}$$

Il est clair que $\widehat{\mathbb{E}}_Q = \widehat{\mathbb{E}}$.

En outre, si $\widehat{\mathbb{E}}$ est une espérance sous-linéaire, alors que nous avons, pour chaque élément non négatif $X \in \mathcal{H}, E_\theta[X] = -E_\theta[-X] \geq -\widehat{\mathbb{E}}[-X] \geq 0$. Pour chaque $c \in \mathbb{R}, -E_\theta[c] = E_\theta[-c] \leq \widehat{\mathbb{E}}[-c] = -c$ et $E_\theta[c] \leq \widehat{\mathbb{E}}[c] = c$, ainsi nous obtenons $E_\theta[c] = c$. Par conséquent E_θ est une espérance linéaire.
■

Remarque 1.1.4 *Il est important d'observer que l'espérance linéaire définie ci-dessus E_θ est seulement supposée additive. Mais on peut appliquer le théorème bien connu de Daniell-Stone pour prouver qu'il existe une unique mesure de probabilité $\sigma-$additive P_θ sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{H}))$ telle que*

$$E_\theta[X] = \int_\Omega X dP_\theta, \quad X \in \mathcal{H}$$

L'incertitude du modèle de probabilité correspondant est décrite par le sous-ensemble $\{P_\theta, \theta \in \ominus\}$, et l'incertitude correspondante de distributions pour un vecteur aléatoires à $n-$dimensions X dans $\mathcal{H}$ est décrite par $\{F_X(\theta, A) = P_\theta(X \in A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$

Remarque 1.1.5 *Dans le cas où Q est un singleton, $\widehat{\mathbb{E}}$ n'est autre que l'espérance linéaire classique.*

1.1.2 Distribution et indépendance

On donne maintenant la notion de distributions de variables aléatoires selon une espérance non linéaire.

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoires à $n-$dimensions défini sur un espace d'espérance non linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$. On définit une fonction sur $C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathbb{F}_X[\varphi] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X)] : \varphi \in C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n).$$

Le triplet $(\mathbb{R}^n, C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n), \mathbb{F}_x)$ forme un espace d'espérance non linéaire. $\mathbb{F}_X$ est appelé **la distribution** de X sous $\widehat{\mathbb{E}}$. Cette notion est très utile pour une espérance sous linéaire $\widehat{\mathbb{E}}$. En outre, on peut prouver qu'il existe une famille de mesures de probabilité $\left\{F_X^\theta(.)\right\}_{\theta \in \ominus}$ définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ (voir remarque 1.1.4) telle que

$$\mathbb{F}_X[\varphi] = \sup_{\theta \in \ominus} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) F_X^\theta(dx), \ \textit{pour chaque } \varphi \in C_{b \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$$

Ainsi $\mathbb{F}_X[\varphi]$ caractérise l'incertitude de la distribution de X.

Définition 1.1.3 *Soient X_1 et X_2 deux vecteurs aléatoires à $n-$dimension définies sur deux espaces d'espérances non linéaires $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \widehat{\mathbb{E}}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \widehat{\mathbb{E}}_2)$ respectivement sont identiquement distribuées (on notera $X_1 \overset{d}{=} X_2$) si*

$$\widehat{\mathbb{E}}_1 \left[\varphi \left(X_1\right)\right] = \widehat{\mathbb{E}}_2 \left[\varphi \left(X_2\right)\right], \quad \textit{pour } \varphi \in C_{l \cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$$

Il est clair que $X_1 \overset{d}{=} X_2$ si et seulement si leurs distributions coïncident.

Remarque 1.1.6 *Si la distribution $\widehat{\mathbb{F}}_x$ de $X \in \mathcal{H}$ n'est pas une espérance linéaire, alors X a une distribution incertaine. La distribution de X a les quatre paramètres typiques suivants :*

$$\overline{\mu} = \widehat{\mathbb{E}}\left[X\right], \ \underline{\mu} = -\widehat{\mathbb{E}}\left[-X\right], \ \overline{\sigma}^2 = \widehat{\mathbb{E}}\left[X^2\right] \ \textit{ et } \underline{\sigma}^2 = -\widehat{\mathbb{E}}\left[-X^2\right]$$

*Les intervalles $\left[\overline{\mu}, \underline{\mu}\right]$ et $[\overline{\sigma}^2, \underline{\sigma}^2]$ caractérisent la **moyenne incertaine** et la **variance incertaine** de X respectivement.*

Remarque 1.1.7 *Dans le cas d'une espérance sous linéaire, $X_1 \overset{d}{=} X_2$ implique que les sous-ensembles d'incertitudes de distributions de X_1 et X_2 sont les mêmes, par exemple, dans le cadre de la Remarque* 1.1.4*,*

$$\left\{F_{X_1}\left(\theta_1, .\right) : \theta_1 \in \ominus_1\right\} = \left\{F_{X_2}\left(\theta_2, .\right) : \theta_2 \in \ominus_2\right\}$$

La simple propriété suivante est très utile dans la théorie d'espérance sous linéaire.

Proposition 1.1.1 *Soient $X, Y \in \mathcal{H}$ telle que $\widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right] = -\widehat{\mathbb{E}}\left[-Y\right]$ (i.e., Y n'a pas une moyenne incertaine). Alors, on a :*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X + \alpha Y\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[X\right] + \alpha \widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right]$$

En particulier, si $\widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right] = -\widehat{\mathbb{E}}\left[-Y\right] = 0,$ alors $\widehat{\mathbb{E}}\left[X + \alpha Y\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[X\right].$

Preuve. On a $\widehat{\mathbb{E}}\left[\alpha Y\right] = \alpha^+ \widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right] + \alpha^- \widehat{\mathbb{E}}\left[-Y\right] = \alpha^+ \ \widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right] - \alpha^- \widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right] = \alpha \widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right]$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

Ainsi

$\widehat{\mathbb{E}}\left[X + \alpha Y\right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[X\right] + \widehat{\mathbb{E}}\left[\alpha Y\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[X\right] + \alpha \widehat{\mathbb{E}}\left[Y\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[X\right] - \widehat{\mathbb{E}}\left[-\alpha Y\right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[X + \alpha Y\right]$ ■

La notion d'indépendance qui suit joue un rôle important dans la théorie d'espérance sous linéaire.

Définition 1.1.4 *Dans un espace d'espérance sous linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$*, le vecteur aléatoire* $Y \in \mathcal{H}^n$ *est dit indépendant d'un autre vecteur aléatoire* $X \in \mathcal{H}^m$ *sous* $\widehat{\mathbb{E}}$ *si pour tout* $\varphi \in C_{l\cdot Lip}(\mathbb{R}^{n+m})$ *on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(X,Y\right)\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x,Y\right)\right]_{x=X}\right]$$

où $\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x,Y\right)\right]_{x=X}$ *signifie* $\psi\left(X\right)$ *où* $\psi\left(x\right) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x,Y\right)\right]$.

Notons que cette définition est correcte. Pour voir cela, il suffit de montrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}^m, \varphi\left(x,Y\right) \in \mathcal{H}$ et $\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(.,Y\right)\right]$ appartient à $C_{l.lip}\left(\mathbb{R}^m\right)$. On doit montrer que $\varphi\left(x,.\right) \in C_{l.lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Preuve. En effet, pour chaque $(x,y), (u,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \left|\varphi\left(x,y\right) - \varphi\left(u,z\right)\right| &\leq C\left|(x,y) - (u,z)\right|\left(1 + \left|(x,y)\right|^k + \left|(u,z)\right|^k\right), \\ C &> 0, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \left|\varphi\left(x,y\right) - \varphi\left(x,z\right)\right| &\leq C\left|y-z\right|\left(1 + \left|(x,y)\right|^k + \left|(x,z)\right|^k\right) \\ &\leq C\left|y-z\right|\left(1 + \left(\left|x\right|^2 + \left|y\right|^2\right)^{\frac{k}{2}} + \left(\left|x\right|^2 + \left|z\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}\right) \\ &\leq C\left|y-z\right|\left(1 + 2^{\frac{k}{2}}\left(\left|x\right|^k + \left|y\right|^k\right) + 2^{\frac{k}{2}}\left(\left|x\right|^k + \left|z\right|^k\right)\right) \\ &\leq C'\left|y-z\right|\left(1 + \left(\left|x\right|^k + \left|z\right|^k\right)\right), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité $(a+b)^p \leq 2^p\left(a^p + b^p\right)$ pour $a, b \geq 0$ et $C' = C\max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1}\left|x\right|^k\right)$. Par conséquent, $\varphi\left(x,.\right) \in C_{l.lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

De même, on a

$$\left|\varphi\left(x,Y\right) - \varphi\left(u,Y\right)\right| \leq C\left|x-u\right|\left(1 + 2^{\frac{k}{2}}\left(\left|x\right|^k + \left|Y\right|^k\right) + 2^{\frac{k}{2}}\left(\left|u\right|^k + \left|Y\right|^k\right)\right),$$

ce qui implique que

$$\left|\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x,Y\right)\right] - \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(u,Y\right)\right]\right| \leq \widehat{\mathbb{E}}\left|\varphi\left(x,Y\right) - \varphi\left(u,Y\right)\right|$$

$$\begin{aligned} &\leq C\left|x-u\right|\left(1 + 2^{\frac{k}{2}}\left(\left|x\right|^k + \widehat{\mathbb{E}}\left(\left|Y\right|^k\right)\right) + 2^{\frac{k}{2}}\left(\left|u\right|^k + \widehat{\mathbb{E}}\left(\left|Y\right|^k\right)\right)\right) \\ &\leq C''\left|x-u\right|\left(1 + \left|x\right|^k + \left|u\right|^k\right), \end{aligned}$$

où $C'' = C\max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1}\widehat{\mathbb{E}}\left(\left|Y\right|^k\right)\right)$, ce qui signifie que $\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(.,Y\right)\right]$ appartient à $C_{l.lip}\left(\mathbb{R}^m\right)$. ■

Remarque 1.1.8 *Dans un espace d'espérance sous linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$*,* Y *est indépendant de* X *signifie que l'incertitude de distribution* $\{F_Y(\theta, .) : \theta \in \ominus\}$ *de* Y *ne change pas après la réalisation de* $X = x$*. En d'autres termes, "l'espérance conditionnelle sous linéaire" de* Y *par rapport à* X *est* $\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x, Y)]_{x=X}$*. Dans le cas de l'espérance linéaire, cette notion d'indépendance n'est que le cas classique.*

Remarque 1.1.9 *Il est important de noter que dans une espérance sous linéaire la condition "*Y *est indépendant de* X*" ne signifie pas automatiquement que "*X *est indépendant de* Y*".*

Exemple 1.1.1 *On considère le cas où* $X, Y \in \mathcal{H}$ *sont identiquement distribués et* $\widehat{\mathbb{E}}[Y] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y] = 0$ *mais* $\overline{\sigma}^2 = \widehat{\mathbb{E}}[X^2] > \underline{\sigma}^2 = -\widehat{\mathbb{E}}[-X^2]$*. On suppose également que* $\widehat{\mathbb{E}}[|X|] = \widehat{\mathbb{E}}[X^+ + X^-] > 0$ *ainsi* $\widehat{\mathbb{E}}[X^+] = \frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}[|X| + X] = \frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}[|X|] > 0$*. Dans le cas où* Y *est indépendante de* X*, on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[XY^2\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[X^+\overline{\sigma}^2 - X^-\underline{\sigma}^2\right] = \left(\overline{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2\right)\widehat{\mathbb{E}}\left[X^+\right] > 0$$

Mais si X *est indépendant de* Y*, on a* $\widehat{\mathbb{E}}[XY^2] = 0$

La propriété d'indépendance de deux vecteurs aléatoires X et Y ne concerne que la distribution conjointe de (X, Y).

Remarque 1.1.10 *La situation "*Y *est indépendante de* X*" apparaît souvent lorsque* Y *survient après* X*, donc une espérance très robuste devrait prendre l'information de* X *en compte.*

Définition 1.1.5 *Une séquence de vecteurs aléatoires à* $n-$*dimension* $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ *définis sur un espace d'espérance non linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ *est dite convergente en distribution (ou convergente en loi) sous* $\widehat{\mathbb{E}}$ *si pour chaque* $\varphi \in C_{b\cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$*, la suite* $\{\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\eta_i)]\}_{i=1}^{\infty}$ *converge.*

D'après Peng [25] le résultat suivant est facile à vérifier.

Proposition 1.1.2 *Soit* $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ *converge en loi dans le sens ci-dessus. Alors l'application* $F[.] : C_{b\cdot Lip}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\mathbb{F}[\varphi] = \lim_{i\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\eta_i)] \quad \textit{pour } \varphi \in C_{b\cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$$

est une espérance non linéaire sur $(\mathbb{R}^n, C_{b\cdot Lip}(\mathbb{R}^n))$*. Si* $\widehat{\mathbb{E}}$ *est sous linéaire (resp. linéaire), alors* F *est également sous linéaire (resp. linéaire).*

1.1.3 Distribution $G-$normale

Une notion fondamentalement importante dans la théorie d'espérance sous-linéaire est que la variable aléatoire X soit $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])-$distribuée sous $\widehat{\mathbb{E}}$:

Définition 1.1.6 *(Distribution $G-$normale) Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega,\mathcal{H},\widehat{\mathbb{E}})$, une variable aléatoire $X\in\mathcal{H}$ avec*

$$\underline{\sigma}^2=-\widehat{\mathbb{E}}\left[-X^2\right],\qquad \overline{\sigma}^2=\widehat{\mathbb{E}}\left[X^2\right]$$

est dite $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])-$distribuée (on notera par $X\sim\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])$) si pout tout $Y\in\mathcal{H}$ indépendante de X telle que $Y\overset{d}{=}X$, on a :

$$aX+bY\overset{d}{=}\sqrt{a^2+b^2}X,\qquad\forall a,b\geq 0 \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.11 *D'après la définition ci-dessus, on a*

$$\sqrt{2}\widehat{\mathbb{E}}\left[X\right]=\widehat{\mathbb{E}}\left[X+Y\right]=2\widehat{\mathbb{E}}\left[X\right]\ \text{et}\ \sqrt{2}\widehat{\mathbb{E}}\left[-X\right]=\widehat{\mathbb{E}}\left[-X-Y\right]=2\widehat{\mathbb{E}}\left[-X\right]$$

il résulte que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X\right]=\widehat{\mathbb{E}}\left[-X\right]=0$$

autrement dit une variable aléatoire X, $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])-$distribuée n'a aucune moyenne incertaine.

Remarque 1.1.12 *Si X est indépendant de Y et $X\overset{d}{=}Y$, tels que* (1.1) *est satisfaite, alors $-X$ est également indépendant de $-Y$ et on a $-X\overset{d}{=}-Y$. De même $a\left(-X\right)+b\left(-Y\right)\overset{d}{=}\sqrt{a^2+b^2}\left(-X\right)$, $a,b\geq 0$. Ainsi*

$$X\sim\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])\ \textit{si et seulement si}-X\sim\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])$$

La proposition et le corollaire suivants montrent que $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])$ est une distribution sous-linéaire définie de façon unique sur $\left(\mathbb{R},C_{l.Lip}\left(\mathbb{R}\right)\right)$. Peng dans [22] montre que la loi $G-$normale $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])$ est caractérisée, ou générée, par l'équation parabolique aux dérivées partielles suivante définie sur $[0,\infty)\times\mathbb{R}$:

$$\partial_t u-G\left(\partial_{xx}^2 u\right)=0 \tag{1.2}$$

avec la condition de Cauchy $u\left|_{t=0}\right.=\varphi$, oû G est appelée **la fonction génératrice** de (1.2) qui est une fonction sous-linéaire réelle paramétrée par $\underline{\sigma}^2$ et $\overline{\sigma}^2$:

$$G\left(\alpha\right)=\frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}\left[X^2\alpha\right]=\frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2\alpha^+-\underline{\sigma}^2\alpha^-\right),\quad\alpha\in\mathbb{R}$$

Ici, on note $\alpha^+ = max\{0, \alpha\}$ et $\alpha^- = (-\alpha)^+$. L'équation (1.2) est appelée la $G-$ équation de la chaleur de la distribution sous-linéaire $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])$. On appelle aussi cette distribution sous-linéaire la **distribution G$-$normale** .

Remarque 1.1.13 *On utilise la notion de solutions de viscosité de l'équation* (1.2)*. Cette notion a été introduite par Crandall et Lions. Pour l'existence et l'unicité des solutions et des références très riches connexes nous nous référons à Crandall, Ishii et Lions* [5]*. On notera que, dans la situation où* $\underline{\sigma}^2 > 0$*, la* $G-$*équation de la chaleur*

$$\partial_t u - \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2 \left(\partial^2_{xx} u\right)^+ - \underline{\sigma}^2 \left(\partial^2_{xx} u\right)^-\right) = 0, u\,|_{t=0} = \varphi$$

qui a comme solution de viscosité (1.2) *devient une solution classique (voir* [11]*, et les derniers travaux de* [1]*,* [2] *et* [35]*). Le lecteur pourra comprendre* (1.2) *au sens classique.*

Proposition 1.1.3 *Soit* X *une variable aléatoire* $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])-$*distribuée. Pour tout* $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R})$ *on définie la fonction* $u(t,x) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right]$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Alors on

1)

$$u(t+s,x) = \widehat{\mathbb{E}}\left[u\left(t, x+\sqrt{s}X\right)\right], \ s \geq 0. \tag{1.3}$$

2)*Pour tout* $T > 0$ *il existe des constantes* $C, k > 0$ *de telle sorte que, pour tous* $t, s \in [0,T]$ *et pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|u(t,x) - u(t,y)| \leq C\left(1 + |x|^k + |y|^k\right)|x-y| \tag{1.4}$$

et

$$|u(t,x) - u(t+s,x)| \leq C\left(1 + |x|^k\right)|s|^{1/2} \tag{1.5}$$

En outre, u *est l'unique solution de viscosité, continue dans le sens de* (1.4) *et* (1.5) *de l'EDP* (1.2)*.*

Preuve. *Comme*

$$\begin{aligned} u(t,x) - u(t,y) &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right] - \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(y+\sqrt{t}X\right)\right] \\ &\leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right) - \varphi\left(y+\sqrt{t}X\right)\right] \\ &\leq \widehat{\mathbb{E}}\left[C_1\left(1+|X|^k+|x|^k+|y|^k\right)|x-y|\right] \\ &\leq C\left(1+|x|^k+|y|^k\right)|x-y| \end{aligned}$$

Donc, on a (1.4)*. Soit* Y *indépendant de* X *tel que* $X \overset{d}{=} Y$*. Comme* X *est* $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])-$*distribuée, alors*

$$\begin{aligned} u(t+s,x) &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t+s}X\right)\right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{s}X+\sqrt{t}Y\right)\right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{s}z+\sqrt{t}Y\right)\right]_{z=X}\right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}}\left[u\left(t,x+\sqrt{s}X\right)\right]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi (1.3) *et en vertu de* (1.4) *il résulte que*

$$\begin{aligned} u(t+s,x) &= \widehat{\mathbb{E}}\left[u\left(t,x+\sqrt{s}X\right)-u(t,x)\right] \\ &\leq \widehat{\mathbb{E}}\left[C_1\left(1+|x|^k+|X|^k\right)|s|^{\frac{1}{2}}|X|\right], \end{aligned}$$

d'où (1.5)*. Maintenant, pour* $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$*, soit* $\psi\in C_b^{1,3}([0,\infty)\times\mathbb{R})$ *telle que* $\psi\geq u$ *et* $\psi(t,x)=u(t,x)$*. D'aprés* (1.3) *il résulte que, pour* $\delta\in(0,t)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\psi\left(t-\delta,x+\sqrt{\delta}X\right)-\psi(t,x)\right] \\ &\leq -\partial_t\psi(t,x)\,\delta+\widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_x\psi(t,x)\sqrt{\delta}X+\frac{1}{2}\partial_{xx}^2\psi(t,x)\,\delta X^2\right]+\bar{C}\delta^{\frac{3}{2}} \\ &= -\partial_t\psi(t,x)\,\delta+\widehat{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{2}\partial_{xx}^2\psi(t,x)\,\delta X^2\right]+\bar{C}\delta^{\frac{3}{2}} \\ &= -\partial_t\psi(t,x)\,\delta+\delta G\left(\partial_{xx}^2\psi(t,x)\right)+\bar{C}\delta^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\left[\partial_t\psi-G\left(\partial_{xx}^2\psi\right)\right](t,x)\leq 0.$$

Il en résulte que u est une sur-solution de viscosité de (1.2)*. De même, on peut prouver que u est une sous-solution de viscosité de* (1.2)*.* ■

Corollaire 1.1.1 *lorsque* X *et* $\widetilde{X}$ *sont* $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])-$*distribuées. Alors* $X \overset{d}{=} \widetilde{X}$*. En particulier* $X \overset{d}{=} -X$*.*

Preuve. *Pour chaque* $\varphi\in C_{l,Lip}(\mathbb{R})$ *on a*

$$u(t,x)=\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right],\ \widetilde{u}(t,x)=\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}\widetilde{X}\right)\right],\ (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}$$

Par la proposition ci-dessus, u et $\widetilde{u}$ sont des solutions de viscosité de $G-$équation de la chaleur (1.2) avec la condition de Cauchy $u\left|_{t=0}\right. = \widetilde{u}\left|_{t=0}\right. = \varphi$. Il résulte de l'unicité de la solution de viscosité que $u = \widetilde{u}$. En particulier

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(X\right)\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(\widetilde{X}\right)\right]$$

Alors $X \overset{d}{=} \widetilde{X}$. ■

Corollaire 1.1.2 *Dans le cas où $\underline{\sigma}^2 = \overline{\sigma}^2 > 0, \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])$ est juste la distribution normale classique $\mathcal{N}(0, \overline{\sigma}^2)$.*
Preuve. *En fait, la solution de l'équation parabolique aux dérivés partielles* (1.2) *devient l'équation de la chaleur classique*

$$\partial_t u = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\partial^2_{xx}u,\ \ u\left|_{t=0}\right. = \varphi$$

où la solution est

$$u\left(t,x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(y\right)\exp\left(-\frac{\left(x-y\right)^2}{2\overline{\sigma}^2 t}\right)dy$$

Ainsi, pour chaque φ,

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(X\right)\right] = u\left(1,0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(y\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right)dy$$

■

Dans les deux situations suivantes le calcul de $\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(X\right)\right]$ est facile :
• (i)Pour tout φ convexe, on a

$$u\left(t,x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(y\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right)dy$$

En effet, pour tout $t \geq 0$ fixé, remarquons que la fonction $u\left(t,x\right) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right]$ est convexe, puisque

$$\begin{aligned} u\left(t,\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right) &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y+\sqrt{t}X\right)\right] \\ &\leq \alpha\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right]+\left(1-\alpha\right)\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(y+\sqrt{t}X\right)\right] \\ &= \alpha u\left(t,x\right)+\left(1-\alpha\right)u\left(t,y\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\left(\partial_{xx}^2 u\right)^- = 0$ et par conséquent la $G-$équation de la chaleur $(1,2)$ devient

$$\partial_t u = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\partial_{xx}^2 u, \quad u\left|_{t=0}\right. = \varphi$$

• (ii)Pour tout φ concave, on a

$$u\left(t,x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\sigma}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(y\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2\underline{\sigma}^2}\right)dy$$

en particulier

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[-X\right] = 0, \quad \widehat{\mathbb{E}}\left[X^2\right] = \overline{\sigma}^2, -\widehat{\mathbb{E}}\left[-X^2\right] = \underline{\sigma}^2$$

et

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X^4\right] = 6\overline{\sigma}^4, \quad -\widehat{\mathbb{E}}\left[-X^4\right] = 6\underline{\sigma}^4$$

1.1.4 Théorème de la Limite Centrale

Théorème 1.1.2 *(Théorème de la limite centrale) Soit* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$*une suite dans* $\mathcal{H}$ *identiquement distribuée. On suppose également que,* X_{n+1} *est indépendant de* $(X_1,...,X_n)$ *pour tout* $n = 1,2....$*et que*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X_1\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[-X_1\right] = 0, \qquad \widehat{\mathbb{E}}\left[X_1^2\right] = \overline{\sigma}^2, -\widehat{\mathbb{E}}\left[-X_1^2\right] = \underline{\sigma}^2$$

pour $0 < \underline{\sigma} < \overline{\sigma} < \infty$ *fixés. Alors la suite* $\{S_n/\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ *où* $S_n = X_1+...+X_n$*, converge en loi vers une distribution* ξ $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])-$*distribuée*

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(\xi\right)\right], \forall\varphi \in lip_b\left(\mathbb{R}\right).$$

Pour plus de détails voir $[20]$.

Chapitre 2

$G-$Mouvement Brownien et $G-$intégrale d'Itô

Le but de ce chapitre est d'introduire la notion du $G-$Mouvement Brownien liée à la distribution $G-$normale dans un espace d'espérance sous-linéaire. On donne également la définition de la $G-$intégrale stochastique et on énonce la $G-$formule d'Itô.

2.1 $G-$Mouvement Brownien

Dans cette section on défini le $G-$mouvement Brownien unidimensionnel et à $d-$dimension, on donne ainsi quelques propriétés qui sont importantes dans le calcul stochastique.

Définition 2.1.1 *Dans un espace d'espérance sous linéaire* $\left(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}}\right)$ *un processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est appelé* $G-$***mouvement Brownien*** *si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $B_0 = 0$

(ii)*Pour tout* $t, s \geq 0$,*l'accroissement* $B_{t+s} - B_t$ *est* $\mathcal{N}\left(0, [\underline{\sigma}^2 s, \overline{\sigma}^2 s]\right) -$*distribué et est indépendant de* $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute suite* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq t$.

Remarque 2.1.1 *La lettre* G *indique que le processus* B *est caractérisé par sa "fonction génératrice"* G *définie par :*

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\alpha B_1^2\right], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

D'après Peng [21] *on peut prouver que la propriété d'échelle du G-mouvement Brownien, qui est la même que celle du mouvement Brownien standard, a savoir, pour tout $\lambda > 0$, le processus $\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} B_{\lambda t}\right)_{t \geq 0}$ est également un $G-$mouvement Brownien. Pour tout $t_0 > 0$, le processus $(B_{t+t_0} - B_{t_0})_{t \geq 0}$ est aussi un $G-$mouvement Brownien.*

Définition 2.1.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ un espace d'espérance non linéaire. $(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé **processus stochastique** à $d-$dimension si pour tout $t \geq 0, X_t$ est un vecteur aléatoire à valeur dans $\mathcal{H}^d$.*

Soit $\mathbb{S}(d)$ (resp. $\mathbb{S}_+(d)$) l'ensemble des matrices (resp. définies positives) carrés symétriques d'ordre d

Soit $G : \mathbb{S}(d) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone et sous linéaire au sens que : pour tout $A, \overline{A} \in \mathbb{S}(d)$, on a

$$\begin{cases} G\left(A + \overline{A}\right) \leq G(A) + G\left(\overline{A}\right) \\ G(\lambda A) = \lambda G(A), \forall \lambda \geq 0 \\ G(A) \geq G\left(\overline{A}\right), \ si \ A \geq \overline{A} \end{cases}$$

telle que

$$G(A) = \frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}\left[(AX, X)\right] \leq \frac{1}{2}|A|\,\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X^2\right|\right]$$

ce qui implique, d'après le théorème $(1.1.1)$, qu'il existe un sous ensemble $\sum \subset \mathbb{S}_+(d)$ fermé, borné et convexe tel que

$$G(A) = \frac{1}{2}\sup_{\gamma \in \sum} tr\left[\gamma A\right], A \in \mathbb{S}(d)$$

$\sum$ étant l'ensemble des matrices d'ordre d .(voir [29, 35]).

Définition 2.1.3 *(Distribution $G-$normale) Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$, un vecteur aléatoire à $d-$dimension $X = (X_1, ..., X_d)$ est dit $G-$normalement distribué noté par $X \sim \mathcal{N}(0; \sum)$ si pour tout $\varphi \in C_{b,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$, la fonction u définie par*

$$u(t, x) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right], t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$$

satifait la $G-$equation de la chaleur suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - G\left(D^2 u\right) &= 0, (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

où $D^2 = \left(\partial^2_{x_i x_j} u\right)_{i,j=1}^d$ et $G(A) = \frac{1}{2}\sup_{\gamma \in \sum} tr\left[\gamma A\right],\ A = (A)_{i,j=1}^d \in \mathbb{S}(d)$.

On donne maintenant la définition du $G-$mouvement Brownien $d-$dimensionnel.

Définition 2.1.4 *Un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ à $d-$dimension défini sur un espace d'espérance sous linéaire $\left(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}}\right)$ est dit $G-$mouvement Brownien de dimension d si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $B_0 = 0$

(ii) Pour tout $t, s \geq 0$, l'accroissement $B_{t+s} - B_t$ est $\mathcal{N}\left(0, s\sum\right)-$distribué et est indépendant de $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute suite $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq t$.

On notera

$$B_t^a := \langle a, B_t \rangle \text{ pour tout } a = (a_1, ..., a_d)^T \in \mathbb{R}^d$$

Selon la définition ci-dessus, on a la proposition suivante qui est importante dans le calcul stochastique.

Proposition 2.1.1 *(voir [23]) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $G-$mouvement Brownien à $d-$dimension défini sur un espace d'espérance sous linéaire $\left(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}}\right)$. Alors $(B_t^a)_{t\geq 0}$ est un G_a-mouvement Brownien à $1-$dimension, où $G_a(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2_{aa^T}\alpha^+ - \underline{\sigma}^2_{aa^T}\alpha^-\right), \overline{\sigma}^2_{aa^T} = 2G\left(aa^T\right) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\langle a, B_1\rangle^2\right], \underline{\sigma}^2_{aa^T} = -2G\left(-aa^T\right) = -\widehat{\mathbb{E}}\left[-\langle a, B_1\rangle^2\right]$.*

En particulier, pour tout $t, s \geq 0$, $B^a_{t+s} - B^a_t \overset{d}{=} \mathcal{N}\left(0, \left[s\underline{\sigma}^2_{aa^T}, s\overline{\sigma}^2_{aa^T}\right]\right)$.

Notons que d'après le cas unidimensionnel, on a pour toute fonction convexe φ

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(B^a_{t+s} - B^a_t\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\overline{\sigma}^2_{aa^T}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2s\overline{\sigma}^2_{aa^T}}\right)dy$$

et pour toute fonction concave φ et $\underline{\sigma}^2_{aa^T} > 0$,on a

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(B^a_{t+s} - B^a_t\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\underline{\sigma}^2_{aa^T}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2s\underline{\sigma}^2_{aa^T}}\right)dy$$

En particulier, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(B^a_t - B^a_s\right)^2\right] = \overline{\sigma}^2_{aa^T}(t-s), \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(B^a_t - B^a_s\right)^4\right] = 3\overline{\sigma}^4_{aa^T}(t-s)^2$$

$\widehat{\mathbb{E}}\left[-\left(B_t^a-B_s^a\right)^2\right]=-\underline{\sigma}_{aa^T}^2\left(t-s\right),\widehat{\mathbb{E}}\left[-\left(B_t^a-B_s^a\right)^4\right]=-3\underline{\sigma}_{aa^T}^4\left(t-s\right)^2.$

Le théorème suivant est dû à Peng [23] et donne une caractérisation du $G-$mouvement Brownien.

Théorème 2.1.1 *Soit $\widetilde{B}=\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ un processus défini sur un espace d'espérance sous linaire $\left(\Omega,\tilde{\mathcal{H}},\widetilde{\mathbb{E}}\right)$ tel que :*

(i) $\widetilde{B}_0=0$

(ii)Pour tout $t,s\geq 0$, les variables aléatoires $\widetilde{B}_{t+s}-\widetilde{B}_t$ et $\widetilde{B}_s$ sont identiquement distribuées et indépendantes de $\left(\widetilde{B}_{t_1},...,\widetilde{B}_{t_n}\right)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour toute suite $0\leq t_1\leq ...\leq t_n\leq t$.

(iii) $\widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{B}_t\right]=\widetilde{\mathbb{E}}\left[-\widetilde{B}_t\right]=0$ et $\lim_{t\downarrow 0}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left|\widetilde{B}_t\right|^3\right]t^{-1}=0.$

Alors $\widetilde{B}$ est un $G_{[\underline{\sigma},\overline{\sigma}]}-$mouvement Brownien avec $\overline{\sigma}^2=\widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{B}_1^2\right]$ et $\underline{\sigma}^2=-\widetilde{\mathbb{E}}\left[-\widetilde{B}_1^2\right].$

2.1.1 Existence du $G-$mouvement Brownien et $G-$espérance conditionnelle

On note par $\Omega=C_0^n\left(\mathbb{R}_+\right)$ l'espace de toutes les fonctions $\omega:\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}^n$ continues nulles en 0, muni de la distance

$$\rho\left(\omega^1,\omega^2\right)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\left[\left(\max_{t\in[0,i]}\left|\omega_t^1-\omega_t^2\right|\right)\wedge 1\right]$$

Pour tout $T\geq 0$ fixé, on note $\Omega_T=\{\omega_{.\wedge T}:\omega\in\Omega\}$ et on considère le processus canonique $B_t\left(\omega\right)=\omega_t,t\in[0,+\infty)$ si $\omega\in\Omega$.

Soit l'espace des variables aléatoires suivant :

$$Lip\left(\Omega_T\right)=\left\{\varphi\left(B_{t_1\wedge T},\cdots,B_{t_n\wedge T}\right):t_1,\cdots,t_n\in[0,\infty),\varphi\in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)\right\},$$

Il est clair que $Lip\left(\Omega_t\right)\subset Lip\left(\Omega_T\right)$, pour tout $t\leq T$. On note aussi :

$$Lip\left(\Omega\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}Lip\left(\Omega_n\right),$$

Remarque 2.1.2 *Il est clair que $C_{l.Lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $Lip\left(\Omega_T\right)$ et $Lip\left(\Omega\right)$ sont des espaces vectoriels. En outre, notons que $\varphi,\psi\in C_{l.Lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$ implique que le produit $\varphi.\psi\in C_{l.Lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$, ainsi si $X,Y\in Lip\left(\Omega_T\right)$ alors $X.Y\in Lip\left(\Omega_T\right)$. En particulier, pour tout $t\in[0,\infty)$, $B_t\in Lip\left(\Omega\right)$.*

Peng [20] a construit une espérance sous-linéaire sur $(\Omega, Lip(\Omega))$ de telle sorte que le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ soit un $G-$mouvement Brownien de la manière suivante : soit $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de vecteurs aléatoires à $d-$dimension sur un espace d'espérance sous-linéaire $\left(\Omega, \widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathbb{E}}\right)$ telle que ξ_i est $G-$normalement distribuée et ξ_{i+1} est indépendante de $(\xi_1, ..., \xi_i)$ pour tout $i = 1, 2, ...$

Ensuite il a introduit une espérance sous-linéaire $\widehat{\mathbb{E}}$ définie sur $Lip(\Omega)$, via la procédure suivante : Pour tout $X \in Lip(\Omega)$ avec

$$X = \varphi\left(B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$$

pour $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ et pour $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < \infty$, on pose :

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)\right] \\ = \ & \widetilde{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(\sqrt{t_1 - t_0}\xi_1, ..., \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right], \end{aligned}$$

D'après Peng, $\widehat{\mathbb{E}}$ ainsi définie une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega)$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $G-$mouvement Brownien. Comme $Lip(\Omega_T) \subseteq Lip(\Omega)$, $\widehat{\mathbb{E}}$ est également une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega_T)$.

L'espérance conditionnelle de X par rapport à Ω_{t_j} est définie par

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}\left[X \left|\Omega_{t_j}\right.\right] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)\left|\Omega_{t_j}\right.\right] \\ &= \psi\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où

$$\psi(x_1, ..., x_j) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x_1, ..., x_j, \sqrt{t_{j+1} - t_j}\xi_{j+1}, ..., \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right]$$

Dans toute la suite on considère le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur $\left(\Omega, Lip(\Omega), \widehat{\mathbb{E}}\right)$ dans le cas où $\Omega = C_0^1(\mathbb{R}_+)$.

Proposition 2.1.2 (*Propriétés de* $\widehat{\mathbb{E}}[.\left|\Omega_t\right.]$) *Pour tout* $X, Y \in Lip(\Omega)$:
(i)Si $X \geq Y$, *alors* $\widehat{\mathbb{E}}[X\left|\Omega_t\right.] \geq \widehat{\mathbb{E}}[Y\left|\Omega_t\right.]$.
(ii) $\widehat{\mathbb{E}}[\eta\left|\Omega_t\right.] = \eta$, *pour tout* $t \in [0, +\infty)$ *et* $\eta \in Lip(\Omega_t)$.
(iii) $\widehat{\mathbb{E}}[X\left|\Omega_t\right.] - \widehat{\mathbb{E}}[Y\left|\Omega_t\right.] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y\left|\Omega_t\right.]$.
(iv) $\widehat{\mathbb{E}}[\eta X\left|\Omega_t\right.] = \eta^+\widehat{\mathbb{E}}[X\left|\Omega_t\right.] + \eta^-\widehat{\mathbb{E}}[-X\left|\Omega_t\right.]$ *pour tout* $\eta \in Lip(\Omega_t)$.
(v) $\widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}[X\left|\Omega_t\right.]\left|\Omega_s\right.\right] = \widehat{\mathbb{E}}[X\left|\Omega_{t\wedge s}\right.]$, *en particulier* $\widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}[X\left|\Omega_t\right.]\right] = \widehat{\mathbb{E}}[X]$.

Pour tout $X \in Lip\left(\Omega^{t}\right), \widehat{\mathbb{E}}\left[X \left|\Omega_{t}\right.\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[X\right]$, où $Lip\left(\Omega^{t}\right)$ est l'espace linéaire des variables aléatoires de la forme

$$\begin{aligned} & \varphi\left(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, ..., B_{t_{n+1}} - B_{t_n}\right), \\ m &= 1, 2, ..., \varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n), t_1, ..., t_n, t_{n+1} \in [t, \infty). \end{aligned}$$

Remarque 2.1.3 *(ii) et (iii) implique que*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X + \eta \left|\Omega_{t}\right.\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[X \left|\Omega_{t}\right.\right] + \eta \textit{ pour } n \in Lip\left(\Omega_{t}\right)$$

En outre, si $Y \in Lip\left(\Omega\right)$ *satisfait* $\widehat{\mathbb{E}}\left[Y \left|\Omega_{t}\right.\right] = -\widehat{\mathbb{E}}\left[-Y \left|\Omega_{t}\right.\right]$ *alors*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X + Y \left|\Omega_{t}\right.\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[X \left|\Omega_{t}\right.\right] + \widehat{\mathbb{E}}\left[Y \left|\Omega_{t}\right.\right].$$

On considère maintenant l'adhérence de l'espace d'espérance sous-linéaire $\left(\Omega, Lip\left(\Omega\right), \widehat{\mathbb{E}}\right)$.

On note par $L_{G}^{p}\left(\Omega\right), p \geq 1$, l'adhérence de $Lip\left(\Omega\right)$ par rapport à la norme $\left\|X\right\|_{p} := \left(\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$. De même, on peut définir de façon similaire $L_{G}^{p}\left(\Omega_{T}\right), L_{G}^{p}\left(\Omega_{T}^{t}\right)$ et $L_{G}^{p}\left(\Omega^{t}\right)$. Il est clair que pour tout $0 \leq t \leq T \leq \infty$, on a $L_{G}^{p}\left(\Omega^{t}\right) \subset L_{G}^{p}\left(\Omega_{T}^{t}\right) \subset L_{G}^{p}\left(\Omega\right)$. Par conséquent $\widehat{\mathbb{E}}$ peut être étendue continuellement à une espérance sous-linéaire sur $\left(\Omega, L_{G}^{1}\left(\Omega\right)\right)$ qu'on notera également $\widehat{\mathbb{E}}$.

On considère maintenant l'extension des espérances conditionnelles. Pour tout $t \leq T$ fixé, la $G-$espérance conditionnelle $\widehat{\mathbb{E}}\left[. \left|\Omega_{t}\right.\right] : Lip\left(\Omega_{T}\right) \longrightarrow Lip\left(\Omega_{t}\right)$ est une application continue sous $\left\|.\right\|_{1}$.

En effet, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X \left|\Omega_{t}\right.\right] - \widehat{\mathbb{E}}\left[Y \left|\Omega_{t}\right.\right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[X - Y \left|\Omega_{t}\right.\right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X - Y\right| \left|\Omega_{t}\right.\right],$$

Alors

$$\left|\widehat{\mathbb{E}}\left[X \left|\Omega_{t}\right.\right] - \widehat{\mathbb{E}}\left[Y \left|\Omega_{t}\right.\right]\right| \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X - Y\right| \left|\Omega_{t}\right.\right].$$

Ainsi, on obtient

$$\left\|\widehat{\mathbb{E}}\left[X \left|\Omega_{t}\right.\right] - \widehat{\mathbb{E}}\left[Y \left|\Omega_{t}\right.\right]\right\|_{1} \leq \left\|X - Y\right\|_{1}$$

Il s'ensuit que $\widehat{\mathbb{E}}\left[. \left|\Omega_{t}\right.\right]$ peut être également étendue en une application continue

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[. \left|\Omega_{t}\right.\right] : L_{G}^{1}\left(\Omega_{T}\right) \longrightarrow L_{G}^{1}\left(\Omega_{t}\right).$$

Remarque 2.1.4 *La proposition ci-dessus est également vraie pour* $X, Y \in L_G^1(\Omega)$ *à ceci près dans* (iv), $\eta \in L_G^1(\Omega_t)$ *au lieu de* $Lip(\Omega)$ *doit être borné, puisque* $X, Y \in L_G^1(\Omega)$ *n'implique pas forcément que* $X.Y \in L_G^1(\Omega)$.

En particulier, on a l'indépendance suivante :

$$\widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X], \forall X \in L_G^1(\Omega^t)$$

On donne la définition suivante qui est similaire à celle du cas classique :

Définition 2.1.5 *Un vecteur aléatoire à* $n-$*dimension* $Y \in (L_G^1(\Omega))^n$ *est dit indépendant de* Ω_t $(t \geq 0)$, *si pour tout* $\varphi \in C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)].$$

Remarque 2.1.5 *Tout comme dans le cas classique, les accroissements du* $G-$*mouvement Brownien* $(B_{t+s} - B_t)_{s\geq 0}$ *sont indépendants de* Ω_t.

La propriété suivante est très utile pour les développements ultérieurs.

Proposition 2.1.3 *Soient* $X, Y \in L_G^1(\Omega)$ *tels que* $\widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y|\Omega_t]$ *pour certains* $t \in [0, T]$. *Alors on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}[X+Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t].$$

En particulier, si $\widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[-Y|\Omega_t] = 0$, *alors* $\widehat{\mathbb{E}}[X+Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t]$.

Preuve. Cela découle des deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}[X+Y|\Omega_t] &\leq \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t], \\
\widehat{\mathbb{E}}[X+Y|\Omega_t] &\geq \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[-Y|\Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X|\Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y|\Omega_t].
\end{aligned}$$

■

Exemple 2.1.1 *Pour tout* $a \in \mathbb{R}^d$ *fixé,* $s \leq t$, *on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}[B_t^a - B_s^a|\Omega_s] = 0, \widehat{\mathbb{E}}[-(B_t^a - B_s^a)|\Omega_s] = 0$$

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[(B_t^a - B_s^a)^2|\Omega_s\right] = \overline{\sigma}_{aa^T}^2(t-s), \widehat{\mathbb{E}}\left[-(B_t^a - B_s^a)^2|\Omega_s\right] = -\underline{\sigma}_{aa^T}^2(t-s)$$

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[(B_t^a - B_s^a|\Omega_s)^4\right] = 3\overline{\sigma}_{aa^T}^4(t-s)^2, \widehat{\mathbb{E}}\left[-(B_t^a - B_s^a|\Omega_s)^4\right] = -3\underline{\sigma}_{aa^T}^4(t-s)^2.$$

Exemple 2.1.2 *Pour tout* $a \in \mathbb{R}^d$ *fixé,* $n \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq T, X \in L_G^1(\Omega_t)$ *et* $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[X\varphi\left(B_T^a - B_t^a\right)|\Omega_t\right] &= X^+\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(B_T^a - B_t^a\right)|\Omega_t\right] + X^-\widehat{\mathbb{E}}\left[-\varphi\left(B_T^a - B_t^a\right)|\Omega_t\right] \\
&= X^+\widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(B_T^a - B_t^a\right)\right] + X^-\widehat{\mathbb{E}}\left[-\varphi\left(B_T^a - B_t^a\right)\right].
\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X\left(B_T^a - B_t^a\right)|\Omega_t\right] = X^+\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(B_T^a - B_t^a\right)\right] + X^-\widehat{\mathbb{E}}\left[-\left(B_T^a - B_t^a\right)\right] = 0.$$

Ceci, combiné avec la proposition (2.1.3) *donne*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[Y + X\left(B_T^a - B_t^a\right)|\Omega_t\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[Y|\Omega_t\right], Y \in L_G^1(\Omega)$$

On a également

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[X\left(B_T^a - B_t^a\right)^2|\Omega_t\right] &= X^+\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(B_T^a - B_t^a\right)^2\right] + X^-\widehat{\mathbb{E}}\left[-\left(B_T^a - B_t^a\right)^2\right] \\
&= \left[X^+\overline{\sigma}_{aa^T}^2 - X^-\underline{\sigma}_{aa^T}^2\right](T-t)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[X\left(B_T^a - B_t^a\right)^{2n-1}|\Omega_t\right] &= X^+\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(B_T^a - B_t^a\right)^{2n-1}\right] + X^-\widehat{\mathbb{E}}\left[-\left(B_T^a - B_t^a\right)^{2n-1}\right] \\
&= |X|\,\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(B_{T-t}^a\right)^{2n-1}\right].
\end{aligned}$$

Définition 2.1.6 *Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est appelé $G-$martingale (respectivement, $G-$sur-martingale ; $G-$sous-martingale) si, pour tout* $t \in [0,\infty)$, $M_t \in \mathcal{H}$ *et pour tout* $s \in [0,t]$, *on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[M_t|\Omega_s\right] = M_s, \quad (\textit{resp.}, \ \geq M_s, \quad \leq M_s).$$

2.2 $G-$Intégrales stochastiques

Dans cette section on présente les notations de base du calcul stochastique comme la construction de l'intégrale d'Itô par rapport au $G-$mouvement Brownien, passant par quelques propriétés importantes qu'on aura besoin dans ce qui suit.

Dans toute la suite $T \in \mathbb{R}_+$ sera fixé.

Soit $\pi_T^k = \left\{0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_N^k = T\right\}$ une suite de subdivisions de $[0,T]$, dont le pas

$$\mu\left(\pi_T^k\right) = \max\left\{\left|t_{i+1}^k - t_i^k\right| : i = 0, 1, ..., N-1\right\}$$

tend vers 0 lorsque $k \to \infty$. Par abus d'écriture on écrit $\pi_T = \{t_0, t_1, ..., t_N\}$ au lieu de $\pi_T^k = \left\{0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_N^k = T\right\}$.

Soit $p \geq 1$ fixé. On considère le type de processus simples suivant : soit

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) \mathbf{I}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

où

$$\xi_j \in L_G^P(\Omega_{t_j}) = \left\{X : \widehat{\mathbb{E}}(|X|^p) < \infty\right\}, j = 0, 1, 2, \cdots, k$$

Soit $M_G^{P,0}(0,T)$ l'ensemble de ces processus. L'intégrale de Bochner de (η_t) est définie par

$$\int_0^T \eta_t(\omega_t)\, dt = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega)(t_{j+1} - t_j).$$

Remarque 2.2.1 *Pour tout* $\eta \in M_G^{P,0}(0,T)$, *on note*

$$\widehat{\mathbb{E}}_T[\eta] = \frac{1}{T}\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t dt\right] = \frac{1}{T}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega)\right](t_{j+1} - t_j).$$

Il est facile de vérifier que $\widehat{\mathbb{E}}_T : M_G^{P,0}(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ *constitue une espérance sous-linéaire, d'où la définition :*

Définition 2.2.1 *Pour tout* $p \geq 1$, *on note par* $M_G^P(0,T)$ *l'adhérence de* $M_G^{P,0}(0,T)$ *sous la norme*

$$\|\eta\|_{M_G^P(0,T)} = \left\{\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T |\eta_t|^p\, dt\right]\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que $M_G^P(0,T)$ un espace de Banach .

On donne maintenant la définition de l'intégrale d'Itô.

Soit $G(\alpha) = \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^2\alpha^+ - \underline{\sigma}^2\alpha^-)$ où $0 \leq \underline{\sigma} \leq \overline{\sigma} < \infty$, $\overline{\sigma}^2 = \widehat{\mathbb{E}}[B_1^2]$ et $\underline{\sigma}^2 = -\widehat{\mathbb{E}}[-B_1^2]$.

Définition 2.2.2 *Pour tout* $\alpha \in M_G^{2,o}(0,T)$ *de la forme*

$$\alpha_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$

On définie

$$I(\alpha) := \int_0^T \alpha_t dB_t = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right).$$

Notons que $I(\alpha)$ est complètement indépendante de G, et $\left(\int_0^t \alpha_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $G-$martingale.

Lemme 2.2.1 *L'application* $I : M_G^{2,o}(0,T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$ *est linéaire, continue et peut être donc continuellement étendue vers* $I : M_G^2(0,T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$ *,et on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T \alpha_t dB_t\right) = 0 \tag{2.2}$$

Preuve. D'après l'exemple $(2.1.2)$, on a pour tout j

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\xi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)|\Omega_{t_j}\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[-\xi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)|\Omega_{t_j}\right] = 0,$$

et

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T \alpha_t dB_t\right) &= \widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^{t_{N-1}} \alpha_t dB_t + \xi_{N-1}\left(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}\right)\right) \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^{t_{N-1}} \alpha_t dB_t + \widehat{\mathbb{E}}\left[\xi_{N-1}\left(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}\right)|\Omega_{t_{N-1}}\right]\right) \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^{t_{N-1}} \alpha_t dB_t\right)
\end{aligned}$$

de proche en proche on obtient (2.2). ■

Définition 2.2.3 *On définit, pour $\eta \in M_G^2(0,T)$ fixé, l'intégrale stochastique*

$$I(\eta) = \int_0^T \eta_t dB_t$$

Il est clair que (2.2) est aussi vraie pour $\eta \in M_G^2(0,T)$.

On énumère quelques propriétés principales de l'intégrante d'Itô par rapport au $G-$mouvement Brownien.

Proposition 2.2.1 *Soient $\eta, \theta \in M_G^2(0,T)$ et soient $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. Alors on a*

(i) $\int_s^t \eta_u dB_u = \int_s^r \eta_u dB_u + \int_r^t \eta_u dB_u,$

(ii) $\int_s^t (\alpha\eta_u + \theta_u) dB_u = \alpha\int_s^t \eta_u dB_u + \int_s^t \theta_u dB_u$, *si α est bornée dans $L_G^1(\Omega_s)$,*

(iii) $\widehat{\mathbb{E}}\left[X + \int_r^T \eta_u dB_u \,|\Omega_s\right] = \widehat{\mathbb{E}}[X\,|\Omega_s]$ *pour $X \in L_G^1(\Omega_s)$.*

Voici quelques propriétés de G.

Propriétés de la fonction génératrice G :

1)

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \underset{\underline{\sigma}\leq\sigma\leq\overline{\sigma}}{Sup}\, \sigma^2\alpha, \quad pour\ tout\ \alpha \in \mathbb{R}$$

2)

$$G(\alpha x) = \alpha G(x) \quad \forall \alpha \geq 0$$

3) G est une fonction croissante

4)

$$G^n(\alpha) = \begin{cases} \frac{\overline{\sigma}^{2n}}{2^n}\alpha & si\ \alpha > 0 \\ 0 & si\ \alpha = 0 \\ \frac{\underline{\sigma}^2}{2^n}\alpha & si\ \alpha < 0 \end{cases} \quad où\ G^n = \underbrace{G \circ G \circ ... \circ G}_{n-fois}\ ;\ n \geq 1\ et\ G^1 = G$$

5)

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^t G(\alpha_s)\, ds\right) \leq G\left(\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}\ (\alpha_s)\, ds\right) \quad \forall \alpha \in M_G^2(0,T)$$

Notons que G n'est pas convexe.

Preuve. 1)

•Si $\alpha \geq 0$, alors $\alpha^+ = \alpha$ et $\alpha^- = 0$, ainsi

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\alpha^+\overline{\sigma}^2 - \alpha^-\underline{\sigma}^2\right) = \frac{1}{2}\alpha\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\sup_{\underline{\sigma}\leq\sigma\leq\overline{\sigma}}\left(\alpha\sigma^2\right).$$

•Si $\alpha < 0$, alors $\alpha^+ = 0$ et $\alpha^- = -\alpha$, ainsi

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha\underline{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\sup_{\underline{\sigma}\leq\sigma\leq\overline{\sigma}}\left(\alpha\sigma^2\right).$$

2) et 3) découlent immédiatement de 1).

4) se démontre par récurrence et en utilisant 2) et le fait que

$$G(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha\overline{\sigma}^2 & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha\underline{\sigma}^2 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

5) Selon le théorème de Fubini qu'on a pour tout $P \in \mathcal{P}$:

$$\mathbb{E}^P\left(\int_0^t G(\alpha_s)\,ds\right) \leq \int_0^t \mathbb{E}^P\left(G(\alpha_s)\right)ds.$$

D'autre part, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma_{\varepsilon,s} \in [\underline{\sigma}, \overline{\sigma}]$ tel que

$$G(\alpha_s) \leq \frac{1}{2}\sigma_{\varepsilon,s}^2\alpha_s + \varepsilon,$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^P\left(\int_0^t G(\alpha_s)\,ds\right) &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}^P\left(\sigma_{\varepsilon,s}^2\alpha_s\right)ds + \varepsilon t \\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{\sigma\in[\underline{\sigma},\overline{\sigma}]}\sigma^2\int_0^t \mathbb{E}^P(\alpha_s)\,ds + \varepsilon t \\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{\sigma\in[\underline{\sigma},\overline{\sigma}]}\sigma^2\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}(\alpha_s)\,ds + \varepsilon t \\
&\leq G\left(\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}(\alpha_s)\,ds\right) + \varepsilon t,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t G(\alpha_s)\,ds\right) \leq G\left(\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}(\alpha_s)\,ds\right).$$

■

2.2.1 Processus de variation quadratique

Le processus de variation quadratique du $G-$mouvement Brownien est un processus très intéressant. On a vu que le $G-$mouvement Brownien est un processus de variance incertaine mais sans une moyenne incertaine. Cette incertitude est concentrée dans sa variation quadratique $\langle B\rangle$. Par ailleurs $\langle B\rangle$ lui-même est un processus de moyenne-variance.

Soit $\pi_t^N, N = 1, 2, ...$ une suite de subdivision de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0. On considère

$$\begin{aligned} B_t^2 &= \sum_{j=0}^{N-1}\left(B^2_{t^N_{j+1}} - B^2_{t^N_j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 2B_{t^N_j}\left(B_{t^N_{j+1}} - B_{t^N_j}\right) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(B_{t^N_{j+1}} - B_{t^N_j}\right)^2. \end{aligned}$$

Comme le premier terme du membre droit de cette égalité tend vers $2\int_0^t B_s dB_s$ dans $L_G^2(\Omega)$. Le second terme doit converger vers une limite. On notera cette limite par $\langle B\rangle_t$, i.e.,

$$\langle B\rangle_t = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N-1}\left(B_{t^N_{j+1}} - B_{t^N_j}\right)^2 = B_t^2 - 2\int_0^t B_s dB_s. \tag{2.3}$$

Par la construction ci-dessus $(\langle B\rangle_t)_{t\geq 0}$ est un processus croissant avec $\langle B\rangle_0 = 0$. On l'appellera **le processus variation quadratique** du $G-$mouvement Brownien B. Il est important de rappeler que $\langle B\rangle_t$ n'est pas un processus déterministe, sauf le cas où $\overline{\sigma} = \underline{\sigma}$, i.e., quand $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien classique. En effet, on a le lemme suivant

Lemme 2.2.2 *Pour tout* $0 \leq s \leq t \leq \infty$, *on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\langle B\rangle_t - \langle B\rangle_s \,|\Omega_s\right] = \overline{\sigma}^2 (t-s) \tag{2.4}$$

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[-\left(\langle B\rangle_t - \langle B\rangle_s\right)|\Omega_s\right] = -\underline{\sigma}^2\left(t-s\right) \tag{2.5}$$

Preuve. *D'après la définition de* $\langle B\rangle$ *et la proposition* (2.2.1) (iii), *on a*

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[\langle B\rangle_t - \langle B\rangle_s|\Omega_s\right] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[B_t^2 - B_s^2 - 2\int_s^t B_u dB_u\,|\Omega_s\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[B_t^2 - B_s^2\,|\Omega_s\right] = \overline{\sigma}^2\left(t-s\right).
\end{aligned}$$

l'inégalité (2.5) *peut être prouvée de manière analogue en utilisant le fait que* $\widehat{\mathbb{E}}\left[-\left(B_t^2 - B_s^2\right)|\Omega_s\right] = -\underline{\sigma}^2\left(t-s\right)$. ■

Le lemme suivant est très utile pour la suite.

Lemme 2.2.3 *Pour tout* $s, t \geq 0$ *fixés,* $\langle B\rangle_{t+s} - \langle B\rangle_s$ *est identiquement distribuée comme* $\langle B\rangle_t$ *et est indépendant de* Ω_s.
Preuve. *L'indépendance découle directement de ce fait :*

$$\begin{aligned}
\langle B\rangle_{t+s} - \langle B\rangle_s &= B_{t+s}^2 - 2\int_0^{s+t} B_u dB_u - \left[B_s^2 - 2\int_0^s B_u dB_u\right] \\
&= \left(B_{t+s} - B_s\right)^2 - 2\int_s^{s+t}\left(B_u - B_s\right)d\left(B_u - B_s\right) \\
&= \langle B^s\rangle_t
\end{aligned}$$

où $\langle B^s\rangle$ *est la variation quadratique du* $G-$*mouvement Brownien* $B_t^s = B_{t+s} - B_s, t \geq 0$. ■

On va maintenant définir l'intégrale d'un processus $\eta \in M_G^1\left(0,T\right)$ par rapport à $\langle B\rangle$. On définit d'abord l'application

$$Q_{0,T}\left(\eta\right) = \int_0^T \eta_t d\langle B\rangle_t = \sum_{j=0}^{N-1}\xi_j\left(\langle B\rangle_{t_{j+1}} - \langle B\rangle_{t_j}\right) : M^{1,G}\left(0,T\right) \longrightarrow L_G^1\left(\Omega_T\right).$$

Corollaire 2.2.1 *(voir* [23] *) Pour tout* $0 \leq s \leq t \leq T$, *on a*

$$\underline{\sigma}^2 s \leq \left(\langle B\rangle_{t+s} - \langle B\rangle_s\right) \leq \overline{\sigma}^2 s$$

Proposition 2.2.2 *Pour tout $\eta \in M_G^2(0,T)$ fixé, on a*

$$\underline{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t^2\, dt\right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t\, dB_t\right)^2\right] \leq \overline{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t^2\, dt\right] \tag{2.6}$$

Preuve. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t\right)^2\right] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t + \xi_{N-1}\left(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}\right)\right)^2\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\begin{array}{c} \left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t\, dB_t\right)^2 + \eta_{N-1}^2\left(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}\right)^2 + \\ 2\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t\, dB_t\right)\eta_{N-1}\left(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}\right) \end{array}\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t\right)^2 + \xi_{N-1}^2\left(B_{t_N} - B_{t_{N-1}}\right)^2\right)\right] \\
&\vdots \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2\left(\langle B\rangle_{t_{i+1}} - \langle B\rangle_{t_i}\right)\right].
\end{aligned}$$

D'après le corollaire (1.2.1), on a

$$\underline{\sigma}^2\left(t_{i+1} - t_i\right) \leq \left(\langle B\rangle_{t_{i+1}} - \langle B\rangle_{t_i}\right) \leq \overline{\sigma}^2\left(t_{i+1} - t_i\right)$$

et en multipliant membre à membre par (η_i^2), on obtient

$$\underline{\sigma}^2\eta_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right) \leq \eta_i^2\left(\langle B\rangle_{t_{i+1}} - \langle B\rangle_{t_i}\right) \leq \overline{\sigma}^2\eta_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right),$$

d'où

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\underline{\sigma}^2\eta_i^2\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]\leq\widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\eta_i^2\left(\langle B\rangle_{t_{i+1}}-\langle B\rangle_{t_i}\right)\right]\leq\widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\overline{\sigma}^2\eta_i^2\left(t_{i+1}-t_i\right)\right],$$

par suite

$$\underline{\sigma}^2\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T\eta_t^2\,dt\right]\leq\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T\eta_t\,dB_t\right)^2\right]\leq\overline{\sigma}^2\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T\eta_t^2\,dt\right]$$

■

Lemme 2.2.4 *Pour tout* $\eta\in M_G^1(0,T)$,

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Q_{0,T}(\eta)\right|\right]\leq\overline{\sigma}^2\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T\left|\eta_t\right|dt\right]\tag{2.7}$$

Ainsi $Q_{0,T}(\eta):M^{1,G}(0,T)\longrightarrow L_G^1(\Omega_T)$ est une application linéaire continue. Par conséquence $Q_{0,T}$ peut être étendue uniquement vers $M^{1,G}(0,T)$. On notera encore cette application par

$$\int_0^T\eta_t d\langle B\rangle_t=Q_{0,T}(\eta)\ \ pour\ \eta\in M_G^1(0,T).$$

De même, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_0^T\eta_t d\langle B\rangle_t\right|\right]\leq\overline{\sigma}^2\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T\left|\eta_t\right|dt\right]\ \ pour\ \eta\in M_G^1(0,T)$$

Proposition 2.2.3 *Soient* $0\leq s\leq t,\xi\in L_G^2(\Omega_s)$ *et* $X\in L_G^1(\Omega)$. *Alors*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\left(B_t^2-B_s^2\right)\right]&=\widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\left(B_t-B_s\right)^2\right]\\&=\widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\left(\langle B\rangle_t-\langle B\rangle_s\right)\right].\end{aligned}$$

Preuve. *D'après* (2.3) *et la proposition* (2.2.1) (*iii*) *on a*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\left(B_t^2-B_s^2\right)\right]&=\widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\left(B_t-B_s+2\int_s^tB_udB_u\right)\right]\\&=\widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\left(B_t-B_s\right)\right]\end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\left(B_t^2-B_s^2\right)\right] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\left\{(B_t-B_s)^2+2\,(B_t-B_s)\,B_s\right\}\right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}}\left[X+\xi\,(B_t-B_s)^2\right]\end{aligned}$$

■

Comme dans le cas classique on a l'isométrie suivante :

Proposition 2.2.4 *Soit* $\eta \in M_G^2(0,T)$. *Alors*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t\right)^2\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t^2 d\langle B\rangle_t\right]. \tag{2.8}$$

Preuve. *On considère d'abord* $\eta \in M_G^2(0,T)$ *de la forme*

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega)\, I_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

et donc $\int_0^T \eta_s dB_s = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)$. *D'après la proposition* (2.1.3), *on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[X + 2\xi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\xi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] = \widehat{\mathbb{E}}[X] \text{ pour } X \in L_G^1(\Omega) \text{ et } i \neq j$$

Ainsi,

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t\right)^2\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right)^2\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j^2\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)^2\right].$$

alors, il résulte de la proposition (2.2.3) *que*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t\right)^2\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j^2\left(\langle B_{t_{j+1}}\rangle - \langle B_{t_j}\rangle\right)\right] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t^2 d\langle B\rangle_t\right].$$

Ainsi (2.8) *est vraie pour* $\eta \in M_G^{2,0}(0,T)$. *On peut étendre continuellement l'égalité ci-dessus dans le cas où* $\eta \in M_G^2(0,T)$, (2.8) *en résulte.*
■

Le lemme suivant joue un rôle crucial dans la suite.

Lemme 2.2.5 *Pour tout* $\alpha, \beta \in M_G^2(0,T)$ *on a*

$$-2G\left(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left(-\alpha_t\beta_t\right)dt\right) \leq \widehat{\mathbb{E}}\left(I(\alpha)\,I(\beta)\right) \leq 2G\left(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left(\alpha_t\beta_t\right)dt\right) \quad (2.9)$$

Preuve. Soit

$$\alpha_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k(\omega)\,I_{[t_k,t_{k+1})}(t),\ \beta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1}\beta_k(\omega)\,I_{[t_k,t_{k+1})}(t).$$

D'après la définition de l'intégrale d'Itô et en utilisant des arguments standard de la $G-$analyse stochastique, on peut écrire

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(I(\alpha)\,I(\beta)\right) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^{T_{N-1}}\alpha_s dB_s\int_0^{T_{N-1}}\beta_s dB_s + \alpha_{N-1}\beta_{N-1}\left(B_{t_N}-B_{t_{N-1}}\right)^2\right],$$

et en répétant cette procédure on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left(I(\alpha)\,I(\beta)\right) &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\beta_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^2\right]\\ &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\beta_i\left(\langle B\rangle_{t_{i+1}}-\langle B\rangle_{t_i}\right)\right].\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\underline{\sigma}^2\left(t_{i+1}-t_i\right) \leq \left(\langle B\rangle_{t_{i+1}}-\langle B\rangle_{t_i}\right) \leq \overline{\sigma}^2\left(t_{i+1}-t_i\right),$$

et en multipliant par $\alpha_i\beta_i$, puis en sommant par rapport à i, on obtient

$$\underline{\sigma}^2\sum_{\alpha_i\beta_i\geq 0}\alpha_i\beta_i\left(t_{i+1}-t_i\right)+\overline{\sigma}^2\sum_{\alpha_i\beta_i\leq 0}\alpha_i\beta_i\left(t_{i+1}-t_i\right) \leq \sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\beta_i\left(\langle B\rangle_{t_{i+1}}-\langle B\rangle_{t_i}\right) \quad (2.10)$$

et

$$\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\beta_i\left(\langle B\rangle_{t_{i+1}}-\langle B\rangle_{t_i}\right) \leq \overline{\sigma}^2\sum_{\alpha_i\beta_i\geq 0}\alpha_i\beta_i\left(t_{i+1}-t_i\right)+\underline{\sigma}^2\sum_{\alpha_i\beta_i\leq 0}\alpha_i\beta_i\left(t_{i+1}-t_i\right). \quad (2.11)$$

Le premier membre de (2.10) est égal à

$$\begin{aligned} & \underline{\sigma}^2 \sum_{i=0}^{N} \left(-\alpha_i \beta_i\right)^- \left(t_{i+1} - t_i\right) - \overline{\sigma}^2 \sum_{i=0}^{N} \left(-\alpha_i \beta_i\right)^+ \left(t_{i+1} - t_i\right) \\ = & -2 \sum_{i=0}^{N} G\left(-\alpha_i \beta_i\right)\left(t_{i+1} - t_i\right) \\ = & -2 \int_0^T G\left(-\alpha_s \beta_s\right) ds, \end{aligned}$$

et par le même argument, le second membre de (2.11) devient

$$2 \int_0^T G\left(\alpha_s \beta_s\right) ds,$$

de sorte que

$$-2 \int_0^T G\left(-\alpha_s \beta_s\right) ds \leq \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \beta_i \left(\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i}\right) \leq 2 \int_0^T G\left(\alpha_s \beta_s\right) ds,$$

Enfin, on obtient

$$-2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T G\left(-\alpha_t \beta_t\right) dt \right) \leq \widehat{\mathbb{E}} \left(I\left(\alpha\right) I\left(\beta\right) \right) \leq 2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T G\left(\alpha_t \beta_t\right) dt \right)$$

La formule (2.9) résulte par la propriété 5) de G. ■

2.2.2 $G-$formule d'Itô

Dans cette partie, on donne la $G-$formule d'Itô.

Définition 2.2.4 *On appelle $G-$processus d'Itô (cas $1-$dimension) tout processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s + \int_0^t \eta_s d\langle B \rangle_s, \quad t \in [0, T]$$

où $X_0 \in L_G^2(\Omega_T)$, et α, β et η sont des processus bornés dans $M_G^2(0, T)$.

On donne maintenant la $G-$formule d'Itô dans un cadre général. Soit $X_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ un $G-$processus d'Itô vectoriel au sens que

$$X_t^\nu = X_0^\nu + \int_0^t \alpha_s^\nu ds + \int_0^t \beta_s^\nu dB_s + \int_0^t \eta_s^\nu d\langle B\rangle_s, \quad t \in [0,T], \ \nu = 1,2,...,n$$

Théorème 2.2.1 *(La $G-$formule d'Itô) Soit Φ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ de telle sorte que $\partial^2_{x_\nu x_\mu}\Phi$ satisfait la condition de croissance polynômiale pour $\nu, \mu = 1,2,...n$. On suppose que α^ν, β^ν et $\eta^\nu, \nu = 1,2,...,n$ sont des processus bornés de $M_G^2(0,T)$. Alors, pour tout $s,t \geq 0$ on a dans $L_G^2(\Omega_t)$*

$$\begin{aligned}\Phi(X_t) &= \Phi(X_s) + \sum_{\nu=1}^n \left(\int_s^t \partial_{x_\nu}\Phi(X_u)\,\alpha_u^\nu du + \int_s^t \partial_{x_\nu}\Phi(X_u)\,\beta_u^\nu dB_u \right) \\ &\quad + \int_s^t \left[\sum_{\nu=1}^n \partial_{x_\nu}\Phi(X_u)\,\eta_u^\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu,\mu=1}^n \partial^2_{x_\nu x_\mu}\Phi(X_u)\,(\beta_u^\nu)^2 \right] d\langle B\rangle_u.\end{aligned}$$

Pour plus de détails voir [20]

Chapitre 3

Polynômes et moments des $G-$intégrales stochastiques

Les connexions entre les polynômes algébriques particuliers et les intégrales stochastiques ont une longue histoire [33] , [13] et a eu beaucoup d'attention dans l'analyse stochastique. Des applications fructueuses de polynômes spéciaux ont été trouvées dans la théorie des processus de Markov, les mathématiques financières et la statistique. Le livre Schouten [30] contient un aperçu détaillé de ce domaine de l'analyse stochastique et ses applications.

3.1 Résultats préliminaires sur les polynômes

Les deux lemmes algébriques suivants sont au cœur de cette méthode.

Lemme 3.1.1 *Soient les polynômes réels*

$$P_1(z) = \sum_{k=0}^{2m} b_k z^{2k} \text{ et } P_2(z) = z \sum_{i=0}^{2m_1} c_i z^{2i} \tag{3.1}$$

où $m_1 < m$ est un entier positif ou nul et, $b_k \geq 0$ pour tous $k, b_0 > 0$, $b_m > 0$, $c_i \geq 0$ pour tous i. Alors il existe $0 < d_1 < d_2$ tels que $P_1(z) \leq P_2(z)$ pour tout $z \in [d_1, d_2]$ et $P_1(z) > P_2(z)$ pour tout $z \notin [d_1, d_2]$.

Preuve. Notons tout d'abord que $P_1(z)$ est symétrique, $P_1(z) \geq b_0$ pour tous $z \in \mathbb{R}$, et $P_1(z) \sim b_m z^{2m}$ quand $z \longrightarrow \infty$. Par ailleurs $P_2(-z) = -P_2(z)$ et pour $z \geq 0$ on a $P_2(z) \geq 0, P_2(0) = 0$ et deg $P_1(z) <$ deg $P_2(z)$, où deg P_i désigne le degré du polynôme P_i.

Ceci implique que pour tout $z < 0$ on a $P_1(z) > 0 > P_2(z)$. Quand $z = 0$, il s'avère que $P_1(0) = b_0 > 0 = P_2(z)$. Cela montre que toutes les solutions possibles de l'inégalité $P_1(z) \leq P_2(z)$ sont positives, minorées par un nombre positif d_1.

Comme $P_1(z)/P_2(z) \longrightarrow \infty$ quand $z \to \infty$, il s'ensuit que pour $z \geq z_0$ suffisamment grand on a toujours $P_1(z) > P_2(z)$.Par conséquent, toutes les solutions possibles de l'inégalité $P_1(z) \leq P_2(z)$ ont lieu dans un certain intervalle $[d_1, d_2]$ avec $d_1 > 0$ et $d_2 > 0$. ∎

Lemme 3.1.2 *Soient les polynômes réels*

$$P_1(z) = b_0 z^{2m+1} \text{ et } P_2(z) = z\sum_{i=0}^{m_1} c_i z^{2i} \tag{3.2}$$

où $m_1 < m$ est un entier non négatif, $b_0 > 0$, $c_i \geq 0$ pour tous i, $c_0 > 0$, $c_{m_1} > 0$. Alors il existe $d_2 > 0$ tel que pour $P_1(z) \leq P_2(z)$ pour tout $z \in [-\infty, d_2]$, et $P_1(z) > P_2(z)$ pour tout $z > d_2$.

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 3.1.1. ∎

Rappelons que les polynômes d'Hermite à une variable $H_n(x)$ et à deux variables $h_n(t,x)$ sont définis par : pour tout $t, x, \lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n H_n(x)$$

et

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n h_n(t,x)$$

Alors H_n et h_n vérifie les propriétés suivantes :

• $h_0(t,x) = H_0(x) = 1, h_0(t,x) = H_0(x) = x$ et $h_n(0,0) = 0$ pour $n \geq 1$,

• $h_n(1,x) = H_n(x)$,

• $H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} D^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ et $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$,

• $\partial_x h_n(t,x) = h_{n-1}(t,x)$ pour $n \geq 1$,

• $\partial_t h_n(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_{xx}^2 h_n(t,x) = -\frac{1}{2}h_{n-2}(t,x)$ pour $n \geq 2$,

•$h_{2n}(t,x) = \frac{(-t)^n}{n!} e^{x^2/2t} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2t}\right) = \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k a_k t^k x^{2n-2k}$.

Il est bien connu que

$$a_k = \frac{1}{2^k k!\,(2n-2k)!}$$

3.2 $G-$inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

La proposition suivante décrit la relation entre h_n et les intégrales stochastique multiples.

Proposition 3.2.1 *Soit $\alpha \in M_G^2[0,T]$. Alors, on a pour tout $t \geq 0$ et $n \geq 2$*

$$h_n\left(\int_0^t \alpha_s^2 d\langle B\rangle_s, \int_0^t \alpha_s dB_s\right) = \int_0^t \alpha_s h_{n-1}\left(\int_0^s \alpha_u^2 d\langle B\rangle_u, \int_0^s \alpha_s dB_u\right) dB_s, \tag{3.3}$$

dans $L_G^2(\Omega_t)$.

Preuve. D'après la $G-$formule d'Itô avec $\Phi(t,x) = h_n(t,x)$ et $X_t = \left(\int_0^t \alpha_u^2 d\langle B\rangle_u, \int_0^t \alpha_u dB_u\right)$, on a

$$\begin{aligned} h_n(X_t) &= h_n(0,0) + \int_0^t \alpha_s \partial_x h_n(X_s)\, dB_s \\ &\quad + \int_0^t \left(\alpha_s^2 \partial_t h_n(X_s) + \frac{1}{2}\alpha_s^2 \partial_{xx}^2 h_n(X_s)\right) d\langle B\rangle_s \end{aligned}$$

la formule (3.3) découle des propriétés de h_n. ■

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.2.1 *Soit α un processus de $M_G^2(0,T)$, et $t \leq T$. Alors pour tout $n \geq 2$ il existe des constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$ telles que*

$$C_1 \mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha^2(s)\, d\langle B\rangle_s\right)^n \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha(s)\, dB(s)\right)^{2n} \leq C_2 \mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha^2(s)\, d\langle B\rangle_s\right)^n \tag{3.4}$$

C_1 et C_2 dépendent de n, mais pas du processus α.

Preuve. Dans la démonstration ci-dessous, on peut supposer que α est borné, puisque le cas général suit par l'argument de troncature d'habitude.

Pour simplifier les formules on utilise les notations suivantes

$$\int_0^t \alpha^2(s)\, d\langle B\rangle_s = \int \alpha^2 d\langle B\rangle, \quad \int_0^t \alpha(s)\, dB(s) = \int \alpha dB.$$

Ecrivons $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \rho_{2n}(t) &= h_{2n}\left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle, \int \alpha dB\right) \qquad (3.5) \\ &= \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k a_k \left(\int \alpha dB\right)^{2n-2k} \left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^k, \end{aligned}$$

où h_{2n} est le polynôme d'Hermite de degré $2n$.

Comme $\rho_{2n}(t)$ est une intégrale stochastique, d'après la proposition précédente, alors $\widehat{\mathbb{E}}(\rho_{2n}(t)) = 0$, d'où d'après (3.5)

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(\sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k a_k \left(\int \alpha dB\right)^{2n-2k} \left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^k\right) = 0 \qquad (3.6)$$

Il résulte alors d'après (3.6) que pour tout $P \in \mathcal{P}$

$$\sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k a_k \mathbb{E}^P\left(\left(\int \alpha dB\right)^{2n-2k} \left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^k\right) \leq 0 \qquad (3.7)$$

D'après l'inégalité de Holder, on a pour tout $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^P\left\{\left(\int \alpha dB\right)^{2n-2k} \left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^k\right\} \qquad (3.8) \\ \leq &\left(\mathbb{E}^P\left(\int \alpha dB\right)^{2n}\right)^{\frac{n-k}{n}} \left(\mathbb{E}^P\left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^n\right)^{\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

Cas où n est paire. On suppose que $n = 2m$. Comme $a_k \geq 0$ pour tout k, et comme

$$\mathbb{E}^P\left(\left(\int \alpha dB\right)^{2n-2k} \left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^k\right) \geq 0$$

pour tout k, alors en retranchant de (3.7) la somme de tous les nombres

$$a_k \mathbb{E}^P \left(\left(\int \alpha dB \right)^{2n-2k} \left(\int \alpha^2 d \langle B \rangle \right)^k \right)$$

pour k paire, sauf pour $k = 0$ et $k = n$, on obtient

$$a_0 \mathbb{E}^P \left(\int \alpha dB \right)^{2n} - \sum_{0 \leq 2l+1 < n} a_{2l+1} \mathbb{E}^P \left(\left(\int \alpha dB \right)^{2n-2k(l)} \left(\int \alpha^2 d \langle B \rangle \right)^{k(l)} \right)$$
$$+ a_n \mathbb{E}^P \left(\int \alpha^2 d \langle B \rangle \right)^n \leq 0 \tag{3.9}$$

où l'on a noté $k(l) = 2l + 1$ pour entier $l \geq 0$. En injectant l'inégalité (3.8) de (3.9), on obtient

$$a_0 \mathbb{E}^P \left(\int \alpha dB \right)^{2n} - \sum_{0 \leq 2l+1 < n} a_{2l+1} \left(\mathbb{E}^P \left(\int \alpha dB \right)^{2n} \right)^{\frac{n-k(l)}{n}} \left(\mathbb{E}^P \left(\int \alpha^2 d \langle B \rangle \right)^n \right)^{\frac{k(l)}{n}}$$
$$+ a_n \mathbb{E}^P \left(\int \alpha^2 d \langle B \rangle \right)^n \leq 0 \tag{3.10}$$

et en divisant les deux membres de (3.10) par $\mathbb{E}^P \left(\int \alpha^2 d \langle B \rangle \right)^n$ et en posant

$$z = \frac{\left(\mathbb{E}^P \left(\int \alpha dB \right)^{2n} \right)^{1/n}}{\left(\mathbb{E}^P \left(\int \alpha^2 d \langle B \rangle \right)^n \right)^{1/n}}$$

alors on obtient

$$a_0 z^n - \sum_{0 \leq 2l+1 \leq n} a_{2l+1} z^{n-k(l)} + a_n \leq 0,$$

ou de manière équivalente

$$a_0 z^n + a_n \leq \sum_{0 \leq 2l+1 \leq n} a_{2l+1} z^{n-k(l)}, \tag{3.11}$$

Passons maintenant dans (3.9) $P_1(z) = a_0 z^n + a_n$, $P_2(z) = \sum\limits_{0 \leq 2l+1 \leq n} a_{2l+1} z^{n-k(l)}$. d'après le lemme 3.1.1, il existe deux constantes positives C_1, C_2 telle que $0 < C_1 \leq z \leq C_2$, ou encore $C_1^n \leq z^n \leq C_2^n$, ce qui prouve l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy sous $\mathbb{E}^P$, qui entraine la double inégalité (3.4) dans le cas où n est paire.

Cas où n est impaire. On suppose que $n = 2m + 1$. Par le même raisonnement que pour l'inégalité (3.9) on obtient

$$a_0\mathbb{E}^P\left(\int \alpha dB\right)^{2n} - \sum_{0\leq 2l+1\leq n} a_{2l+1}\mathbb{E}^P\left\{\left(\int \alpha dB\right)^{2n-2k(l)}\left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^{k(l)}\right\} \leq 0 \tag{3.12}$$

et de manière analogue à (3.11) on a

$$a_0 z^n \leq \sum_{0\leq 2l+1\leq n} a_{2l+1} z^{n-k(l)}, \tag{3.13}$$

où z est défini comme précédemment.

En vertu du lemme 3.1.2 avec $P_1(z) = a_0 z^n$ et $P_2(z) = \sum_{0\leq 2l+1\leq n} a_{2l+1} z^{n-k(l)}$, on obtient à partir de (3.13) que $z \leq d_2$ pour une certaine constante positive d_2 ou encore $z^n \leq d_2^n$ dans le cas ou n est impaire. L'inégalité de droite de (3.4) en résulte.

Il ne reste plus qu'à prouver l'inégalité de gauche de (3.4) lorsque $n = 2m + 1$. Dans ce cas, en retranchant de (3.7), la somme des nombres

$$a_k\mathbb{E}^P\left(\left(\int \alpha dB\right)^{2n-2k}\left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^{k}\right)$$

pour k paire, obtient

$$\sum_{0\leq 2k\leq n} a_{2k}\mathbb{E}^P\left(\left(\int \alpha dB\right)^{2n-4k}\left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^{2k}\right) - a_n\mathbb{E}^P\left(\left(\int \alpha^2 d\langle B\rangle\right)^{n}\right) \geq 0 \tag{3.14}$$

De manière analogue au raisonnement précédant, on obtient

$$\sum_{0\leq 2k\leq n} a_{2k} z^{n-2k} - a_n \geq 0, \text{ i.e.}$$

$$P(z) = \sum_{0\leq 2k\leq n} a_{2k} z^{n-2k} \geq a_n \tag{3.15}$$

Comme $P(z)$ est un polynôme de la forme $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i z^{2i+1}$ il découle facilement que (3.15) est équivalente à $z \geq C_1$pour une certaine constante $C_1 = C_1(n) > 0$. Donc , $z^n \geq C_1^n$ et par conséquent l'inégalité de gauche de (3.4) est prouvée pour $n = 2m + 1$. ■

Chapitre 4

$G-$intégrales stochastiques multiples et chaos

L'objectif de ce chapitre est de définir les $G-$intégrales stochastiques multiples et de démontrer le chaos de Wiener dans le cadre d'un espace non linéaire. Ce chapitre constitue l'essentiel de notre travail de recherche [1].

4.1 $G-$intégrales stochastiques multiples

Afin d'établir le chaos $G-$Wiener, introduisons d'abord la définition des $G-$intégrales stochastiques multiples comme dans [31].

On considère que $L^2(\Delta_n) = L^2(\Delta_n; dt_1 \cdots dt_n)$, où

$$\Delta_{n\wedge t} = \{(t_1, \cdots, t_n) : 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t\} \, (n \geq 1, t \geq 0) \;\; et \;\; \Delta_n = \Delta_{n\wedge T}.$$

Pour tout φ dans $L^2(\Delta_n)$, on peut définir les itérations des $G-$intégrales d'Itô

$$\int\limits_{\Delta_n \wedge t} \varphi dB = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_n} \cdots \int\limits_0^{t_2} \varphi(t_1, \cdots, t_n) \, dB_{t_1} ... dB_{t_n}.$$

Notons que toute $G-$intégrale multiple d'Itô par rapport à dB_{t_i} est inclue dans $M_G^2(0,t_{i+1})$, plus précisément on a

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^{t_{i+1}}\int_0^{t_i}\cdots\int_0^{t_2}\varphi(t_1,\cdots,t_n)\,dB_{t_1}...dB_{t_i}\right)^2 \\
\leq\ & \overline{\sigma}^{2i}\int_0^{t_{i+1}}\int_0^{t_i}\cdots\int_0^{t_2}\varphi^2(t_1,\cdots,t_n)\,dt_1...dt_i.
\end{aligned}$$

Cette dernière découle par induction : pour illustrer l'argument on le démontre dans le cas où $i=2$. En utilisant le membre droit de l'inégalité (2.6), on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\varphi(t_1,\cdots,t_n)\,dB_{t_1}dB_{t_2}\right)^2 &\leq \overline{\sigma}^2\int_0^{t_3}\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^{t_2}\varphi(t_1,\cdots,t_n)\,dB_{t_2}\right)^2 dt_1 \\
&\leq \overline{\sigma}^4\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\varphi^2(t_1,\cdots,t_n)\,dt_1dt_2,
\end{aligned}$$

comme affirmé auparavant.

Soient les espaces linéaires $\mathcal{Z}_n=\left\{\int_{\Delta_n}\varphi dB:\varphi\in L^2(\Delta_n)\right\}$ si $n\geq 1$, $\mathcal{Z}_0=\{\text{constantes}\}$, où $\int_{\Delta_n}\varphi dB=\int_{\Delta_n\wedge T}\varphi dB.$

Par souci de simplicité, on utilise les notations suivantes : Pour tout $\varphi\in L^2(\Delta_n\wedge t)$ et pour tout $(t_1,...,t_n)\in\Delta_n\wedge t$, on pose :

$$\varphi^l(t_{l+1},...,t_n)=\varphi(t_1,...,t_n)\quad si\ l\leq n$$

On est en mesure d'énoncer le théorème équivalent de "l'orthogonalité" des espaces $\mathcal{Z}_n$ comme dans le cas classique.

Théorème 4.1.1 *L'application $\varphi\longmapsto\int_{\Delta_n}\varphi dB$ définie de $L^2(\Delta_n)$ dans $\mathcal{Z}_n$ est linéaire et telle que pour tout $\varphi\in L^2(\Delta_n)$, $\psi\in L^2(\Delta_{n+p})$ et pour tout $l\leq n$, on a :*

1)

$$I_{n,p}(\varphi,\psi)\leq 2^lG^l\left(\int_{\Delta_{n-l}}\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_{\Delta_{n-l}\wedge t_l}\varphi^l dB\int_{\Delta_{n+p-l}\wedge t_l}\psi^l dB\right]dt_1...dt_l\right)$$

2)

$$-2^l G^l \left(\int_{\Delta_{n-l}} \widehat{\mathbb{E}} \left[- \int_{\Delta_{n-l} \wedge t_l} \varphi^l dB \int_{\Delta_{n+p-l} \wedge t_l} \psi^l dB \right] dt_1 ... dt_l \right) \leq I_{n,p} (\varphi, \psi)$$

où

$$I_{n,p} (\varphi, \psi) = \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_{\Delta_n} \varphi dB \int_{\Delta_{n+p}} \psi dB \right)$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 4.1.1 lorsque $l = n, n = m + p$ et des propriétés de G.

Corollaire 4.1.1 *Pour tout* $\varphi, \psi \in L^2 (\Delta_n)$, *on a :*

1)

$$-2^n G^n \left(- \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\Delta_n)} \right) \leq \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_{\Delta_n} \varphi dB \int_{\Delta_n} \psi dB \right) \leq 2^n G^n \left(\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\Delta_n)} \right)$$

En particulier si $\varphi = \psi$, *alors*

$$\underline{\sigma}^{2n} \left\| \varphi \right\|^2_{L^2(\Delta_n)} \leq \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_{\Delta_n} \varphi dB \right)^2 \leq \overline{\sigma}^{2n} \left\| \varphi \right\|^2_{L^2(\Delta_n)}$$

2)

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_{\Delta_n} \varphi dB \int_{\Delta_m} \psi dB \right) = 0$$

Notons que la dernière formule est l'équivalent de l'orthogonalité des espaces $\mathcal{Z}_n$ et $\mathcal{Z}_m$ comme dans le cas classique.

4.2 $G-$chaos de Wiener

Denis et Martini [7] ont introduit une nouvelle approche de l'analyse stochastique quasi-sure. Toutefois, ils utilisent une approche tout à fait différente qui fait appel à l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur Ω. Bien que la construction de l'analyse quasi-sure et la $G-$espérance sont nettement différentes, ces théories sont très étroitement liées comme l'ont prouvé récemment Denis, Hu et Peng [6]. Ils fournissent également une double représentation de la $G-$espérance et ils établissent que l'espérance sous-linéaire $\widehat{\mathbb{E}}$ peut être représentée comme un supremum des espérances classiques, i.e., il existe un ensemble de mesures de probabilité $\mathcal{P}$ sur Ω tel que pour toute variable aléatoire X

$$\widehat{\mathbb{E}}(X) = \underset{P\in\mathcal{P}}{Sup} E^P(X)$$

où E^P est l'espérance classique sous la mesure de probabilité P (voir aussi [8, 10]).

Comme dans [31], selon la terminologie de Denis et Martini et on dira qu'une propriété est vraie $P-$quasi-sûrement, en abrégé $\mathcal{P}$ $-q.s.$, si elle est vraie $P-$presque sûrement pour tout $P \in \mathcal{P}$. (voir aussi [32, 34]).

On est en mesure d'énoncer le théorème principal.

Théorème 4.2.1 *(Le* **G***−chaos de Wiener) On a*

$$L_G^2(\Omega_T) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} Z_n \quad \mathcal{P}-q.s.$$

Autrement dit, tout $X \in L_G^2(\Omega_T)$ *admet comme unique représentation* $X = X_0 + X_1 + ...X_n + ...$ $\mathcal{P}-q.s.$ *où* $X_n \in Z_n, n \in \mathbb{N}$.

La proposition suivante décrit la relation entre les Polynôme d'Hermite à deux variables et les intégrales stochastiques multiples.

Proposition 4.2.1 *Soit* $\varphi \in L^2([0,T], d\langle B\rangle_t)$ $P-q.s.$ *tel que* $\int_0^T \varphi^2(t)d\langle B\rangle_t = 1$ $\mathcal{P}-q.s.$. *Alors, pour tout* $t \geq 0$ *et* $n \geq 2$ *on a :*

$$H_n\left(\int_0^T \varphi(t)dB_t\right) = \int_{\Delta_n} \overset{n}{\varphi} dB \quad \mathcal{P}-q.s., n \geq 2 \tag{4.1}$$

où $\overset{l}{\varphi}(t_1, ..., t_l) = \varphi(t_1)...\varphi(t_l)$ *pour tout* $l \leq n$.

Preuve. En répétant la formule (3.3) avec $\alpha_s = \varphi(s)$ et T au lieu de t, on obtient :

$$\begin{aligned}
H_n\left(\int_0^T \varphi(s)dB_s\right) &= \int_0^T \varphi(s)h_{n-1}\left(X_s\right)dB_s \\
&= \int_{\Delta_2} \overset{2}{\varphi}\left(t_1,t_2\right)h_{n-2}\left(X_{t_2}\right)dB_{t_1}dB_{t_2} \\
&\vdots \\
&= \int_{\Delta_n} \overset{n}{\varphi}\left(t_1,t_2,...,t_n\right)h_0\left(X_{t_{n-1}}\right)dB_{t_1}dB_{t_2}...dB_{t_n} \\
&= \int_{\Delta_n} \overset{n}{\varphi}dB \quad \mathcal{P}-q.s.
\end{aligned}$$

■

Lemme 4.2.1 *Soient $\lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k^2 = 1$; et soient $x_1,...,x_p \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$H_n\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k\right) = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_p=n} C^{\alpha_1,...,\alpha_p}\prod_{k=1}^{p}\lambda_k^{\alpha_k}H_{\alpha_k}\left(x_k\right)$$

où $C^{\alpha_1,...,\alpha_p}$ est une constante ne dépendant que de $\alpha_1,...,\alpha_p$.

Preuve. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$; on a :

$$e^{\theta\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k x_k-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=}^{p}\lambda_k^2\theta^2} = \prod_{k=1}^{p}e^{\theta\lambda_k x_k-\frac{1}{2}\lambda_k^2\theta^2}.$$

D'une part on a

$$\begin{aligned}
e^{\theta\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k x_k-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k^2\theta^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\theta^n h_n\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k^2,\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\theta^n H_n\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k\right),
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{p} e^{\theta\lambda_k x_k-\frac{1}{2}\lambda_k^2\theta^2} &= \prod_{k=1}^{p}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\theta^{\alpha}\lambda_k^{\alpha}H_{\alpha}(x_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\theta^{n}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_p=n} C^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\lambda_k^{\alpha_k}H_{\alpha_k}(x_k).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$H_n\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k\right) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_p=n} C^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\prod_{k=1}^{p}\lambda_k^{\alpha_k}H_{\alpha_k}(x_k).$$

■

Pour ce qui suit, on considère l'espace vectoriel $\underset{n\in\mathbb{N}}{\vee}\mathcal{Z}_n$ engendré par $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\mathcal{Z}_n$, qui est $\underset{n\in\mathbb{N}}{\vee}\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_0 + \mathcal{Z}_1 + \ldots + \mathcal{Z}_n + \ldots$. Alors on a la proposition suivante :

Proposition 4.2.2 *Tout $X \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\vee} Z_n$ a une représentation unique*

$$X = X_0 + \ldots + X_n + \ldots \mathcal{P}-q.s.$$

où $X_i \in \mathcal{Z}_i$.

On écrit $\underset{n\in\mathbb{N}}{\vee}\mathcal{Z}_n = \overset{+\infty}{\underset{n=0}{\oplus}}\mathcal{Z}_n \qquad \mathcal{P}-q.s.$

Preuve. Il suffit de montrer que la variable aléatoire 0 admet comme unique représentation, la représentation triviale.

Soit

$$0 = X_0 + \ldots\ldots + X_n + \ldots\ldots$$

une représentation de 0. D'après l'égalité $X_{n_0}^2 = -\sum_{i\neq n_0} X_{n_0}\ X_i$ pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, et en vertu de "l'orthogonalité" de $\mathcal{Z}_i$ et $\mathcal{Z}_{n_0}$, on a

$$0 \leq \widehat{\mathbb{E}}\left(X_{n_0}^2\right) \leq \sum_{i\neq n_0}\widehat{\mathbb{E}}\left(-X_{n_0}\ X_i\right) = 0,$$

ce qui implique que $X_{n_0} = 0\ \ \mathcal{P}-q.s.$. ■

4.3 Preuve de "l'orthogonalité des $\mathcal{Z}_n$"

Preuve. 1) Selon le fait que

$$\int_{\Delta_n} \varphi dB = \int_0^T \left(\int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \varphi^1 dB \right) dB_{t_1}, \quad \int_{\Delta_n} \psi dB = \int_0^T \left(\int_{\Delta_{n+p-1}\wedge t_1} \psi^1 dB \right) dB_{t_1},$$

et d'après la définition des intégrales stochastiques multiples et la seconde inégalité de la formule (2.9), on a :

$$I_{n,p}(\varphi,\psi) \leq 2G \left(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \varphi^1 dB \int_{\Delta_{n+p-1}\wedge t_1} \psi^1 dB \right] dt_1 \right).$$

D'une façon similaire, on obtient

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}} \left[\int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \varphi^1 dB \int_{\Delta_{n+p-1}\wedge t_1} \psi^1 dB \right] \\ \leq \; & 2G \left(\int_0^{t_1} \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_{\Delta_{n-2}\wedge t_2} \varphi^2 dB \int_{\Delta_{n+p-2}\wedge t_2} \psi^2 dB \right] dt_2 \right), \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$I_{n,p}(\varphi,\psi) \leq 2^2 G^2 \left(\int_0^T \int_0^{t_1} \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_{\Delta_{n-2}\wedge t_2} \varphi^2 dB \int_{\Delta_{n+p-2}\wedge t_2} \psi^2 dB \right] dt_1 dt_2 \right)$$

de proche en proche, on obtient :

$$I_{n,p}(\varphi,\psi) \leq 2^l G^l \left(\int_{\Delta_{n-l}} \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_{\Delta_{n-l}\wedge t_l} \varphi^l dB \int_{\Delta_{n+p-l}\wedge t_l} \psi^l dB \right] dt_1 ... dt_l \right) \tag{4.2}$$

2)En utilisant la première inégalité de la formule (2.9), on obtient

$$
\begin{aligned}
I_{n,p}(\varphi,\psi) &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \left(\int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \varphi^1 dB\right) dB_{t_1} \int_0^T \left(\int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \psi^1 dB\right) dB_{t_1}\right] \\
&\geq -2G\left(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[-\int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \varphi^1 dB \int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \psi^1 dB\right] dt_1\right).
\end{aligned}
$$

La formule (4.2) avec $t_1, -\varphi^1, \psi^1, l-1$ au lieu de T, φ, ψ, l respectivement, devient :

$$
\begin{aligned}
& \widehat{\mathbb{E}}\left[-\int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \varphi^1 dB \int_{\Delta_{n-1}\wedge t_1} \psi^1 dB\right] \\
\leq\ & 2^{l-1}G^{l-1}\left(\int_{\Delta_{n-l-1}\wedge t_1} \widehat{\mathbb{E}}\left[-\int_{\Delta_{n-l}\wedge t_l} \varphi^l dB \int_{\Delta_{n+p-l}\wedge t_l} \psi^l dB\right] dt_2 ... dt_l\right),
\end{aligned}
$$

par conséquent,

$$
I_{n,p}(\varphi,\psi) \geq -2^l G^l \left(\int_{\Delta_{n-l}} \widehat{\mathbb{E}}\left[-\int_{\Delta_{n-l}\wedge t_l} \varphi^l dB \int_{\Delta_{n+p-l}\wedge t_l} \psi^l dB\right] dt_1 ... dt_l\right).
$$

■

4.4 Preuve du théorème du $G-$Chaos de Wiener

Preuve. Soit Π_T l'ensemble des polynômes en $B_{t_1}, \cdots, B_{t_p}$ $(t_1 \leq \cdots \leq t_p \leq T)$. On montre d'abord que Π_T est dense dans $L_G^2(\Omega_T)$. En fait, il suffit d'approcher toute variable aléatoire $X = \varphi\left(B_{t_1}, \cdots, B_{t_p}\right)$ par une séquence de Π_T, où $\varphi \in C_{l,lip}(\mathbb{R}^p)$. Comme φ est lipschitzienne sur toute boule fermée $B\left(0, R\sqrt{p}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^p : |x| \leq R\sqrt{p}\right\}$ $(R > 0)$, alors elle est continue sur $B\left(0, R\sqrt{p}\right)$.

Ainsi d'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite (P_n) des polynômes qui converge uniformément vers φ sur $B\left(0, R\sqrt{p}\right)$. Soit

T_R la variable aléatoire définie par $T_R = \inf\{t \leq T : |B_t| > R\}$. Comme $\left(B_{t_1\wedge T_R}, \cdots, B_{t_p\wedge T_R}\right) \in B\left(0, R\sqrt{p}\right)$, alors

$$P_n\left(B_{t_1\wedge T_R}, \cdots, B_{t_p\wedge T_R}\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(B_{t_1\wedge T_R}, \cdots, B_{t_p\wedge T_R}\right)$$

dans $L_G^2(\Omega_T)$. La continuité de P_n, φ, B_t et $||.||_2$, et le fait que T_R converge vers T lorsque R tend vers l'infini, entrainent que

$$P_n\left(B_{t_1\wedge T_R}, \cdots, B_{t_p\wedge T_R}\right) \underset{R\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} P_n\left(B_{t_1}, \cdots, B_{t_p}\right) \text{ et}$$
$$\varphi\left(B_{t_1\wedge T_R}, \cdots, B_{t_p\wedge T_R}\right) \underset{R\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} X \text{ dans } L_G^2(\Omega_T).$$

Ainsi, en utilisant la commutativité entre $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}$ on obtient

$$X = \lim_{n\longrightarrow+\infty} P_n\left(B_{t_1}, \cdots, B_{t_p}\right) \text{ dans } L_G^2(\Omega_T).$$

Soit $\mathbb{H}_n$ l'espace linéaire engendré par $H_n\left(\int\limits_0^T \varphi(t)dB_t\right)$ tel que $\int\limits_0^T \varphi^2(t)d\langle B\rangle_t = 1$ $\mathcal{P}-q.s.$ si $n \geq 1$ et $\mathbb{H}_0 = \{\text{constantes}\}$. Alors pour tout

$$\varphi \in L^2([0,T], d\langle B\rangle_t) \text{ tel que} \int_0^T \varphi^2(t)d\langle B\rangle_t = 1 \ \mathcal{P}-q.s.,$$

on affirme que pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe (pas nécessairement unique) $(\varphi_i)_{i=1}^p \subset L^2([0,T], d\langle B\rangle_t), (\lambda_k)_{k=1}^p$ tel que $\sum\limits_{k=1}^p \lambda_k^2 = 1$ et $\varphi = \sum\limits_{k=1}^p \lambda_k\varphi_k$ $\mathcal{P}-q.s.$. Par exemple, si $0 = t_0 < \cdots < t_p = T$ est une subdivision de $[0,T]$ telle que $\lambda_k = \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi^2(t)d\langle B\rangle_t\right)^{\frac{1}{2}} \neq 0$, alors on a

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^p \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi^2(t)d\langle B\rangle_t\right) = \int_0^T \varphi^2(t)d\langle B\rangle_t = 1 \ \ \mathcal{P}-q.s..$$

On note

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{\lambda_k} I_{[t_{k-1},t_k[}.$$

Cela implique que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k\varphi_k = \varphi.$$

D'après le lemme (4.2.1), on a

$$H_n\left(\int_0^T \varphi(s)\,dB_s\right) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=n} C^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p} \prod_{k=1}^p \lambda^{\alpha_k} H_{\alpha_k}\left(\int_0^T \varphi_k(s)\,dB_s\right),$$

ainsi $\mathbb{H}_n \subset \mathcal{U}_n$, où $\mathcal{U}_n$ est l'espace linéaire engendré par

$$H_{\alpha_1}\left(\int_0^T \varphi_1(s)\,dB_s\right) H_{\alpha_2}\left(\int_0^T \varphi_2(s)\,dB_s\right) \ldots H_{\alpha_p}\left(\int_0^T \varphi_p(s)\,dB_s\right)$$

tel que

$$\varphi_1,\cdots,\varphi_p \in L^2\left([0,T], d\langle B\rangle_t\right) \text{ et } \alpha_1+\cdots+\alpha_p = n.$$

On a

$$\Pi_T \subset \bigvee_{n\in\mathbb{N}} EV\left\{\left(\sum_{k=1}^p \mu_k B_{t_k}\right)^n : \mu_1,\cdots,\mu_p \in \mathbb{R}\right\},$$

où EV signifie "l'espace vectoriel engendré par".

Notons que la double inégalité $\underline{\sigma}^2 dt \leq d\langle B\rangle_t \leq \overline{\sigma}^2 dt$ implique que l'intégrale d'un point par rapport à la mesure $d\langle B\rangle_t$ est égale à zéro. Cela nous permet de modifier, pour $\nu_1,\cdots,\nu_p \in \mathbb{R}$ donnés , tout $\varphi \in L^2\left([0,T], d\langle B\rangle_t\right)$ telle que $\int_0^T \varphi^2(t)d\langle B\rangle_t = 1$ $\mathcal{P}-q.s.$ en une fonction $\widetilde{\varphi}$ tel que $\widetilde{\varphi}(t_k) = \nu_k$ $(k=1,\cdots,p)$ et $\int_0^T \widetilde{\varphi}^2(t)d\langle B\rangle_t = 1$ $\mathcal{P}-q.s.$, alors

$$\sum_{k=1}^p \mu_k B_{t_k} = \sum_{k=0}^p \nu_k\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right) = \int_0^T \widetilde{\varphi}(s)\,dB_s,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & EV\left\{\left(\sum_{k=1}^p \mu_k B_{t_k}\right)^n : \mu_1,\cdots,\mu_p \in \mathbb{R}\right\} \\ \subset\ & EV\left\{\left(\int_0^T \varphi(s)\,dB_s\right)^n : \varphi \in L^2\left([0,T], d\langle B\rangle_t\right), \int_0^T \varphi^2(s)\,d\langle B\rangle_s = 1\ \mathcal{P}-q.s.\right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\Pi_T \subset \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{H}_n,$$

et d'après la densité de Π_T dans $L_G^2(\Omega_T)$, on obtient

$$L_G^2(\Omega_T) = \overline{\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{H}_n} = \overline{\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n},$$

où $\overline{A}$ est la fermeture de A dans $L_G^2(\Omega_T)$. D'autre part, si $[0,T]$ pour $\varphi \in L^2([0,T], d\langle B\rangle_t) : \int_0^T \varphi^2(t)d\langle B\rangle_t = 1$ $\mathcal{P}-q.s.$, alors $H_n\left(\int_0^T \varphi(t)dB_t\right) = \int_{\Delta_n} \overset{n}{\varphi} dB \in \mathcal{Z}_n$.

Il résulte que

$$\mathbb{H}_n \subset \mathcal{Z}_n \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par suite $L_G^2(\Omega_T) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ $\mathcal{P}-q.s.$ et $\mathbb{H}_n = \mathcal{Z}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons que l'égalité $L_G^2(\Omega_T) = \overline{\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n}$ nous donne une autre décomposition de $L_G^2(\Omega_T)$. ■

Conclusion et perspectives

Depuis les travaux de Peng en 2005, la théorie de la $G-$espérance est devenue un outil essentiel pour la généralisation du calcul stochastique classique au $G-$calcul stochastique. Dans notre travail, en plus de la difficulté du fait que la $G-$espérance n'est pas linéaire et que l'on perd la notion de produit scalaire dans L^2, on a réussi à démontrer un théorème portant sur la décomposition cahotique par rapport au $G-$mouvement Brownien. On a également proposé une méthode algébrique basée essentiellement sur les polynômes d'Hermite pour démontrer la $G-$inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, ce qui constitue une généralisation importante du cas classique et une avancée dans le développement du $G-$calcul stochastique.

La démonstration du théorème sur $G-$chaos de Weiner a été effectuée après avoir démontré une formule d'encadrement des $G-$intégrales stochastiques multiples et le théorème équivalent de "l'orthogonalité" qui a été la clé des développements de ce travail de recherche.

En outre, la $G-$espérance conditionnelle par rapport à une filtration en un temps d'arrêt n'est pas définie. Liées aux difficultés expliquées ci-dessus et certainement aussi avec la nouveauté de la théorie de la $G-$espérance, il existe encore beaucoup d'outils en calcul d'Itô classique qui ne sont pas encore traduit à la $G-$analyse stochastique.

Enfin, il nous semble intéressant d'étudier des applications probables de la $G-$analyse stochastique en économie, traitement d'images et en mathématiques financières particulièrement sur les modèles financiers à volatilité stochastique incertaine (système d'analyse de portefeuille).

Bibliographie

[1] H. Boutabia, I.Grabsia ; *Chaotic expansion in the $G-$expectation space*, Opuscula Math., 33 (2013) 4, 647 − 666.

[2] X. Cabre, L.A. Caffarelli *; Fully nonlinear elliptic partial differential equations*, American Math. Society (1997).

[3] Z.Chen ; *A property of backward stochastic differential equations*, C.R. Acad. Sci.Ser.I 326(1998)4, 483 − 488.

[4] G. Choquet ; *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier, (1955) 5, 131 − 295.

[5] M.Crandall, H. Ishii, P. L. Lions ; *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 27(1992)1, 1 − 67.

[6] L. Denis, M. Hu, S. Peng ; *Function spaces and capacity related to a sublinear expectation : Application to $G-$Brownian motion pathes*, Potential Anal. **34** (2011) 2, 139 − 161.

[7] L. Denis, C. Martini ; *A theoretical framework for the pricing of contingent claims in the presence of model uncertainty*, Ann. Appl. Probab. **16** (2006) 2, 827 − 852.

[8] Y. Dolinsky, M. Nutz, H. Mete Soner, *Weak approximation of $G-$expectations*, arXiv: 1103.0575v1 [math.PR] 2 Mar 2011.

[9] F. Gao ; *Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion*, Stoch. Proc. Appl, 119 (2009) , 3356 − 3382.

[10] M. Hu, S. Peng ; *On the representation theorem of $G-$ expectations and paths of $G-$Brownian motion,* Acta Math. Appl. Sini. Engl. Seri. **25** (2009) 3, 539 − 546.

[11] M. Hu ,S. Peng ; *$G-$Lévy processes under sublinear expectations*, arXiv: 0911.3533v1 [math.PR] 18 Nov 2009.

[12] Y. Hu , S. Peng ; *Some estimates for martingale representation under $G-$expectation*, arXiv: 1004.1098v1[math.PR] 7 Apr 2010.

[13] K. Itô ; *Multiple wiener integral*, J. Math. Soc. Japan, (1951) 3, 157 − 169.

[14] R.L. Karandikar ; *On pathwise stochastic integration*, Stochastic Process. Appl. **57** (1995) 1, 11 − 18.

[15] I. Karatzas, S.E. Shreve ; *Methods of mathematical finance*, Springer, New York 1998.

[16] M. Langovoy ; *Algebraic polynomials and moments of stochastic integrals*, arXiv :1102.4996v1 [math.PR] 24 Feb 2011.

[17] X. Li , S. Peng ; *Stopping times and related Itô's calculus with $G-$Brownian motion*, arXiv: 0910.3871v2 [math.PR] 6 Apr 2011.

[18] M. Nisio ; *On a nonlinear semigroup attached to optimal stochastic control*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13 (1976) , 513 − 537.

[19] W. Panyu ; *Multiple $G-$Itô integral in the G-expectation space*, Preprint : arXiv :1012.0368v1 [math.PR] 2 Dec 2010.

[20] S. Peng ; *$G-$expectation, $G-$Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type*. Stoch. Anal. Appl., Abel Symp., Springer Berlin (2007) **2**, 541 − 567.

[21] S. Peng ; *Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations,* Preprint : arXiv :0702358v1 [math.PR] 13 Feb 2007.

[22] S. Peng ; *$G-$Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty*, Preprint : arXiv :0711.2834v1 [math.PR] 19 Nov 2007.

[23] S. Peng ; *Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty with robust central limit theorem and $G-$Brownian motion*, Preprint : arXi :1002.4546v1 [math.PR] 24 Feb 2010.

[24] S. Peng ; *Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains*, Chin. Ann. Math. 26 (2005) 2, 159 − 184.

[25] S. Peng ; *Filtration Consistent Nonliear Expectations and Evaluations of Contingent Claims*, Acta Math. Appl. Sin., 20 (2004) 2, 1 − 24.

[26] S. Peng ; *Survey on normal distributions, Central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations*, Sci. China Math., 52 (2009) 7, 1391 − 1411.

[27] S. Peng ; *Multi-dimensional $G-$Brownian motion and related stochastic calculus under $G-$expectation,* Stochastic Process. Appl. (2008) 118, 2223 − 2253.

[28] S. Peng ; *A new central limit theorem under sublinear expectations*, arXiv: 0803.2656v1 [math.PR] 18 Mar 2008.

[29] S. Peng ; *G−Gaussian processes under sublinea expectations and q-Brownian motion in quantum mechanics*, arXiv :1105.1055v1 [math.PR] 5 May 2011.

[30] W. Schoutens ; *Stochastic processes and orthogonal polynomials*, Lecture notes in Statistics.v146 (2000) .Springer- Verlag, ISBN $0-387-95015-X$.

[31] H.M. Soner, N.Touzi, J.Zhang ; *Quasi-sure stochastic analysis through aggregation*, Electron. J. Probab. **16** (2011) $67, 1844-1879$.

[32] H. M. Soner, N. Touzi, J. Zhang ; *Martingale representation theorem for the G−expectation*, arxiv: 1001.3802v2, 2010.

[33] N. Wiener, *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math. **60** (1938) , $897-936$.

[34] J. Xu, B. Zhang ; *Martingale characterization of G−Brownian motion*, Stochastic Process. Appl. **119** (2009) $1, 232-248$.

[35] G. Xiaolin, S. Yang ; *The numerical properties of G−heat equation and related application*, arXiv :1304.1599v1 [math.NA] 5 Apr 2013

[36] F.Yulian ; *Some apriori estimates of G-BSDEs and the G-martingale representation for a special case*, arXiv :1303.0937v1 [math.PR] 5Mar 2013.

[37] B. Zhang, J. Xu, D.Kannan ; *Extension and application of Itô's formula under G-famework*, Stoch. Anal. Appl., 28 (2010) , $322-349$.