وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHEMATIQUES
Option : Probabilités et Statistiques

L'ESTIMATION BAYESIENNE EN FIABILITE EN PRESENCE DE DONNEES CENSUREES

Par
Mme. Talhi Hamida

Sous la direction de
Dr.Chadli Assia
Et
Co-Directeur Dr.Nadji Rahmania

Devant le jury

PRESIDENT	**Boutabia.Hacene**	**Pr.**	**U.B.M. ANNABA**
RAPPORTEUR	**Chadli Assia**	**M.C.A.**	**U.B.M. ANNABA**
CO-DIRECTEUR	**Nadji Rahmania**	**M.C.A.**	**U. Lille France**
EXAMINATEUR	**Seddik Ameur Nacira**	**Pr.**	**U.B.M. ANNABA**
EXAMINATEUR	**Djehiche Boualem**	**Pr.**	**KTH Royal Stockholm, Sweden**
EXAMINATEUR	**Felleg Houcine**	**Pr.**	**U.Tizi ouzou**

Année Universitaire
2013 / 2014

Dédicace

Je dédié ce travail à;

Ma chère et regrettée mère Messaouda

Mon mari et mon amour unique Raouf

Mon plus beau cadeau mon petit ange Mohamed Youcef

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à:

Madame Chadli Assia, mon encadreur, pour m'avoir proposé ce sujet et pour m'avoir encadré étroitement me poussant toujours à faire plus d'efforts. De plus j'ai beaucoup apprécié sa disponibilité à mon égard, ses encouragements constants et ses conseils judicieux. Je lui exprime ma profonde gratitude pour m'avoir fait profiter de ses connaissances, mais aussi de ses méthodes de travail, et surtout de sa rigueur scientifique. Grâce à elle j'ai découvert un domaine de recherche, qui combine l'analyse Bayesienne et la théorie de la fiabilité, qui aujourd'hui me passionne.

Monsieur Rahmania Nadji, mon co-encadreur, pour m'avoir soutenu d'une façon remarquable et pour avoir suivi de très près mon travail depuis le début. Pour ses nombreuses remarques pertinentes et pour toute l'aide qu'il m'a apporté, je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Monsieur Boutabia Hacene, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ma thèse.

Madame Seddik-Ameur Nacera pour avoir accepté de juger ce travail. Sa rigueur scientifique et son goût pour la recherche m'invitent à poursuivre dans cette voie.

Monsieur Djahiche Boualem, pour avoir accepté de faire le déplacement de si loin pour juger ce travail, je le remercie vivement pour tous ses conseils et toute l'aide qu'il m'a apporté sur le plan numérique.

Ma profonde gratitude va à Monsieur Felleg Hocine, pour toutes les orientations qu'il m'a donné pour actualiser ce travail. En effet, sa grande maitrise de l'analyse Bayesienne et des algorithmes de calculs m'ont permis d'avancer dans cette thèse.

Table des matières

Abstract

This thesis is dedicated to the statistical estimation of the reliability characteristics and predictors of the order statistics in survival models. We consider the Weibull model, the Bertholon models of concurrent failures and the bivariate exponential model. We study the estimation problem by applying a Bayesian approach, using a quadratic loss function for the Weibull and Bertholon models, and a plethora of loss functions including the asymmetric loss functions such as LINEX loss to estimate the parameters of the bivariate exponential model. Since the parameters of the Weibull distribution do not admit a natural conjugate probability distribution, the parameters are assumed to take a finite number of values. Under a quadratic loss function,

given censored data, we derive predictors of the order statistics of a future sample, independently of functionals of the observed sample.

Using two approximations due to Lindley, and Tierney and Kedane, we derive an estimator of the reliability function associated with the Bertholon model as well as the bivariate exponential model, based on type II censored sample data with a non-informative prior on the parameters. We also derive an estimator of the reliability function associated with the bivariate exponential model with, on one hand, a vague prior and, on the other hand, a conjugate prior. The obtained Bayesian estimator is given in integral form to which we apply simulation techniques such as the Markov Chain Monte-Carlo (MCMC) method and in particular the Metropolis-Hestings algorithm to derive numerical values of these estimators. Lastly, we apply Pitman's

criterion to compare between the performance of the maximum likelihood estimator and the performance of derived estimators of the parameters and the reliability function, under the different loss functions.

.

Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude de l'estimation des caractéristiques de fiabilité et la prédiction de statistiques d'ordre dans des modèles d'analyse de survie. Les modèles auquels, on s'est intéréssés sont les modèles de Weibull, les modèles à défaillances concourants de Bertholon et enfin les modèles exponentiels bivariés. L'approche utilisée est une approche Bayesienne avec une fonction de perte quadratique pour les deux premiers modèles et une palette de fonctions de perte, notament les fonctions de perte asymétrique dont la fonction de perte LINEX, pour le modèle exponentiel bivarié. L'inexistance d'une loi a priori conjuguée naturelle pour les paramètres de la loi de Weibull ; nous a amené à considérer le paramètre de forme comme étant discret, avec un nombre fini de valeurs. Sous une fonction de perte quadratique, et des données censurées de type II, on a calculé des prédicteurs de statistiques d'ordre d'un échantillon futur, indépendant de l'échantillon observé, et de certaines fonctions d'intérêt dépendant de ces statistique d'ordre.

Dans un modèle de Bertholon, comme dans un modèle exponentiel bivarié, on a calculé à l'aide de deux approximations introduites par Lindley et Tierney et Kedane, l'estimateur Bayesien de la fonction de fiabilité. Les données sont supposées censurées de type II, avec une loi a priori non informative sur les paramètres. De même, qu'on s'est penché sur le problème de l'estimation de la fonction de fiabilité dans un modèle exponentiel bivarié symétrique, avec d'une part, une loi a priori vague et d'autre part, une loi a priori conjuguée naturelle. L'expression de l'estima-

teur Bayesien reste sous forme intégrale, c'est pourquoi, nous utilisons les méthodes de simulations de Monte-Carlo ($MCMC$) et en particuler l'algorithme Metropolis-Hestings. Ces méthodes numériques nous ont permis de faire une étude comparative, à l'aide du critère de Pitman, des estimateurs des paramètres et de la fonction de fiabilité sous différentes fonctions de perte ; étant entendu que l'estimateur de référence reste l'estimateur du maximum de vraisemblance.

ملخـــص

هذه الرسالة تكرس لدراسة تقدير خصائص الموثوقية و تنبأ احصاءات النظام في نماذج تحليل البقاء على قيد الحياة. النماذج المعتمد عليها : نموذج ويبل ، نموذجبروتولون و أخيرا نموذج الأسي ثنائي المتغير.

النهج المتبع هو أسلوب بيز مع دالة الخطاء التربيعي بالنسبة للنموذج الأول و الثاني ، أما بالنسبة للنموذج الأسي ثنائي المتغير فقد أعتمد على مجموعة من الدوال الخاصة بحساب الأخطاء لاسيما الدوال الخاصة بحساب الأخطاء الغير متناظرة من بينها دالة حساب الأخطاء لينكس.

ان وجود قانون بديهي متزاوج طبيعي بالنسبة لعوامل قانون ويبل جعلنا نعتمد على عامل الشكل كأنه متقطع مع عدد منتهي من القيم.

تحت دالة حساب الأخطاء و معطيات محذوفة قمنا بحساب تنبؤات لإحصائيات النظام لعيّنة مستقبلية مستقلة عن العيّنة المرصودة، و لبعض دوال المصلحة متعلقة بهذه الأخيرة.

في نموذج بروتولون كما في النموذج الأسي ثنائي المتغير قمنا بحساب المُقدر البيزي لدالة الموثوقية و ذلك بالاعتماد على القيمتين التقريبيتين الموضوعة من طرف ليندلي ، تيرني و كيدان ، حيث اعتبرت المعطيات محذوفة من نوع II مع قانون بديهي غير اخباري على العوامل. و بالمثل ، تناولنا مشكلة تقدير دالة الموثوقية ضمن النموذج الأسي ثنائي المتغير المتناظر مع من جهة قانون بديهي غامض و من جهة أخرى قانون بديهي متزاوج طبيعي.

تعبير المقدر البيزي يبقى تحت شكل متكامل ، لهذا السبب نستعمل أساليب التقدير لـ مونتيكارلو و على وجه الخصوص خوارزم ميتروبوليس–هيتكنس.

هذه الأساليب الرقمية سمحت لنا بدراسة مقارنة ، بالاعتماد على مقياس بيتمان لمقدرات العوامل و دالة الموثوقية تحت مختلف دوال حساب الأخطاء ، على أن يكون مفهوم أن المقدر المرجع يبقى مقدر الحد الاقصى للمعقولية.

Introduction

La statistique est un ensemble de méthodes pour prendre des décisions raisonnables en présence d'incertitudes. Ainsi fut défini cette science par A.Wald (1950). En effet, la statistique est passée d'un problème de dénombrement au siècle dernier à une science à part entière avec les développement de la statistique mathématique et la théorie de la décision. Les fondements de la statistique mathématique ont été posé par Karl Pearson avec son célèbre mémoire publié dans le Philosophical Magasine vers 1900. De grands statisticiens tels Karl Pearson, Sir Roland Aylmer Fisher et Jerzy Neyman ont échafaudé les principes fondamentaux de la statistique mathématique ; celle-ci est devenue un outil indispensable d'aide à la prise de décision. Le statisticien doit, au vu des observations prendre une décision. Un problème statistique comporte les éléments suivants : l'ensemble des observations, $\mathcal{X}$, est l'ensemble de tous les points x qui représentent tous les résultats possibles pour le phénomène étudié. Les diverses lois étudiées, P^{θ}, forment un ensemble Ω ; ce sont des distributions de probabilité sur $\mathcal{X}$. Enfin, l'ensemble $\mathcal{D}$, représente, l'ensemble des décisions d possibles. Le problème posé est de choisir une décision d, à chaque fois qu'on disposera d'observations x. Le choix d'une décision d au vu d'une observation x induit nécessairement un coût C.

Le problème fondamental de la théorie de la décision peut être formulé comme suit :

Etant donné le triplet (Θ, D, C), où : Θ l'espace des paramètres, D l'espace des décisions finales , C la fonction de coût , et un élément aléatoire observable $\omega \in \Omega$

dont la loi de distribution P^{θ} dépend du paramètre $\theta \in \Theta$. Quelle règle de décision $\delta(\omega) \in D$ le statisticien doit-il choisir ?

Pour discréditer entre les différentes règles de décision , nous utilisons un critère appelé fonction de risque, et est défini par :

$$R(\theta, \delta) = E(C(\theta, \delta(\omega)))$$

Cette quantité représente la perte moyenne subie en choisissant $\delta(\omega)$ quand le paramètre θ est inconnu , et dépend de θ.

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour la résolution de tels problèmes de décisions. Deux approches sont utilisées dans cette thèse. L'approche classique qui consiste à maximiser la vraisemblance et l'approche Bayesienne qui englobe l'information dont on dispose a priori, par un retour d'expérience, sur un phénomène étudié en considérant le paramètre θ non pas comme inconnu, mais comme une variable aléatoire possédant une distribution appelée *loi a priori.* Cette approche consiste à combiner une distribution à priori selon un ensemble de croyances représentatives avec les données pour obtenir une distribution *à posteriori* sur laquelle on pratique l'inférence statistique. De plus, l'estimation bayésienne est dans un cadre probabiliste et tient automatiquement compte de l'incertitude des paramètres dans les prévisions. Le développement d'outils informatiques puissants contribue à la popularité croissante de cette méthode d'estimation. L'outil de simulation Markov Chain Monte Carlo ($MCMC$) utilisé est l'algorithme de Metropolis-Hastings. Il s'agit d'un algorithme simple, général et qui impose peu de restrictions.

Les phénomènes auquels on s'est intéressés concernent la survie, ou plus généralement la fiabilité ; les modèles étudiés sont donc, des modèles à distributions positives. Sur la base de différents types d'observations **censurées**, on s'est intéressés à **l'estimation** des paramètres qui caractérisent la loi du modèle, de la fonction de fiabilité $R(t)$ et du taux de panne $h(t)$. Le deuxième aspect de l'inférence statistique abordé dans cette thèse concerne le problème de la **prédiction** de statistiques d'ordre et de certaines fonctions d'intérêts dépendant de celles-ci.

Dans cette thèse, on présente différents modèles étroitement liés aux problèmes de survie. Le chapitre un est dédié à une introduction aux éléments de base de la théorie de la fiabilité, des modèles qui lui sont associés, de l'analyse Bayesienne avec différentes fonctions de perte. Le chapitre deux est consacré au modèle de Weibull et à un modèle $\mathcal{B}(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ caractéristique du vieillissement, défini par Bertholon en (2001). Pour le modèle de Weibull, on s'interesse à la prédiction de statistique d'ordre et de fonctions de celles-ci, sur un échantillon futur, indépendant de l'échantillon observé. On rappelle les résultats obtenus par Evans et Nigm [31] , dans le cas de données censurées de type II, puis on étudie le cas de données de type attribut. L'approche utilisée est une approche Bayesienne liée à une fonction de perte quadratique. Le chapitre trois est consacré au modèle exponentiel bivarié symétrique qui est une reparamétrisation du modèle de Freund [34] et de Block and Basu [22]. Du fait de la complexité des calculs pour obtenir des estimateurs des paramètres et de la fonction de fiabilité, des méthodes d'approximations introduites par Lindley [50] et par Kedane et Tierney [59] ont été utilisées dans une première partie ; la deuxième partie est dédiée à l'utilisation des méthodes de simulations de Monte Carlo, en particulier l'algorithme de Metropolis-Astings.on termine ce chapitre par une étude comparative des différents estimateurs obtenus sous différentes fonctions de perte à l'aide du critère de Pittman.

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Caractéristiques de fiabilité

Dans ce qui suit, nous considérons un individu susceptible de subir une fois et une seule un certain type dévénement (décès ou avarie par exemple). L'observation de la survenue - donnée non censurée - on non - donnée censurée- de cet événement chez l'individu constitue la donnée basale pour une modélisation de la survie.

Nous donnons ci-dessous les définitions des principaux outils utilisés en analyse de la survie. Pour chacun d'eux, nous précisons sa signification statistique d'une part, son interprétation en épidémiologie d'autre part.

Définition 1.1 *La " durée de vie" d'un individu est une variable aléatoire (v.a) X positive et continue. Sa fonction de répartition est la probabilité que l'événement se* *produise entre* 0 *et* x.

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \tag{1.1}$$

Définition 1.2 *La fonction de survie est définie par*

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 - F(x) \qquad (1.2) \\ &= \mathbb{P}(X > x). \end{aligned}$$

Remarquons que la théorie de la survie ayant son origine dans l'observation et le décompte de décès, le vocabulaire est resté marqué par les termes de " durée de vie", "décès" exclusivement. Cependant, cette théorie se confond d'un point de vue mathématique avec la théorie de la fiabilité. la" durée de vie" peut ainsi être l'âge d'apparition d'une maladie, le temps de sortie du chômage, etc.

Définition 1.3 *La fonction de risque instantané ou taux de hasard est la fonction*

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} \tag{1.3}$$

où f est la densité de probabilité de X.

Définition 1.4 *La fonction de risque cumulé est donnée par*

$$H(x) = \int_0^x h(u)du \tag{1.4}$$

Nous pouvons maintenant énoncer les deux résultats suivants :

Proposition 1.5 *La définition de la distribution de probabilité de* X *repose sur l'une des quatre données suivantes, qui sont équivalentents :*$S(x), f(x), \alpha(x)$ *et* $A(x)$.

Proposition 1.6 *Nous avons*

$$\begin{aligned} S(x) &= \mathbb{P}(X > x). \\ &= \underset{]0,x]}{\mathcal{P}} [1 - h(s)ds] \\ &= \exp\left(- \int_0^x h(s)ds \right) \\ &= \exp\left(-H(x)\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

$\underset{]0,x]}{\mathcal{P}}$ *et désigne le produit infini (ou produit intégrale).*

1.2 Censures et troncatures

Définition 1.7 *La variable de cencure C est définie par la possible non-observation de l'événement. Si l'on observe C, et non X, et que l'on sait que $X > C$ respectivement $(X < C, C_1 < X < C_2)$, on dit qu'il a censure à droite (réspectivement censure à gauche, censure par intervalle).*

Si l'événement se produit, X est "réalisée". S'il ne se produit pas (l'individu étant perdu de vue, ou bien exclu vivant), c'est C qui est "réalisée".

X peut être considérée comme la durée séparant un événement initial A d'un événement terminal B, ou comme la durée pendant laquelle un sujet reste dans un état donné (auquel cas A désigne l'entrée dans cet état et B la sortie de cet état - par exemple le chômage). La censure à droite, dont il sera essentiellement question par la suite, est due à la non-observation de B, dont on sait seulement qu'il sera postérieur à la dernière date d'observation du sujet.

Par ailleurs, la censure se distingue de la troncature : on dit qu'il y a troncature à droite (respectivement à gauche) lorsque la variable d'intérêt X_i (durée de vie du i^e individu) n'est pas observable quand elle est supérieure (respectivement inférieure) à un seuil $c > 0$ fixé.

Dans le cas de la censure, on sait que la variable X non observée est supérieure ou inférieure à une valeur C qui, elle, a été observée. La troncature, quand à elle, élimine de l' étude une partie des X_i, ce qui a pour conséquence de faire porter l'analyse uniquement sur la loi de X conditionnellement à l'événement $\{X < c\}$ (respectivement $\{X > c\}$).

Enfin, le mécanisme de censure est habituellement supposé être indépendant de l'événement étudié : on parle de censure non-informative (ingnorable). En pratique, cela veut dire que les individus ne doivent pas être censurés parce qu'ils ont un risque de décès pariculièrement élevé (ou faible). En d'autres termes, les individus exclus-vivants ou perdus de vue à une date t doivent être représentatifs des individus encore à risque à cet instant t.

Si la censure est informative, alors l'expression classique de la vraisemblance ne correspond plus à une vraisemblance complète, mais à une vraisemblance partielle qui peut être utilisée pour des inférences, bien qu'il y ait une perte d'efficacité des estimateurs produits (car toute l'information n'est pas utilisée). Ainsi, la censure informative est à l'origine d'un biais lors de l'analyse standard basée sur la vraisemblance (Kalbfleisch et Prentice, 1980 ; Schluchter, 1992).

Définition 1.8 *On dispose de données complètes quand le test de survie est mené jusqu'à la n^{ieme} panne. Le vecteur des observations est alors $x = (x_1, x_2, ...x_n)$;où x_i est la durée de vie de i^{ieme} item.*

La vraisemblance associée à un tel plan d'expérience est alors :

$$L(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \tag{1.6}$$

ce plan est noté $[n, B, n]$.

Définition 1.9 *La censure est dite **non aléatoire de type I** si, étant donné un n-échantillon $X_1.....X_n$, d'une variable aléatoire X, dépendant d'un paramètre θ, il existe une v.a. n-dimensionnelle $(C_1, ..., C_n)$ de $\mathbb{R}^{+n}$ telle que les observations consistent en (T_i, δ_i), où*

$$\begin{cases} T_i = X_i \wedge C_i \\ \delta_i = \mathbf{1}_{\{X_i \leq C_i\}} \end{cases}$$

Définition 1.10 *La censure est dite de **type II** si, étant donné un nombre positif fixé r et un n-échantillon $X_1.....X_n$, les observations consistent en (T_i, δ_i), où*

$$\begin{cases} T_i = X_{(i)} \wedge X_{(r)} \\ \delta_i = \mathbf{1}_{\left\{X_{(i)} \leq X_{(r)}\right\}} \end{cases}$$

où $X_{(1)} < X_{(2)} < ..... < X_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre de $X_1.....X_n$.

La vraisemblance est alors :

$$L(x/\theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(x_i) [1 - F(x_r)]^{n-r}$$

Définition 1.11 *On fixe la durée du test à un temps T ; les données issues de ce test sont résumées par le nombre x de pannes ayant eu lieu dans $[0, T]$; x=1,...,n. On dit alors qu'on dispose de données de type attribut.*

La vraisemblance est alors :

$$L(x/\theta) = \binom{n}{x} [F(T/\theta)]^x [1 - F(T/\theta)]]^{n-x}. \tag{1.7}$$

Il est supposé que tout item tombé en panne dans $[0, T]$ est non renouvellé.

Remarque 1.12 ***Remarque 1.13*** *Dans cette thèse, on utilise essentiellement des données complètes (modèle exponentiel bivarié), des données censurées de type II (modèle de Bertholon) et des données de type attribut (modèle de Weibull).*

1.3 Modèles usuels en fiabilité

Nous allons présenter dans cette section quelques lois qui peuvent être utilisées dans le cadre d'une étude sur des données de survie. Bien que n'importe quelle distribution d'une variable aléatoire continue non-négative puisse être utilisée, nous ne parlons ici que des lois les plus usitées.

1.3.1 Modèle exponentiel

Il s'agit du modèle le plus simple : on postule que le risque instantané est une constante

$$h(t) = \lambda, \qquad t \geq 0, \lambda > 0 \tag{1.8}$$

Compte tenu de la relation fondamentale entre la fonction de risque et la fonction de survie

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda du\right] = e^{-\lambda t} \tag{1.9}$$

Soit encore :

$$log(S(t)) = -\lambda t$$

En ce qui concerne la fonction de densité des temps de survie on a :

$$f(t) = \frac{ds}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \tag{1.10}$$

Expression où on reconnaît la fonction de densité d'une variable exponentielle de parametre λ.En d'autre termes, une fonction de risque constante implique une distribution exponentielle des durées d'évènement.

Soit $X_{1,.........,}X_n \overset{iid}{\rightsquigarrow} \exp(\lambda)$,calculons l'estimateur du maximum de vraisemblance pour cette loi. La vraisemblance est donnée par

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

En prenant le logarithme, nous obtenons

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i = n \ln \lambda - n\lambda\overline{x}$$

Nous cherchons la valeur $\widehat{\lambda}$ qui maximise cette expression. Nous trouvons

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \iff n(\frac{1}{\lambda} - \overline{x}) = 0 \iff \widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}}$$

Par ailleurs le risque ne varaint pas avec le temps, il s'agit d'un processus sans mémoire. pour cette raison, il est souvent utilisé en ingénierie pour modéliser par exemple la durée de vie de composants electroniques, mais a une extension limitée dans le domaine médical. Ceci est principalement dû au fait que cette distribution ne possède qu'un seul paramètre.

1.3.2 Distribution de Weibull

La distribution de Weibull est egalement une généralisation de l'exponentielle. Elle est caractérisée par deux paramètres,$\beta > 0, \eta > 0$ qui sont les paramètres de forme et d'échelle respectivement. La fonction de densité d'une telle loi est donnée par

$$f(t, \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta^\beta} t^{\beta - 1} \exp[-(\frac{t}{\eta})^\beta], \quad t > 0. \tag{1.11}$$

Ainssi nous remarquons que si $\beta = 1$,nous obtenons la loi exponentielle. La fonction de survie est $S(t) = \exp[-(\frac{t}{\eta})^{\beta}]$ et le taux de panne vaut $h(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$, qui est donc de l'ordre de $t^{\beta-1}$.

La fonction de risque est monotone croissante si $\beta > 1$, monotone décroissante si $\beta < 1$ et constante pour $\beta = 1$, c'est pourquoi ce paramètre est appelé paramètre de forme. Comme η est un paramètre d'échelle, différentes valeurs de η changent seulement l'échelle sur l'axe horizontal, et non pas la forme de base du graphe. Le modèle est assez flexible, et on a montré qu'il constitue une bonne description de plusieurs types de données de survie. Le fait que les fonctions de densité, de survie et de risque aient une forme relativement simple explique également la popularité du modèle.

Soit T une variable aléatoire suivant une loi de Weibull, sa moyenne et sa variance sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} E(T) &= \eta\Gamma(1+\frac{1}{\beta}) \\ Var(T) &= \eta^2\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - E(T)^2 \end{aligned}$$

Où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est la fonction gamma.

L'on parle de loi de Weibull décalée lorsque l'on considère que le taux est constant et égale à zéro jusqu'à un instant t_0.Dans ce cas, la fiabilité et le taux de hasard s'écrivent de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \exp[-(\frac{t-t_0}{\eta})^{\beta}] \\
h(t) &= \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^{\beta-1}
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

1.3.3 Distribution Log-Normale

La durée de vie T a une distribution log-normale si $Y = \log(T)$ est une distribution normale.

Ainsi, si Y est une gaussienne d'espérance μ_Y et de variance σ_Y^2 et donc de densité

$$
\phi(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], \qquad -\infty \quad < y < \infty \tag{1.13}
$$

alors,

$$
f(t) = \frac{1}{t\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], \; t > 0. \tag{1.14}
$$

où μ est le paramètre d'échelle et σ est le paramètre de forme. Contrairement à la loi normale, les paramètres ne donnent pas la moyenne et la variance de la loi.

et la fonction de survie d'une variable suivantune loi log-normale est donnée par

$$
S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(t)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \tag{1.15}
$$

Où $\Phi(.)$ est la fonction de répartition d'une gaussienne centrée-réduite,

$$
\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2} dv \tag{1.16}
$$

Le taux de panne est de la forme

$$h(t) = \frac{\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]}{1-\Phi\left(\frac{\log(t)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)} \tag{1.17}$$

Pour évaluer $S(t)$ et donc aussi $h(t)$ il est nécessaire d'évaluer numériquement l'intégrale ce qui affecte les temps de calcul.

Avec la distribution log-normale, la fonction de risque $h(t)$ est croissante puis décroissante avec $h(0) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$.

Comme la fonction de risque décroît pour de grandes valeurs de t, la distribution ne paraît pas plausible comme modèle de vie dans la plupart des situations. Malgré cela, ce modèle peut être intéressant lorsque de très grandes valeurs de t ne sont pas d'un intérêt particulier.

1.3.4 Modèle Gamma

La loi gamma comporte deux paramètres, $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$ Le premier est appelé paramètre d'échelle alors que γ est le paramètre de forme. La fonction de densité de cette loi est donnée par

$$f(t;\lambda,\gamma) = \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)}(\lambda t)^{\gamma-1}e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \tag{1.18}$$

où $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-x}dx$ est la fonction Gamma. La fonction de survie s'exprime comme

$$S(t) = \int_0^\infty \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)}(\lambda x)^{\gamma-1}e^{-\lambda x}dx \tag{1.19}$$

En choisissant le paramètre γ entier, nous obtenons la distribution dite de Erlang. Pour celle-ci, nous obtenons comme taux de panne

$$h(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\gamma-1}}{(\gamma-1)! \sum_{k=0}^{\gamma-1} (\lambda t)^k} \tag{1.20}$$

Il est facile de montrer que la fonction de risque $h(t)$ monotone croissante pour $\gamma > 1$.avec $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lambda$.pour $0 < \gamma < 1, h(t)$ est monotone décroissante avec $\lim_{t\to 0^+} h(t) = \infty$ et $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lambda$, Si l'on choisit $\gamma = 1$, nous obtenons une loi exponentielle de paramètre λ,ainsi, la loi exponentielle n'est qu'un cas particulier de la loi gamma.

La distribution gamma apparaît aussi dans des cas où la distribution exponentielle est utilisée, car la somme de variable aléatoires exponentielles indépendantes et identiquement distribuées suit une distribution gamma.

Plus précisement, si T_1,T_2,..., T_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\sum_{i=1}^n T_i$ suit une distribution gamma de paramètres λ et $\gamma = n$.

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi gamma est donné par

$$l(\lambda, \gamma) = n\lambda \ln \lambda - n \ln \Gamma(\gamma) + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - n\lambda\bar{t}$$

En dérivant par rapport à λ et en appelant $\widehat{\gamma}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance pour γ,nous obtenons

$$\widehat{\lambda} = \frac{\widehat{\gamma}}{\overline{t}}$$

Par contre, le calcule exacte de $\widehat{\gamma}$ n'est pas possible, ainssi, nous pouvons seulement exprimer un estimateur en fonction de l'autre.

1.3.5 Modèle de Bertholon : modèle à risque de défaillances concourants

Les Modèles de Bertholon développés dans [20] , permettent de décrire la durée de vie d'un matériel dont le taux de panne est constant jusqu'à une date t_0 ; c'est à dire que sa durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre λ_0. Aprés cette date, ce matériel est soumis à deux risques de défaillances concourants :

1) défaillances accidentelles modélisées par une durée de vie Y de loi $\exp(\lambda_0)$ et à taux de défaillance constant $h_0(t) = \dfrac{1}{\lambda_0}$.

2) Défaillances dues au vieillissement modélisées par une durée de vie W de loi de Weibull, $W(\lambda_1, \beta, t_0)$; où t_0 est un paramètre de positionnement, supposé dans la suite égal à zéro.

Le taux de défaillance serait alors $h_1(t) = \dfrac{\beta}{\lambda_1}\left(\dfrac{t}{\lambda_1}\right)^{\beta-1}$.

Soit T,la durée de vie d'un tel matériel ; il est évident que $T = \min(Y.W)$ où Y et W sont supposées indépendantes. On dit alors que T suit une loi de Bertholon $\mathcal{B}(\lambda_0, \lambda_1, \beta)$, dont la densité est définie par :

$$f(t)=\left\{\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\beta}{\lambda_1}(\frac{t}{\lambda_1})^{\beta-1}\right\}exp[-\left(\frac{t}{\lambda_0}+(\frac{t}{\lambda_1})^{\beta}\right)] \tag{1.21}$$

Les fonctions usuelles en fiabilité liées à ce modèle s'expriment de la façon suivante :

Le taux de défaillance est définie par :

$$h(x)=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{\beta}{\lambda_1}(\frac{t}{\lambda_1})^{\beta-1} \tag{1.22}$$

la fonction de survie définie par :

Apartir de l'expression de la fonction génératrice dans $[Bertholon, 2001]$, l'auteur calcule la moyenne et la variance dans le cas $\beta=2$. Dans le cas $\beta\neq 2$,l'auteur précise que les intégrales ne peuvent être calculées analytiquement. Les formules obtenues pour $\beta=2$:

$$E\left(X\right)=\lambda_1 e^{(\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_0^2})}\operatorname{erf}c\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_0}\right) \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= 2\left[\lambda_1 e^{-(\frac{\lambda_1}{2\lambda_0})2}\left(-\frac{\lambda_1^2}{2\lambda_0}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}c(\frac{\lambda_1}{2\lambda_0})+\frac{1}{2}\lambda_1 e^{-(\frac{\lambda_1}{2\lambda_0})2}\right)\right] \\ &\quad -\left[\lambda_1 e^{(\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_0^2})}\operatorname{erf}c\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_0}\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{1.24}$$

avec $\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-u^2}du$

Il est utile de donner les valeurs limites de ces statistiques

- $E(x) \overset{\lambda_0 \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ car $\operatorname{erf} c(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, et $Var(x) \longrightarrow \lambda_1^2 \left(1 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right)$.

Comme on pouvait s'y attendre, la moyenne et la variance de la distribution $\mathcal{B}$ tendent vers la moyenne et la variance de la distribution de w sous-jacente.

- $E(x) \overset{\lambda_1 +\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ car $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} c(x) \overset{x\to +\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4x^3}\right)$ et $Var(x) \longrightarrow \lambda_0^2$,

c'est-à-dire la moyenne et la variance de la distribution ζsous-jacente.

1.4 Analyse Statistique Bayesienne

On peut se référer à l'excellent ouvrage de C. Robert [57] concernant l'analyse statistique Bayesienne. Cependant, nous allons définir quelques éléments importants utilisés dans cette thèse.

1.4.1 Quelques définitions

L'ensemble des observations est noté x. avec $x = (x_1, ..., x_n)$; autrement dit, on dispose d'un échantillon de taille n. Le cadre statistique étant celui de la statistique inférentielle, les observations x_i sont donc considérées comme des réalisations de variables aléatoires, notées X_i

Définition 1.14 *On entend par information a priori sur le paramètre θ toute information disponoble sur θ en dehors de celle apportée par les observations*

Définition 1.15 *L'information a priori sur θ est entachée d'incertitude (si ce n'était pas le cas, le paramètre θ serait connu avec certitude et on n'aurait pas à l'estimer !). Il* *est naturel de modéliser cette information a priori au travers d'une loi de probabilité, appelée loi a priori. Sa densité est notée* $\pi(\theta)$.

Définition 1.16 *La loi a posteriori : C'est la loi conditionnelle de* θ *sachant* x. *Sa densité est notée* $\pi(\theta|x)$.*En vertu de la formule de Bayes, on a :*

$$\pi(\theta/x) = \frac{f(x/\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(x/\theta)\pi(\theta)d\theta} \tag{1.25}$$

Définition 1.17 *La statistique d'ordre d'un échantillon aléatoire* $(X_1, X_2, ...X_n)$ *est l'ensemble des valeurs placées on ordre croissant,* $(X_{(1)}, X_{(2)}, ...X_{(n)})$. *Les statistiques d'ordre sont des variables aléatoires qui satisfont* $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq .... \leq X_{(n)}$.

Les valeurs extrêmes sont $X_{(1)}$, de fonction de répartition définie par

$$G_1(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

et de densité

$$g_1(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}$$

et $X_{(n)}$; de fonction de répartition définie par

$$G_n(x) = F^n(x)$$

de densité

$$g_n(x) = nf(x)F^{n-1}(x)$$

Théorème 1.18 *Soit* $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq .... \leq X_{(n)}$ *la statistique d'ordre de l'échantillon aléatoire* $X_1, X_2, ...X_n$, *d'une population continue avec fonction de répartition* $F_X(x)$ *et densité* $f_X(x)$, *alors la densité de* $X_{(k)}$ *est*

$$f_{X(k)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f_X(x) \left[F_X(x)\right]^{k-1} \left[1 - F_X(x)\right]^{n-k} \tag{1.26}$$

1.4.2 prédiction Bayesienne

Le modèle statistique associé à ce problème de décision est $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P^\theta\right)_{\theta \in \theta}$ où $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ est l'espace des observations muni de sa tribu Borélienne ; $\left(P^\theta\right)_{\theta \in \Theta}$ une famille de mesures de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$; θ étant l'espace des paramètres.

Soient : $(D, \mathcal{D})$ l'ensemble des décisions muni de sa tribu Borélienne et v une fonction de perte supposée quadratique

$$\begin{aligned} \Theta \times D &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ v(\theta, d) &= \int_{R^+} (y-d)^2 f(y/d)\, dy. \end{aligned}$$

Dans ce cas précis on a : $\mathcal{X} = \{0, 1, ..., n\}$ et $D = \mathbb{R}^+$; ceci pour des données de type attribut et $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{+n}$ pour des données complètes ou censurées de type II.

On munit l'espace des paramètres Θ d'une mesure de probabilité τ de densité $\pi(\theta)$; la densité à postériori de θ est alors $\pi(\theta/x)$:

$$\pi(\theta/x) = \frac{L(x/\theta)\, \pi(\theta)}{\int_\Theta L(x/\theta)\, \pi(\theta)\, d\theta} \ . \tag{1.27}$$

Ou $L(x/\theta)$ est la fonction de vraisemblance quant on a observé x .On calcule ensuite pour chaque décision $d \in D$ le risque à postériori $R_{\tau}^{x}(d)$

$$\begin{aligned} R_{\tau}^{x}(d) &= \int_{\Theta} v(\theta, d)\, \pi(\theta/x)\, d\theta \qquad (1.28) \\ &= \int_{R^{+}} \int_{\Theta} (y-d)^{2} f(y/\theta)\, \pi(\theta/x)\, d\theta dy \\ &= E^{x}\left((y-d)^{2}\right). \end{aligned}$$

or

$$\pi(y/x) = \int_{\Theta} f(y/\theta)\, \pi(\theta/x)\, d\theta \qquad (1.29)$$

est une densité, appelée densité prédictive de Y quand x est observée.

On cherche $\min_{d \in D} R_{\tau}^{x}(d)$; celui-çi est atteint pour

$$\min_{d \in D} R_{\tau}^{x}(d) = V^{x}(Y)$$

On conclut que la règle de décision δ_b de Bayes associe à tout x $\in D$, un prédicteur $\delta_b(x)$ tel que :

$$\delta_b(x) = E^{x}(y) = E^{x}\left(E^{\theta}(Y)\right) = \int_{\Theta} E^{\theta}(Y)\, p(\theta/x)\, d\theta. \qquad (1.30)$$

1.4.3 Modélisation de l'information a priori

Le plus souvent on ne dispose pas suffisamment d'information a priori sur le paramètre inconnu θ pour construire la loi a priori. Dans la pratique on a recours à des lois usuelles (loi normales, loi gamma, etc) ou à des lois dites conjuguées (voir ci-dessous), l'information a priori étant alors utilisée pour déterminer les paramètres de la loi a priori, appelés hyperparamètres. En l'absence d'information a priori on introduira la notion de loi a priori non informative qui permet de rester dans un cadre bayésien, alors même que l'on ne dispose pas d'information a priori.

Lois a priori conjuguées

Définition 1.19 *La loi des observations étant supposée connue, on se donne une famille $\mathcal{F}$ de lois de probabilité sur Θ.On suppose que la loi a priori apartient à $\mathcal{F}$. Si dans ces conditions, la loi a posteriori appartient encore à $\mathcal{F}$, on dit que la loi a priori est conjugée.*

Lois a priori non informatives

Partons d'un exemple pour introduire la notion de loi a priori non informative. On considère le modèle statistique bayésien suivant : les $X_i|\theta$ sont i.i.d. et suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in \left]0,1\right[$. Il n'y a pas une unique loi a priori non informative pour le paramètre θ. On peut en fait proposer différentes lois a priori non informatives.

- En l'absence d'information a priori sur θ, il est naturel de proposer une loi uniforme sur θ car elle donne une probabilité égale aux intervalles de longueur l donnée, à savoir l.

- On peut également proposer la loi a priori (impropre) de Haldane $\pi(\theta) = [\theta(1-\theta)]^{-1} 1_{[0,1]}(\theta)$,en arguant que $E[\theta|x]$ est égal à l'estimateur du maximum de vraisemblance

- une alternative a été proposée par Jeffreys en 1960.

Définition 1.20 *Soit θ.un paramètre réel. On appelle loi a priori non informative de Jeffreys, la loi 'éventuellement impropre) de densité*

$$\pi_J(\theta) \propto [I(\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.21 *où $I(\theta)$ désigne l'information de Fisher apportée par $\boldsymbol{x}$ sur θ.*

1.4.4 Fonctions de perte

Fonction de perte quadratique

Proposée par Legendre (1805) et Gauss (1810), cette perte est sans aucun doute le critère d'évaluation le plus commun.

$$L(\theta, d) = (\theta - d)^2.$$

Dans son article de 1810, Gauss a déjà reconnu le caractère aléatoire de la perte quadratique et le défendait pour des raisons de simplicité. De telles critiques restent valides aujourd'hui. Mais cette perte n'en demeure pas moins utilisée car elle donne en général des solutions bayésiennes acceptables, i.e. celle fournies par une inférence non-décisionelle fondée sur la densité a posteriori.

Proposition 1.22 *L'estimateur de Bayes δ^π associé à la distribution a priori π et avec la perte quadratique, est donné par l'ésperance a posteriori*

$$\delta^\pi = E^\pi[\theta/x] = \frac{\int_\theta \theta f(x/\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_\theta f(x/\theta)\pi(\theta)d\theta} = \delta^\pi(x)$$

Démonstration.

$$E^\pi[(\theta-\delta)^2/x] = E^\pi[\theta^2/x] - 2\delta E^\pi[\theta/x] + \delta^2$$

. La perte actuelle a posteriori atteint un minimum à $\delta^\pi(x) = E^\pi[\theta/x]$ ∎

Corollaire 1.23 *L'estimateur de Bayes δ^π associé avec π et avec la perte quadratique pondérée $L(\theta,\delta) = \omega(\theta)(\theta-\delta)^2$, où $\omega(\theta)$ est une fonction non-négative, est*

$$\delta^\pi = \frac{E^\pi[\omega(\theta)\theta/x]}{E^\pi[\omega(\theta)/x]}$$

Corollaire 1.24 *Quand $\Theta \subseteq \Re^p$, l'estimateur de Bayes δ^π associé avec π et avec la perte quadratique pondérée $L(\theta,\delta) = (\theta-\delta)^t Q(\theta-\delta)$ est l'espérence a posteriori*

$$\delta^\pi(x) = E^\pi[\theta/x],$$

pour chaque matruce Q, de dimension p×p, symétrique et positive définie.

Fonction de perte erreur absolue

Une solution alternative à la perte quadratique en une dimension est l'utilisation de la perte erreur absolue :

$$L(\theta,d) = |\theta - d|, \tag{1.31}$$

considérée par Laplace (1773), ou, plus généralement une fonction miltilinéaire :

$$L_{k1,k2}(\theta,d)=\begin{cases} k_2(\theta-d), si\ \theta>d \\ \\ k_1(d-\theta), \sin on \end{cases} \tag{1.32}$$

Ces fonctions croissent moins vite que les fonctions de perte quadratique.

Huber (1964) propose un mélange entre les fonctions de perteberreur absolue et fonctions de perte aquadratique, de manière à garder la pénalisation quadratique autour de 0.

$$L(\theta,d)=\begin{cases} (d-\theta)^2, \text{si } \mid d-\theta\mid<k \\ \\ 2k\mid d-\theta\mid-k^2, \sin on \end{cases} \tag{1.33}$$

Proposition 1.25 *Un estimateur de Bayes associé à la distribution π et à la perte multi-linéaire, est un* $\begin{pmatrix} k_2 \\ \\ k_1+k_2 \end{pmatrix}$ *fractile de $\pi(\theta/x)$.*

Démonstration. Nous avons ■

$$E(L(\theta,a)/x)$$

$$=k_1\int_{-\infty}^{a}(a-\theta)\pi(\theta/x)d\theta+k_2\int_{a}^{+\infty}(\theta-a)\pi(\theta/x)d\theta$$

$$=k_1\int_{-\infty}^{a}P(\theta<y/x)dy)+k_2\int_{a}^{+\infty}P(\theta>y/x)dy$$

par une intégration par parties. Dérivant par rapport à a, nous obtenons alors

$$k_1 P(\theta < a/x) - k_2 P(\theta > a/x) = 0$$

soit

$$P(\theta < a/x) = \frac{k_2}{(k_1 + k_2)}$$

En particulier, si $k_1 = k_2$,c'est -à-dire en cas d'une erreur de perte absolue, l'estimateur de Bayes est la médiane postérieure, qui est l'estimateur obtenu par Laplace. Il est à noter que lorsque π a un support discontinu, la proposition précédente donne un exemple d'estimateur de Bayes multiple pour certaines valeurs de x.

Fonction de perte Linex

Une fonction de perte asymétrique très pratique est la fonction de perte Linex (Linear Exponential). Elle a été introduite par Varian (1975). Cette fonction croît presque exponentiellement d'un coté de zéro et est approximativement linéaire de l'autre côté. Sous l'hépothèse que la perte minimale est obtenue pour $\widetilde{u} = u$, la fonction de perte Linex pour u soit α, soit β s'exprime par

$$L(\boldsymbol{\Delta}) \propto \boldsymbol{e}^{a\Delta} - a\Delta - 1, \; a \neq 0, \tag{1.34}$$

où $\Delta = (\widetilde{u} - u)$ et $\widetilde{u}$ est un estimateur de u. Le signe et la norme de a représentent respectivement la direction et le degré de symétrie ($a > 0$: la surestimation est plus grave que la sous-estimation et vice-versa). Pour a proche de zéro, la perte Linex est approximativement la fonction de perte quadratique ; (1.34) devient

$$\boldsymbol{E}_u(L(\widetilde{u}-u)) \propto e^{\,a\widetilde{u}} E_u(e^{-au}) - a(\widetilde{u} - E_u(u)) - 1, \tag{1.35}$$

où $\boldsymbol{E}_u(.)$ représente l'espérance a posteriori relative à la densité a posteriori de u.

L'estimateur de Bayes $\widetilde{u_L}$de $\widetilde{u}$ sous la fonction de perte Linex est la valeur de $\widetilde{u}$ qui minimise (1.35) . Pour trouver l'etimateur, nous dérivons l'équation (1.35) par rapport à $\widetilde{u}$ et nous obtenons :

$$\frac{d}{d\widetilde{u}}(\boldsymbol{E}_u(L(\widetilde{u}-u))) = e^{\,a\widetilde{u}} E_u(e^{-au}) - a \tag{1.36}$$

En égalant cette expressionà 0, nous obtenons

$$e^{\,-a\widetilde{u}} E_u(e^{-au}) = a$$

d'où

$$e^{\,-a\widetilde{u}} = E_u(e^{-au})$$

En appliquant le logarithme, nous trouvons

$$-\,a\widetilde{u} = \log E_u(e^{-au})$$

Alors, l'estimateur de Bayes $\widetilde{u}_L$de u sous la fonction de perte Linex est

$$\widetilde{u}_L = -\frac{1}{a}\log(E_u(e^{-au})E_u(e^{-au}), \tag{1.37}$$

étant donné que $E_u(e^{-au})$ existe et est finie.

Fonction de perte de De-Groot

Intoduite par De-Groot (1970) et définie par :

$$L_2(\theta, d) = \left(\frac{\theta - d}{d}\right)^2 \Longrightarrow \qquad \overset{\wedge}{\theta}_B = \frac{E^{\pi}(\theta^2/\underline{x})}{E^{\pi}(\theta/\underline{x})} \tag{1.38}$$

Fonction de perte Entropie

Cette fonction de perte découle de la fonction de perte Linex, et a été utilisée par Calabria et Pulcini (1994) ; elle est définie par :

$$L_4(\theta, d) = \left(\frac{d}{\theta}\right)^p - p\ln\left(\frac{d}{\theta}\right) - 1 \Longrightarrow \qquad \overset{\wedge}{\theta}_B = \left[E\left(\theta^{-p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} \tag{1.39}$$

Définition 1.26 *Un estimateur $\hat{\theta}_1$ d'un paramètre θ domine dans le sens du critère de proximité de Pitman un autre estimateur $\hat{\theta}_2$, si pour tout $\theta \in \Theta$*

$$P_\theta\left[|\hat{\theta}_1 - \theta| < |\hat{\theta}_2 - \theta|\right] > 0.5 \tag{1.40}$$

Définition 1.27 *L'efficacité relative d'un estimateur $\hat{\theta_1}$ par rapport à l' estimateur $\hat{\theta_2}$ sous la fonction de perte $l(t, \theta)$ est définie par*

$$Eff = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} l(\hat{\theta}_1(i), \theta)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} l(\hat{\theta_2}(i), \theta)} \tag{1.41}$$

Où $\{\hat{\theta}_1(i),\ i = 1, \ldots, N\}$ et $\{\hat{\theta}_2(i),\ i = 1, \ldots, N\}$ sont des échantillons de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ respectivement .

Chapitre 2

Modélisation de vieillissement

2.1 Prédictions de statistiques d'ordres : Cas d'une loi de Weibull

On dispose d'une expérience E dans laquelle n items dont la dueée de vie est tirée d'une loi de densité $f(x/\underline{\theta})$ ou $\underline{\theta}$ est le vecteur des paramètres sont soumis à un test de survie. On s'interesse à la prédiction dans un échantillon futur indépendant du premier et de taille N de

$$Y = Y_{(k);} \qquad 1 \leq k \leq N \tag{2.1}$$

puis, à la prédiction dans un même échantillon de

$$Y = X_{(k)} - X_{(r)}; \qquad r < k \leq n \tag{2.2}$$

On suppose dans un premier temps que $f(x/\underline{\theta})$ est la densité d'une loi de Weibull à deux paramètres inconnus. Ce problème a été traité par Evans and Nigm [31] dans le cas où les observations issues de E sont censurées de type II ; on se propose de traiter le même problème quant les données issues de E sont de type attribut.

La densité d'une loi de Weibull à deux paramètres inconnus est donnée par :

$$f\left(x/\alpha, c\right) = c\alpha x^{c-1} \exp\left(-\alpha x^{c}\right); \qquad x \geq 0, \qquad \alpha \text{ et } c > 0 \tag{2.3}$$

Soit $\underline{x} = (x_1, ..., x_r)$ les r premières observations ordonnées d'un échantillon de taille n issu de (2.3) la vraisemblance s'écrit alors :

$$L\left(\underline{x}/\alpha, c\right) = c^{r}\alpha^{r}u^{c-1} \exp\left(-\alpha t\right) \qquad \text{où} \qquad u = \prod_{i=1}^{r} x_i \qquad t = \sum_{i=1}^{r} x_i^{c} + (n-r)\, x_r^{c}.$$

2.1.1 Cas où les données sont censurées de type II.

Prédiction sur un échantillon futur

Evans et Nigm (1980) [31] utilisent la méthode de Soland en supposant que le paramètre c ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs $c_1, ..., c_s$ avec les probabilités $p_{01}, ..., p_{0s}$ et conditionnellement à $c = c_j$, la densité a priori sur α est de type conjuguée naturelle $\mathcal{G}\left(g_{0j}, h_{0j}\right)$

$$\pi\left(\alpha/c_j\right) = \frac{h_{0j}^{g_{0j}}}{\Gamma\left(g_{0j}\right)} \alpha^{g_{0j}-1} \exp\left(-\alpha h_{0j}\right). \tag{2.4}$$

La densité a posteriori sur α conditionnellement à c_j est celle d'une loi $\mathcal{G}(g_j, h_j)$ où :

$$g_j = g_{0j} + r; \qquad h_j = h_{0j} + t_j; \qquad t_j = \sum_{i=1}^{r} x_i^{c_j} + (n-r)\, x_r^{c_j}.$$

La probabilité a posteriori de c_j est p_j :

$$p_j = \frac{p_{0j} c_j u^{c_j} h_{0j}^{g_{0j}} \Gamma(g_j) / \left(h_j^{g_j} \Gamma(g_{0j})\right)}{\sum\limits_{i=1}^{s} p_{0j} c_j u^{c_j} h_{0j}^{g_{0j}} \Gamma(g_j) / \left(h_j^{g_j} \Gamma(g_{0j})\right)}. \tag{2.5}$$

Avec la densité a priori adoptée sur (α, c), la densité prédictive $\pi(y/\underline{x})$ de $Y_{(k)}$ est donnée par :

$$\pi(y/\underline{x}) = k\binom{N}{k} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} c_j p_j g_j h_j^{g_j} \frac{y^{c_j}}{\left(h_j + y^{c_j}(N-k+1+i)^{g_j+1}\right)}. \tag{2.6}$$

La fonction de répartition prédictive est $F(y/\underline{x})$:

$$\begin{aligned} F(y/\underline{x}) &= k\binom{N}{k} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} p_j h_j^{g_j} (N-k+1+i)^{-1} \times \\ &\quad \left[h_j^{-g_j} - \left(h_j + (n-k+1+i)\, y^{c_j}\right)^{-g_j}\right]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Un prédicteur de $Y_{(k)}$ par rapport à une fonction de perte quadratique et sous l'hypothèse : $\forall j \; 1 \leq j \leq s;\; g_j > \dfrac{1}{c_j}$ est défini par : $E(Y/\underline{x}) = \int\limits_0^\infty y p(y/\underline{x})\, dy.$

On obtient aprés calcul en utilisant le changement de variable $u = y^{c_j}(N-k+1+i)$:

$$E\left(Y/\underline{x}\right)=k\binom{N}{k}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}\binom{k-1}{i}y_{j}p_{j}h_{j}^{\frac{1}{c_{j}}}\frac{\beta\left(1+\frac{1}{c_{j}},g_{j}-\frac{1}{c_{j}}\right)}{(N-k+1+i)^{1+\frac{1}{c_{j}}}}. \tag{2.8}$$

En particulier pour $k=1$

$$E\left(Y_{(1)}/\underline{x}\right)=k\binom{N}{k}\sum_{j=1}^{s}p_{j}g_{j}h_{j}^{\frac{1}{c_{j}}}\frac{\beta\left(1+\frac{1}{c_{j}},g_{j}-\frac{1}{c_{j}}\right)}{(N)^{1+\frac{1}{c_{j}}}}$$

Remarque 2.1 *Une connaissance a priori vague sur* (α,c) *correspond à une densité a priori sur* (α,c) *du type :* $p(\alpha,c)\propto\alpha^{-1}p(c)$. *Ce qui revient à prendre dans ce qui précède* $g_{0j}=h_{0j}=0$; $p(c)$ *étant une densité continue sur* c.

Prédiction sur un même échantillon

Avec la même densité a priori sur (α,c) ; la densité prédictive de Y Evans et Nigm [31] :

$$\begin{aligned} p\left(y/\underline{x}\right) &= (k-r)\binom{n-r}{k-r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=0}^{k-r-1}(-1)^{i}\binom{k-r-1}{i}p_{j}c_{j}gjy^{c_{j}-1}h_{j}^{g_{j}}\times \\ &\quad \left[\frac{y^{c_{j}-1}}{\left(h_{j}+(n-k+1+i)\,y^{c_{j}}\right)^{g_{j}+1}}\right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

La fonction de répartition prédictive est

$$F\left(y/\underline{x}\right)=1-(k-r)\binom{n-r}{k-r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=0}^{k-r-1}\frac{(-1)^{i}}{(n-k+1+i)}\binom{k-r-1}{i}\frac{p_{j}h_{j}^{g_{j}}}{\left(h_{j}+(n-k+1+i)\,y^{c_{j}}\right)^{g_{j}}}.$$

En particulier pour $k=r+1$, $F\left(y/\underline{x}\right)=1-\sum\limits_{j=1}^{s}\dfrac{p_{j}h_{j}^{g_{j}}}{\left(h_{j}+(n-r)\,y^{c_{j}}\right)^{g_{j}}}$.

Remarque 2.2 *: La principale difficulté de cette méthode est d'expliciter d'abord les valeurs de* (c_j, p_{0j}) *puis de* (g_{0j}, h_{0j}) *.*

2.1.2 Cas où les données sont de type attribut

Prédiction de $Y = Y_{(k)}, 1 \leq k \leq N$

Soit X le nombre de défaillances observées dans $[0, T]$;la vraisemblance s'écrit alors

$$L(x/\alpha, c) = \binom{n}{x} [1 - \exp(-\alpha T^c)^x \exp[-\alpha T^c (n - x)]; \qquad x = 0, ..., n].$$

On applique la méthode de Soland en supposant que c ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs $c_1, ..., c_s$ avec les probabilités $p_{01}, ..., p_{0s}$. La densité a posteriori $p(\alpha, c_j/x)$serait alors

$$\begin{aligned} p(\alpha, c_j/x) &= \frac{L(x/\alpha, c_j)\, p(\alpha/c_j)\, p_{0j}}{\sum\limits_{j=1}^{s} p_{0j} \int\limits_{0}^{\infty} L(x/\alpha, c_j)\, p(\alpha/c_j)\, d\alpha} \qquad (2.10) \\ &= \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{x} (-1)^i \binom{x}{i} p_{0j} \frac{h_{0j}^{g_{0j}}}{\Gamma(g_{0j})} \alpha^{g_{0j}-1} \exp[-\alpha (h_{0j} + T^{c_j} (n - x + 1))] \end{aligned}$$

avec $K = \sum\limits_{j=1}^{s} \sum\limits_{i=0}^{x} (-1)^i \binom{x}{i} p_{0j} \left[\dfrac{h_{0j}}{(h_{0j} + T^{c_j} (n - x + 1))} \right]^{g_{0j}}$.

Densité prédictive de $Y = Y_{(k)}, 1 \leq k \leq N$

La densité de la $k^{ième}$ statistique d'ordre d'un $N-$échantillon issu de (2.1) est

$$p\left(y/\alpha,c\right)=k\binom{N}{k}\alpha cy^{c-1}\sum_{m=0}^{k-1}\left(-1\right)^{m}\binom{k-1}{m}\exp\left[-\alpha\left(y^{c}\left(N-k+1+m\right)\right)\right]. \tag{2.11}$$

On note $(*)=p\left(y/\alpha,c_{j}\right)p\left(\alpha,c_{j}/x\right)$;

$$\begin{aligned}(*) &= p_{0j}\frac{k\binom{N}{k}}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{x}\left(-1\right)^{i+m}\binom{x}{i}\binom{k-1}{m}c_{j}y^{c_{j}-1}\frac{h_{0j}^{g_{0j}}}{\Gamma\left(g_{0j}\right)}\times\\ &\quad\left[\alpha^{g_{0j}}\exp\left[-\alpha\left(y^{c_{j}}\left(N-k+1+m\right)+T^{c_{j}}\left(n-x+i\right)+h_{0j}\right)\right]\right].\end{aligned}$$

On intègre $(*)$ par rapport à α puis on somme par rapport à j, on obtient :

$$\begin{aligned}p\left(y/x\right) &= \frac{k\binom{N}{k}}{k}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=0}^{x}p_{0j}\left(-1\right)^{i+m}\binom{x}{i}\binom{k-1}{m}g_{0j}c_{j}h_{0j}^{g_{0j}}\times\\ &\quad\left\{\frac{y^{c_{j}-1}}{\left[y^{c_{j}}\left(N-k+1+m\right)+T^{c_{j}}\left(n-x+i\right)+h_{0j}\right]^{g_{0j}+1}}\right\}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Fonction de répartition prédictive de $Y=Y_{(k)}, 1\leq k\leq N$

$F\left(z/x\right)=\int_{0}^{z}p\left(y/x\right)dy$; ce qui nous donne aprés intégration :

$$\begin{aligned}F\left(z/x\right) &= \frac{k\binom{N}{k}}{k}\sum_{j=1}^{s}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{x}\left(-1\right)^{i+m}\binom{x}{i}\binom{k-1}{m}p_{0j}h_{0j}^{g_{0j}}\left(N-k+1+m\right)^{-1}\times\\ &\quad\left\{\left[T^{c_{j}}\left(n-x+i\right)+h_{0j}\right]^{-g_{0j}}-\left[z^{c_{j}}\left(N-k+1+m\right)+T^{c_{j}}\left(n-x+i\right)+h_{0j}\right]^{-g_{0j}}\right\}.\end{aligned}$$

Predicteur de $Y_{(k)}$par rapport à une fonction de perte quadratique.

$E\left(y/x\right)=\int\limits_0^{\infty}yp\left(y/x\right)dy$, ce qui nous donne aprés calcul et sous l'hypothèse : $\forall j$ $1\leq j\leq s;\qquad g_j>\dfrac{1}{c_j}$

$$\begin{aligned} E\left(Y/x\right) &= \frac{k\binom{N}{k}}{k}\sum_{j=1}^{s}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{x}\left(-1\right)^{i+m}\binom{x}{i}\binom{k-1}{m}p_{0j}g_{0j}h_{0j}^{g_{0j}}\times \\ & \frac{\beta\left(\frac{1}{c_j}+1,g_{0j}-\frac{1}{c_j}\right)}{\left(N-k+1+m\right)^{\frac{1}{c_j}+1}}\left[T^{c_j}\left(n-x+i\right)+h_{0j}\right]^{\frac{1}{c_j}-g_{0j}}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Prediction sur un meme échantillon

Soit r le nombre de pannes observé dans $[0,T]$; $r<n$. On s'interesse à la prédiction de $Y=X_{(r+l)};l=1,...,n-r$. La densité de Y est donnée par :

$$f\left(y/\alpha,c\right)=l\binom{n-r}{l}\sum_{k=0}^{l-1}\left(-1\right)^k\binom{l-1}{k}c\alpha y^{c-1}\exp\left\{-\alpha\left(y^c-T^c\right)\left(n-r-l+k+1\right)\right\}1_{[T,+\infty[}\left(y\right). \tag{2.14}$$

Densité prédictive de Y

$$\begin{aligned} p\left(y/r\right) &= \sum_{j=0}^{s}\int\limits_0^{\infty}f\left(y/\alpha,c\right)p\left(\alpha,c_j/r\right)d\alpha=\frac{1}{K}l\binom{n-r}{l}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=0}^{r}\sum_{k=0}^{l-1}\left(-1\right)^{i+k}\binom{r}{i}\binom{l-1}{k} \\ & p_{0j}g_{0j}h_{0j}^{g_{0j}}\times \\ & c_jy^{c_j-1}\left\{T^{c_j}\left(n-r+i\right)+h_{0j}+\left(y^{c_j}-T^{c_j}\right)\left(n-r-l+k+1\right)\right\}^{-(g_{0j}+1)}1_{[T,+\infty[}\left(y\right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Fonction de répartition prédictive $F\left(z/r\right)=\int\limits_T^z p\left(y/r\right)dy$; soit pour $z\geq T$

$$F(z/r) = \frac{1}{K} l \binom{n-r}{l} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{i+k} \binom{r}{i} \binom{l-1}{k} p_{0j} h_{0j}^{g_{0j}} \times \qquad (2.16$$
$$\left\{ \left[T^{c_j}(n-r+i) + h_{0j}\right]^{-g_{0j}} - \left[h_{0j} + T^{c_j}(l+i-k-1) + z^{c_j}(n-r-l+k+1)\right]^{-g_{0j}} \right\}$$

Prédicteur de $Y = X_{(r+l)}$

Par rapport à une fonction de perte quadratique et sous l'hypothèse $\forall j \ 1 \leq j \leq s; \quad g_j > \frac{1}{c_j}$

$$E(Y/r) = \int_0^{\infty} y p(y/r)\, dy = \frac{1}{K} l \binom{n-r}{l} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{i+k} \binom{r}{i} \binom{l-1}{k} p_{0j} g_{0j} c_j h_{0j}^{g_{0j}} \times$$
$$\int_T^{\infty} \frac{y^{c_j}}{\left[h_{0j} + T^{c_j}(l+i-k-1) + y^{c_j}(n-r-l+k+1)\right]^{g_{0j}+1}} dy.$$

On fait le changement de variable $u = y^{c_j}$, on obtient aprés calcul :

$$E(Y/r) = \frac{1}{K} l \binom{n-r}{l} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{i+k} \binom{r}{i} \binom{l-1}{k} p_{0j} g_{0j} c_j h_{0j}^{g_{0j}} \times$$
$$\left\{ 1 - \frac{\beta_t\left(\frac{1}{c_j} - 1, g_{0j} - \frac{1}{c_j}\right)}{(n-r-l+k+1)^{\frac{1}{c_j}+1} \left[h_{0j} + T^{c_j}(l+i-k-1)\right]^{g_{0j} - \frac{1}{c_j}}} \right\}$$

où $t = T^{c_j} \left\{ \dfrac{h_{0j} + T^{c_j}(l+i-k-1)}{(n-r-l+k+1)} \right\}$.

2.2 L'estimation Bayésienne De La Fonction De Survie dans un Modèle De Bertholon

Dans ce travail, on s'interesse à l'estimation Bayésienne de la fonction de survie définie par :

$$S(t) = \exp[-\left(\frac{t}{\lambda_0} + (\frac{t}{\lambda_1})^2\right)] \tag{2.17}$$

Sur la base d'un échantillon censuré de type II, on construit un estimateur Bayesien $S_B^*(t)$ avec une loi a priori sur les paramètres λ_0 et λ_1 de type conjuguée naturelle (prior 1) puis avec une loi a priori non informative (prior 2). Cet estimateur est ensuite comparé à l'estimateur du maximum de vraisemblance S_{MLE}^*. On utilise pour le calcul de $S_B^*(t)$ les méthodes d'approximations de Lindley[50] et Tierny and Kedane[59] .

2.2.1 Distributions a priori et a postériori

les choix de la loi a priori sur $(\lambda_0, \quad \lambda_1, \beta)$.sont définis par Bertholon[20] de la manière suivante :

on prend : $\beta = 2$, $\eta_0 = \dfrac{1}{\lambda_0}$, $\eta_1 = \dfrac{1}{\lambda_1}$

Pour les paramètres η_0, η_1; on choisit des conjuguées naturelles

$$\pi(\eta_0, \eta_1, 2) = \pi(\ \eta_1 \backslash 2)\pi(\eta_0 \backslash 2, \eta_1)$$

$\eta_0 \rightsquigarrow \mathcal{G}(a,b)$

$$\pi(\boldsymbol{\eta}_0 \backslash \mathbf{2}, \boldsymbol{\eta}_1\ ) \propto \frac{b^a}{\Gamma(a)} \boldsymbol{\eta}_0^{a-1} \boldsymbol{.} \boldsymbol{e}^{-b\eta_0}.$$

et

$\eta_1 \rightsquigarrow \mathcal{G}\left[c,d\right]$

$$\boldsymbol{\pi}(\ \boldsymbol{\eta}_1\ \backslash \mathbf{2}) = \frac{d^c 2\eta_1^{2c-1}.e^{-d\eta_1^2}}{\Gamma(c)}$$

la densité a posterior

On munit l'espace des paramètres θ d'une mesure de probabilité τ de densité $\pi(\eta_0, \eta_1, 2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue ; la densité a posteriori de $(\eta_0, \eta_1, 2)$ est alors

$$\pi(\eta_0, \eta_1, 2\backslash x) = \frac{\mathcal{L}(\underline{x}, \eta_0, \eta_1)\pi(\eta_0, \eta_1, 2)}{\iint\limits_{\theta} \mathcal{L}(\underline{x}, \eta_0, \eta_1)\pi(\eta_0, \eta_1, 2) d\eta_0 d\eta_1} \tag{2.18}$$

$$= \frac{\mathcal{L}(\underline{x}, \eta_0, \eta_1) \dfrac{d^c 2\eta_1^{2c-1}.e^{-d\eta_1^2}}{\mu(c)} \frac{b^a}{\mu(a)} \boldsymbol{\eta}_0^{a-1} \boldsymbol{.} \boldsymbol{e}^{-b\eta_0}}{\iint\limits_{\theta} \mathcal{L}(\underline{x}, \eta_0, \eta_1) \dfrac{d^c 2\eta_1^{2c-1}.e^{-d\eta_1^2}}{\mu(c)} \dfrac{b^a}{\mu(a)} \boldsymbol{\eta}_0^{a-1} \boldsymbol{.} \boldsymbol{e}^{-b\eta_0} d\eta_0 d\eta_1} \tag{(*)}$$

2.2.2 L'estimation Bayésienne de $\mathbf{S}(t)$

On dispose d'un n-échantillon $(X_1, ...X_n)$ issu de (1.21) , les données sont supposées cencurées de type II, c'est à dire que seules $(X_1, X_2 ... X_r)$ sont observées.

La vraisemblance $l(\theta/\underline{\mathrm{x}})$,où $\underline{\mathrm{x}}$ représente le vecteur des observations et $\theta = (\lambda_0,\ \ \lambda_1)$ le vecteur des paramètres s'écrit :

$$l(\theta/x)=\left[\exp-\left(\frac{x_r}{\lambda_0}+(\frac{x_r}{\lambda_1})^2\right)\right]^{n-r}\exp\left[-\sum_{i=1}^{r}\left(\left(\frac{x_i}{\lambda_0}\right)+(\frac{x_i}{\lambda_1})^2\right)\right]\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{2}{\lambda_1}(\frac{x_i}{\lambda_1})\right) \tag{2.19}$$

L'expression $(*)$ ne peut etre résolue explicitement dans ce cas, c'est pourquoi, nous allons utiliser des méthodes d'approximations.

Dans ce travail on prend comme loi a priori une loi non informative $\pi(\lambda_{0,}\lambda_1)=\frac{1}{\lambda_0\lambda_1}$

la densité à postoriori est donnée par :

$$\pi(\theta/x)\propto\frac{1}{\lambda_0\lambda_1}\left[\exp-\left(\frac{x_r}{\lambda_0}+(\frac{x_r}{\lambda_1})^2\right)\right]^{n-r}\exp\left[-\sum_{i=1}^{r}\left(\left(\frac{x_i}{\lambda_0}\right)+(\frac{x_i}{\lambda_1})^2\right)\right]\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{2}{\lambda_1}(\frac{x_i}{\lambda_1})\right) \tag{2.20}$$

Fonction de perte quadratique

L'estimateur Bayesien de $S\,(t)$ sous une fonction de perte quadratique n'est autre que la moyenne à posteriori, le choix de cette fonction de perte est approprié dans tout problème de décision où peuvent etre présents de larges erreurs $[C.Robert]$ [35].

$$\begin{aligned} S_B^*(t) &= E(S(t)/x) \qquad (2.21)\\ &= \frac{\iint \exp[-\left(\frac{t}{\lambda_0}+(\frac{t}{\lambda_1})^2\right)]l(\lambda_0,\lambda_1/x)\pi(\lambda_0,\lambda_1/x)d\,(\lambda_0,\lambda_1)}{\iint l(\lambda_0,\lambda_1/x)\pi(\lambda_0,\lambda_1/x)d\,(\lambda_0,\lambda_1)}\end{aligned}$$

Le rapport des intégrales de l'équation (2.21) ne semble pas prendre une forme fermée, nous devons considérer certaines méthodes d'approximation. Il est à noter que sous une forme similaire à l'équation (2.21) peut facilement être tiré au titre d'un conjugué avant impliquant des paramètres antérieurs.

De nombreuses tentatives ont été faites pour rapprocher le rapport des intégrales de la forme ci-dessus. Deux méthodes d'approximation telles sont celles de Lindley (1980) et Tierney et Kadane (1986). Lindley a approché le rapport dans son ensemble et produit un résultat numérique unique, tandis que Tierney et Kadane utilisent la séparation approximative du numérateur et du dénominateur, qui nécessite la mise en place de deux fonctions distinctes.

2.2.3 La procédure de Lindley

Lindley (1980) a dévelopé la procedure d'approximation pour les intégrales de la forme

$$\frac{\displaystyle\int w(\theta)\exp\{\mathbf{L}(\theta)\}\,d\theta}{\displaystyle\int v(\theta)\exp\{\mathbf{L}(\theta)\}\,d\theta} \tag{2.22}$$

avec $\theta = (\theta_1, \theta_2....\theta_m), \mathbf{L}(\theta) = \log\{l(\theta/x)\}$ est le logarithme de fonction de vraisemblance, et $w(\theta)$, $v(\theta)$ sont des fonction arbitraires de θ.

si $v(\theta)$est la densité à priori de θ et $w(\theta) = \Phi(\theta)v(\theta)$, l'Eq(2.22) donne l'espérance à postiriori de $\Phi(\theta)$, telle que :

$$E(\Phi(\theta)/x) = \frac{\displaystyle\int \Phi(\theta)\exp\{\mathbf{L}(\theta)+p(\theta)\}\,d\theta}{\displaystyle\int \exp\{\mathbf{L}(\theta)+p(\theta)\}\,d\theta} = \frac{\displaystyle\int \Phi(\theta)\exp\{\mathbf{\Lambda}(\theta)\}\,d\theta}{\displaystyle\int \exp\{\mathbf{\Lambda}(\theta)\}\,d\theta} \tag{2.23}$$

avec $p(\theta) = \log v(\theta)$ et $\mathbf{\Lambda}(\theta) = \log\{\pi(\theta/x)\} = \mathbf{L}(\theta) + p(\theta)$ est le logarithme de la distribution a postoriori de θ, il est évident que le maximum de $\mathbf{\Lambda}(\theta) = \log\{\pi(\theta/x)\}$ nous donne le mode à postériori de θ. Lindley (1980) a obtenu l'expression requise pour $E(\Phi(\theta)/x)$.

Prenons $S_t = \Phi(\theta)$, En étulisant la méthode de Lindley, l'estimateur bayésien pour S_t dans l'Eq (2.17) devient

$$S_t^* = \Phi(\widehat{\theta}) + \frac{1}{2}\sum \Phi_{ij}(\widehat{\theta})\tau_{ij} + \frac{1}{2}\sum \Lambda_{ijk}(\widehat{\theta})\tau_{ij}\tau_{kl} \tag{2.24}$$

toutes les fonction sur la côté droite de l'Eq (2.24) .doivent être évaluées à $\widehat{\theta}$, le mode postérieure de θ. la sommation sur tous les indices et de 1 à m, et chaque indice indique une différenciation par rapport à la variable avec cet indice, c'est à dire :

$$\Phi_{ij} = \frac{d^2\Phi}{d\theta_i\theta_j}, \qquad \mathbf{\Lambda}_{ijk} = \frac{d^3\Phi}{d\theta_i d\theta_j d\theta_k}, ...etc \tag{2.25}$$

les τ_{ij} sont les (i,j)ime éléments de la l'inverse de la matrice Hessianne au signe négative. la matrice des second dérivées pour $\mathbf{\Lambda} : \{\tau_{ij}\} = \{-\mathbf{\Lambda}_{ij}\}^{-1}$.

donc l'Eq (2.24) :

$$
\begin{aligned}
S_t^* &= \Phi\left(\widehat{\theta}\right)+\frac{1}{2}\Phi_{11}\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{11}+\Phi_{12}\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{12}+\frac{1}{2}\Phi_{22}\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{22} \qquad (2.26\\
&+\frac{1}{2}\Lambda_{111}\left\{\Phi_1\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{11}^2+\Phi_2\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{11}\tau_{12}\right\}+\frac{1}{2}\Lambda_{112}\left\{3\Phi_1\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{11}\tau_{12}+\Phi_2\left(\widehat{\theta}\right)\left(\tau_{11}\tau_{12}+2\tau_{12)}^2\right)\right\}\\
&+\frac{1}{2}\Lambda_{122}\left\{3\Phi_2\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{22}\tau_{12}+\Phi_1\left(\widehat{\theta}\right)\left(\tau_{11}\tau_{12}+2\tau_{12)}^2\right)\right\}\\
&+\frac{1}{2}\Lambda_{222}\left\{\Phi_2\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{22}^2+\Phi_1\left(\widehat{\theta}\right)\tau_{22}\tau_{12}\right\}
\end{aligned}
$$

dans notre cas, avec m=2 et $\theta = (\lambda_{0,}\lambda_1)$. on obtient d'aprés d'Eq(2.17) avec $S_t = \Phi(\theta)$

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{d\Phi}{d\lambda_0}=\frac{t}{\lambda_0^2}\Phi(t) \\
\Phi_{11} &= \frac{d^2\Phi}{d^2\lambda_0}=\left(\frac{t^2}{\lambda_0^4}-2\frac{t}{\lambda_0^3}\right)\Phi(t)\\
\Phi_2 &= \frac{d\Phi}{d\lambda_1}=2\frac{t^2}{\lambda_1^3}\Phi(t)\\
\Phi_{22} &= \frac{d^2\Phi}{d^2\lambda_2}=\left(\frac{4t^4}{\lambda_1^6}-\frac{6t^2}{\lambda_1^4}\right)\Phi(t)\\
\Phi_{12} &= \frac{d^2\Phi}{d\lambda_0 d\lambda_1}=2\frac{t^3}{\lambda_0^2\lambda_1^3}\Phi(t)
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

on obtien le mode a postoriori of eq (2.20) par la resolution du ce système

$$
\begin{cases}
\frac{d\ln\{\pi(\theta\backslash x)\}}{\lambda_0}=0\\
\frac{d\ln\{\pi(\theta\backslash x)\}}{\lambda_1}=0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-\frac{1}{\lambda_0}+(n-r)\dfrac{x_r}{\lambda_0^2}+\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{x_i}{\lambda_0^2}-\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\left(\lambda_1^2+2\lambda_0x_i\right)}=0\\
-\frac{1}{\lambda_1}+(n-r)\dfrac{2}{\lambda_1^3}x_r^2+\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{2}{\lambda_1^3}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{4\lambda_0x_i}{\lambda_1^3+2\lambda_0x_i\lambda_1}=0
\end{cases}
\tag{2.28}
$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(\theta) &= \ln\{\pi(\theta \setminus x)\} = \\
&\ln\left\{\frac{1}{\lambda_0\lambda_1}\left[\exp[-\left(\frac{x_r}{\lambda_0}+(\frac{x_r}{\lambda_1})^2\right)\right]^{n-r}\exp\left[-\sum_{j=1}^{r}\left(\left(\frac{x_i}{\lambda_0}\right)+(\frac{x_i}{\lambda_1})^2\right)\right]\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{2}{\lambda_1}(\frac{x_i}{\lambda_1})\right)\right.
\end{aligned} \quad (2.29$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{11} &= \frac{d^2\Lambda}{d^2\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0^2} - 2\frac{x_r}{\lambda_0^3}(n-r) - \sum_{i=1}^{r}\frac{2}{\lambda_0^3}x_i + \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_0^2}\frac{\lambda_1^2}{\left(\lambda_1^2+2\lambda_0x_i\right)^2}\left(\lambda_1^2+4\lambda_0x_i\right) \\
\Lambda_{12} &= \frac{d^2\Lambda}{d\lambda_0 d\lambda_1} = \sum_{i=1}^{r}\left(-4\frac{\lambda_1}{\left(\lambda_1^2+2\lambda_0x_i\right)^2}x_i\right) \\
\Lambda_{22} &= \frac{d^2\Lambda}{d^2\lambda_1} = -\frac{1}{\lambda_1} + 6\frac{x_r^2}{\lambda_1^4}(n-r) - \sum_{i=1}^{r}\frac{6}{\lambda_1^4}x_i^2 + \sum_{i=1}^{r}4\lambda_0x_i\left(\frac{3\lambda_1^2+2\lambda_0x_i}{\left(\lambda_1^3+2\lambda_0x_i\lambda_1\right)^2}\right) \\
\Lambda_{111} &= \frac{d^3\Lambda}{d^3\lambda_0} = -\frac{2}{\lambda_0^3} + 6\frac{x_r}{\lambda_0^4}(n-r) - \sum_{i=1}^{r}-\frac{6}{\lambda_0^4}x_i \\
&+ \sum_{i=1}^{r}-\frac{2}{\lambda_0^3}\frac{\lambda_1^2}{\left(\lambda_1^2+2\lambda_0x_i\right)^3}12\lambda_0^2x_i^2+6\lambda_0\lambda_1^2x_i+\lambda_1^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{222} &= \frac{d^3\Lambda}{d^3\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1^2} - 24\frac{x_r^2}{\lambda_1^5}(n-r) - \sum_{i=1}^{n}-\frac{24}{\lambda_1^5}x_i^2 \\
&- \sum_{i=1}^{n}16\frac{\lambda_0}{\lambda_1^3}\frac{x_i}{\left(\lambda_1^2+2\lambda_0x_i\right)^3}\left(2\lambda_0^2x_i^2+3\lambda_0\lambda_1^2x_i+3\lambda_1^4\right) \qquad (2.30) \\
\Lambda_{112} &= \frac{d^3\Lambda}{d^2\lambda_0 d\lambda_1} = \sum_{i=1}^{r}4x_i\frac{3\lambda_1^2-2\lambda_0x_i}{\left(\lambda_1^2+2\lambda_0x_i\right)^3} \\
\Lambda_{122} &= \frac{d^3\Lambda}{d\lambda_0 d^2\lambda_1} = \sum_{i=1}^{r}4\frac{3\lambda_1^2-2\lambda_0x_i}{\left(\lambda_1^2+2\lambda_0x_i\right)^3}x_i
\end{aligned}$$

de (2.19) l'EMV de $\lambda_1$etλ_0 sont la solution des équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\ln(\left[\exp[-\left(\frac{x_r}{\lambda_0}+(\frac{x_r}{\lambda_1})^2\right)\right]^{n-r}\exp\left[-\sum_{i=1}^{r}\left(\left(\frac{x_i}{\lambda_0}\right)+(\frac{x_i}{\lambda_1})^2\right)\right]\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{2}{\lambda_1}(\frac{x_i}{\lambda_1})\right))}{d\lambda_0}=0 \\ \dfrac{d\ln(\left[\exp[-\left(\frac{x_r}{\lambda_0}+(\frac{x_r}{\lambda_1})^2\right)\right]^{n-r}\exp\left[-\sum_{i=1}^{r}\left(\left(\frac{x_i}{\lambda_0}\right)+(\frac{x_i}{\lambda_1})^2\right)\right]\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{2}{\lambda_1}(\frac{x_i}{\lambda_1})\right))}{d\lambda_1}=0 \end{array} \right.$$

2.2.4 La Méthode de Kadane et Tierney

Le rapprochement de Lindley exige l'évaluation des dérivés du tiers de la fonction vraisemblance ou de la densité a posteriori qui peut être très fastidieux et exige une grande précision de calcul. Tierney et Kadane (1986) ont donné une méthode alternative d'évaluation du rapport des intégrales de la forme de l'équation (2.22)

Soit, les deux expressions :

$$l=\frac{\mathbf{L}(\theta/x)+\log p(\theta)}{n}, l^{*}=\frac{\log\Phi(\theta)+\log v(\theta)+\mathbf{L}(\theta/x)}{n} \tag{2.31}$$

Donc L'Eq (2.22) prend cette forme

$$\mathbf{E}(\Phi(\theta)/x=\frac{\displaystyle\int\exp\left\{nl^{*}\right\}d\theta}{\displaystyle\int\exp\left\{nl)\right\}d\theta} \tag{2.32}$$

Pour plus de détails, voir Tierney et Kadane [59]. Alors que Lindley [50] élargit à la fois le numérateur et le dénominateur de l'équation (2.23) au sujet d'un point commun (le mode a posteriori), Tierney et Kadane (1986) ont développé chaque intégrale séparément sur le point qui maximise l'intégrale. Cette méthode ne nécessite que les dérivées premières et deuxièmes de la densité a posteriori. D'a :près Tierney et Kadane (1986), l'estimateur de Bayes dans l'équation (*), dans le cas multiparamétrique, prend la forme :

$$\widehat{\mathbf{E}}(\Phi(\theta)/x = \left(\frac{\mid \Sigma^* \mid}{\mid \Sigma \mid}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[n\left\{l^*\left(\widehat{\theta}^*\right) - l\left(\widehat{\theta}\right)\right\}\right] \qquad (**)$$

ou $\widehat{\theta}^*$ et $\widehat{\theta}$ maximisent l^* et l respectivement, et Σ^* et Σ sont les inverses de l'Hsiennes de l^* et l au signe négative pour$\widehat{\theta}^*$et$\widehat{\theta}$ respectivement.

donc Σ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{-d^2 l}{d\lambda_0^2} & \frac{-d^2 l}{d\lambda_0 d\lambda_1} \\ \frac{-d^2 l}{d\lambda_0 d\lambda_1} & \frac{-d^2 l}{d\lambda_1^2} \end{pmatrix} \qquad (2.33)$$

De même l'expression de la matriceΣ^*, impliquant les dérivées partielles de la méthode à appliquer, nous devons maximiser :

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{n}\left\{ \begin{array}{c} \ln\frac{1}{\lambda_0} + \ln\frac{1}{\lambda_1} - (n-r)\left(\frac{x_r}{\lambda_0} + (\frac{x_r}{\lambda_1})^2\right) - \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{x_i}{\lambda_0} + (\frac{x_i}{\lambda_1})^2\right) \\ + \sum_{i=1}^{r}\ln\left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{2}{\lambda_1}(\frac{x_i}{\lambda_1})\right) \end{array} \right\} \qquad (2.34) \\ l^* &= \frac{1}{n}\left[\begin{array}{c} [-\left(\frac{t}{\lambda_0} + (\frac{t}{\lambda_1})^2\right)] + \log\frac{1}{\lambda_0} + \log\frac{1}{\lambda_1} - (n-r)\left(\frac{x_r}{\lambda_0} + (\frac{x_r}{\lambda_1})^2\right) \\ -\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{x_i}{\lambda_0} + (\frac{x_i}{\lambda_1})^2\right) + \sum_{i=1}^{r}\log\left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{2}{\lambda_1}(\frac{x_i}{\lambda_1})\right) \end{array} \right] \end{aligned}$$

En égalant respectivement $\dfrac{dl}{d\lambda_0}$ et $\dfrac{dl}{d\lambda_1}$ à zéro, on obtient le système d'équations qui a été donné dans l'équation (2.28), dont la solution est le mode a postériori, également, en utilisant les formules dans l'équation (2.31), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 l}{d^2\lambda_0} &= \frac{1}{n}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\lambda_0^2} - (n-r)\frac{2}{\lambda_0^3}x_r + \sum\limits_{i=1}^{r} -\frac{2}{\lambda_0^3}x_i \\ +\sum\limits_{i=1}^{r} -\frac{1}{\lambda_0^2}\frac{\lambda_1^2}{\left(\lambda_1^2+2\lambda_0 x_i\right)^2}\left(\lambda_1^2+4\lambda_0 x_i\right) \end{array}\right] \qquad (2.35) \\
\frac{d^2 l}{d\lambda_0 d\lambda_1} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} 4\lambda_1 \frac{x_i}{\left(\lambda_1^2+2\lambda_0 x_i\right)^2} \\
\frac{d^2 l}{d^2\lambda_1} &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\lambda_1^2} - (n-r)\frac{6}{\lambda_1^4}x_r - \sum_{i=1}^{r}\frac{6}{\lambda_1^4}x_i^2 - \sum_{i=1}^{r} 4\lambda_0 x_i \frac{3\lambda_1^2+2\lambda_0 x_i}{\left(\lambda_1^3+2\lambda_0 x_i\lambda_1\right)^2}\right]
\end{aligned}$$

De même en égalant respectivement $\dfrac{dl^*}{d\lambda_0}$ et $\dfrac{dl^*}{d\lambda_1}$ à zéro ; on obtient :

$$\frac{1}{n}\left[\frac{x_r}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_0} + (n-r)\frac{1}{\lambda_0^2}x_r + \sum_{i=1}^{r}\frac{x_i}{\lambda_0^2} - \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{\lambda_0}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+2\lambda_0 x_i}\right)\right] = 0 \qquad (2.36)$$

En définitive, nous obtenons par deux approches d'approximations deux estimatreus Bayesiens $(*)$ et $(**)$ de la fonction de fiabilié.

Chapitre 3

Modèle Exponentiel Bivarie

3.1 Estimation Bayesienne du temps moyen de bon fonctionnement et de la fonction de fiabilité dans un modèle exponentiel bivarié

La loi exponentielle joue un role très important dans les problèmes de dureé de survie, car elle a la particularité d'avoir un taux de panne constant et possède la propriètè de perte de mémoire.

plusieurs modèles bivaries derivent de la distribution exponentielle. l'estimation par maximum de vraisemblance des paramètres du modèle ACBVE (Absolutely Continuous Bivariate Exponential) a été consirérée par Block-Basu dans leur article (1974) ; une approche Bayesienne a été utilisée par Weier (1981) pour l'estimation des paramètres et de la fonction de fiabilité avec une loi a priori vague, puis une loi a priori conjuguée naturelle sous une fonction de perte quadratique. Klein-Basu (1985) ont consideré l'estimation de la fonction de survie bidimensionnelle du modèle ACBVE symétrique à l'aide d'une approche classique.

Achcar and Stantander (1993) ont considéré les estimateurs Bayesiens des modèles ACBVE à l'aide des méthodes d'approximations introduites par Tierney and Kedane (1986). Pour les mèmes problèmes d'estimations des paramètres d'un modèle exponentiel bivarié, A.Achcar and A.Leandro (1998) ont utilisé les méthodes MCMC. Dans une large classe de modèles bivariés. Klein (1995) présente une synthèse des résultats obtenues sur l'inference statistique dans les modèles exponentiels bivariés. Enfin, tès recemment, Hanagal Ahmadi (2009) ont adopté une approche Bayesienne empirique du problème de l'inférence statistique dans un modèle exponentiel bivarié.

On se propose, dans cet article de nous interesser à l'estimation des paramètres et du $MTBF$ dans un modèle exponentiel bivarié symetrique. L'approche utilisée est une approche Bayesienne, avec une loi a priori non informative, puis une loi a priori conjuguée naturelle avec des données complètes. L'utilisation d'une fonction de perte quadratique a été largement utilisée dans la littérature, on se propose d'utiliser une variété de fonctions de perte. Ce papier s'articule autour de quatre sections ; dans la première section, on rappelle la genèse d'un modèle exponentiel bivarié, les différentes fonctions de pertes utilisées et les critéres de comparaisons de Pittman et de l'efficacité relative. Dans la deuxième section, on considére le cas d'une distribution a priori non informative sur les paramétres, la section trois est consacrée au cas d'une distribution a priori conjuguée naturelle sur les paramètres, dans la section quatre, on procéde à une étude de Monte-Carlo.

3.1.1 Genèse du modèle

Plusieurs modèles bivariés dérivent de la distribution exponentielle ; la distribution de Freund [34] donne la loi jointe d'un système à deux composants A et B dont les durées de vie X et Y quand ils fonctionnent isolément suivent respectivement des lois $exp(\alpha)$ et $exp\,(\beta)$.

De plus, en fonctionnement simultané, lorsque une panne intervient dans A (resp.B) la durée de vie de B (resp.A) est modifiée et suit une loi $exp(\alpha')$ (resp.$exp\,(\beta')$) avec $\alpha' > \alpha$ et $\beta' > \beta$.

La famille de distributions exponentielles bivariées de Block et Basu [22] de paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$ est une paramétrisation spéciale de la distribution de Freund correspondant à :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lambda_1 + \lambda_{12}\left\{\lambda_1 / \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\right\} \qquad ; \qquad \alpha' = \lambda_1 + \lambda_2 \\
\beta &= \lambda_2 + \lambda_{12}\left\{\lambda_2 / \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\right\} \qquad ; \qquad \beta' = \lambda_2 + \lambda_{12} \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} &\geq 0
\end{aligned}$$

La densité $f(x, y)$ donnée par Block et Basu est :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda'\left(\lambda_2+\lambda_{12}\right)}{\lambda_1+\lambda_2}\exp(-\lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_{12})y & si \quad x<y\\ \dfrac{\lambda_2\lambda'\left(\lambda_2+\lambda_{12}\right)}{\lambda_1+\lambda_2}\exp-((\lambda_1+\lambda_{12})\,x-\lambda_2 y & si \quad x>y\end{cases}\tag{3.1}$$

où $\lambda'=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$.

Le modèle utilisé dans ce travail est étroitement lié aux deux modèles cités ci-dessus en prenant dans le modèle de Freund des composants identiques ; $\alpha=\beta=\lambda$ et $\alpha'=\beta'=\lambda\theta$. Une reparamétrisation de (3.1) en prenant : $\lambda_1=\lambda_2=\lambda(2-\theta)$ et $\lambda_{12}=2\lambda(\theta-1)$ nous conduit à la densité :

$$f(x,y)=\begin{cases}\theta\lambda^2\exp-2\lambda x-\theta\lambda(y-x) & si \quad x<y\\ \\ \theta\lambda^2\exp-2\lambda y-\theta\lambda(x-y) & si \quad x>y\end{cases}\qquad \lambda>0;\ \theta>0 \tag{3.2}$$

Un exemple d'un tel système, consiste en un système de refroidissement composé de deux pompes en série où circule de l'air froid. Lorsqu'une panne intervient dans une pompe, la durée de vie de la deuxième pompe est modifiée suivant le schéma décrit plus haut.

Remarques :

1) pour $\theta\geq 1$, le modèle ci- dessus correspond au modèle de Freund.

2) pour $1\leq\theta\leq 2$ on retrouve le modèle bivarié de Block et Basu.

La fonction $f(x,y)$ donnée en (3.2) étant une densité dans R^{+2}, posons :

$$\begin{aligned} U &= \min(X, Y) \\ V &= \max(X, Y) \\ W &= V - U \end{aligned}$$

La loi de (U, V) a pour densité :

$$f_{U,V}(u, v) = 2\theta\lambda^2 \exp(-2\lambda u - \lambda\theta(v - u)) \qquad pour \qquad 0 < u < v \tag{3.3}$$

La loi de (U, W) a pour densité :

$$f_{U,W}(u, w) = 2\theta\lambda^2 \exp(-2\lambda u - \lambda\theta w) \qquad pour \qquad u > 0; w > 0 \tag{3.4}$$

U et W sont des variables aléatoires indépendantes avec U qui suit une loi $exp(2\lambda)$ et W suit une loi $exp(\lambda\theta)$.

Dans ce travail, nous nous interessons à l'estimation des paramétres, du temps moyen de bon fonctionnement $(MTBF)$ noté T_0 et de la fonction de fiabilité notée $S(t)$ dans le modèle bivarié décrit ci-dessus. On utilise, dans un premier temps une approche classique du maximum de vraisemblance, puis une analyse Bayesienne avec une loi a priori vague puis une loi a priori conjuguée naturelle sur les paramètres. Dans les sections trois et quatre, nous utilisons différentes fonctions de pertes.

La durée de vie de notre modèle correspond à $V = \max(X, Y)$, dont la densité est obtenue en intégrant la densité jointe $f_{U,V}(u, v)$ donnée en (3.3) par rapport à u. Notre modèle est en fait, un modèle univarié dépendant de deux paramètres. On en déduitsa densité

$$\begin{aligned} f_V(v/\lambda,\theta) &= 2\theta\lambda^2 \int_0^v \exp\{-2\lambda u - \theta\lambda(v-u)\}\,du \\ &= \frac{2\theta\lambda}{(\theta-2)}\{\exp(-2\lambda v) - \exp(-\lambda\theta v)\} \qquad si \quad \theta \neq 2 \qquad (3.5) \\ &= 4\lambda^2 \int_0^v \exp\{-2\lambda u - 2\lambda(v-u)\}\,du = 4\lambda^2 v \exp(-2\lambda v) \qquad si \qquad \theta = 2 \end{aligned}$$

Pour $\theta = 2$, il est clair que V suit une loi $\mathcal{G}(2, 2\lambda)$.

D'autre part, le $MTBF$ est :

$$\begin{aligned} T_0 &= E(V/\lambda,\theta) = \int_0^\infty v f_V(v/\lambda,\theta)\,dv = \frac{(2+\theta)}{2\lambda\theta} \qquad si \qquad \theta \neq 2 \qquad (3.6) \\ &= \frac{1}{\lambda} \qquad si \qquad \theta = 2 \end{aligned}$$

D'un point de vue fiabiliste, $E(V/\lambda,\theta)$ correspond au temps moyen de bon fonctionnement $(MTBF)$ (Mean time beetwen failure) ; on le notera par la suite T_0. Dans tout ce qui suit, nous considérons uniquement le cas où $\theta \neq 2$.

La fonction de fiabilité $S(t)$ de ce modèle est la probabilité de survivre à l'instant t :

$$\begin{aligned}
S(t) &= P[V \geq t] = \int_t^\infty f_V(v/\lambda,\theta)\,dv \\
&= \frac{2\theta\lambda}{(\theta-2)} \int_t^\infty \{\exp(-2\lambda v) - \exp(-\lambda\theta v)\}\,dv \\
&= \frac{\theta}{(\theta-2)} \exp(-2\lambda t) - \frac{2}{(\theta-2)} \exp(-\lambda\theta t) \qquad si \qquad \theta \neq 2 \qquad (3.7) \\
&= \int_t^\infty 4\lambda^2 v \exp(-2\lambda v)\,dv = (1+2\lambda t)\exp(-2\lambda t) \qquad si \qquad \theta = 2
\end{aligned}$$

3.1.2 Estimations par la méthode du maximum de vraisemblance

Dans le cas d'un plan d'expérience complet, on dispose des paires d'observations suivantes $\{(u_i, w_i)\,; i = 1, ...n\}$ où $u_i = \min(x_i, y_i)$ et $w_i = |x_i - y_i|$, la vraisemblance est :

$$\begin{aligned}
L\left(\underline{u}, \underline{w}/\lambda,\theta\right) &= \prod_{i=1}^{n} f_{U,W}(u_i, w_i) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta\lambda^2 \exp(-2\lambda u_i - \lambda\theta w_i) \\
&= 2^n\theta^n\lambda^{2n} \exp(-2\lambda S - \lambda\theta S') \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Où $\quad S = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad ; \quad S' = \sum_{i=1}^{n} w_i.$

La log vraisemblance est proportionnelle à $n\ln\theta + 2n\ln\lambda - 2\lambda S - \lambda\theta S'$; on obtient les équations de vraisemblances suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} &= \frac{2n}{\lambda} - 2S - \theta S' = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} - \lambda S' = 0\end{aligned}$$

La résolution de ce système est aisée et conduit aux estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres λ et θ; notés respectivement λ_{MV} et θ_{MV}.

$$\overset{\wedge}{\lambda}_{MV} = \frac{n}{2S} \qquad et \qquad \overset{\wedge}{\theta}_{MV} = \frac{2S}{S'}$$

Notons que S et S' sont indépendantes et suivent respectivement des lois $\mathcal{G}(n, 2\lambda)$ et $\mathcal{G}(n, \lambda\theta)$; on en déduit $E(\lambda_{MV}) = \dfrac{n}{n-1}\lambda$ et $E(\theta_{MV}) = \dfrac{n}{n-1}\theta$ et donc que ces estimateurs sont asymptotiquement sans biais.

Pour estimer le temps moyen de bon fonctionnement et la fonction de fiabilité, il suffit de remplacer λ et θ respectivement par λ_{MV} et θ_{MV} dans l'expression de T_0 et l'expression de $S(t)$; ce qui nous conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}T_{0,MV} &= \frac{S+S'}{n} \qquad S_{MV}(t) && (3.9) \\ &= \frac{S}{S-S'}\exp\left(-\frac{n}{S}t\right) - \frac{S'}{S-S'}\exp\left(-\frac{n}{S'}t\right) && (3.10)\end{aligned}$$

Le biais de $T_{0,MV}$ est égal à $(E(T_{0,MV}) - T_0)$, or $E(T_{0,MV}) = \dfrac{E(S)+E(S')}{n} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{2\lambda} + \dfrac{n}{\lambda\theta}\right) = \dfrac{\theta+2}{2\lambda\theta} = T_0$, $T_{0,MV}$ est donc un estimateur sans biais ; son erreur quadratique moyenne est égale à sa variance :

$$EQM(T_{0,MV}) = Var(T_{0,MV}) = \frac{(\theta^2+4)}{4\lambda^2\theta^2 n} \qquad (3.11)$$

De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} EQM\left(T_{0,MV}\right) = 0$. $T_{0,MV}$ est donc un estimateur sans biais et convergent.

3.1.3 Estimation Bayesienne avec une loi a priori non informative

Une densité a priori non informative est communement utilisée en l'abscence d'information sur les paramètres, on utilise dans ce qui suit l'approche de Jeffreys [42] .

$$\begin{aligned} p(\lambda,\theta) &= \left|I_n(\lambda,\theta)\right|^{\frac{1}{2}} \\ I_n(\lambda,\theta) &= \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \theta}\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \theta}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{\lambda^2} & \frac{n}{\lambda\theta} \\ \frac{n}{\lambda\theta} & \frac{n}{\theta^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On obtient $p(\lambda,\theta) = \left|I_n(\lambda,\theta)\right|^{\frac{1}{2}} = \dfrac{n}{\lambda\theta}$. Notons qu'on peut écrire $p(\lambda) = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{\lambda}$ et $p(\theta) = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{\theta}$; ce qui nous donne $p(\lambda,\theta) = p(\lambda)\,p(\theta)$, ceci traduit l'indépendance a priori des paramètres θ et λ.

La densité a postériori est alors :

$$\begin{aligned}
p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) &= \frac{L\left(\underline{u},\underline{w}/\lambda,\theta\right)p\left(\lambda,\theta\right)}{\int_0^\infty\int_0^\infty L\left(\underline{u},\underline{w}/\lambda,\theta\right)p\left(\lambda,\theta\right)d\lambda d\theta} \\
&= \frac{\left(2S\right)^n}{\Gamma\left(n\right)}\lambda^{n-1}\exp\left(-2S\lambda\right)\frac{\left(S'\right)^n}{\Gamma\left(n\right)}\lambda\left(\lambda\theta\right)^{n-1}\exp\left(-\lambda\theta S'\right) \\
&= \frac{\left(2S\right)^n}{\Gamma\left(n\right)}\frac{\left(S'\right)^n}{\Gamma\left(n\right)}\lambda^{2n-1}\theta^{n-1}\exp\left(-2S\lambda\right)\exp\left(-\lambda\theta S'\right) \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Avec cette distribution a priori vague, la loi a postériori de λ est celle d'une loi $\mathcal{G}\left(n,2S\right)$ et la loi a posteriori de θ sachant λ est celle d'une loi $\mathcal{G}\left(n,\lambda S'\right)$; il est intéressant de noter que la loi de $\dfrac{\theta S'}{2S}$ est celle d'une loi de Fisher $F\left(2n,2n\right)$.

Les estimateurs Bayesiens des paramètres λ et θ par rapport à une fonction de perte quadratique sont respectivement λ_v et θ_v, ils correspondent à leurs moyennes a postériori et sont égaux à :

$$\lambda_v = \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right)d\lambda d\theta = \frac{n}{2S}$$

$$\theta_v = \int_0^\infty\int_0^\infty \theta p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right)d\lambda d\theta = \frac{n}{\left(n-1\right)}\frac{2S}{S'}$$

Remarque Les deux estimateurs du paramètre λ obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance et par l'approche Bayesienne avec une loi a priori vague sont identiques ; cependant pour θ, on a une égalité asymptotique. En effet : $\lambda_v = \lambda_{MV}$ et $\theta_v = \dfrac{n}{n-1}\theta_{MV}$.

L'estimteur Bayesien de T_0 dont l'expression est donnée en (3.6) par rapport à une fonction de perte quadratique , n'est autre que son espérance par rapport à la densité a posteriori.

$$\begin{aligned}
T_{0,v} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{2+\theta}{2\lambda\theta} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\lambda\theta} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta \\
T_{0,v} &= \frac{S'}{(n-1)} + \frac{1}{2}\frac{2S}{(n-1)} = \frac{S'+S}{(n-1)} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(v_i-u_i)+\sum\limits_{i=1}^{n}u_i}{(n-1)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\max(x_i,y_i)}{(n-1)}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

On obtient, une expression trés simple proche de celle de $T_{0,MV}$.

Le biais $b_n(T_{0,v})$ de $T_{0,v}$ est égal à $(E(T_{0,v})-T_0)$ où $E(T_{0,v}) = \frac{1}{(n-1)}(E(S)+E(S')) = \frac{n}{(n-1)}T_0$, l'estimateur $T_{0,v}$ est donc biaisé pour les petites valeurs de n. Sa variance est égale à $Var(T_{0,v}) = \frac{n}{(n-1)^2}\frac{(\theta^2+4)}{4\lambda^2\theta^2}$; ceci conduit à une valeur de l'érreur quadratique moyenne :

$$EQM(T_{0,MV}) = Var(T_{0,v}) + b_n^2(T_{0,v}) = \frac{(n+1)\theta^2+2\theta+4(n+1)}{4(n-1)^2\lambda^2\theta^2} \tag{3.14}$$

Pour estimer la fonction de fiabilité dont l'expression a été donnée en (3.7) , on calcule l'espérance de $S(t)$ par rapport à la densité à postériori (3.12) , on note par $S_v(t)$ l'estimateur de la fonction de fiabilité avec une loi a priori vague sur les paramètres et une fonction de perte quadratique.

Cas où $\theta \neq 2$

$$S_v(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\frac{\theta}{(\theta-2)}\exp(-2\lambda t) - \frac{2}{(\theta-2)}\exp(-\lambda\theta t)\right] p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta \tag{3.15}$$

$$= \frac{(2S)^n}{\Gamma(n)}\frac{(S')^n}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\theta^n}{(\theta-2)}\exp(-2\lambda t)\,\lambda^{2n-1}\exp(-2S\lambda)\exp(-\lambda\theta S')\,d\lambda d\theta$$

$$-2\frac{(2S)^n}{\Gamma(n)}\frac{(S')^n}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(\theta-2)}\exp(-\lambda\theta t)\,\lambda^{2n-1}\theta^{n-1}\exp(-2S\lambda)\exp(-\lambda\theta S')\,d\lambda d\theta$$

Pour le calcul des intégrales ci-dessus, on intègre par rapport à λ en ultilisant les fonctions Gamma, puis par rapport à θ en utilisant une distribution de Fischer $F(2n, 2n)$, On obtient l'expression suivante pour l'estimateur de la fonction de fiabilité avec une loi a priori vague sur les paramètres :

$$S_v(t) = \left(\frac{S}{S+t}\right)^n + \left(\frac{S'}{S'+t}\right)^n E\left(\frac{1}{1-a_1X}\right) - (2S)^n E\left(\frac{1}{1-a_2X}\right) \tag{3.16}$$

Où E indique l'espérance, et X représente une variable aléatoire suivant une loi de Fischer à $2n$ et $2n$ degré de liberté.

Cas où $\theta = 2$

$$\begin{aligned}
S_v(t) &= \frac{2^{2n-1}(S)^n}{\Gamma(n)}\frac{(S')^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty (1+2\lambda t)\exp(-2\lambda t)\,\lambda^{2n-1}\exp(-2S\lambda)\exp(-\lambda\theta S')\,d\lambda \\
&= \frac{2^{2n-1}(S)^n}{\Gamma(n)}\frac{(S')^n}{\Gamma(n)}\left[\int_0^\infty \lambda^{2n-1}\exp -2\lambda(t+S+S')d\lambda + 2t\int_0^\infty \lambda^{2n}\exp -2\lambda(t+S+S')d\lambda\right] \\
&= \frac{2^{2n-1}(S)^n}{\Gamma(n)}\frac{(S')^n}{\Gamma(n)}\left[\frac{\Gamma(2n)}{2^{2n}(t+S+S')^{2n}} + 2t\frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n+1}(t+S+S')^{2n+1}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{(S)^n(S')^n}{\beta(n,n)}\frac{((2n+1)t+S+S')}{(t+S+S')^{2n+1}} \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Où $\beta(n,n)$ représente la fonction béta

3.1.4 Estimation Bayesienne avec une loi a priori conjuguée naturelle

Il existe une famille de conjuguées naturelles pour (λ,θ) dont la loi a priori marginale de λ est celle d'une loi $\mathcal{G}(g_1,h_1)$ et la loi a priori conditionnelle de θ sachant λ est $\mathcal{G}(g_2,\lambda h_2)$; ce qui est équivalent à dire que $\lambda\theta$ suit une loi $\mathcal{G}(g_2,h_2)$; $p(\lambda) = \dfrac{h_1^{g_1}}{\Gamma(g_1)}\lambda^{g_1-1}\exp(-h_1\lambda)$ et $p(\theta/\lambda) = \dfrac{(h_2)^{g_2}}{\Gamma(g_2)}\lambda(\lambda\theta)^{g_2-1}\exp(-h_2\lambda\theta)$, on obtient la densité jointe du couple (λ,θ) :

$$\begin{aligned}
p(\lambda,\theta) &= p(\lambda)\,p(\lambda/\theta) = \frac{h_1^{g_1}h_2^{g_2}}{\Gamma(g_1)\Gamma(g_2)}\lambda^{g_1+g_2-1}\exp(-\lambda h_1)\,\theta^{g_2-1}\exp(-\lambda h_2\theta) \\
&\propto \lambda^{g_1+g_2-1}\theta^{g_2-1}\exp(-\lambda h_1)\exp(-\lambda h_2\theta)
\end{aligned}$$

Remarque Si $g_1 = g_2 = h_1 = h_2 = 0$, on retrouve le cas d'une loi a priori non informative.

Etant donné la vraisemblance donnée en (3.8), la densité a posteriori pour (λ, θ) est :

$$\begin{aligned} p\left(\lambda, \theta / \underline{u}, \underline{w}\right) &= \frac{L\left(\underline{u}, \underline{w} / \lambda, \theta\right) p(\lambda, \theta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty L\left(\underline{u}, \underline{w} / \lambda, \theta\right) p(\lambda, \theta)\, d\theta} \qquad (3.18) \\ &= \frac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)} \lambda^{G_1+G_2-1} \exp(-\lambda H_1)\, \theta^{G_2-1} \exp(-\lambda\theta H_2) \end{aligned}$$

où : $\quad G_1 = n + g_1; \qquad H_1 = 2S + h_1; \qquad G_2 = n + g_2; \qquad H_2 = S' + h_2$

Dans l'approche Bayesienne, la distribution a priori sur les paramètres traduit les connaissances dont on dispose concernant le modèle étudié. Si cette information est bonne, on peut à travers l'espérance et la variance du modèle déterminer les paramètres de la loi a priori. Si, au contraire, l'information est vague ; la loi a priori sur les paramètres est du type non informative.

Les estimateurs Bayesiens des paramètres λ et θ par rapport à une fonction de perte quadratique correspondent à leurs moyennes à postériori :

$$\begin{aligned} \lambda_B &= \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda p\left(\lambda, \theta / \underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta \qquad (3.19) \\ &= \frac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{G_1+G_2} \exp(-\lambda H_1)\, \theta^{G_2-1} \exp(-\lambda\theta H_2)\, d\lambda d\theta \\ \lambda_B &= \frac{G_1}{H_1} = \frac{n+g_1}{2S+h_1} \end{aligned}$$

De même, pour θ :

$$\begin{aligned}
\theta_B &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \theta p\left(\lambda, \theta/\underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta \qquad (3.20)\\
&= \frac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \lambda^{G_1+G_2-1} \exp(-\lambda H_1)\, \theta^{G_2} \exp(-\lambda\theta H_2)\, d\lambda d\theta \\
\theta_B &= \frac{G_2}{G_1-1}\left(\frac{2S+h_1}{S'+h_2}\right)
\end{aligned}$$

Quand on veut incorporer les connaissances à priori, pour une procédure d'estimation Bayesienne, il faut pouvoir donner des valeurs aux paramètres h_1, g_1, h_2 et g_2. Une alternative simple consiste à résumer l'information a priori par la donnée de l'espérance et de la variance des paramètres λ et θ du modèle. Puisque λ suit une loi $\mathcal{G}(g_1, h_1)$ et $\dfrac{g_1 h_2}{g_2 h_1}\theta$ suit une loi de Fischer à $2g_2$ et $2g_1$ degré de liberté, on en déduit les moyennes et les variances a priori suivantes :

$$\begin{aligned}
E(\lambda) &= \frac{g_1}{h_1}, \qquad Var(\lambda) = \frac{g_1}{h_1^2} \\
E(\theta) &= \frac{g_2 h_1}{h_2(g_1-1)}, \qquad Var(\theta) = \frac{g_2 h_1^2 (g_1+g_2-1)}{(g_1-2)(g_1-1)^2 h_2^2}
\end{aligned}$$

La détermination des paramètres h_1, g_1, h_2 et g_2 revient à résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues.

On note par $T_{0,B}$ l'estimateur de T_0 avec une loi à priori conjuguée naturelle et une fonction de perte quadratique.

$$\begin{aligned}
T_{0,B} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(2+\theta)}{2\lambda\theta} p\left(\lambda, \theta / \underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\lambda\theta} p\left(\lambda, \theta / \underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} p\left(\lambda, \theta / \underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta \\
&= \frac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)} \left[\frac{\Gamma(G_2-1)}{H_1^{G_1}} \frac{\Gamma(G_1)}{H_2^{G_2-1}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(G_2)}{H_1^{G_1-1}} \frac{\Gamma(G_1-1)}{H_2^{G_2}} \right] \\
T_{0,B} &= \frac{1}{2} \frac{H_1}{G_1-1} + \frac{H_2}{G_2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2S+h_1}{n+g_1-1}\right) + \frac{S'+h_2}{n+g_2-1} \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Estimations par la méthode du maximum de vraisemblance

Dans le cas d'un plan d'expérience complet, on dispose des paires d'observations suivantes $\{(u_i, w_i)\,; i = 1, ...n\}$ où $u_i = \min(x_i, y_i)$ et $w_i = |x_i - y_i|$, la vraisemblance est :

$$\begin{aligned}
L\left(\underline{u}, \underline{w} / \lambda, \theta\right) &= \prod_{i=1}^{n} f_{U,W}(u_i, w_i) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta\lambda^2 \exp(-2\lambda u_i - \lambda\theta w_i) \\
&= 2^n \theta^n \lambda^{2n} \exp(-2\lambda S - \lambda\theta S') \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Où $\quad S = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad ; \quad S' = \sum_{i=1}^{n} w_i.$

La log vraisemblance est proportionnelle à $n \ln\theta + 2n \ln\lambda - 2\lambda S - \lambda\theta S'$; on obtient les équations de vraisemblances suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} &= \frac{2n}{\lambda} - 2S - \theta S' = 0 \\
\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} - \lambda S' = 0
\end{aligned}$$

La résolution de ce système est aisée et conduit aux estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres λ et θ; notés respectivement λ_{MV} et θ_{MV}.

$$\lambda_{MV} = \frac{n}{2S} \qquad et \qquad \theta_{MV} = \frac{2S}{S'} \tag{3.23}$$

Notons que S et S' sont indépendantes et suivent respectivement des lois $\mathcal{G}(n, 2\lambda)$ et $\mathcal{G}(n, \lambda\theta)$; on en déduit $E(\lambda_{MV}) = \dfrac{n}{n-1}\lambda$ et $E(\theta_{MV}) = \dfrac{n}{n-1}\theta$ et donc que ces estimateurs sont asymptotiquement sans biais.

Pour estimer le temps moyen de bon fonctionnement et la fonction de fiabilité, il suffit de remplacer λ et θ respectivement par λ_{MV} et θ_{MV} dans l'expression de T_0 donnée en (3.6) et l'expression de $S(t)$ donnée en (3.7) ; ce qui nous conduit aux résultats suivants :

$$T_{0,MV} = \frac{S + S'}{n} \tag{3.24}$$

Le biais de $T_{0,MV}$ est égal à $(E(T_{0,MV}) - T_0)$, or $E(T_{0,MV}) = \dfrac{E(S) + E(S')}{n} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{2\lambda} + \dfrac{n}{\lambda\theta}\right) = \dfrac{\theta + 2}{2\lambda\theta} = T_0$, $T_{0,MV}$ est donc un estimateur sans biais ; son erreur quadratique moyenne est égale à sa variance :

$$EQM(T_{0,MV}) = Var(T_{0,MV}) = \frac{(\theta^2 + 4)}{4\lambda^2\theta^2 n}$$

De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} EQM(T_{0,MV}) = 0$. $T_{0,MV}$ est donc un estimateur sans biais et convergent.

3.2 Estimation de la fonction de fiabilité par approximations

3.2.1 Approximation de Lindley

Dans notre cas, avec m=2 et $\alpha = (\lambda,\theta)$. on obtient $S_t = \Phi(\alpha)$

$$S\left(t\right)=\frac{\theta}{\left(\theta-2\right)}\exp\left(-2\lambda t\right)-\frac{2}{\left(\theta-2\right)}\exp\left(-\lambda\theta t\right)\qquad si\qquad \theta\neq 2 \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=-\frac{1}{\theta-2}\left(2t\theta e^{-2t\lambda}-2t\theta e^{-t\theta\lambda}\right)\\
\Phi_{11} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\lambda}=\frac{4t^2\theta e^{-2t\lambda}-2t^2\theta^2e^{-t\theta\lambda}}{\theta-2}\\
\Phi_2 &= \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-\frac{1}{\left(\theta-2\right)^2}\left(2e^{-2t\lambda}-2e^{-t\theta\lambda}+4t\lambda e^{-t\theta\lambda}-2t\theta\lambda e^{-t\theta\lambda}\right)\\
\Phi_{22} &= \frac{\partial(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{1}{\left(\theta-2\right)^3}\left(\begin{array}{c}4e^{-t\theta\lambda}-4e^{-2t\lambda}+8t^2\lambda^2e^{-t\theta\lambda}-8t\lambda e^{-t\theta\lambda}-\\ 8t^2\theta\lambda^2e^{-t\theta\lambda}+4t\theta\lambda e^{-t\theta\lambda}+2t^2\theta^2\lambda^2e^{-t\theta\lambda}\end{array}\right)\\
\Phi_{12} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda d\theta}=\frac{1}{\left(\theta-2\right)^2}\left(4te^{-2t\lambda}-4te^{-t\theta\lambda}-2t^2\theta^2\lambda e^{-t\theta\lambda}+4t^2\theta\lambda e^{-t\theta\lambda}\right)
\end{aligned}$$

the joint postrior mode of eq (3.3) is obtained by simultaneously solving the system of équation :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\ln\{\pi(\theta\backslash x)\}}{\lambda_0}=0\\ \frac{\partial\ln\{\pi(\theta\backslash x)\}}{\lambda_1}=0\end{array}\right. \tag{3.26}$$

$$\ln\left\{\pi\left(\alpha\setminus x\right)\right\}=\ln\left[\frac{\left(2S\right)^{n}}{\Gamma\left(n\right)}\frac{\left(S'\right)^{n}}{\Gamma\left(n\right)}\lambda^{2n-1}\theta^{n-1}\exp\left(-2S\lambda\right)\exp\left(-\lambda\theta S'\right)\right] \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\left(2S\lambda-2n+\theta\lambda S'+1\right)=0 \\ -\frac{1}{\theta}\left(\theta\lambda S'-n+1\right)=0 \end{cases}$$

$$\widehat{\alpha}=\left(\frac{n}{2S},\frac{(n-1)2S}{nS'}\right)$$

$$\Lambda\left(\alpha\right)=\ln\left\{\pi\left(\alpha\setminus x\right)\right\}=$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{11} &= \frac{\partial^{2}\Lambda}{\partial^{2}\lambda}=\frac{\partial\left(-\frac{1}{\lambda}\left(2S\lambda-2n+\theta\lambda S'+1\right)\right)}{\partial\lambda}=-\frac{1}{\lambda^{2}}\left(2n-1\right) \qquad (3.28)\\
\Lambda_{12} &= \frac{\partial^{2}\Lambda}{\partial\lambda\partial\theta}=\frac{\partial\left(-\frac{1}{\theta}\left(\theta\lambda S'-n+1\right)\right)}{\partial\lambda}=-S'\\
\Lambda_{22} &= \frac{\partial^{2}\Lambda}{\partial^{2}\theta}=\frac{\partial\left(-\frac{1}{\theta}\left(\theta\lambda S'-n+1\right)\right)}{\partial\theta}=-\frac{1}{\theta^{2}}\left(n-1\right)\\
\Lambda_{21} &= \frac{\partial^{2}\Lambda}{\partial\theta\partial\lambda}=\frac{\partial\left(-\frac{1}{\lambda}\left(2S\lambda-2n+\theta\lambda S'+2\right)\right)}{\partial\theta}=-S'\\
\Lambda_{111} &= \frac{\partial^{3}\Lambda}{\partial^{3}\lambda}=\frac{\partial\left(-\frac{1}{\lambda^{2}}\left(2n-1\right)\right)}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda^{3}}\left(4n-2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{222} &= \frac{\partial^{3}\Lambda}{\partial^{3}\theta}==\frac{\partial\left(-\frac{1}{\theta^{2}}\left(n-1\right)\right)}{\partial\theta}\\
&= \frac{2}{\theta^{3}}\left(n-1\right) \qquad (3.29)\\
\Lambda_{112} &= \frac{\partial^{3}\Lambda}{\partial^{2}\lambda\partial\theta}=\frac{\partial\left(-S'\right)}{\partial\lambda}=0
\end{aligned}$$

les τ_{ij} sont les (i,j)ime éléments de la l'inverse de la matrice Hessianne au signe négative. la matrice des second dérivées pour :

$\mathbf{\Lambda} : \{\tau_{ij}\} = \{-\mathbf{\Lambda}_{ij}\}^{-1}$.

$$\{-\mathbf{\Lambda}_{ij}\}^{-1} = \begin{matrix} \frac{2}{\lambda^2}(n-1) & S' \\ S' & \frac{1}{\theta^2}(n-1) \end{matrix},$$

$$\text{inverse :} \quad \begin{matrix} -\dfrac{\lambda^2 - n\lambda^2}{2n^2-4n-\theta^2\lambda^2(S')^2+2} & -\theta^2\lambda^2\dfrac{S'}{2n^2-4n-\theta^2\lambda^2(S')^2+2} \\ -\theta^2\lambda^2\dfrac{S'}{2n^2-4n-\theta^2\lambda^2(S')^2+2} & \theta^2\dfrac{2n-2}{2n^2-4n-\theta^2\lambda^2(S')^2+2} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= -\frac{\lambda^2 - n\lambda^2}{2n^2-4n-\theta^2\lambda^2(S')^2+2} \\ \tau_{12} &= -\theta^2\lambda^2\frac{S'}{2n^2-4n-\theta^2\lambda^2(S')^2+2} \\ \tau_{22} &= \theta^2\frac{2n-2}{2n^2-4n-\theta^2\lambda^2(S')^2+2} \end{aligned}$$

$$O\grave{u} \qquad S = \sum_{i=1}^{n} u_i \qquad ; \qquad S' = \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

on veut programer S_t^* :

$$\begin{aligned} S_t^* &= \Phi(\widehat{\alpha}) + \frac{1}{2}\Phi_{11}(\widehat{\alpha})\tau_{11} + \Phi_{12}(\widehat{\alpha})\tau_{12} + \frac{1}{2}\Phi_{22}(\widehat{\alpha})\tau_{22} \\ &+\frac{1}{2}\Lambda_{111}\left\{\Phi_1(\widehat{\alpha})\tau_{11}^2 + \Phi_2(\widehat{\alpha})\tau_{11}\tau_{12}\right\} + \frac{1}{2}\Lambda_{112}\left\{3\Phi_1(\widehat{\alpha})\tau_{11}\tau_{12} + \Phi_2(\widehat{\alpha})\left(\tau_{11}\tau_{12} + 2\tau_{12}^2\right)\right\} \\ &+\frac{1}{2}\Lambda_{122}\left\{3\Phi_2(\widehat{\alpha})\tau_{22}\tau_{12} + \Phi_1(\widehat{\alpha})\left(\tau_{11}\tau_{12} + 2\tau_{12}^2\right)\right\} \\ &+\frac{1}{2}\Lambda_{222}\left\{\Phi_2(\widehat{\alpha})\tau_{22}^2 + \Phi_1(\widehat{\alpha})\tau_{22}\tau_{12}\right\} \end{aligned} \tag{3.30}$$

3.2.2 Estimations par la méthode du Tierney et Kadane

Le rapprochement de Lindley exige l'évaluation des dérivés du tiers de la fonction vraisemblance ou de la densité a posteriori qui peut être très fastidieux et exige une grande précision de calcul. Tierney et Kadane (1986) ont donné une méthode alternative d'évaluation du rapport des intégrales de la forme de l'équation (2.22)

Soit, les deux expressions :

$$l = \frac{\mathbf{L}(\alpha/x) + \log v(\alpha)}{n}, l^{*} = \frac{\log \Phi(\alpha) + \log v(\alpha) + \mathbf{L}(\alpha/x)}{n} \tag{3.31}$$

Donc L'Eq (2.22) prend cette forme

$$\mathbf{E}(\Phi(\alpha)/x = \frac{\int \exp\{nl^{*}\}\, d\alpha}{\int \exp\{nl)\}\, d\alpha} \tag{3.32}$$

Pour plus de détails, voir Tierney et Kadane (1986). Alors que Lindley (1980) élargit à la fois le numérateur et le dénominateur de l'équation (2.23) au sujet d'un point commun (le mode posteriori), Tierney et Kadane (1986) ont développé chaque intégrale séparément sur le point qui maximise l'intégrale. Cette méthode ne nécessite que les dérivées premières et deuxièmes de la densité a posteriori. D'a :près Tierney et Kadane (1986), l'estimateur de Bayes dans l'équation (2 ;23), dans le cas multiparamétrique, prend la forme :

$$\widehat{\mathbf{E}}(\Phi(\alpha)/x = \left(\frac{\mid \Sigma^{*} \mid}{\mid \Sigma \mid}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[n\left\{l^{*}\left(\widehat{\alpha}^{*}\right) - l\left(\widehat{\alpha}\right)\right\}\right] \tag{**}$$

ou $\widehat{\alpha}^*$ et $\widehat{\alpha}$ maximisent l^* et l respectivement, et Σ^* et Σ sont les inverses de l'Hsiennes de l^* et $l$au signe négative pour $\widehat{\alpha}^*$et $\widehat{\alpha}$ respectivement.

$$l = \frac{1}{n}\left\{\begin{array}{c} \ln\left[\frac{(2S)^n}{\Gamma(n)}\frac{(S')^n}{\Gamma(n)}\lambda^{2n-1}\theta^{n-1}\exp(-2S\lambda)\exp(-\lambda\theta S')\right] \\ = \frac{1}{n}\ln\left(\theta^{n-1}\lambda^{2n-1}(S')^n e^{-2S\lambda}\frac{e^{-\theta\lambda S'}}{(\Gamma(n))^2}(2S)^n\right) \end{array}\right\} \tag{3.33}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{(n-1)\ln\theta + (2n-1)\ln\lambda + n\ln S' - 2S\lambda - \theta\lambda S' - 2\ln\Gamma(n) + n\ln 2S\right\} \tag{3.34}$$

$$l^* = \frac{1}{n}\left[\begin{array}{c} \{(n-1)\ln\theta + (2n-1)\ln\lambda + n\ln S' - 2S\lambda - \theta\lambda S' - 2\ln\Gamma(n) + n\ln 2S\} \\ +\log\left[\frac{\theta}{(\theta-2)}\exp(-2\lambda t) - \frac{2}{(\theta-2)}\exp(-\lambda\theta t)\right] \end{array}\right]$$

En égalant respectivement $\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}$ et $\dfrac{\partial l}{\partial\theta}$à zéro, on obtient le système d'équations , dont la solution est le mode a postériori,

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{n\lambda}(2S\lambda - 2n + \theta\lambda S' + 1) = 0 \\ -\frac{1}{n\theta}(\theta\lambda S' - n + 1) = 0 \end{array}\right.$$

$$\widehat{\alpha} = \left(\frac{n}{2S}, \frac{(n-1)2S}{nS'}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial^2\lambda} &= \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{\lambda^2}(2n-1)\right] \\ \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda\partial\theta} &= \frac{-S'}{n} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial^2\theta} &= -\frac{1}{n\theta^2}(n-1) \end{aligned} \tag{3.35}$$

donc $\Sigma =$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{-1}{n}\left[-\frac{1}{\lambda^2}(2n-1)\right] & \frac{S'}{n} \\ \frac{S'}{n} & \frac{1}{n\theta^2}(n-1) \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Même chose avec l^*En égalant respectivement $\dfrac{\partial l^*}{\partial \lambda}$ et $\dfrac{\partial l^*}{\partial \theta}$à zéro,

En définitive, nous obtenons par deux approches d'approximations deux estimatreus Bayesiens $(*)$ et $(**)$ de la fonction de fiabilié.

3.3 Etude comparative des estimteurs des paramètres sous différentes fonctions de perte

3.3.1 Estimation Bayesienne avec une loi a priori vague

Une densité a priori non informative est communement utilisée en l'abscence d'information sur les paramètres, on utilise dans ce qui suit l'approche de Jeffreys (1961)

.

$$p(\lambda, \theta) = |I_n(\lambda, \theta)|^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{\lambda\theta}$$

Notons qu'on peut écrire $p(\lambda) = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{\lambda}$ et $p(\theta) = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{\theta}$; ce qui nous donne $p(\lambda, \theta) = p(\lambda)\, p(\theta)$, ceci traduit l'indépendance a priori des paramètres θ et λ.

Estimation des paramètres

La densité a postériori est alors :

$$p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) = \frac{L\left(\underline{u},\underline{w}/\lambda,\theta\right)p\left(\lambda,\theta\right)}{\int_0^\infty\int_0^\infty L\left(\underline{u},\underline{w}/\lambda,\theta\right)p\left(\lambda,\theta\right)d\lambda d\theta}$$
$$= \frac{\left(2S\right)^n}{\Gamma\left(n\right)}\frac{\left(S'\right)^n}{\Gamma\left(n\right)}\lambda^{2n-1}\theta^{n-1}\exp\left(-2S\lambda\right)\exp\left(-\lambda\theta S'\right) \qquad (3.37)$$

Avec cette distribution a priori vague, la loi a postériori de λ est celle d'une loi $\mathcal{G}\left(n,2S\right)$ et la loi a posteriori de θ sachant λ est celle d'une loi $\mathcal{G}\left(n,\lambda S'\right)$; il est intéressant de noter que la loi de $\frac{\theta S'}{2S}$ est celle d'une loi de Fisher $F\left(2n,2n\right)$. De même la loi de λ sachant θ est une loi $\mathcal{G}\left(2n,2S+\theta S'\right)$

Fonction de perte quadratique Les estimateurs Bayesiens des paramètres λ et θ par rapport à une fonction de perte quadratique sont respectivement $\lambda_{v,Q}$ et $\theta_{v,Q}$ ils correspondent à leurs moyennes a postériori et sont égaux à :

$$\lambda_{v,Q} = \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right)d\lambda d\theta = \frac{n}{2S} \qquad (3.38)$$

$$\theta_{v,Q} = \int_0^\infty\int_0^\infty \theta p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right)d\lambda d\theta = \frac{n}{\left(n-1\right)}\frac{2S}{S'} \qquad (3.39)$$

Remarque Les deux estimateurs du paramètre λ obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance et par l'approche Bayesienne avec une loi a priori vague sont identiques ; cependant pour θ, on a une égalité asymptotique. En effet : $\lambda_v = \lambda_{MV}$ et $\theta_v = \frac{n}{n-1}\theta_{MV}$.

Fonction de perte de De Groot Sous cette fonction de perte, les estimateurs Bayesiens des paramètres sont notés $\lambda_{v,G}$ et $\theta_{v,Q}$ et sont égaux à :

$$\lambda_{v,G} = \frac{E\left(\lambda^2/\underline{u},\underline{w}\right)}{E\left(\lambda/\underline{u},\underline{w}\right)} = \frac{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \lambda^2 p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right)d\lambda d\theta}{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \lambda p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right)d\lambda d\theta} = \frac{(n+1)}{2S} \tag{3.40}$$

$$\theta_{v,G} = \frac{E\left(\theta^2/\underline{u},\underline{w}\right)}{E\left(\theta/\underline{u},\underline{w}\right)} = \frac{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \theta^2 p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right)d\lambda d\theta}{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \theta p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right)d\lambda d\theta} = \frac{(n+1)}{(n-2)}\frac{(2S)}{S'} \tag{3.41}$$

Fonction de perte Linex Sous la fonction de perte Linex,définie pa Varian (1975) l'estimateur du paramètre λ est donné par :

$$\lambda_{v,L} = -\frac{1}{a}\log E\left(\exp\left(-a\lambda\right)\right)$$

Où

$$\begin{aligned}
E(e^{-a\lambda}) &\propto \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a\lambda}\lambda^{2n-1}\theta^{n-1}e^{-2\lambda S}\exp\left(-\lambda\theta S'\right)d\lambda d\theta \\
&\quad \int_0^\infty \frac{\Gamma(n)}{S^n}\lambda^{2n-1}e^{-a\lambda-2\lambda S}d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(n)}{S^n}\int_0^\infty \lambda^{n-1}e^{-\lambda(a+2S)}d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(n)}{S^n}\frac{\Gamma(n)}{(a+2S)^n}
\end{aligned}$$

$$\lambda_{v,L} = -\frac{n}{a}\ln\frac{(2S)}{(a+2S)} \tag{3.42}$$

De même, on obtient l'estimateur de θ noté $\theta_{v,L}$ et donné par l'équation : $\theta_{v,L} = -\frac{1}{a}\log E\left(\exp\left(-a\theta\right)\right)$; aprés quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$\theta_{v,L} = \frac{(2S)^n (S')^n}{\Gamma(n)} \Psi_1(a,n) \qquad ;où \qquad \Psi_1(a,n) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{2n-1}}{(\lambda S' + a)^n} \exp(-2\lambda S)\, d\lambda \tag{3.43}$$

Fonction de perte entropique L'estimateur de Bayes, sous une fonction de perte entropique (Calabria et Pulcini, 1994) et une distribution a priori vague sur les paramètres correspond pour θ à :

$$\begin{aligned}
\theta_{v,E} &= \left[E\left(\frac{1}{\theta^p}\right)^{-\frac{1}{p}}\right] = \left[\frac{(2S)^n}{\Gamma(n)} \frac{(S')^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{2n-1} \theta^{n-p-1} \exp(-2S\lambda) \exp(-\lambda\theta S')\, d\lambda d\theta\right]^{-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{(2S)^n}{\Gamma(n)} \frac{(S')^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\Gamma(n-p)}{(\lambda S')^{n-p}} \lambda^{2n-1} \exp(-2S\lambda)\, d\lambda = \left[\frac{(2S)^n}{\Gamma(n)} \frac{(S')^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-p)}{(S')^{n-p}} \frac{\Gamma(n+p)}{(2S)^{n+p}}\right]^{-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Apres simplification, on obtient un estimateur Bayesien de θ noté $\theta_{v,E}$, avec une loi a priori vague et sous une fonction de perte entropique :

$$\theta_{v,E} = \left[\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(n+p)\Gamma(n-p)}\right]^{\frac{1}{p}} \frac{(2S)}{S'} \tag{3.44}$$

On procéde de la même manière pour calculer l'estimateur Bayesien de λ sous une fonction de perte entropique et avec une loi a priori vague. On obtient :

$$\lambda_{v,E} = \frac{[(n-1)(n-2 \ldots (n-p))]^{\frac{1}{p}}}{(2S)} \tag{3.45}$$

Estimation du temps moyen de bon fonctionnement

Fonction de perte quadratique L'estimteur Bayesien de T_0 dont l'expression est donnée en (6) par rapport à une fonction de perte quadratique [10], n'est autre que son espérance par rapport à la densité a posteriori.

$$\begin{aligned} T_{0,v} &= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{2+\theta}{2\lambda\theta} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\lambda\theta} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta \\ T_{0,v} &= \frac{S'}{(n-1)} + \frac{1}{2}\frac{2S}{(n-1)} = \frac{S'+S}{(n-1)} \end{aligned} \tag{3.46}$$

On obtient, une expression trés simple proche de celle de $T_{0,MV}$.

Le biais $b_n(T_{0,v})$ de $T_{0,v}$ est égal à $(E(T_{0,v}) - T_0)$ où $E(T_{0,v}) = \frac{1}{(n-1)}(E(S)+E(S')) = \frac{n}{(n-1)}T_0$, l'estimateur $T_{0,v}$ est donc biaisé pour les petites valeurs de n. Sa variance est égale à $Var(T_{0,v}) = \frac{n}{(n-1)^2}\frac{(\theta^2+4)}{4\lambda^2\theta^2}$; ceci conduit à une valeur de l'érreur quadratique moyenne :

$$EQM(T_{0,v}) = Var(T_{0,v}) + b_n^2(T_{0,v}) = \frac{(n+1)\theta^2 + 2\theta + 4(n+1)}{4(n-1)^2\lambda^2\theta^2}$$

Fonction de perte de De Groot Notons par $T_{0,v,G}$ l'estimateur de T_0 obtenu avec une fonction de perte de De-Groot et une loi a prior non informative; on obtient apres quelques manipulations algébrique, l'expression :

$$T_{0,v,G} = \frac{E\left(T_0^2/\underline{u},\underline{w}\right)}{E\left(T_0/\underline{u},\underline{w}\right)} = \frac{\left(S^2+S'^2\right)}{(n-2)\left(S+S'\right)} + \frac{SS'}{(n-1)\left(S+S'\right)} \tag{3.47}$$

Fonction de perte Linex Soit, $T_{0,v,L}$ l'estimateur de T_0 sous une fonction de perte Linex avec une loi a priori vague :

$$T_{0,v,L} = -\frac{1}{a}\ln E\left(\exp\left(-aT_0\right)\right)$$

Pour des commodités de calcul, on va estimer $\frac{1}{T_0}$, ensuite on prend l'inverse.

Où

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(-a\frac{1}{T_0}\right)\right) &= \frac{(2S)^n}{\Gamma(n)}\frac{(S')^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-a\frac{2\lambda\theta}{(2+\theta)}\right)\lambda^{2n-1}\theta^{n-1}\exp\left(-2S\lambda\right)\exp\left(-\lambda\theta S'\right)d\lambda \\ &= \frac{(2S)^n}{\Gamma(n)}\frac{(S')^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^{2n-1}\theta^{n-1}\exp\left(-\lambda\left(\frac{2a\theta}{(2+\theta)}+2S+2S'\right)\right)d\lambda d\theta = \\ &= \frac{\Gamma(2n)\,(2S)^n\,(S')^n}{\Gamma(n)\,\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{\theta^{n-1}(2+\theta)^{2n}}{\left[S'\theta^2+2\left(S+S'+a\right)\theta+4S\right]^{2n}}d\theta \\ &= \frac{(2S)^n\,(S')^n}{\beta(n,n)}\Psi_2(n,a) \end{aligned}$$

Où $\Psi_2(n,a) = \int_0^\infty \frac{\theta^{n-1}(2+\theta)^{2n}}{\left[S'\theta^2+2(S+S'+a)\theta+4S\right]^{2n}}d\theta$ et $\beta(n,n)$ est la fonction beta au point (n,n).

$$\left(\frac{1}{T_0}\right)_{v,L} = -\frac{1}{a}\left[n\ln(2S) + n\ln(S') - \ln\beta(n,n) + \ln\Psi_1(n,a)\right] \tag{3.48}$$

Fonction de perte entropique L'estimateur Bayesien de T_0 correspondant à une fonction de perte entropique est donné par :

$$T_{0,v,E} = \left[E\left((T_0)^{-p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}$$

Où

$$\begin{aligned}
\left[E\left((T_0)^{-p}\right)\right] &= \frac{(2S)^n}{\Gamma(n)} \frac{(S')^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{2^p \lambda^p \theta^p}{(2+\theta)^p} \lambda^{2n-1} \theta^{n-1} \exp(-2S\lambda) \exp(-\lambda\theta S')\, d\lambda d\theta \\
&= 2^{n+p} (S^n) (S')^n \frac{\Gamma(2n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \Psi_0(n,p)
\end{aligned}$$

et $\Psi_3(n,p) = \int_0^\infty \frac{\theta^{n+p-1}}{\left[(2+\theta)^p (2S+\theta S')^{2n+p}\right]} d\theta$, on obtient donc un estimateur de T_0 sous une fonction de perte entropique et une loi a priori non informative :

$$T_{0,v,E} = \frac{1}{2} \left[(2S)^n (S')^n \frac{\Gamma(2n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \Psi_3(n,p)\right]^{-\frac{1}{p}} \tag{3.49}$$

3.3.2 Estimation Bayesienne avec une loi a priori conjuguée naturelle

Il existe une famille de conjuguées naturelles pour (λ, θ), (voir Weier 1981), dont la loi a priori marginale de λ est celle d'une loi $\mathcal{G}(g_1, h_1)$ et la loi a priori conditionnelle de θ sachant λ est $\mathcal{G}(g_2, \lambda h_2)$; ce qui est équivalent à dire que $\lambda\theta$ suit une loi $\mathcal{G}(g_2, h_2)$; $p(\lambda) = \frac{h_1^{g_1}}{\Gamma(g_1)} \lambda^{g_1-1} \exp(-h_1\lambda)$ et $p(\theta/\lambda) = \frac{(h_2)^{g_2}}{\Gamma(g_2)} \lambda (\lambda\theta)^{g_2-1} \exp(-h_2\lambda\theta)$, on obtient la densité jointe du couple (λ, θ) :

$$\begin{aligned} p(\lambda,\theta) &= p(\lambda)\,p(\lambda/\theta) = \frac{h_1^{g_1}h_2^{g_2}}{\Gamma(g_1)\,\Gamma(g_2)}\lambda^{g_1+g_2-1}\exp(-\lambda h_1)\,\theta^{g_2-1}\exp(-\lambda h_2\theta) \\ &\propto \lambda^{g_1+g_2-1}\theta^{g_2-1}\exp(-\lambda h_1)\exp(-\lambda h_2\theta) \end{aligned}$$

Remarque : Si $g_1 = g_2 = h_1 = h_2 = 0$, on retrouve le cas d'une loi a priori non informative.

Etant donné la vraisemblance donnée en (8), la densité a posteriori pour (λ,θ) est :

$$\begin{aligned} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) &= \frac{L\left(\underline{u},\underline{w}/\lambda,\theta\right)p(\lambda,\theta)}{\int_0^\infty\int_0^\infty L\left(\underline{u},\underline{w}/\lambda,\theta\right)p(\lambda,\theta)\,d\theta} \\ &= \frac{H_1^{G_1}H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\,\Gamma(G_2)}\lambda^{G_1+G_2-1}\exp(-\lambda H_1)\,\theta^{G_2-1}\exp(-\lambda\theta H_2) \end{aligned} \tag{3.50}$$

où : $\quad G_1 = n+g_1; \quad H_1 = 2S+h_1; \quad G_2 = n+g_2; \quad H_2 = S'+h_2$

Il est aisé de remarquer que la loi a posteriori de λ est une loi $\mathcal{G}(G_1,H_1)$ et la loi a posteriori de θ sachant λ est une loi $\mathcal{G}(G_2,\lambda H_2)$. De même, la a posteriori de λ sachant θ est celle d'une loi $\mathcal{G}(G_1+G_2,H_1+\theta H_2)$.

Estimations des paramètres

Fonction de perte quadratique Dans l'approche Bayesienne, la distribution a priori sur les paramètres traduit les connaissances dont on dispose concernant le modèle étudié. Si cette information est bonne, on peut à travers l'espérance et la variance du modèle déterminer les paramètres de la loi a priori. Si, au contraire, l'information est vague ; la loi a priori sur les paramètres est du type non informative.

Les estimateurs Bayesiens des paramètres λ et θ par rapport à une fonction de perte quadratique correspondent à leurs moyennes à postériori :

$$\begin{aligned}
\lambda_{B,Q} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda p\left(\lambda, \theta / \underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta \\
&= \frac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{G_1+G_2} \exp(-\lambda H_1)\, \theta^{G_2-1} \exp(-\lambda\theta H_2)\, d\lambda d\theta \\
\lambda_{B,Q} &= \frac{G_1}{H_1} = \frac{n+g_1}{2S+h_1} \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

De même, pour θ :

$$\begin{aligned}
\theta_{B,Q} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \theta p\left(\lambda, \theta / \underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta \\
&= \frac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{G_1+G_2-1} \exp(-\lambda H_1)\, \theta^{G_2} \exp(-\lambda\theta H_2)\, d\lambda d\theta \\
\theta_{B,Q} &= \frac{G_2}{G_1-1}\left(\frac{2S+h_1}{S'+h_2}\right) \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Quand on veut incorporer les connaissances à priori, pour une procédure d'estimation Bayesienne, il faut pouvoir donner des valeurs aux paramètres h_1, g_1, h_2 et g_2. Une alternative simple consiste à résumer l'information a priori par la donnée de l'espérance et de la variance des paramètres λ et θ du modèle. Puisque λ suit une loi $\mathcal{G}(g_1, h_1)$ et $\frac{g_1 h_2}{g_2 h_1}\theta$ suit une loi de Fischer à $2g_2$ et $2g_1$ degré de liberté, on en déduit les moyennes et les variances a priori suivantes :

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \frac{g_1}{h_1}, \qquad Var(\lambda) = \frac{g_1}{h_1^2} \\ E(\theta) &= \frac{g_2 h_1}{h_2 (g_1 - 1)}, \qquad Var(\theta) = \frac{g_2 h_1^2 (g_1 + g_2 - 1)}{(g_1 - 2)(g_1 - 1)^2 h_2^2} \end{aligned}$$

La détermination des paramètres h_1, g_1, h_2 et g_2 revient à résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues.

Fonction de perte de De-Groot

$$\lambda_{B,G} = \frac{E\left(\lambda^2/\underline{u}, \underline{w}\right)}{E\left(\lambda/\underline{u}, \underline{w}\right)} = \frac{(G_1 + 1)}{H_1} = \frac{(n + 1 + g_1)}{(2S + h_1)} \tag{3.53}$$

$$\theta_{B,G} = \frac{E(\theta^2/\underline{u}, \underline{w})}{E(\theta/\underline{u}, \underline{w})} = \frac{H_1 (G_2 + 1)}{H_2 (G_1 - 2)} = \frac{(2S + h_1)}{(S' + h_2)} \frac{(n + 1 + g_2)}{(n - 2 + g_1)}$$

Fonction de perte Linex

$$\lambda_{B,L} = -\frac{1}{a} \log E(\exp(-a\lambda))$$

Où

$$E(\exp(-a\lambda)) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-a\lambda} p\left(\lambda, \theta/\underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta = \left(\frac{H_1}{H_1 + a}\right)^{G_1}$$

$$\lambda_{B,L} = \frac{G_1}{a} \ln\left(1 + \frac{a}{H_1}\right) \tag{3.54}$$

Pour θ, on procéde de même, on obtient un estimateur de θ sous une fonction de perte Linex, noté $\theta_{B,L}$:

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(-a\lambda\right)\right) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a\theta} p\left(\lambda, \theta/\underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta \\ &= \frac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma\left(G_1\right)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{G_1+G_2-1}}{\left(\lambda H_2 + a\right)^{G_2}} \exp\left(-\lambda H_1\right) d\lambda \\ &= \frac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma\left(G_1\right)} \Phi_1\left(a\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\theta_{B,L} = -\frac{1}{a}\left(G_1 \ln H_1 + G_2 \ln H_2 - \ln\Gamma\left(G_1\right) + \ln\Phi_1\left(a\right)\right) \tag{3.55}$$

Fonction de perte entropique L'estimateur $\lambda_{B,E}$ de λ sous une fonction de perte entropique, avec une loi a priori conjuguée naturelle sur les paramètres est :

$$\lambda_{B,E} = \left[E\left(\lambda^{-p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}$$

$$\left[E\left(\lambda^{-p}\right)\right] = \tfrac{H_1^{G_1} H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{-p} p\left(\lambda, \theta/\underline{u}, \underline{w}\right) d\lambda d\theta = \frac{H_1^p}{\left(G_1-1\right)\left(G_1-1\right)...\left(G_1-p\right)};$$

on obtient pour $\lambda_{B,E}$:

$$\lambda_{B,E} = \frac{\left[\left(G_1-1\right)\left(G_1-1\right)...\left(G_1-p\right)\right]^{\frac{1}{p}}}{H_1} \tag{3.56}$$

De même pour le paramètre θ, aprés quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$\theta_{B,E} = \left[E\left(\theta^{-p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} = \frac{H_1}{H_2}\left[\frac{(G_2-1)(G_2-1)...(G_2-p)}{(G_1+p-1)(G_1+p-2)...(G_1)}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.57}$$

Estimation du temps moyen de bon fonctionnement

Fonction de perte quadratique On note par $T_{0,B}$ l'estimateur de T_0 avec une loi à priori conjuguée naturelle et une fonction de perte quadratique.

$$\begin{aligned}
T_{0,B} &= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(2+\theta)}{2\lambda\theta} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta \qquad (3.58)\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\lambda\theta} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} p\left(\lambda,\theta/\underline{u},\underline{w}\right) d\lambda d\theta\\
&= \frac{H_1^{G_1}H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)}\left[\frac{\Gamma(G_2-1)}{H_1^{G_1}}\frac{\Gamma(G_1)}{H_2^{G_2-1}} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma(G_2)}{H_1^{G_1-1}}\frac{\Gamma(G_1-1)}{H_2^{G_2}}\right]\\
T_{0,B} &= \frac{1}{2}\frac{H_1}{G_1-1} + \frac{H_2}{G_2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2S+h_1}{n+g_1-1}\right) + \frac{S'+h_2}{n+g_2-1}
\end{aligned}$$

Fonction de perte de De-Groot L'estimateur de T_0, obtenu à l'aide d'une fonction de perte de De-Groot, à partir d'une distribution conjuguée naturelle sur les paramètres noté $T_{0,B,G}$ est

$$T_{0,B,G} = \frac{E\left(T_0^2/\underline{u},\underline{w}\right)}{E\left(T_0/\underline{u},\underline{w}\right)}$$

On calcule $E\left(T_0^2/\underset{-}{u},\underset{-}{w}\right)$

$$E\left(T_0^2/\underset{-}{u},\underset{-}{w}\right)=E\left(\frac{(\theta+2)^2}{4\lambda^2\theta^2}/\underset{-}{u},\underset{-}{w}\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(2+\theta)^2}{4\lambda^2\theta^2}p\left(\lambda,\theta/\underset{-}{u},\underset{-}{w}\right)d\lambda d\theta;$$

aprés quelques manipulations algébriques, notamment en développant le carré et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$E\left(T_0^2/\underset{-}{u},\underset{-}{w}\right)=\frac{H_2^2}{(G_2-1)(G_2-2)}+\frac{H_1H_2}{(G_1-1)(G_2-1)}+\frac{1}{4}\frac{H_1^2}{(G_1-1)(G_1-2)}$$

Soit

$$T_{0,B,G}=\left[\frac{H_2^2}{(G_2-1)(G_2-2)}+\frac{H_1H_2}{(G_1-1)(G_2-1)}+\frac{1}{4}\frac{H_1^2}{(G_1-1)(G_1-2)}\right]/\left[\frac{1}{2}\frac{H_1}{(G_1-1)}+\frac{H_2}{(G_2-1)}\right. \tag{3.59}$$

Fonction de perte Linex Soit $T_{0,B,L}$, l'estimateur de T_0 sous une fonction de perte asymétrique Linex ; pour des commodités de calculs, nous allons estimer $\frac{1}{T_0}$

$$\frac{1}{T_{0,B,L}}=-\frac{1}{a}\ln E\left(\exp\left(-a\frac{1}{T_0}\right)\right)$$

Où

$$\begin{aligned}E\left(\exp\left(-a\frac{1}{T_0}\right)\right) &= \int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left(-a\frac{2\lambda\theta}{(2+\theta)}\right)p\left(\lambda,\theta/\underset{-}{u},\underset{-}{w}\right)d\lambda d\theta = \\ &\frac{H_1^{G_1}H_2^{G_2}}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left(-a\frac{2\lambda\theta}{(2+\theta)}\right)\lambda^{G_1+G_2-1}\exp(-\lambda H_1)\,\theta^{G_2-1}\exp(-\lambda\theta H \\ &= \frac{H_1^{G_1}H_2^{G_2}}{B(G_1,G_2)}\int_0^\infty\frac{\theta^{G_2-1}(2+\theta)^{G_1+G_2}}{\left[H_2\theta^2+(2a+H_1+2H_2)\theta+2H_1\right]^{G_1+G_2}}d\theta\end{aligned}$$

On note par $\Phi_2(a)$, l'intégrale $\Phi_2(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\theta^{G_2-1}(2+\theta)^{G_1+G_2}}{\left[H_2\theta^2 + (2a + H_1 + 2H_2)\theta + 2H_1\right]^{G_1+G_2}} d\theta$ si elle existe ; $\beta(G_1, G_2)$ représente la fonction beta au point (G_1, G_2).

$$\frac{1}{T_{0,B,L}} = -\frac{1}{a}\left[G_1 \ln H_1 + G_2 \ln H_2 - \ln B(G_1, G_2) + \ln \Phi_2(a)\right] \tag{3.60}$$

Fonction de perte entropique

$$\begin{aligned} T_{0,B,E} &= \left[E\left(T_0^{-p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} = \left[2^p E\left(\frac{\lambda^p \theta^p}{(2+\theta)^p}\right)\right]^{-\frac{1}{p}} \\ T_{0,B,E} &= \frac{1}{2} H_1^{-\dfrac{G_1}{p}} H_2^{-\dfrac{G_2}{p}} \left[\frac{\Gamma(G_1+G_2+p)}{\Gamma(G_1)\Gamma(G_2)}\right]^{-\dfrac{1}{p}} \left[\Phi_3(p)\right]^{-\dfrac{1}{p}} \end{aligned}$$

Où $\Phi_3(p) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\theta^{G_2-1}}{(2+\theta)^p (H_1 + \theta H_2)^{G_1+G_2+p}} d\theta$

3.4 Etude de Monté-Carlo :

Dans cette section, nous proposons d'étudier la performance de l'estimation bayésienne de la fonction de Fiabilité et des paramètres sous certaines des fonctions de l'erreur en respectant le MLE.

L'étude comparative de Monte-Carlo est performante enrichissant les fonctions faibles de l'erreur données dans la section précédente. Pour compléter l'étude, nous ajoutons la fonction de l'erreur absolue.

Dans les tableaux suivants, nous présentons les résultats d'étude de Monte-Carlo.

Nous simulant les n valeurs $(n = 10, 20, 30, 50, 100, 250)$ (λ_i, θ_i) de distribution a posteriori de $(\lambda, \theta)/u, w$.

Dans cette étude les vraies valeurs sont : $\lambda = 2.3996$ et $\lambda = 2.3996$

Nous supposons aussi que : $g_1 = g_2 = 1$ et $h_1 = h_2 = 2$, puisque the lias et les racines de l'erreur ne sont pas adéquatesen les comparant avec les estimateurs bayésiens classiques. Nous proposons une comparaison performante en utilisant le critère de Pitmancloseness [55], ces critères sont largement utilisables dans la littérature.

Le critère de Pitman est considéré dans plusieurs papiers .il a été utilisé par Sugiura (1984) pour estimer la matrice normal, et la famille des estimateurs fermés que les moyens simple de la population dans le sens de Pitman.

Fontain (2000) construit une classe généralisée de critère fermé pour la comparaison des estimateurs dans la mesure de Pitman's :

Jazani (2012) a montré que le Pitman's de la comparaison de Pitman sous l'erreur usuelle absolue.

3.4.1 Estimation Bayesienne avec une loi a priori non informative

quand la loi a priori non informative le résultat de l'etude comparative est donnée ci-dessus. dans la suite ; l'estimateur de Bayes est comparé avec MLE, l'échantillon de Gibbs est utilisé si

$$\lambda/\theta \sim \mathcal{G}(2n, 2S + \theta S')\theta/\lambda \sim \mathcal{G}(n, \lambda S')$$

Résultats des paramètres

le tableau I donne les valeurs du critère de Pitman lorsqu'on compare l'estimateur de Bayes avec le MLE.

Sous chaque fonction de perte, la probabilité est calculée avec la formule de Pitman. telque, si elle est supérieur à 0,5, on peut dire que l'estimateur de Bayes correspendant est meilleur.

dans le tableau II, l'éfficacité relative de cette comparaison est donnée . La comparaison qui concerne l'efficacité relative est faite, tel que si elle est inférieur à 1. l'estimateur de Bayes est meilleur.

Table I

parameter	n	squared loss	absolute loss	DeGroot loss	Linex loss	Entropy loss
	10	0.52	0.493	0.41	0.463	0.413
	20	0.477	0.48	0.48	0.42	0.41
	30	0.47	0.433	0.52	0.423	0.41
λ	50	0.477	0.483	0.477	0.46	0.45
	100	0.48	0.473	0.507	0.463	0.453
	250	0.457	0.49	0.473	0.487	0.483
	10	0.443	0.42	0.337	0.733	0.427
	20	0.447	0.507	0.37	0.657	0.48
	30	0.443	0.497	0.38	0.583	0.467
θ	50	0.467	0.433	0.417	0.54	0.477
	100	0.467	0.49	0.417	0.537	0.49
	250	0.47	0.497	0.46	0.477	0.533

Pitman comparison of the estimators of λ and θ

Table II

parameter	n	squared loss	absolute loss	DeGroot loss	Linex loss	Entropy loss
	10	1.01	0.973	0.892	0.261	0.825
	20	0.993	0.991	0.928	0.61	0.918
	30	0.993	1.004	0.947	0.74	0.958
λ	50	0.997	0.997	0.965	0.843	0.985
	100	0.996	1.000	1.001	0.889	0.958
	250	0.998 ‘	1.000	1.005	0.949	0.981
	10	1.408	1.012	0.672	0.738	0.79
	20	1.201	1.002	0.813	0.938	0.873
	30	1.159	1.007	0.949	0.979	0.9
θ	50	1.107	1.011	0.952	1.01	0.971
	100	1.035	1.001	0.936	0.994	0.988
	250	1.031	1.000	0.985	1.012	0.997

Relative Efficiency comparison of the estimators of λ and θ

On remarque que l'estimateur de Bayes de λ n'est pas meilleur que le MLE au sens de Pitman.

Cependant, enterme de l'éfficacité relative (Voir tableau I) les fonction de pertes de Linex et l'entropie améliorent l'estimateur de Bayes et l'exente bien.

Concernant l'estimateur de θ, la fonction de perte Linex nous donne un résultat convenable est meilleur que le maximum de vraisemblance en ce qui concerne Ptman et le critère d'éfficacité relative (Voir tableau I et II) les fonction de pertes de Linex et l'entropie améliorent l'estimateur de Bayes et l'exente bien.

Concernant l'estimateur de θ, la fonction de perte Linex no. Cela peut être vu facilement qaund n n'est pas grand.

Résultats des MTBF

concernant l'estimateur du tauts moyen entre l'erreur , on a le résultat donné dans les tableaux III et IV

Table III

Pitman comparison of the estimators of the MTBF

n	squared loss	absolute loss	DeGroot loss	Linex loss	Entropy loss
10	0.42	0.46	0.363	0.44	0.617
20	0.473	0.49	0.44	0.49	0.587
30	0.497	0.523	0.48	0.517	0.597
50	0.47	0.477	0.447	0.477	0.52
100	0.487	0.507	0.473	0.493	0.53
250	0.51	0.5	0.5	0.51	0.493

Table IV

Relative Efficiency comparison of the estimators of the MTBF

n	squared loss	absolute loss	DeGroot loss	Linex loss	Entropy loss
10	1.516	1.068	0.934	1.276	0.975
20	1.18	1.031	0.866	1.112	0.99
30	1.064	1.004	0.845	1.036	0.984
50	1.089	1.015	0.973	1.062	0.998
100	1.036	1.006	0.972	1.025	0.998
250	1.005	1.002	0.974	1.002	0.995

Pour l'estimation de MTBT, la fonction d'entropie est meilleurs en utilisant les deux critères.

Finalement, on peut conclure que, le la loi a priori qui nous donnent pas d'information, la fonction de perte de Linex et la fonction de perte d'entropie sont meilleurs que la fonction de perte quadratique et la fonction de perte absolue.

En plus si on compare les approches classique et celle de Bayes, on peut conclure que la fonction Linex pour les paramètres et la fonction d'entropie pour les MTBT donne de meilleurs résultats.

3.4.2 Estimation Bayesienne avec une loi a priori conjuguée naturelle

Maintenant, on suppose qu'on va utiliser la loi a priori conjuguée naturelle à la place de la loi a priori vague, ici la méthode utilisée est la méthode de Gobbs où

$$\lambda/\theta \sim \mathcal{G}(G_1 + G_2, H_1 + \theta H_2)$$

$$\theta/\lambda \sim \mathcal{G}(G_2, \lambda H_2)$$

Résutats des paramètres :

les résultats de Pitman est donnés dans le Tableua VThe comparison with respect to Pitman closeness criterion is given in the Table V.

Table V

Pitman comparison of the estimators of λ and θ

Parameter	n	squared loss	absolute loss	DeGroot loss	Linex loss	Entropy loss
	10	0.433	0.413	0.717	0.38	0.357
	20	0.463	0.437	0.703	0.413	0.383
λ	30	0.483	0.473	0.643	0.457	0.443
	50	0.483	0.477	0.593	0.46	0.447
	100	0.513	0.51	0.6	0.497	0.493
	250	0.497	0.497	0.557	0.477	0.467
	10	0.34	0.427	0.24	0.47	0.877
	20	0.4	0.443	0.323	0.463	0.823
θ	30	0.41	0.453	0.37	0.45	0.777
	50	0.447	0.48	0.41	0.477	0.707
	100	0.483	0.5	0.453	0.49	0.66
	250	0.433	0.467	0.407	0.45	0.543

On note que la fonction de perte de Groot nous donne des meilleurs résultats que MLE pour le paramètre λ,Cependant, cenn'est pas le cas pour θ lorsque la fonction d'entropie de perte est plus convenable. Pour les deux cas et en dépit de la popularité de la fonction de perte quadratique on peut dire que l'estimation peut étre améliorée en respectant la méthode classique en utilisant des fonctions de perte convenable, les résultats sont donnés dans le tableau :

Table VI

Relative Efficiency of the estimators of λ and θ

Parameter	n	squared loss	absolute loss	DeGroot loss	Linex loss	Entropy loss
	10	0.32	0.695	0.624	0.086	0.586
	20	0.601	0.827	0.779	0.384	0.831
λ	30	0.702	0.863	0.859	0.5	0.826
	50	0.792	0.911	0.904	0.642	0.862
	100	0.861	0.943	0.94	0.759	0.867
	250	0.954	0.976	0.984	0.915	0.976
	10	1.207	0.986	0.506	0.475	0.518
	20	1.235	0.999	0.708	0.952	0.737
θ	30	1.182	1.011	0.741	1.023	0.831
	50	1.136	1.015	0.841	1.042	0.899
	100	1.068	0.995	0.89	1.028	0.953
	250	1.067	1.011	1.012	1.04	0.983

Ici on peut remarquer l'estimation de Bayes de θ est meilleure que MLE pour toutes les fonction de perte, mais pour le paramètre la fonction de perte de l'entropie est meilleure.

Résultats de MTBF :

Dans la suite, on donne les résultats comparatifs de MTBF en utilisant les différentes fonctions de perte données plus haut. Les tableaux VII, VIII donnent respectivement les résultats de l'approche de Pitman et le critère d'éfficacité relative.

Table VII

Pitman comparison of the estimators of the MTBF

n	squared loss	absolute loss	DeGroot loss	Linex loss	Entropy loss
10	0.42	0.48	0.387	0.46	0.693
20	0.4	0.423	0.377	0.413	0.633
30	0.437	0.443	0.43	0.44	0.607
50	0.5	0.523	0.473	0.513	0.613
100	0.43	0.44	0.413	0.43	0.523
250	0.467	0.477	0.45	0.477	0.533

Table VIII

Relative Efficiency comparison of the estimators of the MTBF

n	squared loss	absolute loss	DeGroot loss	Linex loss	Entropy loss
10	1.051	0.897	0.62	0.917	0.68
20	1.067	0.97	0.774	0.994	0.823
30	1.035	0.974	0.833	0.99	0.875
50	0.983	0.969	0.841	0.967	0.912
100	1.039	1.000	0.992	1.019	0.965
250	1.014	1.001	0.99	1.008	0.986

Dans le cas de l'estimateur MTBF ,

l'estimateur de Bayes est le meilleur si on considère la fonction de perte de l'entropie par rapport aux critères de Pitman et l'éfficacité relative.

Conclusion et Perspectives

Dans cet te partie, on a montré que l'estimation maximum de propabilité des paramètres et la valeur moyenne du temps entre l'échec de la bivariation de la distribution de l'expo peut étre améliorer en utilisant la méthode de Bayes.

On peut aussi montrer que cette amélioation peut étre éfficace en utilisant une fonction de perte éfficace.

Annexe

Program Simulation "Pascal"

```
program simulation(input,output);
uses crt;
const nmax=50;
var n,n1,it :integer;
lx,ly,tt,lx1,ly1,tt1,x,y,es :real;
u1,w1 :array[1..nmax,1..nmax]of real;
u,w :array[1..nmax]of real;
a,b :real;
{********************************************************************}
    procedure lecture;
    begin
        textcolor(15);
        writeln(' Simulation ');
```

```
    write(' valeur de lamda pour X : ') ;readln(lx1) ;
    write(' valeur de lamda pour Y : ') ;readln(ly1) ;
    write(' valeur de tetta :') ;readln(tt1) ;
    write(' taille echantillon :') ;readln(n1) ;
    lx1 :=lx1*tt1 ;ly1 :=ly1*tt1 ;
  end ;
{*****************************************************************}
  procedure actualiser ;
  begin
    lx :=lx1 ;ly :=ly1 ;tt :=tt1 ;n :=n1 ;
  end ;
{*****************************************************************}
  procedure maximin ;
  var r1,r2,a,b :real ;
  i :integer ;
  maxi,mini,x,y :real ;
  begin
    for i :=1 to n do begin
                r1 :=random ;r2 :=random ;a :=ln(r1) ;b :=ln(r2) ;
                x :=-(1/lx)*a ;y :=-(1/ly)*b ;
                if x<y then begin
```

```
                              mini :=x ;maxi :=y ;
                          end
                     else begin
                            mini :=y ;maxi :=x ;
                        end ;
                     u1[it,i] :=mini ;w1[it,i] :=maxi-mini ;
                  end ;
        end ;
{*****************************************************************}
        procedure moyennes ;
        var i :integer ;
        som1,som2 :real ;
        begin
          for i :=1 to n do begin
                      som1 :=0 ;som2 :=0 ;
                      for it :=1 to nmax do begin
                                 som1 :=som1+u1[it,i] ;
                                 som2 :=som2+w1[it,i] ;
                               end ;
                      u[i] :=som1/nmax ;w[i] :=som2/nmax ;
                  end ;
```

```
end;
{*******************************************************************}
procedure estimateur(var a,b :real);
var i :integer;
som1,som2 :real;
begin
    som1 :=0;som2 :=0;
    for i :=1 to n do begin
                        som1 :=som1+u[i];
                        som2 :=som2+w[i];
                      end;
    es :=(som1/(n-1))+(som2/(n-1));
    a :=som1;b :=som2;
end;
{*******************************************************************}
procedure ecriture;
var i :integer;
begin
    clrscr;
    gotoxy(8,2);textcolor(4);write('valeur U ');
    gotoxy(28,2);write('valeur W');
```

```
readln;
for i :=1 to n do begin
            textcolor(8);
            gotoxy(3,2+i);write(u[i]);
            gotoxy(23,2+i);writeln(w[i]);
            readln;
         end;
textcolor(4);write(' valeur estimateur :');textcolor(10);write(es);
WRITELN;
writeln(' S1 = ',a);
writeln(' S2 = ',b);
end;
{******************************************************************}
begin
  clrscr;
  lecture;it :=1;
  repeat
    randomize;
    actualiser;
    maximin;
    it :=it+1;
```

```
    until it>nmax;
    moyennes;
    estimateur(a,b);
    ecriture;
    readln;readln;
end.
```

Programme Lindley "Matlab"

```
clear

%set parameters

t = ;

n = 30 ;

s = 6.8199 ;

sb = 17.0169 ;

teta=0.73317 ;

laa=2.3996 ;

%form alpha_hat

la = n/(2*s) %lambda

th = 2*(n-1)/n*s/sb %theta

a=exp(-2*la*t) ;

b=exp(-la*th*t) ;

F1 = -2*th*t/(th-2)*(a-b) ;

F2 = -2/(th-2)^2*(a-b+2*la*t*b-th*la*t*b) ;

F11 = 2*t^2*th/(th-2)*(2*a-th*b) ;

F12 = 2*t/(th-2)^2*(2*a-2*b+(2*th*t-t*th^2*la)*b) ;

F22 = -1/(th-2)^3*(4*b-4*b^2+(8*la^2*t^2-8*la*t-8*th*la^2*t^2+
        4*la*th*t+2*t^2*th^2*la^2)*b) ;
```

```
L111 = 1/la^3*(4*n-2) ;

L222 = 2/th^3*(n-1) ;

F = th/(th-2)*a-2/(th-2)*b ;

T11 = -(la^2-n*la^2)/(2*n^2-4*n-th^2*la^2*sb^2+2) ;

T12 = -th^2*la^2*sb/(2*n^2-4*n-th^2*la^2*sb^2+2) ;

T22 = th^2*(2*n-2)/(2*n^2-4*n-th^2*la^2*sb^2+2) ;

St = F+1/2*F11*T11 + F12*T12 + 1/2*F22*T22 + 1/2*L111*(F1*T11^2+F2*T11*T12)+
        1/2*L222*(F2*T22^2+F1*T22*T12)

SS=(teta/(teta-2))*exp(-2*laa*t)-(2/(teta-2))*exp(-laa*teta*t)
```

Bibliographie

[1] Achcar J.A and Leandro R.A. (1998) : Use of Markov Chain Monte-Carlo methods in a Bayesian analysis od the Block and Basu bivariate exponential distribution, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 50, 403-416.

[2] Achcar J.A and Santander L.A.M. (1993) : Use of approximate Bayesian methods for the Block and Basu bivariate exponential distribution, Journal of the Italian Statistical Society, 3, 233-250

[3] Ahmed, O.M, Al-Kutubi, H.S. and Ibrahim, N.A (2010). Comparison of the Bayesian and Maximum Likelihood Estimation for Weibull Distribution. Journal of Mathematics and Statistics, 6 (2) : 100-104

[4] Andrade, J.A.A.& O'Hagan, A. (2006).Bayesian robustness modeling using regularly varying distributions, Bayesian Analysis,1, pp.169-188.

[5] Andrieu, C. & Robert, C.P. (2001). Controlled MCMC for optimal sampling, Rapport technique 2001-25, Cahiers du CEREMADE, Université Paris Dauphine.

[6] Andrieu, C. Doucet,A, Fitzgerald, W.J. And Pérez, J.M, (2001). Bayesian Com-

putational Approaches to Model Section, Nonlinear and Non Gaussian Signal Processing, Smith, R.L., Young, P.C. and Wakden.a. (Eds), Cambridje University Press.

[7] Arnold BC. (1989). Bayesian estimation and prediction for Pareto data. J.A.S.A., Vol 84, N°408, 1079-1084.

[8] Artin, E. (1994). The Gamma function, Holt Rinehart Winston, New York.

[9] Congdon Peter (2006). Bayesian Statistical Modelling Second edition. Wiley Eds

[10] Bacha, M. (1996). Inférence statistique pour des modèles de durées de vie et applications, Thése de doctorat, Université de Rouen.

[11] Bacha, M. & Celeux, G.(1996). BRM-IS : Un algorithme d'estimation bayésienne pour modèles à données incomplètes, Proceeding des XXVIII journées de statistique, Québec.

[12] Bacha, M. ,Celeux, G, Idéé, E., Lannoy, A & Vasseur, D.(1998). Esitimation de modèles de durées de vie fortement censurées, Eyrolles.

[13] Bain, L. & Engelhardt, M. (1991). Statistical Analysis of Reliability and Life Testing Models, Marcel Dekker.

[14] Basu, S, Sen, A. & M. Banerjee. (2003). Bayesian analysis of competing risks with partially masked cause of failure, A pplied Statistics, 52, pp. 77-93.

[15] Berger, J.O. (1985). Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis (2 nd édition), Springer-Verlag.

[16] Berger, J.O. & Bernardo, J.M.(1992). On the development of reference priors (with discusion).

[17] Berger, J.O. & Sun, D.(1993). Bayesian analysis for the Poly- Weibull Distribution, JASA, 88, pp. 1412-1418.

[18] Bernardo, J.M. (1997). Reference Posterior Distributions for Bayesian Inférence, J.R. Statis.Soc, 41, pp. 113-147.

[19] Bertholon, H. (2001). Une modélisation du vieillissement .thèse de doctorat, Université Joseph Fourier,Grenoble .

[20] Bertholon, H. Bousquet, N. & Celeux, G. (2006). Analternative competing risk model to the weibull distribution for modelling aging in life time data analysis, Life time Data Analysis.

[21] Billy, F., Clarotti, C.A. & Lannoy, A. (2004). Inférence des paramètres de lois exponentielles et de Weibull : comparaison des approches classiques et bayésiennes, Textes des Conférences "Risques & Oppotunités", Congrès 14, Bourges.

[22] Block,H.W. and Basu,A.P. (1974) : A continuous Bivariate exponential extension. J.Amer.Statist.Assoc., Vol 69, 1031-1037.

[23] Cappé, O., Guillin, A., Marin, J., M. & Robert, C.P.(2004). Population Monte Carlo, Journal of Computational and Graphical Statistics, 13, pp. 907-929.

[24] Calabria R., Pulcini G. (1994) : An Engineering Approach to Bayes estimation for the Weibull distribution. Micron Electron Reliab., 34 ; 789-802.

[25] Castanier, B. (1997). Estimation des variances pour des modèles de durées de vie censurées, Mémoire de DEA, INRIA Rhône-Alpes.

[26] Celeux, G. (1996). Estimation of failure times involving Weibul distributions via stochastic algorithms, In : xvii émes Rencontres Franco-Belges de Statisticiens, Marne-la-Vallée.

[27] DeGroot M.H. (1970) : Optimal Statistical Decisions. New-York, Mc-Graw-Hill.

[28] Dunsmore I.R. 1974,The Bayesian predictive distribution in life testing models. Technometrics, Vol 16 N°3 445-450.

[29] Dunsmore I.R. 1974,Asymptotic prediction analysis. Biometrica, vol 63, 627-630.

[30] Erkanli A., Mazzukhi TA.and Soyer R.(1998). Bayesian computation for a class of reliability growth models. Technometrics, Vol 40, $N°1$ pp. 14-23.

[31] Evans I.G. and Nigm A.H.M.1980,Bayesian prediction for the left trancated exponentiel distribution. Technometrics, Vol 22, N°2 ,329-340.

[32] Evans I.G. and Nigm A.H.M.1980, Bayesian 1-sample prediction for the 2-parameter distribution. I.E.E.E. transaction on reliability, Vol R-29 N°5 , 218-229.

[33] Fountain R.L. (2000) A class of closeness criteria. Communication in statistics, theory and methods, 29(8), 1865-1883.

[34] Freund, J.A (1961). bivariate Extension of the exponential distribution. J.Amer.Statist.Assoc. Vol 56, 971-977.

[35] Fuller, W.A (1982). Closeness of estimators. Encyclopedia of statistical sciences, vol 2, Wiley.

[36] Gauss, C.F. (1810). Least Squares method for the Combinations of Observations. Translated by J. Bertrand (1955). Mallet-Bachelier, Paris.

[37] Guillin, A., Marin, J., M. & Robert & C.P. (2005). Estimation bayésienne approximative par échantillonnage préférentiel, Revue de Statistique Appliquée, 54, pp. 79-95.

[38] Hanagal D.D. and Ahmadi K.A. 2009. Bayesian estimation of the parameters of bivariate exponential distribution.Communications in Statistics - Simulation and Computation, 38. 1391-1413.

[39] Hartigan, J.A. (1983). Bayes ' Théory, New York : Springer-Verlag.

[40] Hartigan, J.A. (1998). The Maximum Likelihood Prior, Annals of Statistics, 26, pp. 2083-2103.

[41] Idée, E., Lannoy, A. And Meslin, T. (2001). Estimation of a lifetime law for equipment on the basis of a highly right multicensored sample and expert assessments, rapport de recherche 01-10b de l'équipe LAMA, Université de Savoie. Egalement Séminaire ESReDA Lifetime Management, Erlangen.

[42] Jeffreys, H. (1946). An invariant form for the prior probability in estimation problems, Proceedings of the Royal Society of London, 186, pp. ; 453-461.

[43] Jeffreys H. (1961).Theory of probability, Oxford : Clarendon Press

[44] Jozani, M.J (2012) A note on Pitman's measure of closeness with balanced loss function. *Statistics*, 1-6

[45] Kadane, J.B. (1980). Predictive and structural methods for eliciting prior distributions, in Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics (ed. A. Zellner), Amsterdam : North-Holland.

[46] Klein J.P. (1995) . Inference for Multivariate Exponential Distributions, in N. Bala-Krishman and A.P. Basu eds, The Exponential Distributions-Theory Methods and Applications Gordon and Breach, 333-350.

[47] Klein J.P. and Basu A.P.(1985). On estimating reliability for bivariate exponential distributions, Sankhya, Series B, 47, 346-353.

[48] Kubokawa, T. (1989). Closer estimators of a commen mean in the sense of Pitman. Ann. Inst. Statist. Math. Vol. 41, No. 3, 477-484

[49] Legendre, A. (1805). New Methods for the Determination of Orbits of Comets Courcier, Paris.

[50] Lindley, D.V, (1980). Approximate Bayesian methods . Trabajos Estadist. Investigacion Oper. 31, 232-245.

[51] Muller ;H.G. and Wang J.L. (1994). Hasard rate estimation under random censoring with varying kernels and bandwidhs.Biometrics 50 61-76.

[52] Padgett,W.J. and Mc Nichols,D.T.(1984). non parametric estimation from censored data.Comm.statist.theory methods,13 .pp ; 1581-1613.

[53] Pandey, B.N. , Nidhi Dwivedi and Pulastya Bandyopadhyay (2011). Comparison between Bayesian and maximum likelihood estimation of scale parameter in Weibull distribution with known shape under Linex loss function. Journal of Scientific Research,Vol. 55, 163-172,2011.

[54] Peddada, S. D. and Khattree, R. (1986). On Pitman nearness and variance of estimators, Comm. Statist. A–Theory Methods, 15, 3005-3017.

[55] Pitman, E. J. G. (1937). The closest estimates of statistical parameters, Proc. Cambridge Phil. Soc., 33, 212-222.

[56] Rao, C. R., Keating, J. P. and Mason, R. L. (1986). The Pitman nearness criterion and its determination,Comm. Statist. A– Theory Methods, 15, 3173-3191.

[57] Robert. C.(1992), l'analyse statistique Bayesienne. Economica.

[58] Sugiura, N. (1984). Asymptotically closer estimators for the normal covariance matrix, J. Japan Statist. Soc., 14, 145-155.

[59] Tierney, L., Kadane, J.B. (1986). Accurate aproximations for posterior moments and marginal densities, J. Amer. Statist. Assoc., 81, 82-86.

[60] Varian H.R. (1975) : A Bayesian Approach to real estate assessment.Amsterdam, North Holland, 195-208

[61] Weier D.R. (1981) : Bayes estimation for bivariate survival models besed on the exponential distributions, Communications in Statistics –Theory and Methods, 10, 1415-1427.

[62] Zellner.A. (1986) : Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss function. Jour. Amer. Statist. Assoc.,81, 446-451.