

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA  
FACULTÉ DES SCIENCES - DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

**THÈSE**

Présentée en vue de l'obtention du diplôme  
de Doctorat en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques et Applications

Par

**Souad Gasmi**

**ETUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE  
QUELQUES PROBLÈMES EN MÉCANIQUE  
DES FLUIDES Á DENSITÉ FORTE**

Sous la direction du Professeur **Fatma Zohra Nouri**

Soutenu publiquement, le 12/12/2013, devant le jury composé de :

<b>Fatma Zohra</b>	Nouri	U.B.M Annaba	Professeur	Directrice
<b>Brahim</b>	Khodja	U.B.M Annaba	Professeur	Président
<b>M. Larbi</b>	Djabri	U.B.M Annaba	Professeur	Examineur
<b>Lahcen</b>	Bencheikh	U.F. A. Sétif	Professeur	Examineur
<b>Nassereddine</b>	Kechkar	U. M. Constantine	Professeur	Examineur
<b>A. Hafid</b>	Mokrane	E. N. S. Kouba	Professeur	Examineur
<b>Lamine</b>	Nisse	U.B.M Annaba	M. C. A	Invité

---

# *Remerciements*

Si je peux soutenir mon doctorat aujourd'hui, je le dois en partie à la bienveillance de mes enseignants qui m'ont aidée et inspirée pendant mes études et le début de ma carrière scientifique ; qu'ils trouvent ici les marques de ma profonde reconnaissance et de mon respect.

En tout premier lieu, mes remerciements et ma gratitude sont, destinés à ma directrice de thèse Mme Fatma Zohra Nouri, Professeur au Département de Mathématiques, pour son enthousiasme, son implication presque quotidienne et sa grande disponibilité. Elle m'a apporté un soutien moral et scientifique constant, ainsi qu'une compréhension plus approfondie des divers aspects du sujet. Je lui présente les témoignages de ma sincère reconnaissance.

Je tiens à remercier Monsieur B. Khodja Professeur à L'université d'Annaba, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie vivement Messieurs Pr. M. L. Djabri, Pr. L. Bencheikh, Pr. N. Kechkar, Pr. A. H. Mokrane et Mr. L. Nisse, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que pour les enrichissantes observations faites dans leurs rapports, et d'examiner le travail de cette thèse pour mieux valoriser les résultats obtenus.

Un très grand merci à mes parents pour leur soutien, leur patience et pour leur encouragement tout au long de ces années ainsi qu'un merci du fond du cœur à mon épouse qui a partagé avec moi les moments les plus douloureux.

Mes remerciements vont également à, mes frères : Fawzi, Sofiane et Salah, mes sœurs : Saida et sa petite famille, Houda et la petite Imane, et ma fille Israa qui m'ont toujours soutenu dans les moments difficiles.

---

Merci à mes amis, vos encouragements et votre amitié ont compté énormément ces années.

Merci à tous ceux ou celles qui me sont chers et que j'ai omis involontairement de citer.

Merci à tous ceux qui ont cette pénible tâche de soulager les gens et diminuer leurs souffrances.

## الملخص

في هذا العمل سنقوم بدراسة "جملة المعادلات للنظام الهيدروكربوني" المستعمل لمحاكاة الابار البترولية. النظام الهيدروكربوني هو مثال مبسط لوصف الجريان ثنائي المائع (النفط و الغاز) مع وجود انتقال في المادة بين المائعين في وسط مسامي. باعتبار بعض الفرضيات, نعيد صياغة المعادلات بالضغط الكلي لـ"شافون", هذا النوع من الجريان يمثل بواسطة جملة معادلات منحلة غير خطية من نوع "الحمل الحراري-الانتشار". هذه الصيغة تسمح باستنتاج وجود و وحدانية الحل. كما تسمح بدراسة عديدة لمخطط الاحجام المنتهية.

**الكلمات المفتاحية:** مائع قابل للضغط, وسط مسامي, جريان ثنائي المائع, حل ضعيف.

## Résumé

**Résumé :** Dans ce travail, on va introduire une étude du système hydrocarbon utilisé pour la simulation des réservoirs pétroliers. Le hydrocarbon système est un modèle simplifié qui décrit un écoulement diphasique (huile et gaz) avec le fait d'un transfert de masse entre les deux fluides dans un milieu poreux. Sous quelques hypothèses, la formulation en pression globale introduite par Guy Chavent en 1976 [13] et par Antontsev & Monakhov en 1978 [04] est adoptée. Ce type d'écoulement (hydrocarbon system) est modélisé par un système d'équations paraboliques dégénérées non linéaires de type convection-diffusion. Cette formulation a permis d'établir des résultats théoriques d'existence et d'unicité de la solution, ainsi qu'une validation numérique par un schéma de volumes finis.

**Mots-clés :** Fluide compressible, Milieu poreux, Ecoulement diphasique, Solution faible, Schéma volumes finis.

## Abstract

**Abstract :** In this paper, we introduce a study of the hydrocarbon system used for the petroleum reservoirs simulation. This system is a simplified model which describes a two-phase flow (oil and gas) with a mass transfer in a porous medium, that leads to the fluid compressibility. This kind of flow is modelled by a system of parabolic degenerated non linear convection-diffusion equations. Under certain hypothesis, such as validity of Darcy's law, incompressibility of the porous medium, compressibility of the fluids, mass transfer between the oil and the gas and negligible gravity, the global pressure formulation of Guy Chavent [13] is formulated, This formulation allows the establishment of theoretical results on the existence and uniqueness of the solution, and a numerical study of a finite volume scheme.

**Keywords :** Compressible fluid, Porous medium, Two-phase flow, Weak solution, finite volume scheme.

## 0.1 Nomenclature

- $\Omega$  : domaine de  $IR^d$  ( $d = 1; 2$  ou  $3$ ), figurant un milieu poreux.
- $\Gamma = \partial\Omega$  : frontière du domaine  $\Omega$ .
- $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  : frontières d'injection, imperméable et de production.
- $\vec{\eta}$  : normale unitaire à une frontière, orientée vers l'extérieur.
- $x = x, (x, y), (x, y, z)$  : variable d'espace dans  $\Omega \subset IR^d$ .
- $t, T$  : variable temporaire et temps final, en (s).
- $h$  : pas du maillage dans  $\Omega$ , en (m).
- $\Delta t$  : pas de discrétisation en temps dans  $(0, T)$ , en (s).
- $\phi = \phi(x)$  : porosité du milieu poreux en (%).
- $K = K(x)$  : tenseur des perméabilités absolues en (Darcy).
- $i = o, g$  : fluide mouillant (o = l'huile) et non mouillant (g=le gaz).
- $S_i = S_i(x, t)$  : saturation du fluide  $i = o, g$  :, en (%).
- $p_i = p_i(x, t)$  : pression du fluide  $i, i = o, g$  : en (Pa).
- $\vec{q}_i = \vec{q}_i(x, t)$  : vitesse de filtration du fluide  $i, i = o, g$  en ( $m.s^{-1}$ ).
- $S = S(x, t)$  : saturation réduite de l'un des constituants, en (%).
- $\vec{q} = \vec{q}(x, t)$  : vitesse de filtration totale, en ( $m.s^{-1}$ ).
- $P = P(x; t)$  : pression globale en (Pa).
- $\rho_i$  : masse volumique du fluide  $i, i = o, g$  en ( $g.m^{-3}$ ).
- $\mu_i$  : viscosité du fluide  $i, i = o, g$  en (Pa.s).
- $P_{CM}$  : pression capillaire maximale en valeur absolue, en (Pa).
- $P_{atm}$  : pression atmosphérique, en (Pa).
- $\vec{g}$  : accélération de la pesanteur, en ( $m.s^{-2}$ ).
- $k_{ri} = k_{ri}(S)$  : perméabilité relative du fluide  $i, i = o, g$ .
- $\lambda_i = \lambda_i(S)$  : mobilité du fluide  $i, i = o, g$ .
- $p_c = p_c(S)$  : pression capillaire réduite, fonction non linéaire de  $S$ .
- $a = a(S)$  : diffusion capillaire, fonction non linéaire de  $S$ .
- $f^+, f_-$  :  $\sup f(x), \inf f(x)$ .
- $|f|$  :  $\max(f, -f)$ , valeur absolue de  $f$ .

- 
- $\frac{\partial}{\partial x}$  : la dérivé par rapport la variable  $x$ .
  - $(.,.)$  : produit scalaire entre deux vecteurs de  $IR^d$ .
  - $L^p(\Omega) = \{f, \mathcal{L}^d \text{ mesurable sur } \Omega; \text{ tel que } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}, 1 \leq p < \infty$
  - $L^\infty(\Omega) = \{f, \mathcal{L}^d \text{ mesurable sur } \Omega; \text{ tel que } |f| < C < \infty \text{ p.p. sur } \Omega\}$
  - $W^{m,p}(\Omega) = \left\{ w \in L^p(\Omega), D^\delta w \in L^p(\Omega), \text{ pour } |\delta| = \sum_{i=1}^d \delta_i \leq m \right\}$
  - $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
  - $H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \vec{q} \in (L^2(\Omega))^d, \text{div}(\vec{q}) \in L^2(\Omega) \right\}$
  - $V(\Omega) = \{ \vec{q} \in H(\text{div}, \Omega), \vec{q} \cdot \eta = 0 \text{ sur } \Gamma \}$
  - $W(\Omega) = \{ \vec{q} \in V(\Omega), \vec{q}(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega \}$
  - $W(\Omega) = \{ w \in H^1(\Omega), w = 0 \text{ sur } \Gamma_i \}$

---

# Table des matières

0.1	Nomenclature . . . . .	6
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>I</b>	<b>Notions de bases : Écoulement en milieux poreux</b>	<b>15</b>
1.1	Propriétés des fluides . . . . .	16
1.1.1	Viscosité dynamique d'un fluides . . . . .	16
1.1.2	Facteurs de formation de volume . . . . .	17
1.1.3	Densité d'un fluide . . . . .	18
1.1.4	Compressibilité d'un fluide . . . . .	18
1.1.5	Notion de perte de charge . . . . .	19
1.1.6	Écoulement laminaire et turbulent dans les tubes - Nombre de Reynolds . . . . .	20
1.2	Caractéristiques du milieu poreux saturé . . . . .	23
1.2.1	Pores et gorges des pores . . . . .	23
1.2.2	Porosité et Saturation . . . . .	24
1.2.3	Densité (Aire spécifique) . . . . .	25
1.2.4	Perméabilité . . . . .	26
1.3	Écoulement dans les milieux poreux saturés . . . . .	32
1.3.1	Loi de Darcy et conductivité hydraulique . . . . .	32
1.3.2	Conductivité hydraulique des milieux poreux . . . . .	34
1.4	Principes hydrostatiques et hydrodynamiques multiphasés . . . . .	34
1.4.1	Tension interfaciale . . . . .	34

1.4.2	Mouillabilité . . . . .	34
1.4.3	Capillarité . . . . .	35
1.4.4	Perméabilité relative et écoulement multiphase . . . . .	37
<b>II Etude théorique du problème</b>		<b>38</b>
1.5	Modélisation mathématique . . . . .	39
1.5.1	La loi de Darcy . . . . .	39
1.5.2	Propriétés de l'écoulement de Darcy . . . . .	39
1.5.3	La cellule de Hele Shaw . . . . .	40
1.6	Modélisation en pression globale . . . . .	42
1.6.1	Saturation réduite . . . . .	43
1.6.2	Pression globale . . . . .	43
1.6.3	Formulation du problème . . . . .	45
1.7	Existence et unicité de la solution . . . . .	51
1.8	Conclusion . . . . .	54
<b>III Un schéma Volumes Finis du problème</b>		<b>55</b>
1.9	Introduction . . . . .	56
1.10	Hypothèses sur les données du problème . . . . .	57
1.11	Approximation du problème par volumes finis . . . . .	58
1.11.1	Notations . . . . .	59
1.11.2	Discrétisation de la première équation . . . . .	59
1.11.3	Discrétisation de la deuxième équation . . . . .	64
1.12	Résultats numériques . . . . .	66
1.13	Conclusion . . . . .	74
<b>Conclusion Générale</b>		<b>75</b>
	Annexe . . . . .	77
<b>Bibliographie</b>		<b>83</b>

---

# Table des figures

1.1.1 Les valeurs de viscosité de quelque types d'huile . . . . .	17
1.1.2 Déplacement du liquide dans une canalisation . . . . .	20
1.1.3 Ecoulement laminaire . . . . .	21
1.1.4 Ecoulement turbulent . . . . .	21
1.1.5 Profil des vitesses pour les régimes laminaire (à droite) et turbulent (à gauche). . . . .	22
1.1.6 Espace des pores d'un grès de la mer du Nord (données Statoil) . . . . .	23
1.2.1 Exemple de coupe d'un poreux (grès) . . . . .	24
1.2.2 Classification des perméabilités de quelques milieux . . . . .	27
1.3.1 Simulation de l'expérience de Darcy . . . . .	33
1.4.1 Détermination des phases mouillantes . . . . .	35
1.4.2 Interface eau huile dans un pore . . . . .	36
1.4.3 courbe de pression capillaire en fonction de saturation . . . . .	37
1.5.1 Cellule de Hele Shaw . . . . .	40
1.6.1 Diffusion capillaire $a$ en fonction de la saturation réduite $S$ . . . . .	46
1.6.2 Fraction du flux $b$ en fonction de la saturation réduite $S$ . . . . .	47
1.9.1 Ecoulement mono-dimensionnel dans une carotte poreuse . . . . .	57
1.11.1 volume-contrôle $I_i$ . . . . .	60
1.11.2 Cellule diamant . . . . .	61
1.12.1 Pression du fluide mouillant en $t = 0$ . . . . .	67
1.12.2 Pression du fluide non mouillant en $t = 50$ . . . . .	67
1.12.3 Pression du fluide non mouillant en $t = 100$ . . . . .	68

1.12.4	Pression du fluide non mouillant en $t = 150$	68
1.12.5	Pression du fluide non mouillant en $t = 175$	69
1.12.6	Pression du fluide mouillant en $t = 0$	69
1.12.7	Pression du fluide mouillant en $t = 50$	70
1.12.8	Pression du fluide mouillant en $t = 100$	70
1.12.9	Pression du fluide mouillant en $t = 150$	71
1.12.10	Pression du fluide mouillant en $t = 175$	71
1.12.11	Saturation du fluide non mouillant en $t = 0$	72
1.12.12	Saturation du fluide non mouillant en $t = 50$	72
1.12.13	Saturation du fluide non mouillant en $t = 100$	73
1.12.14	Saturation du fluide non mouillant en $t = 150$	73

L'étude des écoulements multiphasiques en milieu poreux est d'une grande importance, dans l'industrie pétrolière lors de l'exploitation d'un gisement de pétrole ou de gaz, dans la gestion des ressources en eau et aussi pour beaucoup de problèmes d'environnement. Les milieux poreux naturels sont hétérogènes, à plusieurs échelles, ce qui rend l'étude expérimentale difficile et coûteuse, d'où l'intérêt d'utiliser des méthodes de simulation numérique pour des modèles d'écoulement de fluide. Ces simulations sont généralement basées sur la modélisation mathématique du gisement en exploitation par un système d'équation aux dérivées partielles non linéaires. Dans ce cadre, on se propose de développer des méthodes numériques performantes pour un modèle d'écoulements diphasiques compressibles en milieux poreux homogènes.

L'étude théorique des écoulements multiphasiques en milieux poreux a été largement étudié dans la littérature. Dans ce travail, on considère un modèle qui utilise la notion de pression globale introduit séparément en 1976 par Chavent et en 1978 par Antontsev & Monakhov. Un premier théorème d'existence de solution, pour le système qui décrit l'écoulement de deux phases fluides incompressibles et immiscibles a été établi par Chavent & Jaffré [14], depuis, de nombreux travaux ont été effectués dans ce domaine,

On s'intéresse à un modèle d'écoulements diphasiques compressibles et immiscibles, qui correspond physiquement l'injection d'un gaz dans un réservoir de pétrole. On considère l'écoulement diphasique du gaz et du pétrole en milieu poreux, en utilisant la formulation

en pression globale de Chavent & Jaffré, la vitesse totale et la saturation réduite sont les inconnues du problème. Cette formulation mène à un système d'équations aux dérivées partielles parabolique non linéaire dégénérée. Ces équations décrivent l'écoulement de deux phases liquides compressibles et immiscibles dans un milieu poreux, pour lequel, dans un souci de simplicité, on néglige l'effet de la pesanteur. Le système est alors :

Les équations en saturation réduite et pression globale

$$\begin{aligned} \Phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h S) + \phi(x) S_{o,m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h) - \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla P) + \\ \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \alpha(S) \nabla(S)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \quad (1.0.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S_{o,m} + \rho_g) - \nabla \cdot (K(x) b(S, P) \nabla P) + \\ \nabla \cdot (K(x) d(P) \alpha(S) \nabla S) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \quad (1.0.2)$$

où  $S(x, t)$  est la saturation réduite et  $P$  la pression globale sont les inconnues du problème,  $q$  la vitesse de filtration totale,  $\Phi(x)$  la porosité du milieu poreux et  $K(x)$  le tenseur des perméabilités absolues du réservoir  $\Omega$ . La frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ , supposée régulière par morceaux, est divisée en trois régions  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$  avec  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$  où  $\Gamma_1$  est la partie du bord où le gaz est injecté,  $\Gamma_2$  la partie imperméable et  $\Gamma_3$  la partie de production. On note  $[0, T[$  l'intervalle de temps d'étude.  $\alpha(S)$ ,  $b(S)$  et  $d(S)$  sont des fonctions non linéaires qui dépendent des mobilités et de la pression capillaire. Le coefficient de diffusion  $a = a'$  s'annule pour deux valeurs de la saturation  $a(0) = a(1) = 0$ , (dégénérescence du terme de diffusion). Pour plus de détails sur le modèle on peut consulter la référence [14]. La simulation des écoulements dans des réservoirs de pétrole a été largement étudiée par plusieurs méthodes numériques.

Pour les méthodes des éléments finis, Chavent & Jaffré [14], présentent des méthodes d'éléments finis mixtes avec la modélisation pour les problèmes en milieux poreux. En

outre, une discrétisation utilisant la méthode des volumes finis pour les écoulements diphasiques en milieu poreux est présentée par Chavent, Jaffré et Roberts [15].

Le premier chapitre est consacré à l'étude théorique du problème, on présente dans ce chapitre la modélisation du problème ainsi qu'un nouveau problème en saturation réduite et pression globale. Un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le problème de convection-diffusion dégénérée (dite système hyperbolique) est introduit.

Le deuxième présente un schéma de type volumes finis pour le système non linéaire mono-dimensionnel de convection-diffusion dégénéré (1 – 2). On s'intéresse à la résolution par la méthode volumes finis de tout le système couplé sur des maillages non structurés. À cette fin nous utilisons la méthode dite des "cellules diamants" pour l'approximation du gradient. On donne des tests numériques pour ce schéma.

Ce travail se termine par une conclusion générale et des perspectives.

## Première partie

# Notions de bases : Écoulement en milieux poreux

## 1.1 Propriétés des fluides

### 1.1.1 Viscosité dynamique d'un fluides

La viscosité d'un fluide est une quantité d'énergie "frictionnelle", c'est la résistance aux forces appliquées au fluide, par exemple, pour la phase gazeuse, les molécules sont bien séparées, alors elle a une résistance faible à l'écoulement résultante de son mouvement aléatoire. autrement, un fluide dense a une grande résistance à l'écoulement à cause du fait que les molécules sont proches.

On considère deux plaques planes et parallèles séparées par une mince couche de liquide. La plaque inférieure est maintenue au repos et la plaque supérieure se déplace d'un mouvement de translation uniforme de vitesse  $u$ . Les différentes couches de liquide sont entraînées par le mouvement de la plaque à des vitesses différentes selon leur position par rapport à la plaque mobile. Des forces de résistance au déplacement apparaissent entre les différentes couches de liquide (analogie avec les frottements des solides) : elles sont dues à la viscosité du liquide. La force de résistance  $F$  au glissement des couches dépend de la nature du liquide et donc de sa *viscosité*. Elle n'existe que pour un liquide en mouvement. On donne l'expression du module de cette force s'exerçant sur une surface  $S$  parallèlement à la vitesse du liquide mais en sens contraire (signe  $-$ ) :

$$F = -\mu \cdot S \cdot \frac{du}{dz} \quad (1.1.1)$$

$\mu$  est la viscosité dynamique du liquide. Elle s'exprime en  $Pa \cdot s$  ( $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ ) dans le système SI. Couramment on utilise plutôt le Poiseuille (Pl), la Poise (Po) ou la centipoise (cpo) qui sont définis ainsi :

$$1Pa \cdot s = 1Pl = 10Po = 1000cpo$$

En général, la viscosité d'un fluide dépend de la pression, température, et ses compositions. La pression n'a que peu d'influence sur la viscosité dynamique des liquides, par contre la température joue un rôle important. La viscosité dynamique décroît lorsque la température augmente (c'est le contraire pour un gaz). On peut donner l'exemple de l'eau sous  $1bar$  :

Au  $20^{\circ}C$  :  $\mu = 1cpo$

Au  $90^{\circ}C$  :  $\mu = 0,316cpo$

Remarque : on utilise parfois la viscosité cinématique qui est définie comme étant le rapport suivant :

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.1.2)$$

Cette grandeur s'exprime normalement en  $m^2.s^{-1}$  mais comme cette unité est trop grande on lui préfère le centistoke ( $cSt$ ).

$$1cSt = 10^{-6}m^2.s^{-1}$$

La viscosité de l'eau aux conditions standards est égale à  $1cp$ . Aux conditions du réservoir, les valeurs de viscosité de quelques types d'huile sont présentées au tableau.

Classification	Viscosité (cp)
Huile légère	0.3-1
Huile moyenne	1-6
Huile modérée	6-50
Huile très visqueuse	50-1000
Huile lourde et pétrole	Plus de 1000

Figure 1.1.1 – Les valeurs de viscosité de quelque types d'huile

### 1.1.2 Facteurs de formation de volume

Le facteur de formation de volume est le rapport du volume  $V$  d'un fluide (mesuré aux conditions de reservoir) au volume  $V_s$  du fluide mesuré aux conditions standards

$$B(p, T) = \frac{V(p, T)}{V_s} \quad (1.1.3)$$

Pour une phase (un fluide), on peut l'écrire en fonction de la densité comme suit :

$$B(p, T) = \frac{\rho_s}{\rho} \quad (1.1.4)$$

Pour le modèle black-oil, comme la phase huile contient les deux fluides huile et gaz (sous forme liquide),

$$V_o = \frac{W_O + W_G}{\rho_o} \quad (1.1.5)$$

En combinant (03), (04) et (05), le facteur de formation de volume devient :

$$B_o = \frac{(W_O + W_G) \rho_{Os}}{W_O \rho_o} \quad (1.1.6)$$

### 1.1.3 Densité d'un fluide

La densité d'un fluide (eau, huile ou gaz) est donné après (6) par la relation :

$$\rho = \frac{\rho_s}{B} \quad (1.1.7)$$

Les fractions massiques d'huile et de gaz soluté en phase huileuse sont respectivement :

$$\begin{aligned} C_{Oo} &= \frac{W_O}{W_O + W_G} = \frac{\rho_{Os}}{B_o \rho_o} \\ C_{Go} &= \frac{W_G}{W_O + W_G} = \frac{R_{so} \rho_{Gs}}{B_o \rho_o} \end{aligned}$$

où  $R_{so}$  est le facteur de solubilité du gaz et est donné par :

$$R_{so} = \frac{W_G \rho_{Os}}{W_O \rho_{Gs}} \quad (1.1.8)$$

En utilisant le fait que  $C_{Oo} + C_{Go} = 1$ , on obtient :

$$\rho_o = \frac{R_{so} \rho_{Gs} + \rho_{Os}}{B_o} \quad (1.1.9)$$

### 1.1.4 Compressibilité d'un fluide

La compressibilité d'un fluide peut être définie à partir de variations du volume  $V$  ou de la densité  $\rho$  par rapport à la pression :

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \quad (1.1.10)$$

à une température fixe  $T$ . Après intégrer l'équation, on obtient :

$$\rho = \rho^o e^{c_f(p-p^o)} \quad (1.1.11)$$

où  $\rho^o$  est la densité à la pression de référence  $p^o$ . En utilisant la série de Taylor, on obtient :

$$\rho = \rho^o \left\{ 1 + c_f (p - p^o) + \frac{1}{2!} c_f^2 (p - p^o)^2 + \dots \right\} \quad (1.1.12)$$

Alors, une approximation est obtenue comme suit :

$$\rho \approx \rho^o (1 + c_f (p - p^o)) \quad (1.1.13)$$

Cette équation a une formule différente qui peut être dérivée en utilisant la loi du *gaz réelle* (la relation de pression-volume-température (PVT))

$$\rho = \frac{pW}{ZRT} \quad (1.1.14)$$

où  $W$  est la masse moléculaire,  $Z$  est le facteur de compressibilité du gaz, et  $R$  est la constante universelle du gaz. Si la pression, la température, et la densité sont en atm (automated teller machine),  $K$ , et  $g/cm^3$  (système d'unité physique), respectivement, la valeur de  $R$  est 82.057. Pour les unités anglaises  $R = 10.73$ . En substituant (10) dans (07), on obtient (avec  $c_g = c_f$ )

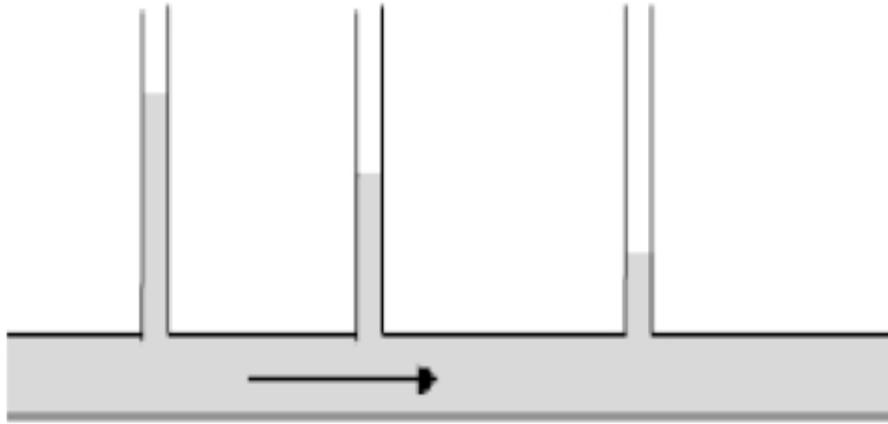
$$c_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p} \Big|_T \quad (1.1.15)$$

### 1.1.5 Notion de perte de charge

On appelle fluide parfait un fluide pour lequel la viscosité dynamique est nulle. Ce modèle physique ne correspond pas à la réalité mais constitue un cas limite pouvant parfois être utilisé pour une première approche.

Tous les liquides ont en fait une certaine viscosité, lors du déplacement des liquides des frottements apparaissent entre les différentes couches de liquide ou contre les parois de la canalisation ou d'un accident. Ces frottements entraînent donc une production de chaleur correspondant à une perte d'énergie pour le liquide. On parle de pertes de charge. Pour une canalisation horizontale cette perte d'énergie se caractérise par une diminution de la pression dans le sens de l'écoulement.

Les pertes de charge sont un élément fondamental de l'écoulement des liquides car elles apparaissent pour tous les liquides. Elles se classent en deux types :



**Figure 1.1.2** – Déplacement du liquide dans une canalisation

- Les pertes de charge dues aux simples frottements décrits plus haut : ce sont les pertes de charge générales dues à la seule présence d'une canalisation rectiligne sans accident.
- Les pertes de charge provoquées par la présence d'accidents sur la canalisation : rétrécissement, élargissement, vanne, coude, clapet, filtre, débitmètre, échangeur... Ces accidents provoquent également des pertes d'énergie sous forme de frottements à cause des tourbillons créés par ces obstacles. On les nomme pertes de charges locales ou singulières.

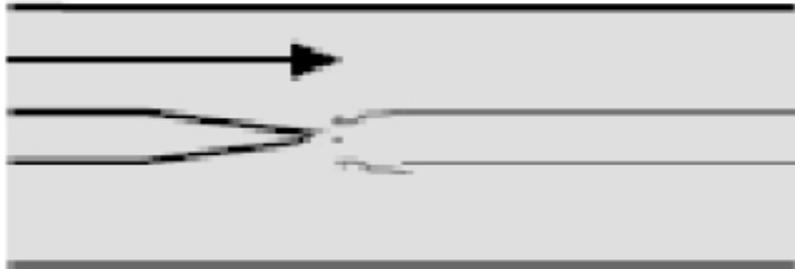
### 1.1.6 Écoulement laminaire et turbulent dans les tubes - Nombre de Reynolds

Si on injecte un petit volume de colorant dans l'axe d'une canalisation horizontale parcourue par de l'eau, on observe suivant le débit du liquide (c'est-à-dire suivant sa vitesse puisque la section est constante) les phénomènes suivants :

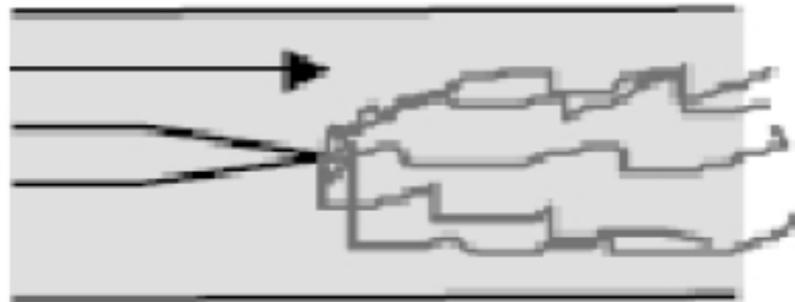
Régime Laminaire et régime Turbulent

- **Faibles débits** : la trajectoire du filet de colorant est rectiligne. Les couches de liquide s'écoulent concentriquement les unes sur les autres sans qu'il y ait de mélange. le régime d'écoulement est dit *laminaire*.
- **Forts débits** : le colorant se mélange rapidement à l'eau par création de mouvements tourbillonnaires. Les forces dues à la viscosité ne sont alors plus suffisantes

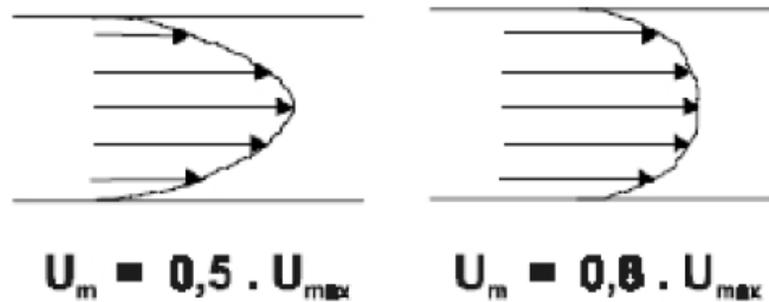
pour empêcher la naissance d'une multitude de tourbillons. le régime d'écoulement est dit *turbulent*.



**Figure 1.1.3** – Ecoulement laminaire



**Figure 1.1.4** – Ecoulement turbulent



**Figure 1.1.5** – Profil des vitesses pour les régimes laminaire (à droite) et turbulent (à gauche).

Pour distinguer quantitativement les deux types de régimes observés, on utilise un critère basé sur le *nombre de Reynolds*  $Re$  (nombre sans unité ou adimensionnel) :

$$Re = \frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu} = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q_v}{\mu \cdot \pi \cdot D} \quad (1.1.16)$$

où  $\mu$ ,  $D$ ,  $U$  et  $\rho$  sont respectivement la viscosité dynamique du liquide (en Poiseuls), le diamètre de la canalisation ( $m$ ), la vitesse du liquide ( $m \cdot s^{-1}$ ) et la masse volumique du liquide ( $kg \cdot m^{-3}$ ).

On définit les régimes d'écoulement suivants :

$Re < 2000$  : régime laminaire

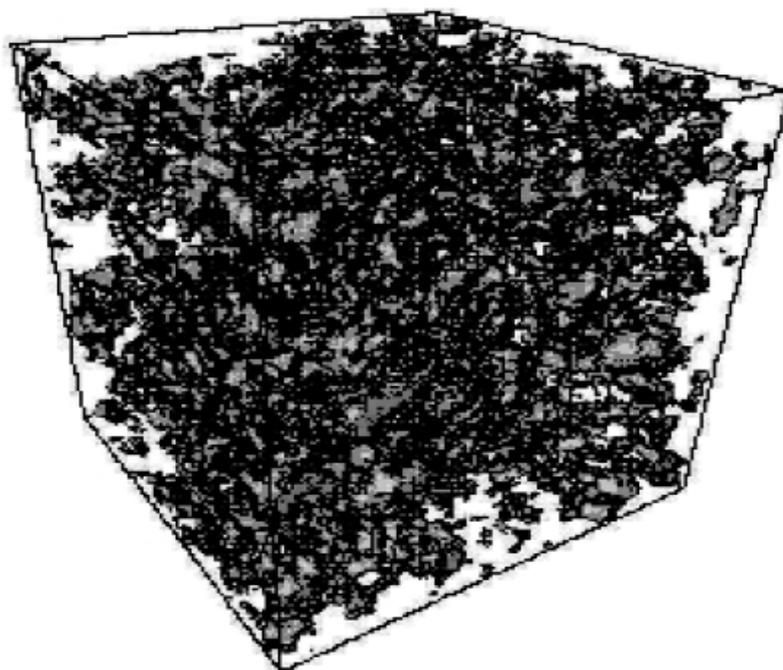
$Re > 3000$  : régime turbulent

Entre ces deux valeurs de  $Re$ , le régime est qualifié d'intermédiaire.

Le profil des vitesses suivant la section est une parabole pour le régime laminaire ( $U_m = 0,5 \cdot U_{max}$ ), par contre, pour le régime turbulent, le profil montre un aplatissement au centre de la canalisation ( $U_m = 0,8 \cdot U_{max}$ ).

On retiendra les points suivants :

- Le régime turbulent est favorisé par les éléments suivants :
  - un débit de liquide élevé
  - un faible diamètre de canalisation
- Quand le régime est turbulent, les frottements augmentent donc la perte de charge augmente dans une canalisation.



**Figure 1.1.6** – Espace des pores d'un grés de la mer du Nord (données Statoil)

En conclusion, il faut retenir que dans les applications industrielles courantes c'est le régime turbulent qui s'applique. Le régime laminaire est observé seulement pour des liquides très visqueux.

Remarque : Pour un écoulement turbulent, il existe toujours au voisinage de la paroi une mince couche de liquide où l'écoulement est laminaire. L'épaisseur de la couche diminue si la vitesse moyenne dans la canalisation augmente. Cette couche intervient de manière très importante dans les échanges thermiques par convection.

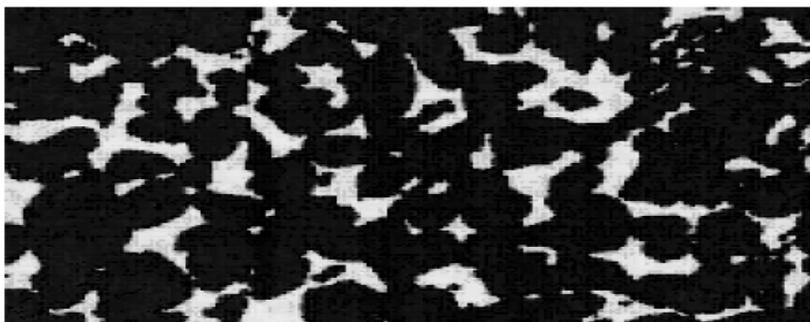
## 1.2 Caractéristiques du milieu poreux saturé

### 1.2.1 Pores et gorges des pores

Les pores sont des passages minuscules connectés qui existent dans les rochers perméables, ce sont, généralement, de dimension 1 à  $200\mu m$ , et sont facilement visibles avec un microscope électrique. Les gorges de pores sont les passages serrés qui connectent les pores.

L'existence de pression capillaire et son effet sont reliés de ces gorges de pores dans le processus de drainage.

Les milieux poreux ont une géométrie complexe. Pour illustration, la figure (1.2.1) montre l'espace des pores d'un grès de la mer du Nord, obtenu par des mesures tomographiques.



**Figure 1.2.1** – Exemple de coupe d'un poreux (grès)

## 1.2.2 Porosité et Saturation

La porosité totale d'un matériau représente la densité des pores pouvant être occupé par un fluide liquide ou gazeux. Elle est exprimée par le rapport du volume des vides au volume total occupé par le matériau :

$$\varepsilon = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total de l'échantillon}} \quad (1.2.1)$$

qui varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Ce paramètre de porosité est complémentaire de la *fraction volumique de solide*  $\phi$  telle que :

$$\varepsilon + \phi = 1 \quad (1.2.2)$$

La définition (1) de la porosité est une définition tridimensionnelle. Elle peut être transposée à un rapport de surfaces. En effet, une coupe d'un échantillon poreux (un exemple est donné sur la figure 5) montre une surface composée de deux phases. On définit alors la

porosité surfacique ( à deux dimensions) :

$$\varepsilon_s = \frac{A_p}{A_o} = \frac{\text{Surface des pores}}{\text{Surface total}} \quad (1.2.3)$$

Pour chaque section effectuée a la cote  $z$ , on peut mesurer l'aire  $A_p(z)$  occupée par les pores. Si le milieu est homogène (donc la porosité surfacique ne dépend pas de la cote  $z$ ), on peut écrire que cette aire vaut  $\varepsilon_s A_o$ , où  $A_o$  est l'aire totale de la section.

À partir de ces mesures, on peut calculer le volume des pores de l'échantillon par

$$V_p = \int A_p(z) dz = A_o \varepsilon_s \int dz = \varepsilon_s V_o$$

Par conséquent, on obtient une égalité entre la porosité volumique et la porosité surfacique :

$$\varepsilon_s = \varepsilon \quad (1.2.4)$$

La définition peut être appliquée à une dimension, en introduisant une *porosité linéique*  $\varepsilon_l$ , calculée par des mesures de longueurs de segments occupés par le solide ou le vide. Si le matériau est homogène et isotrope, on peut montrer que

$$\varepsilon = \varepsilon_l = \varepsilon_s \quad (1.2.5)$$

On dit qu'un milieu poreux est saturé si les pores soient totalement occupés par le fluide.

En milieu saturé, la phase gazeuse est totalement absente. Le liquide sature complètement le matériau et occupe tous les pores. La proportion maximale en liquide du matériau est donc égale à la porosité totale de ce matériau.

### 1.2.3 Densité (Aire spécifique)

La grande surface interne de la matrice solide est une caractéristique des milieux poreux. À partir d'un échantillon de volume  $V_o$ , on peut définir par  $S$  la surface interne des pores. L'aire spécifique d'un poreux est définie comme le rapport  $A_s = \frac{S}{V_o}$ , avec une dimension de l'inverse d'une longueur.

Les méthodes classiques de mesures d'aire spécifique sont :

- adsorption d'un gaz ;
- analyse de coupes.

### 1.2.4 Perméabilité

La perméabilité d'une roche caractérise l'aptitude de cette roche à laisser s'infiltrer un fluide sous l'effet du gradient de charge. Ce paramètre est relié à la dimension et la connection des pores entre eux. Des pores clos et non connectés entre eux empêchent le fluide de s'écouler librement d'un pore à un autre. L'ouverture des pores peut plus ou moins favoriser l'écoulement entre les éléments de la roche. La perméabilité est aussi reliée à la viscosité du fluide. La *perméabilité intrinsèque* s'exprime, indépendamment des caractéristiques du fluide, sous la forme :

$$K = \frac{Q\mu}{A \left(\frac{\Delta p}{\Delta s}\right)} \quad (1.2.6)$$

où,

$Q$  : le débit du fluide qui s'écoule,  $[L^3T^{-1}]$

$\mu$  : la viscosité dynamique du fluide,  $[ML^{-1}T^{-1}]$

$A$  : l'aire de la section traversée par le fluide,  $[L^2]$

$\frac{\Delta p}{\Delta s}$  : la variation de la pression par l'unité de longueur,  $[ML^{-2}T^{-2}]$ .

Le coefficient de perméabilité  $K$ , ou encore la perméabilité intrinsèque  $K$ , sont des coefficients scalaires si le milieu poreux est isotrope ou bien si l'écoulement est unidirectionnel. Quand le milieu dans l'espace à trois dimensions est anisotrope, le coefficient de conductivité hydraulique est définie par un tenseur symétrique de la forme :

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_{zz} \end{pmatrix}$$

En se plaçant dans le repère de coordonnées dont les axes sont les directions pour lesquelles l'écoulement est effectivement parallèle au gradient de charge, le tenseur de conductivité

hydraulique se réduit à ses composantes diagonales.

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{pmatrix}$$

En pratique, deux perméabilités sont distinguées : une perméabilité verticale  $K_{zz}$  et une perméabilité horizontale  $K_{xx} = K_{yy}$  (de Marsily, [22]).

Classification	Perméabilité (md)
Mauvais à moyen	1-15
Modérée	15-20
Bon	50-250
Très bon	250-1000
Excellent	Plus de 1000

**Figure 1.2.2** – Classification des perméabilités de quelques milieux

### Modèles de perméabilité

Les modèles de perméabilité cherchent à établir une expression pour le paramètre  $k$  en fonction de la géométrie du réseau de pores. Une modélisation classique consiste à considérer le milieu poreux comme un assemblage de canaux connectés les uns aux autres. La "brique élémentaire" est constituée de l'écoulement d'un fluide au travers d'un canal cylindrique de rayon  $a$  soumis à un gradient de pression  $\frac{dp}{dx}$ . C'est l'écoulement de Poiseuille cylindrique, avec un profil de vitesse

$$u(r) = \frac{a^2}{4\eta} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (1.2.7)$$

une vitesse moyenne

$$u_m = \frac{a^2}{8\eta} \frac{dp}{dx} \quad (1.2.8)$$

et un débit volumique

$$q = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{dp}{dx}$$

La vitesse moyenne (de filtre) au travers de ce réseau de canaux est

$$u_f = nq = \frac{n\pi a^4}{8\eta} \frac{dp}{dx} = \frac{k}{\eta} \frac{dp}{dx}$$

et par identification, on trouve

$$k = \frac{a^2 \varepsilon}{8} \quad (1.2.9)$$

Ce premier modèle décrit la perméabilité comme une fonction linéaire de la porosité et une fonction quadratique de la taille des canaux, donc de la taille caractéristique des pores. Ce modèle est insatisfaisant car il n'autorise qu'un écoulement unidimensionnel.

**Le modèle de Saffman** Dans ce modèle, aucune restriction n'est faite quant à l'orientation des canaux. Le milieu poreux est considéré homogène et isotrope, avec une vitesse moyenne d'écoulement alignée selon le gradient de pression macroscopique  $G \vec{e}_x = \left(\frac{\Delta p}{L}\right) \vec{e}_x$ .

Au sein de chaque pore, la pression est

$$p = Gx + \hat{p}$$

où  $\hat{p}$  est une fluctuation aléatoire de valeur moyenne nulle ( $\langle \hat{p} \rangle = 0$ ). Le gradient de pression local est donc  $G \vec{e}_x + \vec{\nabla} \hat{p}$  et la vitesse interstitielle dans chaque pore est

$$u_i = \frac{a^2}{8\eta} \left| G \vec{e}_x + \vec{\nabla} \langle \hat{p} \rangle \right| = \frac{a^2}{8\eta} \left| G \vec{e}_x + \vec{\nabla} \langle \hat{p} \rangle \right| \cdot \vec{\eta}$$

où  $\vec{\eta} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$  est le vecteur directeur du pore. On écrit la vitesse sous la forme

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{a^2}{8\eta} \left[ \left( G + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) \cos \theta + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \sin \theta \sin \varphi \right] \\ &= \frac{a^2 G}{8\eta} [(1 + p_1) \cos \theta + p_2 \sin \theta \cos \varphi + p_3 \sin \theta \sin \varphi] \end{aligned}$$

avec  $p_1 = \frac{1}{G} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}$ ,  $p_2 = \frac{1}{G} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}$  et  $p_3 = \frac{1}{G} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z}$ . Les  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont des variables aléatoires à moyenne nulle ( $\langle p_i \rangle = 0$ ). Avec les conditions d'homogénéité et d'isotropie, on prend en compte des distributions gaussiennes pour le triplet des  $p_i$ . La probabilité d'avoir un triplet dont les valeurs sont comprises entre  $p_i$  et  $p_i + dp_i$  est donc

$$\prod_i \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda p_i^2} = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\lambda(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} dp_1 dp_2 dp_3$$

où le paramètre  $l$  (inverse de la variance de la distribution) ne dépend que de la structure du milieu poreux. La valeur  $\lambda = \infty$  est associée à une probabilité unité d'avoir des  $p_i = 0$ .

La probabilité de trouver un pore dans l'angle solide compris entre  $(\theta, \varphi)$  et  $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  est  $\frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi$ . Par suite, la probabilité de trouver un pore orienté en  $(\theta, \varphi)$  avec les fluctuations  $(p_1, p_2, p_3)$  est

$$\frac{1}{4\pi} \sin \theta \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\lambda(p_1^2+p_2^2+p_3^2)} d\theta d\varphi dp_1 dp_2 dp_3$$

La vitesse moyenne dans un pore est

$$\vec{u}_i = u_i \vec{\eta}$$

donc la vitesse moyenne dans la direction du gradient de pression macroscopique est

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle_x &= \langle u_i \cos \theta \rangle_{\theta, \varphi, p_1, p_2, p_3} \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_i \cos \theta \frac{1}{4\pi} \sin \theta \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\lambda(p_1^2+p_2^2+p_3^2)} d\Sigma \\ &= \frac{a^2 G}{8\eta} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} I \end{aligned}$$

avec  $d\Sigma = d\theta d\varphi dp_1 dp_2 dp_3$  et  $I = \int_{\Sigma} \cos \theta \sin \theta [(1 + p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta \cos \varphi + p_3 \sin \theta \sin \varphi)] \times e^{-\lambda(p_1^2+p_2^2+p_3^2)} d\Sigma = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}}$

Finalement, on obtient

$$\langle u_i \rangle_x = \frac{a^2 G}{24\eta} \quad (1.2.10)$$

et on a donc une vitesse de filtre  $u_f = \varepsilon \langle u_i \rangle_x$  et par suite la perméabilité de ce modèle est

$$k_{Saffman} = \frac{a^2 \varepsilon}{24} \quad (1.2.11)$$

On peut vérifier que la vitesse moyenne interstitielle de l'écoulement dans les directions  $y$  et  $z$  est nulle :

$$\langle u_i \rangle_y = \langle \sin \varphi \rangle_{2\pi} = 0$$

et

$$\langle u_i \rangle_z = \langle \cos \varphi \rangle_{2\pi} = 0$$

On retrouve dans ce modèle la même loi d'échelle pour la perméabilité que dans le modèle des capillaires parallèles. Seul le facteur numérique change, avec un rapport  $\frac{1}{3}$  par rapport à celui de l'équation (1.2.9). En effet, dans le modèle des canaux parallèles, toute la porosité participe à l'écoulement, alors que le modèle de Saffman prend en compte une porosité active sur une des trois directions de l'espace. La perméabilité est donc trois fois moindre.

**Modèle des canaux tortueux** Ce modèle permet de corriger l'approximation de canaux rectilignes fait jusque là. On peut en effet considérer que dans un échantillon de longueur  $L$ , un canal qui traverse l'échantillon de part et d'autre a une longueur effective  $L_e > L$  du fait d'une certaine tortuosité. La *tortuosité* est définie comme le rapport entre ces deux longueurs :

$$\tau = \frac{L_e}{L} \quad (1.2.12)$$

Muni de ce nouveau paramètre, on peut modéliser le milieu poreux comme un assemblage de ce genre de canaux tortueux. Reprenant la même démarche que pour les capillaires parallèles, on écrit la porosité sous la forme

$$\varepsilon = n\pi a^2 \tau$$

et le débit dans chaque pore est (d'après la loi de Poiseuille)

$$q = \frac{\pi a^2 \Delta p}{8\eta\tau L}$$

La vitesse de filtre est donc (en tenant compte d'une porosité active  $\frac{\varepsilon}{3}$ )

$$u_f = nq = \frac{\varepsilon a^2 \Delta p}{24\eta\tau^2 L}$$

et la perméabilité associée à ce modèle est

$$k_{tort} = \frac{\varepsilon a^2}{24\tau^2} \quad (1.2.13)$$

On peut remarquer que la perméabilité d'un réseau de canaux tortueux est toujours inférieure à celle d'un réseau de canaux rectilignes, car  $\tau > 1$  par définition.

On peut aisément critiquer le fait que les canaux décrivant la porosité sont tous de la

même taille. Il est évident que ce n'est pas le cas pour les matériaux poreux réels. Si on a accès à la distribution de taille des canaux  $\beta(a)$ , il est facile de calculer la perméabilité avec

$$k = \frac{\varepsilon}{24\tau^2} \int a^2 \beta(a) da$$

En fin, et c'est peut-être la principale limite, la taille des pores n'est pas une quantité facilement mesurable. La surface spécifique est une quantité plus aisée à mesurer, et il est nécessaire d'établir un modèle incluant ce paramètre.

**Canaux à section variable** Dans ce modèle, le milieu poreux est constitué d'un assemblage de cellules élémentaires identiques contenant chacune deux canaux coaxiaux contigus de deux diamètres différents. On note par  $a$  le rayon du gros canal, et  $\alpha a$  le rayon du petit (avec  $\alpha < 1$ ). Les deux canaux ont une longueur égale  $\frac{L}{2}$ .

Le volume du pore est  $V_p = \pi a^2 L \frac{(1+\alpha^2)}{2}$  et la porosité est

$$\varepsilon = \frac{V_p}{L^3} = \frac{\pi a^2}{2L^2} (1 + \alpha^2) \quad (1.2.14)$$

Comme le débit est conservé dans chaque pore, on sépare le gradient de pression en deux parties  $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$ , et le débit s'écrit :

$$q = \frac{\pi \alpha^4 a^4}{8\eta} \frac{\Delta p_1}{\frac{L}{2}} = \frac{4a^4}{8\eta} \frac{\Delta p_2}{\frac{L}{2}}$$

Le gradient de pression global est donc

$$\Delta p = \frac{4qL\eta}{\pi a^4} \left( \frac{1 + \alpha^4}{\alpha^4} \right)$$

et par identification avec la loi de Darcy et grâce à la relation (1.2.14), on obtient une perméabilité

$$k = \frac{a^2}{2} \varepsilon \frac{\alpha^4}{(1 + \alpha^4)(1 + \alpha^2)} \quad (1.2.15)$$

On retrouve bien que  $k = \frac{a^2}{8} \varepsilon$  pour  $\alpha = 1$ , et que la perméabilité tend vers zéro quand  $\alpha \rightarrow 0$  (canaux obstrus). La situation  $\alpha \ll 1$  correspond à des pores de grande taille connectés par des passages étroits, ce qui est représentatif de milieux poreux formés d'assemblages de grains, naturels (grés) ou artificiels (frittés).

**Limites de ces modèles** Un poreux réel comprend en général des canaux obturés, zones sans écoulement qui ne peuvent participer à la perméabilité bien qu'elles contribuent à la porosité. De plus, la condition d'homogénéité requise n'est pas toujours réalisée en pratique. En effet, des poreux naturels comme les roches sont parfois constitués de différentes échelles de réseaux de pores. À l'échelle microscopique, il peut venir se superposer un réseau de fractures par lequel un écoulement préférentiel va s'établir. Dans ce cas, les modèles décrits ci-dessus ne peuvent s'appliquer.

## 1.3 Écoulement dans les milieux poreux saturés

### 1.3.1 Loi de Darcy et conductivité hydraulique

En 1856, Henry Darcy a étudié l'écoulement de l'eau dans des filtres verticaux et homogènes de sable en connexion avec les fontaines du city de Dijon (France). Grâce à ses expériences, Darcy a conclu que le débit de l'écoulement (i.e., volume de l'eau écoulé par unité du temps),  $Q$ , est

- proportionnelle à l'aire de la section traversée par l'eau  $A$ ,
- proportionnelle au défférence au niveau d'eau ( $h_1 - h_2$ ) et
- proportionnelle inversement à la longueur du filtre  $L$

En combinant ces conclusions, on obtient la célèbre *formule de Darcy* ( la *loi de Darcy*)

$$Q = kA \frac{(h_1 - h_2)}{L} \quad (1.3.1)$$

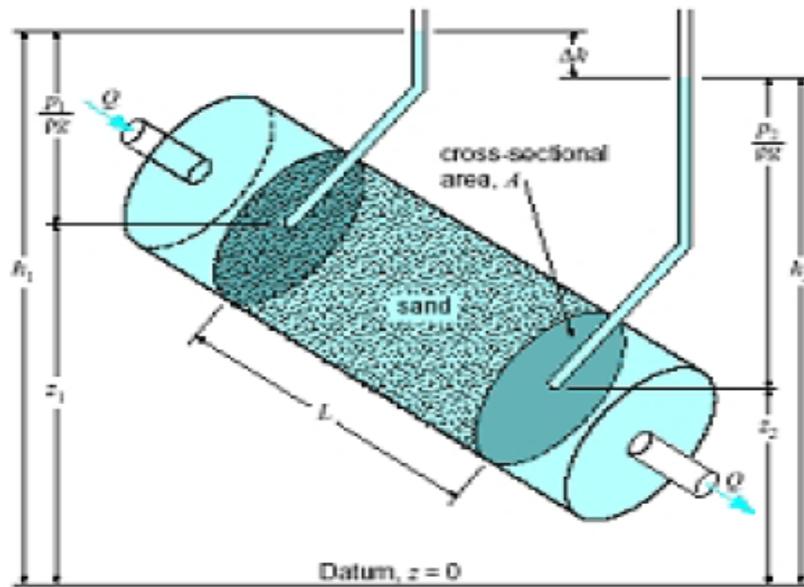
La figure (1.3.1) montre comment la loi de Darcy s'étendre à un écoulement à travers un colonne homogènes plein d'un milieu poreux

Pour un fluide compressible, la loi de Darcy s'écrit sous la forme générale ( dite de Bear) comme suit :

$$u = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \quad (1.3.2)$$

où

$u$  : le vecteur vitesse de Darcy,  $[LT^{-1}]$ ;



**Figure 1.3.1** – Simulation de l'expérience de Darcy

$\mu$  : la viscosité dynamique de fluide,  $[ML^{-1}T^{-1}]$ ;

$k$  : la perméabilité intrinsèque du milieu,  $[L^2]$ ;

$p$  : la pression,  $[ML^{-1}T^{-2}]$ ;

$\rho$  : la masse volumique du fluide,  $[ML^{-3}]$ ;

$g$  : l'accélération de la pesanteur,  $[LT^{-2}]$ ;

$z$  : la cote définie selon un axe vertical ascendant,  $[L]$ .

En négligeant la variation spatiale de la masse volumique, la loi de Darcy se simplifie de la façon suivante :

$$u = -\frac{k\rho g}{\mu} \nabla \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) = -K \nabla h \quad (1.3.3)$$

où,

$h = \left( \frac{p}{\rho g} + z \right)$  : représente le potentiel hydraulique ou la charge piézométrique,  $[L]$ ;

$K = \frac{k\rho g}{\mu}$  : est le coefficient de conductivité hydraulique ou de perméabilité,  $[LT^{-1}]$ .

### 1.3.2 Conductivité hydraulique des milieux poreux

Le coefficient de proportionnel  $K$  est appelé *conductivité hydraulique* du milieu poreux. Dans un milieu isotrope, il peut être défini comme la décharge spécifique par unité du gradient hydraulique. C'est un coefficient qui dépend de propriétés de matrice solide et celles du fluide, ces propriétés sont la densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu$ , les propriétés concernant la matrice solide sont la distribution microscopique (au niveau des pores), tortuosité, surface spécifique et la porosité. La conductivité hydraulique peut être exprimé comme suit :

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} = \frac{k\rho}{\nu} \quad (1.3.4)$$

où,

$g$  : l'accélération de la pesanteur,  $[LT^{-2}]$  ;

$k$  : la perméabilité intrinsèque du milieu,  $[L^2]$ .

## 1.4 Principes hydrostatiques et hydrodynamiques multiphases

### 1.4.1 Tension interfaciale

La tension interfaciale est la tension de surface entre deux fluides non miscibles, elle est reliée à la forme de l'interface par la *loi de Laplace* :

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.4.1)$$

où  $\Delta p$  est la différence de pression de part et d'autre de l'interface, et  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure principaux.

### 1.4.2 Mouillabilité

La mouillabilité indique la capacité d'un liquide à se répandre sur une surface solide. Ce critère résulte de la comparaison de la tension de surface solide/gaz et de la somme

des tensions de surface solide/liquide et liquide/gaz. Si  $\gamma_{SL} + \gamma_{LG} \prec \gamma_{SG}$ , alors le liquide a tendance à s'étaler et à mouiller complètement le substrat solide (situation de mouillage total). Il faut noter que l'état de surface du substrat (en particulier la rugosité) modifie considérablement la mouillabilité. Dans la configuration eau/huile, l'eau mouille le solide tandis que l'huile est non mouillante.

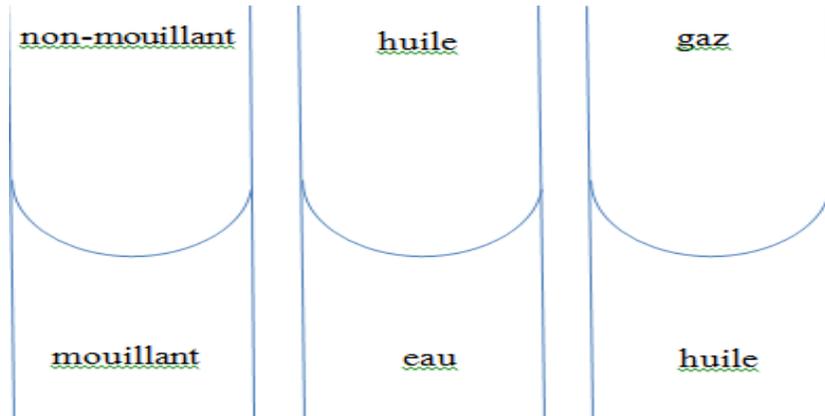


Figure 1.4.1 – Determination des phases mouillantes

### 1.4.3 Capillarité

En écoulements diphasiques ( découlement de deux fluides dans un milieu poreux), Chaque phase (fluide) a sa pression propre, et à l'interface entre les phases, l'équilibre statique impose la relation suivante entre les pressions : si  $p_n$  désigne la pression de la phase non mouillante (hydrocarbures) et  $p_w$  celle de la phase mouillante, alors

$$p_n - p_w = \frac{2\gamma_{ow}}{R} = \frac{2\gamma_{ow} \cos \theta}{r_{pore}} \quad (1.4.2)$$

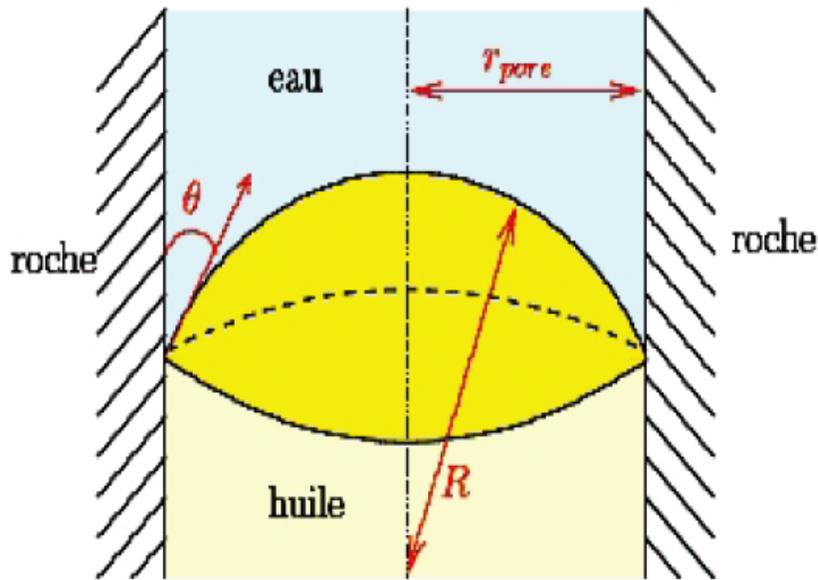
où

- $\gamma_{ow}$  : la tension superficielle,
- $R$  : le rayon de courbure de l'interface eau huile,
- $\theta$  : l'angle de mouillage,
- $r_{pore}$  : le rayon du pore.

Une approche plus complète du problème, prenant en compte aussi des termes dynamiques dans l'équilibre peut-être faite.

Les forces en présence sont :

- la poussée d'Archimède liée à la différence de masse volumique entre l'eau et les hydrocarbures, qui sont généralement plus légers,
- la capillarité, exprimée par (1.4.2),
- les forces de pression au sein du fluide environnant.



**Figure 1.4.2** – Interface eau huile dans un pore

Dans les écoulements diphasiques, il y a une discontinuité de la pression sur l'interface qui sépare les deux fluides immiscibles, c'est à cause de la tension interfaciale existante à l'interface. La discontinuité entre la pression du phase non mouillante,  $p_n$ , et celle du phase mouillante,  $p_w$ , est la pression capillaire :

$$p_c = p_n - p_w \quad (1.4.3)$$

La pression capillaire dépend de la saturation de la phase mouillante  $S_w$  et de la direction du gradient de saturation (imbibition ou vidange). (Pour plus de détails voir Chen [5],p14).

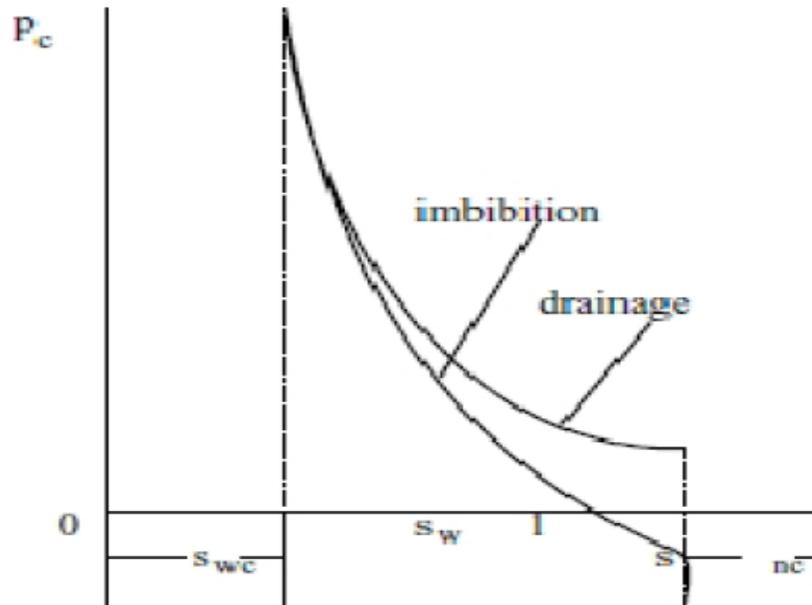


Figure 1.4.3 – courbe de pression capillaire en fonction de saturation

#### 1.4.4 Perméabilité relative et écoulement multiphase

La perméabilité relative est une quantité (fraction) qui décrit le taux deffaiblissement de l'écoulement d'une phase par l'autre ; qui est une fonction de la saturation en écoulement diphasique, en écoulement triphasique, elle peut dépendre de la saturation d'une autre phase.

La perméabilité relative de la phase aqueuse, huileuse ou gazeuse sont notés respectivement  $k_{rw}$ ,  $k_{ro}$ , and  $k_{rg}$ .

## Deuxième partie

### Etude théorique du problème

## 1.5 Modélisation mathématique

### 1.5.1 La loi de Darcy

On considère que le milieu poreux est totalement imbibé, c'est-à-dire que le volume des pores est entièrement rempli de fluide. L'étude fondatrice des écoulements dans les milieux poreux a été réalisée par l'ingénieur H. Darcy en 1856 avec un "Mémoire sur les fontaines publiques de la ville de Dijon" (Dijon est une ville en France). Il a mis en évidence une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression appliqué de part et d'autre du matériau poreux. La loi de Darcy s'applique à un milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement à faible vitesse.

Avec ces hypothèses, la vitesse moyenne de l'écoulement est

$$u_f = -\frac{k}{\eta} \frac{\Delta p}{L} \quad (1.5.1)$$

avec  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide,  $\frac{\Delta p}{L}$  le gradient de pression appliqué à un échantillon de longueur  $L$  (voir figure 1), et  $k$  la perméabilité du milieu poreux. Il est important de noter que ce paramètre est indépendant de la nature du fluide. Il ne dépend que de la structure du réseau de pores du matériau. Il ne faut pas confondre la vitesse de filtre et la vitesse du fluide dans les pores. En effet, la vitesse de filtre est bien une vitesse moyenne de l'écoulement, moyenne effectuée sur un volume comprenant une partie de solide immobile. Par conséquent, la vitesse du fluide dans les pores, appelée *vitesse interstitielle* est

$$u_i = \frac{u_f}{\varepsilon} \quad (1.5.2)$$

vitesse supérieure à la vitesse de filtre (car  $\varepsilon < 1$ ).

### 1.5.2 Propriétés de l'écoulement de Darcy

D'une manière plus générale, on peut écrire la loi de Darcy sous forme vectorielle en tenant compte de la gravité :

$$\vec{u}_f = -\frac{k}{\eta} \left( \vec{\nabla} p - \rho \vec{g} \right) \quad (1.5.3)$$

On peut remarquer que le champ de vitesse  $\vec{u}_f$  est irrotationnel. En effet,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_f = -\frac{k}{\eta} \left( \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \times \vec{g} \right) = 0$$

On peut donc décrire ce champ de vitesse par un potentiel  $\Phi = \left(\frac{k}{\eta}\right) (p + \rho g z)$ , avec  $\vec{u}_f = -\vec{\nabla} \Phi$ . On a par conséquent  $\Delta \Phi = 0$  et le champ  $\vec{u}_f$  est celui d'un fluide parfait, ce qui paraît surprenant. En effet, les détails de l'écoulement microscopique dans chaque pore sont gommés par la loi de Darcy, qui ne prend en compte que la vitesse moyenne de l'écoulement. Même si à petite échelle les effets visqueux sont dominants, l'écoulement moyen à l'échelle de l'échantillon a les caractéristiques d'un écoulement potentiel. Ceci peut se vérifier par une étude détaillée d'un modèle de milieu poreux très courant ; la *cellule de Hele Shaw*.

### 1.5.3 La cellule de Hele Shaw

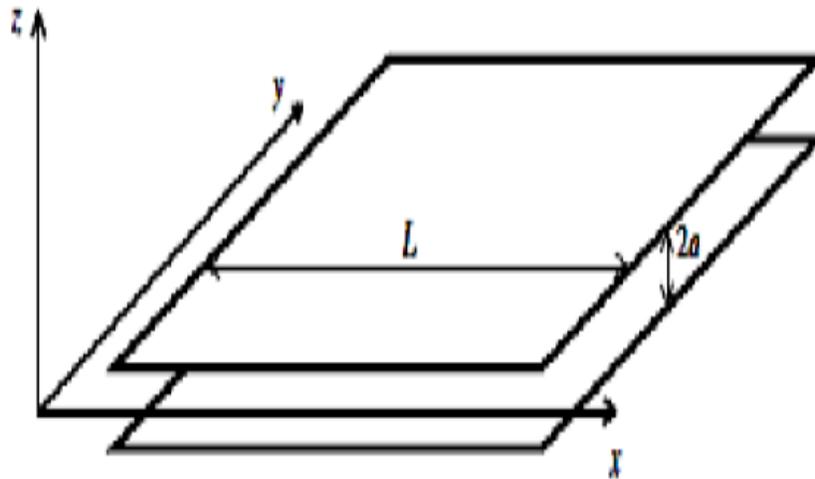


Figure 1.5.1 – Cellule de Hele Shaw

Un écoulement en cellule de Hele Shaw prend place entre deux plaques parallèles de dimensions  $L$  séparées d'un faible espacement (voir figure (1.5.1))

$$2a \ll L$$

En toute généralité, un écoulement stationnaire est décrit par un champ de vitesse tridimensionnel  $\vec{u}(x, y, z)$ . La connaissance du champ de vitesse est apportée par la résolution des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.5.4)$$

$$\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{u} = 0 \quad (1.5.5)$$

La différence d'échelle entre les directions  $z$  et  $(x, y)$  autorise à écrire d'après (1.5.4)

$$u_z = \frac{a}{L} (u_x + u_y) \approx 0$$

ce qui correspond à un écoulement parallèle bidimensionnel confiné par les deux plaques. La même analyse sur l'équation (1.5.5) permet d'écrire que l'opérateur laplacien se limite au seul terme  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , et cette équation devient :

$$\vec{\nabla}_{\parallel} p + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{u}_{\parallel} = 0 \quad (1.5.6)$$

avec  $\vec{\nabla}_{\parallel} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  et  $\vec{u}_{\parallel} = (u_x, u_y)$ . Les variations lentes de la vitesse selon les directions  $x$  et  $y$  par rapport aux variations rapides selon  $z$  permettent d'écrire

$$\vec{u}_{\parallel}(x, y, z) = \vec{u}_{\parallel}(x, y, 0) \times f(z)$$

où  $f(z)$  est une fonction que l'on détermine ci-dessous par intégration de l'équation (1.5.6), en tenant compte des conditions aux limites  $\vec{u}_{\parallel}(x, y, -a) = \vec{u}_{\parallel}(x, y, a) = 0$ . La fonction  $f(z)$  trouvée est le profil parabolique de Poiseuille, et on a finalement le champ de vitesse

$$\vec{u}_{\parallel} = -\frac{a^2}{2\eta} \left( 1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \vec{\nabla}_{\parallel} p \quad (1.5.7)$$

et une vitesse moyenne

$$\vec{u}_m = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \vec{u}_{\parallel} dz = -\frac{a^2}{3\eta} \vec{\nabla}_{\parallel} p \quad (1.5.8)$$

On retrouve dans cette expression la relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression. Si le champ de vitesse décrit par (1.5.7) n'est pas irrotationnel, le champ moyen de vitesse décrit par (1.5.8) peut être dérivé d'un potentiel. De plus, l'équation (1.5.8) est analogue à l'équation de Darcy, avec un facteur de perméabilité

$$k = \frac{a^2}{3}$$

## 1.6 Modélisation en pression globale

On considère un ouvert borné connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ , décrivant le milieu poreux (le réservoir), avec des bords Lipschitziens  $\Gamma$ , et soit  $t$  la variable temporelle  $t \in [0, T[$ ,  $T < \infty$ .

On considère un écoulement compressible, avec une viscosité dynamique constante et en négligeant les effets de gravité. Sous les hypothèses précédentes, la loi de Darcy combinée avec les équations de conservation de masse pour chaque composante mène au système d'équations aux dérivées partielles parabolique de type convection-diffusion :

$$\phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o \omega_o^h S_o) + \nabla \cdot (\rho_o \omega_o^h U_o) = 0 \quad (1.6.1)$$

$$\phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g S_g + \rho_o \omega_o^l S_o) + \nabla \cdot (\rho_g U_g + \rho_o \omega_o^l U_o) = 0 \quad (1.6.2)$$

$$U_o = -K(x) \frac{k_{ro}}{\mu_o} \nabla P_o \quad (1.6.3)$$

$$U_g = -K(x) \frac{k_{rg}}{\mu_g} \nabla P_g \quad (1.6.4)$$

où ( $i = o, g$ ),  $S_i$ ,  $U_i$ ,  $P_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\mu_i$ ,  $k_{ri}$  représentent, la saturation, la vitesse, la pression, la densité, la viscosité et la perméabilité relative de la phase  $i$ , respectivement, les paramètres  $\phi$  et  $K$  sont la porosité et la perméabilité absolue du milieu et  $\omega_o^c$ ,  $c = h, l$  est la fraction massique du composant  $c$ , notée par  $h$  pour la composante légère et par  $l$  pour la composante lourde dans la phase huileuse.

Ce système de six équations à six inconnues ( $S_o, S_g, U_o, U_g, p_o, p_g$ ) se prête mal à une étude mathématique, du fait que dans la région où  $S_o = S_{o,m}$ , l'équation (1.6.1) disparaît. C'est l'une des raisons pour laquelle Chavent a introduit une grandeur fictive, appelée "*pression globale*", que nous allons présenter par la suite

### 1.6.1 Saturation réduite

On définit d'abord la *saturation réduite*  $S$  de l'un des deux fluides, par exemple pour le fluide mouillant  $o$ , par :

$$S = \frac{S_o - S_{o,m}}{1 - S_{o,m} - S_{g,m}} \quad (1.6.5)$$

sachant que  $S_{o,m} \prec S_{o,M} = 1 - S_{g,m}$  et par suite, par un changement de variable, toutes les fonctions introduites précédemment peuvent s'écrire en fonction de  $S$ , et on a :

$$0 \leq S(x, t) \leq 1 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.6.6)$$

On suppose que c'est un régime saturé, ce fait est exprimé par

$$S_o + S_g = 1 \quad (1.6.7)$$

### 1.6.2 Pression globale

Le système précédent se prête mal à une étude mathématique, du fait que dans la région où  $S = 0$  l'équation (1.6.1) disparaît. C'est l'une des raisons pour laquelle la notion de "pression globale" a été introduite (dite aussi "intermédiaire" ou "réduite"). Cette grandeur dimensionnée à une pression est fictive ; éventuellement discontinue dans certains cas, vu qu'elle dépend de la saturation  $S$  et est définie par :

$$P = \frac{1}{2} (P_g + P_o) + a(S) \quad (1.6.8)$$

tel que :

$$a(S) = \int_0^S \alpha(\xi) d\xi \quad (1.6.9)$$

avec

$$\alpha(S) = \frac{\lambda_g(S) \lambda_o(S)}{\lambda(S)} p'_c(S) P_{cM} \quad (1.6.10)$$

est la diffusion capillaire.

Notons que  $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$  d'où la dégénérescence du terme de diffusion.

La pression capillaire est donnée par

$$P_g - P_o = P_c(S_o) = p_c(S_o)p_{cM} \quad (1.6.11)$$

et pour simplifier les notations, on introduit les fonctions auxiliaires suivantes :

la mobilité de chaque phase par :

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i}, \quad i = o, g \quad (1.6.12)$$

la mobilité totale  $\lambda$  par :

$$\lambda = \lambda_o + \lambda_g \quad (1.6.13)$$

On suppose que :

$$\rho_o^h = \rho_o \omega_o^h \quad (1.6.14)$$

$$\rho = \rho_g + \rho_o \quad (1.6.15)$$

$$b = \rho_g \lambda_g + \rho_o \lambda_o \quad (1.6.16)$$

$$d = \rho_g - \rho_o \quad (1.6.17)$$

et

$$f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad (1.6.18)$$

d'où on a :

$$\lambda P = \lambda_o P_o + \lambda_g P_g \quad (1.6.19)$$

La pression globale peut être écrit sous la forme :

$$P = P_o + \int_0^s \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{dp_c}{d\xi} d\xi \quad (1.6.20)$$

Grâce à cette formule, les pressions  $P_o$  et  $P_g$  peuvent être introduites

En utilisant la relation (1.6.8), la combinaison des équation (1.6.1) et (1.6.3) donne :

$$\phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o \omega_o^h S_o) - K \nabla \cdot (\rho_o \lambda_o \omega_o^h \nabla P) - K \nabla \cdot (\rho_o \omega_o^h \nabla \left( \int f_g \frac{dp_c}{d\xi} d\xi \right)) = 0$$

c'est-à-dire que

$$\phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o \omega_o^h S_o) - K \nabla \cdot (\rho_o \lambda_o \omega_o^h \nabla P) = q_o \quad (1.6.21)$$

de même manière, les équations (1.6.2) et (1.6.4) donnent

$$\phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g (1 - S_o) + \rho_o \omega_o^l S_o) - K \nabla \cdot (\rho_g \lambda_g \nabla \left( P + \int \frac{\lambda_o}{\lambda} \frac{dp_c}{d\xi} d\xi \right) + \rho_o \lambda_o \omega_o^l \nabla \left( P - \int \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{dp_c}{d\xi} d\xi \right)) = 0$$

c'est-à-dire que

$$\phi(x) \frac{\partial}{\partial t} ((\rho_o \omega_o^l - \rho_g) S_o) - K \nabla \cdot ((\rho_g \lambda_g + \rho_o \lambda_o \omega_o^l) \nabla P) = q_g \quad (1.6.22)$$

et d'après les équation (1.6.24) et (1.6.25), on obtient alors :

$$\Phi(x) \rho_o^h \frac{\partial S}{\partial t} + \Phi(x) (\rho_o^h)' S \frac{\partial P}{\partial t} + \phi(x) S_{o,m} (\rho_o^h)' \frac{\partial P}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla P) + \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \alpha(S) \nabla(S)) = q_o \quad (1.6.23)$$

$$\Phi(x) \rho \frac{\partial S}{\partial t} + \Phi(x) \rho' S \frac{\partial P}{\partial t} + \phi(x) (\rho S_{o,m} + \rho_g)' \frac{\partial P}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x) b(S, P) \nabla P) + \nabla \cdot (K(x) d(P) \alpha(S) \nabla S) = q_g \quad (1.6.24)$$

où  $\Phi = (1 - S_{o,m} - S_{g,m}) \phi \in [0, 1]$ , appelée aussi porosité et égale à la porosité du milieu, dans le cas où les saturations résiduelles des deux fluides sont nulles.

### 1.6.3 Formulation du problème

Il s'en suit de (1) – (4), (7), les équations (1.6.26) et (1.6.27), qu'on a un système de deux équations à deux inconnues  $(S, P)$  défini par :  $\forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$

$$\Phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h S) + \phi(x) S_{o,m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h) - \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla P) +$$

$$\nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \alpha(S) \nabla(S)) = 0 \quad (1.6.25)$$

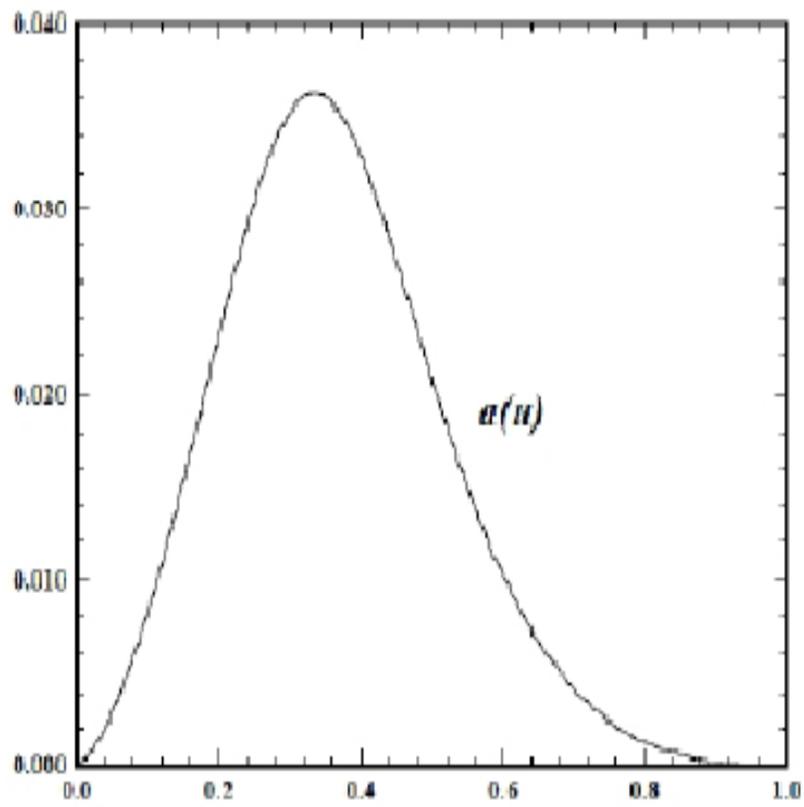


Figure 1.6.1 – Diffusion capillaire  $a$  en fonction de la saturation réduite  $S$

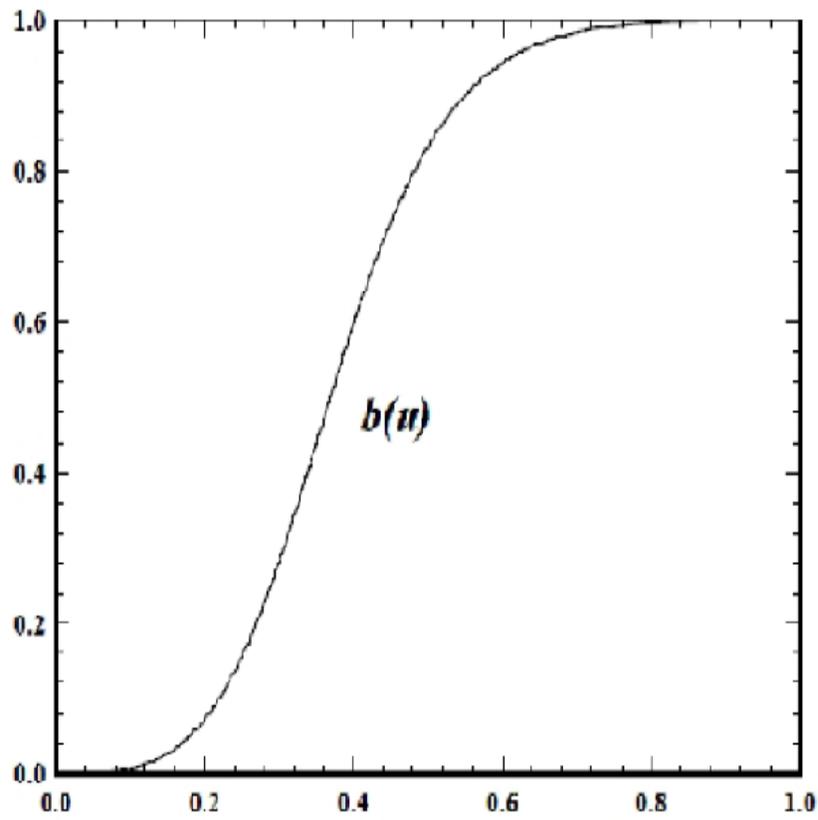


Figure 1.6.2 – Fraction du flux  $b$  en fonction de la saturation réduite  $S$

$$\Phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S_{o,m} + \rho_g) - \nabla \cdot (K(x) b(S, P) \nabla P) +$$

$$\nabla \cdot (K(x) d(P) \alpha(S) \nabla S) = 0 \quad (1.6.26)$$

il s'agit donc ici du couplage entre deux équations d'évolution non linéaires de convection-diffusion dégénérées (du fait que  $a(0) = a(1) = 0$ ).

Avec les conditions aux bords et condition initiale suivantes :

**Conditions sur  $\Gamma_1$  (injection)** Aux puits d'injection, on suppose que le fluide non mouillant ( $g$  : le gaz), est injecté avec une saturation maximale  $S_{g,M}$  à débit constant  $q_d$ , soit :

$$S_g = S_{g,M} \quad (1.6.27)$$

et

$$\vec{U}_g \cdot \vec{\eta} = -q_d$$

sur  $\Gamma_1$ , où  $\vec{\eta}$  est la normale unitaire à  $\Gamma$ .

Alors, on a

$$S = 1$$

et

$$U_g = U$$

sur  $\Gamma_1$ , et par suite :

$$S = 1$$

et

$$\vec{U} \cdot \vec{\eta} = -q_d$$

sur  $\Gamma_1$ .

**Conditions sur  $\Gamma_2$  (imperméable)** Aux frontières imperméables, on suppose que les écoulements latéraux sont nuls, soit :

$$\vec{U}_g \cdot \vec{\eta} = 0$$

et

$$\vec{U}_o \cdot \vec{\eta} = 0$$

sur  $\Gamma_2$ .

Alors, on a

$$\vec{U} \cdot \vec{\eta} = 0$$

et

$$K(x) \nabla \alpha(S) \cdot \vec{\eta} = 0 \quad (1.6.28)$$

sur  $\Gamma_2$ .

**Conditions sur  $\Gamma_3$  (production)** Aux puits de production, on suppose que le fluide mouillant ( $o$  : l'huile), est produit avec une saturation maximale  $1 - S_{o,m}$  (avant le temps de percée) et à pression constante (en général la pression atmosphérique  $P_{atm}$ ),

soit :

$$S_o = S_{o,m}$$

$$\vec{U}_o \cdot \vec{\eta} \succ 0$$

et

$$P_o = p_{atm}$$

sur  $\Gamma_3$ .

Alors, on a

$$S = 0$$

$$\vec{U} \cdot \vec{\eta} \succ 0 \quad (1.6.29)$$

et

$$P = P_o \quad (1.6.30)$$

où  $P_o$  est donnée par

$$P_o = P_{atm} + \gamma(0) - \frac{1}{2}P_{cM}$$

**Condition initiale** On suppose que saturation  $S_g^0$  en huile du réservoir à l'instant  $t = 0$  est connue :

$$S_g = S_o^0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{à } t = 0$$

De plus  $S_g^0$  doit vérifier que  $S_{g,m} \leq S_g^0 \leq S_{g,M}$ , dans  $\Omega$ . Alors, on a :

$$S(x, 0) = S^0(x) \tag{1.6.31}$$

dans  $\Omega$ , où  $S^0$  est donnée par :

$$S^0 = \frac{S_o^0 - S_{o,m}^0}{1 - S_{o,m} - S_{o,m}}$$

**Problème réduit** On peut réécrire le problème (1 – 4) comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h S) + \phi(x) S_{o,m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h) - \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla P) + \\ \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \alpha(S) \nabla(S)) = 0 \end{aligned} \tag{1.6.32}$$

$$\begin{aligned} \Phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S_{o,m} + \rho_g) - \nabla \cdot (K(x) b(S, P) \nabla P) + \\ \nabla \cdot (K(x) d(P) \alpha(S) \nabla S) = 0 \end{aligned} \tag{1.6.33}$$

$$\lambda(S) \nabla P \cdot \eta = 0, \quad \alpha(S) \nabla S = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \tag{1.6.34}$$

$$S(x, 0) = S^0(x), \quad P(x, 0) = P^0(x) \quad \text{dans } \Omega \tag{1.6.35}$$

Remarque : Connaissant  $S$  et  $P$ , on peut déterminer les vraies pressions  $P_o$  et  $P_g$  des deux fluides, par les formules

$$\begin{aligned} P_o &= P - \gamma(S) + \frac{1}{2}p_c(S)p_{CM} \\ P_g &= P - \gamma(S) - \frac{1}{2}p_c(S)p_{CM} \end{aligned}$$

de même, connaissant  $S$  et  $U$ , on peut déterminer  $U_o$  et  $U_g$  par les relations (1.6.22) et (1.6.23).

## 1.7 Existence et unicité de la solution

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ), avec des bords Lipschiziens  $\Gamma$ , pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution faible, dans notre cas, on commence par introduire les hypothèses suivantes :

1.  $K(x) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$K_- \leq K(x) \leq K_+ \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

2.  $\phi(x) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$0 < \phi_- \leq \phi(x) \leq \phi_+ \quad p. p. \text{ dans } \Omega$$

3.  $\rho_o^h(P) \in L^\infty(\Omega, (0, T)) \cap H^1(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$\rho_{o-}^h \leq \rho_o^h(P) \leq \rho_{o+}^h \quad p. p. \text{ dans } \Omega \times (0, T)$$

4.  $\alpha(S) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$\alpha_- \leq \alpha(S) \leq \alpha_+ \quad p. p. \text{ dans } \Omega \times (0, T)$$

5.  $\lambda_o(S) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$\lambda_{o-} \leq \lambda_o(S) \leq \lambda_{o+} \quad p. p. \text{ dans } \Omega \times (0, T)$$

6.  $d(P) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$d_- \leq d(P) \leq d_+ \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

7.  $b(S, P) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$b_- \leq b(S, P) \leq b_+ \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

8.  $S^o, P^o \in L^\infty(\Omega)$ , tel que

$$0 \leq S(x, t) \leq 1 \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

9.  $\rho_g(P) \in H^1(\Omega, (0, T))$ .

On note que p. p. signifie presque partout. Alors, on introduit les espaces suivants :

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ v \in (L^2(\Omega, (0, T)))^d, \text{div}(v) \in L^2(\Omega, (0, T)), d = 2, 3 \right\} \quad (1.7.1)$$

$$V(\Omega) = \{v \in H(\text{div}, \Omega), v \cdot \eta = 0 \quad \text{on } \Gamma\} \quad (1.7.2)$$

$$W(\Omega) = \{v \in V(\Omega), v(x, T) = 0 \quad \text{in } \Omega\}$$

La formulation faible du problème (1.6.35 – 1.6.28) est écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \left( \Phi(x) \rho_o^h S, \frac{\partial v}{\partial t} \right)_\Omega - (K(x) \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla P, \nabla v)_\Omega + \\ (K(x) \rho_o^h \alpha(S) \nabla S, \nabla v)_\Omega = (f_1, v) \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

$$\begin{aligned} \left( \Phi(x) \rho S, \frac{\partial v}{\partial t} \right)_\Omega - (K(x) b(S, P) \nabla P, \nabla v)_\Omega + \\ (K(x) d(P) \alpha(S) \nabla S, \nabla v)_\Omega = (f_2, v) \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

avec  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  est le produit scalaire défini sur  $W(\Omega)$ .

### Proposition 2.1

Sous les hypothèses (1 – 9), problème (1.6.35 – 1.6.38) a une solution unique  $(S, P) \in (V(\Omega))^2$ .

### Preuve

Pour prouver ce résultat, premièrement, on va adapter les résultats dans quelques références à notre modèle, alors le système (1.6.35 – 1.6.38) peut être écrit en formule simplifiée comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi(x)b(S, P) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h S) - b(S, P) \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla P) \\ + b(S, P) \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \alpha(S) \nabla S) = b(S, P) \cdot f_1 \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x) \rho_o^h \lambda_o(S) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) - \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla \cdot (K(x) b(S, P) \nabla P) \\ + \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla \cdot (K(x) d(P) \alpha(S) \nabla S) = \rho_o^h \lambda_o(S) \cdot f_2 \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Alors on va introduire une nouvelle inconnue

$$V = K(x) \rho_o^h \alpha(S) (b(S, P) - d(P) \lambda_o(S)) \nabla S$$

et on va utiliser le théorème de Lax-Milgram deux fois, la première pour déterminer  $S$  en supposant que  $V$  est connu, et la deuxième pour déterminer  $V$ .

En multipliant la première équation de (35) par une fonction test  $v_1$  et la deuxième par  $v_2$  de  $V(\Omega)$  et en additionnant, On obtient les équations suivantes :

$$\Phi(x) \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h S) \cdot v_1 - \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) \cdot v_2 \right) + V = f_1 v_1 - f_2 v_2 \quad (*)$$

et

$$V = K(x) \rho_o^h \alpha(S) (b(S, P) - d(P) \lambda_o(S)) \nabla S \quad (**)$$

Premièrement, on va proposer que l'inconnue  $V \in L^2(\Omega, (0, T))$  est connue et on va essayer de trouver  $S \in V(\Omega, (0, T))$  à partir de l'équation (\*\*).

On définit  $L(t) \in V(\Omega)'$  et  $A\mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))$  comme suit :

$$(Au, v) = \int_{\Omega} \Phi(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = ((u, v))_{\Phi}, \quad \forall u, v \in V(\Omega) \quad (1.7.7)$$

L'opérateur  $A$  est un isomorphisme de  $V$  dans  $V'$  (selon les conditions ci-dessus (1, 3 – 7)), l'équation (\*\*) a une solution unique  $S(x, t)$  pour  $t \in (0, T)$  (d'après théorème de Lax-Milgram).

Deuxièmement, on va prouver l'existence et l'unicité de  $V$  de  $L^2(\Omega \times (0, T)) \cap L^\infty((0, T), V')$ ,

On va équiper l'espace  $V(\Omega)$  par le produit scalaire  $((\cdot, \cdot))_*$  et la norme  $\|\cdot\|_*$  en utilisant l'isomorphisme  $A$

$$\forall f, g \in V'(\Omega), \quad ((f, g))_* = ((A^{-1}f, A^{-1}g))_\Phi = (f, A^{-1}g) = (g, A^{-1}f)$$

$$\forall f \in V'(\Omega), \quad \|f\|_* = ((f, f))_*^{1/2}$$

On définit

$$V_0 = Au_0 \in V'(\Omega)$$

Comme  $u_0 \in V'(\Omega)$ , en appliquant le théorème de Lax-Milgram une autre fois pour l'équation (\*), on obtient l'existence et l'unicité d'une solution  $S$  de  $L^\infty(\Omega, (0, T))$ .

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une formulation mathématique du problème d'écoulement diphasique de fluides en milieu poreux, où les inconnues sont réduites à la saturation de l'un des constituants et une pression fictive, le problème ainsi formulé est gouverné par une équation parabolique non linéaire dégénérée couplée à une famille d'équations elliptiques paramétrée par le temps.

Des résultats d'existence et d'unicité sont présentés pour l'équation en saturation dans le cas du découplage. Bien que ce problème est plus simple que le modèle général, il décrit certaines situations physiques.

## Troisième partie

# Un schéma Volumes Finis du problème

## 1.9 Introduction

Dans ce chapitre, on développe un schéma de type volumes finis pour le problème mono-dimensionnel non linéaire de convection-diffusion dégénéré, vue au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} \Phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h S) + \phi(x) S_{o,m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o^h) - \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \lambda_o(S) \nabla P) + \\ \nabla \cdot (K(x) \rho_o^h \alpha(S) \nabla(S)) = 0 \end{aligned} \quad (1.9.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho S_{o,m} + \rho_g) - \nabla \cdot (K(x) b(S, P) \nabla P) + \\ \nabla \cdot (K(x) d(P) \alpha(S) \nabla S) = 0 \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

$$\lambda(S) \nabla P \cdot \eta = 0, \quad \alpha(S) \nabla S = 0, \quad \text{on } \Gamma \times (0, T) \quad (1.9.3)$$

$$S(x, 0) = S^0(x), \quad P(x, 0) = P^0(x) \quad \text{in } \Omega \quad (1.9.4)$$

où  $a = \alpha'$ ,  $a(0) = a(1) = 0$  et  $a(S) \succ 0$ ,  $\forall S \in ]0, 1[$ ,  $b \in C^1([0, 1])$  est une fonction croissante,  $\Phi$  et  $K$ .

Ce problème modélise l'écoulement diphasique de fluides immiscibles et compressibles, en milieu poreux. Par exemple le drainage de l'huile par injection de gaz à débit constant, dans une carotte poreuse (voir Figure 1.9.1)

Dans la suite, nous allons présenter un schémas de type volumes finis, qui prennent en compte les discontinuités dues au caractère purement hyperbolique du problème au voisinage de la dégénérescence du terme de diffusion.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 3.2, on rappelle les hypothèses sur les données du problème (1.6.35 – 1.6.38) qui assurent l'existence et l'unicité de la solution faible. Dans la section 3.3, nous présentons la discrétisation par un schémas numériques de type volumes finis pour le problème (1.6.35 – 1.6.38). Pour tenir compte, d'une manière

efficace, des discontinuités, la solution est approchée par des constantes par maille. Dans la section 3.4, Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication de S.Gasmi et F. Z. Nouri [25].

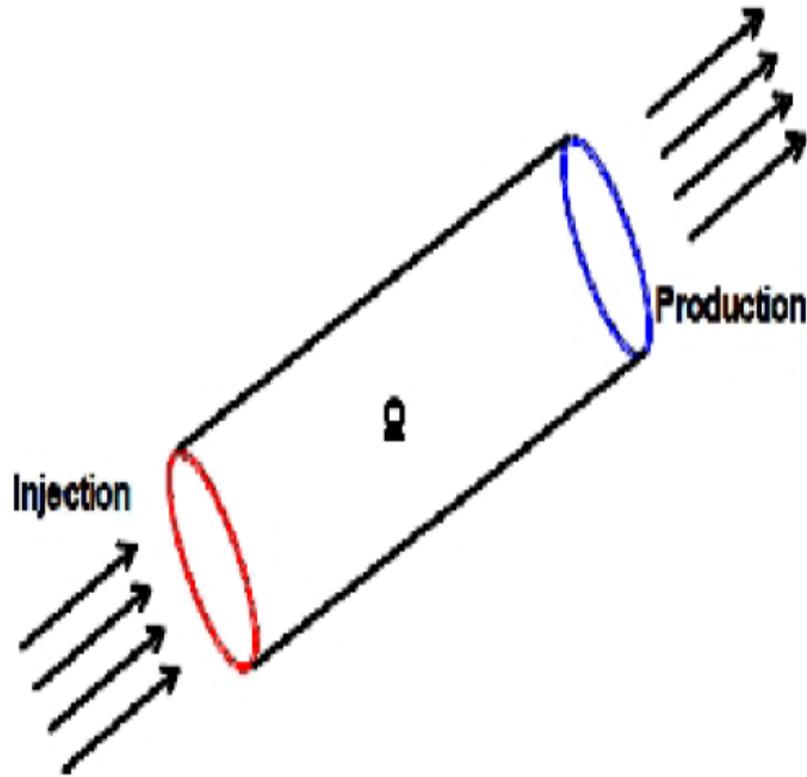


Figure 1.9.1 – Ecoulement mono-dimensionnel dans une carotte poreuse

## 1.10 Hypothèses sur les données du problème

Dans la suite, nous supposons que les données vérifient les hypothèses suivantes, qui garantissent l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème, voir chapitre 2 proposition 2.1 :

1.  $K(x) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$K_- \leq K(x) \leq K_+ \quad a.e. \text{ dans } \Omega$$

2.  $\phi(x) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$0 < \phi_- \leq \phi(x) \leq \phi_+ \quad \text{p. p. dans } \Omega$$

3.  $\rho_o^h(P) \in L^\infty(\Omega, (0, T)) \cap H^1(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$\rho_{o-}^h \leq \rho_o^h(P) \leq \rho_{o+}^h \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

4.  $\alpha(S) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$\alpha_- \leq \alpha(S) \leq \alpha_+ \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

5.  $\lambda_o(S) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$\lambda_{o-} \leq \lambda_o(S) \leq \lambda_{o+} \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

6.  $d(P) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$d_- \leq d(P) \leq d_+ \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

7.  $b(S, P) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$ , tel que

$$b_- \leq b(S, P) \leq b_+ \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

8.  $S^o, P^o \in L^\infty(\Omega)$ , tel que

$$0 \leq S(x, t) \leq 1 \quad \text{p. p. dans } \Omega \times (0, T)$$

9.  $\rho_g(P) \in H^1(\Omega, (0, T))$ .

On note que p. p. signifie presque partout.

Ces dernières hypothèses sont en général vérifiées par les données physiques du problème, même pour des perméabilités  $K$  discontinues.

## 1.11 Approximation du problème par volumes finis

Le domaine temporel  $[0, T[$  est subdivisé en sous-intervalles  $[t_n, t_{n+1}[$  de longueur  $\Delta t_n$ ,  $n = 0, \dots, M$  avec  $t_0 = 0$  et  $t_M = T$ . Le domaine spatial, c'est-à-dire le réservoir  $\Omega$  est discrétisé à l'aide d'un maillage non structuré  $T_h$ .

### 1.11.1 Notations

- $|K|$  désigne l'aire de la cellule  $K$ .
- $N(K)$  désigne l'ensemble de triangles ayant un côté commun avec la cellule  $K$ .
- $e_{K,L}$  est le côté commun aux triangles  $K$  et  $L$ ,  $\vec{\eta}_{K,L}$  est la normale dirigée de  $K$  vers  $L$ .
- $\vec{\eta}_{e_i}$  est la normale extérieure correspondant à la partie  $e_i$  du bord  $\Gamma$ .
- $S_h$  désigne l'ensemble des arêtes du maillage  $T_h$ ,  $S_h^*$  l'ensemble des arêtes intérieures.
- Pour une arête donnée  $e$  :
  - \*  $S$  et  $N$  désignent ses extrémités,
  - \*  $W$  et  $E$  désignent les deux triangles tels que  $e = \bar{W} \cap \bar{E}$ .
- $\chi_e$ , est la cellule diamant associée à  $e$  obtenue en connectant les centres de gravités des cellules  $W$  et  $E$  aux extrémités  $N$  et  $S$  de  $e$ .
- $(\varepsilon_i)_{i=1,4}$  sont les quatre segments formant la frontière de  $\chi_e$ .
- $\vec{\eta}_\varepsilon = \frac{1}{|\varepsilon_i|} (\mu_{x_i}, \mu_{y_i})$  est la normale à  $\varepsilon_i$  sortante de  $\chi_e$ .
- Pour un noeud donné,  $V(N)$  désigne l'ensemble des triangles l'ayant en commun.

Pour la résolution numérique du problème (27 – 30) on décritise les deux équations séparément.

Ces approximations seront définies par les schémas numériques qui suivent. On aura besoin aussi de l'hypothèse sur la régularité du maillage :

- $\exists \beta \in ]0, 1]$ , tel que  $\beta \Delta x \leq h$ , où  $\beta$  est une constanta indépendante de  $h$ .

### 1.11.2 Discrétisation de la première équation

La première équation s'écrit :

$$\Phi(x)\rho_o^h \frac{\partial S}{\partial t} + \Phi(x) (\rho_o^h)' S \frac{\partial P}{\partial t} + \phi(x) S_{o,m} (\rho_o^h)' \frac{\partial P}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x)\rho_o^h \lambda_o(S) \nabla P) + \nabla \cdot (K(x)\rho_o^h \alpha(S) \nabla(S)) = 0$$

Soit  $C$  une cellule du maillage  $T_h$ , on intègre sur  $C$  à l'instant  $t_n$  en utilisant une approximation explicite, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_C \Phi(x)\rho_o^{h,n} (S^{n+1} - S^n) dx + \frac{1}{\Delta t} \int_C \Phi(x)\rho_o^{h',n} S^n (P^{n+1} - P^n) dx + \frac{1}{\Delta t} \int_C \phi(x) S_{o,m} \rho_o^{h',n} (P^{n+1} - P^n) dx$$

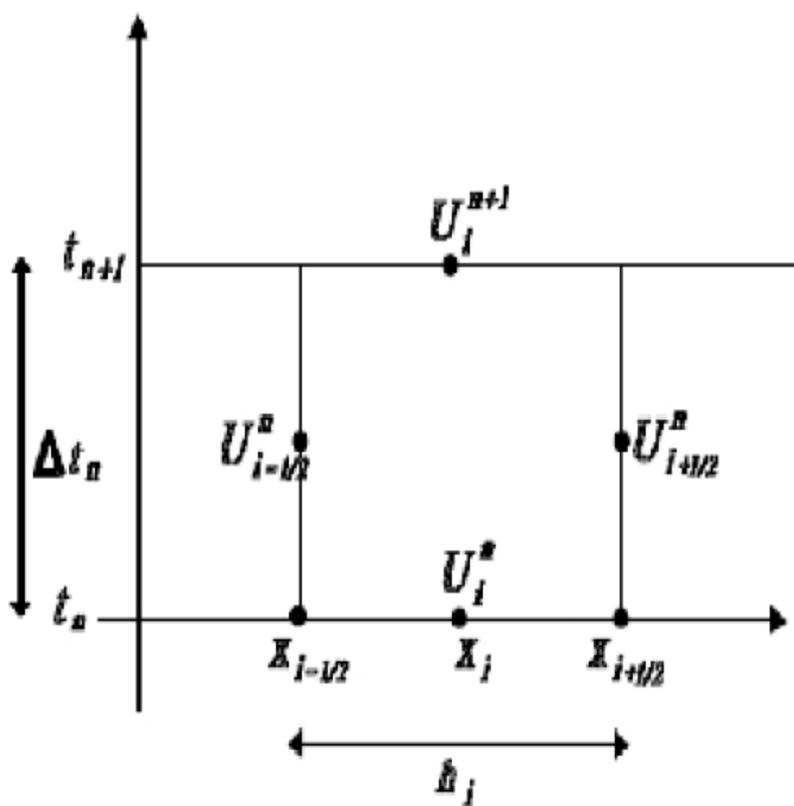


Figure 1.11.1 – volume-contrôle  $I_i$

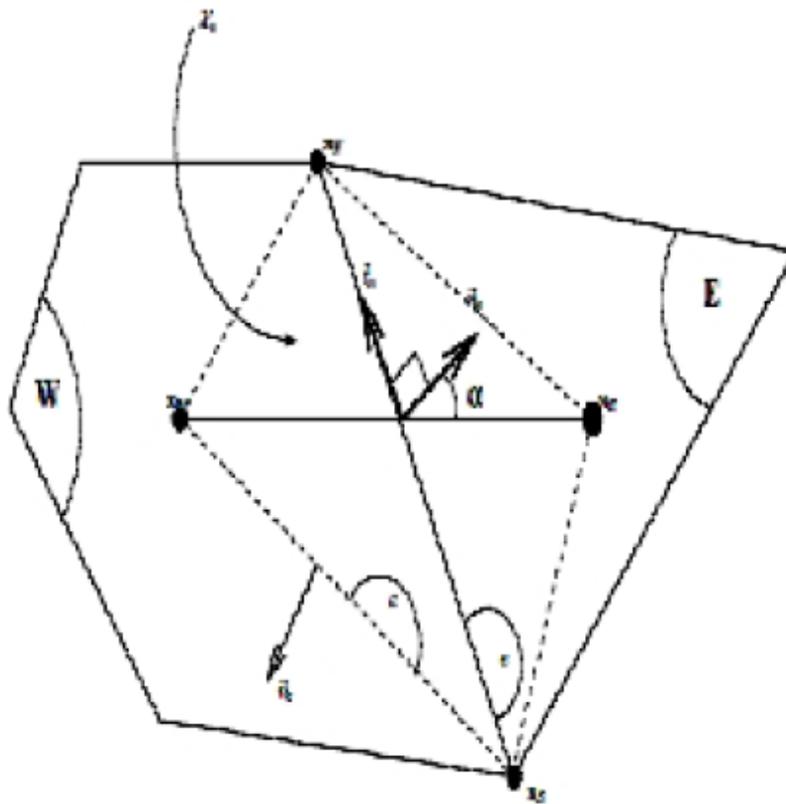


Figure 1.11.2 – Cellule diamant

$$\sum_{D \in N(C)} \int_{e_{CD}} K(x) \rho_o^{h,n} \lambda_o^n(S) \nabla P^n \eta_e dx + \sum_{D \in N(C)} \int_{e_{CD}} K(x) \rho_o^{h,n} \alpha^n(S) \nabla (S^n) \eta_e dx = 0 \quad (1.11.1)$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \frac{|C|}{\Delta t} \Phi_C \rho_{o,C}^{h,n} (S_C^{n+1} - S_C^n) + \frac{|C|}{\Delta t} \Phi_C \rho_{o,C}^{h,n} S_C^n (P_C^{n+1} - P_C^n) + \frac{|C|}{\Delta t} \phi_C S_{o,m} \rho_{o,C}^{h,n} (P_C^{n+1} - P_C^n) - \\ & \sum_{D \in N(C)} \int_{e_{CD}} K \rho_o^{h,n} \lambda_o^n(S) \nabla P^n \eta_e dx + \sum_{D \in N(C)} \int_{e_{CD}} K \rho_o^{h,n} \alpha^n(S) \nabla (S^n) \eta_e dx = 0 \end{aligned} \quad (1.11.2)$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} & \frac{|C|}{\Delta t} \Phi_C \rho_{o,C}^{h,n} S_C^{n+1} + \frac{|C|}{\Delta t} \rho_{o,C}^{h,n} (\Phi_C S_C^n + \phi_C S_{o,m}) P_C^{n+1} = -\frac{|C|}{\Delta t} \Phi_C \rho_{o,C}^{h,n} S_C^n - \\ & \frac{|C|}{\Delta t} \rho_{o,C}^{h,n} (\Phi_C S_C^n - \phi_C S_{o,m}) P_C^n + \sum_{D \in N(C)} F_{C,e}^n - \sum_{D \in N(C)} F_{D,e}^n \end{aligned} \quad (1.11.3)$$

tel que  $F_{C,e}^n$  et  $F_{D,e}^n$  sont les flux numériques de convection et diffusion qui sont donnés par :

$$F_{C,e}^n = \int_e K \rho_o^{h,n} \lambda_o^n(S) \nabla P^n \eta_e dx \quad (1.11.4)$$

$$F_{D,e}^n = \int_e K \rho_o^{h,n} \alpha^n(S) \nabla S^n \eta_e dx \quad (1.11.5)$$

Ces flux sont approximés par :

$$F_{C,e}^n = K_e \rho_{o,e}^{h,n} \lambda_{o,e}^n \nabla_e P^n |e| \quad (1.11.6)$$

$$F_{D,e}^n = K_e \rho_{o,e}^{h,n} \alpha_e^n \nabla_e S^n |e| \quad (1.11.7)$$

où  $e$  une arête du maillage,  $\vec{\eta}_e$  est la normale à  $e$  sortante de  $C$ ,  $K_e$ ,  $\rho_{o,e}^{h,n}$  et  $\lambda_{o,e}^n$  désignent les interpolations respectives des fonctions  $K$ ,  $\rho_o^h$  et  $\lambda_o$  sur  $e$  tandis que  $\nabla_e P^n$  est l'approximation du gradient de pression sur l'arête  $e$ . La construction du gradient approché sur  $e$  se fait par une méthode dite de Green-Gauss.

La conservation des flux numériques est une propriété caractéristique des schémas numériques pour les lois de conservation, cette conservation est en général définie par l'égalité entre le flux entrant et le flux sortant à travers une interface du maillage.

La consistance du flux numérique est en général définie pour que l'ordre de l'approximation numérique choisi pour le flux soit supérieur ou égale à 1.

Elle consiste à approcher le gradient par sa moyenne sur un co-volume en forme de diamant construit autour de l'arrête  $e$ . tel que :

$$\rho_{o,e}^{h,n} \lambda_{o,e}^n = \rho_o^h (P_e^n) \lambda_o (S_e^n) \quad (1.11.8)$$

$$\rho_{o,e}^{h,n} \alpha_e^n = \rho_o^h (P_e^n) \alpha(S_e^n) \quad (1.11.9)$$

et

$$\nabla_e P = \frac{1}{|\chi_e|} \sum_{\varepsilon \in \partial \chi_e} \frac{1}{2} (P_{N_1(\varepsilon)} + P_{N_2(\varepsilon)}) |\varepsilon| \vec{\eta}_e \quad (1.11.10)$$

où  $\chi_e$  est la cellule diamant associée à  $e$ , et  $N_1(\varepsilon)$ ,  $N_2(\varepsilon)$  sont les extrémités de  $\varepsilon$ , un des quatre segments formant  $\partial \chi_e$  la frontière de  $\chi_e$  et  $\vec{\eta}_e$  sa normale unitaire sortante. Les valeurs de  $P$  aux centres  $W$  et  $E$  sont  $P_W$  et  $P_E$  tandis que les valeurs aux noeuds  $N$  et  $S$  sont interpolées aux bords et notées  $P_N$  et  $P_S$ , nous avons omis l'indice  $\eta$  pour simplifier les notations.

Pour un noeud  $N$  on a :

$$P_N = \sum_{K \in V(N)} y_K(N) P_K \quad (1.11.11)$$

où  $V(N)$  est l'ensemble des triangles ayant en commun le noeud  $N$ ,  $P_K$  la valeur de  $P$  au centre de la cellule  $K$  et  $y_K(N)$  les poids d'interpolation. Ces poids peuvent être choisis comme suit (voir [7] ) pour plus de détails :

$$y_K(N) = \frac{1 + \lambda_x(x_K - x_N) + \lambda_y(y_K - y_N)}{n_N + \lambda_x R_x + \lambda_y R_y} \quad (1.11.12)$$

tels que :

$$\begin{aligned}
 n_N &= \text{card}V(N) \\
 R_x &= \sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N) \\
 R_y &= \sum_{K \in V(N)} (y_K - y_N) \\
 \lambda_x &= \frac{R_y \sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N) (y_K - y_N) - R_x \sum_{K \in V(N)} (y_K - y_N)^2}{\sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N)^2 \sum_{K \in V(N)} (y_K - y_N)^2} \\
 \lambda_y &= \frac{R_x \sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N) (y_K - y_N) - R_y \sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N)^2}{\sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N)^2 \sum_{K \in V(N)} (y_K - y_N)^2}
 \end{aligned}$$

Alors, en combinant ces relations, on obtient la formule du gradient de pression :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial P^n}{\partial x} \right|_e &= \frac{1}{2|\chi_e|} ((\mu_{x_1} + \mu_{x_2}) P_W^n + (\mu_{x_3} + \mu_{x_4}) P_E^n) + \\
 &\quad \frac{1}{2|\chi_e|} \left( (\mu_{x_1} + \mu_{x_4}) \sum_{L \in V(N)} y_{L(N)} P_L^n + (\mu_{x_2} + \mu_{x_3}) \sum_{L \in V(N)} y_{L(N)} P_L^n \right) \\
 \left. \frac{\partial P^n}{\partial y} \right|_e &= \frac{1}{2|\chi_e|} ((\mu_{y_1} + \mu_{y_2}) P_W^n + (\mu_{y_3} + \mu_{y_4}) P_E^n) + \\
 &\quad \frac{1}{2|\chi_e|} \left( (\mu_{y_1} + \mu_{y_4}) \sum_{L \in V(N)} y_{L(N)} P_L^n + (\mu_{y_2} + \mu_{y_3}) \sum_{L \in V(N)} y_{L(N)} P_L^n \right)
 \end{aligned}$$

De même, le gradient de la saturation est donné par :

$$\nabla_e S = \frac{1}{|\chi_e|} \sum_{\varepsilon \in \partial \chi_e} \frac{1}{2} (S_{N_1(\varepsilon)} + S_{N_2(\varepsilon)}) |\varepsilon| \vec{\eta}_e \quad (1.11.13)$$

tel que :

$$S_N = \sum_{K \in V(N)} y_K(N) S_K \quad (1.11.14)$$

### 1.11.3 Discrétisation de la deuxième équation

La deuxième équation s'écrit :

$$\Phi(x) \rho \frac{\partial S}{\partial t} + \Phi(x) \rho' S \frac{\partial P}{\partial t} + \phi(x) (\rho S_{o,m} + \rho_g)' \frac{\partial P}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x) b(S, P) \nabla P) + \nabla \cdot (K(x) d(P) \alpha(S) \nabla S) = 0$$

De la même façon, on intègre sur  $C$  à l'instant  $t_n$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_C \Phi(x) \rho^n (S^{n+1} - S^n) dx + \frac{1}{\Delta t} \int_C \Phi(x) \rho'^n S^n (P^{n+1} - P^n) dx + \frac{1}{\Delta t} \int_C \phi(x) (\rho'^n S_{o,m} + \rho'_g) (P^{n+1} - P^n) dx \\ + \sum_{D \in N(C)} \int_{e_{CD}} K(x) b^n(S, P) \nabla P^n \eta_e dx + \sum_{D \in N(C)} \int_{e_{CD}} K(x) d^n(P) \alpha^n(S) \nabla (S^n) \eta_e dx = 0 \end{aligned} \quad (1.11.15)$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \frac{|C|}{\Delta t} \Phi_C \rho_C^n S_C^{n+1} + \frac{|C|}{\Delta t} (\Phi_C \rho_C'^n S_C^n + \phi_C \rho_C'^n S_{o,m} + \phi_C \rho_{g,C}'^n) P_C^{n+1} = - \frac{|C|}{\Delta t} \Phi_C \rho_C^n S_C^n - \\ \frac{|C|}{\Delta t} (\Phi_C \rho_C'^n S_C^n - \phi_C \rho_C'^n S_{o,m} + \phi_C \rho_{g,C}'^n) P_C^n + \sum_{D \in N(C)} G_{C,e}^n - \sum_{D \in N(C)} G_{D,e}^n \end{aligned} \quad (1.11.16)$$

tel que  $G_{C,e}^n$  et  $G_{D,e}^n$  sont les flux numériques de convection et diffusion qui sont donnés par :

$$G_{C,e}^n = \int_e K b^n(S, P) \nabla P^n \eta_e dx \quad (1.11.17)$$

$$G_{D,e}^n = \int_e K d^n(P) \alpha^n(S) \nabla S^n \eta_e dx \quad (1.11.18)$$

et approximés par :

$$G_{C,e}^n \approx K_e b_e^n \nabla_e P^n |e| \quad (1.11.19)$$

$$G_{D,e}^n \approx K_e d_e^n \alpha_e^n \nabla_e S^n |e| \quad (1.11.20)$$

d'où

$$b_e^n = b_e^n(S_e^n, P_e^n) \quad (1.11.21)$$

et

$$d_e^n \alpha_e^n = d_e^n(P_e^n) \alpha(S_e^n) \quad (1.11.22)$$

où  $e$  est une arête du maillage qui limite la cellule  $C$ , les formules du gradients de pression sur  $e$  est donnée par les relations (1.11.10 – 1.11.11) et celle de la saturation est donnée par les relations (1.11.13 – 1.11.14).

**Définition 2.1 (Conservativité)** On dira que les flux approchés  $F_{i+\frac{1}{2}}^-$  et  $G_{i+\frac{1}{2}}^-$  sont conservatifs au sens des volumes finis, si on a une conservation locale :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^- + F_{i+\frac{1}{2}}^+ = 0$$

et

$$G_{i+\frac{1}{2}}^- + G_{i+\frac{1}{2}}^+ = 0$$

pour  $i = 1, \dots, N$

plus une conservation globale :

$$F_{N_x+\frac{1}{2}}^- + F_{\frac{1}{2}}^+ = [b(S)]_{x=0}^{x=1}$$

et

$$G_{N_x+\frac{1}{2}}^- + G_{\frac{1}{2}}^+ = [K(x)\alpha(S)]_{x=0}^{x=1}$$

où

$$[F(S)]_{S=0}^{S=1} = F(1) - F(0)$$

**Définition 2.2 (Consistance)** On dira que les flux approchés  $F_{i+\frac{1}{2}}$  et  $G_{i+\frac{1}{2}}$  sont consistants au sens des volumes finis, si on a :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^\pm(v, v) = \pm b(v) \quad \text{pour tout } v \in [0, 1]$$

et

$$G_{i+\frac{1}{2}}^\pm(S_{i+1}, S_i) = \pm K_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \alpha(S)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \theta(h) \quad \text{pour tout } S \text{ assez régulière}$$

où  $|\theta(h)| \leq Ch$ , ( $C \in \mathbb{R}^+$ , ne dépendant que de  $S$ ).

**Définition 2.3 (Volumes Finis)** On dira qu'un schéma numérique pour le problème (1 – 4) est de type volumes finis, si les flux numériques approchés sont conservatifs et consistants au sens des définitions 2.1 et 2.2.

## 1.12 Résultats numériques

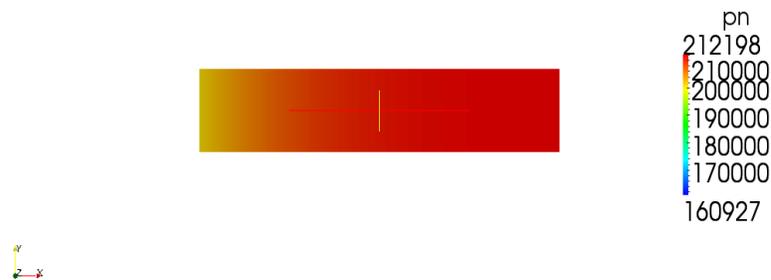
Le problème donné par les équations (1 – 4) n'est pas une simulation typique du système hydrocarbon, mais, il est désigné pour tester les capacités de résolution de la méthode numérique pour un certain type de problèmes.

Les tests numériques sont faits pour un reservoir homogène et isotrope. les données physiques en 2-D sont comme suit, un reservoir rectangulaire horizontal  $\Omega = ]0, 300[ \times$

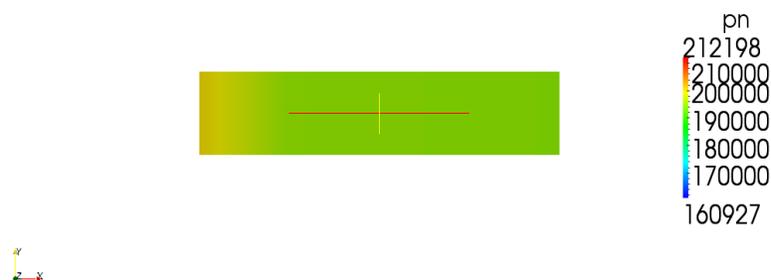
]0, 60[, discretisé avec un maillage formé de 3000 cellule, avec une perméabilité intrinsèque égale à 0.001 était rempli en deux fluides le gaz et l'huile, ses saturations résiduelles sont 0.02 et 0.03, respectivement. La distribution du fluide initial (l'huile) est uniforme dans tout la surface du reservoir, et a une pression initiale  $P_0 = 2000bar$ . La porosité du reservoir est  $\Phi = 0.02$ .

Les mobilités et la pression capillaire sont donnés par  $P_c =$ ,  $\lambda_o =$ ,  $\lambda_g =$  and  $\mu_w = 1$ , and  $\mu_o = 3$ ,

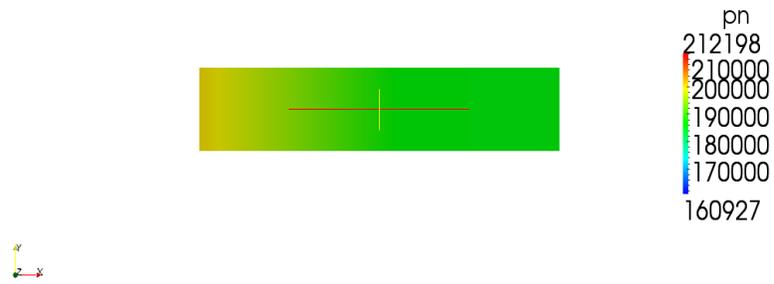
Le pas du temps est  $\Delta t = 10s$ .



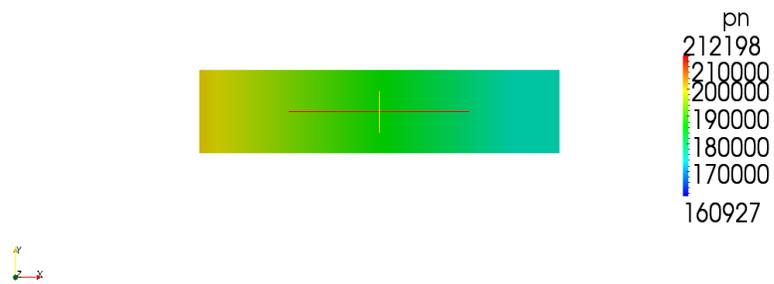
**Figure 1.12.1** – Pression du fluide mouillant en  $t = 0$



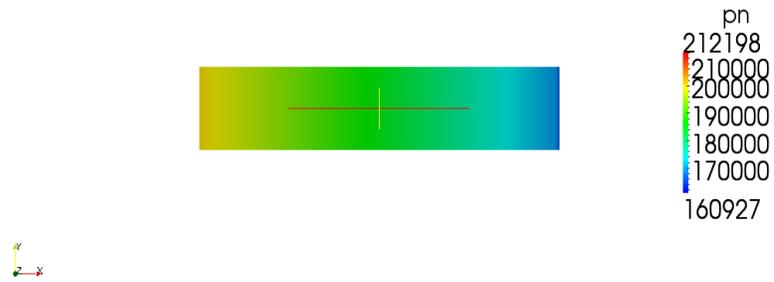
**Figure 1.12.2** – Pression du fluide non mouillant en  $t = 50$



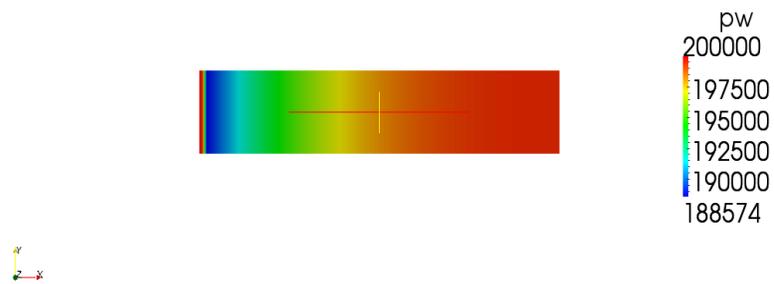
**Figure 1.12.3** – Pression du fluide non mouillant en  $t = 100$



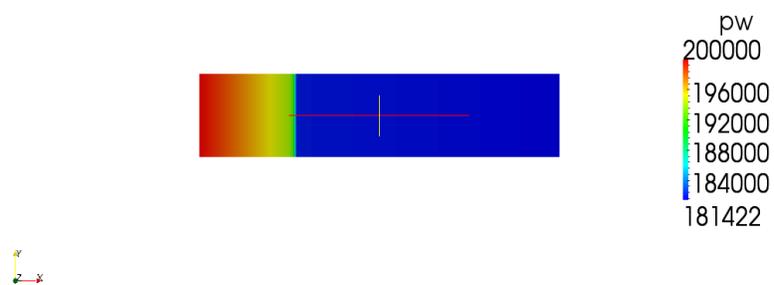
**Figure 1.12.4** – Pression du fluide non mouillant en  $t = 150$



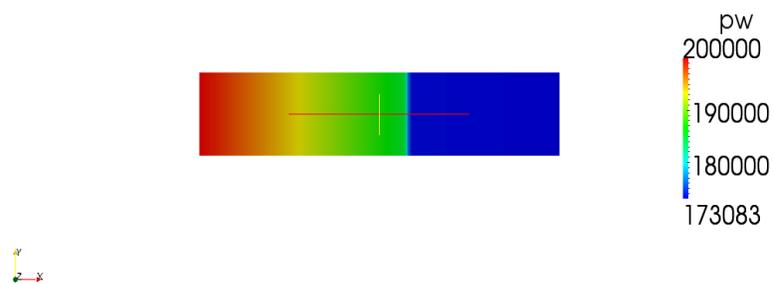
**Figure 1.12.5** – Pression du fluide non mouillant en  $t = 175$



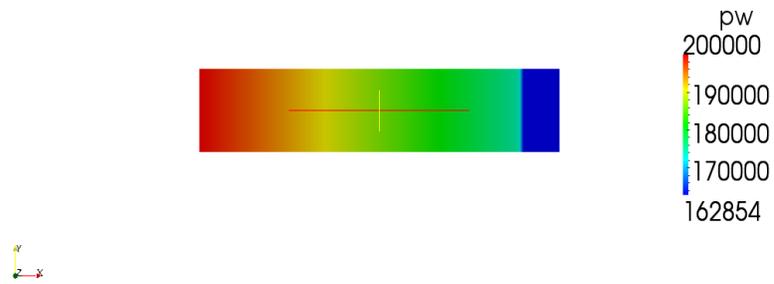
**Figure 1.12.6** – Pression du fluide mouillant en  $t = 0$



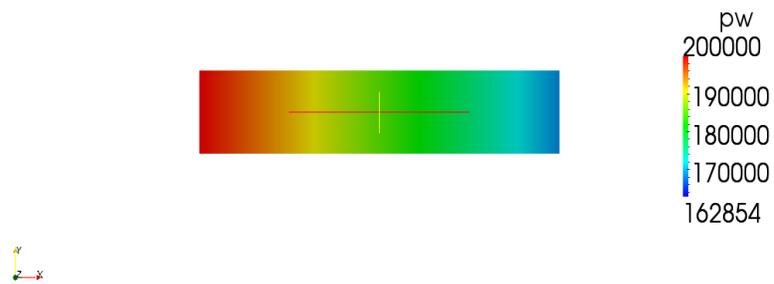
**Figure 1.12.7** – Pression du fluide mouillant en  $t = 50$



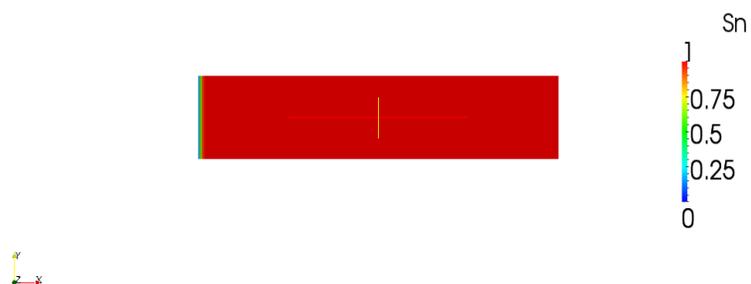
**Figure 1.12.8** – Pression du fluide mouillant en  $t = 100$



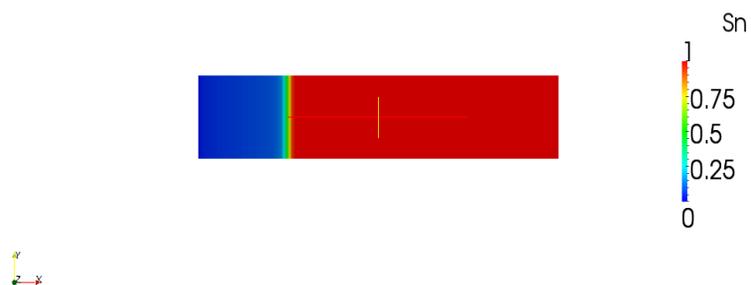
**Figure 1.12.9** – Pression du fluide mouillant en  $t = 150$



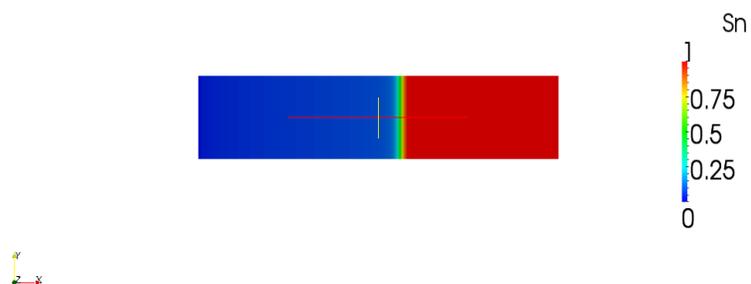
**Figure 1.12.10** – Pression du fluide mouillant en  $t = 175$



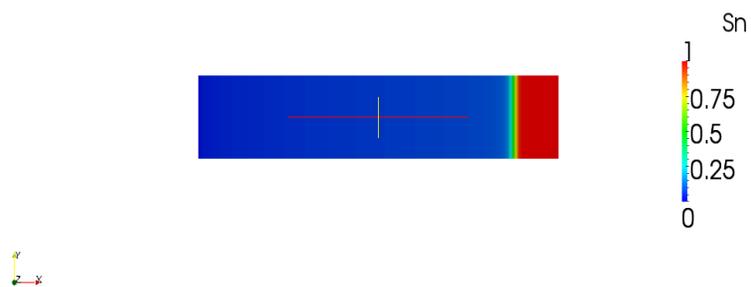
**Figure 1.12.11** – Saturation du fluide non mouillant en  $t = 0$



**Figure 1.12.12** – Saturation du fluide non mouillant en  $t = 50$



**Figure 1.12.13** – Saturation du fluide non mouillant en  $t = 100$



**Figure 1.12.14** – Saturation du fluide non mouillant en  $t = 150$

## 1.13 Conclusion

Le but de ce chapitre était de développer des schémas volumes finis pour une équation non linéaire multi-dimensionnelle de convection-diffusion dégénérée. Nous avons traité et analysé un schémas explicite. Après avoir analysé ce schémas on a présenté quelques tests numériques. Ces tests sont pour tester les capacités de résolution de la méthode numérique pour ce type de problèmes.

# Conclusion Générale

Notre intérêt dans ce travail portait sur le déplacement du pétrole par un gaz compressible dans un réservoir provoqué par l'injection du gaz par un coin du réservoir (puits d'injection) pour récupérer du pétrole par un autre coin de ce réservoir appelé puits de production.

Le problème obtenu est compliqué car il contient six inconnues à rechercher, c'est un des raisons pour les quels on a introduit la notion de Pression globale et Saturation réduite. Ces nouvelles inconnues diminuent le nombre des inconnues à deux.

L'objet principal de ce travail était la résolution par la méthode de volumes finis du système couplé obtenu sur des maillages non structurés. On a développé et analysé un schéma numérique de type volumes finis, pour un problème de convection-diffusion dégénéré parabolique non linéaire, issu de la modélisation des écoulements diphasiques de fluides en milieu poreux. On a obtenu un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible du problème reformulé en pression globale et saturation réduite.

On a traité et analysé un schéma de volumes finis explicite du problème avec les nouvelles inconnues. Comme le maillage est non structuré, on a utilisé la méthode dite des "cellules diamants" pour l'approximation du gradient.

Des tests numériques sont réalisés à un code numérique qui prend en compte le couplage entre une équation parabolique non linéaire dégénérée et une famille d'équations elliptiques paramétrées par le temps. Ceci montre l'efficacité du schéma numérique proposé ici, qui présente une méthode de volumes finis pour l'équation parabolique en saturation et l'équation elliptique en pression. Les résultats obtenus confirment l'efficacité du schéma de volumes finis étudié. Nous constatons aussi qu'aucune instabilité numérique n'a été remarquée lors des expérimentations et ce malgré qu'on a pris un schéma explicite pour résoudre un problème couplé assez complexe.

# Perspectives

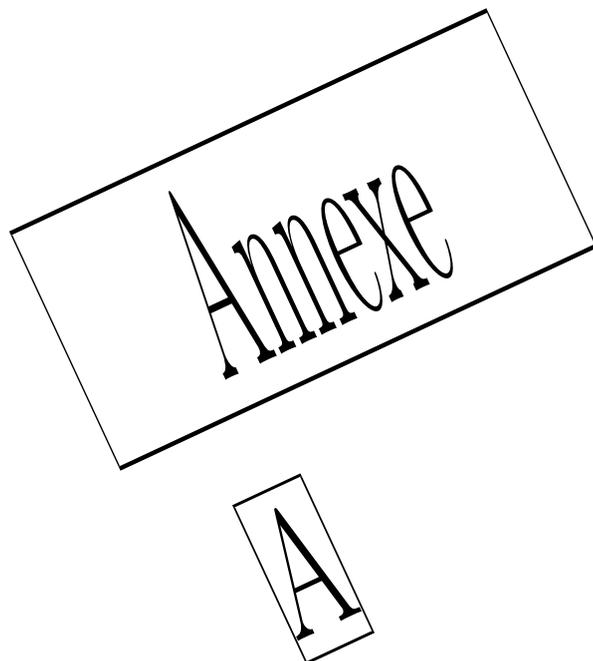
L'analyse numériques et mathématique du problème fortement couplé est souhaitable.

Il serait fructueux d'approfondir le couplage des systèmes obtenus et étudié dans ce travail avec des modèles réels comme le couplage des équations de Darcy et Stokes/Navier Stokes qui a été fait par C.Bernardi et F.Z. Nouri, (Oxford Journals IJMAN 2008).

Les simulations numériques en 3-D, sont d'une grande importance dans l'industrie pétrolière, et mérite d'être abordées.

Il serait aussi utile d'étudier les estimations d'erreur pour ce schéma de volumes finis.

Afin d'améliorer les résultats numériques, une application de méthodes de hautes précisions comme les éléments spectraux et des techniques de couplages de méthodes dans les milieux hétérogènes et anisotropes est envisageable surtout que les phénomènes réels nécessitent de considérer des paramètres physiques et des géométries assez complexes.



On rappelle brièvement les grands principes de la méthode des volumes finis. on restreint à son application aux systèmes de Lois de Conservation hyperboliques. Ce rappel est indispensable, ne serait-ce que pour poser les notations.

Soit à résoudre, dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) le système de lois de conservation

$$w_t + \sum_{i=0}^d f^i(w)_{x_i} = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega \quad (0.0.1)$$

où l'inconnue  $w(x, t) \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur, appelé vecteur des variables conservatives, qui dépend du temps  $t$  et de l'espace  $x = (x_1, \dots, x_d)$ . Le flux  $f = (f_1, \dots, f_d)$  est une application de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^d$ . La notation  $w_{x_i}$  signifie  $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ . Il est parfois commode, selon le contexte, de poser  $x_0 = t$ . En définissant  $f^0(w) = w$ , le flux devient alors une application de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ , et le système de lois de conservation peut s'écrire sous la forme d'une divergence spatio-temporelle

$$\sum_{i=0}^d f^i(w)_{x_i} = 0, \quad x \in [0, T] \times \Omega \quad (0.0.2)$$

Au systµeme (1), il faut adjoindre une condition initiale

$$w(0, x) = w_{ini}(x), \quad x \in \Omega \quad (0.0.3)$$

et des conditions au bord du domaine  $\Omega$

$$w(t, x) = w_{bord}(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega \quad (0.0.4)$$

On ne détail pas le sens de ces conditions au bord. En pratique, seule une partie du vecteur  $w_{bord}$  est utilisée pour le calcul de la solution.

Voir µa ce sujet les travaux de *Dubois*[38], [37] pour une théorie générale, et [11] pour un exemple d'application.

Pour des problµemes issus de la physique, le systµeme (1) a la propriété d'être de plus hyperbolique pour un ensemble de variables conservatives admissibles.

**Définition 1** Le systµeme (1) est dit hyperbolique sur  $W_{ad} \subset \mathbb{R}^m$ , si et seulement si pour tout  $w \in W_{ad}$  et pour tout vecteur  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ , la matrice  $m \times m$

$$A(w, \nu) = \sum_{i=0}^d f_w^i \nu_i \quad (0.0.5)$$

a des valeurs propres réelles.

Il est bien connu que (1), (2), (3) admet en général une infinité de solutions faibles. La sélection d'une seule solution peut se faire au moyen de divers critµeres, dont certains sont détaillés plus bas.

Afin d'approcher les solutions du problµeme (1), (2), (3), la méthode des volumes finis consiste dans un premier temps à découper le domaine de calcul  $\Omega$  en des ouverts  $C_k$ ,  $k \in I = \{1, \dots, N\}$ , appelés cellules ou volumes finis, tels que

$$\bigcup_{k \in I} \bar{C}_k = \bar{\Omega}$$

$$\forall (k, l) \in I \times I, k \neq l \Rightarrow C_k \cap C_l = \emptyset$$

Le domaine temporel est découpé de même en une suite d'intervalles  $]t_n, t_{n+1}[$  tels que  $t_0 = 0, t_p = T, t_n < t_{n+1}$ . Le pas de temps est noté  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ . Les solutions  $w$  de (1) sont approchées dans chaque cellule  $C_k$  et à chaque instant  $t_n$  par un vecteur constant

$$w_k^n \simeq w(t_n, x) \quad (0.0.6)$$

Ces inconnues satisfont la relation de récurrence

$$\int_{C_k} w_k^{n+1} = \int_{C_k} w_k^n - \tau_n \int_{\partial C_k} f(w_k^n, w_l^n, \nu_{kl}) = 0 \quad (0.0.7)$$

Dans le second membre de (6),  $f(u, v, \nu)$  est la fonction flux numérique. Ce flux numérique est propre au schéma de volumes finis considéré. L'indice  $l$  est relatif aux cellules  $C_l$  voisines de la cellule  $C_k$  le long du bord  $\partial C_k$ . Dans l'intégration sur  $\partial C_k$ , l'indice  $l$  est donc une fonction constante par morceaux. Si le bord de la cellule  $C_k$  a une intersection avec  $\partial\Omega$ , la condition au bord (3) sert à calculer le vecteur frontière  $w_l^n$ . La condition initiale (2) permet d'initialiser le calcul

$$\int_{C_k} w_k^0 = \int_{C_k} w_{ini} \quad (0.0.8)$$

Le vecteur  $\nu_{kl}$  est le vecteur normal unitaire sur  $\partial C_k$  orienté de  $C_k$  vers  $C_l$ .

Dans les cas les plus simples, le flux numérique doit vérifier les propriétés

1. Propriété de conservation :  $\forall (w_L, w_R, \nu), \quad f(w_L, w_R, \nu) = -f(w_L, w_R, -\nu)$
2. Propriété de consistance :  $\forall (w, \nu), \quad f(w, w, \nu) = f(w) \cdot \nu$

Dans les années 50, Godunov [46] a proposé un schéma de volumes finis dont le flux numérique est calculé à partir de solutions exactes du problème de Riemann. Le calcul du flux  $f(w_L, w_R, \nu)$  est basé sur le calcul d'une solution exacte constante dans les directions orthogonales à  $\nu$ . Le problème de Riemann dans la direction  $\nu$  consiste à trouver une fonction de deux variables  $(t, \xi) \rightarrow v(t, \xi) \in \mathbb{R}^m$  solution de

$$v_t + \frac{\partial}{\partial \xi} f(v) \cdot \nu = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (0.0.9)$$

$$v(0, \xi) = \begin{cases} w_L, & \text{si } \xi < 0 \\ w_R, & \text{si } \xi > 0 \end{cases}$$

Dans ce système, les variations de la solution dans la direction tangentielle à l'arête sont donc négligées. Il y a en général une infinité de solutions faibles autosimilaires (qui ne dépend que du rapport  $\frac{\xi}{t}$  au problème (8)). Notons

$$R\left(\frac{\xi}{t}, w_L, w_R\right) = v(t, \xi) \quad (0.0.10)$$

l'une d'entre elle, sélectionnée au moyen d'un critère d'entropie par exemple. Le flux de Godunov est alors donné par

$$f(w_L, w_R, \nu) = f\left(R(0^+ \text{ ou } -, w_L, w_R)\right) \cdot \nu \quad (0.0.11)$$

Dans le cas de la dimension  $d = 1$ , le schéma de Godunov admet une interprétation intéressante. Notons  $(x_k), k \in \mathbb{Z}$ , les points d'une subdivision de  $\mathbb{R}$ . Posons  $x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$ . La cellule  $C_k$ , centrée sur  $x_k$  est l'intervalle  $\left]x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}}\right[$  de longueur  $h_k = x_{k+\frac{1}{2}} - x_{k-\frac{1}{2}}$ . Le schéma de Godunov s'écrit dans ce cas

$$w_k^{n+1} = w_k^n - \frac{\tau_n}{h_k} \left( f_n^{k+\frac{1}{2}} - f_n^{k-\frac{1}{2}} \right) \quad (0.0.12)$$

avec

$$f_n^{k+\frac{1}{2}} = f\left(R(0, w_k, w_{k+1})\right) \quad (0.0.13)$$

Si l'on considère la fonction constante par morceaux

$$v(x) = w_k^n, \quad x \in C_k \quad (0.0.14)$$

il est possible de résoudre exactement le problème

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(0, x) &= v(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (0.0.15)$$

La solution est la superposition de solutions de problèmes de Riemann aux interfaces  $x_{k+\frac{1}{2}}$  des cellules. Cette résolution est plus simple tant que les solutions des problèmes de Riemann n'interagissent pas. Classiquement, on impose que les perturbations issues des interfaces n'atteignent pas les milieux des cellules. Ceci conduit à une condition de type CFL sur le pas de temps  $\tau_n$

$$\tau_n \prec \max_k \frac{h_k}{2\lambda} \quad (0.0.16)$$

où  $c$  est la vitesse d'onde maximale dans tous les problèmes de Riemann.

La solution numérique à l'instant  $t_{n+1}$  peut alors s'interpréter comme la moyenne dans chaque cellule de la solution exacte  $u$  à l'instant  $\tau_n$

$$w_k^{n+1} = \frac{1}{h_k} \int_{C_k} u(\tau_n, x) dx \quad (0.0.17)$$

C'est pour cette raison que le schéma de Godunov est souvent appelé le "meilleur" schéma possible pour résoudre des systèmes de lois de conservation en dimension un d'espace [46]. La seule erreur est commise, à chaque pas de temps lors de la projection  $L^2$  de la solution exacte sur l'espace des fonctions constantes dans chaque cellule.

En dimension supérieure d'espace, cette propriété n'est plus vraie. La généralisation naturelle serait de résoudre un problème de Riemann à chaque sommet du maillage, avec une donnée initiale constante dans des secteurs angulaires d'origine ce sommet. De très nombreux auteurs se sont penchés sur la résolution du problème de Riemann multidimensionnel. Il se trouve que la résolution est beaucoup plus complexe qu'en une dimension. L'application à un schéma de volumes finis est donc hasardeuse. On pourra trouver un aperçu des difficultés dans les travaux d'Abgrall [4], [5] ou de Lax et Liu [69].

La résolution du problème de Riemann peut être délicate et coûteuse sur le plan informatique, en terme de programmation et de temps de calcul. De nombreux auteurs, à travers une vaste littérature, ont donc proposé d'autres flux numériques ou des méthodes de résolution approchées du problème de Riemann. On renvoie par exemple aux livres de Raviart et Godlewski [45], de Toro [90] et aux références incluses. Il est aussi intéressant de donner quelques jalons : la résolution locale du problème de Riemann est abordée dans un cadre général par Lax dans [68]. Un des schémas les plus utilisés dans les codes de volumes finis industriels est le schéma de Roe [83]. Il admet de nombreuses variantes comme le schéma VFRoe [42]. Dans un article de synthèse très complet, Harten, Lax et van Leer [49] formalisent la notion de schéma de type Godunov, cadre dans lequel nous sommes placés, font le lien entre les notions de solveur de Riemann approché, viscosité numérique et schéma décentré. Ils introduisent aussi un nouveau schéma, le schéma HLL (pour Harten, Lax, van Leer) très général, robuste et simple à programmer. Dans le cadre de la dynamique des fluides compressibles, il est impossible de citer tous les schémas de vo-

lumes finis développés par divers auteurs : donnons cependant pour mémoire le schéma de Steger et Warming [88], les schémas cinétiques de Perthame [80] particulièrement simples et robustes. Plus récemment, les schémas de type AUSM, ont de bonnes propriétés [71].

---

# Bibliographie

- [1] Afif M. and Amaziane B., On convergence of finite volume schemes for one-dimensional two-phase flow in porous media, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 145 (2002), pp. 31–48
- [2] Amaziane B., Application des techniques d'homogénéisation aux écoulements diphasiques incompressibles en milieu poreux, Thèse de Doctorat, Univ. Claude Bernard Lyon I, (1988).
- [3] Antontsev S.N., Kazhikhov A.V. and Monakhov V.N., *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids* (North-Holland, Amsterdam, 1990).
- [4] Antontsev S.N. and Monakhov V.N., Three-dimensional problems of time-dependant two-phase filtration in non homogeneous anisotropic porous media, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 243 no3, *Soviet Math. Dock.*, vol. 19 (1978) 1354-1358.
- [5] Arbogast T., The existence of weak solutions to single porosity and simple dual porosity models of two-phase incompressible flow, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. 19 (1992) 1009-1031.
- [6] Arbogast T., Wheeler M.F. and Zhang N.Y., A nonlinear mixed finite element method for a degenerate parabolic equation arising in flow in porous media, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 33 (1996) 1669-1687.
- [7] Bear J. and Bachmat Y., *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media.* (Kluwer Academic Publishers, London, 1991).
- [8] Bendali A., Raynaud N., and Thomas J-M., New Decomposition of Shape Functions Spaces of Mixed Finite-Element Methods, *Appl. Math. Lett.*, vol. 9 (1996) 33-38.

- [9] Bourgeat A. and Hidani A., A result of existence for a model of two-phase flow in a porous medium made of different rock type, *Appl. Anal.*, vol. 56 (1995) 381-399.
- [10] F. Boyer, F. Hubert, Finite volume method for 2D linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities *Journal of Numerical Analysis*, (2010).
- [11] Brezzi F. and Fortin M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [12] Champier S., Gallouet T. and Herbin R., Convergence of an upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh, *Numer. Math.*, vol. 66 (1993) 139-157.
- [13] Chavent G., A new formulation of diphasic incompressible flow in porous media, in : A. Dold and B. Eckman, eds, *Application of Methods of functional Analysis to the problems in Mechanics*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 503 (Springer-Verlag, 1976) 258-270.
- [14] Chavent G., Jaffré J., *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*. (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- [15] Chavent G., Jaffré J. and Roberts J.E., Mixed-hybrid finite elements and cell-centred finite volumes for two-phase flow in porous media, in : A. P. Bourgeat et al., eds., *Mathematical Modeling of Flow Through Porous Media* (World Scientific, London, 1995) 100-114.
- [16] Chavent G., Salzano G., A finite-element method for the 1-D water flooding problem with Gravit., *J. of Computational Physics*, vol. 45 (1982) 307-344.
- [17] Z. Chen, *Reservoir Simulation, Mathematical Techniques in oil Recovery*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2007.
- [18] Z. Chen, *Finite element methods for the black oil model in petroleum reservoirs*, I.M.A. Preprint Series, Juillet 1994.
- [19] Chen Z. and Ewing R.E., Fully-discrete finite element analysis of multiphase flow in groundwater hydrology, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 34 (1997) 2228-2253.

- 
- [20] Courdière Y., Vila J.-P. and Villedieu P., Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem, *Math. Mod. and Num. Anal., M2AN*, vol. 33 (1999) 493-516.
- [21] Dawson C., Godunov-mixed methods for advection-diffusion equations in multidimensions, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 30 (1993) 1315-1332.
- [22] Dawson C., Wheeler M.F. and Woodward C.S., A two-grid finite difference scheme for nonlinear
- [23] D. W. Peaceman, *Fundamentals of numerical resevoir simulation*, Elsevier Scientific Publishing Company Amsterdam - Oxford - New York 1977
- [24] G. Gagneux, A-M. Lefevre, M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles variationnels en simulation pétrolière, Le cas du modèle black-oil pseudo-compositionnel standart isotherme*”, *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid*, 1989.
- [25] S.Gasmi, F. Z. Nouri, A Study of a Bi-Phasic Flow Problem in Porous Media, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, no. 42, 2055 - 2064, 2013
- [26] Ghilani M., An error estimate for the approximate solution of a porous media diphasic flow equation, in : J.M. Crolet et al., eds., *Problems of Flow and Transport in Porous Media*, (Kluwer Academic, Netherlands, 1998) 25-30.
- [27] Joly P. and Eymard R., Preconditionned biconjugate gradient methods for numerical reservoir simulation, *Journal of Computational Physics*, vol. 91 (1990).
- [28] Joly P. and Vidrascu M., *Quelques méthodes classiques de résolution de systèmes linéaires, exemple d'utilisation dans la bibliothèque MODULEF*, Collection Didactique INRIA (Paris, 1995).
- [29] Karlsen K.H. and Risebro N.H., Convergence of finite difference schemes for viscous and inviscid conservation laws with rough coefficients, *Math. Mod. and Num. Anal., M2AN*, vol. 35 (2001) 239-269.
- [30] Kroner D., *Numerical Schemes for Conservation Laws* (Wiley & Teubner, New York, 1997).

- [31] Kruzkov S.N. and Sukorjanski S.M., Boundary value problems for systems of equations of two phase porous flow type : statement of the problem, equations of solvability, justification of approximative methods, *Mat. Sbornik*, vol. 33 (1977) 62-80.
- [32] Lazarov R.D., Mishev I.D. and Vassilevski P.S., Finite volume methods with local refinement for convection-diffusion problems, *Computing*, vol. 53 (1994) 33-57.
- [33] Lazarov R.D., Mishev I.D. and Vassilevski P.S., Finite volume methods for convection-diffusion problems, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 33 (1996) 31-55.
- [34] Marle C.M., *Cours de production, Tome IV. Les écoulements diphasiques en milieu poreux*, (Eds. Technip, Paris, 1972).
- [35] Marle C.M., *Multiphase Flow in Porous Media*, (Editions Technip, Paris, 1981).
- [36] Michev I.D., *Finite volume element methods for nonsymmetric problems*, Ph.D. Dissertation, Texas A&M Univ., (1996).
- [37] Morton K.W., *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, (Chapman & Hall, London, 1996).
- [38] Morton K.W., On the analysis of finite volume methods for evolutionary problems, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 35 (1998) 2195-2222.