

Table des matières

1	Rappels	8
1.1	Notions préliminaires	8
1.1.1	Définitions de quelques espaces fonctionnels	9
1.1.2	Formule de Green	12
1.1.3	Variante de la formule de Green	13
1.1.4	Inégalité de Cauchy Schwarz	13
1.1.5	Inégalité de Poincaré	14
1.1.6	Théorème de Lax-Milgram	14
1.1.7	Base orthonormée d'un espace de Hilbert	15
1.1.8	Théorème des traces	15
1.1.9	Matrice symétrique définie positive	16
2	Le problème de bi-laplacien	17
2.1	Position du problème	18
2.2	Formulations variationnelles du PV	18
2.2.1	Première formulation variationnelle $PV1$	18
2.2.2	Deuxième formulation variationnelle $PV2$	23
2.3	Partie numérique	25
2.3.1	Discrétisation du problème $PV1$ par MDF	25
2.3.2	Discrétisation du problème $PV2$ par MEF	37

3	Problème intégro-différentiel	45
3.1	Problème intégro-différentiel en D1	45
3.1.1	Formulation variationnelle du problème	46
3.1.2	Analogie discret du problème PV	48
3.1.3	Formulation variationnelle approchée	49
3.1.4	Méthode des différences finies	56
3.2	Problème intégro-différentiel en D2	58
3.2.1	Formulation du problème	58
3.2.2	Formulation variationnelle du problème	59
3.2.3	Approximaton par élément finis P_1	60
3.2.4	Formulation variationnelle approchée	61
3.2.5	Méthode des différences finies	65
3.2.6	Méthode itérative de Newton pour la résolution d'un système non linéaire	66
4	Annexes	74
4.1	Problème Bilaplacien par la méthode des différences finis	74
4.2	Problème Bilaplacien par la méthode des éléments finis	86
4.3	Problème intégro-différentiel par la méthode des éléments finis en 1D	88

Remerciement

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur monsieur A. Laouar, maître de conférences à l'Université d'Annaba de m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont également à Mr A. Makhlouf, Professeur à l'Université d'Annaba qui a bien voulu présider le jury. De même, je remercie vivement Mrs A. Djoudi Professeur à l'Université d'Annaba et A. Bradji maître de conférences à l'Université d'Annaba d'avoir accepté d'être membre de jury.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et toutes celles qui j'ai connu au département de mathématique qui ont rendu mon séjour au département agréable.

Dédicaces

Je dédie ce travail de magister à :

Mes chers parents qui m'ont beaucoup aidé durant mes longues années d'étude ;

Toute ma famille grands et petits.

Tous mes amis, en particulier : Ahcene

Tous les enseignants qui m'ont pris en charge du primaire jusqu'à l'université, très particulièrement mon encadreur A.Laouar.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude mathématique et numérique du problème de bilaplacian, et d'un problème intégro-différentiel non linéaire.

Concernant le problème de bilaplacian, nous proposons deux types de formulations variationnelles du problème continu. Pour la discrétisation, nous utilisons soit la méthode des éléments finis, soit la méthode des différences finies selon la situation favorable.

Pour le problème intégro-différentiel non linéaire D1 et D2, nous établissons la formulation variationnelle du problème et nous utilisons la méthode des éléments finis pour sa discrétisation. Nous proposons la méthode itérative de Newton pour la résolution numérique du système d'équations non linéaire obtenu. Des simulations numériques sont présentées à la fin de chaque chapitre pour valider l'aspect théorique.

Mots Clés : Bilaplacian, Différences finies, Eléments finis, Formulation variationnelle, Intégro-différentiel non linéaire.

Abstract

This memory is devoted to mathematical and numerical study of the Bi-Laplacian problem and nonlinear differential integration problem.

For the Bi-laplacian, we propose two variational formulations of the problem. To discretize the problem, we use the finite element method or the finite differences following a favorite situation.

For the nonlinear differential integration problem, we establish the variational formulation of the problem and we discretize it by the finite element method. To solve numerically the problem, we propose the Newton iterative method. Numerical simulations are presented to validate the theoretical study..

Introduction

Un grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles. Nous entendons par ces modèles, un ensemble d'équations (ou d'inéquations) associées aux conditions aux limites sur la frontière du domaine spatial, où le phénomène est étudié. La plupart de ces phénomènes sont non linéaires, les cas parmi les plus célèbres étant l'équation de Boltzmann en mécanique statistique, les équations de Navier Stokes en mécanique des fluides (équations qui constituent d'ailleurs une approximation de l'équation de Boltzmann), les équations de Von Karman des plaques planes en grands déplacements (cf. [3],[4],[6],[10],[13],[14],[17]), etc. . . Tout cela explique pourquoi, dans des sujets très divers, la modélisation par les équations aux dérivées partielles, suivie de l'analyse théorique, puis numérique, suivie à son tour par la simulation numérique, est devenue une démarche de base. Cette modélisation des phénomènes que l'on rencontre surtout dans les sciences de l'ingénieur, conduit, éventuellement après une étape de discrétisation par l'une des méthodes : méthode des différences finies, méthode spectrale, méthodes volumes finis et méthode des éléments finis (cf. [7],[9],[10],[11],[18],[19], à la résolution de systèmes d'équations en dimension finie.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude mathématique et numérique, d'une part, au problème de bilaplacien avec conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, et d'autre part, à une équation intégro-différentielle non linéaire aux conditions aux limites de Dirichlet en D1 et D2.

Concernant le premier problème, il modélise le déplacement verticale u d'une plaque élastique carrée Ω , parfaitement encadrée sur son bord est soumise à une densité des efforts perpendiculaires à la plaque, de la force f (cf. [2], [3], [4], [7], [10], [11]). Nous proposons, ici, deux types de formulations variationnelles du problème qui sont bien adaptées aux méthodes d'approximation. Pour la discrétisation du problème, les méthodes des différences finies ou éléments finis sont utilisées pour l'approximation du problème.

Pour ce qui concerne le deuxième problème, il s'agit de mettre en oeuvre la méthode

des éléments finis dans le cas d'une équation intégral-différentielle non linéaire du second ordre en dimension un et deux (cf. [9], [10], [11], [13]).

Ce mémoire comporte trois chapitres et une introduction générale. Le chapitre 1 est consacré aux quelques définitions d'espaces fonctionnels et de certains théorèmes importants. Le chapitre 2 traite l'étude mathématique et numérique du problème de bilaplacien, et propose deux types de formulations variationnelles du problème continu ainsi que leurs analogues discrets. Le chapitre 3 étudie une équation intégral-différentielle non linéaire aux conditions aux limites de Dirichlet en D1 et D2 et établit la formulation variationnelle du problème ainsi que son analogue discret. Pour la résolution numérique, la méthode itérative de Newton est proposée.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Notions préliminaires

On rappelle quelques définitions d'espaces fonctionnels et de certains théorèmes importants (cf. [1], [4], [9], [13]) qui seront utiles pour le développement ultérieur de notre travail.

Dans un espace vectoriel V , un produit scalaire $a(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, c'est-à-dire une application de $V \times V$ dans \mathbb{R} satisfaisant :

- Symétrie : $a(x, y) = a(y, x)$,
- Bilinéarité : $a(.,.)$ est linéaire continue par rapport à la deuxième argument par symétrie,
- Définie positive : $a(x, x) \geq 0$ et $a(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definition 1 *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est dite V -elliptique s'il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que*

$$\forall x \in V, a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2. \tag{1.1}$$

1.1.1 Définitions de quelques espaces fonctionnels

Definition 2 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On définit

$$C(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est continue}\}$$

$$C(\overline{\Omega}) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est continue et se prolonge continûment à } \overline{\Omega} \}$$

Proposition 3 Sur $C(\Omega)$, l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_C & : C(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \end{aligned}$$

est une norme.

Definition 4 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^k sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues

Les espaces L^p

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de frontière $\partial\Omega$ régulière et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et telle que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (1.2)$$

où dx est la mesure de Lebesgue.

La norme associée à $L^p(\Omega)$ est :

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad (1.3)$$

- Si $p = 1$, l'espace $L^1(\Omega)$ s'écrit :

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et telle que } \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty \right\} \quad (1.4)$$

- Si $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ s'écrit :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et telle que } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (1.5)$$

est muni d'un produit scalaire

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} f \cdot g dx, \quad (1.6)$$

la norme associée est :

$$\|f\|_{L^2} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \quad (1.7)$$

- Si $p = \infty$, on définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et telle que } \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)| < \infty \right\} \quad (1.8)$$

où

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)| = \inf \{c; |f(x)| < c \text{ p.p sur } \Omega\} \quad (1.9)$$

La norme associée à $L^\infty(\Omega)$ est :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)| \quad (1.10)$$

Theorem 5 (Fubini) Soit f une fonction intégrable sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$

et à valeurs réelles, on a :

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Ce théorème permet de calculer l'intégrale double par deux intégrales simples successives.

Espace des fonctions tests $D(\Omega)$

$$D(\Omega) = \{v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, v \in C^\infty \text{ et } \text{supp } v \subset \Omega\} \quad (1.11)$$

$\text{supp}(v)$ étant le plus petit ensemble fermé qui contient l'ensemble des points où v non nulle.

Proposition 6 *L'espace $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p, \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ avec } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\} \quad (1.12)$$

On pose

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \quad (1.13)$$

où

$$H^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), (i = \overline{1, n}) \right\} \quad (1.14)$$

et

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (1.15)$$

Soit $v \in W^{1,p}(\Omega)$, cet espace est muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^p}. \quad (1.16)$$

ou bien la norme équivalente

$$\left(\|v\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.17)$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} \quad (1.18)$$

la norme associée à $H^1(\Omega)$ est

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

$\forall m \in \mathbb{N}$, on a :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \frac{\partial^k v}{\partial x_{i,1} \dots \partial x_{i,k}} \in L^2(\Omega), \forall k = \overline{0, m} \right\} \quad (1.20)$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$H_0^2(\Omega) = H^2(\Omega) \cap \left\{ v/v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \quad (1.21)$$

$$H^4(\Omega) = \left\{ v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \frac{\partial^k v}{\partial x_{i,1} \dots \partial x_{i,k}} \in L^2(\Omega), \forall k = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}$$

1.1.2 Formule de Green

Theorem 7 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n dont le bord $\partial\Omega = \Gamma$ est continu, admettant tout au plus des discontinuités de première espèce pour le vecteur tangent (*i.e.*; typiquement des point anguleux). Si u et v sont deux fonctions des variables (x_1, \dots, x_n) , définies de Ω à valeurs réelles, appartenant à $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} uv \gamma_i d\Gamma. \quad (1.22)$$

Où γ_i désigne la composante selon la i -ième coordonnée x_i du vecteur normal \vec{v} , extérieur à l'ouvert Ω .

Remark 1 On remarque que la formule de Green (1.22) n'est rien d'autre que la

généralisation de la formule d'intégration par partie en dimension un.

1.1.3 Variante de la formule de Green

Il est possible d'appliquer la formule de Green pour des fonctions u possédant une régularité plus faible que celle que nous avons mentionnée ci-dessus. Si u et $v \in H^1(\Omega)$, on peut énoncer le théorème suivant :

Theorem 8 (cf. [10]) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n dont le bord $\partial\Omega = \Gamma$ est continu, admettant tout au plus des discontinuités de premières espèces pour le vecteur tangent (i, e ; typiquement des point anguleux). Si u et v sont deux fonctions des variables (x_1, \dots, x_n) , définies de Ω à valeurs réelles, tels que

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \text{ et } v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

On a alors

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma, \quad (2) \quad (1.23)$$

Où n désigne le vecteur normal extérieur à l'ouvert Ω et $\frac{\partial u}{\partial n}$ la projection du vecteur gradient dans la direction de la normale n .

1.1.4 Inégalité de Cauchy Schwarz

Theorem 9 (cf. [10]) Soient u et v deux fonctions appartenant à $L^2(\Omega)$, on a :

$$\left| \int_{\Omega} u \cdot v d\Omega \right| \leq \left[\int_{\Omega} u^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{\Omega} v^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.24)$$

1.1.5 Inégalité de Poincaré

Theorem 10 Soit u une fonction appartenant à l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega \leq C(\Omega) \cdot \int_{\Omega} \left| \vec{\nabla} u \right|^2 d\Omega. \quad (1.25)$$

1.1.6 Théorème de Lax-Milgram

Theorem 11 Soient V un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire sur $V \times V$ et L une forme linéaire définie sur V vérifiant les propriétés suivantes :

- $a(.,.)$ est continue : $\exists C_1 > 0$ telle que

$$|a(.,.)| \leq C_1 \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

- $a(.,.)$ est V -elliptique : $\exists C_2 > 0$

$$a(v, v) \geq C_2 \cdot \|v\|^2, \quad \forall v \in V,$$

- $L(.)$ est continue : $\exists C_3 > 0$ telle que

$$|L(v)| \leq C_3 \|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Alors, il existe une seule solution u appartenant à V solution du problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (1.26)$$

Theorem 12 (Représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert, alors pour toute forme linéaire continue x^* sur H , il existe $x \in H$ tel que

$$x^*(y) = \langle y, x \rangle, \quad \forall y \in H$$

L'application $x \rightarrow x^*$ de H dans H' est alors une isométrie surjective de H dans H' .

1.1.7 Base orthonormée d'un espace de Hilbert

Definition 13 (cf.[7]) Soit $\{e_j\}_{j \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace de Hilbert H

1– On dit que cette famille est orthonormée si

$$\forall i, j \in I, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

2– On dit que cette famille est totale si

$$\overline{\{e_j\}_{j \in I}} = H$$

3– Une famille $(e_j)_{j \in I}$ de vecteurs de H totale et orthonormée s'appelle une base hilbertienne de H .

Proposition 14 Soit $(e_j)_{j \in I}$ une famille orthonormée d'un espace de Hilbert H . Alors

$$\forall x \in H, \sum_{j \in I} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Proposition 15 Soit $(e_j)_{j \in I}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert H . Alors on a :

$$\forall x \in H, x = \sum_{j \in I} \langle x, e_j \rangle e_j$$

Theorem 16 Soit $(e_j)_{j \in I}$ une famille orthonormée de H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(e_j)_{j \in I}$ est une base orthonormée de H .
2. $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{j \in I} |\langle x, e_j \rangle|^2$ (égalité de Bessel).

Theorem 17 Tout espace de Hilbert H , possède une base orthonormée, de plus si H est séparable alors admet une base hilbertienne dénombrable.

1.1.8 Théorème des traces

On sait qu'une fonction Lipschitzienne définie sur un ouvert Ω peut se prolonger par continuité jusqu'au bord de Ω , ce qui permet de donner un sens à la notion de trace de la fonction sur le bord. On va montrer que l'on peut, dans une certaine mesure, faire une construction équivalente dans le cas de fonctions moins régulières.

Theorem 18 Soit Ω un ouvert borné et lipschitzien de \mathbb{R}^d . L'application

$$\gamma_0 : u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega),$$

se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu : l'application de traces.

Remark 2 L'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = v} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur linéaire continu $R_o : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, dit de relèvement, qui vérifie

$$\gamma_0 \circ R_o = Id_{\partial\Omega}$$

Proposition 19 L'opérateur de traces ainsi construit permet d'écrire une formule d'intégration par parties

$$\forall u \in H^1(\Omega), \forall \Phi \in (H^1(\Omega))^d, \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{div} \Phi dx + \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot u dx = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u) \cdot (\gamma_0 \Phi) \cdot \nu ds.$$

1.1.9 Matrice symétrique définie positive

Definition 20 1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si $A^t = A$.

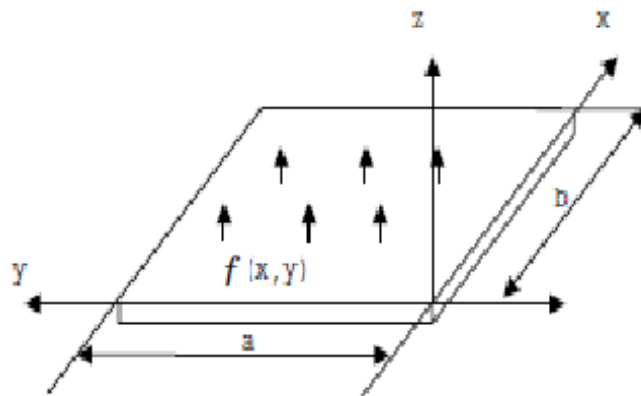
2. Une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, on a $v^t A v > 0, \forall v \neq 0$.

Proposition 21 Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive est inversible.

Chapitre 2

Le problème de bi-laplacien

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'étude mathématique et numérique de l'équation de bilaplacien (cf. [2], [3], [4], [7], [10], [11]) qui décrit le déplacement vertical u suivant l'axe $(\vec{o}z)$ d'une plaque élastique carrée Ω parfaitement encadrée sur son bord et soumise à une force f perpendiculaire à cette plaque (voir figure 2.1). Dans cette étude, nous proposons deux types de formulations variationnelles faibles et nous donnons les avantages et les inconvénients de chacune de ces formulations ainsi que nous approximons, soit par la méthode des différences finies, soit par la méthode des éléments finis.



Plaque lastique

2.1 Position du problème

La formulation mathématique du problème est donnée par :

Trouver $u \in H^4(\Omega)$ solution de

$$(PC1) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.1)$$

où l'opérateur bilaplacien Δ^2 est défini par

$$\Delta^2 = \Delta(\Delta) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

Ω désigne le carré $]0, 1[\times]0, 1[$ de normale extérieure n et de frontière régulière $\partial\Omega$, et f est une fonction donnée appartenant à $L^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$.

2.2 Formulations variationnelles du PV

Dans ce qui suit, nous allons proposer deux types de formulations variationnelles faibles et nous donnons les avantages et les inconvénients de chacune de ces formulations.

2.2.1 Première formulation variationnelle PV1

On se donne une fonction test v . Multiplions par v l'équation aux dérivées partielles du problème continu et intégrons sur Ω , on obtient ainsi

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega, \quad (2.2)$$

où $d\Omega = dx dy$.

Utilisons successivement deux fois la formule de Green, le membre de gauche de (2.2) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v d\Omega &= \int_{\Omega} \Delta(\Delta u) \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \cdot v d\gamma \\ &= \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} d\gamma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \cdot v d\gamma. \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'étape suivante de la formulation variationnelle consiste à définir l'espace V . En effet, les conditions aux limites traduisant l'encastrement de la plaque le long de son bord $\partial\Omega$ apparaissent dans la formulation intégrale (2.3), c'est la raison pour laquelle, on impose aux solutions v de V de satisfaire

$$v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.4)$$

En prenant en considération les conditions aux limite (2.4), la dernière équation (2.3) devient

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega. \quad (2.5)$$

Finalement, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in V \text{ solution de} \\ &\int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où l'espace V est défini par :

$$V = H^2(\Omega) \cap \left\{ v/v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} = H_0^2(\Omega).$$

Posons

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega.$$

Le problème (2.6) s'écrit d'une façon générale :

$$(PV1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^2(\Omega) \text{ solution de} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.7)$$

Remark 3 *La construction du cadre fonctionnel de l'espace V ($V = H_0^2(\Omega)$), correspondant au cadre d'existence des fonctions tests v , doit répondre aux impératifs de conserver l'ensemble de l'information présente dans la formulation du problème continu (PC1). Pour ce faire, seules des propriétés de régularité doivent être ajoutées aux conditions aux limites (2.4) afin de garantir la convergence des intégrales de l'équation (2.6).*

En effet, l'intégrale de gauche de l'équation (2.6) peut être contrôlée par :

$$\left| \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega \right| \leq \int_{\Omega} |\Delta u \cdot \Delta v| d\Omega \leq \left[\int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega} (\Delta v)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.8)$$

où l'on aura utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On considère alors la norme naturelle de l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$:

$$\forall u \in H^2(\Omega) :$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 = \left[\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1,2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1,2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right], \quad (2.9)$$

avec

$$\forall u \in L^2(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega. \quad (2.10)$$

En conséquence, on a :

$$\forall u \in H^2(\Omega) : \left[\int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega \right] \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (2.11)$$

On reprend alors l'intégrale du membre de gauche de (2.6) par le biais de l'inégalité (2.8)

$$\left| \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega \right| \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.12)$$

Autrement dit, il suffit de considérer u et v dans $H^2(\Omega)$ pour garantir la convergence de l'intégrale du membre de gauche de l'équation variationnelle (2.6). De même en utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le membre de droite de l'équation(2.6) est majoré par :

$$\left| \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \right| \leq \int_{\Omega} |f \cdot v| d\Omega \leq \|f\|_{L^2\Omega} \cdot \|u\|_{L^2\Omega}. \quad (2.13)$$

Finalement, le bon choix de l'espace V , pour assurer la régularité de la solution du problème continu (PC1), est l'espace $V = H_0^2(\Omega)$.

Existence et unicite de la solution faible du problème PV1

Reprenons la formulation variationnelle (PV1) et afin de prouver l'existence et l'unicite de la solution faible du problème variationnel (PV1), la mise en oeuvre du théorème de Lax-Milgram nécessite le choix d'une norme à définir sur l'espace fonctionnel $H_0^2(\Omega)$. Or, comme $H_0^2(\Omega) \subset H^2(\Omega)$, il est intuitive de mesurer la taille des fonctions de $H_0^2(\Omega)$ par la norme naturelle de $H^2(\Omega)$. Autrement dit, on pose :

$$\forall v \in H_0^2(\Omega) : \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \left[\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1,2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1,2} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \quad (2.14)$$

On constate alors que la forme bilinéaire $a(.,.)$ n'est autre que le produit scalaire dont la norme de $H^2(\Omega)$ est issue :

$$\forall v \in H^2(\Omega) : a(v, v) = \int_{\Omega} \Delta v \cdot \Delta v d\Omega$$

Dans ces conditions, les espaces de Sobolev $H^2(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$ - comme l'espace $H_0^2(\Omega)$ est un sous-espace fermé de l'espace $H^2(\Omega)$ - sont des espaces de Hilbert pour la norme de $H^2(\Omega)$ (pour plus de détails, on pourra par exemple, consulter les ouvrages de H. Brezis [4], Ciarlet-Raviart [11]).

En conséquence, on a alors :

- la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\Omega$ est continue sur $V \times V$ et de plus elle est V -elliptique,

- la forme linéaire $l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega$ est continue sur V .

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel (PV1) admet une solution unique $u \in H_0^2(\Omega)$.

Remark 4 *La formulation variationnelle PV1 a surtout un intérêt analytique puisque la solution u du problème PV1 appartenant à $H_0^2(\Omega)$ (c'est une bonne chose pour la régularité de la solution). Contrairement à l'aspect numérique, cette formulation ne permet pas d'utiliser la méthode des éléments finis (MEF) P1 de Lagrange puisque elle conduirait à ce que le membre de gauche de (PV1) serait identiquement nul. En effet, les dérivées partielles secondes d'une fonction de degré inférieur ou égal à un par rapport au couple de variables (x,y) étant nulles, il s'ensuit que la laplacien d'une telle fonction l'est de même. Il n'est donc vraiment pas recommandé d'utiliser de telle méthode pour résoudre numériquement par approximation variationnelle ce problème, cela, donc, constitue un inconvénient majeur. Nous proposons alors la méthode des différences finies (MDF) pour résoudre numériquement (PC1).*

2.2.2 Deuxième formulation variationnelle *PV2*

Formulation du problème continu *PC2*

Ciarlet-Raviart [11] ont proposé une autre méthode basée sur une formulation variationnelle dite formulation mixte afin de pouvoir utiliser des éléments finis de classe C^0 . Cette méthode repose sur la décomposition du problème (*PC1*) en deux sous-problèmes découplés. Pour ce faire, nous allons mettre les étapes à suivre : soit u une solution du problème (*PC1*), on introduit à présent une fonction ϕ définie par :

$$\Delta u = \phi. \tag{2.15}$$

Si l'on remplace (2.15) dans le problème (*PC1*) et on introduit le cadre variationnel convenable, à savoir ϕ dans $L^2(\Omega)$ avec $\Delta\phi$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et u dans $H_0^1(\Omega)$. Ce cadre va nous permettre de définir une méthode approchée de classe C^0 ayant un bon comportement.

Si u est solution du problème (*PC1*) alors le couple $(\phi, u) \in H^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ est solution du problème continu suivant :

$$(PC2) \quad \begin{cases} -\Delta\phi = f & \text{dans } \Omega \\ -\Delta u = \phi & \text{dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.16}$$

Pour obtenir une formulation variationnelle (*PV2*) associée au problème continu (*PC2*), on prend (Ψ, v) un couple de fonctions tests appartenant à $H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. La fonction Ψ sera la fonction test associée à la fonction ϕ et la fonction v associée à la deuxième inconnue u . Ensuite, on multiplie chacune des équations aux dérivées partielles du problème continu (*PC2*) par la fonction correspondante et on intègre sur Ω ; on obtient alors

les équations suivantes :

$$\begin{cases} - \int_{\Omega} \Delta \phi \cdot \Psi d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(\Delta u) \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \Psi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Psi d\gamma \equiv \int_{\Omega} f \cdot \Psi d\Omega \\ - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v d\gamma \equiv \int_{\Omega} \phi \cdot v d\Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

On utilise alors les conditions aux limites portant sur u et sa dérivée normale, identiquement nulles sur le bord $\partial\Omega$ de Ω .

Concernant la dérivée normale de u , compte tenu du fait que les valeurs de u n'interviennent nullement dans les intégrales de la double formulation (2.17), afin d'en conserver la mémoire dans le problème continu (PV2), on introduit les propriétés qui conviennent dans l'espace fonctionnel dans lequel la fonction Ψ sera générique. Ainsi, lorsqu'on remplace dans le système (2.17) les conditions aux limites portant sur le bord $\partial\Omega$, en choisissant comme espace fonctionnels $H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ pour les inconnues (ϕ, u) , d'une part, et $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ pour le couple de fonctions tests (Ψ, v) , d'autre part. La double formulation variationnelle s'écrit :

Trouver le couple (ϕ, u) appartenant à $H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ solution de :

$$(PV2) \begin{cases} a_1(\phi, \Psi) \equiv \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \Psi d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot \Psi d\Omega \equiv L_f(\Psi), \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Omega), \\ a_2(u, v) \equiv \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} \phi \cdot v d\Omega \equiv L_{\phi}(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.18)$$

Le système (2.9) s'écrit d'une façon générale.

Trouver le couple $(\phi, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ solution de :

$$(PV2) \begin{cases} a_1(\phi, \Psi) = L_f(\Psi), & \forall \Psi \in H^1(\Omega) & (a) \\ a_2(u, v) = L_{\phi}(v), & \forall v \in H_0^1(\Omega) & (b) \end{cases} \quad (2.19)$$

Existence et unicite de la solution faible du système PV2

Nous allons montrer que les problèmes variationnnels (a) et (b) admettent des solutions faibles.

Pour le problème variationnel (a), on peut montrer que :

- la forme bilinéaire $a_1(.,.)$ est continue et V-elliptique sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$,
- la forme linéaire $l(.)$ est continue sur $H^1(\Omega)$.

Selon le théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel (a) admet une solution unique u appartenant à $H^1(\Omega)$.

De la même manière, on peut montrer que le problème variationnel (b) admet une solution unique u appartenant à $H_0^1(\Omega)$

Remark 5 *Ce système de formulation variationnelle (PV2) permet l'utilisation de la méthode des éléments finis (MEF) P_1 de Lagrange pour résoudre de manière approchée le problème (PV2). Notons que la solution faible u du problème (PV2) appartient à $H_0^1(\Omega)$ (celle de (PV1) appartenant à $H_0^2(\Omega)$). Seulement, on a à résoudre un système de deux sous-problèmes couplés, où le 2^{ème} problème dépend du premier problème. Cette double résolution, en analyse numérique, constitue un inconvénient pour la stabilité numérique.*

2.3 Partie numérique

2.3.1 Discrétisation du problème PV1 par MDF

Comme nous l'avons indiqué dans la remarque 2.1, la méthode des éléments finis P_1 de Lagrange ne peut être appliquée à la formulation variationnelle (PV1). Pour cela, nous proposons la méthode des différences finies pour la discrétisation du problème PC1.

Pour ce faire, on introduit un pas de discrétisation constant h et on maille uniformément le carré Ω . On construit la suite des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en $(N + 1)$ sous-intervalles, où chaque sous-intervalle est de longueur $\Delta x = h = 1/(n+1)$. Les points des discrétisations sont les points $x_i = x_0 + ih$, où $i = 0, 1, \dots, N$. De la façon même, on procède sur l'axe des y en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en $N + 1$ sous-intervalles, où chaque sous intervalle est de longueur $\Delta y = h = 1/(n + 1)$.

Les points des discrétisations (x_i, y_j) avec $y_j = x_0 + jh$, où $j = 0, 1, \dots, N$. Avec $x_0 = y_0 = 0$ et $x_{N+1} = y_{N+1} = 1$. (voir figure 2.1 et 2.2)

Rappelons que la méthode des différences finies consiste à calculer des approximations de la solution d'une *EDP* en des points qui sont distribués sur des grilles.

La discrétisation de l'opérateur

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4},$$

nécessite les approximations des dérivées premières, deuxièmes, troisièmes et quatrièmes.

Approximations des dérivées premières

Les approximations des dérivées premières aux points (x_i, y_j) sont données par les schémas décentrés à droite et à gauche respectivement.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} & \text{ou} & \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}. \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} & \text{ou} & \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}. \end{aligned}$$

Les schéma des différences finies centrés à 2 points sont donnés par

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}, \end{aligned}$$

Approximations des dérivées secondes

Les approximations des dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ s'obtiennent aisément à partir des schémas centrés des différences finies à 3 points

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}. \end{aligned}$$

Les approximations des dérivées secondes croisées s'obtiennent en emboîtant les schémas

centrés des différences finies

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{\partial_x u(x_i, y_{j+1})}{2h} - \frac{\partial_x u(x_i, y_{j-1})}{2h} \\ &\simeq \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1})}{4h^2} - \frac{u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j-1})}{4h^2}\end{aligned}$$

On aboutit au schéma centrés à 4 points des différences finies

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2}$$

Schéma numérique de l'équation principale

En utilisant les schémas obtenus précédemment, on aboutit à la discrétisation des équations respectives aux noeuds (x_i, y_j) :

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{(i,j)} \simeq \frac{1}{h^4} \left[u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j} \right]$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{(i,j)} \simeq \frac{1}{h^4} \left[u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2} \right]$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{(i,j)} &\simeq \frac{1}{h^4} \left[4u_{i,j} - 2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \right. \\ &\quad \left. + u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} \right]\end{aligned}$$

La discrétisation de l'opérateur bilaplacien aux noeud (x_i, y_j) du maillage uniforme est donnée par :

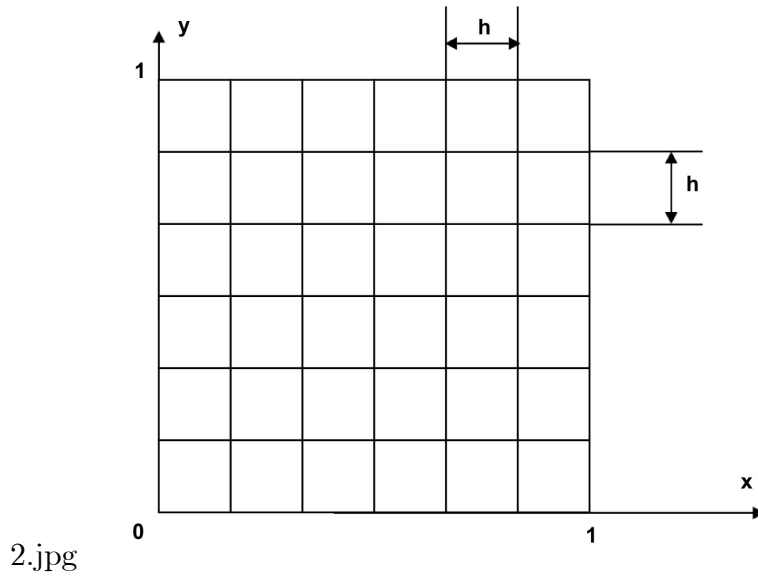


FIG. 2-1 – Maillage uniforme à treize points

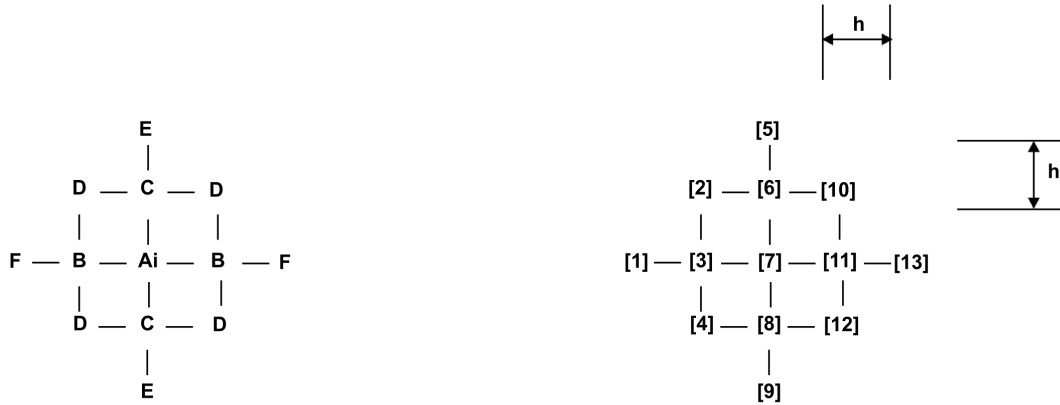
$$\begin{aligned}
 (\Delta^2 u)_{(i,j)} \simeq & \frac{1}{h^4} \left[20u_{i,j} - 8(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \right. \\
 & + 2(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + \\
 & \left. u_{i+2,j} + u_{i-2,j} + u_{i,j+2} + u_{i,j-2} \right]
 \end{aligned}$$

C'est un schéma d'un maillage uniforme à treize points comme le montre le schéma (*).

Assemblage de la matrice (noeuds intérieurs)

Les coefficients obtenus des noeuds intérieurs sont représentés par le schéma suivant :

2.png



(*) Coefficients d'un point interieur de maillage

avec

$$f = 1, d = 2, b = -8, e = 1, c = -8, a = 20$$

Points aux bords : lorsque un noeud situé sur le bord, les coefficients doivent être réécrits afin de satisfaire les conditions aux limites. Par exemple, pour le noeud 1 de la première ligne, pour former les motifs du coefficient de différences finies nous ajoutons les nœuds fictifs et appliquons les formes de différences finies et les conditions aux limites on obtient :

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{u_7 - u_1}{2h} = 0 \Leftrightarrow u_7 - u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_7,$$

et

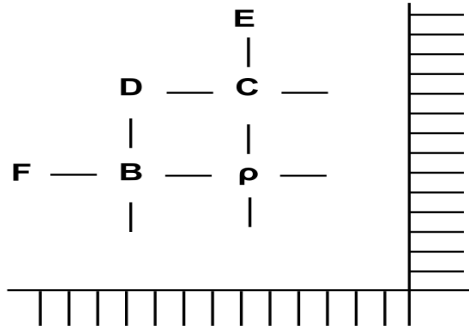
$$\frac{\partial u_8}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{u_7 - u_9}{2h} = 0 \Leftrightarrow u_7 - u_9 = 0 \Leftrightarrow u_7 = u_9$$

dont les coefficients de la ligne 1 sont :

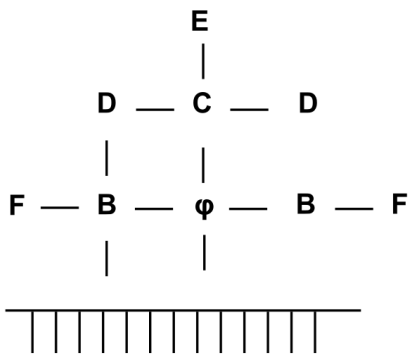
$$22 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -8 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Pour le noeud 2 de la ligne 2,

$$\frac{\partial u_8}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{u_7 - u_9}{2h} = 0 \Leftrightarrow u_7 - u_9 = 0 \Leftrightarrow u_7 = u_9$$



Motif des coefficient des noeuds 1, 5,
21 et 25.



Motif des coefficients des noeuds
1,2,3,6,10,11,15,16,20,22,23 et 24

Alors les coefficients sont :

$$-8 \quad 21 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad -8 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Assemblage de la matrice globale (par exemple, pour $n = m = 5$)

On obtient finalement la matrice globale M qui est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B & I & 0 & 0 \\ B & A_2 & B & I & 0 \\ I & B & A_3 & B & I \\ 0 & I & B & A_4 & B \\ 0 & 0 & I & B & A_5 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où les sous matrices $A_i, i = \overline{1, 5}, B$ et I sont

$$A_1 = A_5 = \begin{pmatrix} \rho & b & f & 0 & 0 \\ b & \varphi & b & f & 0 \\ f & b & \varphi & b & f \\ 0 & f & b & \varphi & b \\ 0 & 0 & f & b & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 21 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 21 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 21 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 22 \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \psi & B & F & 0 & 0 \\ B & A & B & F & 0 \\ F & B & A & B & F \\ 0 & F & B & A & B \\ 0 & 0 & F & B & \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 21 \end{pmatrix}, \quad i = 2, 3, 4$$

$$B = \begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & 0 \\ d & c & d & 0 & 0 \\ 0 & d & c & d & 0 \\ 0 & 0 & d & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$f + a + e = \rho, \quad a + e = \varphi \quad \text{et} \quad a + f = \psi$$

Le système global à résoudre s'écrit d'une façon implicite

$$MU = F, \tag{2.21}$$

où M est la matrice obtenue (*), U la solution recherchée et F le second membre.

Résultats numériques

Pour les simulations numériques, nous avons utilisé le logiciel Matlab 7.1, et nous allons traiter deux cas de solutions exactes

1^e cas : Si l'on prend comme solution exacte

$$U(x, y) = x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2,$$

avec le second membre

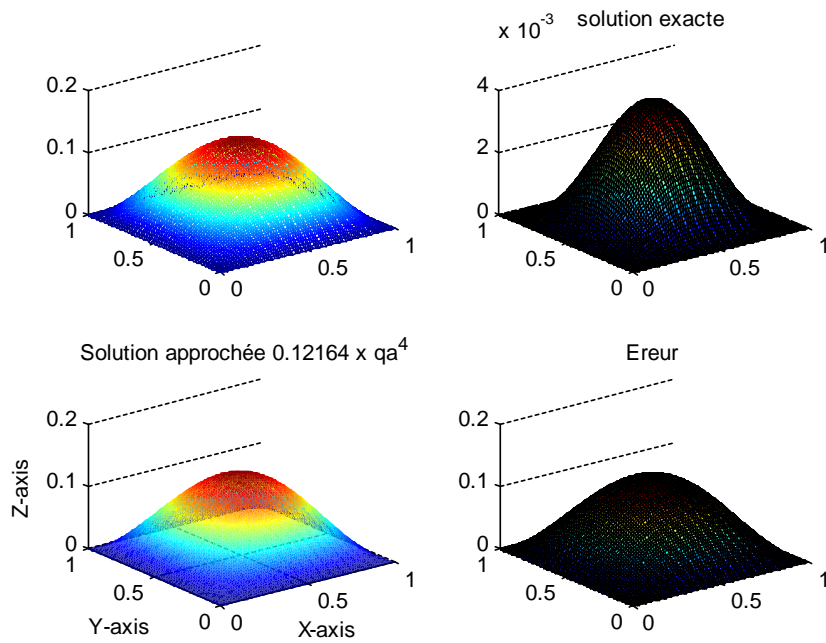
$$F(x, y) = h^4 \{24 [(y^2 - 2y^3 + y^4) + (x^2 - 2x^3 + x^4)] + 2[(2 - 12y + 12y^2) + (2 - 12x + 12x^2)]\}$$

Nous allons calculer l'estimation d'erreur en utilisant les normes $\| \cdot \|_{L^2}$ et $\| \cdot \|_{\infty}$ en jouant sur le nombre de mailles ($m \times n = 36, 676, 2116, 4356$ et 7396)

Nous regroupons les résultats obtenus dans les tableaux ci-dessous :

Maillage	$m = n = 6$	$m = n = 26$	$m = n = 46$	$m = n = 66$	$m = n = 86$
Neouds $m \times n$	$m \times n = 36$	$m \times n = 676$	$m \times n = 2116$	$m \times n = 4356$	$m \times n = 7396$
$\ u - u_h\ _{L^2}$	0.0648	0.0614	0.0612	0.0611	0.0611
$\ u - u_h\ _{\infty}$	0.1234	0.1203	0.1199	0.1198	0.1198

Dans ce qui suit, nous allons représenter graphiquement la solution exacte $u(x, y)$ et la solution approchée.



Solutions numeriques sont representees graphiquement

2^{eme} cas : Si on prend comme solution exacte

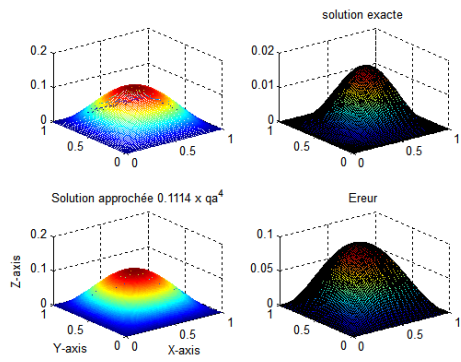
$$U(x, y) = (e^x + (x + 1)e^y) x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2,$$

avec le second membre

$$\begin{aligned}
F(x, y) = & 8(e^x + e^y(x+1))(x-1)^2(y-1)^2 + 8x^2y^2(e^x + e^y(x+1)) + 24x^2(e^x + e^y(x+1))(x-1) \\
& 8y^2(e^x + e^y(x+1))(x-1)^2 + 24y^2(e^x + e^y(x+1))(y-1)^2 + 16x(2x-2)(e^x + e^y(x+1)) \\
& 8x^2y^2(2x-2)(e^x + e^y) + 16x(x-1)^2(y-1)^2(e^x + e^y) + 4x^2e^x(x-1)^2(y-1)^2 + 12y^2e^x(x-1)^2 \\
& 16x^2y(2y-2)(e^x + e^y(x+1)) + 8x^2(2x-2)(y-1)^2(e^x + e^y) + 24y^2(2x-2)(y-1)^2(e^x + e^y) \\
& 48xy^2(y-1)^2(e^x + e^y) + 4x^2y^2e^x(x-1)^2 + 12x^2y^2e^x(y-1)^2 + 32xy(2x-2)(2y-2)(e^x + e^y) \\
& 24xy^2e^x(2x-2)(y-1)^2 + 8x^2ye^x(2y-2)(x-1)^2 + 16xy^2e^y(2y-2)(x-1)^2 + 16x^2ye^y(2x-2)(y-1)^2 \\
& 16ye^y(x-1)^2(x+1)(y-1)^2 + 8xy^2e^x(x-1)^2(y-1)^2 + 12x^2y^2e^y(x-1)^2(x+1) + 8xy^2e^y(2x-2)(y-1)^2 \\
& 16x^2y(2x-2)(2y-2)(e^x + e^y) + 8x^2y^2e^y(2x-2)(2y-2) + 24x^2e^y(2y-2)(x-1)^2(x+1) \\
& 4x^2y^2e^x(2x-2)(y-1)^2 + 4x^2y^2e^y(2x-2)(y-1)^2 + 12x^2e^y(x-1)^2(x+1)(y-1)^2 + 4x^2y^2e^y(2x-2)(y-1)^2 \\
& 48x^2ye^y(x-1)^2(x+1) + 32xye^y(x-1)^2(y-1)^2 + 16x^2ye^y(x+1)(y-1)^2 + 4x^2y^2e^y(2x-2)(y-1)^2 \\
& 32xye^y(2x-2)(x+1)(y-1)^2 + 16xy^2e^y(2x-2)(2y-2)(x+1) + 8xy^2e^y(2x-2)(x+1)(y-1)^2 \\
& 8x^2ye^y(x-1)^2(x+1)(y-1)^2
\end{aligned}$$

Solution exacte $u(x, y) = (e^x + (x+1)e^y)x^2y^2(1-x)^2(1-y)^2$

Maillage	$m = n = 6$	$m = n = 26$	$m = n = 46$	$m = n = 66$	$m = n = 86$
Neouds $m \times n$	$m \times n = 36$	$m \times n = 676$	$m \times n = 2116$	$m \times n = 4356$	$m \times n = 7396$
$\ u - u_h\ _{L^2}$	0.0544	0.0501	0.0498	0.0498	0.0498
$\ u - u_h\ _{\infty}$	0.1036	0.0964	0.0961	0.0960	0.0960



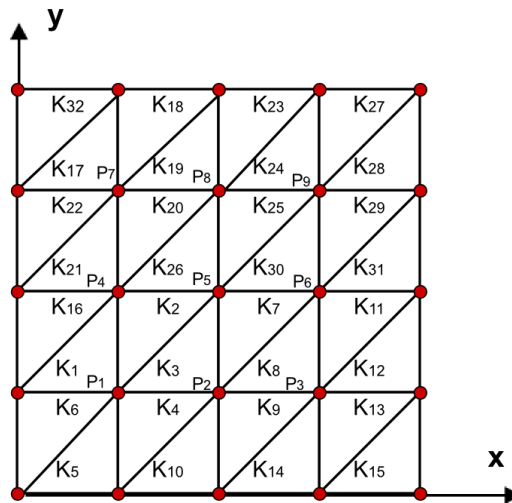
Solutions numeriques representees graphiquement

Remark 6 Nous avons calculé les solutions approchées u_h en utilisant la méthode d'élimination de Gauss et nous les avons comparé avec la solution exacte u . Nous avons raffiné le maillage en prenant $h = 1/6, h = 1/26, h = 1/46, h = 1/66, h = 1/86$. On constate que l'ordre de l'erreur est indépendamment du pas de discrétisation h , et la norme $\| \cdot \|_{L^2}$ donne une meilleure estimation que celle $\| \cdot \|_{\infty}$

2.3.2 Discrétisation du problème PV2 par MEF

L'approximation du double problème variationnel (PV2) se fait par la méthode des éléments finis $P1$ de Lagrange (cf. [2], [9], [10], [11], [13]). Pour ce faire, on introduit un pas de discrétisation constant h et on maille uniformément le domaine carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, par des triangles T_k , ($k = 1, \dots, N$) isocèles rectangles de côté h . On construit la suite de point $M_{i,j}$ de coordonnées (x_i, y_j) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0, x_{N+1} = 1 \text{ et } x_{i+1} = x_i + h & \text{pour } i = 1, \dots, N \\ y_0 = 0, y_{N+1} = 1 \text{ et } y_{j+1} = y_j + h, & \text{pour } j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.22)$$



Tringulation du domaine

Soient les espaces approchés (discret)s $V_h^1 \subset H_0^1(\Omega)$ et $V_h^2 \subset H^1(\Omega)$ tels que

$$V_h^1 = \left\{ \tilde{\psi}/\tilde{\psi} \in C^0(\Omega) \cap H^1(\Omega), \tilde{\psi}|_{T_k} \in P(T_k), k = 1, \dots, N \right\} \quad (2.23)$$

$$V_h^2 = \left\{ \tilde{v}/\tilde{v} \in C^0(\Omega)H_0^1(\Omega), \tilde{v}|_{T_k} \in P(T_k), k = 1, \dots, N \right\} \quad (2.24)$$

Les analogues discrets de la double formulation variationnelle (PV2) sont donnés par :

Trouver le couple (ϕ_h, u_h) appartenant à $V_h^1 \times V_h^2$ solution de :

$$(PV2)_h \begin{cases} a_1(\phi_h, \Psi_h) \equiv \int_{\Omega} \nabla \phi_h \cdot \nabla \Psi_h d\Omega = \int_{\Omega} f_h \cdot \Psi_h d\Omega \equiv L_f(\Psi_h), \forall \Psi_h \in V_h^1, \\ a_2(u_h, v_h) \equiv \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} \phi_h \cdot \Psi_h d\Omega \equiv L_{\phi}(v_h), \forall v_h \in V_h^2 \end{cases} \quad (2.25)$$

Traitons seulement la première formulation variationnelle discrete et de la même façon on pourra monter la deuxième formulation variationnelle discrete. L'espace V_h^1 est engendré par une base hilbertienne/ $V_h = \{\varphi_i\}_{i=1}^{(N+1)^2}$,

où φ_i sont des fonctions de base de la forme $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$, vérifiant

$$\begin{cases} \varphi_1(p_1) = 1 \\ \varphi_1(Q_{ij}) = 0, \text{ si } (i, j) \neq (1, 1) \end{cases}$$

On se ramène au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_h d\Omega, \forall v_h \in V_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ A \cdot u_h = F_h \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_1, \varphi_N) \\ a(\varphi_2, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_N, \varphi_1) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix}$$

Sur T_1 :

$$\begin{cases} \varphi_1(p_1) = 1 \implies a_1 = 1 \\ \varphi_1(-h, 0) = 0 \implies 1 - ha_2 = 0 \implies a_2 = \frac{1}{h} \\ \varphi_1(-h, h) = 0 \implies 1 - h(\frac{1}{h}) + a_3h = 0 \implies a_3 = 0 \end{cases} \implies \varphi_1(x, y) = 1 + \frac{1}{h}x.$$

Sur T_2 :

$$\begin{cases} \varphi_1(p_1) = 1 \implies a_1 = 1 \\ \varphi_1(0, h) = 0 \implies 1 + a_3h = 0 \implies a_3 = \frac{-1}{h} \\ \varphi_1(-h, h) = 0 \implies 1 - ha_2 + a_3h = 0 \implies a_2 = 0 \end{cases} \implies \varphi_1(x, y) = 1 - \frac{1}{h}y.$$

Sur T_3 :

$$\begin{cases} \varphi_1(p_1) = 1 \implies a_1 = 1 \\ \varphi_1(0, h) = 0 \implies 1 + a_3h = 0 \implies a_3 = \frac{-1}{h} \\ \varphi_1(h, 0) = 0 \implies 1 + ha_2 = 0 \implies a_2 = \frac{-1}{h} \end{cases} \implies \varphi_1(x, y) = 1 - \frac{1}{h}x - \frac{1}{h}y$$

Calcul des coefficients de la matrice de rigidité

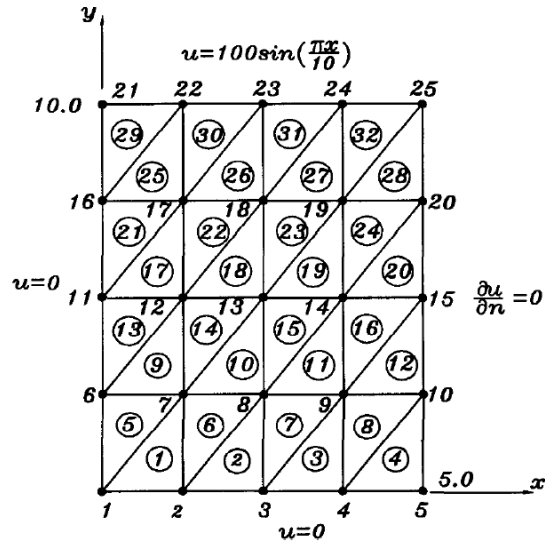
On peut calculer facilement

$$\begin{cases} \nabla\varphi_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } T_1 & \nabla\varphi_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } T_4 \\ \nabla\varphi_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sur } T_2 & \nabla\varphi_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sur } T_5 \\ \nabla\varphi_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sur } T_3 & \nabla\varphi_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sur } T_6 \end{cases}$$

un simple calcul nous permet d'affirmer que :

$$\begin{aligned} A_{11} &= a(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 d\Omega = \int_{\Omega} |\nabla\varphi_1|^2 d\Omega = \sum_{k=1}^6 \int_{K_k} |\nabla\varphi_1|^2 dT_k \\ &= \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \end{aligned}$$

D'après la figure (**), l'intersection entre le support de la fonction φ_1 et celui de la fonction



φ_2 est réduit aux triangle T_3 et T_4 puisque :

$$\nabla\varphi_2 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } T_3 \text{ et } \nabla\varphi_2 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sur } T_4$$

un calcul simple conduit à :

$$A_{12} = A_{21} = \int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 d\Omega = \int_{K_3} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 dK_3 + \int_{K_4} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 dT_4 = -1$$

de façon semblable nous montrons que :

$$A_{1,L+1} = A_{L+1,1} = \int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_{L+1} d\Omega = -1$$

le terme $A_{2,L+1}$ est nul car $\nabla\varphi_2$ et $\nabla\varphi_{L+1}$ sont orthogonaux ,donc d'après la figure (**)

nous avons :

$$\begin{aligned} A_{ii} &= A_{11} = 4 & i &= 1, 2, \dots, N \\ A_{i,i+1} &= A_{i+1,i} = A_{12} = -1 & i &= 1, 2, \dots, N-1, i \neq L \\ A_{i,L+1} &= A_{L+i,i} = A_{1,L+1} = -1 & i &= 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Tous les autres coefficients A_{ij} sont nuls et la matrice A est sous la forme (par exemple, pour $n = m = 3$) suivante :

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ou d'une façon condensée

$$A = \begin{pmatrix} B & C & 0 \\ C & B & C \\ 0 & C & B \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Calcul du second membre F_h

$$F_h = h^2(F_h^1, F_h^1, \dots, F_h^9)^t$$

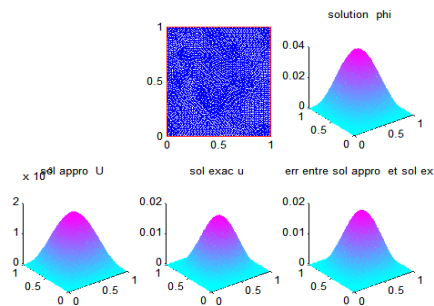
Nous allons avoir à résoudre deux sous-système lineaires

$$\begin{cases} A\phi = h^2 f \\ Au = h^2 \phi \end{cases},$$

i.e

$$u(x, y) = (e^x + (x + 1)e^y) x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2$$

h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{\infty}$	$\ \varphi - \varphi_h\ _{L^2}$	$\ \varphi - \varphi_h\ _{\infty}$
0.01000	0.0395	0.0184	0.1261	0.0545
0.0200	0.0399	0.0184	0.1272	0.0545
0.0300	0.0393	0.0184	0.1255	0.0545
0.0400	0.0410	0.0184	0.1308	0.0545
0.0500	0.0407	0.0184	0.1294	0.0545
0.0600	0.0397	0.0184	0.1269	0.0545
0.0700	0.0397	0.0184	0.1264	0.0545
0.0800	0.0392	0.0184	0.1256	0.0545
0.0900	0.0404	0.0183	0.1286	0.0545
0.100	0.0394	0.0183	0.1252	0.0545



Solutions numeriques sont representees graphiquement

Remark 7 *Nous avons calculé les solutions approchées u_h en résolvant deux systèmes $A\varphi_h = F_h$ et $Au_h = \varphi_h$ par la méthode d'élimination de Gauss et nous les avons comparé avec la solution exacte u . Nous avons raffiné le maillage en prenant $h = 0.01, h = 0.02, h = 0.03, h = 0.04, h = 0.05, h = 0.06, h = 0.07, h = 0.08, h = 0.09, h = 0.1$. On constate que l'ordre de l'erreur est indépendamment du pas de discrétisation h .*

Commentaire : l'objet de cette étude est de proposer deux formulations variationnelles du problème et d'utiliser la technique de discrétisation (élément finis, différences finies) adéquate.

Chapitre 3

Problème intégral-différentiel

L'objet de ce chapitre est de mettre en oeuvre la méthode des éléments finis dans le cas d'une équation intégral-différentielle non linéaire du second ordre en dimension un et deux (cf. [9], [10], [11], [13]).

3.1 Problème intégral-différentiel en D1

On s'intéresse aux solutions du problème continu unidimensionnel suivant :

Trouver $u \in H^2(0, 1)$, solution de :

$$(PC) \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) \left(\int_0^1 u(t) dt \right) = f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u'(1) = \alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

où f est une fonction donnée appartenant à $L^2(0, 1)$ et α est une constante positive.

L'équation intégral-différentielle du problème continu (PC) présente une non linéarité au terme de couplage entre u et l'intégrale $\int_0^1 u(x) dx$.

Prouvons que si u appartient à $H^2(0, 1)$ alors l'intégrale portant sur u dans le problème continu (PC) est convergente.

On remarque alors que la convergence de cette intégrale est assurée par l'espace fonctionnel dans lequel le problème continu est posé, à savoir, $H^2(0, 1)$

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left| \int_0^1 1 \cdot u(x) dx \right| \leq \left[\int_0^1 |1|^2 dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

Autrement dit, si la solution u du problème continu (PC) est recherchée dans l'espace de Sobolev $H^2(0, 1)$, u appartient de facto à $L^2(0, 1)$, et par suit, à $L^1(0, 1)$, d'après l'inégalité (3.2).

3.1.1 Formulation variationnelle du problème

Soit v une fonction test, définie de $[0, 1]$, à valeurs appartenant à un espace variationnel V . On va mettre le problème continu (PC) sous une formulation variationnelle (PV) de la forme :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V \quad (3.3)$$

Précisons la forme non linéaire $a(\cdot, \cdot)$, la forme linéaire $L(\cdot)$ ainsi que l'espace fonctionnel V

Pour cela, on multiplie l'équation intégrale-différentielle (3.1) par une fonction test v et on intègre l'équation entre 0 et 1.

$$-\int_0^1 u'' v dx + \int_0^1 \left(\int_0^1 u(s) ds \right) u v dx = \int_0^1 f v dx \quad (3.4)$$

Maintenant on spécifie l'espace fonctionnel V une fois que la formulation variationnelle sera définitivement établie.

Par ailleurs, une intégration par partie, utilisant la condition de Neumann, $u'(1) = \alpha$,

nous permet d'écrire :

$$\int_0^1 \left[u' v' + \left(\int_0^1 u(s) ds \right) uv \right] dx + u'(0) v(0) = \int_0^1 f v dx + \alpha v(1)$$

La formulation variationnelle s'écrit donc :

$$(PV) \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ appartenant à } V \text{ solution de :} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$a(u, v) = \int_0^1 \left[u'(x) v'(x) + \left(\int_0^1 u(s) ds \right) u(x)v(x) \right] dx, \quad (3.6)$$

et

$$L(v) = \int_0^1 f v dx + \alpha v(1). \quad (3.7)$$

Abordons, à présent, la définition du cadre fonctionnel V au sein duquel nous souhaitons donner un sens à la formulation variationnelle (PV)

Concernant les intégrales portant sur $u'v'$, d'une part, et sur fv , d'autre part, on a vu que l'inégalité de Cauchy-Schwarz permettrait de garantir l'existence de ces deux intégrales. Quant à l'intégrale portant sur le terme non linéaire, il suffit de remarquer que :

$$\int_0^1 \left[\left(\int_0^1 u(s) ds \right) u(x) v(x) \right] dx = \left(\int_0^1 u(s) ds \right) \cdot \left(\int_0^1 u(x) v(x) dx \right) \quad (3.8)$$

De nouveau, la convergence de l'intégrale est alors assurée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'intégrale portant sur uv . Ainsi, l'espace fonctionnel V qui permet de donner un sens à la formulation variationnelle (PV) est donné par :

$$V \equiv H^1(0, 1) \cap \{v : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, v(0) = 0\} = H_*^1(0, 1) \quad (3.9)$$

L'espace $H_*^1(0, 1)$ est un espace de Hilbert pour la norme de $H^1(0, 1)$:

$$\|v\|_{H^1(0,1)}^2 = \int_0^1 v'^2 dx + \int_0^1 v^2 dx = \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Remarque : la formulation $a(., .)$ n'est pas bilinéaire donc on ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram. Notons que cette formulation est bien adaptée à l'utilisation de la méthode des éléments finis.

3.1.2 Analogie discret du problème PV

L'approximation du problème variationnel PV peut se faire par la méthode des éléments finis P_1 de Lagrange. Pour ce faire, on introduit un maillage régulier de l'intervalle $[0, 1]$, de pas constant h , tels que :

$$\begin{cases} x_0 = 0, x_{N+1} = 1 \\ x_{i+1} = x_i + h, i = 0 \text{ à } N \end{cases} \quad (3.10)$$

On définit à présent l'espace d'approximation \tilde{V} par :

$$\tilde{V} \equiv \{ \tilde{v} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{v} \in C^0([0, 1]), \tilde{v} \in P_1([x_i, x_{i+1}]) \} \quad (3.11)$$

où $P_1 = P_1([x_i, x_{i+1}])$ désigne l'espace des polynômes défini sur $[x_i, x_{i+1}]$ de degré inférieur ou égal à un.

La dimension de l'espace d'approximation \tilde{V} peut être déterminée de plusieurs manières ; la plus simple est de constater que les fonctions v_h de V_h sont essentiellement des lignes brisées, en fait, affines par maille entière $[x_i, x_{i+1}]$ et s'annulent en $x = 0$. De ce fait, ayant pour la globalité du maillage de l'intervalle $[0, 1]$, $(N + 2)$ points de discrétisation, deux fonctions de \tilde{V} se distinguent par la différence de leur valeurs qui pourra être observé aux points (x_1, x_2, \dots, x_N) , toute fonction \tilde{v} de V devient satisfaisante, par ailleurs $\tilde{v}_0 = 0$. Autrement dit, une fonction \tilde{v} appartenant à \tilde{V} est complètement déterminée par le $N + 1$

éléments $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{N+1})$.

Ceci implique que l'espace \tilde{V} est isomorphe à \mathbb{R}^{N+1} . En conclusion, on en déduit que la dimension de est égale a $N + 1$.

3.1.3 Formulation variationnelle approchée

Soit φ_i ($i = 1$ à $N + 1$) la base canonique de \tilde{V} ($\tilde{V} = [(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}]$).

La formulation variationnelle approchée s'obtient en substituant les fonctions d'approximations

$$u_h = \sum_{i=1}^{N+1} u_i \varphi_i. \quad (3.12)$$

L'analogie discret du problème (PV) s'écrit :

$$\int_0^1 \left[\tilde{u}' \tilde{v}' + \left(\int_0^1 \tilde{u}(s) ds \right) \tilde{u} \tilde{v} \right] dx + \tilde{u}'(0) \tilde{v}(0) = \int_0^1 f \tilde{v} dx + \alpha \tilde{v}(1). \quad (3.13)$$

Nous rappelons que la formulation variationnelle approchée \widetilde{PV} est obtenue en substituant les fonction variationnelle d'approximations u et v dans la formulation variationnelle (PV). Il suffit alors de de remarquer que l'intégrale majeure de l'expression (3.13). En remplaçant \tilde{u} par (3.12) et \tilde{v} par φ_i , on obtient le système \widetilde{PV} suivant :

$$(\widetilde{PV}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\tilde{u}_j) \text{ (pour } j = 1 \text{ à } N + 1), \text{ solution de :} \\ \sum_{j=1, N+1} \left[\int_0^1 \left\{ \varphi_j' \varphi_i' + \left(\sum_{j=1, N+1} \int_0^1 \tilde{u}_j \varphi_K(s) ds \right) \varphi_j \varphi_i \right\} dx \right] \tilde{u}_j = . \\ \int_0^1 f \varphi_i dx + \alpha \varphi_i(1) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Le système (3.14) s'écrit ainsi :

$$(\widetilde{PV}) \left[\sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} \tilde{u}_j + \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{K=1}^{N+1} B_{ijk} \tilde{u}_j \tilde{u}_k = C_i, \quad \forall i = 1 \text{ à } N + 1 \right] \quad (3.15)$$

où l'on note

$A_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i \varphi'_j dx$, $B_{ijk} = \left(\int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \varphi_k dx \right)$ et $C_i = \int_0^1 f \varphi_i dx + \alpha \varphi_i(1)$
 Il suffit alors de remarquer que l'intégrale portant sur $\widetilde{u}_K \varphi_K(s)$ est indépendante de variable x , de l'intégrale majeure dans de l'expression (3.13).

On obtient alors, par identification, les expressions (3.14) et (3.15) en utilisant la formule de quadrature des trapèzes, montrons que B_{ijk} peut être estimé par :

$$B_{ijk} \simeq \begin{cases} h \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx = h D_{ij}, & \forall k = 1 \text{ à } N \\ \frac{h}{2} \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx = \frac{h}{2} D_{ij}, & \text{si } k = N + 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Déduisons que la formulatin variationnelle approchée (\widetilde{PV}) s'écrit :

$$(\widetilde{PV}) \sum_{j=1}^N A_{ij} \widetilde{u}_j + h \cdot \left[\frac{\widetilde{U}_{N+1}}{2} + \sum_{j=1}^N \widetilde{u} \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^N D_{ij} \widetilde{u}_j \right] = C_i \quad (3.17)$$

Afin d'estimer par approximation les quantités B_{ijk} on utilise la formule de quadrature des trapèzes afin d'approximer l'intégrale portant sur la fonction φ_k :

$$\begin{cases} \int_0^1 \varphi_k(s) = \int_{x_{k-1}}^{x_k+1} \varphi_k(s) ds = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(s) ds + \int_{x_k}^{x_k+1} \varphi_k(s) ds, & \forall k = l \text{ à } N \\ \simeq \frac{h}{2} [1 + 0] + \frac{h}{2} [0 + 1] = h. \end{cases} \quad (3.18)$$

Le cas de la fonction de base φ_{N+1} doit être traitée séparément, puisque son support est constitué, uniquement, de l'intervalle $[x_N, x_{N+1}]$,

$$\int_0^1 \varphi_{N+1}(s) ds = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \varphi_{N+1}(s) ds \simeq \frac{h}{2} [1 + 0] = \frac{h}{2}. \quad (3.19)$$

On injecte alors les évaluations des équations (3.18)-(3.19) dans l'équation générique du problème variationnel approché (3.14), ce qui conduit à l'obtention de l'équation (3.17).

Fonction de base φ_i caractéristique d'un nœud intérieur à $[0,1]$ Compte tenu de la régularité du maillage, l'équation nodale générique du système (\widetilde{PV}) , associée à tout fonction de base φ_i , ($i = 1$ à $\dim \tilde{v} - 1$) caractéristique d'un nœud strictement intérieur à $[0,1]$, s'écrit :

$$\left(\widetilde{PV}_{int} \right) \left\{ \begin{array}{l} \forall_i = 1 \text{ à } N \\ A_{i,i-1} \tilde{u}_{-1} + A_{i,i} \tilde{u}_i + A_{i,i+1} \tilde{u}_{i+1} + \dots \\ h \left[\frac{\tilde{U}_{N+1}}{2} + \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k \right] \cdot [D_{i,i-1} \tilde{u}_{-1} + D_{i,i} \tilde{u}_i + D_{i,i+1} \tilde{u}_{i+1}] = C_i \end{array} \right. \quad (3.20)$$

à l'aide de la formule de trapèzes, calculons les 7 coefficients (A_{ij}, D_{ij}, C_i) . Rassemblons les résultats en écrivant l'équation nodale correspondante. On considère, à présent, les fonctions de base φ_i ($i = 1$ à N) caractéristiques des nœuds strictement intérieurs à l'intégration $[0,1]$. L'équation générique du système (3.17) comporte comme termes, a priori, non nuls, uniquement ceux qui correspondent aux fonctions dont le support intercepte celui d'une fonction donnée.

Autrement dit, il s'agit des fonction de base φ_{i-1} , φ_i et φ_{i+1} . C'est la raison pour laquelle, l'équation (\widetilde{PV}_{Int}) ne comporte que termes $A_{i,i-1}$, $A_{i,i}$ et $A_{i,i+1}$ d'un part, $D_{i,i-1}$, $D_{i,i}$ et $D_{i,i}$, d'autre part. On a :

$$A_{i,j} = 0 \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

a) Calcul du coefficient $A_{i,i}$.

$$A_{ii} = \int_0^1 (\varphi'_i)^2 dx = \int_{\text{supp } \varphi'} (\varphi'_i)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi'_i)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi'_i)^2 dx \quad (3.21)$$

Puisque les fonction de base φ_i de \tilde{V} sont affines par morceaux, les dérivées φ_i sont constantes sur chaque maille de forme $[x_i, x_{i+1}]$.

On peut alors, soit évaluer exactement chaque intégrale de l'équation (3.21), soit appliquer

la formule de quadrature de trapèzes qui est exacte pour les fonction constantes :

$$A_{ii} = h \times \left(\frac{1}{h}\right)^2 + h \times \left(-\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h}. \quad (3.22)$$

b) Calcul des coefficients $A_{i,i-1}$.

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} &= \int_0^1 \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx = \int_{\sup_i p\varphi \cap \sup p\varphi'_{i-1}} \varphi'_i \varphi'_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx, \\ &= h \times \left(\frac{1}{h}\right) \times \left(-\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h} \end{aligned}$$

c) Calcul des coefficients $A_{i,i+1}$.

Le calcul de $A_{i,i+1}$ s'obtient directement puisqu'il suffit de remarquer que

$$A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = A_{i,i-1}. \quad (3.23)$$

On aura, pour cela, utiliser la symétrie de la matrice $A_{i,j}$ ainsi que l'invariance par translation horizontale le long du maillage , comme conséquence de l'uniformité de sa discrétisation.

Calcul approché des coefficients D_{ij} , pour $j = i - 1, i, i + 1$

a) Calcul des coefficients $D_{i,i}$.

$$\begin{aligned} D_{ii} &= \int_0^1 \varphi_i^2 dx = \int_{\sup p\varphi_i} \varphi_i^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^2 dx, \\ &\simeq \frac{h}{2} (0 + 1) + \frac{h}{2} (1 + 0) = h. \end{aligned}$$

b) Calcul des coefficients $D_{i,i-1}$.

$$\begin{aligned} D_{i,i-1} &= \int_0^1 \varphi_i \varphi_{i-1} dx = \int_{\sup p \varphi'_{i-1}} \varphi_i \varphi_{i-1} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i \varphi_{i-1} dx, \\ &= \frac{h}{2} (0 \times 1 + 1 \times 0) = 0 \end{aligned}$$

c) Calcul des coefficients $D_{i,i+1}$.

Pour des raisons de symétrie identique à celle que nous avons évoquée pour le calcul des coefficients $A_{i,i+1}$, on obtient :

$$D_{i,i+1} = D_{i+1,i} = D_{i,i-1} = 0 \quad (3.24)$$

Calcul du second membre C_i Etant donné la propriété de fonction de base suivante :

$\forall i = 1 \text{ à } N : \varphi_i(1) = 0$, le second membre C_i est estimé de la façon suivante,

$$\simeq \frac{h}{2} [0 + f_i] + \frac{h}{2} [f_i + 0]$$

$$C_i \simeq h f_i. \quad (3.25)$$

On rappelle que la formule de quadrature des trapèzes composée s'écrit :

$$\int_a^b \zeta(s) ds \simeq \frac{h}{2} \left[\zeta(a) + \zeta(b) + 2 \sum_{i=1}^N \zeta(x_i) \right]. \quad (3.26)$$

L'équation nodale associée à une fonction de base φ_i , pour $i = 1, N$ est obtenue en regroupant l'ensemble des résultats de la question précédente.

$$\forall i = 1 \text{ à } N : - \left[\frac{\tilde{u}_{i-1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i+1}}{h^2} \right] + h \left[\frac{\tilde{u}_{N+1}}{2} + \sum_{i=1}^N \tilde{u}_K \right] \cdot \tilde{u}_i = f_i \quad (3.27)$$

Fonction de base φ_i caractéristique du noeud d'abscisse X_{N+1}

$$(\widetilde{PV}_{N+1}) \left\{ \begin{array}{l} A_{i,i-1}\tilde{u}_{i-1} + A_{i,i}\tilde{u}_i + A_{i,i+1}\tilde{u}_{i+1} + \dots \\ h \left[\frac{\tilde{u}_{N+1}}{2} + \sum_{K=1}^N \tilde{u}_K \right] \cdot [D_{N+1,N}\tilde{u}_N + D_{N+1,N+1}\tilde{u}_{N+1}] = C_{N+1} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

A l'aide de la formule de trapèzes, calculons les 5 coefficient

$$A_{N+1,N}, \quad A_{N+1,N+1}, \quad D_{N+1,N}, \quad D_{N+1,N+1} \quad \text{et} \quad A_{N+1,N+1}$$

Calcul des coefficients $A_{N+1,N}$, et $A_{N+1,N+1}$

a) calcul du coefficient $A_{N+1,N+1}$

$$\begin{aligned} A_{N+1,N+1} &= \int_0^1 (\varphi'_{N+1})^2 dX \\ &= \int_{\text{Supp } \varphi_{N+1}} (\varphi'_{N+1})^2 dX = \int_{X_N}^{X_{N+1}} (\varphi'_{N+1})^2 dx \\ &= h \times \left(\frac{1}{h} \right)^2 = \frac{1}{h} \end{aligned}$$

b) calcul du coefficient $A_{N+1,N}$

$$\begin{aligned} A_{N+1,N} &= \int_0^1 \varphi'_{N+1} \varphi'_N dX \\ &= \int_{\text{Supp } \varphi'_{N+1} \cap \text{Supp } \varphi'_N} \varphi'_{N+1} + \varphi'_N dX \\ &= \int_{X_N}^{X_{N+1}} \varphi'_{N+1} \varphi'_N dX = h \times \left(\frac{1}{h} \right) \left(-\frac{1}{h} \right) = -\frac{1}{h} \end{aligned}$$

Calcul des coefficients $D_{N+1,N}$, $D_{N+1,N+1}$

a) Calcul du coefficient $D_{N+1,N+1}$

$$\begin{aligned}
D_{N+1,N+1} &= \int_0^1 \varphi_{N+1}^2 dX = \int_{\text{Supp } \varphi_{N+1}} \varphi_{N+1}^2 dX \\
&= \int_{X_N}^{X_{N+1}} \varphi_{N+1}^2 dX = h \times (0 + 1) = \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

b) Calcul du coefficient $D_{N+1,N}$

$$\begin{aligned}
D_{N+1,N} &= \int_0^1 \varphi_{N+1} \varphi_N dX \\
&= \int_{\text{Supp } \varphi_{N+1} \cap \text{Supp } \varphi_N} \varphi_{N+1} + \varphi_N dX \\
&= \int_{X_N}^{X_{N+1}} \varphi_{N+1} \varphi_N dX \simeq h \times (0 \times 1 + 1 \times 0) = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

c) Calcul du second membre C_{N+1}

$$\begin{aligned}
C_{N+1} &= \int_0^1 f \varphi_{N+1} dX = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \varphi_{N+1} dX + \alpha \simeq \frac{h}{2} \times [0 + f_{N+1}] + \alpha \\
&= \frac{h}{2} f_{N+1} + \alpha
\end{aligned}$$

On regroupe alors l'ensemble des résultats de l'équation de base φ_{N+1} :

$$-\frac{1}{h} \tilde{u}_N + \frac{1}{h} \tilde{u}_{N+1} + h \left[\frac{\tilde{u}_N + 1}{2} + \sum_{K=1}^N \tilde{u}_K \right] \cdot \frac{h}{2} \tilde{u}_{N+1} = \frac{h}{2} f_{N+1} \tag{3.31}$$

En réorganisant les termes de (3.31), celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{2}{h^3} [\tilde{u}_{N+1} - \tilde{u}_N] + \frac{\tilde{u}_N^2 + 1}{2} + \tilde{u}_{N+1} \sum_{K=1}^N \tilde{u}_K = \frac{f_{N+1}}{h^2}. \quad (3.32)$$

Ainsi, on est en mesure de remplacer la dérivée seconde u où point d'abscisse X_{N+1} en fonction des valeurs de u prises aux autres noeuds du maillage .

$$u(x_N) = u(x_{N+1}) - \alpha h + \frac{h^2}{2} \left[u(x_{N+1}) \int_0^1 u(s) ds - f_{N+1} \right] + O(h^3) \quad (3.33)$$

où l'on a posé

$$f_{N+1} \simeq f(x_{N+1})$$

Ce qui donne finalement après avoir utilisé la formule de trapèzes composés :

$$u(x_N) = u(x_{N+1}) - \alpha h + \frac{h^2}{2} f_{N+1} + \frac{h^3}{2} u(x_{N+1}) \left[\frac{\tilde{u}(x_{N+1})}{2} + \sum_{K=1}^N \tilde{u}_K \right] + O(h^3) \quad (3.34)$$

3.1.4 Méthode des différences finies

On se propose, à présent, de trouver l'équation nodale (3.27) associée à toute fonction de base φ_i , ($i = 1$ à N) en mettant en oeuvre la méthode des différences finies. Pour ce faire, il convient d'écrire l'équation intégral-différentielle du problème continu (PC) au point x_i puis de procéder à l'approximation, d'une part, de la dérivée seconde de u , d'autre part, de l'intégrale de la solution u prise sur l'intervalle $[0,1]$.

Concernant la dérivée seconde, on utilise la formule de Taylor, simultanément, de façon progressive, ce qui donne :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + O(h^4). \quad (3.35)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^2}{3!}u^{(3)}(x_i) + O(h^4). \quad (3.36)$$

Il vient, alors, par différence entre (3.35) et (3.36).

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i) - 2u(x_{i-1}) + u(x_{i-2}))}{h^2} + O(h^2) \quad (3.37)$$

En ce qui concerne l'intégrale de u entre 0 et 1, on utilise la formule de quadrature de trapèzes composés, en remarquant que la solution u vérifie une condition homogène de Dirichlet en $x = 0$:

$$\int_0^1 u(s) ds = \frac{h}{2} \left[u(x_{N+1}) + 2 \sum_{i=1}^N u(x_i) \right] + O(h^2). \quad (3.38)$$

On écrit alors l'équation intégro-différentielle du problème continu (PC) au point x_i tout en substituant $u''(x_i)$ par (3.41) et $\int_0^1 u(s)$ par (3.42) :

$$- \left[\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \right] + u(x_i) \frac{h}{2} \left[u(x_{N+1}) + 2 \sum_{i=1}^N \tilde{u}(x_i) \right] = f(x_i) + O(h^2). \quad (3.39)$$

On pose alors l'écriture du schéma à différences finies substituant la suite d'approximation \tilde{u}_i aux valeurs $u(x_i)$. Cette opération d'approximation permet de négliger le reste du second ordre dans l'équation et procure très exactement l'équation nodale (3.27), trouvée par la méthode des éléments finis

$$\forall i = 1, N : - \left[\frac{\tilde{u}_{i-1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i+1}}{h^2} \right] + h \left[\frac{\tilde{u}_{N+1}}{2} + \sum_{i=1}^N \tilde{u}_k \right] \cdot \tilde{u}_i = f_i \quad (3.40)$$

Pour la résolution numérique du système non linéaire (3.40), nous proposons alors la méthode itérative de Newton qu'on va décrire à la fin de ce chapitre.

3.2 Problème intégral-différentiel en D2

Dans cette partie, on va étudier le problème précédent mais cette fois-ci en dimension 2.

3.2.1 Formulation du problème

On s'intéresse aux solutions du problème continu suivant :

Trouver $u \in H^2(\Omega)$, solution de :

$$(PC) \begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) \int_{\Omega} u(s) ds = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

où f et g sont deux fonctions données appartenant à $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma)$ respectivement. Ici $x = (x_1, x_2)$.

L'équation intégral-différentielle du problème continu (PC) présente une non linéarité au terme de couplage entre u et l'intégrale

$$\int_{\Omega} u(x) dx$$

Prouvons que si u appartient à $H^2(\Omega)$, alors l'intégrale portant sur u dans le problème continu (PC) est convergente. On remarque alors que la convergence de cette intégrale est assurée par l'espace fonctionnel dans lequel le problème continu est posé, à savoir $H^2(\Omega)$.

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left| \int_{\Omega} 1 \cdot u(x) dx \right| \leq \left[\int_{\Omega} |1|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \text{mes}(\Omega) \left[\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

Autrement dit, si la solution u du problème continu (PC) est recherchée dans l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ u appartient de facto à $L^2(\Omega)$ et par suite à $L^1(\Omega)$ d'après l'inégalité (2).

3.2.2 Formulation variationnelle du problème

Soit v une fonction test, définie de Ω à valeurs réelles appartenant à un espace variationnelle V . On va mettre problème continu (PC) sous une formulation variationnelle (PV) de la forme :

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V \quad (3.42)$$

Pour cela, on multiplie l'équation intégrro-différentielle du problème (PC) par une fonction test v et on intègre l'équation sur Ω

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(s) ds \right) u v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (3.43)$$

Maintenant, on spécifie l'espace fonctionnel V une fois que la formulation variationnelle sera définitivement établie.

Par ailleurs, la formule de Green , nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(s) ds \right) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) dx, \quad (3.44)$$

Utilisant les conditions aux bord, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(s) ds \right) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \quad (3.45)$$

Abordons, à présent, la définition de cadre fonctionnel V , au sein duquel nous souhaitons donner un sens à la formulation variationnelle (PV)

Concernant les intégrales portant sur $\nabla u \cdot \nabla v$, d'une part, et sur $f v$, d'autre part, on a vu que l'inégalité de Cauchy-Schwarz permettait de garantir l'existence de ces deux intégrales. Quant à l'intégrale portant sur le terme non linéaire, il suffit de remarquer que :

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(s) ds \right) uv dx = \left(\int_{\Omega} u(s) ds \right) \cdot \left(\int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right) \quad (3.46)$$

De nouveau, la convergence de l'intégrale est alors assurée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'intégrale portant sur uv . Ainsi, l'espace fonctionnel V qui permet de donner un sens à la formulation variationnelle (PV) est défini par :

$$V = H_0^1(\Omega)$$

$H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé de $H^1(\Omega)$.

La formulation variationnelle (PV) s'écrit :

$$(PV) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \quad (3.47)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + \left(\int_{\Omega} u(s) ds \right) uv] dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V$$

Posons

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(s) ds \right) u(x) v(x) dx \quad (3.48)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad (3.49)$$

3.2.3 Approximation par éléments finis P_1

Espace d'approximation P_1

L'espace d'approximation P_1 est constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à un pour le couple de variables (x, y) . Autrement dit, toute fonction p de P_1 s'écrit sous la forme :

$$p(x, y) = ax + by + c \quad (3.50)$$

où (a, b, c) est un triplet quelconque de \mathbb{R}^3

On considère les trois forme linéaires définies par :

$$\sigma_1 : p \rightarrow p(M_1), \quad \sigma_2 : p \rightarrow p(M_2) \quad \text{et} \quad \sigma_3 : p \rightarrow p(M_3).$$

L'indentification des trois fonctions de base canonique (P_1, P_2, P_3) correspond aux trois fonctions barycentrique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Rappelons, cependant, que ces fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à un, pour le couple de variables (x, y) vérifient, par définition, la propriété canonique

$$\sigma_j(\lambda_i) \equiv \lambda_i(M_j) = \delta_{ij} \tag{3.51}$$

On peut réaliser maintenant une approximation du problème variationnel (PV_h) par éléments finis P_1 . Pour ce faire, on introduit un pas de discrétisation constant h et on maille uniformément le carré Ω par des triangles $T(K = 1 \text{ à } N_{t\mathbb{R}iangles})$, isocèles rectangles de côté h (voir Fig. 2). maillage par éléments finis P_1

On aura ainsi construit la suite de points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) définies par :

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0, x_{N+1} = y_{N+1} = 1 \\ x_{i+1} = x_i + h, i = 1 \text{ à } N + 1, \\ y_{i+1} = y_i + h, i = 1 \text{ à } N + 1 \end{cases} \tag{3.52}$$

3.2.4 Formulation variationnelle approchée

On cherche la formulation variationnelle approchée $P\tilde{V}$ du problème PV . On considère l'espace \tilde{V} défini par :

$$\tilde{V}_h = \left\{ \tilde{\Psi}/\tilde{\Psi} \in C^0(\Omega), \tilde{\Psi}|_{T_K} \in P_1(T_K) \quad K = 1 \text{ à } N_{t\mathbb{R}iangles} \right\} \tag{3.53}$$

où $P_1(T_K)$ représente l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 par rapport à (x, y)

De plus, on notera $(\varphi_i), (i = 1 \text{ à } (N + 1)^2)$ la base canonique de l'espace \tilde{V}_h , c'est à

dire, satisfaisant la propriété : $\varphi_i(M_m) = \delta_{im}$. On désignera par \tilde{V}_0 l'espace des fonction appartenant à \tilde{V} nulle sur le bord de Ω .

On pose :

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{(N+1)^2} \tilde{u}_j \varphi_j \quad (3.54)$$

Le passage de la formulation variationnelle (PV) à la formulation variationnelle $(P\tilde{V})_h$ est obtenue en substituant les inconnues (φ, u) par les fonctions d'approximation respectives $(\tilde{\varphi}, \tilde{u})$.

Trouver \tilde{u} appartenant à \tilde{V} , solution de

$$(P\tilde{V}) : a(\tilde{u}, \tilde{v}) = L_f(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in V_h; \quad (3.55)$$

On utilise alors les décompositions de \tilde{u} sur leur base respective, on obtient la formulation variationnelle approchée $(P\tilde{V})$ comme suit :

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{j=1}^{N+1} \left[\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx + \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \right) \left(\sum_{k=1}^{N+1} \int_{\Omega} \varphi_k u_k ds \right) \right] u_j. \quad i = 1 \text{ à } (N+1)^2 \quad (3.56)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f_i \varphi_i dx + \int_{\Gamma_2} g_i(x) \varphi_i d\Gamma_2. \quad i = 1 \text{ à } (N+1)^2 \quad (3.57)$$

$$(P\tilde{V}) \left\{ \sum_{j=1}^{(N+1)^2} \left[A_{ij} + \sum_{k=1}^{(N+1)^2} B_{ijk} \right] \tilde{u}_j = b_i \quad (i = 1 \text{ à } (N+1)^2) \right. \quad (3.58)$$

$$\text{où } A_{ijk} = \int_{\sup p\varphi_i \cap \sup p\varphi_j} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega \quad B_{ijk} = \int_{\sup p\varphi_i \cap \sup p\varphi_j} \varphi_i \cdot \varphi_j d\Omega \left(\int_{k=1} \tilde{u}_k \varphi_k \right) \quad \text{et}$$

$$b_i = \int_{\sup p\varphi_i} f \cdot \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_2} g \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} d\Gamma_2$$

Calcul des coefficients A_{0j}

L'ensemble des coefficients seront calculés exactement compte tenu du fait que les gradients des fonctions de base φ_i sont constantes par triangle. Ces calculs sont classiques.

a) Calcul du coefficient A_{00} :

$$\begin{aligned}
A_{00} &= \int_{Supp\varphi_0} |\nabla\varphi_0|^2 d\Omega = \int_{012} |\nabla\varphi_0|^2 d\Omega + \int_{023} |\nabla\varphi_0|^2 d\Omega + \int_{034} |\nabla\varphi_0|^2 d\Omega + (3.59) \\
&\quad \int_{045} |\nabla\varphi_0|^2 d\Omega + \int_{056} |\nabla\varphi_0|^2 d\Omega + \int_{061} |\nabla\varphi_0|^2 d\Omega \\
A_{00} &= \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{2}{h^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{2}{h^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right\} = 4
\end{aligned}$$

b) Calcul des coefficients A_{01} et A_{02} :

$$\begin{aligned}
A_{01} &= \int_{Supp\varphi_0 \cap Supp\varphi_1} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_1 d\Omega = \int_{012} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_1 d\Omega + \int_{061} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_1 d\Omega \quad (3.60) \\
&= \frac{h^2}{2} \left\{ -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h^2} \right\} = -1
\end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on trouve de même

$$\begin{aligned}
A_{02} &= \int_{Supp\varphi_0 \cap Supp\varphi_2} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_2 d\Omega = \int_{012} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_2 d\Omega + \int_{023} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_2 d\Omega \quad (3.61) \\
&= \frac{h^2}{2} \left\{ -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h^2} \right\} = -1
\end{aligned}$$

c) Calcul du coefficient A_{03} :

$$\begin{aligned}
A_{03} &= \int_{Supp\varphi_0 \cap Supp\varphi_3} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_3 d\Omega = \int_{023} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_3 d\Omega + \int_{043} \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\varphi_3 d\Omega \quad (3.62) \\
&= \frac{h^2}{2} \{0 + 0\} = 0
\end{aligned}$$

d) Calcul des coefficients A_{04}, A_{05}, A_{06} :

Pour des raisons de symétrie inhérentes à l'inverse du maillage dans les deux directions du plan, d'une part, à la symétrie de la forme bilinéaire $a(., .)$, et par voie de conséquence de la matrice A_{0j} , d'autre part, on a :

$$\begin{cases} A_{04} = A_{40} = A_{01} = -1 \\ A_{05} = A_{50} = A_{02} = -1 \\ A_{06} = A_{60} = A_{03} = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

Estimations

Les estimations des $\int_{\sup p\varphi_i} f \cdot \varphi_i d\Omega$, $\int_{k=1} \tilde{u}_k \varphi_k$ et $\int_{\sup p\varphi_i \cap \sup p\varphi_j} \varphi_i \cdot \varphi_j d\Omega$

L'évaluation de $\int_{\sup p\varphi_i} f \cdot \varphi_i d\Omega$, $\int_{k=1} \tilde{u}_k \varphi_k$ et $\int_{\sup p\varphi_i \cap \sup p\varphi_j} \varphi_i \cdot \varphi_j d\Omega$ est réalisée par quadrature à l'aide de la formule des trapèzes.

$$\int_T \int f(x) d\chi \simeq \frac{AiReT}{3} \{f(A_i) + f(A_j) + f(A_k)\} \quad (3.64)$$

où $\sup p\varphi_i$ désigne un triangle quelconque du maillage dont on aura noté les sommets A_i , A_j et A_k . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\sup p\varphi_0} f \cdot \varphi_0 d\Omega &= \int_{012} f \cdot \varphi_0 d\Omega + \int_{023} f \cdot \varphi_0 d\Omega + \int_{034} f \cdot \varphi_0 d\Omega + \int_{045} f \cdot \varphi_0 d\Omega + \int_{056} f \cdot \varphi_0 d\Omega + \int_{061} f \cdot \varphi_0 d\Omega \\ &\simeq \frac{h^2}{2} \times 6 \times \frac{1}{3} \times [f_0 \times 1] = h^2 f_0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

où f_0 désigne la valeur du second membre f au noeud 0.

$$\sum_{k=1}^{N+1} \int_{\Omega} \varphi_k u_k dx = \sum_{k=1}^{N+1} u_k \int_{\Omega} \varphi_k(x) dx \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N+1} u_k \int_{\Omega} \varphi_k(x) dx = \sum_{k=1}^N u_k \int_{\Omega} \varphi_k(x) dx + u_{n+1} \int_{\Omega} \varphi_k(x) dx \\
&= h^2 \sum_{k=1}^N u_k + u_{n+1} \frac{h^2}{2} \\
&= h^2 \left[\sum_{k=1}^N u_k + \frac{u_{n+1}}{2} \right]
\end{aligned}$$

3.2.5 Méthode des différences finies

Autre méthode de discrétisation : On se propose à trouver la solution du problème continu suivant :

$$PC \begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) \int_{\Omega} u(s) ds = f(x) & \text{sur } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

Mettons en oeuvre la méthode de différences finies.

$$-\Delta u(x) \simeq -\frac{[u_{i-1}^j + u_i^{j-1} - 4u_i^j + u_{i+1}^j + u_i^{j+1}]}{h^2} \quad 0 \leq i, j \leq N \quad (3.68)$$

Appliquons la formule des trapèzes

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(s, t) ds \right) dt \\
\int_{\Omega} u(s) ds &= u_i^j \left[\frac{h^2}{4} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{l=1}^{N+1} u(s_k, t_l) \right] \\
-\frac{[u_{i-1}^j + u_i^{j-1} - 4u_i^j + u_{i+1}^j + u_i^{j+1}]}{h^2} + \left[\frac{h^2}{4} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{l=1}^{N+1} u(s_k, t_l) \right] u_i^j &= f_i, \quad 0 \leq i, j \leq N
\end{aligned} \quad (3.69)$$

Remark 8 la résolution numérique du système non linéaire ci-dessus peut se faire par la méthode itérative de Newton. Notons que les méthodes de résolutions numériques telles que la méthode de Gauss, de Gauss-Seidel, de Jacobi et de relaxation ne peuvent pas s'appliquer ici sur ce système non linéaire

3.2.6 Méthode itérative de Newton pour la résolution d'un système non linéaire

Dans cette partie, nous allons décrire la méthode itérative de Newton pour la résolution d'un système non linéaire. Pour cela, considérons un système d'équations non linéaire

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \\ \dots\dots \\ f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \end{cases} \quad (3.70)$$

à premiers membres réels. Ecrivons le système (3.70) sous une forme abrégée, l'ensemble des arguments u_1, u_2, \dots, u_n peuvent être considérés comme un vecteur de dimension n

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

De façon analogue des fonction f_1, f_2, \dots, f_n forme un vecteur de dimension n (vecteur fonction)

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Le système (3.70) peut donc s'écrire sous une forme abrégée

$$f(u) = 0 \quad (3.73)$$

Pour résoudre le système (3.70) on fera appel à la méthode des approximations successives. Supposons qu'on ait trouvé la p -ième approximation

$$u^{(P)} = (u_1^{(P)}, u_2^{(P)}, \dots, u_n^{(P)}) \quad (3.74)$$

d'une des solutions isolées $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ l'équation vectorielle (3.73). La solution exacte de (3.70) pourra alors se mettre sous la forme

$$u = u^{(P)} + \varepsilon^{(p)} \quad (3.75)$$

où $\varepsilon^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \dots, \varepsilon_n^{(p)})$ est une correction (erreur de solution).

En portant l'expression (3.75) dans (3.73), on aura

$$f(u^{(P)} + \varepsilon^{(p)}) = 0 \quad (3.76)$$

Supposons que la fonction $f(x)$ soit continûment dérivable dans un certain domaine convexe qui contient u et $u^{(P)}$ et décomposons le premier membre de l'équation (3.76) par rapport aux puissances du petit vecteur $\varepsilon^{(p)}$.

$$f(u^{(P)} + \varepsilon^{(p)}) = f(u^{(P)}) + f'(u^{(P)}) \varepsilon^{(p)} = 0 \quad (3.77)$$

Par conséquent

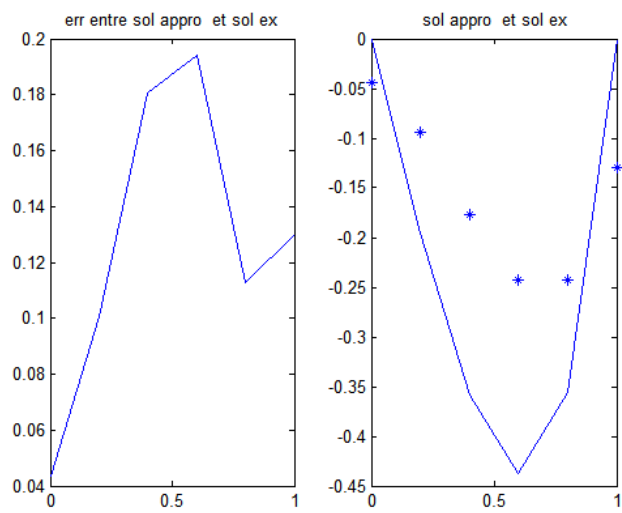
$$u^{(p+1)} = u^{(p)} - W^{-1}(u^{(p)})f(u^{(p)}) \quad \text{pour } p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.83)$$

Résultats numériques Pour les simulations numériques, nous avons utilisé le logiciel Matlab pour calculer la solution approchée du problème unidimensionnel. Pour cela, nous avons pris les vecteurs initiaux X_1^0 , X_2^0 , X_3^0 et X_4^0 avec une précision 10^{-6} .

Estimations d'erreurs sont données

Vecteurs initial	h	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{\infty}$
X_1^0	0.5000	0.3555	0.3283
X_2^0	0.3333	0.2677	0.1972
X_3^0	0.2500	0.2911	0.1759
X_4^0	0.2000	0.3349	0.1944

Vecteur initial	Solution exacte	Solution approchée
X_1^0	[0, - 0.4122, 0]	[0.3158, 0.2568, 0.1658]
X_4^0	[0; 0, 3101, -0.4328, 0]	[-0.0835, -0.2016, -0.3145, -0.1972]



Les graphes ci-dessus representent l'erreur et la solution approchee respectivement.

Bibliographie

- [1] **R.A. Adams.** *Sobolev spaces.* Academic Press, New-York 1975.
- [2] **M. Amarav, F. Dabaghi,** *Une méthode optimale d'éléments finis de classe $C0$ d'approximation du bilaplacian 2D, Analyse théorique et résultats numériques, INRIA, Rapport de recherche N° 3068-Déc 1996-pages 26.*
- [3] **I. Babuska, J. Osborn, and J. Pitkavanta,** *Analysis of mixed methods using mesh dependent norms,* Math. Comp., 35 (1980), pp. 1039-1062.
- [4] **H. Brezis.** *Analyse Fonctionnelle.* Masson, Paris 1993.
- [5] **E.M. Behrens and J. Guzmán ,** *A mixed method for the biharmonic problem based on a system of first-order equations,* SIAM J. Numer. Anal., 49 (2011), pp. 789–817.
- [6] **N. Boccardo,** *Analyse fonctionnelle, une introduction pour physiciens,* ellipses, Paris (1984).
- [7] **Bohe Wang,** *The application of finite difference method and matlab in engineering plates. Thesis of Master of Sces in computer Sces, Morgantwon, WV, 1999.*
- [8] **S. Brenner and R. Scott ,** *The Mathematical Theory of Finite Element Methods,* Springer-Verlag, New York, 1994..
- [9] **P. Ciarlet ,** *The Finite Element Method for Elliptic Problems,* North-Holland, New York, 1978.
- [10] **Joel Chaskalovic,** *Méthode des éléments finis pour les Sciences de l'ingénieur. Ed. Tec&Doc Lavoisier, 2004.*

- [11] **P. Ciarlet and P. Raviart** , *A mixed finite element for the biharmonic equation*, In C. de Boor, editor, Symposium on Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, pp. 125–143. Academic Press, New York, 1974
- [12] **L. Gastaldi and R.H. Nochetto** , *Sharp maximum norm error estimates for general mixed finite element approximations to second order elliptic equations*, M2AN. 23 (1989), pp. 103–128.
- [13] **R. Glowinski and O. Pironneau** , *Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem* , SIAM Rev., 21 (1979), pp. 167–212.
- [14] **J.-L. Lions et E. Magenes**. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. T.1, Dunod, Paris 1968.
- [15] **T. Miyoshi** , *A finite element method for the solution of fourth order partial differential equations*, Kunamoto J. Sci. (Math.), 9 (1973), pp. 87–116.
- [16] **L. Mu, J. Wang, Y. Wang, X. Ye**, *A Weak Galerkin Mixed Finite Element Method for Biharmonic Equations. Numerical Solution of Partial Differential Equations : Theory, Algorithms, and Their Applications*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Volume 45, 2013, pp 247-277
- [17] **J. Necas**. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris 1967.
- [18] **P. Raviart and J. Thomas** , *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, I. Galligani, E. Magenes, eds., Lectures Notes in Math. 606, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [19] **P.A.Raviart, J.M. Thomas**. *Introduction a l'analyse numériques des équations aux d 'érivées partielles*. Masson, Paris 1983.
- [20] **R. Scholz** , *A mixed method for 4th order problems using linear finite elements*, R.A.I.R.O. Numerical Analysis, 12 (1978), pp. 85–90.

- [21] **J. Wang** , *Mixed finite element methods, Numerical Methods in Scientific and Engineering Computing*, Eds : W. Cai, Z. Shi, C-W. Shu, and J. Xu, Academic Press.

Chapitre 4

Annexes

4.1 Problème Bilaplacien par la méthode des différences finis

Le but de ce programme est de calculer la solution numérique du problème du chapitre 2 (le problème Bilaplacien par la méthode des différences finis en utilisant le Matlab 7.9.0.529)

```
clear all;
clc;
%nmesh=input('nombre de pas par rapport à x ')
%lmesh=input('nombre de pas par rapport à y ')
kk=0;
E2=zeros(1,4)
E8=zeros(1,4);
for j=6 :20 :86
    nmesh=j
    lmesh=j
    kk=kk+1;
```

```

%nmesh=40; % the number of meshes
%lmesh=40; % the number of meshes
n=nmesh-1; % the number of notes
l=lmesh-1; % the number of notes
ab=1;
alpha=ab^2 * (nmesh/lmesh)^2;
d11=1;
d22=1;
d3=1;
A=6*d11+8*d3*alpha+6*d22*alpha^2;
B=-4*(d11+d3*alpha);
Cc=-4*alpha*(d3+d22*alpha);
Dd=2*alpha*d3;
Ee=alpha^2*d22;
F=d11;
G=5*d11+8*d3*alpha+6*d22*alpha^2;
gg=6*d11+8*d3*alpha+5*d22*alpha^2;
Mm=5*d11+8*d3*alpha+5*d22*alpha^2;
x=1/(n+1) :1/(n+1) :1-1/(n+1);
y=1/(l+1) :1/(l+1) :1-1/(l+1);
[x,y]=ndgrid(x,y);
p=[x( :) y( :)];
x=p( :,1);
y=p( :,2);
m=zeros(n*l,n*1);
m(1,1)=Mm;
m(1,2)=B;
m(1,3)=F;

```

```

m(1,n+1)=Cc ;
m(1,n+2)=Dd ;
m(1,2*n+1)=Ee ;
m(2,1)=B ;
m(2,2)=gg ;
m(2,3)=B ;
m(2,4)=F ;
m(2,2+n-1)=Dd ;
m(2,2+n)=Cc ;
m(2,2+n+1)=Dd ;
m(2,2+2*n)=Ee ;
for i=3 :n-2,
m(i,i-2)=F ;
m(i,i-1)=B ;
m(i,i)=gg ;
m(i,i+1)=B ;
m(i,i+2)=F ;
m(i,i+n-1)=Dd ;
m(i,i+n)=Cc ;
m(i,i+n+1)=Dd ;
m(i,i+2*n)=Ee ;
end
m(n-1,n-1-2)=F ;
m(n-1,n-1-1)=B ;
m(n-1,n-1)=gg ;
m(n-1,n-1+1)=B ;
m(n-1,n-1+n-1)=Dd ;
m(n-1,n-1+n)=Cc ;

```

$m(n-1,n-1+n+1)=Dd$;
 $m(n-1,n-1+2*n)=Ee$;
 $m(n,n-2)=F$;
 $m(n,n-1)=B$;
 $m(n,n)=Mm$;
 $m(n,n+n-1)=Dd$;
 $m(n,n+n)=Cc$;
 $m(n,n+2*n)=Ee$;
 $m(n+1,n+1-n)=Cc$;
 $m(n+1,n+1-n+1)=Dd$;
 $m(n+1,n+1)=G$;
 $m(n+1,n+1+1)=B$;
 $m(n+1,n+1+2)=F$;
 $m(n+1,n+1+n)=Cc$;
 $m(n+1,n+1+n+1)=Dd$;
 $m(n+1,n+1+2*n)=Ee$;
 $m(n+2,n+2-n-1)=Dd$;
 $m(n+2,n+2-n)=Cc$;
 $m(n+2,n+2-n+1)=Dd$;
 $m(n+2,n+2-1)=B$;
 $m(n+2,n+2)=A$;
 $m(n+2,n+2+1)=B$;
 $m(n+2,n+2+2)=F$;
 $m(n+2,n+2+n-1)=Dd$;
 $m(n+2,n+2+n)=Cc$;
 $m(n+2,n+2+n+1)=Dd$;
 $m(n+2,n+2+2*n)=Ee$;
for $i=n+3 : 2*n-2$

```

m(i,i-n-1)=Dd ;
m(i,i-n)=Cc ;
m(i,i-n+1)=Dd ;
m(i,i-2)=F ;
m(i,i-1)=B ;
m(i,i)=A ;
m(i,i+1)=B ;
m(i,i+2)=F ;
m(i,i+n-1)=Dd ;
m(i,i+n)=Cc ;
m(i,i+n+1)=Dd ;
m(i,i+2*n)=Ee ;
end

m(2*n-1,2*n-1-n-1)=Dd ;
m(2*n-1,2*n-1-n)=Cc ;
m(2*n-1,2*n-1-n+1)=Dd ;
m(2*n-1,2*n-1-2)=F ;
m(2*n-1,2*n-1-1)=B ;
m(2*n-1,2*n-1)=A ;
m(2*n-1,2*n-1+1)=B ;
m(2*n-1,2*n-1+n-1)=Dd ;
m(2*n-1,2*n-1+n)=Cc ;
m(2*n-1,2*n-1+n+1)=Dd ;
m(2*n-1,2*n-1+2*n)=Ee ;
m(2*n,2*n-n-1)=Dd ;
m(2*n,2*n-n)=Cc ;
m(2*n,2*n-2)=F ;
m(2*n,2*n-1)=B ;

```

```

m(2*n,2*n)=G ;
m(2*n,2*n+n-1)=Dd ;
m(2*n,2*n+n)=Cc ;
m(2*n,2*n+2*n)=Ee ;
for j=3 :l-2,
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n-2*n)=Ee ;
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n-n)=Cc ;
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n-n+1)=Dd ;
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n)=G ;
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n+1)=B ;
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n+2)=F ;
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n+n)=Cc ;
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n+n+1)=Dd ;
m(1+(j-1)*n,1+(j-1)*n+2*n)=Ee ;
end
for j=3 :l-2,
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n-2*n)=Ee ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n-n-1)=Dd ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n-n)=Cc ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n-n+1)=Dd ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n-1)=B ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n)=A ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n+1)=B ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n+2)=F ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n+n-1)=Dd ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n+n)=Cc ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n+n+1)=Dd ;
m(2+(j-1)*n,2+(j-1)*n+2*n)=Ee ;

```

```

end
for j=3 :l-2,
m(j*n-1,j*n-1-2*n)=Ee ;
m(j*n-1,j*n-1-n-1)=Dd ;
m(j*n-1,j*n-1-n)=Cc ;
m(j*n-1,j*n-1-n+1)=Dd ;
m(j*n-1,j*n-1-2)=F ;
m(j*n-1,j*n-1-1)=B ;
m(j*n-1,j*n-1)=A ;
m(j*n-1,j*n-1+1)=B ;
m(j*n-1,j*n-1+n-1)=Dd ;
m(j*n-1,j*n-1+n)=Cc ;
m(j*n-1,j*n-1+n+1)=Dd ;
m(j*n-1,j*n-1+2*n)=Ee ;
end
for j=3 :l-2,
m(j*n,j*n-2*n)=Ee ;
m(j*n,j*n-n-1)=Dd ;
m(j*n,j*n-n)=Cc ;
m(j*n,j*n-2)=F ;
m(j*n,j*n-1)=B ;
m(j*n,j*n)=G ;
m(j*n,j*n+n-1)=Dd ;
m(j*n,j*n+n)=Cc ;
m(j*n,j*n+2*n)=Ee ;
end
m((l-2)*n+1,(l-2)*n+1-2*n)=Ee ;
m((l-2)*n+1,(l-2)*n+1-n)=Cc ;

```


$$\begin{aligned}
& m((l-2)^*_{n+1},(l-2)^*_{n+1-n+1})=Dd ; \\
& m((l-2)^*_{n+1},(l-2)^*_{n+1})=G ; \\
& m((l-2)^*_{n+1},(l-2)^*_{n+1+1})=B ; \\
& m((l-2)^*_{n+1},(l-2)^*_{n+1+2})=F ; \\
& m((l-2)^*_{n+1},(l-2)^*_{n+1+n})=Cc ; \\
& m((l-2)^*_{n+1},(l-2)^*_{n+1+n+1})=Dd ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2-2*n})=Ee ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2-n-1})=Dd ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2-n})=Cc ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2-n+1})=Dd ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2-1})=B ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2})=A ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2+1})=B ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2+2})=F ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2+n-1})=Dd ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2+n})=Cc ; \\
& m((l-2)^*_{n+2},(l-2)^*_{n+2+n+1})=Dd ; \\
& \text{for } i=3 :n-2, \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i-2*n})=Ee ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i-n-1})=Dd ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i-n})=Cc ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i-n+1})=Dd ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i-2})=F ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i-1})=B ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i})=A ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i+1})=B ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i+2})=F ; \\
& m((l-2)^*_{n+i},(l-2)^*_{n+i+n-1})=Dd ;
\end{aligned}$$

$m((l-2)^*n+i,(l-2)^*n+i+n)=Cc$;
 $m((l-2)^*n+i,(l-2)^*n+i+n+1)=Dd$;
end
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1-2*n)=Ee$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1-n-1)=Dd$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1-n)=Cc$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1-n+1)=Dd$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1-2)=F$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1-1)=B$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1)=A$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1+1)=B$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1+n-1)=Dd$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1+n)=Cc$;
 $m(n^*(l-1)-1,n^*(l-1)-1+n+1)=Dd$;
 $m(n^*(l-1),n^*(l-1)-2*n)=Ee$;
 $m(n^*(l-1),n^*(l-1)-n-1)=Dd$;
 $m(n^*(l-1),n^*(l-1)-n)=Cc$;
 $m(n^*(l-1),n^*(l-1)-2)=F$;
 $m(n^*(l-1),n^*(l-1)-1)=B$;
 $m(n^*(l-1),n^*(l-1))=G$;
 $m(n^*(l-1),n^*(l-1)+n-1)=Dd$;
 $m(n^*(l-1),n^*(l-1)+n)=Cc$;
 $m((l-1)^*n+1,(l-1)^*n+1-2*n)=Ee$;
 $m((l-1)^*n+1,(l-1)^*n+1-n)=Cc$;
 $m((l-1)^*n+1,(l-1)^*n+1-n+1)=Dd$;
 $m((l-1)^*n+1,(l-1)^*n+1)=Mm$;
 $m((l-1)^*n+1,(l-1)^*n+1+1)=B$;
 $m((l-1)^*n+1,(l-1)^*n+1+2)=F$;

```

m((l-1)*n+2,(l-1)*n+2-2*n)=Ee ;
m((l-1)*n+2,(l-1)*n+2-n-1)=Dd ;
m((l-1)*n+2,(l-1)*n+2-n)=Cc ;
m((l-1)*n+2,(l-1)*n+2-n+1)=Dd ;
m((l-1)*n+2,(l-1)*n+2-1)=B ;
m((l-1)*n+2,(l-1)*n+2)=gg ;
m((l-1)*n+2,(l-1)*n+2+1)=B ;
m((l-1)*n+2,(l-1)*n+2+2)=F ;
for i=3 :n-2,
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i-2*n)=Ee ;
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i-n-1)=Dd ;
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i-n)=Cc ;
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i-n+1)=Dd ;
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i-2)=F ;
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i-1)=B ;
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i)=gg ;
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i+1)=B ;
m((l-1)*n+i,(l-1)*n+i+2)=F ;
end
m(n*l-1,n*l-1-2*n)=Ee ;
m(n*l-1,n*l-1-n-1)=Dd ;
m(n*l-1,n*l-1-n)=Cc ;
m(n*l-1,n*l-1-n+1)=Dd ;
m(n*l-1,n*l-1-2)=F ;
m(n*l-1,n*l-1-1)=B ;
m(n*l-1,n*l-1)=gg ;
m(n*l-1,n*l-1+1)=B ;
m(n*l,n*l-n-1)=Dd ;

```

```

m(n*1,n*1-n)=Cc ;
m(n*1,n*1-2)=F ;
m(n*1,n*1-1)=B ;
m(n*1,n*1)=Mm ;
for i=3 :n-2,
for j=3 :l-2,
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i-2*n)=Ee ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i-n-1)=Dd ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i-n)=Cc ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i-n+1)=Dd ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i-2)=F ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i-1)=B ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i)=A ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i+1)=B ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i+2)=F ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i+n-1)=Dd ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i+n)=Cc ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i+n+1)=Dd ;
m((j-1)*n+i,(j-1)*n+i+2*n)=Ee ;
end
end
ff=-1/((n+1)^2*(l+1)^2)*(2.*(x.^2).*((x-1).^2).*(y-1).^2+2.*(y.^2).*((x-1).^2).*(y-
1).^2+2.*(x.^2).*(y.^2).*((x-1).^2).*(y-1).^2+2.*(x.^2).*(y.^2).*((x-1).^2)+2.*(x.^2).*(y.^2).*(y-
1).^2+4.*(x).*(y.^2).*(2.*x-2).*(y-1).^2+4.*(y).*(x.^2).*(2.*(y)-2).*((x-1).^2).*(x-1)+120.*(y.^2).*(
1)+240.*(x).*(y).*(y-1)+120.*(y).*(x-1).*(y-1));
fw=m\ff;
u=casv(p);
E2(kk)=sqrt((1/(n+1)^2))*norm(u-fw)

```

```

E8(kk)=norm(u-fw,inf)
for i=1 :n+2,
for j=1 :l+2,
z(i,j)=0;
t(i,j)=0;
end
end
k=1;
for i=2 :n+1,
for j=2 :l+1,
z(i,j)=fw(k,1);
t(i,j)=u(k,1);
k=k+1;
end
end
x=0 :1/(n+1) :1;
y=0 :1/(l+1) :1;
subplot(2,2,1)
mesh(x,y,z);
subplot(2,2,2)
surf(x,y,t);title('solution exacte')
subplot(2,2,3)
surf(x,y,z)
shading flat
shading interp
fw(n*(l-1)/2+(n+1)/2)
xlabel('X-axis'), ylabel('Y-axis'), zlabel('Z-axis')
title([' Solution approchée ' num2str(fw(n*(l-1)/2+(n+1)/2)) ' x qa^4'])

```

```

subplot(2,2,4)
surf(x,y,z-t);title('Ereur')
end

```

4.2 Problème Bilaplacien par la méthode des éléments finis

Le but de ce programme est de calculer la solution numérique du problème du chapitre 2 (le problème Bilaplacien par la méthode des éléments finis en utilisant le Matlab 7.9.0.529)

```

clear all
load('matlab1')
E2=zeros(6,1);
E8=zeros(6,1);
E2phi=zeros(6,1);
E8phi=zeros(6,1);
i=0;
for k=0.01 :0.01 :0.1
i=i+1;
h(i)=k
dl=decsf(gd,sf,ns);
%subplot(2,3,1);pdegplot(dl);
[p,e,t]=initmesh(dl,'Hmax',k);
%[p,e,t]=refinemesh(dl,p,e,t);
%[p,e,t]=refinemesh(dl,p,e,t);
subplot(2,3,2);pdemesh(p,e,t);
bD=@pdebound;

```

```

[K,F]=asempde(bD,p,e,t,1,0,'-2.*(x.^2).*((x-1).^2).*(y-1).^2+2.*(y.^2).*((x-1).^2).*(y-
1).^2+2.*(x.^2).*(y.^2).*((x-1).^2).*(y-1).^2+2.*(x.^2).*(y.^2).*((x-1).^2)+2.*(x.^2).*(y.^2).*(y-
1).^2+4.*(x).*(y.^2).*(2.*x-2).*(y-1).^2+4.*(y).*(x.^2).*(2.*(y)-2).*((x-1).^2).*(x-1)+120.*(y.^2).*(
1)+240.*(x).*(y).*(y-1)+120.*(y).*(x-1).*(y-1)');
phi=K\F;
subplot(2,3,3);
pdesurf(p,t,phi);title('solution approch')
FF=pdeintrp(p,t,-phi);% approximé la sol au centre de chaque triangle
[KK,FFF]=asempde(bD,p,e,t,1,0,FF);
U=KK\FFF;
subplot(2,3,4);
%pdesurf(p,t,U);title('sol appro')
u=casv(p);
u=u';
subplot(2,3,5);
pdesurf(p,t,u);title('sol exac u')
E=u-U;
subplot(2,3,6);
pdesurf(p,t,-E);title('err entre sol appro et sol ex')
E2(i)=sqrt((h(i))^2)*norm(u-U);
E8(i)=norm(u-U,inf);
E2phi(i)=sqrt((h(i))^2)*norm(u-phi);
E8phi(i)=norm(u-phi,inf);
end
tab=[h' E2 E8]
tab=[h' E2phi E8phi]

```

4.3 Problème intégro-différentiel par la méthode des éléments finis en 1D

Le but de ce programme est de calculer la solution numérique du problème du chapitre 3 (le problème intégro-différentiel par la méthode des éléments finis en 1D en utilisant le Matlab 7.9.0.529)

```
clear all
x=input('le vecteur initial = ');
x=x';
h=1/(length(x)-1);
E=1;
f=@(t)(-1/12).*t.^3+(1/12).*t.^2-6.*t+2;
t=0 :h :1
n=length(t);
b=zeros(n,1);
b(1)=f(t(1)).*(h/2);
b(n)=f(t(n)).*(h/2);
for i=2 :n-1
b(i) =f(t(i)).*h
end
E=1;
while E>=1e-3
[F,J] = nlsf1(x,h,n);
y=x+inv(J)*(b-F);
E=norm(y-x)
x=y;
end
u=@(s)s.^3-s.^2;
```



```
subplot(1,2,1)
plot(t,u(t)^2-y);
subplot(1,2,2)
plot(t,u(t));
hold on
plot(t,y,'*')
```