République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université badji mokhtar-annaba
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme
de Doctorat en Mathématiques

Option: Mathématiques et Applications

Par

BELYACINE Sana

ETUDE DE CERTAINS SYSTEMES D'EQUATIONS PARABOLIQUES SEMI-LINEAIRES DEGENEREES

DIRECTEUR DE THÈSE : Nisse Lamine UNIV.B.M. ANNABA MC. (A)

Devant le jury

Rebbani	Faouzia	UNIV.B.M. ANNABA	Professeur	Président
Chibi	Ahmed Salah	UNIV.B.M. ANNABA	Professeur	Examinateur
Youkana	Amar	UNIV DE BATNA	Professeur	Examinateur
Boussetila	Nadjib	UNIV DE GUELMA	MC. (A)	Examinateur
Salmi	Abdelouahab	UNIV.B.M. ANNABA	MC. (A)	Examinateur

Remerciements

C'est avec une profonde émotion que je rends grâce au bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce modeste travail que j'ai tant attendu et espéré.

Je tiens tout d'abord à adresser ma gratitude la plus profonde et mes remerciements les plus chaleureux à mon directeur de thèse, M. Nisse Lamine, qui gràce à sa disponibilité, son soutien, ses consiels et ses encouragements m'a permis de mener à bien ce travail.

En fait, je ne saurais exprimer toute ma gratitude en quelques lignes.

Je suis très honorée de la présence de Prof. Rebbani Faouzia. Je tiens à la remercier chaleureusement et à lui assurer ma profonde reconnaissance

pour avoir accepté d'évaluer cette thèse et d'en présider le jury.

Je remercie les professeurs. Chibi Ahmed Salah, Youkana Amar, Boussetila Nadjib, Salmi Abdelouahab de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.

Un merci du fond du coeur, ma profonde gratitude ainsi que toute ma reconnaissance

je les exprime à mes parents à qui je dédie ce travail. Je remercie ma mère pour son amour et sa patience et mon père pour sa présence et son encouragement tout au long de ces années. Ainsi que du fond du couer, je remercie mon mari qui m'a encouragé et m'a beaucoup aidé tout le temps. Mes remerciements s'adressent également à toute ma famille, mes frères, mes soeurs.

Enfin, j'adresse mes remerciements à mes proches et mes amies pour le soutien constant tout au long des années de la thèse.

Résumé

Dans l'étude des problèmes de réaction-diffusion, le phénomène d'explosion des solutions en temps fini, est depuis ces dernières années, l'objet d'un grand nombre de travaux de recherches. Dans cette thèse, on propose l'étude d'un système d'équations paraboliques semi-linéaires dégénérées. On commence par l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de ce système, et on montre que sous certaines conditions suffissantes, la solution explose en un temps fini. On introduit un schéma semi-discret associé au système étudié, afin de détreminer des conditions suffissantes pour lesquelles la solution du problème semi-discret explose aussi en temps fini, avec de plus une estimation du temps d'explosion.

Mots-cléss: Système parabolique dégénéré, Existence locale, Explosion, Système semi-discret.

Abstract

In the context of reaction-diffusion problems, the phenomenon of blow-up of solutions in finite time, is the subject of a many research works. This thesis is concerned by the study of system of semi-linear and degenerate (or singular) parabolic equations. In the begining, we give some results on the existence and uniqueness of the solution of this system, and we show that under certain sufficient conditions, the solution blows up in a finite time. A semi-discrete scheme associated with the system studied above is introduced. We detremine sufficient conditions for which the solution of the semi-discrete problem, also blows up in finite time, and we give an estimation of the blowing up time.

Keywords: Degenerate parabolic system, Local existence, Blow-up, semi-discrete system.

[redacted]

Notations

$\mathbb{k}$ le corps des réelles ou des complexes

$M_n(\mathbb{k})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{k}$

Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$

δ_h^2 opérateur aux différences central d'ordre 2

$\rho(A)$ le rayon spéctrale de A

$\langle .,. \rangle$ le produit scalaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ multi indice

$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ avec $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ dérivée partielle d'ordre α

$W^{m,p}(\Omega)$ espace de Sobolev d'ordre m dans $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\|_{m,p}$

D_x dérivée partielle par rapport aux variables x_1,...,x_n

D_x^2 dérivée partielle d'ordre 2 par rapport aux variables x_1,...,x_n

$D_t = \frac{\partial}{\partial t}$

Table des matières

Introduction

Le phénomène d'explosion en temps fini se produit dans divers types d'équations d'evolution non linéaires. On rencontre ce type de phénomènes dans l'étude de plusieurs classe d'équations aux dérivées paratielles telles que les équations de Schrödinger, les équations hyperboliques, ainsi que les équations paraboliques, et en particulier les équations de réaction-diffusion (voir [27, 15, 12, 25]).

Les phénomènes étudés n'étant plus homogènes en espace, les états sont des fonctions du temps et d'une variable spaciale (donc distribuées sur un domaine spacial). Ces phénomènes se modélisent (naturellement) sous forme de systèmes à paramètres distribués. Leur comportement dynamique est décrit, souvent par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, d'où l'apparition du terme diffusif représenté par le Laplacien dans le système.

Pour expliquer l'apparition du terme diffusif dans les systèmes de réaction-diffusion, nous présentons ici un exemple de la mécanique des fluides, modèle d'une équation de réaction-diffusion.

Considérons un fluide parfait en movement dans une région $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Notons par t le temps , par $\varrho(x,t)$ et $\upsilon(x,t)$ respectivement la densité et la vitesse au point x et à l'instant t. Alors la masse dans G à l'instant t est représentée par

$$m_G(t) = \int_G \varrho(x,t)dx \tag{1.1.1}$$

De plus, notons par B une partie relativement compacte dans G telle que B et sa frontière ∂B soient inclus dans G (par exemple une petite boule).

Alors une approximation de la masse sortante de B à travers ∂B dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ est donnée par l'expression

$$\Delta t \int_{\partial B} \langle \varrho \upsilon(x,t), \nu \rangle \, d\sigma(x) \tag{1.1.2}$$

($\nu =$ la norme extérieure issue de ∂B, $d\sigma$ un élément de surface de ∂B).

En effet, le flot de quantité de fluide qui traverse un petit élément de surface dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ remplit approximativement un parallélépipède de hauteur $h := (\nu \Delta t \mid \nu)$ et de base $d\sigma$. La base est formée par une partie du plan tangent à ∂B de surface $d\sigma$.

Maintenant, (1.1.2) s'obtient par passage à la limite. On a aussi

$$-\int\limits_{\partial B} \langle \rho \upsilon(.,t), \nu \rangle \, d\sigma \tag{1.1.3}$$

qui représente la croissance de la masse à l'instant t dûe à la direction du flot vers région B.

Si on applique le théorème de divergence à (1.1.3), on obtient

$$-\int\limits_{\partial B} \langle \rho \upsilon(.,t), \nu \rangle \, d\sigma = -\int\limits_{B} \operatorname{div} \langle \rho \upsilon(.,t), \nu \rangle \, dx \tag{1.1.4}$$

De plus, supposons que le fluide est créé à l'intérieur de G, et notons par $f(x,t)$ la densité de la source au point x et à l'instant t. Alors

$$\int\limits_{B} f(x,t) dx$$

est la quantité de fluide créée dans B à l'intstant t.

De la même façon, on obtient que la croissance de la masse en temps à l'intérieur de B, et à l'instant t est donnée par

$$\frac{dm_B(t)}{t} = -\int\limits_{B} \operatorname{div} \langle \rho \upsilon(.,t), \nu \rangle \, dx + \int\limits_{B} f(x,t) dx \tag{1.1.5}$$

(conservation de masse). Sous des hypothèses de régularité on peut dériver (1.1.1) sous l'integrale, pour obtenir à partir de (1.1.5)

$$\int_B [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) - f](x,t)dx = 0 \tag{1.1.6}$$

ce qui est vérifié pour toute région admissible $B \subseteq G$ (ici, admissible veut dire que le théorème de la divergence peut être appliqué et $\overline{B} \subseteq G$).

Possons maintenant

$$\varphi(x,t) := [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) - f](x,t),\ \forall\ (x,t) \in G \times \mathbb{R}$$

et admettons que φ est continue. Supposons que t est fixé, et soit $x_0 \in G$ un point arbitraire. A partir des considérations ci-dessus, il s'en suit que

$$\frac{1}{vol(B)} \int_B \varphi(x,t)dx = 0$$

pour toute région admissible B. Si maintenant on ne considère que les régions admissibles pour lesquelles $x_0 \in B$, alors une estimation simple montre que

$$\varphi(x_0,t) = \lim_{\substack{vol(B) \to 0 \\ x_0 \in B}} \frac{1}{vol(B)} \int_B \varphi(x,t)dx.$$

Ainsi, à partir de (1.1.6) (et des hypothèses de régularité) on a l'équation de transport

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = f \tag{1.1.7}$$

pour tout $x \in G$ et pour tout temps t. Admettons maintenant que le mouvement du fluide est des régions de haute densité vers ceux de moindre densité, c-à-d. on suppose qu'on est en présence d'un processus de compensation, autrement dit diffusion.

Dans le cas le plus simple, on a

$$\rho v = -a\overrightarrow{\mathrm{grad}}.\rho$$

où $a > 0$ est une constante : coefficient de diffusion. En général le fluide ne suit pas les courbes de plus forte pente de déscente. La direction du flot est plutôt dependante de la position du temps de la matière (c-à-d. le fluide considéré). Ainsi on aura

$$\rho v = -A\overrightarrow{\mathrm{grad}}.\rho \tag{1.1.8}$$

où $A = [a^{ik}]_{1\leq i,k\leq n}$ est la matrice de diffusion dépendante de x, t et ρ, c-à-d. $A = A(x,t,\rho) \in L(\mathbb{R}^3)$. Le fait que le fluide est en mouvement à partir des régions de haute densité vers ceux de moindre densité, implique que

$$\left\langle \rho v, \overrightarrow{\mathrm{grad}}.\rho \right\rangle \leq 0$$

donc

$$\left\langle A\,\mathrm{grad}\,\rho, \overrightarrow{\mathrm{grad}}.\rho \right\rangle \geq 0$$

ceci est vérifié chaque fois que $A(x,t,\rho)$ est (semi-) définie positive, ce qui est habituellement supposé. L'hypothèse principale qu'on utilise pour obtenir (1.1.8) est connue sous des noms différents (selon le contexte physique), par exemple la loi de Fick, ou loi de conduction de la chaleur, etc... (voir [1, 2, 17, 27]) Il résulte maintenant de (1.1.7) et (1.1.8) que l'équation de diffusion

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathrm{div}(A\overrightarrow{\mathrm{grad}}.\rho) = f \tag{1.1.9}$$

est vérifiée dans G. En coordonnées cartésiennes (1.1.9) devient (dans $\mathbb{R}^p$ pour p quelconque)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i,k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ik}\frac{\partial \rho}{\partial x_k}) + f$$

ici on obtient une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. En particulier, lorsque $A = aI_p$, $a > 0$, (I_p étant la matrice identité dans $\mathbb{R}^p$), et la réaction f est fonction de la densité ρ qu'on notera par u (1.1.9) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(u) \tag{1.1.10}$$

où $\Delta u := \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u)$, c-à-d.,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

en coordonnées cartésiennes. L'équation (1.1.10) est appelée équation de la chaleur (semi-linéaire) et Δ l'opérateur de Laplace, lequel représente la diffusion. L'objectif de ce travail est l'étude du comportement de la solution d'un système de réaction-diffusion semi-linéaire dégénéré, ayant la forme suivante

$$\begin{cases} xu_t\,(x,t) = u_{xx}(x,t) + v^p(x,t) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ (1-x)\,v_t\,(x,t) = v_{xx}(x,t) + u^p(x,t) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u\,(x,t) = v\,(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0,\ x \in \overline{\Omega} & \end{cases} \tag{1.1.11}$$

où $\Omega =]0,1[$, $u_0,\ v_0 \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$; $u_0 = v_0 = 0$ sur $\partial\Omega$ et $p > 1$. Soit $D = \Omega \times]0,T[$, $\partial D = \partial\Omega \times [0,T] \cup \left(\overline{\Omega} \times \{0\}\right) \cup \left(\overline{\Omega} \times \{T\}\right)$, où T est le temps d'existence maximal de la solution. On dit que u (resp. v) explose en temps fini T, s'il existe $x_0 \in [0,1]$ et une suite $(x_n,t_n) \in]0,1[\times]0,T[$ tel que $t_n \to T$, $x_n \to x_0$ et $u\,(x_n,t_n) \to \infty$ (resp. $v\,(x_n,t_n) \to \infty$) quand $n \to \infty$.

Le système (1.1.11) est dit dégénéré aux points $x = 0$ et $x = 1$ en ce sens que les coefficients de u_t, v_t tendent vers 0 lorsque x tend respectivement vers 0 et 1.

L'étude de l'explosion des solutions pour les équations paraboliques semi-linéaires dégénérées a fait l'objet de recherches de plusieurs auteurs.

Floater [8] et Chan et Lui [3] se sont intéressés aux propriétés d'explosion du problème parabolique dégénéré suivant:

$$\begin{cases} x^q u_t - u_{xx} = u^p\,, \quad (x,t) \in \left]0,a\right[\times \left]0,T\right[\,, \\ u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0, \qquad\qquad t \in \left]0,T\right[\,, \\ u\left(x,o\right) = u_0\left(x\right) \geq 0, \qquad\qquad\quad x \in \left[0,a\right]\,, \end{cases} \tag{1.1.12}$$

où $q > 0$ et $p > 1$. Sous certaines conditions sur la donnée initiale $u_0\left(x\right)$, Floater [8] a prouvé que la solution $u\left(x,t\right)$ de (1.1.12) explose à la frontière $x = 0$ pour le cas $1 < p \leq q+1$. Ceci contraste avec l'un des résultats de [11], et celui de [10] dans le cas des systèmes de réaction diffusion non dégénérés, où les auteurs montrent que pour le cas $q = 0$, l'ensemble d'explosion de la solution $u\left(x,t\right)$ de (1.1.12) est un sous ensemble compact de $\left]0,a\right[$. La motivation pour l'étude du problème (1.1.12) vient à partir d'un modèle de Ockendon (voir [**?**]) concernant le flux d'un fluide dans un canal dont la viscosité dépend de la température.

$$xu_t = u_{xx} + e^u,$$

où u représente la température d'un fluide. Dans [8] Floater a approché la quantité e^u par u^p et a considéré (1.1.12). Dans [19], **M. Kouche** a étudié la même question, pour un système d'équations paraboliques semi-linéaires dégénérées de la forme

$$\begin{cases} xu_t = u_{xx} + v^p \qquad\qquad x \in \Omega,\ t > 0, \\ xv_t = v_{xx} + u^p \qquad\qquad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = v(x,t) = 0 \quad\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x),\ x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{1.1.13}$$

Il a montré que si les deux données initiales u_0 et v_0 obéissent à des conditions semblables à celle de [8], la solution (u,v) du système (1.1.13) explose en temps fini au point de dégénérescence. Ce résultat est obtenu dans [19], grace à la structure particulière de ce système (la dégénérésence des deux équations est au point $x = 0$). Dans [28, 29, 21], les auteurs ont étudié des systèmes paraboliques dégénérés et singuliés, avec des réactions de type non locale. Dans cette thèse on a étudié le cas d'un système comme (1.1.11), où l'effet de la dégénérescence est aux deux points de la frontière $x = 0$ et $x = 1$.

La thèse est composée de trois chapitres. Ainsi, dans le premier chapitre, on rappelle les notions de bases et certaines définitions qu'on utilise dans la suite de cette thèse.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à l'explosion en temps fini pour le problème (continu) (1.1.11). On commence par l'étude de l'existence locale et l'unicité de la solution du système (1.1.11). Une téchnique de troncature permet de lever la dégénérescence, et ramène ainsi ce système a un problème non dégénéré. On établit ensuite des conditions suffissantes pour que la solution de ce système explose en un temps fini.

Enfin, le dernier chapitre contient l'essentiel de notre travail de recherche. On considère une approximation du système (1.1.11), basée sur la méthode des lignes, par l'utilisation d'un schéma de différences finies en espace. Ainsi, on introduit une version semi-discrete du problème continu (1.1.11), et on donne certaines propriétées concernant le schéma semi-discret. Sous certaines conditions on montre que la solution du problème semi-discret explose en un temps fini, et on donne une estimation du temps d'explosion. De plus on obtient un résultat sur la convergence des solutions du problème semi-discret vers la solution du problème continue (1.1.11). On montre aussi que la famille du temps d'explosion des solutions discrètes converge vers le temps d'explosion de la solution du système (1.1.11).

Ce travail a permis la production scientifique suivante :

Publication internationale :

Blow-up solutions for semi-linear degenerate parabolic systems par Lamine Nisse et Sana Belyacine, publié dans "Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems"

Communications internationales :

1. Sur le calcul d'explosion des solutions pour un système parabolique semi-linéaire dégénéré, Sana Belyacine et Lamine Nisse, Congés des Mathématiciens Algériens CMA2012, Université Badji Mokhtar Annaba, 7-8 Mars 2012.

2. Caractérisation de l'ensemble de point d'explosion pour un système parabolique semi-linéaire dégénéré, Sana Belyacine et Lamine Nisse, 18ème Colloque CSMT 2012 de la Société Mathématiques de Tunisie.

3. Etude numérique du problème d'explosion pour un système parabolique semi-linéaire dégénéré, Sana Belyacine et Lamine Nisse, La 8ème Rencontre d'Analyse Mathématique et ses Applications, RAMA8, Alger, 26-29 novembre 2012.

Communications nationales :

1. Existence et Explosion en temps fini de la Solution d'un Système Parabolique Semi-linéaire Dégénéré, Sana Belyacine et Lamine Nisse, La septième Rencontre d'Analyse Mathématiques et ses Applications (RAMA'07) 24-26 octobre 2010.

2. Semi-groupes Intégrés Appliqués aux Systèmes de Réaction-Diffusion Dégénérés, Sana Belyacine et Lamine Nisse, 1ères Journées des Jeunes Chercheurs 4-5 Mai 2011, LMA, Annaba.

3. Existence locale de la solution d'un système de réaction-diffusion dégénéré, Sana Belyacine et Lamine Nisse, Journées sur les problèmes inverses (JIP'11), Annaba, 14-16 Novembre 2011.

CHAPITRE 1

Préliminaires et Notions fondamentales

1.1 Points et ensemble d'explosion

Dans cette thèse nous nous intéresserons en particulier au comportement de la solution au voisinage de T, où T est le temps d'existence maximal de la solution de (1.1.11). D'après la théorie, deux cas se présentent :

1. $T = +\infty$: on dit que l'existence de la solution est globale.
2. $T < +\infty$: dans ce cas, $\lim_{t \to T} \|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$,

(resp $\lim_{t \to T} \|v(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$). On dit alors que u (resp v) explose en temps fini T.

Définition 1.1.1 *On dit que la solution (u, v) du système (1.1.11) explose en temps fini T, si u ou bien v explose en temps fini.*

Définition 1.1.2 *Un point $a \in \Omega$ est dit point d'explosion de u (resp v) si $u(x,t)$(resp $v(x,t)$) n'est pas bornée au voisinage de (a, T).*

Définition 1.1.3 *On appelle ensemble d'explosion $S \subset \overline{\Omega}$ l'ensemble de tous les points d'explosion.*

$$S = \{x \in \Omega : \exists (x_n, t_n) \subset \Omega \times]0, T[\,,\ t_n \to T,\ x_n \to x,\ u(x_n, t_n) \to \infty \text{ quand } n \to \infty\}.$$

Définition 1.1.4 *les fonctions u et v sont des solutions classiques du système (1.1.11), si*

$$u, v \in C^{2,1}\left(]0,1[\times]0,t_0[\right) \cap C([0,1]\times[0,t_0[)$$

et vérifient le système d'équations (1.1.11).

1.2 Ellipticité et opérateurs paraboliques

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, considérons l'opérateur

$$Lu = Au - \frac{\partial u}{\partial t}$$

où A est un opérateur elliptique de dégré 2 définie par

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Définition 1.2.1 *([26]) L'opérateur A est fortement elliptique dans Ω, s'il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j \geq \mu\left|\zeta\right|^2,\ x \in \Omega.$$

Définition 1.2.2 *([26]) On dit que L est uniformément parabolique dans D, si l'opérateur A est fortement elliptique.*

1.3 Quelques inégalités

Définition 1.3.1 *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ est un convexe si pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$*

$\lambda x + (1-\lambda) y \in E$ pour tout $x,\ y \in E$.

Définition 1.3.2 *La fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe si*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

pour tout $(x, y) \in E^{\,2}$ *et* $\lambda \in [0,1]$.

On dit que f *est strictement convexe si pour tout couple* (x, y) *de points distincts de* E *et tout réel* $\lambda \in]0,1[$, *on a :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\, y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$

On dit qu'une fonction f *est concave sur un intervalle* I *si* $-f$ *est convexe.*

Lemme 1.3.1 *(convexité de* $x \to x^p$*) On suppose que* $a_i \geq 0$ *et* $p > 1$, *alors*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^p \leq n^{p-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i^p).$$

Preuve. A partir de la convexité de $x \to x^p$, on obtient

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)^p \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^p.$$

En multipliant les deux termes de l'inégalité par n^p, on prouve le lemme. ■

Remarque 1.3.1 *le lemme au-dessus est un cas special de l'inégalité de Jensen.*

Théorème 1.3.1 *Soient* $f \in L^1 : [0,1] \to]a,b[$ *une fonction intégrable, et* $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe, alors*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 (\varphi \circ f)(x)\, dx.$$

Preuve. Puisque φ est convexe sur $]a,b[$, φ est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines $(\Psi_j)_{j\in J}$, avec J un ensemble. C'est-à-dire que pour tout $y \in]a,b[$,

$$\varphi(y) = \sup_{j\in J} \Psi_j(y).$$

Puisque Ψ_j est affine, elle peut s'écrire sous la forme $\Psi_j(y) = \alpha_j y + \beta_j$ pour tout $y \in]a,b[$.

On déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\Psi_j \circ f)(x)dx &= \int_0^1 (\alpha_j f(x) + \beta_j)\, dx \\ &= \alpha_j \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \beta_j dx \\ &= \alpha_j \int_0^1 f(x)dx + \beta_j \\ &= \Psi_j \left(\int_0^1 f(x)dx \right)\end{aligned}$$

Or, pour tout $j \in J$, on a $\Psi_j \leq \varphi$, donc $\Psi_j \circ f \leq \varphi \circ f$ et finalement

$$\int_0^1 (\Psi_j \circ f)(x)dx \leq \int_0^1 (\varphi \circ f)(x)dx.$$

On obtient donc

$$\Psi_j \left(\int_0^1 f(x)d\mu \right) \leq \int_0^1 (\varphi \circ f)(x)dx.$$

Or, pour tout $y \in]a, b[$, on rapelle que $\varphi(y) = \sup_{j \in J} \Psi_j(y)$, donc

$$\varphi \left(\int_0^1 f(x)dx \right) = \sup_{j \in J} \Psi_j \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \leq \int_0^1 (\varphi \circ f)(x)\, dx.$$

■

1.4 Espaces de Sobolev

Définition 1.4.1 *On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables sur Ω et telles que $|u|^p$ est intégrable ($1 \leq p < \infty$) muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.4.2 *On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables sur Ω et telles qu'il existe C tel que $|u(x)| \leq C$ pour presque tout $x \in \Omega$ muni de la norme $\|u\| = \inf\{C > 0,\ |u(x)| \leq C$ p.p sur $\Omega\}$.*

Définition 1.4.3 *L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Dans cette définition la dérivée partielle D^α est entendue au sens des distributions.

1.5 Espaces de Hölder

Soient I un intervalle dans $\mathbb{R}$, X est un espace de Banach, et E un ouvert convexe de X.

Rappelons qualques notions de régularité des fonctions définies sur I ou/et X .

Définition 1.5.1 *1. On dit que f est globalement lipschitizienne par rapport à x s'il existe $L \geq 0$ telle que*

$$\forall x_1, x_2 \in E, \forall t \in I, \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_X \leq L \|x_1 - x_2\|_X.$$

2. On dit que f est localement lipschitizienne par rapport à x si pour tout $(x_0, t_0) \in I \times E$, il existe un voisinage Υ de (x_0, t_0) et une constante $L(x_0, t_0) \geq 0$ tels que

$$\forall (t, x_1) \in \Upsilon, \ (t, x_2) \in \Upsilon, \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_X \leq L(x_0, t_0) \|x_1 - x_2\|_X.$$

Définition 1.5.2 *Une fonction $f : I \to X$ est dite hölderienne d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, sur I, s'il existe une constante L telle que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L |t - s|^\alpha \qquad \text{pour } s, t \in I.$$

La fonction f est dite localement hölderienne dans I, si f est hölderienne au voisinage de tout point $t \in I$.

On note la famille de toutes les fonctions hölderiennes d'ordre α sur I par $C^\alpha(I, X)$.

Définition 1.5.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine, $0 < \alpha < 1$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit C^α et $C^{m+\alpha}$ par*

$$C^\alpha(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ bornée telle que: } |u(x) - u(y)| \leq L \|x - y\|^\alpha \ \ \forall\ x,\ y \in \Omega\}$$
$$C^{m+\alpha}(\Omega) = \left\{u \in C^\alpha(\Omega) \text{ telle que } D^\beta u \in C^\alpha(\Omega),\ |\beta| \leq m\right\}$$

Les espaces $C^\alpha(\Omega)$ et $C^{m+\alpha}(\Omega)$ munient des normes respectives

$$\|u\|_{C^\alpha(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$
$$\|u\|_{C^{m+\alpha}(\Omega)} = \sum_{|\beta| \leq m} \left\|D^\beta u\right\|_{C^\alpha(\Omega)}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1.5.1 *1. Les espaces $C^{m+\alpha}(\Omega)$ sont appelés espaces de Hölder.*

2. Par définition l'espace de Hölder $C^{2+\alpha}(D)$ est

$$C^{2+\alpha}(D) = \left\{u \in C^\alpha(D),\ \text{telle que } D_x u, D_x^2 u, D_t u \in C^\alpha(D)\right\}$$

Remarque 1.5.2 *L'espace $C^{2+\alpha}(D)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(D)} = \|u\|_{C^\alpha(D)} + \sum_1^n \left\|D_{x_j} u\right\|_{C^\alpha(D)} + \sum_1^n \left\|D_{x_j}^2 u\right\|_{C^\alpha(D)} + \|D_t\|_{C^\alpha(D)}$$

est un espace de Banach.

Lemme 1.5.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné avec une frontière $\partial\Omega$ de classe C^m, et A un opérateur fortement elliptique sur $X = L^p(\Omega)$ de domaine $D(A) \subset W^{m,p}(\Omega)$ pour un certain $m \geq 1$. Alors pour $0 \leq \alpha \leq 1$ on a*

$$X^\alpha \subset W^{k,q}(\Omega) \text{ si } k - \frac{n}{q} < m\alpha < \frac{n}{p},\ q \geq p$$
$$X^\alpha \subset C^\upsilon(\Omega) \text{ si } 0 \leq \upsilon < m\alpha - \frac{n}{p}$$
$$W^{k,p}(\Omega) \subset C^\upsilon(\Omega) \text{ si } 0 \leq \upsilon < m\alpha - \frac{n}{p}.$$

1.6 Théorèmes de régularité

Théorème 1.6.1 *([9, 14]) Soient l'opérateur parabolique*

$$L = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_j} + c - \frac{\partial}{\partial t}$$

et $f : D \to \mathbb{R}$ est une application continue. Supposons que

1. *Les coefficients de L sont localement Hölderiènnes-continument d'exposant α dans D, et*

$$\|a_{ij}\|_{C^\alpha(D)} \leq k, \ \|b_i\|_{C^\alpha(D)} \leq k, \ \|c\|_{C^\alpha(D)} \leq k.$$

2. *Il existe $\kappa > 0$ tel que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\zeta_i\zeta_j \geq \kappa \left|\zeta\right|^2, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

3. *f est localement Hölderiènne-continument d'exposant α dans D, et*

$$\|f\|_{C^\alpha(D)} < \infty.$$

Alors pour tout ψ définie et continue sur ∂D, le problème parabolique

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } D \\ u = \psi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admet une solution $u \in C^{2+\alpha}(D)$. De plus

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(D)} \leq K \left(\|u\|_\infty + \|f\|_{C^\alpha(D)} \right)$$

où K ne dépend que de κ, D, k.

De plus si on suppose que

$$D_x^m D_t^k a_{ij}, \ D_x^m D_t^k b_i, \ D_x^m D_t^k c, \ D_x^m D_t^k f, \ \ (0 \leq m + 2k \leq p, \ k \leq q)$$

sont Holderiènnes d'exposant α dans D, alors

$$D_x^m D_t^k u, \quad (0 \leq m + 2k \leq p + 2, k \leq q + 1)$$

existent et sont Holderiènnes d'exposant α dans D .

Théorème 1.6.2 *([9, 14]) Soient $D = \Omega \times]0, T[$, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^\infty$, $p \geq 2$, $\varphi \in C^2$ et bornée. Alors si u est la solution classique du problème*

$$\begin{cases} u_t = a(x,t)u_{xx} + f(x,t) & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\\ u = \varphi & \text{en } t = 0 \end{cases}$$

où a est une fonction continue et bornée sur D, on a sur tout compacte Q dans D l'inégalité suivante

$$\|u_{xx}\|_{L^p} + \|u_x\|_{L^p} + \|u_t\|_{L^p} \leq C$$

où C ne dépend que des bornes de f, φ, u et de Q.

1.7 Principe du maximum

Soient $D = \Omega \times]0, T[$ un cylindre borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ de frontière $\partial D = \partial\Omega \times [0, T] \cup \left(\overline{\Omega} \times \{0\}\right) \cup \left(\overline{\Omega} \times \{T\}\right)$ et

$$L_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^k \frac{\partial}{\partial x_i} + C^k - \frac{\partial}{\partial t}, \qquad k = 1, 2$$

deux opérateurs paraboliques dans D.

Considérons le système parabolique faiblement couplé suivant:

$$\begin{cases} Lu = L_1 u + d_1 v \\ Lv = L_2 v + d_2 u \end{cases}$$

où u, v sont de classe $C^{2,1}$ sur D.

Soient les deux hypothèses suivantes:

A) Les coefficients de L_1, L_2 ainsi que d_1, d_2 sont continues dans D.

B) Il existe M, tels que $C^i(x,t) \leq M$, $d_i(x,t) \leq M$ pout tout $(x,t) \in D$.

Proposition 1.7.1 *([23]) Supposons que l'hypothèse (B) est satisfaite, Si u, v sont de classe $C^{2,1}$ dans D tel que, $L_1 u > 0$, $L_2 v > 0$ dans D et $u < 0, v < 0$ sur ∂D (resp. $L_1 u < 0, L_2 v < 0$ dans D et $u > 0, v > 0$ dans ∂D), alors $u < 0, v < 0$ dans D (resp. $u > 0, v > 0$ dans D).*

Théorème 1.7.1 *([23] Supposons que les deux hypothèses (A) et (B) sont satisfaites. Si u, v sont continues dans $\overline{D}$ de classe $C^{2,1}$ dans D tel que, $L_1 u \geq 0$, $L_2 v \geq 0$ dans D et $u \leq 0, v \leq 0$ sur ∂D (resp. $L_1 u \leq 0$, $L_2 v \leq 0$ dans D et $u \geq 0, v \geq 0$ sur ∂D), alors $u \leq 0, v \leq 0$ dans D (resp. $u \geq 0, v \geq 0$ dans D).*

1.8 Méthodes des sous et sur solutions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

$$L_i = \sum_{k,j=1}^{n} a^i_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b^i_k \frac{\partial}{\partial x_k}, i = 1, 2$$

deux opérateurs fortement elliptiques à coefficient de classe C^1 bornés sur Ω.

Considérons le système parabolique

$$\begin{cases} u_t = L_1 u + f_1(t, x, u, v) & \\ v_t = L_2 v + f_2(t, x, u, v) & x \in \Omega,\ t \in]0, T[\\ u(x, t) = h_1(x, t) & \\ v(x, t) = h_2(x, t) & x \in \partial\Omega,\ t \in]0, T[\\ u(0, x) = u_0(x) & \\ v(0, x) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{1.8.1}$$

où u_0, v_0 sont de classe $C^1(\Omega)$ et positives, h_1, $h_2 \in C(\partial\Omega \times]0, T[)$ et positives, f_1, f_2 sont localement lipshitziennes et croissantes par rapport à (u, v).

Définition 1.8.1 *([22, 6]) Un couple de fonction $(\overline{u}, \overline{v})$ de classe $C^{2,1}(\Omega \times]0, T[)$ est une sur-solution du problème (1.8.1) s'il vérifie les inégalités suivantes*

$$(\overline{u})_t - L_1\overline{u} - f_1(t, x, \overline{u}, \overline{v}) \geq 0,\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[$$

$$(\overline{v})_t - L_2\overline{v} - f_2(t, x, \overline{u}, \overline{v}) \geq 0,\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[$$

$$\overline{u}|_{\partial\Omega} \geq h_1,\ \ \overline{v}|_{\partial\Omega} \geq h_2$$

$$\overline{u}|_{t=0} \geq u_0,\ \ \overline{v}|_{t=0} \geq v_0$$

Définition 1.8.2 *([22, 6]) Un couple de fonction $(\underline{u}, \underline{v})$ de classe $C^{2,1}(\Omega \times]0, T[)$ est une sous solution du problème (1.8.1) s'il vérifie les inégalités suivantes*

$$(\underline{u})_t - L_1\underline{u} - f_1(t, x, \underline{u}, \underline{v}) \leq 0,\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[$$

$$(\underline{v})_t - L_2\underline{v} - f_2(t, x, \underline{u}, \underline{v}) \leq 0,\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[$$

$$\underline{u}|_{\partial\Omega} \leq h_1,\ \ \underline{v}|_{\partial\Omega} \leq h_2$$

$$\underline{u}|_{t=0} \leq u_0,\ \ \underline{v}|_{t=0} \leq v_0$$

Le théorème suivant nous donne une propriété importante concernant les sous et sur-solutions.

Théorème 1.8.1 *([22]) Soient $(\underline{u}, \underline{v})$ et $(\overline{u}, \overline{v})$ des sous et sur-solutions respectivement du système (1.8.1) sur $\Omega \times]0, T[$. Alors le système (1.8.1) admet une solution unique (u, v) sur $\Omega \times]0, T[$ telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u},$$

$$\underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

CHAPITRE 2

Problème parabolique semi-linéaire dégénéré

2.1 Position du problème

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence locale et l'explosion en temps fini de la solution du problème parabolique semi-linéaire dégénéré suivant

$$\begin{cases} xu_t\,(x,t) = u_{xx}(x,t) + v^p(x,t) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ (1-x)\,v_t\,(x,t) = v_{xx}(x,t) + u^p(x,t) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u\,(x,t) = v\,(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0,\ x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où $\Omega = \left]0,1\right[$, $u_0,\ v_0 \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$; $u_0 = v_0 = 0$ sur $\partial\Omega$ et $p > 1$. Soit $D = \Omega \times \left]0,T\right[$, $\partial D = \partial\Omega \times [0,T] \cup \left(\overline{\Omega} \times \{0\}\right) \cup \left(\overline{\Omega} \times \{T\}\right)$.

On commence par établir l'existence locale et l'unicité de la solution du problème (2.1.1), et sous certaines conditions suffisantes on montre que la solution de ce système explose en un temps fini.

2.2 Existence locale et l'unicité de la solution

On propose dans ce paragraphe l'étude de l'existence locale et l'unicité d'une solution classique du système (2.1.1). Une téchnique de troncature du domaine au voisinage des points frontière, permet de lever la dégéneresence et amener ce système à une suite de problèmes non dégénérés qui admettent une solution locale positive.

Sous certaines hypothèses sur la partie non linéaire, et à l'aide de la méthode des sous et sur solutions, on montre que le système admet une solution locale unique.

Pour établir l'existence d'une solution locale du système (2.1.1), l'idée consiste à tronquer le domaine $]0,1[$ en considérant l'intervalle $]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\subset]0,1[$, où $0 < \varepsilon_1 < 1-\varepsilon_2$ de telle sorte que le système (2.1.1) devient non dégénéré sur $]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\times]0,T[$.

On considère alors le problème régulier suivant :

$$\begin{cases} xu_t = u_{xx} + v^p & x \in]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\,,\ t \in]0,T[\\ (1-x)\, v_t = v_{xx} + u^p & x \in]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\,,\ t \in]0,T[\\ u(x,t) = v(x,t) = 0 & x \in \{\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2\}\,,\ t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0,\ x \in]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\end{cases} \tag{2.2.1}$$

En appliquant les résultats d'existence locale de la solution d'un système parabolique (non dégénéré) au problème (2.2.1) (voir [15, 13]), on obtient le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Il existe $t_0 > 0$, tel que le système (2.2.1) admet une solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ sur $]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\times]0,t_0[$ où $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.*

Le lemme suivant, nous donne une propriété importante des suites (u_ε), (v_ε).

Lemme 2.2.2 *Soit $\delta_1 < \delta_1'$, $\delta_2 < \delta_2'$ et supposons que $(u_{\delta_1\delta_2}, v_{\delta_1\delta_2})$, $(u_{\delta_1'\delta_2'}, v_{\delta_1'\delta_2'})$ sont des solutions du système (2.2.1) sur $]0,t_0[$.*

Alors

$$u_{\delta_1'\delta_2'} < u_{\delta_1\delta_2}$$
$$v_{\delta_1'\delta_2'} < v_{\delta_1\delta_2}$$

pour tout $x \in \left]\delta_1', 1-\delta_2'\right[$, $t \in]0,t_0[$.

Preuve. Posons

$$w_1 = u_{\delta_1\delta_2} - u_{\delta_1'\delta_2'}$$
$$w_2 = v_{\delta_1\delta_2} - v_{\delta_1'\delta_2'}$$

Alors

$$x\,(w_1)_t - (w_1)_{xx} = v^p_{\delta_1\delta_2} - v^p_{\delta_1'\delta_2'} = p\theta_2^{p-1}w_2$$
$$(1-x)\,(w_2)_t - (w_2)_{xx} = u^p_{\delta_1\delta_2} - u^p_{\delta_1'\delta_2'} = p\theta_1^{p-1}w_1$$

où

$$\theta_1 = \rho(x,t)u_{\delta_1'\delta_2'} + (1-\rho(x,t))u_{\delta_1\delta_2}$$
$$\theta_2 = \rho(x,t)v_{\delta_1'\delta_2'} + (1-\rho(x,t))v_{\delta_1\delta_2}$$

pour certain $\rho(x,t) \in \,]0,1[$
De plus

$$w_1 = w_2 = 0 \text{ en } t = 0 \text{ et } w_1, w_2 \geq 0 \text{ pour } x \in \left\{\delta_1', 1-\delta_2'\right\}$$

Le principe du maximum nous donne

$$\begin{matrix} w_1 \geq 0, \\ w_2 \geq 0 \end{matrix} \quad \text{sur } \left]\delta_1', 1-\delta_2'\right[\times \,]0, t_0[\,.$$

■

D'après le lemme 2.2.2 les suites (u_ε), (v_ε) sont monotones décroissantes. Il reste à montrer que u_ε, v_ε convergent vers des fonctions u, v lorsque $\varepsilon \to 0$ de telle sorte que les limites u, v soient solutions du système dégénéré (2.1.1). Pour cela on utilise la méthode des sur et sous solutions.

Théorème 2.2.1 *Il existe $t_0 > 0$ qui est independ de ε_1, ε_2, et une fonction $h \in C^{2,1}([0,1] \times [0,t_0])$ telles que le problème (2.2.1) admet une solution $(u_{\varepsilon_1\varepsilon_2}, v_{\varepsilon_1\varepsilon_2})$ qui vérifie*

$$\begin{matrix} u_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \leq h \\ v_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \leq h \end{matrix} \quad \textit{sur } \;]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\, \times \,]0, t_0[\;.$$

Preuve. Il existe $k_0 > 0$ tel que

$$\begin{matrix} u_0 \leq k_0\varphi(x) \\ v_0 \leq k_0\varphi(x) \end{matrix} \quad x \in \,]0,1[$$

où

$$\varphi(x) = \frac{x(1-x)}{2}.$$

Soit $k(t)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} k' = \frac{k^p}{4^{p-1}\tau}, \\ k(0) = k_0, \end{cases}$$

où

$\tau \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ telle que $\tau \leq (2k_0)^{\frac{-(p-1)}{p}}$.

Définissons t_0 par $k(t_0) = \tau^{\frac{-p}{p-1}}$ et posons $h(x,t) = k(t)\varphi(x)$.

Montrons maintenant que (h,h) est une sur-solution du problème (2.1.1) sur $]0,1[\times]0,t_0[$.

Supposons que

$$J_1 = x\,(h)_t - (h)_{xx} - h^p$$
$$J_2 = (1-x)\,(h)_t - (h)_{xx} - h^p$$

et montrons que

$$\begin{cases} J_1 \geq 0 \\ J_2 \geq 0 \end{cases} \text{ sur } \;]0,1[\times]0,t_0[\,.$$

Pour $x \in \,]0,\tau[\,\cup\,]1-\tau,1[$, $t \in \,]0,t_0[$

$$\begin{aligned} J_1 &= xk'\varphi + k - k^p\varphi^p \\ &\geq k - k^p\varphi^p \\ &\geq k\left(1 - k^{p-1}\varphi^p\right) \\ &\geq k\left(1 - k^{p-1}\tau^p\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Pour $x \in \,]\tau, 1-\tau[$, $t \in \,]0,t_0[$

$$\begin{aligned} J_1 &\geq xk'\varphi - k^p\varphi^p \\ &\geq \;\varphi\left(\tau k' - \frac{k^p}{4^{p-1}}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

De plus

$$h(x,0) = k_0\phi(x) \geq u_0(x)\,;\; h\,|_{\partial\Omega} = 0$$

d'où $u_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \leq h$ et de la même manière on montre que $v_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \leq h$. Donc (h,h) est une sur-solution du système (2.2.1). ■

Corollaire 2.2.1 *les suites (u_ε) et (v_ε) convergent simplement vers des fonctions u, v sur $]0,1[\times]0,t_0[$ quand $\varepsilon \to 0$. De plus u, $v \in L^p(]0,1[\times]0,t_0[)$.*

Preuve. D'après le théorème 2.2.1 les fonctions (u_ε), (v_ε) sont définies sur $]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\times]0,t_0[$, et $(\widetilde{u_\varepsilon})$, $(\widetilde{v_\varepsilon})$ par

$$\widetilde{u_\varepsilon} = \begin{cases} u_\varepsilon \text{ sur }]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\times]0,t_0[\\ 0 \quad \text{sur } (]0,1[\setminus]\varepsilon_1,1-\varepsilon_2[)\times]0,t_0[\,. \end{cases}$$

et

$$\widetilde{v_\varepsilon} = \begin{cases} v_\varepsilon \text{ sur }]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\times]0,t_0[\\ 0 \quad \text{sur } (]0,1[\setminus]\varepsilon_1,1-\varepsilon_2[)\times]0,t_0[\,. \end{cases}$$

De plus

$$\begin{matrix} 0 \leq u_\varepsilon \leq h \\ 0 \leq v_\varepsilon \leq h \end{matrix} \quad \text{sur }]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\times]0,t_0[$$

Alors

$$\begin{matrix} 0 \leq \widetilde{u_\varepsilon} \leq h \\ 0 \leq \widetilde{v_\varepsilon} \leq h \end{matrix} \quad \text{sur }]0,1[\times]0,t_0[$$

définissons alors u, v par

$$u(x,t) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{u_\varepsilon}(x,t) & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0,\ x = 1 \end{cases}$$

$$v(x,t) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{v_\varepsilon}(x,t) & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0,\ x = 1 \end{cases}$$

Le théorème de la convergence dominée nous donne

$$u,\ v \in L^p(]0,1[\times]0,t_0[)\,.$$

■

2.3 Régularité de la solution

Dans ce paragraphe on montre que les fonctions u, v du corollaire 2.1 sont des solutions classiques du système dégénéré (2.1.1). Pour cela nous aurons besoins de certaines estimations.

Lemme 2.3.1 *Soit $Q =]a, b[\times]0, t_2[$ un domaine carré tel que $0 < a < b < 1$ et $0 < t_2 < t$. Il existe $C' > 0$ independante de ε tel que*

$$\|u_\varepsilon\|_{C^\alpha(Q)} \leq C',$$
$$\|v_\varepsilon\|_{C^\alpha(Q)} \leq C'.$$

Preuve. D'après le théorème 2.2.1, on a

$$\|u_\varepsilon\|_\infty \leq C,$$
$$\|v_\varepsilon\|_\infty \leq C,$$

où C ne depend pas de ε.

D'où

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(Q)} \leq C_1,$$
$$\|v_\varepsilon\|_{L^p(Q)} \leq C_1,$$

où C_1 ne depend pas de ε.

En utilisant l'inégalité du théorème 1.6.2, on obtient

$$\|u_\epsilon\|_{L^p(Q)} + \|(u_\varepsilon)_{xx}\|_{L^p(Q)} + \|(u_\varepsilon)_t\|_{L^p(Q)} \leq C_2$$

où C_2 ne depend pas de ε.

D'après le lemme 1.1 de l'injection de Sobolev, on a pour $p > \dfrac{2}{1-\alpha}$

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{C^\alpha(Q)} &\leq C \|u_\varepsilon\|_{W^p(Q)} \\ &= C\left(\|u_\varepsilon\|_\infty + \|(u_\varepsilon)_x\|_{L^p(Q)} + \|(u_\varepsilon)_t\|_{L^p(Q)}\right) \\ &\leq C' \end{aligned}$$

où C' ne depend pas de ε.

Pour les mêmes raisons on obtient une estimation analogue de v_ε

$$\|v_\varepsilon\|_{C^\alpha(Q)} \leq C'.$$

■

Lemme 2.3.2 *Soit $Q =]a, b[\times]0, t_2[$ un domaine carré tel que $0 < a < b < 1$ et $0 < t_2 < t_0$, il existe $C'' > 0$ ne depend pas de ε tel que*

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \leq C'',$$

$$\|v_\varepsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \leq C''.$$

Preuve. D'après le théorème 1.6.2 de la régularité classique des solutions des équations paraboliques appliqué à chacune des deux équations du système 2.2.1 sur le domaine Q, on a

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \leq C\left(\|u_\varepsilon\|_\infty + \|v_\varepsilon^p\|_{C^\alpha(Q)}\right)$$

or

$$\|u_\varepsilon\|_\infty \leq \|h\|_\infty$$
$$\|v_\varepsilon\|_\infty \leq \|h\|_\infty$$

D'où

$$\frac{|v_\varepsilon^p(x) - v_\varepsilon^p(y)|}{\|x-y\|^\alpha} \leq C\left(\frac{|v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)|}{\|x-y\|^\alpha}\right) \qquad \forall x, y \in Q$$

Soit

$$\begin{aligned}\|v^p\|_{C^\alpha(Q)} &\leq C\left(\|v_\varepsilon\|_{C^\alpha(Q)}\right)\\ &\leq C_1\end{aligned}$$

où C_1 ne depend pas de ε (d'après le lemme précédent).
Finalement, on obtient

$$\|v_\varepsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \leq C'',$$
$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \leq C'',$$

où C'' ne depend pas de ε. ■

Théorème 2.3.1 *Si $u_0, v_0 \in C^{2+\alpha}(0,1)$ pour $\alpha \in]0,1[$, alors (u,v) est une solution classique du système (2.1.1) dans $]0,1[\times]0,t_0[$.*

Preuve. Montrons d'abord que u, v sont dans $C^{2,1}(]0,1[\times]0,t_0[) \cap C([0,1] \times [0,t_0[)$.
Choisissons un point $(x_1,t_1) \in]0,1[\times]0,t_0[$, et un domaine $Q =]a,b[\times]0,t_2[$ telles que

$$0 < a < x_1 < b < 1 \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < t_0.$$

Le lemme 2.3.2 nous donne alors

$$\left.\begin{array}{l} |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq C'' \|x-y\|^\alpha, \\ \\ |D_x u_\varepsilon(x) - D_x u_\varepsilon(y)| \leq C'' \|x-y\|^\alpha, \\ \\ |D_x^2 u_\varepsilon(x) - D_x^2 u_\varepsilon(y)| \leq C'' \|x-y\|^\alpha, \\ \\ |D_t u_\varepsilon(x) - D_t u_\epsilon(y)| \leq C'' \|x-y\|^\alpha. \end{array}\right. \quad \forall x, y \in \overline{Q}$$

Ainsi les suites $(u_\varepsilon), (D_x u_\varepsilon), (D_x^2 u_\varepsilon), (D_t u_\varepsilon)$ sont equicontinues sur $\overline{Q}$.
D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, on peut extraire des sous suites notées aussi (u_ε), $(D_x u_\varepsilon)$, $(D_x^2 u_\varepsilon)$, $(D_t u_\varepsilon)$ qui convergent uniformement.
Ceci veut dire que la suite (u_ε) est de Cauchy dans $C^{2,1}(Q)$, donc elle converge vers un

elément $u \in C^{2,1}(Q)$.

De la même manière on obtient $v \in C^{2,1}(Q)$ comme limite de (v_ε) dans $C^{2,1}(Q)$.

Donc $D_x^2 u_\varepsilon \to D_x^2 u$, $D_x^2 v_\varepsilon \to D_x^2 v$, $D_t u_\varepsilon \to D_x u$, $D_t v_\varepsilon \to D_t v$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En passant à la limite dans le système (2.2.1) lorsque $\varepsilon \to 0$, on vérifie bien que u, v sont des solutions du système (2.1.1) sur $]0,1[\times]0,t_0[$.

Montrons maintenant que u, v sont continues sur $[0,1]\times[0,t_0[$.

Comme

$$u_\varepsilon \to u,$$

$$v_\varepsilon \to v,$$

uniformement sur $\overline{Q}$, u, v sont continues en $t = 0$

de plus

$$\begin{matrix} 0 \le u \le h \\ 0 \le v \le h \end{matrix} \qquad \text{sur } \ ]0,1[\times]0,t_0[\,.$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} u(x,t) = \lim_{x\to 1} v(x,t) = 0.$$

Donc, elles sont continues en $x = 0$ et $x = 1$. ■

Proposition 2.3.1 *La solution du système (2.1.1) est unique et elle est positive sur* $]0,1[\times]0,t_0[$.

Preuve. Montrons d'abord que (u, v) est une solution unique. Soient (u, v), (u_1, v_1) deux solutions du système (2.1.1) dans $]0,1[\times]0,t_0[$.

Posons

$$w_1 = u - u_1$$

$$w_2 = v - v_1$$

alors

$$\begin{cases} x(w_1)_t - \Delta w_1 = p\theta_2^{p-1} w_2, \\ (1-x)(w_2)_t - \Delta w_2 = p\theta_1^{p-1} w_1, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda(x,t)u_1 + (1-\lambda(x,t))\,u, \\ \theta_2 &= \lambda(x,t)v_1 + (1-\lambda(x,t))\,v, \end{aligned} \qquad \text{pour } \lambda(x,t) \in \,]0,1[$$

De plus

$$w_1 = w_2 = 0 \qquad \text{en } t = 0,$$

$$w_1 = w_2 = 0 \qquad \text{en } x = 0,\ x = 1.$$

Le principe du maximum nous donne

$$w_1 = w_2 = 0 \qquad \text{dans } \,]0,1[\,\times\,]0,t_0[\,.$$

Montrons Maintenant la positivité de la solution

On a

$$\left.\begin{aligned} u_\varepsilon &\geq 0 \\ v_\varepsilon &\geq 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{dans } \,]\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2[\,\times\,]0,t_0[$$

et par conséquent

$$\left.\begin{aligned} u &\geq 0 \\ v &\geq 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{dans}\,]\,0,1[\,\times\,]0,t_0[$$

Le principe du maximum fort montre que

$$\left.\begin{aligned} u &> 0 \\ v &> 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{dans } \,]0,1[\,\times\,]0,t_0[$$

$$u_0 = 0$$

$$v_0 = 0.$$

■

2.4 Explosion en temps fini de la solution

Dans ce paragraphe, on donne quelques résultats d'explosion en temps fini de la solution du système (2.1.1). On montrera que sous certaines conditions sur le terme non linéaire du système (2.1.1) le temps d'existence maximal de la solution est fini, nous dirons alors que la solution explose en temps fini T.

Proposition 2.4.1 *Si le temps d'existence maximal T du système (2.1.1) est fini alors (u, v) explose en ce temps fini T.*

Preuve. Supposons que $T < \infty$ et (u, v) est borné dans $]0, 1[\times]0, T[$.
On a besoin de montrer que (u, v) peuvent être prolonger en $t = T + t_0$.

Supposons qu' il existe M tel que

$$u(x,t) \leq M,\ v(x,t) \leq M \text{ dans }]0,1[\times]0,T[\,.$$

et définisons

$$\psi(x) = \frac{K}{2}x(1-x) \text{ où } K = \max\left\{\frac{M^p}{2}, \sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{u_0(x)}{x\,(1-x)}\right), \sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{v_0(x)}{x\,(1-x)}\right)\right\}$$

Montrons que ψ est une sur-solution du système (2.1.1)

$$\begin{cases} x\psi_t - \Delta\psi - v^p = K - v^p \geq \frac{K}{2} - M^p \geq 0 \\ \\ (1-x)\,\psi_t - \Delta\psi - u^p = K - u^p \geq \frac{K}{2} - M^p \geq 0 \end{cases}$$

De plus $\psi = 0$ en $x = 0$, $x = 1$ et $\psi(x) \geq u_0(x), \psi(x) \geq v_0(x)$ en $t = 0$, alors $\psi \geq u$, $\psi \geq v$ dans $]0, 1[\times]0, T[$.

En particulier u et v sont bornées par ψ en $t = T$, et ainsi u et v se prolongent en $t = T$.

Maintenant montrons que u, v se prolongent en $T + t_0$.

Revenons au système tronqué (2.2.1). La même technique utilisée que celle dans le théorème 2.1.1 permet de construire une sur-solution (h, h) du système (2.2.1) dans $]\varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2[\times]0, T[$.

Le théorème 1.8.1 permet de prolonger la solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ jusqu'à $T + t_0$.

d'où

$$u(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x,t) \text{ et } v(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon(x,t),$$

se prolongent en $T + t_0$. Ce qui contredit le fait que T est maximal. ■

Pour trouver des conditions suffisantes pour lesquelles la solution (u, v) du système (2.1.1) explose en un temps fini $T > 0$, la technique qu'on utilise est une adaptation de la méthode du Kaplan, qui repose sur la projection de la solution sur l'un des sous espaces propres de laplacien (voir [18]). Ceci consiste à introduire la fonction propre et la valeur propre principale du problème spectrale (de type Sturm-Liouville) suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\lambda x(1-x)\phi(x) & x \in]0,1[\\ \phi(0) = \phi(1) = 0 & \\ \phi(x) > 0 & \text{dans }]0,1[\end{cases} \tag{2.4.1}$$

où λ s'appelle la valeur propre principale et ϕ la fonction propre du problème (2.4.1)

Théorème 2.4.1 *([5]) Il existe $\lambda > 0$ unique tel que le problème (2.4.1) admet une solution unique ϕ.*

Posons

$$\begin{cases} U(t) = \int_0^1 x\phi(x)\, u(x,t)dx \\ V(t) = \int_0^1 (1-x)\,\phi(x)\, v(x,t)dx \end{cases} \quad t \in [0, T[\tag{2.4.2}$$

et

$$W(t) = U(t) + V(t). \tag{2.4.3}$$

Ainsi on a le lemme suivant

Lemme 2.4.1 *Pour $p > 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$\frac{dW}{dt}(t) \geq -\lambda W(t) + \frac{C}{2^{p-1}} W^p(t),\ \forall t \in \left]0, T\right[.$$

Preuve. Multiplions la première équation du système (2.1.1) par ϕ, En intègrant par rapport à x, tenant compte de (2.4.1), (2.4.2) et de la positivité de la solution, à l'aide de l'inégalité de Jensen on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\phi(x)u_t(x,t)dx &= \int_0^1 \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} u\left(x,t\right)dx + \int_0^1 \phi(x)v^p(x,t)dx \\ &\geq -\lambda \int_0^1 x\phi(x)u(x,t)dx + C_1 \left(\int_0^1 \left(1-x\right)\phi(x)v(x,t)\right)^p dx,\end{aligned}$$

où

$$C_1 = \left(\int_0^1 (1-x)\phi(x)dx\right)^{1-p}.$$

Ainsi, d'après (2.4.2) on a

$$\frac{dU(t)}{dt} \geq -\lambda U(t) + C_1 V^p\ \forall t \in \left]0, T\right[,$$

On peut montrer de manière analogue que $V(t)$ vérifier la même inégalité

$$\frac{dV(t)}{dt} \geq -\lambda V(t) + C_2 U^p,\ \forall t \in \left]0, T\right[,$$

avec

$$C_2 = \left(\int_0^1 x\phi(x)dx\right)^{1-p}.$$

Ainsi avec $C = \min\{C_1, C_2\}$, d'après (2.4.3) pour tout t dans $]0, T[$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{dW(t)}{dt} &= \frac{dU(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{dt} \\
&\geq -\lambda W(t) + C\left(V^p(t) + U^p(t)\right) \\
&\geq -\lambda W(t) + \frac{C}{2^{p-1}}\left(V(t) + U(t)\right)^p \\
&= -\lambda W(t) + \frac{C}{2^{p-1}} W^p(t).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Comme une conséquence immédiate, on peut déterminer des conditions suffisantes sur les données initiales du problème (2.1.1), pour que la solution explose en un temps fini. Ceci est formulé dans le théorème suivant :

Théorème 2.4.2 *Si $p > 1$, C la constante définie dans le lemme 3.1, et les données initiales u_0 et v_0 satisfant*

$$\int_0^1 x\phi(x)u_0(x)dx + \int_0^1 (1-x)\phi(x)\, v_0(x)\, dx > 2\left(\frac{\lambda}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

alors la solution (u, v) du système (2.1.1) explose en un temps fini T.

Preuve. D'après la proposition 2.4.1, Il suffit de montrer que le temps d'existence maximale T est fini.

on a

$$W(0) = \int_0^1 x\phi(x)u_0(x)dx + \int_0^1 (1-x)\phi(x)\, v_0(x)\, dx.$$

À partir du lemme 3.1, et par les hypothèses, W est une solution de l'inégalité différentiel

$$\frac{dW}{dt}(t) \geq \frac{1}{2^{p-1}} W^p(t) - \lambda W(t),\ \forall t \in\ ]0, T[\,. \tag{2.4.4}$$

avec $p > 1$, et la valeur initiale satisfait

$$W(0) \geq 2\left(\frac{\lambda}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Par la théorie des inégalités différentielles dans [20], ceci garantie que $W(t)$ n'existe pas globalement. Donc le temps d'existence maximale T est fini, et $W(t)$ tends vers l'infinie quand t tends vers T. Ainsi

$$\lim_{t\to T}(U(t)+V(t)) = +\infty.$$

Les fonctions u et v sont des solutions classiques de (2.1.1), on déduit à partir de (2.4.2) qu'il existe une suite $t_n \in \,]0,T[$ avec $t_n \to T$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0<x<1}(u(x,t_n)+v(x,t_n)) = +\infty.$$

Puisque $\phi_0 \geq \delta = 2^{\frac{p}{p-1}}\lambda^{\frac{1}{p-1}}$ et $p \geq 1$, on obtient

$$\int_{\phi_0}^{\infty}\frac{d\phi}{\phi(\frac{\phi^{p-1}}{2^p}-\lambda)} < \infty$$

d'où

$$T < \infty$$

On peut dire que

$$\lim_{t\to T^-}\phi(t) = +\infty.$$

$\blacksquare$

CHAPITRE 3

Problème semi-discret

Dans ce chapitre, on étudie une approximation du système (2.1.1), par la méthode des différences finies en espace. On introduit un schéma semi-discret associé de ce problème, et après on donne certaines propriétées, à partir des quelles on montre que la solution semi-discrète explose en un temps fini T. Ainsi, on a besoin de quelques résultats de l'analyse matricielle, qu'on présentera dans ce qui suit (voir [16, 24, 7, 4])

3.1 Rappels

3.1.1 Matrices non négatives et irréductibles

On désigne par $\mathbb{k}$ le corps des réels ou des complexes.

Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $M_{n,m}(\mathbb{k})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$.

Pour $n = m$, on note $M_n(\mathbb{k})$ pour $M_{n,m}(\mathbb{k})$.

Un vecteur de $\mathbb{k}^n$ est identifié à un élément de $M_{n,1}(\mathbb{k})$.

Pour $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ dans $M_{n,m}(\mathbb{k})$ et $x = (x_i)_{1\leq i\leq m}$ dans $\mathbb{k}^n$, on note $(Ax)_i$ la composante numéro i du vecteur Ax.

Pour tout matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans $M_{n,m}(\mathbb{k})$ on note

$$|A| = ((|a_{ij}|))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}.$$

Rappellons les quelques notions et résultats suivants.

Pour toute norme $x \longmapsto \|x\|$ sur $\mathbb{k}^n$, l'application

$$A \longmapsto \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

définit une norme sur $M_n(\mathbb{k})$.

La norme matricielle induite par $\|.\|_\infty$ est définie par

$$\forall\ A \in M_n(\mathbb{k}),\ \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1} |a_{ij}|\,.$$

La norme matricielle induite par $\|.\|_1$ est définie par

$$\forall\ A \in M_n(\mathbb{k}),\ \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1} |a_{ij}| = \left\|{}^tA\right\|_\infty.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, alors son rayon spectral est le réel

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in Sp(A)} |\lambda|\,,$$

où $Sp(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de A.

Pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle, on a

$$\rho(A) \leq \|A\|\,.$$

Quelle que soit la norme choisir sur $M_n(\mathbb{C})$, on a

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right).$$

Définition 3.1.1 *([4]) Supposons que $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Les disques de Gerschgorin D_i, $i = 1, 2, ..., n$, de la matrice A sont définis comme des régions circulaires fermées*

$$D_i = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - a_{ii}| \leq R_i\} \tag{3.1.1}$$

dans le plan complexe, où

$$R_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |a_{ij}| \tag{3.1.2}$$

est le rayon de D_i.

Théorème 3.1.1 *(Théorème de Gerschgorin) Soient $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Toutes les valeurs propres de la matrice A se trouve dans le région*

$$D = \cup_{i=1}^{n} D_i,$$

où D_i, $i = 1, 2, ..., n$, sont les disques de Gerschgorin de A définis par (3.1.1), (3.1.2).

Preuve. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ sont respectivements une valeur propre de A, et le vecteur propre correspondant, de sorte que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.1.3}$$

Supposons que x_k, avec $k \in \{1, 2, ..., n\}$ est la composante de x qui possède le plus grand module, ou une de ces composantes si plus d'une possède le même module. Notons au passage que $x_k \neq 0$, implique que $x \neq 0$; alors,

$$|x_j| \leq |x_k|, \ j = 1, 2, ..., n. \tag{3.1.4}$$

Ceci signifie que

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{kk}| \, |x_k| &= |\lambda x_k - a_{kk} x_k| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - a_{kk} x_k \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j \right| \\ &\leq |x_k| \, R_k, \end{aligned}$$

ainsi on divisons par $|x_k|$, on montre que λ se trouve dans le disque D_k de rayon R_k centré en a_{kk}. Donc, $\lambda \in D = \cup_{i=1}^{n} D_i$. ■

Définition 3.1.2 *Une matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$ est dite non négative (resp. positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$), si tous ses coefficients sont non négatifs (resp. strictement positifs), et la positivité signifie que toutes ses composantes sont positives.*

Définition 3.1.3 *[7] Une matrice tridiagonale réelle $A = (a_{ij})$ d'ordre $n > 1$ est irréductible, si $a_{k,k+1}a_{k+1,k} > 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$.*

Théorème 3.1.2 *[7] Si $A = (a_{ij})$ est une matrice tridiagonale réelle irréductible d'ordre n, alors A possède n valeurs propres réelles simples.*

Matrices positives et théorème de Perron-Frobenius

Théorème 3.1.3 *Soit A une matrice dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$*

i. Si A est positive et $x \in \mathbb{R}^m$ est positif non nul, alors Ax est positif.

ii. Si A est positive et $B \in M_{m,r}(\mathbb{k})$ sont telles que $|AB| = A\,|B|$, alors ils existent des réels $\theta_1, ..., \theta_r$ tels que $B = |B|\,\Delta$, où Δ est la matrice diagonale de termes diagonaux $e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_r}$.

Théorème 3.1.4 *Soit A une matrice non négative dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des termes de chaque ligne (resp. colonne) est constante égale à α. Le réel α est alors une valeur propre de A et*

$$\rho(A) = \alpha = \|A\|_\infty \ \textit{(resp. } \rho(A) = \alpha = \|A\|_1 \textit{).}$$

Preuve. Pour tout $i = 1, ..., n$, les égalités $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \alpha$ reviennent à dire que le vecteur $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre α. La matrice A et le réel α étant non négatifs, on a alors

$$\alpha \leq \rho(A) \leq \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \alpha,$$

soit $\alpha = \rho(A) = \|A\|_\infty$.

En raisonnant avec la transposée de la matrice A et en utilisant le fait qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres, on obtient le deuxième résultat en considérant que $\|{}^tA\|_\infty = \|A\|_1$. ■

Corollaire 3.1.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice non négative telle $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ (resp. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 0$) pour tout $i = 1, ..., n$ (resp. $j = 1, ..., n$), alors $\rho(A) > 0$.*

En particulier une matrice positive a son rayon spectral positif.

Remarque 3.1.1 *Si $\rho(A) = 0$, alors toutes les valeurs propres de A sont nulles et la trace de A qui est la somme des valeurs propres est également nulle. Pour A positive, donc on a $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 0$ et $\rho(A) > 0$.*

Corollaire 3.1.2 *Soit A une matrice positive dans $M_n(\mathbb{R})$. S'il existe un vecteur x positif et deux constantes réelles positives ou nulles α, β telles que $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$ (resp. $\alpha x < Ax < \beta x$), alors $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$ (resp $\alpha < \rho(A) < \beta$).*

Preuve. Pour tout $i = 1, ..., n$, les deux inégalités $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$, $\alpha x_i \leq (Ax)_i \leq \beta x_i$ sont équivalentes, ce qui entraîne

$$\alpha \leq \inf_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \beta.$$

On procède de même pour les inégalités strictes. ∎

Lemme 3.1.1 *Soit A une matrice positive dans $M_n(\mathbb{R})$, Si x est un vecteur propre non nul de A associé à une valeur propre λ telle que $|A| = \rho(A)$, alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A avec $|x|$ comme vecteur propre associé. Le vecteur $|x|$ est positif et il existe un réel θ tel que $x = e^{i\theta}\, |x|$.*

Preuve. On a $\rho(A) > 0$ du fait que $A > 0$.

Soit $Ax = \lambda x$ avec $\lambda = \rho(A)$, on déduit que

$$\rho(A)\,|x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A|\,|x| = A\,|x|\,, \tag{3.1.5}$$

ce qui entraîne que le vecteur $y = A\,|x| - \rho(A)\,|x|$ est non négatif. Si ce vecteur est non nul, alors d'après le Théorème 3.1.3 $Ay > 0$, ce qui signifie en notant $z = A\,|x|$ que $\rho(A)z < Az$ avec $z > 0$ (le vecteur x est non nul) qui entraîne $\rho(A) < \rho(A)$ (corollaire 3.1.2), soit une impossibilité. On a donc $y = 0$, c'est-à-dire $A\,|x| = \rho(A)\,|x|$, ce qui signifie que $\rho(A)$ est une valeur propre de A avec $|x|$ comme vecteur propre associé. De plus avec $|x| = \frac{1}{\rho(A)} A\,|x|$, on déduit que $|x| > 0$.

Enfin d'après (3.1.5), on déduit que $A\,|x| = |Ax|$ et donc qu'il existe un réel θ tel que $x = e^{i\theta}\ |x|$ (théorème 3.1.3 avec $B = x$) ■

Théorème 3.1.5 *(Perron-Frobrnius) Si A est une matrice positive dans $M_n(\mathbb{R})$ alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum et l'espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur positif.*

Preuve. D'après la démonstration du lemme 3.1.1, on a vu que si λ est une valeur propre de la matrice A telle que $|A| = \rho(A)$ et si x est un vecteur propre non nul associé, alors $x = e^{i\theta}\ |x|$ avec $A\,|x| = \rho(A)$. Le rayon spectral $\rho(A)$ est donc valeur propre de A. De plus, avec

$$\lambda x = Ax = A\left(e^{i\theta}\,|x|\right) = e^{i\theta} A\,|x| = e^{i\theta}\rho(A)\,|x| = \rho(A)x,$$

on déduit que $\lambda x = \rho(A)x$ avec $x \neq 0$, et $\lambda = \rho(A)$. Donc $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

En notant $E_{\rho(A)}$ l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$, tout vecteur non nul x dans $E_{\rho(A)}$ est tel que $|x| > 0$ et aucune des composantes de x n'est nulle. S'il existe deux vecteurs x, y linéairement indépendants dans $E_{\rho(A)}$, alors le vecteur $z = x_1 y - y_1 x$ est non nul dans $E_{\rho(A)}$ avec $z_1 = 0$, ce qui est impossible. On a donc $dim(E_{\rho(A)}) = 1$. ■

Corollaire 3.1.3 *Si A est une matrice non négative dans $M_n(\mathbb{R})$ alors $\rho(A)$ est valeur propre de A et il existe un vecteur propre associé non nul positif.*

Preuve. Pour tout entier naturel non nul k, on pose

$$A_k = \left(\left(a_{ij} + \frac{1}{k}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

et on désigne par x_k le vecteur de Perron de la matrice positive A_k. On a $\lim_{k\to\infty} A_k = A$ et avec la continuité du rayon spectral, on déduit que étant dans le compact F, on peut en extraire une sous suite $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\geq 1}$ convergente vers un vecteur $x \geq 0$ et on

$$Ax = \lim_{k\to\infty} A_{\varphi(k)} x_{\varphi(k)} = \lim_{k\to\infty} \rho\left(A_{\varphi(k)}\right) x_{\varphi(k)} = \rho(A)x,$$

c'est-à-dire que x est un vecteur propre non nul (puisque $\|x\|_1 = 1$) positif de A associé à la valeur propre $\rho(A)$. ■

Corollaire 3.1.4 *Si A est une matrice non négative dans $M_n(\mathbb{R})$ alors*

$$\rho(I_n + A) = 1 + \rho(A).$$

Preuve. Pour toute matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$ on a

$$Sp(I_n + A) = \{1 + \lambda \mid \lambda \in Sp(A)\},$$

et donc $\rho(I_n + A) \leq 1 + \rho(A)$.

Si de plus A est non négative, alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A, donc $1 + \rho(A)$ est une valeur propre de $I_n + A$ et $1 + \rho(A) \leq \rho(I_n + A)$, d'où l'égalité. ■

Théorème 3.1.6 *(Perron-Frobénius) Si A est une matrice positive dans $M_n(\mathbb{R})$ alors $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum et cette valeur propre est simple (l'espace propre associé est donc une droite vectorielle).*

Preuve. On sait déjà que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum. Notons p sa multiplicité algébrique.

Le théorème de trigonalisation sur $\mathbb{C}$ nous dit qu'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure de diagonale

$$\left(\rho(A), ..., \rho(A), \lambda_{p+1}, ..., \lambda_n\right),$$

avec $|\lambda_i| < \rho(A)$ pour i compris entre $p+1$ et n (si $p < n$). En écrivant, pour tout entier naturel non nul k, que

$$\left(\frac{1}{\rho(A)}T\right)^k = P^{-1}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k P,$$

et en utilisant la continuité du produit matriciel, on déduit du théorème précédent que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}T\right)^k = P^{-1}LP = L^{'},$$

avec $L^{'}$ triangulaire supérieure de diagonale $(1,...,1,0,...,0)$. On a donc $rang(L^{'}) \geq p$ et avec $rang(L^{'}) = rang(L) = 1$, on déduit que nécessairement $p = 1$. ■

Corollaire 3.1.5 *Si A est une matrice non négative dans $M_n(\mathbb{R})$ et s'il existe un entier naturel r tel que A^r positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A (l'espace propre associé est donc une droite vectorielle).*

Preuve. On sait déja que $\rho(A)$ est une valeur propre de A (Corollaire 3.1.3). Notons p sa multiplicité algébrique.

Le théorème de trigonalisation sur $\mathbb{C}$ nous dit qu'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure de digonale

$$(\rho(A),...,\rho(A),\lambda_{p+1},...,\lambda_n),$$

avec $|\lambda_i| \leq \rho(A)$ pour tout entier $i = p+1,...,n$ (si $p < n$). La matrice $T^p = P^{-1}A^pP$ est alors triangulaire supérieure de diagonale

$$\left(\rho(A)^p,...,\rho(A)^p,\lambda_{p+1}^p,...,\lambda_n^p\right),$$

et $\rho(A)^p = \rho(A^p)$ est alors valeur propre de A^p de multiplicité supériure ou égale à p. Mais A^p étant positive cette multiplicité vaut 1, on a donc $p = 1$. ■

Matrices irruductibles et théorème de Perron-Frobenius

Théorème 3.1.7 *Soit A une matrice carrée irréductible, non négative d'ordre $n > 1$. Alors le rayon spectrale $\rho(A)$ (la plus grande valeur propre de A) est une valeur propre positive simple de A, et il existe un unique vecteur propre positif associé à la valeur propre $\rho(A)$.*

Preuve. La matrice A étant irréductible n'a pas de ligne nulle, on a donc puisqu'elle est positive $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ pour tout i compris entre 1 et n, ce qui entraîne $\rho(A) > 0$ (corollaire 3.1.1).

Avec le théorème de trigonalisation sur $\mathbb{C}$ on voit que si $\rho(A)$ est une valeur propre de multiplicité supérieure ou égal à 2 alors il en est de même de $1+\rho(A)$ comme valeur propre de $I_n + A$. Mais $I_n + A$ positive et $(I_n + A)^{n-1}$ strictement positive entraîne $\rho\left(I_n + A\right) = I + \rho(A)$ (corollaire 3.1.4) est une valeur propre simple de $I_n + A$ (corollaire 3.1.5). En conséquence $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A.

L'espace propre associé est donc de dimension 1 et on sait qu'il peut être engendré par un vecteur positif x (corollaire 3.1.3). De $A = \rho(A)x$, on déduit que $(I_n + A)^{n-1} x = (1+\rho(A))^{n-1} x$ et avec $((I_n + A)^{n-1} x > 0$ (théorème 3.1.1, point (i)), $(1+\rho(A))^{n-1} > 0$, on déduit que $x > 0$. ■

3.1.2 Inégalité de Jensen discrète

Théorème 3.1.8 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, n point x_i dans l'intervalle I, et n nombres réels positifs λ_i. On a alors*

$$f\left(\frac{1}{\Lambda_n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \frac{1}{\Lambda_n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),\ \text{où } \Lambda_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

3.1.3 Méthode des différences finies

Pour l'étude numérique, on a deux approches du problème (2.1.1). La première est de discrétiser les EDP en espace et en temps, sur un maillage uniforme. La méthode transforme les EDP en un système algébrique, en remplacant les dérivées partielles avec les différences finies. Une autre approche est appelée Méthode des lignes (MOL) ou méthode semi-discrète. Dans cette approche, on discrétise les EDP par rapport à une seule variable spatiale, ou temporelle. La discrétisation en espace amène à un système d'équations différentielles ordinaires avec des conditions initiales.

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche des solutions approchées d'équations aux dérivées partielles, qui consiste à résoudre un système de relations liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

En apparence, cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en oeuvre car elle procède en deux étapes : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

Une discrétisation des opérateurs de différentiels (dérivées premières, seconds, etc, partielle ou non) peut être obtenue par les formules de Taylor.

Approximations des dérivées par des différences finies

Dans le cas $1D$ instationnaire, considérons l'évolution d'une grandeur $u(x,t)$ en fonction de l'espace et du temps. Le domaine de défnition de u est décomposé en N noeuds x_i répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx. De même, le temps est décomposé en intervalles élémentaires de pas constant Δt. On notera u_i^n la valeur discrète de la grandeur $u(x,t)$ au noeud x_i et au temps $n\Delta t$.

Le dévelopement de Taylor de u au point $(x+\Delta x, t+\Delta t)$ est

$$u\left(x+\Delta x, t+\Delta t\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) + R_{n+1}$$

avec le reste

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x+\xi\Delta x, t+\eta\Delta t)$$

où $0 < \xi, \eta < 1$

On note $R_{n+1} = O(\Delta x + \Delta t)^{n+1}$.

On a trois type de schémas pour approcher les dérivées

1. Schéma progressif : on utilise l'opérateur de différence progressif $\delta_x^+ u_i = \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}$
2. Schéma regressif : on utilise l'opérateur de différence regressif $\delta_x^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$
3. Schéma centré : on utilise l'opérateur de différence centrale $\widehat{\delta}_x u_i = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}$

Approximation de la dérivée première Pour calculer l'approximation de la dérivée première, nous allons utiliser deux développements en série de Taylor de $u(x,t)$ au voisinage de (x_i, t_n), on fixe une variable (par exemple t), et on obtient

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \frac{\Delta x}{1!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + O(\Delta x^3)$$

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \frac{\Delta x}{1!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + O(\Delta x^3)$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1}^n - u_{i-1}^n = 2\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + O(\Delta x^3)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit centré pour approcher la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Approximation de la dérivée seconde Le principe est identique et repose sur le développent de Taylor au voisinage de (x_i, t_i). Pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u, on écrit :

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \frac{\Delta x}{1!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n + O(\Delta x^4)$$

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \frac{\Delta x}{1!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n + O(\Delta x^4)$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n = \Delta x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + O(\Delta x^4).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit centré pour approcher la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Il existe aussi une formulation progressif et regressif pour la dérivée seconde, toute deux d'ordere 1 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x).$$

3.2 Schéma semi-discret associé au problème (2.1.1)

Soit M est un entier positif, On pose $h = \frac{1}{M+1}$ et on définie un maillage uniforme

$$D_h = \{x_m : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_{M+1} = 1\}$$

avec $x_m = mh$ sur $]0,1[$. Par l'approximation par différence finie classique des dérivées partielles $u_{xx}(x_m,t)$ et $v_{xx}(x_m,t)$, On approche la solution exacte (u,v) du problème (2.1.1) par $(u_m(t), v_m(t)) = (u(x_m,t), v(x_m,t))$ solution du problème semi-discret

$$\begin{cases} \frac{du_m(t)}{dt} = \delta_{x,h}^2 u_m(t) + \frac{1}{x_m} v_m^p(t),\ t > 0 \\ \frac{dv_m(t)}{dt} = \delta_{x,h}^2 v_m(t) + \frac{1}{(1-x_m)} u_m^p(t),\ t > 0 \\ u_0(t) = u_{M+1}(t) = 0,\ v_0(t) = v_{M+1}(t) = 0,\ t \geq 0 \\ u_m(0) = u_0(x_m),\ v_m(0) = v_0(x_m), \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où $1 \leq m \leq M$,

$$\begin{cases} \delta_{x,h}^2 u_m(t) = \frac{1}{x_m h^2}(u_{m+1}(t) - 2u_m(t) + u_{m-1}(t)) \\ \delta_{x,h}^2 v_m(t) = \frac{1}{(1-x_m)h^2}(v_{m+1}(t) - 2v_m(t) + v_{m-1}(t)). \end{cases}$$

Nous pouvons réecrire (3.2.1) sous la forme matricielle suivante

$$\begin{cases} \frac{dU_h(t)}{dt} = A_h U_h(t) + f(V_h(t)),\ t > 0 \\ \frac{dV_h(t)}{dt} = B_h V_h(t) + g(U_h(t)),\ t > 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

où pour $t \geq 0$, $U_h = (u_1(t), u_2(t), ..., u_M(t))$ et $V_h = (v_1(t), v_2(t), ..., v_M(t))$ sont des vecteurs colonnes, qu'on appele la solution semi-discrète. La partie non linéaire du problème semi-discret est répresenté par

$$f(V_h(t)) = (\frac{v_1^p(t)}{h}, \frac{v_2^p(t)}{2h}, ..., \frac{v_M^p(t)}{Mh}) \text{ et } g(U_h(t)) = (\frac{u_1^p(t)}{Mh}, \frac{u_2^p(t)}{(M-1)h}, ..., \frac{u_M^p(t)}{h}),$$

et la partie linéaire est répresenté par les deux matrices tridiagonales non symétriques d'ordre M

$$A_h = \frac{1}{h^3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{M-1} & \frac{-2}{M-1} & \frac{1}{M-1} \\ & & & \frac{1}{M} & \frac{-2}{M} \end{pmatrix}, \tag{3.2.3}$$

$$B_h = \frac{1}{h^3}\begin{pmatrix} \frac{-2}{M} & \frac{1}{M} & & & \\ \frac{1}{M-1} & \frac{-2}{M-1} & \frac{1}{M-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{1}{2} \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

Soit $\left]0, T_b^h\right[$ l'intervalle du temps maximal sur lequel

$$|W_h(t)|_\infty = \max_{1 \leq m \leq 2M} |w_m(t)|$$

est fini.

Si $T_b^h < \infty$, on dit que la solution $W_h(t)$ explose en un temps fini et T_b^h est appelé le temps d'explosion de la solution semi-discrète $W_h(t)$.

3.2.1 Propriétés de la solution semi-discrète

Soit le vecteur

$$W_h(t) = (w_1(t), ..., w_M(t), w_{M+1}(t), ..., w_{2M}(t))$$

défini pour $t \geq 0$ par

$$w_m(t) = \begin{cases} u_m(t), & 1 \leq m \leq M, \\ v_{m-M}(t), & M+1 \leq m \leq 2M, \end{cases}$$

où $u_m(t)$ et $v_m(t)$ sont les solutions du système (3.2.2).

Ainsi les composantes $w_m(t)$ de vecteur $W_h(t)$ vérifient les équations différentielles ordinaires non linéaires suivantes

$$\frac{dw_m(t)}{dt} - \delta_h^2 w_m(t) = F_m(w_m(t)), \;\; t > 0, \tag{3.2.5}$$

où

$$\delta_h^2 w_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{mh^3}(u_{m+1}(t) - 2u_m(t) + u_{m-1}(t)), \;\; 1 \leq m \leq M, \\ \frac{1}{(2M+1-m)h^3}(v_{m+1-M}(t) - 2v_{m-M}(t) + v_{m-1-M}(t)), \;\; M+1 \leq m \leq 2M, \end{cases}$$

et

$$F_m(w_m(t)) = \begin{cases} \frac{w^p_{m+M}}{mh}, & 1 \leq m \leq M \\ \frac{w^p_{m-M}}{(2M+1-m)h}, & M+1 \leq m \leq 2M \end{cases}$$

On pose $w_0(t) \equiv w_{2M+1}(t) \equiv 0$, par convention, et on note que l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires sont établies si la partie non linéaire est une fonction continue localement Lipschitizienne.

Proposition 3.2.1 *Si $W_h(t) \in C^1\left([0, T[\,, \mathbb{R}^{2M}\right)$ est une solution de (3.2.5) sur $]0, T[$, telle que*

$$w_m(0) \geq 0, \quad 1 \leq m \leq 2M,$$

Alors

$$w_m(t) \geq 0, \quad 1 \leq m \leq 2M, \, \forall t \in [0, T[\,.$$

Preuve. Soit $T_0 < T$, et

$$y_m(t) = e^{-rt} w_m(t),$$

où r est un paramètre réel positif.

Si on pose

$$y = \min\{y_m(t) : 1 \leq m \leq 2M, \quad 0 \leq t \leq T_0\},$$

parce que $y_m(t)$ est une fonction continue pour tout $m \in \{1, ..., 2M\}$, alors il existe $t_0 \in [0, T_0]$, et $m_0 \in \{1, ..., 2M\}$ tel que $y = y_{m_0}(t_0)$.

Si $t_0 = 0$, en tenant compte du fait que y est un minimum, le résultat est une conséquence évidente des hypothèses.

On suppose que $t_0 > 0$, il est clair qu'on a

$$\frac{dy_{m_0}(t_0)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{y_{m_0}(t_0) - y_{m_0}(t_0 - \varepsilon)}{\varepsilon} \leq 0, \tag{3.2.6}$$

et

$$\delta_h^2 y_{m_0}(t_0) = \begin{cases} \frac{1}{m_0 h^3}(u_{m_0+1}(t_0) - 2u_{m_0}(t_0) + u_{m_0-1}(t_0)) \geq 0,\ 1 \leq m_0 \leq M, \\ \frac{1}{(2M+1-m_0)h^3}(v_{m_0+1-M}(t_0) - 2v_{m_0-M}(t_0) + v_{m_0-1-M}(t_0)) \geq 0,\ M+1 \leq m_0 \leq 2M, \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} w_m(t) = e^{rt} y_m(t), \\ \frac{dw_m(t_0)}{dt} = e^{rt}(\frac{dy_m(t)}{dt} + r y_m(t)), \\ \delta_h^2 w_m(t) = e^{rt} \delta_h^2 y_m(t). \end{cases} \tag{3.2.7}$$

D'après les hypothèses, la fonction F_{m_0} est dans $C^1([a, b])$, où $[a, b]$ est un intervalle défini par

$$[a, b] = \{w \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } w = w_{m_0}(t),\ t \in [0, T_0]\}.$$

Soit $w^* \neq w_{m_0}(t_0)$ un point fixé dans $[a, b]$. Le théorème de la moyenne donne

$$F_{m_0}(w_{m_0}(t_0)) - F_{m_0}(w^*) = F'_{m_0}(\theta w_{m_0}(t_0) + (1 - \theta) w^*)(w_{m_0}(t_0) - w^*).$$

Pour un certain $\theta \in]0, 1[$. Donc

$$F_{m_0}(w_{m_0}(t_0)) = a_0 + b_0 e^{rt} y_{m_0}(t_0), \tag{3.2.8}$$

où

$$a_0 = F_{m_0}(w^*) - F'_{m_0}(\theta w_{m_0}(t_0) + (1-\theta)w^*)w^*,$$

et

$$b_0 = F'_{m_0}(\theta w_{m_0}(t_0) + (1-\theta)w^*)$$

Selon (3.2.5), (3.2.7) et (3.2.8) on a

$$e^{rt_0}(\frac{dy_{m_0}(t_0)}{dt} + ry_{m_0}(t_0)) - e^{rt_0}\delta_h^2 y_{m_0}(t_0) - a_0 - b_0 e^{rt} y_{m_0}(t_0) = 0,$$

ainsi on obtient

$$\frac{dy_{m_0}(t_0)}{dt} - \delta_h^2 y_{m_0}(t_0) + (r-b_0)y_{m_0}(t_0) - a_0 e^{-rt_0} = 0. \qquad (3.2.9)$$

A partir de (3.2.6) et (3.2.9) on peut déduire que

$$(r-b_0)y_{m_0}(t_0) - a_0 e^{-rt_0} \geq 0.$$

En supposant que $y_{m_0}(t_0) < 0$, si la valeur de r est suffisamment grande alors on obtient une contradiction. D'où $y_{m_0}(t_0) \geq 0$, ce qui implique $w_m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T_0]$, $1 \leq m \leq 2M$. Comme T_0 est un nombre arbitraire dans $]0, T[$, on doit avoir $w_m(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$. ∎

Remarque 3.2.1 *Il convient de noter que les composantes du vecteur $W_h(t)$ sont ceux du couple $(U_h(t), V_h(t))$, ainsi (3.2.2) et (3.2.5) sont équivalentes. Donc, selon la proposition précédente, si les composantes de $(U_h(0), V_h(0))$ sont non négatives, alors il est de même pour ceux de $(U_h(t), V_h(t))$.*

Remarque 3.2.2 *La proposition 3.2.1 reste valable si les équations différentielles ordinaires non linaires données par (3.2.5), sont remplacées par*

$$\frac{dw_m(t)}{dt} - \delta_h^2 w_m(t) \geq F_m(w_m(t)), \; t > 0.$$

3.3 Explosion de la solution du problème semi-discret

Dans ce paragraphe on montre que la solution du problème semi-discret (3.2.1) explose en un temps fini. Pour cela on décompose les matrices A_h et B_h en une somme d'une matrice symétrique et une matrice positive, pour les quelles nous montrons certaines propriétées, qui seront utilisées pour établir notre résultat d'explosion en temps fini.

3.3.1 Propriété de la partie linéaire du problème semi-discret

Soit $A_h = A_h^s + T_h^1$, où A_h^s est une matrice tridiagonale symétrique et T_h^1 est une matrice triangulaire supérieur positive, définies comme suit

$$A_h^s = \frac{1}{h^3}\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{1}{3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{M-1} & \frac{-2}{M-1} & \frac{1}{M} \\ & & & \frac{1}{M} & \frac{-2}{M} \end{pmatrix},$$

$$T_h^1 = \frac{1}{h^3}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & \frac{1}{M(M-1)} \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.3.1 *La matrice A_h^s possède M valeurs propres réelles distinctes négatives.*

Preuve. Premièrement, comme A_h^s est une matrice symétrique, ses valeurs propres sont réelles. Le théorème 3.1.1 de Geschogorin's affirme que toutes les valeurs propres de $A_h^s = (a_{ij})$ sont contenues dans l'union des M disques

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |a_{ii} - z| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} |a_{ij}| \right\},\ 1 \leq i \leq M.$$

Nous pouvons vérifier à partir des coefficients de A_h^s, que tous les nombres réels dans chaque disque D_i sont négatifs. Ainsi, tous les valeurs propres sont négatifs. Comme conséquence de [4, Corollaire.4, p.348], puisque chaque D_i ne coupe aucun autre disque D_j, A_h^s possède M valeurs propres. ■

D'après le théorème 3.1.7 de Perron - Frobenius, toute matrice carré irréductible non négatif possède une valeur propre positive simple associé à un vecteur propre positif.

En dépit du fait que A_h^s est négative, nous pouvons montrer, grâce au théorème de Perron - Frobenius, qu'il possède un vecteur propre positif.

Proposition 3.3.1 *La matrice A_h^s possède un vecteur propre positif ϕ, associé à une valeur propre λ_1 négative.*

Preuve. Soient I la matrice identité carrée d'ordre M, et σ une valeur réelle positif suffisamment grande, de sorte que $A = \sigma I+ A_h^s$ soit une matrice non négative. Alors, A satisfait les hypothèses du théorème de Perron - Frobenius, et il s'ensuit que A possède un vecteur propre positif ϕ, correspondant à une valeur propre positive ρ. Par conséquent, nous avons $A_h^s\phi = (\rho - \sigma)\,\phi$, ce qui implique que ϕ est un vecteur propre positif de A_h^s associé à la valeur propre $\lambda_1 = \rho - \sigma$, qui doit être négatif, d'après le lemme 3.3.1. ■

Remarque 3.3.1 *Notons que nous pouvons normaliser le vecteur propre positif $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_M)$, pour avoir $\sum_{i=1}^{M} \phi_i = 1$.*

Remarque 3.3.2 *Le même résultat est valable pour la matrice $B_h = B_h^s + T_h^2$, où B_h^s est une matrice symétrique et T_h^2 est une matrice triangulaire inférieur positive tel que*

$$B_h^s = \frac{1}{h^3}\begin{pmatrix} \frac{-2}{M} & \frac{1}{M} & & & \\ \frac{1}{M} & \frac{-2}{M-1} & \frac{1}{M-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{3} & \frac{-2}{2} & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix},$$

$$T_h^2 = \frac{1}{h^3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{M(M-1)} & 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

En outre , il est facile de vérifier que le vecteur normalisé $\omega = (\phi_M, ..., \phi_2, \phi_1)$ est un vecteur propre positif de B_h^s associé à la valeur propre λ_1.

3.3.2 Explosion de la solution du problème semi-discret

Après la décomposition de A_h et B_h, le système (3.2.1), équivalent à (3.2.2), prend la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{dU_h(t)}{dt} = A_h^s U_h(t) + T_h^1 U_h(t) + f(V_h(t)),\ t > 0, \\ \frac{dV_h(t)}{dt} = B_h^s V_h(t) + T_h^2 V_h(t) + g(U_h(t)),\ t > 0. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

On note le produit scalaire dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^M$ par $\langle .,. \rangle$, associé à la norme $\| \, . \, \|$, et on pose

$$\begin{cases} \varphi_h(t) = \langle U_h(t), \phi \rangle \\ \psi_h(t) = \langle V_h(t), \omega \rangle \quad , t \in \,]0, T[\,. \\ \Phi_h(t) = \varphi(t) + \psi(t) \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Lemme 3.3.2 *Soient $p > 1$ et $\mu = -\lambda_1$. Si les composantes de $(U_h(0), V_h(0))$ sont non négatives, alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\frac{d\Phi_h(t)}{dt} \geq -\mu\Phi_h(t) + \frac{c}{2^{p-1}}\Phi_h^p(t),\ t \in \left]0, T\right[.$$

Preuve. Multiplions la première équation du système (3.3.1) par ϕ, en tenant compte de la Remarque 3.2.1, Proposition 3.3.1, Remarque 3.3.2, et (3.3.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dU_h(t)}{dt}, \phi \right\rangle &= \langle A_h^s U_h(t), \phi\rangle + \left\langle T_h^1 U_h(t), \phi\right\rangle + \langle f(V_h(t)), \phi\rangle, \\
\frac{d}{dt}\langle U_h(t), \phi\rangle &= \langle U_h(t), A_h^s\phi\rangle + \left\langle T_h^1 U_h(t), \phi\right\rangle + \langle f(V_h(t)), \phi\rangle, \\
\frac{d\varphi(t)}{dt} &= \langle U_h(t), \lambda_1\phi\rangle + \sum_{i=2}^{M} \frac{1}{i(i-1)} u_i(t)\phi_{i-1} + \sum_{i=1}^{M} \frac{\phi_i}{ih\phi_{M-(i-1)}} v_i^p \omega_i, \\
&\geq \langle U_h(t), \lambda_1\phi\rangle + \min_{1\leq i\leq M}\left(\frac{\phi_i}{ih\phi_{M-(i-1)}}\right)\sum_{i=1}^{M} v_i^p\omega_i.
\end{aligned}$$

Selon la Remarque 3.3.1 et (3.3.2), en appliquant l'inégalité de Jensen nous avons

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \geq -\mu\varphi(t) + c\psi^p(t),\ \ \forall t \in \left]0, T\right[, \tag{3.3.3}$$

où

$$c = \min_{1\leq i\leq M}\left\{\frac{\phi_i}{ih\phi_{M-(i-1)}}\right\},\ \mu = -\ \lambda_1 > 0.$$

Si on multiplie la deuxième équation du système (3.3.1) par ω, alors de la même manière on obtient

$$\frac{d\psi(t)}{dt} \geq -\mu\psi(t) + c\varphi^p(t),\ \ \forall t \in \left]0, T\right[. \tag{3.3.4}$$

Alors, pour $t \in \left]0, T\right[$, (3.3.3) et (3.3.4) impliquent que Φ_h défini dans (5.2) doit vérifier

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi_h(t)}{dt} &\geq -\mu\Phi_h(t) + c(\varphi^p(t) + \psi^p(t)) \\
&\geq -\mu\Phi_h(t) + \frac{c}{2^{p-1}}\Phi_h^p(t).
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.1 *Soit $p > 1$, $\mu = -\lambda_1$, et c la constante donnée dans le lemme 3.3.2 Si*

$$\Phi_h(0) > 2c^{\frac{1}{1-p}}\mu^{\frac{1}{1-p}}$$

alors la solution $(U_h(t), V_h(t))$ du système (3.2.2) explose en un temps fini

$$T_b^h \leq \frac{1}{\mu(p-1)}\log\left(\frac{\frac{c}{2^{p-1}}}{\frac{c}{2^{p-1}} - \mu\Phi_h(0)^{1-p}}\right).$$

Preuve. Il suffit de montrer que $\Phi_h(t)$ en tant que solution de l'inégalité différentielle donnée dans le lemme 3.3.2, possède un temps d'existence maximal fini T_b^h. Selon la théorie des inégalités différentielles (voir [20]), si ξ est une solution de

$$\begin{cases} \xi'(t) = \frac{c}{2^{p-1}}\xi^p(t) - \mu\xi(t), \ \ t \in \left]0, T_b^h\right[, \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases} \tag{3.3.5}$$

alors

$$\Phi_h(0) \geq \xi(0) \Longrightarrow \Phi_h(t) \geq \xi(t), \text{ pour tout } t \text{ dans } \left]0, T_b^h\right[. \tag{3.3.6}$$

A partir de l'équation différentielle (3.3.5), une intégration sur l'intervalle $\left]0, T_b^h\right[$ donne

$$\begin{aligned} T_b^h &= \int_0^{T_b^h} dt \\ &= \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} \frac{d\xi}{\xi(\frac{c}{2^{p-1}}\xi^{p-1} - \mu)} \\ &\leq \int_{\xi_0}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi(\frac{c}{2^{p-1}}\xi^{p-1} - \mu)} \\ &= \frac{1}{\mu(p-1)}\log\left(\frac{\frac{c}{2^{p-1}}\xi_0^p}{\frac{c}{2^{p-1}}\xi_0^p - \mu\xi_0}\right). \end{aligned}$$

Donc $\frac{c}{2^{p-1}}\xi_0^p - \mu\xi_0 > 0$ implique que T_b^h existe comme une valeur fini. Si $\xi_0 > 2c^{\frac{1}{1-p}}\mu^{\frac{1}{1-p}}$, alors le temps d'existence maximal T_b^h peut être estimé par

$$T_b^h \leq \frac{1}{\mu(p-1)}\log\left(\frac{\frac{c}{2^{p-1}}}{\frac{c}{2^{p-1}} - \mu\xi_0^{1-p}}\right), \tag{3.3.7}$$

et

$$\lim_{t\to T}\xi(t) = +\infty.$$

Finalement, selon les hypoyhèses on peut choisir $\xi_0 = \Phi_h(0) > 2c^{\frac{1}{1-p}}\mu^{\frac{1}{1-p}}$, et a partir de (3.3.6) on obtient

$$\lim_{t\to T} \Phi_h(t) = +\infty.$$

Comme ϕ et ω sont des vecteurs positifs, à partir de (3.3.2) on déduit que

$$\lim_{t\to T}(\|U_h(t)\| + \|V_h(t)\|) = +\infty$$

donc, la solution $(U_h(t), V_h(t))$ de (3.2.2) explose en un temps fini, estimé par (3.3.7).

■

3.4 Convergence de la solution semi-discrète

Dans ce paragraphe on montre que pour chaque intervalle fixé $[0, T]$ où u, v sont définies, la solution $(U_h(t), V_h(t))$ du problème semi-discret (3.2.1) converge vers (u, v) quand $h \to 0$

Soit

$$\tau_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$$
$$\varrho_h(t) = V_h(t) - v_h(t)$$

où

$$u_h(t) = (u(x_1, t), ..., u(x_M, t)) \text{ et } v_h(t) = (v(x_1, t), ..., v(x_M, t))$$

Lemme 3.4.1 *Soient $z(x,t)$ et $y(x,t)$ deux fonctions positives, $C_1^{''}, C_2^{''} > 0$, Alors*

$$-C_1^{''}(y(x_m, t) - |\varrho_h(t)|) \le C_1^{''} |\varrho_h(t) - y(x_m, t)|$$
$$-C_2^{''}(z(x_m, t) - |\tau_h(t)|) \le C_2^{''} |\tau_h(t) - z(x_m, t)|.$$

Théorème 3.4.1 *Supposons que le problème (2.1.1) admet une solution $(u, v) \in (C^{4,1}([0,1]\times [0,T]))^2$ et la condition initiale dans (3.2.1) satisfait*

$$|W_h(0) - w_h(0)|_\infty = o(1) \text{ quand } h \to 0, \tag{3.4.1}$$

où $w_h(t) = (u(x_1,t),...,u(x_M,t),v(x_1,t),...,v(x_M,t))$. *Alors pour* h *suffisamment petit, le problème discret (3.2.1) admet une unique solution* $W_h \in C^1([0,T],\mathbb{R}^{2M})$ *telle que*

$$\max_{0\leq t\leq T} |W_h(t) - w_h(t)|_\infty = O(|W_h(0) - w_h(0)|_\infty + h^2) \text{ quand } h \to 0. \tag{3.4.2}$$

Preuve. Soit α, $\beta > 0$ tel que

$$\begin{matrix} \|u(.,t)\|_\infty \leq \alpha \\ \|v(.,t)\|_\infty \leq \beta \end{matrix} \quad \text{pour } t \in [0,T]. \tag{3.4.3}$$

Le problème semi-discret (3.2.1) admet pour chaque h, une unique solution $(U_h(t),V_h(t)) \in C^1\left(\left[0,T_b^h\right[,\mathbb{R}^{2M}\right)$. Soit $t(h)$ la plus grande valeur de $t > 0$ telle que $t \leq \min\{T,T_b^h\}$

$$\begin{matrix} |U_h(t) - u_h(t)|_\infty < 1 \\ |V_h(t) - v_h(t)|_\infty < 1 \end{matrix} \quad \text{pour } t \in \left]0,t(h)\right[. \tag{3.4.4}$$

L'existence de $t(h) > 0$ pour h suffisamment petit est justifié par la relation (3.4.1). Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{matrix} |U_h(t)|_\infty \leq \|u(.,t)\|_\infty + |U_h(t) - u_h(t)|_\infty \\ |V_h(t)|_\infty \leq \|v(.,t)\|_\infty + |V_h(t) - v_h(t)|_\infty \end{matrix} \quad \text{pour } t \in \left]0,t(h)\right[, \tag{3.4.5}$$

Ce qui implique que

$$\begin{matrix} |U_h(t)|_\infty \leq 1+\alpha \\ |V_h(t)|_\infty \leq 1+\beta \end{matrix} \quad \text{pour } t \in \left]0,t(h)\right[. \tag{3.4.6}$$

En utilisant le dévelopement de Taylor, on a pour $t \in \left]0,t(h)\right[$,

$$\left\{ \begin{array}{c} mh\frac{d\tau_m(t)}{dt} - \delta^2\tau_m(t) = p\eta_m^{p-1}(t)\varrho_m(t) + o(h^2) \\ (M+1-m)\,h\frac{d\varrho_m(t)}{dt} - \delta^2\varrho_m(t) = p\xi_m^{p-1}(t)\tau_m(t) + o(h^2) \end{array} \right. \tag{3.4.7}$$

où

$$\begin{aligned} \delta^2\tau_m(t) &= \tfrac{\tau_{m-1}(t)-2\tau_m(t)+\tau_{m+1}(t)}{h^2}, \\ \delta^2\varrho_m(t) &= \tfrac{\varrho_{m-1}(t)-2\varrho_m(t)+\varrho_{m+1}(t)}{h^2}, \end{aligned} \qquad \text{pour tout } 1 \leq m \leq M$$

et

$$\begin{aligned} \xi_h(t) &= \lambda_t U_h(t) + (1-\lambda_t)u_h(t) \\ \eta_h(t) &= \lambda_t V_h(t) + (1-\lambda_t)v_h(t) \end{aligned} \qquad \text{pour } \lambda_t \in \left]0,1\right[.$$

D'après (3.4.3) et (3.4.6), il existe des constantes positives C_1, C_2 et K telles que

$$\begin{cases} mh\frac{d\tau_m(t)}{dt} - \delta^2\tau_m(t) \leq C_1\left|\varrho_m(t)\right| + Kh^2 \\ (M+1-m)\,h\frac{d\varrho_m(t)}{dt} - \delta^2\varrho_m(t) \leq C_2\left|\tau_m(t)\right| + Kh^2 \end{cases} \tag{3.4.8}$$

On considère les deux fonctions

$$\begin{aligned} z(x,t) &= \exp((L+1)t + Cx^2)(\left|U_h(0) - u_h(0)\right|_\infty + Qh^2), \\ y(x,t) &= \exp((L+1)t + Cx^2)(\left|V_h(0) - v_h(0)\right|_\infty + Qh^2) \end{aligned}$$

où L, C, Q sont des constantes.

$$\begin{cases} xz_t(x,t) - z_{xx}(x,t) = (x(L+1) - 2C - 4C^2x^2)z(x,t) \\ (1-x)\,y_t(x,t) - y_{xx}(x,t) = ((1-x)\,(L+1) - 2C - 4C^2x^2)y(x,t) \\ z(x,0) = \exp(Cx^2)(\left|U_h(0) - u_h(0)\right|_\infty + Qh^2), \\ y(x,0) = \exp(Cx^2)(\left|V_h(0) - v_h(0)\right|_\infty + Qh^2) \end{cases} \tag{3.4.9}$$

En posant

$$\begin{aligned} z_m(t) &= z\left(x_m, t\right), \\ y_m(t) &= y\left(x_m, t\right), \end{aligned}$$

sachant que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_m &= \frac{z_{m-1}(t) - 2z_m(t) + z_{m+1}(t)}{h^2} + o(h^2), \\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_m &= \frac{y_{m-1}(t) - 2y_m(t) + y_{m+1}(t)}{h^2} + o(h^2), \end{aligned}$$

d'après (3.4.9), on obtient

$$\begin{cases} x_m \frac{dz_m(t)}{dt} - \delta^2 z_m(t) = (x_m(L+1) - 2C - 4C^2 x_m^2) z_m(t) + o(h^2) \\ (1-x_m) \frac{dy_m(t)}{dt} - \delta^2 y_m(t) = ((1-x_m)(L+1) - 2C - 4C^2 x_m^2) y_m(t) + o(h^2) \\ z(x_m, 0) = \exp(C x_m^2)(|U_h(0) - u_h(0)|_\infty + Qh^2), \\ y(x_m, 0) = \exp(C x_m^2)(|V_h(0) - v_h(0)|_\infty + Qh^2) \end{cases} \tag{3.4.10}$$

Comme

$$z(x,t) = \left(\frac{|U_h(0) - u_h(0)|_\infty + Qh^2}{|V_h(0) - v_h(0)_\infty| + Qh^2} \right) y(x,t),$$
$$y(x,t) = \left(\frac{|V_h(0) - v_h(0)|_\infty + Qh^2}{|U_h(0) - u_h(0)|_\infty + Qh^2} \right) z(x,t)$$

on peut choisir L, C, Q assez grand pour que

$$\begin{cases} x_m \frac{dz_m(t)}{dt} - \delta^2 z_m(t) \geq (x_m(L+1) - 2C - 4C^2 x_m^2) y_m(t) + Kh^2 \\ (1-x_m) \frac{dy_m(t)}{dt} - \delta^2 y_m(t) \geq ((1-x_m)(L+1) - 2C - 4C^2 x_m^2) z_m(t) + Kh^2 \\ z_m(0) > \tau_m(0),\ y_m(0) > \varrho_m(0), \end{cases} \tag{3.4.11}$$

Alors

$$\begin{cases} mh \frac{dz_m(t)}{dt} - \delta^2 z_m(t) \geq C_1' y_m(t) + Kh^2 \\ (M+1-m) \frac{dy_m(t)}{dt} - \delta^2 y_m(t) \geq C_2' z_m(t) + Kh^2 \\ z_m(0) > \tau_m(0),\ y_m(0) > \varrho_m(0), \end{cases} \tag{3.4.12}$$

où

$$C_1' \geq C_1$$
$$C_2' \geq C_2$$

On suppose que

$$e_h(t) = z_h(t) - \tau_h(t),$$
$$g_h(t) = y_h(t) - \varrho_h(t).$$

D'aprés (3.4.8) et (3.4.12), on obtient

$$\begin{cases} mh\frac{de_m(t)}{dt} - \delta^2 e_m(t) - C_1' y_m(t) + C_1 \left|\varrho_m(t)\right| \geq 0 \\ (M+1-m)\,\frac{dg_m(t)}{dt} - \delta^2 g_m(t) - C_2' z_m(t) + C_2 \left|\tau_m(t)\right| \geq 0 \\ e_m(0) > 0,\ g_m(0) > 0, \end{cases} \tag{3.4.13}$$

Tenant compte du lemme 3.4.1, on obtient

$$\begin{cases} mh\frac{de_m(t)}{dt} - \delta^2 e_m(t) + C_1'' \left|\varrho_m(t) - y_m(t)\right| \geq 0 \\ (M+1-m)\,\frac{dg_m(t)}{dt} - \delta^2 g_m(t) + C_2'' \left|\tau_m(t) - z_m(t)\right| \geq 0 \\ e_m(0) > 0,\ g_m(0) > 0, \end{cases}$$

où

$$C_1'' = \min\{C_1, C_1'\}$$
$$C_2'' = \min\{C_2, C_2'\}$$

Donc

$$\begin{cases} mh\frac{de_m(t)}{dt} - \delta^2 e_m(t) + C_1'' \left|g_m(t)\right| \geq 0, \\ (M+1-m)\,\frac{dg_m(t)}{dt} - \delta^2 g_m(t) + C_2'' \left|e_m(t)\right| \geq 0, \\ e_m(0) > 0,\ g_m(0) > 0, \end{cases} \tag{3.4.14}$$

pour $1 \leq m \leq M$.

$$\begin{cases} \frac{de_m(t)}{dt} - \delta_h^2 e_m(t) + \frac{C_1''}{mh} \left|g_m(t)\right| \geq 0, \\ \frac{dg_m(t)}{dt} - \delta_h^2 g_m(t) + \frac{C_2''}{(M+1-m)} \left|e_m(t)\right| \geq 0, \\ e_m(0) > 0,\ g_m(0) > 0, \end{cases}$$

où δ_h^2 est l'opérateur de différences finies, déjà défini dans le cadre de la proposition 3.2.1.

Maintenant on pose

$$G_h(t) = (e_1(t), ..., e_M(t), g_1(t), ..., g_M(t))$$

et

$$H(|G_m(t)|) = \begin{cases} \frac{C_1''}{mh} |g_m(t)|, \, 1 \leq m \leq M \\ \frac{C_2''}{(M+1-m)} |e_m(t)|, \, 1 \leq m \leq M \end{cases}$$

Alors on peut définir l'inégalité différentielle suivante

$$\begin{cases} \frac{dG_m(t)}{dt} - \delta_h^2 G_m(t) + H(|G_m(t)|) \geq 0 \\ G_m(0) > 0 \end{cases} \tag{3.4.15}$$

d'après la proposition 3.2.1 et la remarque 3.2.2, on déduit que

$$\begin{matrix} z_m(t) \geq \tau_m(t) \\ y_m(t) \geq \varrho_m(t) \end{matrix} \quad \text{pour } t \in \,]0, t(h)[\,, \, 1 \leq m \leq M. \tag{3.4.16}$$

De la même manière on peut aussi montrer que

$$\begin{matrix} z_m(t) > -\tau_m(t) \\ y_m(t) > -\varrho_m(t) \end{matrix} \quad \text{pour } t \in \,]0, t(h)[\,, \, 1 \leq m \leq M. \tag{3.4.17}$$

où

$$-\tau_h(t) = -U_h(t) + u_h(t)$$

$$-\varrho_h(t) = -V_h(t) + v_h(t)$$

Ce qui implique que

$$\begin{matrix} z_m(t) > |\tau_m(t)| \\ y_m(t) > |\varrho_m(t)| \end{matrix} \quad \text{pour } t \in \,]0, t(h)[\,, \, 1 \leq m \leq M.$$

On déduit que

$$|U_h(t) - u_h(t)|_\infty \leq \exp((L+1)t + C)(|U_h(0) - u_h(0)|_\infty + Qh^2),$$
$$|V_h(t) - v_h(t)|_\infty \leq \exp((L+1)t + C)(|V_h(0) - v_h(0)|_\infty + Qh^2),$$

pour $t \in]0, t(h)[$.

Alors

$$|W_h(t) - w_h(t)|_\infty \leq \exp((L+1)t + C)(|W_h(0) - w_h(0)|_\infty + Qh^2),\ t \in]0, t(h)[\,.$$

Montrons que $t(h) = T$. Supposons que $T > t(h)$. A partir de (3.4.4), on a

$$1 = |W_h(t(h)) - w_h(t(h))|_\infty \leq \exp((L+1)T + C)(|W_h(0) - w_h(0)|_\infty + Qh^2).$$

Comme

$$\lim_{h\to 0} \exp((L+1)T + C)(|W_h(0) - w_h(0)|_\infty + Qh^2) = 0,$$

on déduit que $1 \leq 0$, ce qui est impossible. Par conséquent $t(h) = T$. ■

Corollaire 3.4.1 *Sous les hypothèses du théorème 3.4.1, si T_b et T_b^h sont respectivement les temps d'explosion en temps fini du problème continu (2.1.1) et du problème semi-discret (3.2.1) alors*

$$\lim_{h\to 0} \inf T_b^h \geq T_b.$$

Preuve. D'après le théorème 3.4.1, $\forall\ t_0 \in]0, T_b[$, $\exists\ h(t_0) > 0$ tel que la solution du problème semi-discret $W_h(t)$ pour $h \in]0, h(t_0)[$ est définie au moins jusqu'à l'instant t_0, et

$$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[0,t_0]} |W_h(t) - w_h(t)|_\infty = 0.$$

Donc $T_b^h \geq t_0$, $\forall h \in]0, h(t_0)[$. Ainsi on a

$$\lim_{h\to 0} \inf T_b^h \geq t_0.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $t_0 < T_b$, on obtient

$$\lim_{h\to 0}\inf T_b^h \geq T_b.$$

■

Maintenant, on montre la convergence du temps d'explosion semi-discret, ce résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.4.2 *Si les hypothèses du théorème 3.4.1, s'il existe une fonction continue et non décroissante*

$$\mathcal{F} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

telle que

$$|W_h(t)|_\infty \leq \mathcal{F}\left(\frac{1}{T_b^h - t}\right),\ \forall t < T_b^h. \tag{3.4.18}$$

Alors

$$\lim_{h\to 0} T_b^h = T_b.$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.4.2 *Sous les hypothèses du théorème 3.4.2 sont vérifiées, alors on a*

$$\lim_{h\to 0}\sup T_b^h \leq T_b.$$

Preuve. Supposons le contraire, donc il existe une suite $\{h_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{h\to\infty} h_n = 0$, et $T_b^{h_n} > T_b$.

Soit

$$\chi_h(t) := |W_h(t) - w_h(t)|_\infty \text{ pour } t < T_b$$

on $\chi_h(0) = o(1)$ quand $h \to 0$.

Supposons que pour tout $t < T_b$, $\chi_{h_n}(t) < 1$, $\forall\ n \geq 1$, ceci implique que $\forall\ n \geq 1$, $T_b^{h_n} \leq T_b$, ce qui n'est pas vrai.

Donc il existe $t_n < T_b$ tel que $\chi_{h_n}(t_n) = 1$

Le résultat du théorème 3.4.1 implique que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \ = T_b$.

Maintenant de l'hypothèse (3.4.18), on obtient

$$\chi\left(\frac{1}{T_b^{h_n} - t_n}\right) \geq |W_{h_n}(t_n)|_\infty \geq |w_{h_n}(t_n)|_\infty - 1$$

χ étant continue et non décroissante, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} T_b^{h_n} - t_n = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \sup T_b^{h_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sup \left(T_b^{h_n} - t_n\right) + T_b = T_b$$

d'où la contradiction, puisque on a $T_b^{h_n} > T_b$. ■

Preuve. (du théorème)

D'après le corollaire 3.4.1 et le lemme 3.4.2 on a

$$\lim_{h\to 0} \inf T_b^h \leq \lim_{h\to 0} \sup T_b^h \leq T_b \leq \lim_{h\to 0} \inf T_b^h.$$

Ce qui implique

$$\lim_{n\to 0} \inf T_b^h = \lim_{h\to 0} \sup T_b^h = T_b,$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} T_b^h = T_b.$$

■

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on utilise une téchnique de troncature qui permet de lever la dégénérescence, et ramèner ce système a un problème non dégénéré. On montre que la solution du problème (2.1.1) existe et elle est unique. En outre, on donne des conditions suffisantes pour que la solution du système (2.1.1) explose en un temps fini. On introduit un problème semi-discret associé au système (2.1.1) et on détermine des conditions suffisantes pour les quelles la solution discrète de ce système explose en temps fini. On a montré aussi la convergence des solutions discrètes et leurs temps d'explosion, respectivement vers la solution du problème continu (2.1.1) et le temps d'explosion qui lui est associé.

Suite à ce travail certaines questions se posent, et méritent une étude à part. l'une des questions importante à traiter concerne la localisation de l'ensemble des points d'explosion.

Bibliographie

[1] H. Amann, Ordinary Differential Equations. Walter de Gryter, Berlin. New York, 1990.

[2] N. F. Britton, Reaction-Diffusion Equations and Their Application to Biology, School of Mathematics Bath Uni Bathj, UK, 1986.

[3] C. Y. Chan and H. T. Liu, Global existence of solutions for degenerate semilinear parabolic problems, Nonlinear Analysis 34 (1998), no. 4, 617-628.

[4] W. Cheney, D Kincaid, Numerical Mathematics and Computing, Thomson Brooks/Cole, Canada, 2008.

[5] A. Coddington and N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

[6] D.B.Dhaigude, B.R.Sontakke and Chandradeepa Dhaigude, Monotone Technique for Nonlinear Degenerate Weakly Coupled System of Parabolic Problems, Appl. Mathe. Sc., Comm. Appl.Anal., 2011 15(1): 13-24.

[7] M. Fiedler, Special matrices and their applications in numerical mathematics, Kluwer Academic Publishers Group, Boston, 1986.

[8] M. S. Floater, Blow-up at the Boundary for Degenerate Semilinear Parabolic Equations, Arch. Rational Mech. Anal., 1991 114: 57-77.

[9] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall (1964).

[10] A. Friedman, Y. Giga, A single point blow-up for solutions of semilinear parabolic systems, J. fac. sci. univ. of Tokyo,Sect. IA, Math., 1987 34: 65-79.

[11] A. Friedman and B. McLeod, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), 427-447.

[12] V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations, Chile (Temu, 1999), Pitman, (2000), 1-39.

[13] T. Gazenave and A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, Paris, 1990, English translation : The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[14] D. Gilbard et N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Classics in Mathematics, 1998.

[15] D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer, Berlin-Heidebberg-New York,1981.

[16] R. A. Horn, C. A. Johnson, Matrix analysis. Cambridge University Press (1985).

[17] D. S. Jones, B. D. Sleeman, Differential Equations and Mathematical Biology, Chapman and Hall/CRC, 2003.

[18] S. Kaplan, On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 1963 16: 305-330.

[19] M. Kouche, Caractérisation de l'ensemble des points d'explosion d'un système parabolique dégénéré, Mémoire de Magister, Univ. Annaba, 1996.

[20] V. Lakshmikantham, S. Leel, Differential and Integral Inequalities, Academic Press, Orlando, Florida, Vol. I and II, 1969.

[21] Q. L. Lui, Y. P. Chen and C. H. Xie, Blow-up for a degenerate parabolic equation with a nonlocal source, Journal. Math. Anal. Appl. 285 (2003), 485-505.

[22] C.V.Pao, On non-linear reaction-diffusion systems, J. Math. Analysis. App. 87. (1982) 165-198.

[23] M. H. Protter and H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Prntice-Hall, New Jersy (1967).

[24] J. E. Rombaldi, Analyse matricielle. EDP Sciences (2000).

[25] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov and A. P. Mikhailov, Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations, Nauka, Moscow, 1987, English translation : Michael Grinfeld, Berlin-New York, 1995.

[26] D. H. Sattinger, Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems, Indiana univ. Math. J, Vol. 21, No. 11, 1972, 979-1000

[27] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York (1983).

[28] L. Shi, C. Mu, F. Li, Blow-up for a degenerate and singular parabolic system with nonlocal sources and absorptions, Appl. Mathe. Sc., 2010 4(56): 2797-2808.

[29] J. Zhou, C.L. Mu, Z.P. Li, Blow-up for degenerate and singular parabolic system with nonlocal source, Boundary Value Problems, 2006: 1-19.