

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté des sciences de l'ingénieur.

Année 2007

Département de génie mécanique.

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat d'Etat

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT DE JEFFERY-HAMEL

Option
ENERGETIQUE

Par
Rachid ADJABI

DIRECTEUR DE THESE : A. HAIHEM

M.C.

U. Annaba

DEVANT LE JURY

PRESIDENT: B. MERZOUG

Pr.

U. Annaba

EXAMINATEURS : L. KHOCHMANE
L. BOUMAARAF
D. DJAFRI

M.C

U. Skikda

M.C

U. Annaba

M.C.

U. Annaba

Résumé

Cette étude présente une nouvelle théorie linéaire de faibles perturbations instationnaires de l'écoulement de Jeffery-Hamel d'un fluide visqueux incompressible, dans le but de mieux comprendre la stabilité dans le temps de l'écoulement permanent entre deux parois planes inclinées à partir d'une ligne source à leur intersection. L'équation qui régit cette perturbation élémentaire est une équation différentielle linéaire d'ordre quatre à variables, dans l'espace et dans le temps, séparables. La solution générale de cette équation différentielle 'perturbée' est représentée par la somme des solutions particulières du temps par l'intermédiaire d'une fonction de la forme e^{st} . Ainsi la stabilité de l'écoulement de Jeffery-Hamel de base exige que toutes les 'fréquences', s , qui sont en général complexes aient leurs parties réelles négatives, sinon cet écoulement est instable. A cet effet, des méthodes numériques stables sont utilisées pour l'amélioration, le contrôle, et l'évaluation de la précision de la solution numérique de l'équation différentielle 'perturbée' afin d'obtenir les signes réels de la 'fréquence', s , de la perturbation de l'écoulement de Jeffery-Hamel. Les résultats indiquent que pour un angle α très faible, l'écoulement de Jeffery-Hamel de base ne peut être stable que pour des nombres de Reynolds Re où $\alpha < \alpha_c(Re)$, $\alpha_c(Re)$ étant l'angle d'ouverture du canal où la symétrie de l'écoulement de base est brisée, et instable pour des nombres de Reynolds Re où $\alpha > \alpha_c(Re)$. Le modèle utilisé peut constituer une première étape pour l'estimation approximative du non-parallélisme de l'écoulement entre deux parois planes qui est une difficulté importante dans la théorie de la stabilité hydrodynamique.

NOTATIONS - UTILISEES

Certains symboles, en nombre restreint, peuvent avoir plus d'une signification. Mais ces différentes significations correspondent alors à des utilisations dans des chapitres indépendants, ce qui leur enlève tout risque d'ambiguïté.

A	constante d'intégration.
B	constante d'intégration.
c	coefficient.
C	constante d'intégration.
D	domaine de définition d'une fonction.
f	fonction de la distribution des vitesses de l'écoulement, $f(\theta)$, ou autres fonctions.
F	frontière d'un domaine.
F	fonction réduite de la distribution des vitesses de l'écoulement, $F(\theta^*, \alpha)$
F'	fonction.
F_t	force tangentielle.
g	fonction.
H	espace de fonction aux dérivées partielles continues.
i	indice ($i = 1, 2, 3, \dots$).
j	indice ($j = 1, 2, 3, \dots$).
k	indice ($k = 1, 2, 3, \dots$), ou constante d'une fonction circulaire indiquant le nombre de tours.
l	indice ($l = 1, 2, 3, \dots$).
L	fonction.
M	point.
n	Vecteur unitaire sur la normale à une surface, ou constante, ou indice ($n = 1, 2, 3, \dots$).
P	pression, ou indice indiquant la paroi, ou pression totale $P = p + \bar{p}$, ou paramètre ($P = \min\{s\}$) caractérisant la stabilité du mouvement permanent du fluide.
p	pression non perturbée, ou paramètre (coefficient).
\bar{p}	pression perturbée.
Q	débit, ou fonction.
Q'	fonction.
Q	fonction perturbée $Q(\alpha, Re, F(\theta^*, \alpha), \Phi(\theta^*, \alpha), \theta^*)$
\tilde{Q}	fonction perturbée $\frac{Q}{A}$
r	coordonnée (système de coordonnées cylindriques ou polaires), ou rayon.

Notations

r^*	coordonnée cylindrique réduite ($= \frac{r}{r_2}$)
s	surface, ou abscisse curviligne, ou paramètre (coefficient).
S	surface, ou aire, ou abscisse curviligne, ou paramètre (facteur) caractérisant la stabilité de l'écoulement permanent du fluide.
t	temps.
t^*	temps réduit ($= \nu t$)
T	fonction.
u	vecteur vitesse de composantes cartésiennes (u, v, w)
$[u, v, w]$	ou (U_x, U_y, U_z) ou vitesse perturbée [u_x, u_y, u_z]
$[u_r, u_\theta, u_z]$	ou vitesse perturbée.
V	vecteur vitesse de composantes cartésiennes (V_x, V_y, V_z)
$[V_x, V_y, V_z]$	ou $V = v + u$
V	vecteur vitesse de composantes cylindriques (V_r, V_θ, V_z)
$[V_r, V_{y\theta}, V_z]$	ou $V = v + u$
v	vecteur vitesse de composantes cartésiennes (V_x, V_y, V_z)
$[v_x, v_y, v_z]$	ou vitesse non perturbée.
v	vecteur vitesse de composantes cylindriques (v_r, v_θ, v_z)
$[v_r, v_\theta, v_z]$	ou vitesse non perturbée.
x	coordonnée cartésienne.
y	coordonnée cartésienne, ou fonction.
z	coordonnée cartésienne, ou cylindrique.
z, z'	fonctions.
$F_j^{(k)}$	fonctions réduites de la distribution des vitesses de l'écoulement 1,2,3,4 ; $k = 1,2,3,4$). ($j =$

Caractères grecs

α	demi-angle du domaine de l'écoulement.
ε	perturbation infiniment petite non stationnaire.
θ	coordonnée cylindrique.
θ^*	coordonnée cylindrique réduite ($= \frac{\theta}{\alpha}$)

- λ constante utilisée en exposant (puissance).
- μ viscosité dynamique.
- ν viscosité cinématique.
- ρ masse volumique.
- τ_p contrainte tangentielle locale, ou contrainte de cisaillement à la paroi (écoulement fluide sur paroi).
- ψ fonction utilisée dans la méthode de séparation des variables ($\psi(x)$)
- Φ fonction réduite utilisée pour la détermination de la stabilité du mouvement stationnaire du fluide [$\Phi(\theta^*, \alpha)$].

Nombres sans dimensions

Re nombre de Reynolds.

Opérateurs mathématiques

- Δ laplacien.
- ∇ Nabla (ou Hamiltonien).
- d dérivée totale.
- ∂ dérivée partielle.
- div divergence.
- $grad$ gradient.
- \vec{rot} rotationnel.

Table des matières

Résumé

Notations utilisées

Introduction générale..... 1

Chapitre I

Ecoulement de Jeffery-Hamel

I.1. Introduction	5
I.2. Solutions exactes des équations de Navier-Stokes de l'écoulement de Jeffery-Hamel	6
I.2.1. Traitement analytique	6
I.2.2. Traitement numérique	11
I.2.2.1. Résultats et discussion	12
I.3. Conclusion	19

Chapitre II

Stabilité linéaire dans le temps de l'écoulement de Jeffery-Hamel

II.1. Introduction	20
II.2. Mise en équation	21
II.3. Traitement mathématique de la stabilité linéaire. Cas $Re = 0$	26
II.4. Equation adimensionnelle modifiée de la perturbation.....	32
II.5. Conclusion	37

Chapitre III

Modélisation de perturbation

III.1. Introduction	38
III.2. Choix du point de l'évolution de la perturbation	38
III.3. Mise en équation	38
III.4. Conclusion.....	41

Chapitre IV
Calculs numériques

IV.1. Introduction	42
IV.2. Méthode de Bairstow pour la résolution du polynôme	42
IV.2.1. Test d'arrêt classique	43
IV.2.2. Test d'arrêt optimal	43
IV.2.3. Contrôle et amélioration de la précision de la racine du polynôme	44
IV.2.4. Evaluation de la précision et amélioration éventuelle de la solution.....	48
IV.2.5. Organigramme de la méthode de Bairstow avec test d'arrêt optimal.....	57
IV.3. Traitement informatique de la stabilité du modèle utilisé.....	59
IV.4. Résultats et discussion	70
IV.5. Conclusion	79
Conclusion générale	80
Bibliographie.....	83

Introduction générale

Les écoulements de Jeffery-Hamel constituent une famille de solutions exactes des équations de Navier-Stokes pour un écoulement permanent radial bidimensionnel d'un fluide visqueux incompressible à partir d'une ligne source à l'intersection de deux parois planes rigides.

L'intérêt de cet écoulement radial engendré par une source (divergent) ou par un puits (convergent) est fondamental. Bien qu'il ait été proposé et étudié, en premier, par Jeffery (1915) et indépendamment par Hamel (1916), et décrit ensuite dans plusieurs manuels par de nouvelles contributions apportées par plusieurs autres auteurs, l'écoulement de Jeffery-Hamel n'est pas largement compris. La théorie classique, d'après Jeffery-Hamel des solutions exactes des équations de Navier-Stokes qui décrivent l'écoulement radial bidimensionnel permanent d'un fluide visqueux incompressible, était raffinée depuis des années (cf. Batchelor, 1967, section 5.6) [37], et Fraenkel (1962) [10] avait classé définitivement toutes les solutions. Il existe une infinité de solutions pour chaque paire de valeurs des principaux paramètres adimensionnels, à savoir le demi-angle α entre les deux parois inclinées et le nombre de Reynolds $Re = Q/2\nu$, où Q est le flux par unité de longueur de la ligne de source à l'intersection des parois et ν est la viscosité cinématique du fluide.

Certains problèmes complexes avaient surgi de l'examen de la stabilité de l'écoulement de Jeffery-Hamel. Les expériences de laboratoires et des simulations numériques ne sont pas faciles. Aussi, le progrès dans le développement de la théorie a été lent. Bien que la théorie de la stabilité linéaire des écoulements de Jeffery-Hamel soit étroitement analogue à celle des écoulements plans parallèles, les variables ne sont pas séparables de sorte qu'il semble ne pas y avoir un problème à valeur propre et à différentielle-ordinaire analogue au problème d'Orr-Sommerfeld.

L'écoulement de Jeffery-Hamel est aussi beaucoup plus important qu'une simple famille dans la collection mathématique des solutions exactes des équations de Navier-Stokes parce qu'il peut être généralisé et employé dans une variété de contextes. Il peut être utilisé pour approcher localement l'écoulement permanent dans un canal bidimensionnel avec parois de faible courbure (Fraenkel 1962) [10]. Pour voir cela, considérons l'écoulement permanent le long d'un canal qui a, dans le plan (x, z) , des parois $z = f(x)$ et $z = -g(x)$. Supposons qu'il y ait un flux permanent Q donné dans la direction x positive. A présent, les équations des parois peuvent être de manière équivalente exprimées par $\theta = \alpha(x)$ et $\theta = -\beta(x)$, où $\tan \alpha(x) = f'(x)$, $\tan \beta(x) = g'(x)$; et θ est défini comme l'angle que fait la tangente à la paroi à la position x avec l'axe x positif. Alors il peut être vu que d'après la fig.1 [1], le canal ressemble localement à la configuration de l'écoulement de Jeffery-Hamel si α et β varient lentement, i.e. si la courbure des parois est faible.

Sobey et Drazin (1986) [18] n'avaient pas seulement utilisé l'écoulement de Jeffery-Hamel pour décrire l'écoulement du canal mais avaient aussi simplifié la présentation de l'écoulement de Jeffery-Hamel par l'emploi des diagrammes de bifurcation et avaient suggéré que tout écoulement avec distribution de vitesse radiale des deux signes est instable. Cela les conduit à douter de la validité de l'emploi de l'écoulement de Jeffery-Hamel pour

l'approximation dans un canal avec des parois de faible courbure partout où il n'y a pas un écoulement de Jeffery-Hamel approprié avec vitesse radiale d'un seul signe. Ils avaient, en réexaminant les solutions à la lumière de la théorie de la bifurcation, reconnu que, lorsque Re croît à partir de zéro pour l'angle α fixé de la solution primaire, qui est symétrique autour de l'axe de l'écoulement et correspond à l'écoulement de Stokes lorsque $Re = 0$, en général, évolue jusqu'à ce qu'il y est une bifurcation de la fourchette subcritique, où la symétrie est brisée, à une certaine valeur de Re , appelée $Re_2(\alpha)$ par Fraenkel. Il existe une autre bifurcation de l'écoulement primaire au point de retour à $Re = Re_3(\alpha) > Re_2(\alpha)$, où la symétrie est préservée. Pour $Re > Re_3(\alpha)$ il n'y a pas d'expansion continue de l'écoulement primaire. Sobey et Drazin avaient déduit que l'écoulement primaire est instable pour $Re > Re_2(\alpha)$, et que toutes les autres solutions de Jeffery-Hamel sont toujours instables.

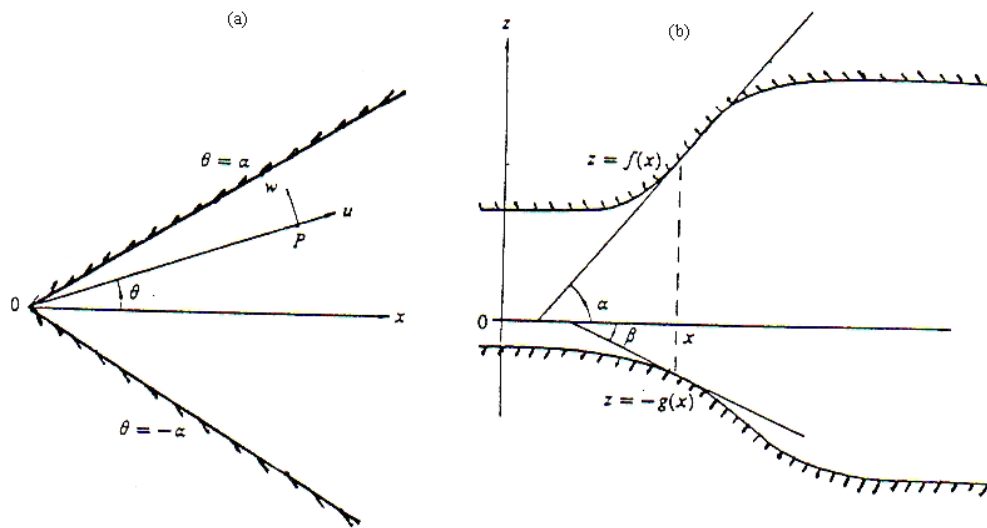


Fig. 1. [1] $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) schéma de la configuration de l'écoulement de Jeffery-Hamel} \\ \text{b) schéma du canal bidimensionnel approximé localement à la} \\ \text{position } x \text{ par la configuration de l'écoulement de Jeffery-Hamel} \end{array} \right.$

Watson (Fraenkel 1963, P.407) [11] avait noté que cette approximation locale tient si le canal est symétrique, et aussi $\beta(x) = \alpha(x)$ pour tout x , ou non.

Fraenkel (1963) [11] avait aussi montré que l'écoulement de Jeffery-Hamel primaire est une approximation locale pour un écoulement bidimensionnel permanent dans un canal divergent avec des parois de faible courbure pour $Re < Re_3(\alpha_m)$, où α_m est le demi-angle maximum entre les plans tangents aux parois en tous points le long du canal (fig.2.b).

Cependant, Cliffe et Greenfield (1982) [7] avaient trouvé à partir de simulations numériques qu'il y a une bifurcation de la fourchette supercritique des écoulements bidimensionnels permanents dans un canal symétrique spécifique à une certaine valeur de Re , dit Re_c . Plus tard des études numériques des écoulements dans des canaux divergents symétriques (admettant des angles de divergence appréciables), il a été constaté que la première bifurcation lorsque le nombre de Reynolds croît est une fourchette supercritique

(quoique inadéquate et insatisfaisante dans certaines études). En particulier, Sobey et Drazin (1986) [18] avaient également constaté une fourchette supercritique pour un autre canal symétrique, et suggéré que $Re_c \approx Re_2(\alpha_m)$ lorsque la courbure des parois est faible. Il est paradoxal qu'il y ait encore une bifurcation de la fourchette subcritique des solutions de Jeffery-Hamel pour une bifurcation de la fourchette supercritique des écoulements dans un canal.

Dean (1934) [38] avait initié l'étude des petites perturbations permanentes de l'écoulement de Jeffery-Hamel. Il avait séparé les variables pour le problème linéarisé, considérant les modes qui régissent la croissance spatiale ou la décomposition des perturbations bidimensionnelles permanentes. Banks et al. (1988) [1] avaient interprété ces modes comme donnant la 'stabilité spatiale' marginale lorsque $Re_c \approx Re_2(\alpha)$. Notez que cette stabilité pour l'écoulement de base s'occupe conventionnellement du développement dans le temps, et non dans l'espace, des petites perturbations. Ainsi la 'stabilité spatiale' de l'écoulement de base permanent pour les perturbations stationnaires concerne strictement seulement les propriétés de tous les écoulements permanents à proximité de l'écoulement de base. Cependant, il existe une relation étroite entre les développements des perturbations dans l'espace et dans le temps et la relation permet l'usage commun 'stabilité spatiale' ; en effet, en générale, instabilité spatiale implique instabilité quoique l'instabilité pour les perturbations oscillatoires n'impliquent pas instabilité spatiale. Banks et al. avaient déduit que l'écoulement de Jeffery-Hamel primaire est instable lorsque $Re > Re_2(\alpha) \sim 4,712/\alpha$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$ alors qu'il est bien connu l'écoulement plan de Poiseuille, qui est ce que l'écoulement primaire devient lorsque $\alpha = 0$, est instable pour un mode d'Orr-Sommerfeld de la stabilité oscillatoire lorsque $Re > 3848$ (c'est 2/3 fois la valeur 'usuelle' de 5772 (Cf. Drazin et Reid, 1981, P.192) [9] en raison de l'échelle choisie ici). Ainsi, il apparaît que lorsque $Re = 3848$ l'écoulement primaire est marginalement stable en mode d'Orr-Sommerfeld si $\alpha = 0$, mais le mode spatial permanent si $\alpha \approx \frac{4,712}{3848} = 0.00122$. Banks et al. avaient en conséquence suggéré que si les parois du canal sont presque parallèles telles que l'angle entre les parois est simplement un peu plus grand que 0.00122 rad i.e. 0.07° , alors l'écoulement peut être instable pour l'espace plutôt que pour un mode d'Orr-Sommerfeld. Maintenant, les deux modes sont associés avec des mécanismes très différents de l'instabilité, alors cette suggestion a besoin d'une élucidation pour trouver comment l'écoulement primaire devient instable lorsque les parois sont presque parallèles, et s'il existe, en effet, deux modes distincts de l'instabilité des écoulements de Jeffery-Hamel.

Eagles (1966) [40] avait utilisé une approximation quasi-parallèle pour étudier la stabilité de l'écoulement de Jeffery-Hamel aux modes normaux temporels à la limite lorsque $\alpha \rightarrow 0$ et avait trouvé une forte influence déstabilisante pour α positif faible. En supposant l'écoulement parallèle localement en un point donné, il avait négligé la divergence des lignes de courant de l'écoulement de base. Cependant, Banks et al. (1988) [1] avaient remis en cause les bases conceptuelles de l'emploi des modes normaux standards dans un secteur sans exclure les régions correspondant à $r = 0, \infty$. Aussi Georgiou et Eagles (1985) [13] avaient appliqué une approximation asymptotique similaire aux modes temporels pour l'écoulement dans un canal divergent avec paroi de faible courbure, reconnaissant l'importance de

l'écoulement de Jeffery-Hamel comme une approximation de l'écoulement local. Ils avaient utilisé comme première approximation un écoulement plan pour élucider les écoulements de Jeffery-Hamel, les écoulements dans les canaux et leurs instabilités. Cependant, Allmen et Eagles (1984) [2] avaient résolu un intéressant problème à valeur propre aux dérivées partielles dans un coin fin pour un angle non nul donné ; Ils avaient calculé quelques modes linéaires forcés de fréquence donnée pour comparer avec les résultats des modes évoluant spatialement dans un canal faiblement divergent.

En 1996 Tam [41] avait conçu une méthode qui aidera à résoudre quelques problèmes que nous avons juste posés. Il avait traité la stabilité linéaire pour un jet bidimensionnel par une séparation approximative des variables qui est valable pour le courant loin en aval. Le problème de Tam est plutôt différent des autres problèmes actuels, mais ce problème et tous les autres concernent la stabilité des écoulements qui sont presque parallèles, et ainsi la distillation de sa méthode est utile ici.

Dans cette étude, nous examinerons la stabilité linéaire dans le temps d'une perturbation élémentaire instationnaire superposée à la solution stationnaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel de base.

Nous avons superposé une perturbation instationnaire infiniment petite à la solution stationnaire de Jeffery-Hamel et moyennant la fonction de courant $\psi(r, \theta, t)$, écrit l'équation différentielle linéaire d'ordre quatre aux conditions aux limites de la petite perturbation élémentaire.

Nous avons séparé les variables de l'espace et du temps de sorte que la solution générale de cette équation différentielle perturbée peut être représentée par la somme de solutions particulières qui dépendent du temps par l'intermédiaire d'une fonction de la forme e^{st} . Ainsi la stabilité de l'écoulement de Jeffery-Hamel de base exige que toutes les 'fréquences' s qui sont en général complexes aient leurs parties réelles négatives. Sinon, cet écoulement est instable.

Nous avons abordé le cas $Re = 0$ et utilisé la méthode du calcul des variations pour déduire que l'écoulement de Jeffery-Hamel de base est sans nul doute stable aux faibles nombres de Reynolds et avoir a priori une idée sur ce que devrait être la nature de la stabilité dans le cas de nombre de Reynolds Re croissant pour un angle α donné.

Pour pouvoir résoudre l'équation différentielle du quatrième ordre de la perturbation envisagée dont le traitement mathématique est quasi-impossible et même le traitement numérique complexe, nous lui avons apportée une légère simplification pour l'écrire sous la forme d'un système d'équations différentielles linéaires du second ordre réduit ou adimensionnel et l'adapté au traitement numérique.

Nous avons modélisé la petite perturbation élémentaire instationnaire superposée à la solution stationnaire de Jeffery-Hamel de base.

Enfin pour décrire de la meilleur manière possible la stabilité dans le temps de l'écoulement de Jeffery-Hamel de base, nous avons utilisé des méthodes numériques stables permettant de contrôler, d'améliorer et d'évaluer la précision de la solution, et par voie de conséquence d'obtenir, pour les 'fréquences', s , de la perturbation élémentaire, leurs signes réels et conclure quant à la stabilité dans le temps de la perturbation élémentaire envisagée.

Ecoulement de Jeffery-Hamel

I.1. Introduction

L'écoulement de Jeffery-Hamel auquel nous nous sommes particulièrement intéressés, constitue une famille de solutions exactes des équations de Navier-Stokes régissant les mouvements radiaux bidimensionnels permanents d'un fluide visqueux incompressible à partir d'une ligne source à l'intersection de deux parois planes rigides formant un angle 2α entre-elles[1](fig.1).

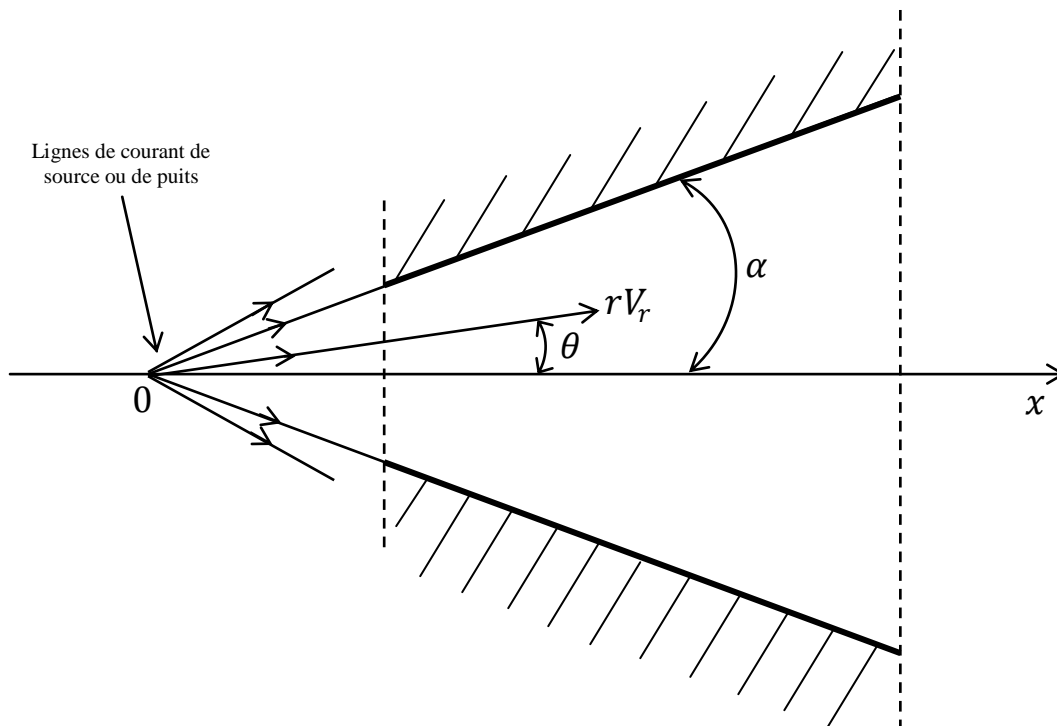


Fig.2. [15, 29] La géométrie de l'écoulement de Jeffery-Hamel

La figure .2 représente la coupe transversale des deux plans ; l'écoulement prend naissance à la ligne d'intersection des plans. Nous prendrons des coordonnées cylindriques r, θ, z , l'axe des z étant confondu avec l'arrête (point 0 sur la figure), et l'angle θ étant celui indiqué sur la figure. Le mouvement est uniforme le long de l'axe des z , et il est naturel de supposer qu'il sera purement radial, c'est-à-dire que :

$$\vec{v} \begin{cases} v_r = v(r, \theta) \\ v_\theta = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Les équations de continuité et de Navier-Stokes qui régissent cet écoulement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) &= 0 \\ V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + 2\nu \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

I.2. Solutions exactes des équations de Navier-Stokes de l'écoulement de Jeffery-Hamel

I.2.1. Traitement analytique

A partir des équations de continuité et de Navier-Stokes de l'écoulement de Jeffery-Hamel, il résulte que rV_r est une fonction de θ seul. On pose

$$f(\theta) = \frac{1}{6\nu} rV_r \quad (1)$$

$f(\theta)$ est la fonction de distribution des vitesses.

Il s'ensuit que :

$$f'''(\theta) + 4f'(\theta) + 12f(\theta)f'(\theta) = 0 \quad (2)$$

$$f''(\theta) + 4f(\theta) + 6f^2(\theta) = 2C_1 \quad (2')$$

$$\frac{f'^2}{2} + 2f^2 + 2f^3 - 2C_1f - 2C_2 = 0 \quad (3)$$

$$2\theta = \pm \int \frac{df}{\sqrt{-f^3 - f^2 + C_1f + C_2}} + C \quad (4)$$

Ce qui détermine la vitesse en fonction de θ . La fonction $u(\theta)$ peut être exprimée au moyen de fonctions elliptiques. Les trois constantes C_1, C_2, C se déterminent à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} f(\pm\alpha) = 0 \\ Q = \int_{-\alpha}^{+\alpha} rV_r d\theta = 6\nu \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(\theta) d\theta = \text{const} \end{cases} \quad (5)$$

$Q > 0$: L'arête est une source (écoulement divergent)

$Q < 0$: L'arête est un puits (écoulement convergent)

$$Re = \frac{|Q|}{\nu} = 6 \left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(\theta) d\theta \right| \quad (6)$$

En passant aux équations normales,

$$\frac{Q}{\nu} = Re \int_{-1}^1 F(\theta^*, \alpha) d\theta^* \quad (7)$$

$$Re = \frac{V_{rmax} \alpha}{\nu} = \frac{f(0)\alpha}{\nu} \quad (8)$$

L'équation différentielle linéaire réduite (ou adimensionnelle) du troisième ordre qui régit l'écoulement de Jeffery-Hamel prend la forme :

$$F'''(\theta^*, \alpha) + 4\alpha^2 F'(\theta^*, \alpha) + 2Re\alpha F(\theta^*, \alpha)F'(\theta^*, \alpha) = 0 \quad (9)$$

Et après une première intégration,

$$F''(\theta^*, \alpha) + Re\alpha F^2(\theta^*, \alpha) + 4\alpha^2 F(\theta^*, \alpha) = A \quad (9')$$

Avec les conditions aux limites,

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0, \alpha) = 1 \\ F'(0, \alpha) = 0 \\ F(\pm 1, \alpha) = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

a. Ecoulement convergent ($Q < 0$)

Pour traiter les solutions (4) et (5), nous supposons, se qui sera justifié par la suite, le mouvement symétrique par rapport au plan $\theta = 0$ ($f(\theta) = f(-\theta)$), la fonction $f(\theta)$ étant partout négative (c'est-à-dire $f(\theta) < 0 \forall \theta \in [-\alpha, +\alpha]$, ou ce qui revient au même, la vitesse est partout dirigée vers le sommet de l'angle) et variant d'une manière monotone de la valeur zéro pour $\theta = \pm\alpha$ à la valeur $-f_0$ ($f_0 > 0$) pour $\theta = 0$, si bien que f_0 est un maximum pour $|f|$.

Il résulte donc, d'après(3), que :

$$\text{Pour } f = -f_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{d\theta} = 0 \\ f^3 + f^2 - C_1 f - C_2 = 0 \end{array} \right.$$

De sorte que

$$-f^3 - f^2 + C_1 f + C_2 = (f + f_0)[-f^2 - (1 - f_0)f + C_0]$$

Ainsi donc,

$$2\theta = \pm \int_{-f_0}^f \frac{df}{\sqrt{(f + f_0)[-f^2 - (1 - f_0)f + C_0]}}, \quad (11)$$

Les constantes f_0 et C_0 étant déterminées par les conditions :

$$\begin{cases} 2\alpha = \int_{-f_0}^0 \frac{df}{\sqrt{(f+f_0)[-f^2-(1-f_0)f+C_0]}} \\ \frac{Re}{6} = \int_{-f_0}^0 \frac{fdf}{\sqrt{(f+f_0)[-f^2-(1-f_0)f+C_0]}} \end{cases} \quad (12)$$

La constante C_0 doit être positive, sinon ces intégrales seraient complexes.

Les équations (12) ont, comme on pourrait le montrer, des solutions en f_0 et C_0 pour Re quelconque et $\alpha < \pi/2$.

En d'autres termes, un écoulement symétrique convergent est possible pour toute ouverture $2\alpha < \pi$ et pour tout nombre de Reynolds Re .

Dans le cas où ($Re \gg 1$)

Pour $\theta > 0$ ($\theta \in [0, \alpha]$), l'égalité (11) donne :

$$2(\alpha - \theta) = \int_f^0 \frac{df}{\sqrt{(f+f_0)[-f^2-(1-f_0)f+C_0]}} \quad (13)$$

$$Re \gg 1: \begin{cases} f_0 \gg 1, |f| \gg 1 \\ \int_f^0 \frac{df}{\sqrt{(f+f_0)[-f^2-(1-f_0)f+C_0]}} \ll 1 \Rightarrow |f| \ll f_0: \theta \rightarrow \alpha \end{cases}$$

Ceci signifie que les valeurs de $|f|$, non voisines de f_0 ne peuvent différer de f_0 qu'au voisinage immédiat des parois.

Pour $f \approx -f_0$, l'intégrale (13) peut devenir non petite, par conséquent, $f \approx const = -f_0$ dans presque tout l'intervalle des angles θ . Il résulte des égalités(12),

$$f_0 = \frac{Re}{6(2\alpha)} \quad (14)$$

Des égalités (1, 6, 14),

$$V_r(r) = \frac{|Q|}{(2\alpha)r} \quad (15)$$

Ce qui correspond à un écoulement non visqueux potentiel à vitesse $V_r(r)$, indépendante de l'angle θ et décroissante en fonction de r .

Ainsi, pour les grands nombres de Reynolds ($Re \gg 1$), l'écoulement convergent diffère très peu de l'écoulement potentiel d'un fluide parfait. L'influence de la viscosité ne se manifeste que dans une couche très fine au voisinage des parois (couche limite), où le gradient des vitesses est très grand, étant donné que la vitesse de l'écoulement décroît brusquement à partir de la valeur correspondant à l'écoulement potentiel pour s'annuler à la paroi.

b. Ecoulement divergent ($Q > 0$)

Nous supposons le mouvement symétrique par rapport au plan $\theta = 0$, et $f(\theta)$ ($f > 0$) monotone croissant de la valeur zéro pour $\theta = \pm\alpha$ à la valeur f_0 ($f_0 > 0$) pour $\theta = 0$, si bien que f_0 est un maximum pour f .

D'après (3),

$$-f^3 - f^2 + C_1 f + C_2 = (f_0 - f)[f^2 + (1 + f_0)f + C_0]$$

Les constantes f_0 et C_0 seront déterminées, au lieu de (12), par :

$$\begin{cases} 2\alpha = \int_0^{f_0} \frac{df}{\sqrt{(f_0 - f)[f^2 + (1 + f_0)f + C_0]}} \\ \frac{Re}{6} = \int_0^{f_0} \frac{f df}{\sqrt{(f_0 - f)[f^2 + (1 + f_0)f + C_0]}} \end{cases} \quad (16)$$

Si l'on suppose f_0 donné, 2α est une fonction monotone décroissante de C_0 . 2α atteint sa plus grande valeur possible pour $C_0 = 0$. D'où :

$$(2\alpha)_{max} = \int_0^{f_0} \frac{df}{\sqrt{f(f_0 - f)[(f + f_0 + 1)]}} \quad (17)$$

Si l'on suppose C_0 donné, 2α est une fonction monotone décroissante de u_0

Il en résulte que la fonction f_0 de C_0 pour 2α donné est monotone décroissante, de sorte que la plus grande valeur f_{0max} à laquelle correspond le maximum des nombres de Reynolds Re_{max} , s'obtient pour $C_0 = 0$, et se détermine par l'égalité (16).

$$\begin{cases} 2\alpha = \int_0^{f_{0max}} \frac{df}{\sqrt{f(f_{0max} - f)(f + f_{0max} + 1)}} \\ \frac{Re_{max}}{6} = \int_0^{f_{0max}} \frac{f df}{\sqrt{f(f_{0max} - f)(f + f_{0max} + 1)}} \end{cases} \quad (18)$$

Posons

$$\begin{cases} k^2 = \frac{f_0}{1 + 2f_0} \\ f = f_0 \cos^2 x \end{cases} \begin{cases} x = 0 \rightarrow f = f_0 \\ x = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow f = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$df = -f_0 \sin 2x \, dx = \frac{k^2}{2k^2 - 1} \sin 2x \, dx$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 2\sqrt{1 - 2k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \\ Re_{max} = -6(2\alpha) \frac{1 - k^2}{1 - 2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1 - 2k^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx \end{cases} \quad (20)$$

Un écoulement symétrique partout divergent n'est possible, pour l'angle α donné, que pour des nombre de Reynolds non supérieurs à une valeur limite déterminée.

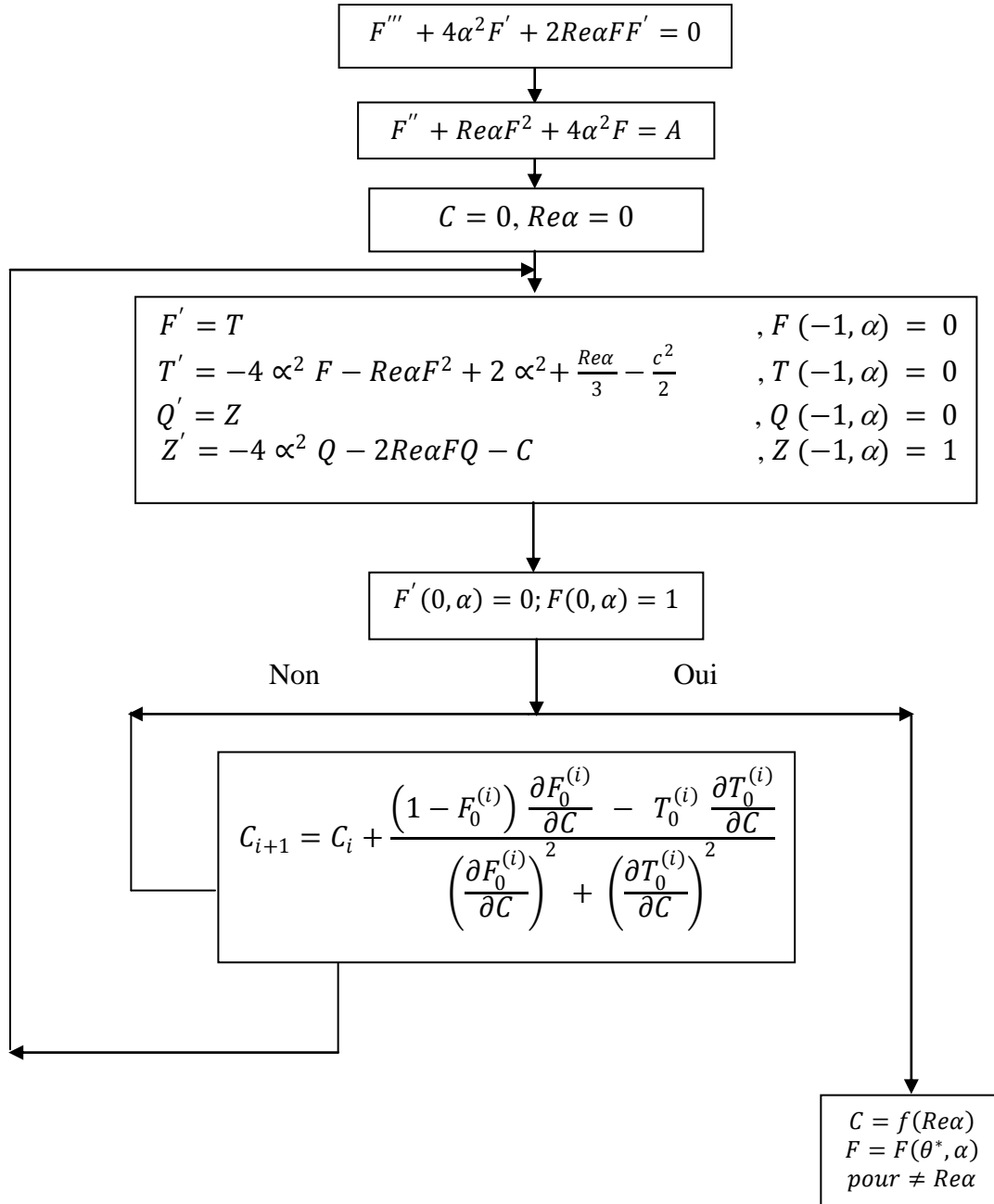
$$\alpha \rightarrow \pi/2 \quad (k \rightarrow 0) : Re_{max} \rightarrow 0$$

$$\alpha \rightarrow 0 \quad \left(k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\right) : Re_{max} \rightarrow \infty \quad \left(Re_{max} = \frac{9.4}{\alpha}\right)$$

Lorsque $\begin{cases} Re > Re_{max} \\ -\alpha \leq \theta \leq +\alpha \end{cases}$, L'hypothèse d'un écoulement symétrique partout divergent n'est plus valable, les conditions (16) ne pouvant plus être satisfaites.

I.2.2. Traitement numérique

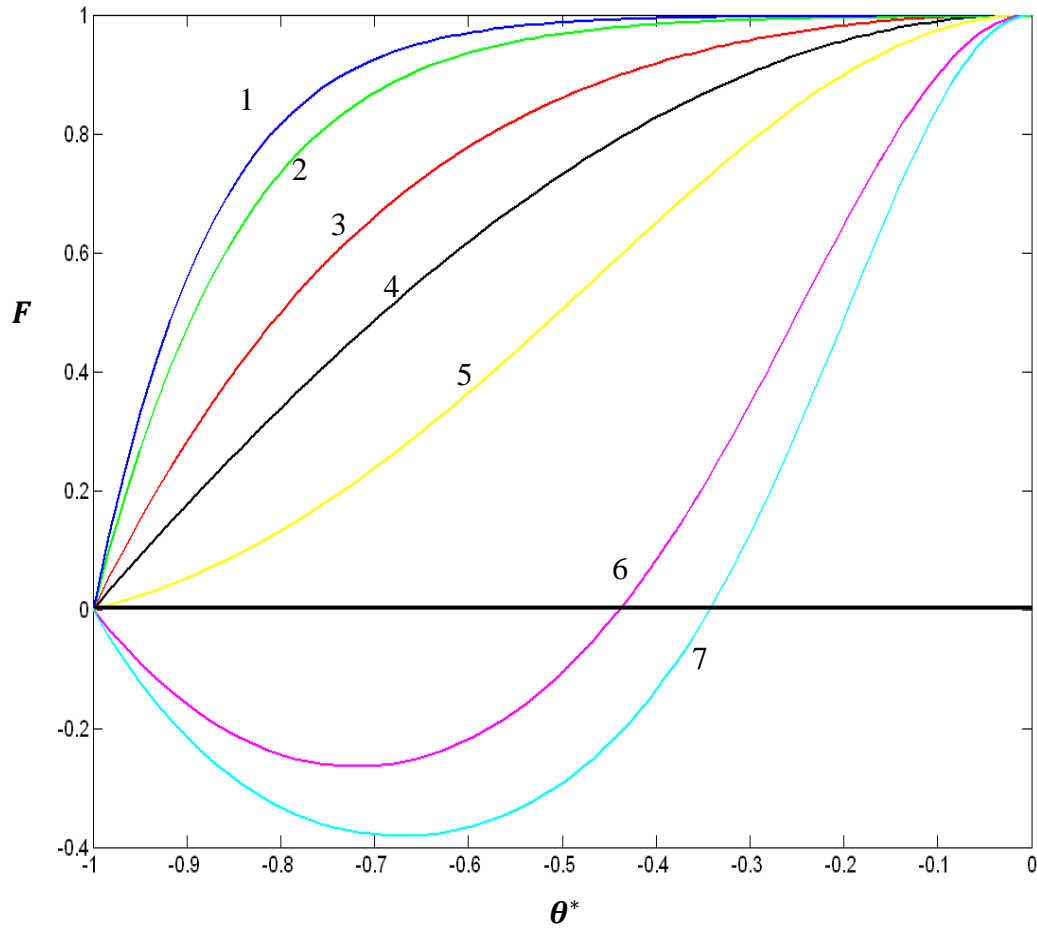
Une solution numérique extrêmement précise de la distribution des vitesses de l'écoulement de Jeffery-Hamel est obtenue par la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre quatre et la méthode de Tir. (Organigramme .1)



Organigramme .1 Adaptation des équations différentielles non linéaires aux limites aux méthodes numériques de Runge Kutta d'ordre 4 et de tir pour obtenir les solutions exactes des équations de Navier-Stokes de l'écoulement de Jeffery-Hamel.

I.2.2.1 Résultats et discussion

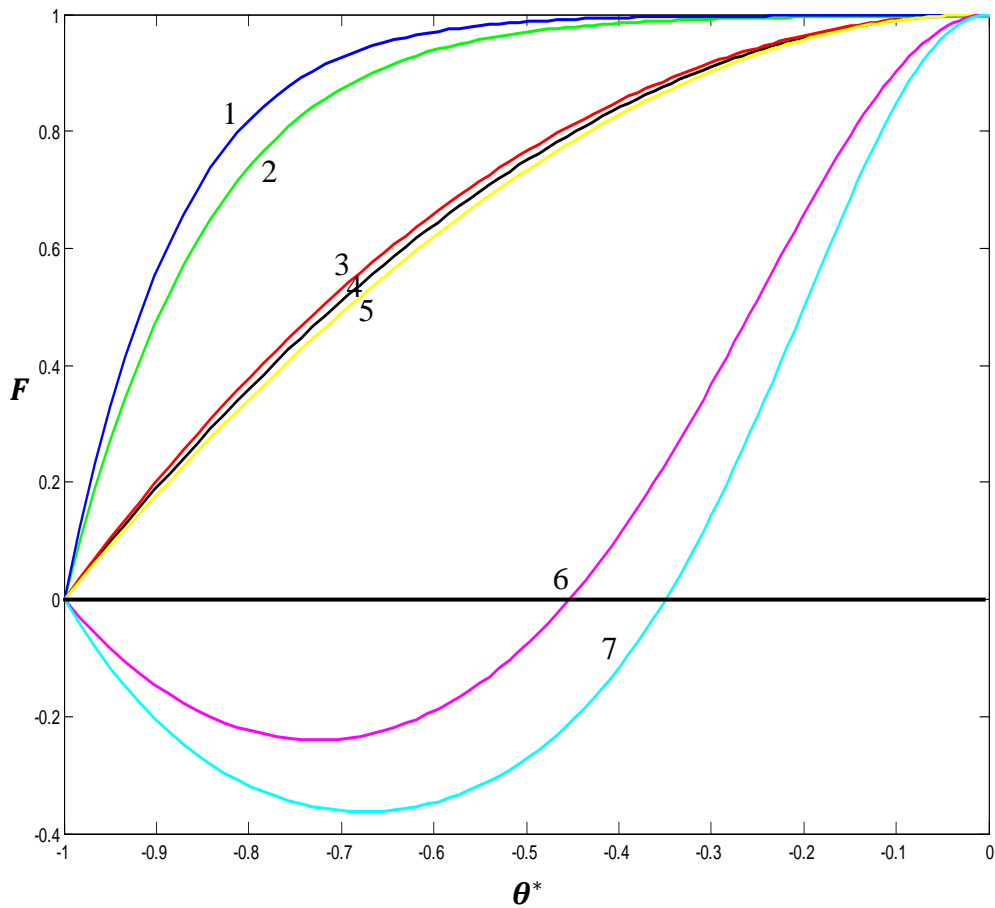
a. Profils adimensionnels de distribution des vitesses



- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $Re\alpha = -44$ | 4. $Re\alpha = 0$ | |
| 2. $Re\alpha = -28$ | 5. $Re\alpha = +7$ | 7. $Re\alpha = +44$ |
| 3. $Re\alpha = -7$ | 6. $Re\alpha = +28$ | |

Fig. I.1

$F = F(\theta^*, \alpha)$: Profils adimensionnels de la distribution des vitesses, $F = F(\theta^*, \alpha)$ pour diverses valeurs du nombre $Re\alpha$, en fonction de θ^* : cas $\alpha = \frac{\pi}{6}$



- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $Re\alpha = -44$ | 4. $Re\alpha = 0$ | |
| 2. $Re\alpha = -28$ | 5. $Re\alpha = +7$ | 7. $Re\alpha = +44$ |
| 3. $Re\alpha = -7$ | 6. $Re\alpha = +28$ | |

Fig. I.2

$F = F(\theta^*, \alpha)$: Profils adimensionnels de la distribution des vitesses, $F = F(\theta^*, \alpha)$ pour diverses valeurs du nombre $Re\alpha$, en fonction de θ^* : cas $\alpha = 0.001$

b. $c = f(Re\alpha)$: Valeurs du coefficient de frottement fluide paroi, C , en fonction de $Re\alpha$

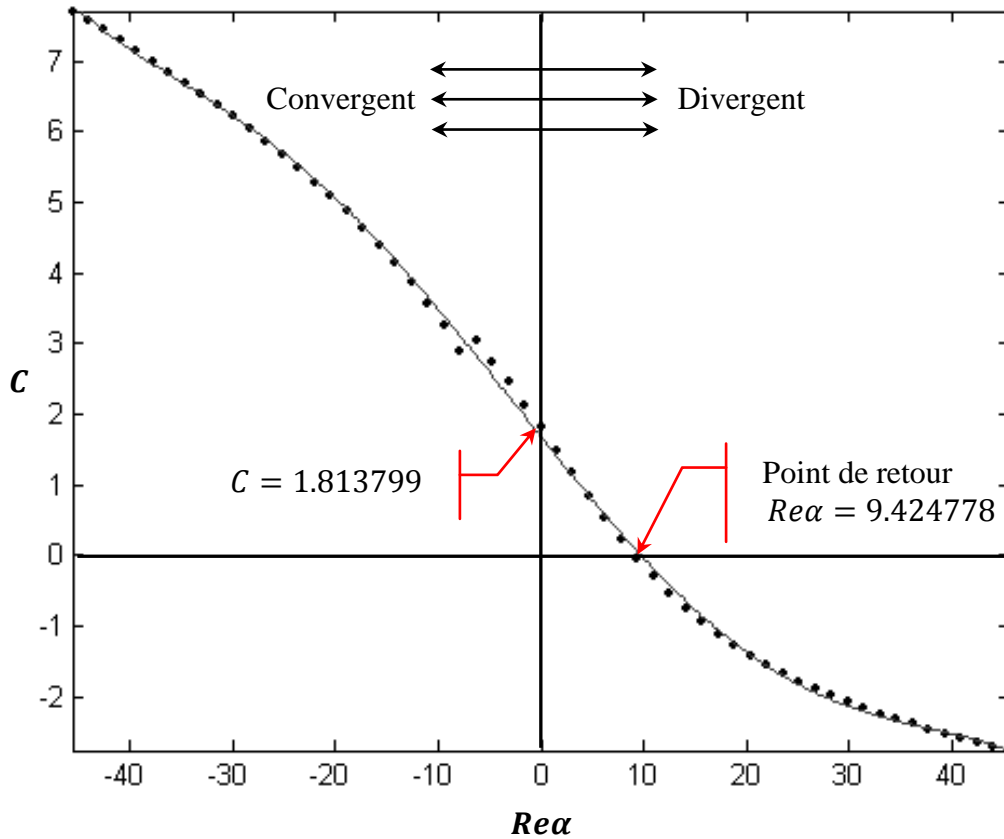


Fig. I.3

Convergent - Divergent

$C = f(Re\alpha)$: Valeurs du coefficient de frottement fluide-paroi, C , en fonction de $Re\alpha$:

$$\text{cas } \alpha = \frac{\pi}{6}$$

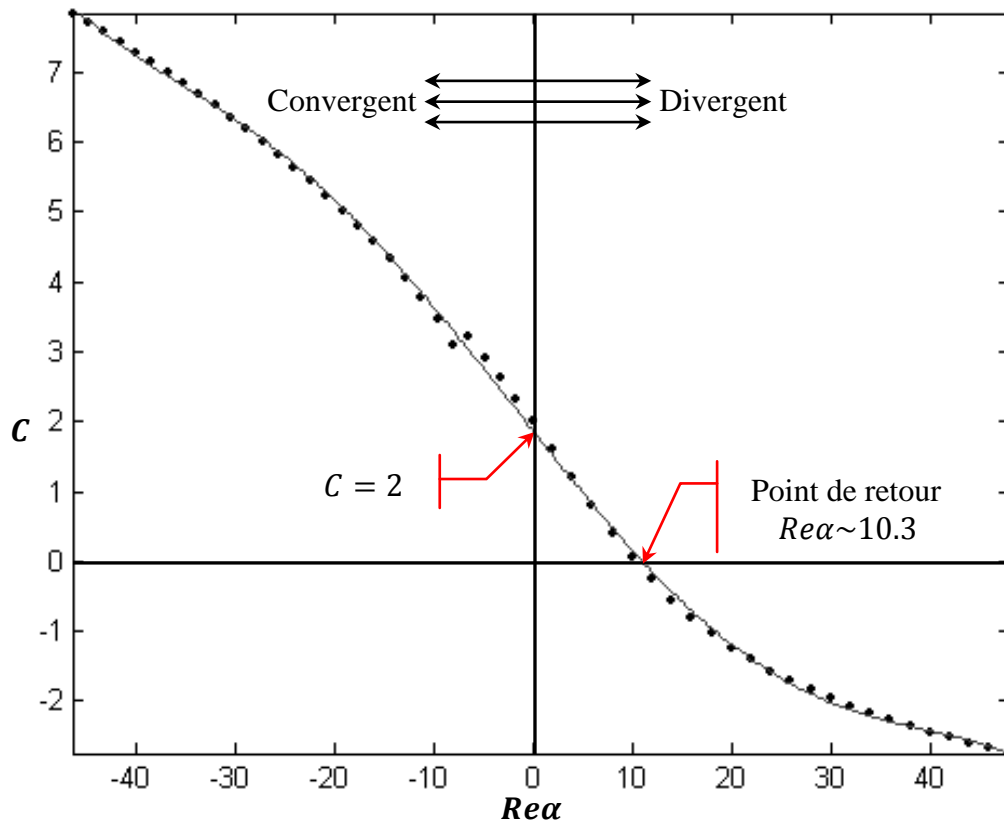
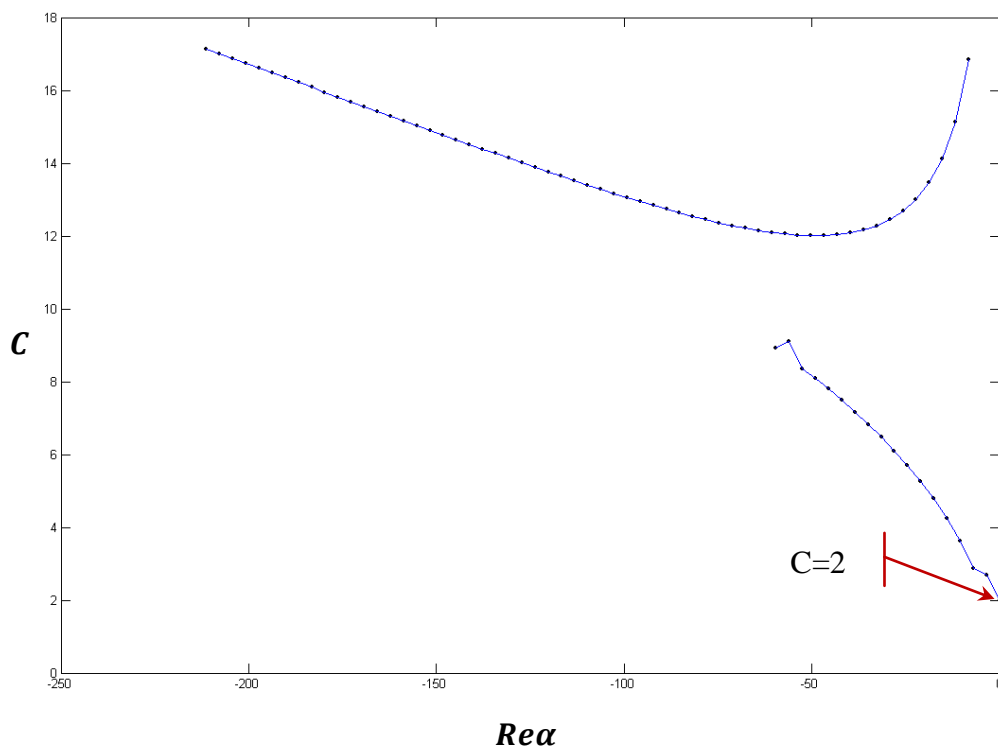


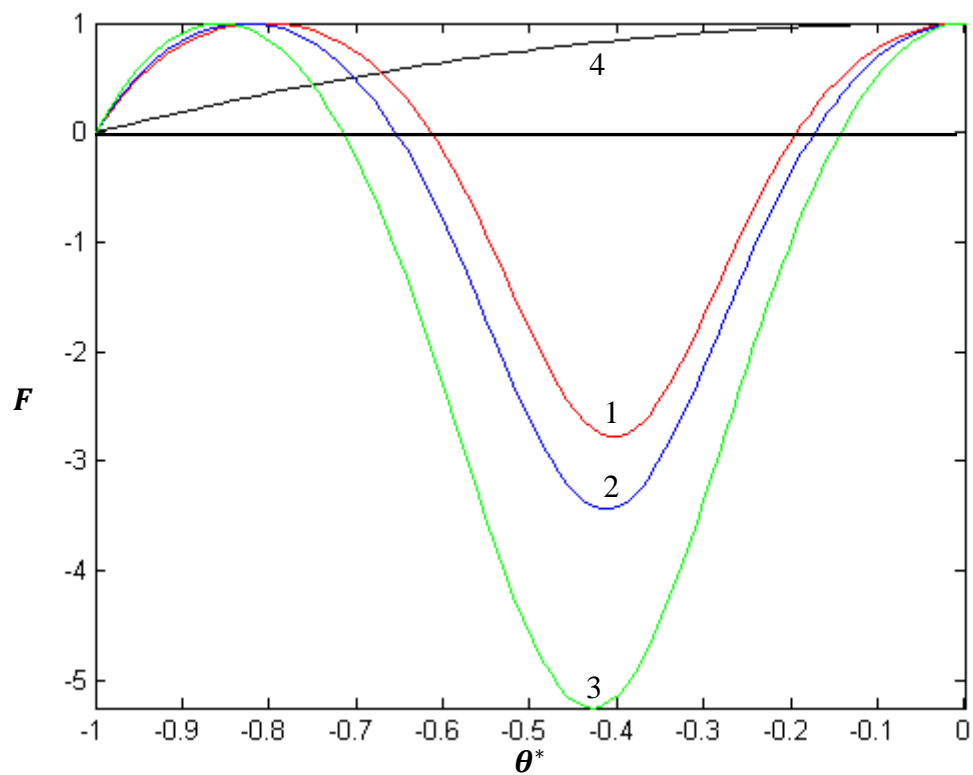
Fig. I.4

$C = f(Re\alpha)$: Valeurs du coefficient de frottement fluide-paroi, C , en fonction de $Re\alpha$:
cas $\alpha = 0.001$

c. La non unicité de la solution des équations de Navier Stokes**Fig. I.5**

$C = f(Re\alpha)$ Valeurs particulières (deuxième solution des équations de Navier-Stokes) du coefficient de frottement fluide-paroi, C , en fonction de $Re\alpha$:

cas $\alpha = 0.001$



1. $Re\alpha = -44$
2. $Re\alpha = -28$
3. $Re\alpha = -14$
4. $Re\alpha = 0$.

Fig. I.6

$F = F(\theta^*, \alpha)$: Profils adimensionnels oscillatoires (deuxième solution des équations de Navier-Stokes), $F = F(\theta^*, \alpha)$ pour diverses valeurs du nombre $Re\alpha$, en fonction de θ^* :
cas $\alpha = 0,001$

De la formule de Newton, $dF_t = \mu \frac{\partial V}{\partial n} ds$, on obtient :

$$\tau_p = \frac{1}{r^2} \rho \frac{\nu^2}{\alpha^3} Re \alpha C$$

dF_t : la force de viscosité.

μ : la viscosité dynamique du fluide ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$: la viscosité cinématique).

τ_p : la contrainte tangentielle locale ou contrainte de cisaillement à la paroi.

C : le coefficient de frottement fluide-paroi.

Il résulte de la relation ci-dessus que pour r, α, ρ , et ν choisis, nous pourrions utiliser les courbes représentatives $C = f(Re\alpha)$ pour calculer la contrainte tangentielle locale à la paroi τ_p correspond à toute valeur de C qui lui est proportionnelle (fig. I.3, 4).

Soit $Q < 0$, cas de l'écoulement convergent. La fonction $f(\theta)$ étant partout négative (la vitesse est partout dirigée vers le sommet de l'angle) et variant d'une manière monotone de la valeur zéro pour $\theta = \pm\alpha$ à la valeur $-f(0)$ ($f(0) > 0$) pour $\theta = 0$, si bien que $f(0)$ est maximum pour $|f(\theta)|$, le mouvement convergent est symétrique par rapport à $\theta = 0$ [c'est-à-dire que $f(\theta) = f(-\theta)$] et possible pour toute ouverture $\alpha < \pi$ et pour tout nombre de Reynolds Re (fig. I.1, 2).

Soit à présent $Q > 0$, cas de l'écoulement divergent. La fonction $f(\theta)$ étant partout positive (la vitesse est partout dirigée dans le sens opposé au sommet de l'angle) et variant d'une manière monotone de la valeur zéro pour $\theta = \pm\alpha$ à la valeur $+f(0)$ ($f(0) > 0$) pour $\theta = 0$, si bien que $f(0)$ est maximum pour $|f(\theta)|$, l'écoulement partout divergent est symétrique par rapport à $\theta = 0$ n'est possible, pour l'angle α donné, que pour des nombres de Reynolds non supérieurs à une limite déterminée qu'on appelle point de retour ou point de séparation ($(Re\alpha)_{max} \sim 10,3$ pour $\alpha = 0,001$) (Fig. I.1,2). Lorsque le nombre de Reynolds Re devient grand et continue d'accroître, la solution de l'écoulement symétrique partout divergent dans le diffuseur n'est plus légitime, et, il apparaît une autre solution symétrique avec un maxima et deux minima de la vitesse. On a donc dans toutes ces solutions, à côté des domaines où le fluide diverge, des domaines où il converge ; mais bien entendu, le débit total du fluide est constant ($Q > 0$). A titre indicatif, nous trouvons

$$\alpha = 0.00088 \quad (Re\alpha)_{max} \sim 10,3132$$

$$\alpha = 0.00100 \quad (Re\alpha)_{max} \sim 10,3120$$

$$\alpha = 0.00122 \quad (Re\alpha)_{max} \sim 10,3109$$

$$\alpha = \pi/6 \quad (Re\alpha)_{max} \sim 09,4847$$

Notons que nous rencontrons dans l'étude de cet écoulement, la non-unicité de la solution des équations de Navier-Stokes. Considérons, par exemple, le cas de l'écoulement convergent avec l'angle $\alpha = 0.001$ (rad). Lorsque le nombre de Reynolds, Re , croît avec des pas brusquement grands ($R = R - 95$), il apparaît une solution symétrique avec maxima et des minima alternés ; ceci prouve, en conséquence, que la solution symétrique de l'écoulement convergent n'est pas unique (Fig. I.6). Cela est dû au schéma numérique.

I.3. Conclusion

Pour un convergent, l'écoulement de Jeffery-Hamel existe pour tout angle α donné à diverses valeurs du nombre de Reynolds Re .

Pour un divergent, l'écoulement de Jeffery-Hamel n'est plus symétrique partout divergent pour l'angle α donné lorsque $Re\alpha > (Re\alpha)_{max}$, le point $(\alpha, (Re\alpha)_{max})$ étant le point de retour.

Stabilité linéaire dans le temps de l'écoulement de Jeffery-Hamel

II.1. Introduction

La stabilité du mouvement d'un fluide fait, depuis longtemps, l'objet d'études approfondies. Dans de très nombreux secteurs de l'industrie l'amélioration du rendement de toute machine traversée par un fluide nécessite une bonne connaissance des zones de stabilité et d'instabilité du mouvement de ce fluide dans les conduits de cette machine.

En général, l'étude de la stabilité linéaire de tel ou tel mouvement vis-à-vis de perturbations infinitésimales se fait suivant le schéma ci après. On superpose à la solution stationnaire, $v(x, y, z)$, qui représente le champ de base d'une petite perturbation non stationnaire, $u(x, y, z, t)$ prise de manière que le mouvement résultant, $V = v + u$, satisfait aux équations du mouvement. L'équation qui détermine v s'obtient en substituant dans les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)v = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu\Delta V \\ \operatorname{div} v = 0 \end{array} \right.$$

La vitesse et la pression sous la forme $V = v + u$ et $P = p + \bar{p}$ où \bar{p} est la fluctuation de la pression, les fonctions connues v et p satisfaisant aux équations non perturbées,

$$\left\{ \begin{array}{l} (v\nabla) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta v \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array} \right.$$

Omettant les termes d'ordres supérieurs par rapport à la petite perturbation u , il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (v\nabla)u + (u\nabla)v = -\frac{\nabla \bar{p}}{\rho} + \nu\Delta u \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array} \right.$$

La condition à la limite est que u soit nulle sur les surfaces solides fixes, de sorte que u vérifie un système d'équations différentielles linéaires avec des coefficients qui sont fonctions des seules coordonnées mais non du temps. La solution générale de telles équations peut être

représentée par la somme de solutions particulières où u dépend du temps par l'intermédiaire d'un facteur de la forme $e^{-i\omega t}$. Les « fréquences » ω elles mêmes des perturbations ne sont pas arbitraire, mais sont déterminées après résolution des équations perturbées avec les conditions aux limites correspondantes. Ces « fréquences » sont en général complexes. Mais s'il est de ω de partie imaginaire positive alors $e^{-i\omega t}$ croîtra indéfiniment au cours du temps. En d'autres termes, une fois apparues de telles perturbations iront croissant, c'est-à-dire que le mouvement sera instable vis-à-vis de ces perturbations. La stabilité linéaire du mouvement exige que toutes les "fréquences" possibles ω aient leurs parties imaginaires négatives. S'il en est ainsi les perturbations s'amortiront exponentiellement au cours du temps.

Nous écrivons l'équation de la perturbation élémentaire superposée à la solution stationnaire des équations de Navier-Stokes de l'écoulement de Jeffery-Hamel. A titre instructif, nous examinons le cas $Re = 0$ pour élargir les résultats obtenus par Banks et al. (1988) [1].

II.2. Mise en équation

Schéma de l'étude mathématique de la stabilité de tel ou tel mouvement vis-à-vis de perturbations infinitésimales.

- En coordonnées cartésiennes :

Champ de vitesse non perturbé

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}(\vec{X}) \\ p = p(\vec{X}) \end{cases}, \text{ la solution stationnaire} \quad (21)$$

Perturbation élémentaire, ε ,

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t) \\ \bar{p} = \bar{p}(\vec{X}, t) \end{cases}, \text{ une petite perturbation non stationnaire à superposer à la solution stationnaire.} \quad (22)$$

Pour le mouvement résultant,

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{v} + \vec{u} \\ P = p + \bar{p} \end{cases} \quad (23)$$

$$(24)$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \nu\Delta\vec{V} \\ \vec{\nabla}\vec{V} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\vec{\nabla}\vec{V} = 0 \quad (26)$$

Les fonctions connues v et p vont satisfaire aux équations non perturbées,

$$\begin{cases} (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} \\ \vec{\nabla}\vec{v} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\vec{\nabla}\vec{v} = 0 \quad (28)$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = 0 \quad , \text{ sur les parois solides fixes} \quad (29)$$

Les fonctions inconnues \vec{u} et \bar{p} vont satisfaire au système (I) d'équations perturbées,

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}\bar{p}}{\rho} + \nu\Delta\vec{u} \\ \vec{\nabla}\vec{u} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = 0 \quad (31)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = 0 \quad , \text{ sur les parois solides fixes.} \quad (32)$$

Les équations non perturbées et perturbées de Poisson sur la pression s'écrivent,

$$\begin{cases} \Delta p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \Delta \bar{p} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{cases} \quad (34)$$

La stabilité de tel ou tel écoulement vis-à-vis de perturbations élémentaires, ε , non stationnaires pour $Re\alpha$ donné sera connue par la résolution du système (I) d'équations perturbées qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{u} & (30) \\ \vec{\nabla}\bar{p} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} & (34) \\ \vec{u}(\vec{x}, t) = 0 & , \text{ sur les parois solides fixes.} & (32) \end{cases}$$

- En coordonnées cylindriques

La perturbation élémentaire, ε

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}(r, \theta, t) \\ \bar{p} = \bar{p}(r, \theta, t) \end{cases} \quad (35)$$

Le mouvement résultant,

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{V}(r, \theta, t) & \begin{cases} v_r + u_r \\ v_\theta + u_\theta \end{cases} \\ P = P(r, \theta, t) = p + \bar{p} \end{cases} \quad (36)$$

Les fonctions connues v_r et p vont satisfaire aux équations non perturbées,

$$\begin{cases} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) & (37) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & (38) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div} v_r = 0 & (39) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_r = 0 \quad \text{à} \quad \theta = \pm\alpha & (40) \end{cases}$$

Les fonctions inconnues $\vec{u}(r, \theta, t)$ et $\bar{p}(r, \theta, t)$ vont donc satisfaire aux équations perturbées,

$$(III) \begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) & (41) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) & (42) \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 & (43) \\ u(r, \theta, t) = 0 \text{ à } \theta = \pm \alpha & (44) \end{cases}$$

Moyennant la fonction de courant $\psi(r, \theta, t)$ telle que

$$\begin{cases} u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} & (45) \\ u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} & (46) \end{cases}$$

Et sachant que

$rv_r = f(\theta)$, la relation de similitude sur le champ de base des vitesses

$$\begin{cases} \theta^* = \frac{\theta}{\alpha} \\ F(\theta^*, \alpha) = \frac{f(\theta^*, \alpha)}{f(0)} \\ Re = \frac{f(0)\alpha}{\nu} \\ [vt] \rightarrow [L^2] \text{ , ou } t^* = \frac{t}{\nu L^2} \end{cases}$$

À partir des nouvelles grandeurs adimensionnelles,

$$\begin{cases} r^* = \frac{r}{r_2} \\ \psi^*(t^*, r^*, \theta) = \frac{\psi(t, r, \theta)}{f(0)} \end{cases}$$

Et avec les notations

$$\begin{cases} \psi_{r^*}^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \\ \psi_{\theta}^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \\ (\nabla^2 \psi^*)_{t^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} (\nabla^2 \psi^*) \\ (\nabla^2 \psi^*)_{r^*} = \frac{\partial}{\partial r^*} (\nabla^2 \psi^*) \end{cases}$$

L'équation différentielle linéaire réduite d'ordre quatre de la perturbation élémentaire, ε , non stationnaire superposée à la solution stationnaire déjà étudiée prend finalement la forme :

$$(IV) \begin{cases} (\nabla^2 \psi^*)_{t^*} + \frac{ReF(\theta^*, \alpha)}{\alpha r^*} (\nabla^2 \psi^*)_{r^*} - \frac{2ReF'(\theta^*, \alpha)}{\alpha^2 r^{*4}} \psi_{\theta}^* - \frac{ReF''(\theta^*, \alpha)}{\alpha^3 r^{*3}} \psi_{r^*}^* = \nabla^4 \psi^* (49) \\ \text{avec les conditions aux limites} \\ \psi^* = 0, \quad \begin{cases} \psi_{\theta}^* = 0 \\ \psi_{r^*}^* = 0 \end{cases}, \quad \text{à } \theta = \pm \alpha \end{cases} \quad (50)$$

Toutefois une telle étude mathématique de la stabilité est extrêmement complexe. Jusqu'à présent, la question de la stabilité de l'écoulement stationnaire autour de corps de dimensions finies, en l'occurrence entre deux parois planes formant un angle entre-elles, n'a reçu aucune élaboration théorique. Nul doute que pour des nombres de Reynolds suffisamment petits, l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien incompressible visqueux entre deux parois planes faisant un angle entre elles soit stable.

La solution générale de l'équation différentielle linéaire (IV. 49,50) de la perturbation envisagée peut-être représentée par la somme de solutions particulières où ψ^* dépend du temps par l'intermédiaire d'un facteur de la forme e^{st^*} et telles que :

$$\psi^*(t^*, r^*, \theta, \alpha, Re) = e^{st^*} x(r^*, \theta, \alpha, Re) \quad (51)$$

Par conséquent,

$$(V) \begin{cases} s\nabla^2 x + \frac{ReF(\theta^*, \alpha)}{\alpha r^*} (\nabla^2 x)_{r^*} - \frac{2ReF'(\theta^*, \alpha)}{\alpha^2 r^{*4}} x_{\theta} - \frac{ReF''(\theta^*, \alpha)}{\alpha^3 r^{*3}} = \nabla^4 x \quad (52) \\ \text{avec les conditions aux limites} \\ x = 0, \quad x_{\theta} = 0, \quad \text{à } \theta = \pm \alpha \end{cases} \quad (53)$$

De sorte que la stabilité du mouvement étudié exige que toutes les « fréquences » possibles s qui sont, en général, complexes aient leurs parties réelles négatives. Sinon, cet écoulement est instable.

II.3. Traitement mathématique de la stabilité linéaire. Cas $Re = 0$

Il est instructif [1] de poser $Re = 0$ dans (52), de manière que :

$$\begin{cases} \nabla^4 x = s \nabla^2 x & \text{dans } D, \text{ le domaine de l'écoulement} \\ x = 0, \frac{\partial x}{\partial n} = 0 & \text{sur } S, \text{ la frontière de } D \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} \nabla^4 x = s \nabla^2 x & , \text{ dans } D \\ x = 0, x_\theta = 0 \text{ à } \theta = \pm \alpha \end{cases} \quad (55)$$

$$x = x(r, \theta, \alpha, Re)$$

- $D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq \infty, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$

$$\begin{cases} \nabla^4 x = s \nabla^2 x & , \text{ dans } D \\ x = 0, x_\theta = 0 \text{ à } \theta = \pm \alpha \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} \nabla^4 x = s \nabla^2 x & , \text{ dans } D \\ x = 0, x_\theta = 0 \text{ à } \theta = \pm \alpha \end{cases} \quad (57)$$

D'après le théorème de la divergence de Gauss- Ostrogradski, pourvu qu'il n'y ait pas de contributions depuis les frontières $r = 0, \alpha$,

$$\begin{aligned} s \int_D |\nabla x|^2 r \, dr d\theta &= -s \int_D \bar{x} \nabla^2 x \, dv \\ &= - \int_D \bar{x} \nabla^4 x \, dv \\ &= - \int_D |\nabla^2 x|^2 \, dv \\ s &= - \frac{\int_D |\nabla^2 x|^2 \, dv}{\int_D |\nabla x|^2 \, dv} \end{aligned} \quad (58)$$

$s < 0$: L'écoulement de Stokes est stable.

- $D = \{(r, \theta) \mid r_1 \leq r \leq r_2, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 x = s \nabla^2 x, \text{ dans } D \end{array} \right. \quad (59)$$

$$x = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_\theta = 0 \text{ à } \theta = \pm\alpha \\ x_r = 0 \text{ à } r = r_1, r_2 \end{array} \right. \quad (60)$$

$$\left. \right\} \quad (61)$$

Afin de déterminer s pour l'écoulement envisagé

L'analyse dimensionnelle conduit à

$$s = \bar{r}_2^{-2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \left\{ \begin{array}{l} [x] \rightarrow \left(\frac{m^2}{s} \right) \\ [s] \rightarrow \left(\frac{1}{m^2} \right) \\ P \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \rightarrow \text{grandeur adimensionnelle} \end{array} \right. \quad (62)$$

Avec la variable réduite (47)

$$r^* = \frac{r}{r_2}$$

$$x = x(r^*, \theta, \alpha, Re)$$

$D^* = \{(r^*, \theta) \mid r_1^* \leq r^* \leq 1, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$, le domaine de l'écoulement S^* , la frontière de D^*

Le nouveau problème de valeur propre consiste en ce qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 x = P \nabla^2 x \text{ dans } D^* \end{array} \right. \quad (63)$$

$$x = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_\theta = 0 \text{ à } \theta = \pm\alpha \\ x_{r^*} = 0 \text{ à } r^* = r_1^*, 1 \end{array} \right. \quad (64)$$

Afin de déterminer P

La formulation variationnelle donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = -\min \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \\ x \in H \end{array} \right. \quad (65)$$

H est l'espace des fonctions qui satisfont au système d'équations [(63), (64)] et où $x(r^*, \theta)$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre quatre sont continues.

$$I_1 = \int_{D^*} (\nabla^2 x)^2 r^* dr^* d\theta ; I_2 = \int_{D^*} (\nabla x)^2 r^* dr^* d\theta \quad (66)$$

Nous pouvons utiliser la méthode de Rayleigh-Ritz pour calculer P , ou simplement estimer le premier mode par une simple fonction d'essai.

- La forme séparable, dite méthode de Fourier, étant appropriée aux limites lorsque $\alpha \rightarrow 0, r_1^* \rightarrow 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x(r^*, \theta) = f(r^*) \cdot g(\theta) \\ \text{les conditions aux limites} \\ \left\{ \begin{array}{l} f(r_1^*) = f'(r_1^*) = f(1) = f'(1) = 0 \\ g(\alpha) = g'(\alpha) = g(-\alpha) = g'(-\alpha) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (67)$$

$$\quad \quad \quad (68)$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_{r_1^*}^1 \left(f'' + \frac{f'}{r^*} \right)^2 r^* dr^* \int_{-\alpha}^{\alpha} g^2 d\theta + 2 \int_{r_1^*}^1 \frac{f}{r^*} \left(f'' + \frac{f'}{r^*} \right) dr^* \int_{-\alpha}^{\alpha} g g'' d\theta \\ \quad \quad \quad + \int_{r_1^*}^1 \frac{f^2}{r^{*3}} dr^* \int_{-\alpha}^{\alpha} g''^2 d\theta \\ I_2 = \int_{r_1^*}^1 f'^2 r^* dr^* \int_{-\alpha}^{\alpha} g^2 d\theta + \int_{r_1^*}^1 \frac{f^2}{r^*} dr^* \int_{-\alpha}^{\alpha} g'^2 d\theta \end{array} \right. \quad (69)$$

L'équation intégrale normale du quatrième ordre établie par la méthode du calcul des variations de Rayleigh-Ritz à laquelle doivent satisfaire les fonctions séparées $f(r^*)$ et $g(\theta^*)$ avec $\theta^* = \frac{\theta}{\alpha}$, pour $x(r^*, \theta^*) = f(r^*) \cdot g(\theta^*)$ dans $D^* = \{(r^*, \theta^*) | r_1^* \leq r^* \leq 1, -1 \leq \theta^* \leq 1\}$, pour que la fonctionnelle $I1/2$ ainsi obtenue ait un extrémum (minimum), prend la forme :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \left\{ \alpha^4 \left(f^{(4)} r^* + 2f''' - \frac{f''}{r^*} + \frac{f'}{r^{*2}} \right) g + 2\alpha^2 \left(\frac{f''}{r^*} - \frac{f'}{r^{*2}} + 2\frac{f}{r^{*3}} \right) g'' + \frac{f}{r^{*3}} g^{(4)} \right\} \\
 & \quad \cdot \int_{r_1^*}^1 \int_{-1}^1 \left(\alpha^2 f'^2 n g^2 + \frac{f^2}{n} g'^2 \right) dndm + \left\{ \alpha^2 \left(f'' r^* + f' g + \frac{f}{r^*} g'' \right) \right\} \\
 & \quad \cdot \int_{r_1^*}^1 \int_{-1}^1 \left[\alpha^4 \left(f'' + \frac{f'}{n} \right)^2 n g^2 + 2\alpha^2 \frac{f}{n} \left(f'' + \frac{f'}{n} \right) g g'' + \frac{f^2}{n^3} g''^2 \right] dndm = 0 \quad (70)
 \end{aligned} \right.$$

Avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{aligned}
 & f(r_1^*) = f'(r_1^*) = f(1) = f'(1) = 0 \\
 & g(1) = g'(1) = g(-1) = g'(-1) = 0
 \end{aligned} \right. \quad (71)$$

Pour trouver la solution de cette équation intégrale qui est extrêmement difficile voire impossible à résoudre, nous devons lui apporter quelques simplifications.

Il vient,

$$\left\{ \begin{aligned}
 & P \sim - \min_{x \in H} \left\{ \frac{\int_0^1 g''^2 d\theta^*}{\alpha^2 \int_0^1 g'^2 d\theta^*} \right\} \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0, \text{ et } r_1^* \rightarrow 1 \quad (72) \\
 & \text{on pose: } \left\{ \begin{aligned}
 & I_1^* = \int_0^1 g''^2 d\theta^* \\
 & I_2^* = \alpha^2 \int_0^1 g'^2 d\theta^*
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right.$$

Ce qui conduit, d'après le premier lemme (lemme1) des lemmes fondamentaux qui se rapportent au calcul des variations, à :

$$g^{(4)}(\theta^*, \alpha) + g''(\theta^*, \alpha) \frac{\int_0^1 g''^2 d\theta^*}{\int_0^1 g'^2 d\theta^*} = 0, \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0, r_1^* \rightarrow 1 \text{ dans cet ordre} \quad (73)$$

Dans ce cas d'écoulement ($Re \sim 0$), après avoir simplifié l'équation intégrale du quatrième ordre (II, 50), en supposant que $\alpha \rightarrow 0$, et $r_1^* \rightarrow 1$ dans cet ordre, le problème se ramène, finalement, à déterminer uniquement une fonction $g(\theta^*, \alpha)$ qui satisfait l'équation intégro-différentielle normale (réduite) du quatrième ordre (73) pour que la fonctionnelle $\left(\frac{I_1^*}{I_2^*}\right)$, définie dans (72), ait un minimum.

Supposons que la solution générale de l'équation intégral-différentielle (73) soit de la forme

$$g(\theta^*, \alpha) = C + A \cos(p\theta^*) + B \sin(q\theta^*) \quad (74)$$

A, B et C étant des constantes arbitraires non nulles.

Compte tenu des conditions aux limites (71),

$$g(\theta^*, \alpha) = A[-\cos(k\pi) + \cos(k\pi\theta^*)] \quad (75)$$

k , entier relatif non nul

En portant (75) dans (72),

$$P = -\min_{x \in H} \left\{ \frac{k\pi^2}{\alpha^2} \right\}, \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0, r_1^* \rightarrow 1 \text{ dans cet ordre} \quad (76)$$

Ainsi, lorsque $\alpha \rightarrow 0, r_1^* \rightarrow 1$ dans cet ordre, l'extrémum requis est donné par la relation

$$g(\theta^*, \alpha) = A[1 + \cos(\pi\theta^*, \alpha)] \quad (77)$$

Si bien que,

$$P \sim -\frac{\pi^2}{\alpha^2}, \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0, r_1^* \rightarrow 1 \text{ dans cet ordre} \quad (78)$$

- En utilisant pour la forme séparable (67) avec les conditions aux limites (68) des fonctions d'essai simples de la forme :

a)

$$\begin{cases} f(r^*) = 1 + \cos \left[\frac{\pi(2r^* - 1 - r_1^*)}{(1 - r_1^*)} \right] \\ g(\theta^*) = 1 + \cos(\pi\theta^*) \end{cases}$$

Les évaluations numériques des intégrales (69) dans (65) donnent les valeurs :

$\alpha \backslash r_1^*$	0.1	0.5	0.9
0.5	-122.366	-99.6775	-3877.28
1.0	-34.0908	-134.632	-3930.79
2.0	-40.8323	-152.581	-3944.40
3.0	-46.5893	-156.483	-3946.93

Tableau 1. [1] : Limites supérieures comme estimations de P par emploi des fonctions d'essai $f(r^*)$ et $g(\theta^*)$ dans (a) pour diverses valeurs de r_1^* et α .

Avec : $\alpha = 10^{-4}$, $r_1^* = 0,99$

L'intégration numérique donne :

$$\alpha^2 P = -0,96$$

En répétant également l'analyse et l'évaluation numérique de I_1 et I_2 avec :

$$b) \begin{cases} f(r^*) = (r^* - 1)^2(r^* - r_1^*)^2 \\ g(\theta^*) = \alpha^4(1 - \theta^{*2})^2 \end{cases}$$

Les résultats indiquent les mêmes tendances générales.

$\alpha \backslash r_1^*$	0.1	0.5	0.9
0.5	-0.497	-0.579	-0.699
1.0	-384.216	-290.52	-363.72
2.0	-123.857	-1.305	-5.150
3.0	-0.489	-28.81	-361.34

Tableau 2 : Limites supérieures comme estimations de P par emploi des fonctions d'essai $f(r^*)$ et $g(\theta^*)$ dans (a) pour diverses valeurs de r_1^* et α

En définitive, dans le cas $Re = 0$, toutes les fréquences possibles, notées s (ou P), sont négatives. Cependant, la méthode du calcul des variations, dite de Rayleigh-Ritz, utilisée pour

une telle étude mathématique de la stabilité de l'écoulement de Jeffery-Hamel est consistante et efficace, et l'emploi des limites supérieures comme estimations des fréquences sus-citées par des fonctions d'essai dont les résultats ont les mêmes tendances générales est aussi valable, puisqu'il est naturel de prédire qu'aux faibles nombres de Reynolds, notés Re , l'écoulement de Jeffery-Hamel est sans nul doute stable.

II.4. Equation adimensionnelle de la perturbation

$$\left\{ \begin{aligned} s\nabla^2 x + \frac{ReF}{\alpha r^*} (\nabla^2 x)_{r^*} - \frac{2ReF'}{\alpha^2 r^{*4}} x_\theta - \frac{ReF''}{\alpha^3 r^{*3}} x_{r^*} &= \nabla^4 x \end{aligned} \right. \quad (54)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x = 0 \quad , \quad x_\theta = 0 \quad \text{à} \quad \theta = \pm\alpha \end{aligned} \right. \quad (55)$$

En faisant le changement de variable,

$$\hat{r} = r^*(-s)^{1/2} \quad ; \quad r^* = \frac{r}{r^2} \quad (79)$$

$$\psi^*(t^*, \hat{r}, \theta, \alpha, Re) = e^{st^*} x(\hat{r}, \theta, \alpha, Re) \quad (80)$$

L'équation (54) devient

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 x - \frac{ReF}{\alpha \hat{r}} (\nabla^2 x)_{\hat{r}} + \frac{2ReF'}{\alpha^2 \hat{r}^4} x_\theta + \frac{ReF''}{\alpha^3 \hat{r}^3} x_{\hat{r}} &= -\nabla^4 x \end{aligned} \right. \quad (81)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x = 0 \quad , \quad x_\theta = 0 \quad , \quad \theta = \pm\alpha \end{aligned} \right. \quad (55)$$

Supposons que la solution de l'équation (80) soit de la forme

$$x(\hat{r}, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{r}^{(i+\lambda)} \Phi_i(\theta) \quad (82)$$

λ , une constante arbitraire

En substituant (82) dans (81), il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_i \left\{ \Phi_i'' + (i + \lambda)^2 \Phi_i - \Phi_{i+2}'' \left[\frac{ReF}{\alpha} (i + \lambda) \right] + \Phi_{i+2}' \frac{2ReF'}{\alpha^2} \right. \\ & \quad \left. + \Phi_{i+2} (i + 2 + \lambda) \left[\frac{ReF''}{\alpha^3} - \frac{ReF}{\alpha} (i + \lambda)(i + 2 + \lambda) \right] \right\} \\ & = - \sum_i \left\{ \Phi_{i+2}^{(4)} + 2\Phi_{i+2}'' [2 + (i + \lambda)(i + 2 + \lambda)] + \Phi_{i+2} (i + \lambda)^2 (i + 2 + \lambda)^2 \right\} \\ & \quad \text{Avec les conditions aux limites,} \\ & \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(\theta) = 0 \text{ à } \theta = \pm\alpha \end{aligned} \right.$$

C'est l'équation différentielle du quatrième ordre de la perturbation infiniment petite non stationnaire de l'écoulement envisagé pour tout nombre de Reynolds Re , non nul.

Le traitement mathématique de l'équation (83) est très complexe, voire impossible, étant donné que le second membre est du quatrième ordre et que les coefficients du premier membre ne sont autres que la fonction de la distribution des vitesses et ses dérivées première et seconde, déjà traitées numériquement. Par conséquent, cette équation ne peut qu'être résolue approximativement et traitée par la méthode informatique, en supposant que le fluide est très peu visqueux ($\nu \ll 1$) pour négliger le deuxième membre d'ordre quatre.

Aussi lorsque $\nu \ll 1$, le second membre de l'équation (83) s'évanouit, et il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_i \left\{ \Phi_i'' + (i + \lambda)^2 \Phi_i - \Phi_{i+2}'' \left[\frac{ReF}{\alpha} (i + \lambda) \right] + \Phi_{i+2}' \frac{2ReF'}{\alpha^2} \right. \\ & \quad \left. + \Phi_{i+2} (i + 2 + \lambda) \left[\frac{ReF''}{\alpha^3} - \frac{ReF}{\alpha} (i + \lambda)(i + 2 + \lambda) \right] \right\} = 0 \quad (85) \\ & \quad \text{Avec les conditions aux limites,} \\ & \Phi(\theta) = 0, \quad \Phi'(\theta) = 0 \text{ à } \theta = \pm\alpha \quad (84) \end{aligned} \right.$$

Ecrivons l'équation (85) sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i'' + (i + \lambda)^2 \Phi_i &= \Phi_{i+2}'' \frac{ReF}{\alpha} (i + \lambda) - \Phi_{i+2}' \frac{2ReF'}{\alpha^2} \\ &- \Phi_{i+2} (i + 2 + \lambda) \left[\frac{ReF''}{\alpha^3} - \frac{ReF}{\alpha} (i + \lambda)(i + 2 + \lambda) \right] \end{aligned} \right\} \quad (85')$$

Pour que cette équation s'adapte au traitement numérique, il faut normaliser la fonction $\Phi(\theta)$ ainsi que ses dérivées premières $\Phi'(\theta)$ et seconde $\Phi''(\theta)$ par rapport à l'angle réduit $\theta^* = \frac{\theta}{\alpha}$

Pour $\theta^* = \frac{\theta}{\alpha}$, l'équation (84) se réduit à :

$$\begin{cases} \Phi_i''(\theta^*, \alpha) + \alpha^2(i + \lambda)^2 \Phi_i(\theta^*, \alpha) = Q_{i+2}[\alpha, Re, F(\theta^*, \alpha), \Phi_{i+2}(\theta^*, \alpha), \theta^*] & (86) \\ \Phi(\theta^*) = 0, \quad \Phi'(\theta^*) = 0 \quad \text{à} \quad \theta^* = \pm 1 & (87) \end{cases}$$

Avec:

$$Q = \left. \begin{aligned} & \Phi_{i+2}'' \frac{ReF}{\alpha} (i + \lambda) - \Phi_{i+2}' \frac{2ReF'}{\alpha} \\ & - \Phi_{i+2}(i + 2 + \lambda) \left[\frac{ReF''}{\alpha} - Re\alpha F(i + \lambda)(i + 2 + \lambda) \right] \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Le système d'équations différentielles linéaires du second ordre réduit de l'équation (86), et tronqué à $i = n$, donne :

$$\left. \begin{cases} \Phi_{n+2} = 0 \rightarrow Q_{n+2} = 0 & (89) \\ \Phi_{n+1} = 0 \rightarrow Q_{n+1} = 0 & (90) \end{cases} \right\}$$

→*** (j = 0,1)

$$\left. \begin{cases} \Phi_n'' + \alpha^2(\lambda + n)^2 \Phi_n = 0 & (91) \end{cases} \right\}$$

$$\left. \begin{cases} \Phi_{n-1}'' + \alpha^2(\lambda + n - 1)^2 \Phi_{n-1} = 0 & (92) \end{cases} \right\}$$

D'où:

$$\begin{cases} \Phi_n(\theta^*, \alpha) = A_n \cos\left[\frac{\pi}{2}(2k + 1)\theta^*\right] & (93) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{n-1}(\theta^*, \alpha) = A_{n-1} \cos\left[\frac{\pi}{2}(2k + 1)\theta^*\right] & (94) \end{cases}$$

A_n , et A_{n-1} sont des constantes arbitraires non nulles et identiques ($A_n = A_{n-1} = A$).

Φ_n et Φ_{n-1} sont des solutions particulières du système (86) tronqué à $i = n$, compte tenu des conditions aux limites (87).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi''_{n-2} + \alpha^2(\lambda + n - 2)^2 \Phi_{n-2} = Q_n \\ \Phi''_{n-3} + \alpha^2(\lambda + n - 3)^2 \Phi_{n-3} = Q_{n-1} \\ \text{-----} \\ \text{D'une manière générale, } \rightarrow *** \text{ (} j = 2, n \text{)} \\ \Phi''_{n-j}(\theta^*, \alpha) + \alpha^2(\lambda + n - j)^2 \Phi_{n-j}(\theta^*, \alpha) = Q_{n-j+2}[\alpha, Re, F(\theta^*, \alpha), \Phi_{n-j+2}(\theta^*, \alpha), \theta^*] \text{ (95)} \\ \Phi(\theta^*) = 0, \quad \Phi'(\theta^*) = 0 \quad \text{à } \theta^* = \pm 1 \end{array} \right. \quad (87)$$

L'équation différentielle du second ordre (95) admet une solution particulière de la forme,

$$\tilde{\Phi}_{n-j}^p = \frac{1}{2\alpha(\lambda + n - j)} \int_{-1}^1 \sin[\alpha(\lambda + n - j)|\theta^* - \tau^*|] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \quad (96)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Phi}_{n-j}^p = \frac{\Phi_{n-j}^p}{A} \\ \tilde{Q}_{n-j+2} = \frac{Q_{n-j+2}}{A} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{n-j+2} = \tilde{\Phi}_{n-j+2}'' \frac{ReF}{\alpha} (\lambda + n - j) - \tilde{\Phi}_{n-j+2}' \frac{2ReF'}{\alpha} \\ - \tilde{\Phi}_{n-j+2} (n - j + 2 + \lambda) \left[\frac{ReF''}{\alpha} - Re\alpha F(n - j + \lambda)(n - j + 2 + \lambda) \right] \end{aligned} \quad (97)$$

La solution générale de l'équation (95) s'écrit :

$$\tilde{\Phi}_{n-j} = C_1 \cdot \cos[\alpha(\lambda + n - j)\theta^*] + C_2 \sin[\alpha(\lambda + n - j)\theta^*] + \Phi_{n-j}^p \quad (98)$$

C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires non nulles.

Des conditions aux limites (87), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{2\alpha(\lambda + n - j)} \operatorname{tg}[\alpha(\lambda + n - j)] \int_{-1}^1 \cos[\alpha(\lambda + n - j)\tau^*] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \end{array} \right. \quad (99)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = -\frac{1}{2\alpha(\lambda + n - j)} \frac{1}{\operatorname{tg}[\alpha(\lambda + n - j)]} \int_{-1}^1 \sin[\alpha(\lambda + n - j)\tau^*] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \end{array} \right. \quad (100)$$

En substituant (96), (99) et (100) dans (98), la solution générale de l'équation différentielle du second ordre (II.79) prend finalement la forme :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Phi}_{n-j}(\theta^*, \alpha) = & \frac{1}{2\alpha(\lambda + n - j)} [tg[\alpha(\lambda + n - j)]\cos[\alpha(\lambda + n - j)\theta^*] \\ & \int_{-1}^1 \cos[\alpha(\lambda + n - j)\tau^*] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \\ & - \frac{\sin[\alpha(\lambda + n - j)\theta^*]}{tg[\alpha(\lambda + n - j)]} \int_{-1}^1 \sin[\alpha(\lambda + n - j)\tau^*] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \\ & + \int_{-1}^1 \sin[\alpha(\lambda + n - j)|\theta^* - \tau^*|] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Phi}'_{n-j} = & \frac{1}{2} [-tg[\alpha(\lambda + n - j)]\sin[\alpha(\lambda + n - j)\theta^*] \\ & \int_{-1}^1 \cos[\alpha(\lambda + n - j)\tau^*] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \\ & - \frac{\cos[\alpha(\lambda + n - j)\theta^*]}{tg[\alpha(\lambda + n - j)]} \int_{-1}^1 \sin[\alpha(\lambda + n - j)\tau^*] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \\ & + sgn(\theta^* - \tau^*) \int_{-1}^1 \cos[\alpha(\lambda + n - j)|\theta^* - \tau^*|] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Phi}''_{n-j} = & \frac{\alpha(\lambda + n - j)}{2} [-tg[\alpha(\lambda + n - j)]]\cos[\alpha(\lambda + n - j)\theta^*] \\ & \int_{-1}^1 \cos[\alpha(\lambda + n - j)\tau^*] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \\ & + \frac{\sin[\alpha(\lambda + n - j)\theta^*]}{tg[\alpha(\lambda + n - j)]} \int_{-1}^1 \sin[\alpha(\lambda + n - j)\tau^*] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \\ & - \int_{-1}^1 \sin[\alpha(\lambda + n - j)|\theta^* - \tau^*|] \tilde{Q}_{n-j+2}(\tau^*) d\tau^* \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{n-j} = & \tilde{\Phi}'''_{n-j} \frac{ReF}{\alpha} (\lambda + n - j - 2) - \tilde{\Phi}'_{n-j} \frac{2ReF'}{\alpha} \\ & - \tilde{\Phi}_{n-j} (\lambda + n - j) \left[\frac{ReF''}{\alpha} - Re\alpha F (\lambda + n - j) (\lambda + n - j - 2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

II.5. Conclusion

La résolution numérique de l'équation différentielle du quatrième ordre de la perturbation est difficile. A cet effet il faut prévoir une modélisation de la perturbation qui permet d'examiner aussi facilement que possible la stabilité linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel.

Modélisation de la perturbation

III.1. Introduction

L'équation intégral-différentielle du second ordre à valeur propre s de la perturbation élémentaire est difficile à résoudre. A cette effet, une configuration judicieuse et convenable de cette perturbation de l'écoulement de Jeffery-Hamel nous permettra d'évaluer numériquement avec le moins de difficulté possible les 'fréquences' s .

III.2. Choix du point de l'évolution de la perturbation

Nous choisissons un point fixe $M(r_i, \theta_i)$ dans l'espace à l'intérieur de l'écoulement entre les parois planes inclinées. Nous essayons d'examiner en ce point, pour diverses valeurs du nombre de Reynolds Re , l'évolution dans le temps de la perturbation élémentaire instationnaire $\vec{u}(r^*, \theta^*, t)$ telle que $\theta_i = -\beta$, $r_i^* = 1$ et $u_r = u_\theta$ en M .

Cette configuration particulière de la perturbation nous facilitera le traitement du mode normal de la stabilité linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel.

III.3. Mise en équation

$$\begin{cases} u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (46)$$

$$\hat{r} = r^* (-s)^{1/2} \quad (79)$$

$$\begin{cases} r = r^* r_2 \\ \theta = \theta^* \alpha \end{cases}$$

$$\psi^*(t^*, \hat{r}, \theta, \alpha, Re) = e^{st^*} \chi(\hat{r}, \theta, \alpha, Re) \quad (80)$$

$$\chi(\hat{r}, \theta, \alpha, Re) = \sum_i \hat{r}^{(i+\lambda)} \Phi_i(\theta) \quad (82)$$

$$\begin{cases} u_\theta = -\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = -e^{st^*} \frac{(-s)^{1/2}}{r_2} \sum_i (i+\lambda) \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \Phi_i(\theta^*, \alpha) \end{cases} \quad (105)$$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = e^{st^*} \frac{(-s)^{1/2}}{r_2} \sum_i \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \frac{\Phi_i'(\theta^*, \alpha)}{\alpha} \end{cases} \quad (106)$$

$$\frac{u_\theta}{u_r} = - \frac{\sum_i (i + \lambda) \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \Phi_i(\theta^*, \alpha)}{\sum_i \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \frac{\Phi_i'(\theta^*, \alpha)}{\alpha}} \quad (107)$$

Choisissons à présent un modèle tel qu'en un point M ($r^* = 1, \theta^* = -\beta$) de l'écoulement envisagé (divergent ou convergent), les composantes u_r et u_θ de la perturbation soient égales (maximales), (Fig. 4).

Ou d'une autre manière, on aura :

$$\begin{cases} u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (46)$$

$$\quad (47)$$

$$\hat{r} = r^* (-s)^{1/2} \quad (79)$$

$$\begin{cases} r = r^* r_2 \\ \theta = \theta^* \alpha \end{cases}$$

$$\psi(t, \hat{r}, \theta^*, \alpha, Re) = e^{st} \chi(\hat{r}, \theta^*, \alpha, Re) \quad (80')$$

$$\chi(\hat{r}, \theta^*, \alpha, Re) = \sum_i \hat{r}^{(i+\lambda)} \Phi_i(\theta^*, \alpha) \quad (82)$$

$$\begin{cases} u_\theta = -\frac{(-s)^{1/2}}{r_2} e^{st} \sum_i (i + \lambda) \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \Phi_i \\ u_r = \frac{(-s)^{1/2}}{r_2} e^{st} \sum_i \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \frac{\Phi_i'}{\alpha} \end{cases} \quad (105')$$

$$\quad (106')$$

$$\frac{u_\theta}{u_r} = - \frac{\sum_i (i + \lambda) \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \cdot \Phi_i}{\sum_i \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \frac{\Phi_i'}{\alpha}} \quad (107)$$

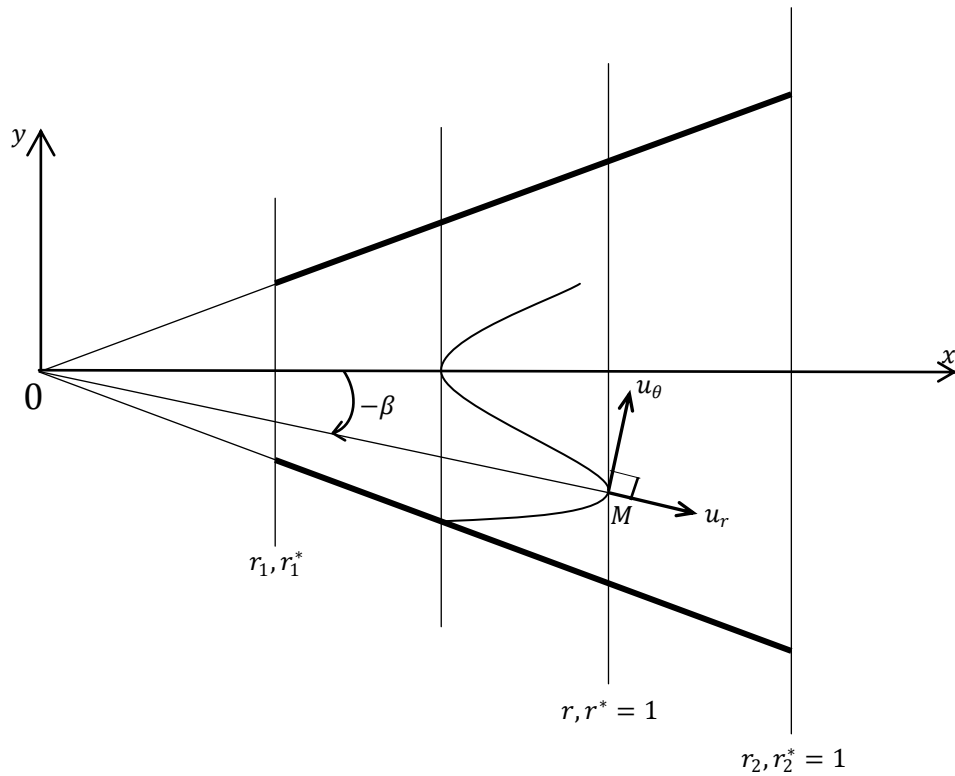


Fig. 4 : Modélisation de la perturbation.

Au point M , la relation (107) donne :

$$- \frac{\sum_i (i + \lambda) \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \Phi_i}{\sum_i \hat{r}^{(i+\lambda-1)} \frac{\Phi_i'}{\alpha}} = 1 \quad (108)$$

D'où

$$\sum_i (-s)^{\frac{i}{2}} \left[(i + \lambda) \Phi_i + \frac{\Phi_i'}{\alpha} \right] = 0 \quad (109)$$

Posons:

$$(-s) = z^2 \quad (110)$$

$$\sum_i Z^i \left[(i + \lambda) \Phi_i(\theta^*, \alpha) + \frac{\Phi_i'(\theta^*, \alpha)}{\alpha} \right] = 0 \quad (111)$$

C'est un polynôme de degré i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) où l'inconnue $(-Z^2)$, la fréquence de la perturbation, est en général complexe et les coefficients $[(i + \lambda) \Phi_i + \Phi_i'/\alpha]$ sont réels.

En conséquence, l'écoulement étudié sera stable ou instable selon que la partie réelle de $(-Z^2)$ sera négative ou positive.

III.4. Conclusion

Nous obtenons pour le modèle choisi de la perturbation de l'écoulement de Jeffery-Hamel un polynôme $P_N(x)$ de degré N à coefficients réels de la forme

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^{i-N}, \quad a_i \in R, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

La solution de ce polynôme à l'aide des méthodes numérique de résolution d'équations algébriques nous élucidera la nature de la stabilité linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel.

Calculs numériques

IV.1. Introduction

Pour trouver une racine du polynôme $P_N(x) \sum_{i=0}^N a_i x^{N-i} = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2, \dots, N$, il existe un certain nombre de méthodes numériques de résolution, mais nous utiliserons ici la méthode de Bairstow avec test optimal pour surmonter les difficultés numériques rencontrées lors de la résolution d'équations algébriques sur ordinateur.

IV.2. Méthode de Bairstow pour la résolution du polynôme

Utilisons la méthode itérative de Bairstow qui consiste en la détermination analytique des coefficients du polynôme (111) dont on doit traiter numériquement toutes les racines réelles ou imaginaires (Organigramme .3).

On désigne la « fréquence » S de la perturbation par x .

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0,1,2, \dots, n \tag{112}$$

Le théorème de d'Alembert permet d'affirmer que ce polynôme possède exactement n racines réelles ou complexes (conjuguées).

$$P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \tag{113}$$

$$P_n(x) = (b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \dots + b_{n-3} x + b_{n-2})(x^2 - s \cdot x + p) + b_{n-1}(x - s) + b_n \tag{114}$$

$a_0 = b_0$	$b_0 = a_0$	(115)
$a_1 = b_1 - sb_0$	$b_1 = a_1 + sb_0$	
$a_2 = b_2 - sb_1$	$b_2 = a_2 + sb_1 - pb_0$	
.....	
$a_k = b_k - sb_{k-1} + pb_{k-2}$	$b_k = a_k + sb_{k-1} - pb_{k-2}, \quad k = 2,3, \dots, n$	
.....	
.....	
$a_{n-1} = b_{n-1} - sb_{n-2} + pb_{n-3}$	$b_{n-1} = a_{n-1} + sb_{n-2} - pb_{n-3}$	
$a_n = b_n - sb_n + pb_{n-2}$	$b_n = a_n + sb_{n-1} - pb_{n-2}$	

En posant

$$C_k = \frac{\partial b_k}{\partial s}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (116)$$

Les formules itératives déduites de l'utilisation de la méthode de « Raphson-Newton » et permettant de calculer s et p s'écrivent alors :

$$\begin{cases} s^{(j+1)} = s^{(j)} + \frac{b_n^{(j)} c_{n-3}^{(j)} - b_{n-1}^{(j)} c_{n-2}^{(j)}}{(c_{n-2}^{(j)})^2 - c_{n-1}^{(j)} c_{n-3}^{(j)}} \\ p^{(j+1)} = p^{(j)} + \frac{b_n^{(j)} c_{n-2}^{(j)} - b_{n-1}^{(j)} c_{n-1}^{(j)}}{(c_{n-2}^{(j)})^2 - c_{n-1}^{(j)} c_{n-3}^{(j)}} \end{cases} \quad (117)$$

$$\begin{cases} s = \lim_{j \rightarrow \infty} (s)^{(j)} \\ p = \lim_{j \rightarrow \infty} (p)^{(j)} \end{cases}$$

IV.2.1. Test d'arrêt classique :

$$\frac{|s^{(j+1)} - s^{(j)}| + |p^{(j+1)} - p^{(j)}|}{|s^{(j)}| + |p^{(j)}|} < 10^{-2} \quad (118)$$

La réalisation du test (118) fournit deux racines $s = s^{(j)}$ et $p = p^{(j)}$ tels que $x^2 - sx + p$ divise exactement le polynôme $P(x)$. La résolution numérique de $x^2 - sx + p = 0$ donne deux racines de $P_n(x)$.

Le principe de la méthode de Bairstow classique (sans test optimal) est illustré par l'organigramme .3

Le test d'arrêt de la méthode de Bairstow classique est basé sur le fait que la convergence de la méthode de Raphson-Newton est généralement quadratique, et souvent mis en défaut. Ceci se produit notamment lorsque le polynôme a des racines multiples, les itérations étant arrêtées bien avant que b_N et b_{N-1} ne soient informatiquement nuls.

IV.2.2. Test d'arrêt optimal

Lors de la résolution du système non linéaire d'ordre 2 suivant

$$\begin{cases} b_{N-1}(s, p) = 0 \\ b_N(s, p) = 0 \end{cases} \quad (119)$$

Le processus itératif doit être arrêté à l'itération k si les nombres de chiffres significatifs exacts de b_{N-1} et de b_N notées respectivement $C_1^{(k)}$ et $C_2^{(k)}$ sont tous les deux inférieurs à 1.

IV.2.3. Contrôle et amélioration de la précision de la racine du polynôme

- Contrôle de la solution

a- Principe

$$\rho = P(x)_{machine} = \left(\begin{array}{l} A_0 X^N + A_1 X^{N-1} + \dots \\ + A_{N-1} x + A_N \end{array} \right)_{machine} \quad (120)$$

$$A_i = a_i(1 + \lambda_i) \quad (121)$$

$$X = x(1 + \mu)$$

λ_i et μ_i représentent respectivement les erreurs relatives sur les a_i et sur x_i .

- Si ρ est petit, c'est-à-dire s'il ne traduit que l'effet des erreurs numériques, il peut être considéré comme zéro informatique, et la racine trouvée X est satisfaisante.

Soit C le nombre de chiffre exact d'un du résidu ρ calculé par la méthode de permutation-perturbation :

- Si $C \geq 1$, ρ est significatif et X n'est pas racine.
- Si $C < 1$, ρ n'est pas significatif, doit être considéré comme étant nul et X est donc solution.

b- Evaluation du résidu théorique. Formulation de La Porte.

- Expression statistique du résidu ρ

Cas général

Le calcul du résidu $\rho = P(x)_{machine}$ s'effectue souvent à l'aide du schéma de Horner :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 = A_0 \\ R_1 = (XR_0 + A_1)_{machine} \\ \text{-----} \\ R_{i+1} = (XR_i + A_{i+1})_{machine} \\ \text{-----} \\ R_{i+1} = (XR_i + A_{i+1})_{machine} \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

β_i : L'erreur relative due au produit XR_i

α_{i+1} : L'erreur relative due à l'addition $(XR_i) + A_{i+1}$

$$\rho = \sum_{i=1}^{N-1} P_i(\mu + \beta_{N-i}) + \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j + \sum_{k=0}^N a_k \lambda_k \tag{122}$$

Cas d'une racine satisfaisante

Hypothèses :

$A_i = a_i, \lambda_i = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\alpha}_i) = (\bar{\beta}_i) = (\bar{\mu}) = \bar{\alpha} \\ (\bar{\alpha}_i^2) = (\bar{\beta}_i^2) = (\bar{\mu}^2) = \bar{\alpha}^2 + \sigma^2 \\ (\bar{\alpha}_i \bar{\beta}_j) = \bar{\alpha} (i \neq j) \end{array} \right.$$

$$\rho = \mu x \frac{dP}{dx} + \beta_0 a_0 x^N + \sum_{i=1}^{N-1} P_i(\alpha_i + \beta_i) \tag{123}$$

Expression statistique de ρ^2

$$\rho^2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \tag{124}$$

$$S_1 = \left(\mu X \frac{dP}{dx} + \beta_0 a_0 X^N \right)^2 \tag{125}$$

$$S_2 = 2 \left(\mu X \frac{dP}{dx} + \beta_0 a_0 X^N \right) \sum_{i=1}^{N-1} P_i (\alpha_i + \beta_i) \quad (126)$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{N-1} P_i^2 (\alpha_i + \beta_i)^2$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} P_i P_j (\alpha_i + \beta_i) (\alpha_j + \beta_j) \quad (127)$$

Valeur moyenne de ρ^2

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \frac{dP}{dx} \\ v = a_0 x^N \end{array} \right. \quad (128)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = a_0 x^N \\ w = \sum_{i=0}^N P_i^2 \end{array} \right. \quad (129)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \sum_{i=0}^N P_i^2 \end{array} \right. \quad (130)$$

$$\overline{\rho^2} = \overline{\alpha^2} (3u - v)^2 + \sigma^2 (2w + u^2 + v^2) \quad (131)$$

Valeur moyenne de ρ^2 . Expression simplifiée.

1- Simplification d'ordre statistique.

$$T^2 = (a_0 x^N)^2 + (a_1 x^{N-1})^2 + \dots + (a_{N-1} x)^2 + a_N^2 \quad (132)$$

$$\rho^2 = u^2 (9\alpha^2 + \sigma^2) + \frac{T^2}{3(N+1)} (3\alpha^2 + (N^2 + 3N - 1)\sigma^2) \quad (133)$$

2- Simplification d'ordre numérique

$$\bar{\rho}^2 = 2^{-2n} ((4.5u^2 + 0.2)T^2 N f(N)) \quad (134)$$

$$f(N) = \frac{0.31N^2 + 0.93N + 2.1}{N(N+1)} \quad (135)$$

n , étant le nombre de bits de la mantisse

$$\begin{cases} 0.3 < f(N) < 1.6 \\ \text{quel que soit } N, f(N) \sim 1 \end{cases}$$

Cas où l'ordinateur utilisé effectue ses opérations avec arrondi (cas moins fréquent) :

$$\overline{\rho^2} = 2^{-2n}(0.166u^2 + 0.06NT^2g(N)) \quad (136)$$

$$g(N) = \frac{N^2 + 3N + 1}{N(N + 1)} 0.93 \quad (137)$$

$$\begin{cases} 0.9 < g(N) < 1.4 \\ \text{quel que soit } N, g(N) \sim 1 \end{cases}$$

Résidu théorique $\hat{\rho}$:

La quantité $\sqrt{\overline{\rho^2}}$ fournit un ordre de grandeur du résidu auquel on doit s'attendre lorsque la racine calculée est satisfaisante.

$$\hat{\rho} = 2^{-n}\sqrt{u^2 + NT^2} \quad (138)$$

$$\hat{\rho} = 2^{-n}\sqrt{x\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + N[(a_0x^N)^2 + \dots + (a_{N-1}x)^2 + a_N^2]} \quad (139)$$

Comme nous nous intéressons au x ordres de grandeur, $\sqrt{\overline{\rho^2}}$ et $\hat{\rho}$ sont équivalents, d'où l'appellation justifiée « résidu théorique » donnée à $\hat{\rho}$.

c- Méthode de contrôle pour le polynôme

$$\rho^* = \frac{|\rho|}{\rho}, \text{ résidu nommé.} \quad (140)$$

$$\rho^* = \frac{2^n |\rho|}{\sqrt{\left(x \frac{dp}{dx}\right)^2 + N[(A_0 x^N)^2 + \dots + (A_{N-1} x)^2 + A_N^2]}} \quad (141)$$

Trois cas se présentent :

$\rho^* \sim 1$: La solution est satisfaisante.

$1 \ll \rho^* \ll 2^n$: La solution n'est pas totalement satisfaisante, mais la plupart du temps améliorable en simple précision par la méthode de Newton.

$\rho^* \sim 2^n$: La solution est mauvaise. Cela signifie que la résolution est inadaptée ou, s'il s'agit d'un processus itératif, que le point de départ en est déficient.

d- Cas de racines complexes :

Il y a lieu de faire deux contrôles, l'un pour la partie réelle X, et l'autre pour la partie imaginaire Y du résidu de la racine Z du polynôme.

Partie réelle :

$$\rho_R = \frac{2^n |Re(\rho)|}{\sqrt{\left[x Re\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]^2 + \left[y Im\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]^2 + N \sum_{i=0}^N Re(A_{N-i} Z^i)^2}} \quad (142)$$

Partie imaginaire :

$$\rho_I = \frac{2^n |Im(\rho)|}{\sqrt{\left[x Im\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]^2 + \left[y Re\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]^2 + N \sum_{i=0}^N Im(A_{N-i} Z^i)^2}} \quad (143)$$

IV.2.4. Evaluation de la précision et amélioration éventuelle de la solution.

Lorsque $1 < \rho^* \leq 2^n$, l'amélioration de la racine du polynôme $P_N(x)$ en simple précision se fait comme suit.

Amélioration

a- Cas des racines réelles

L'amélioration se fait par la méthode de Newton classique

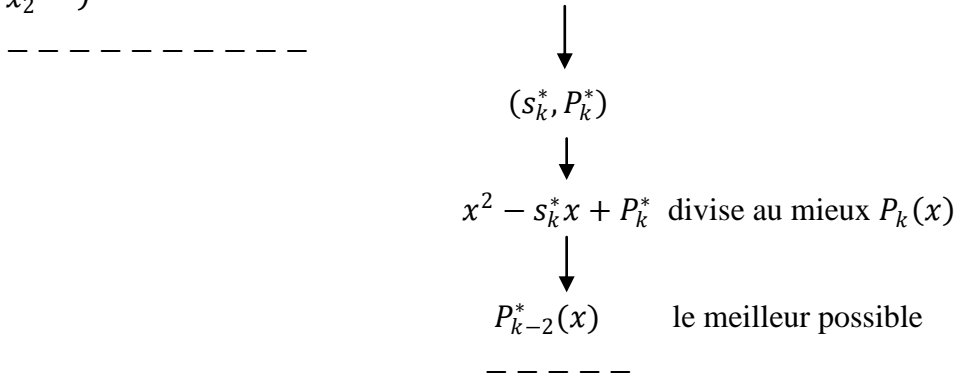
$$P_k(x) = (x^2 - s_k x + P_k)P_{k-2}(x)$$

$$x^2 - s_k x + P_k = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - s_k x + P_k \\ x_1 \end{array} \right\} \rightarrow x_1^*$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P_k}{x-x_1^*} \\ x_2 \end{array} \right\} \rightarrow x_2^*$$

, (x_1^*, x_2^*) racines réelles améliorées



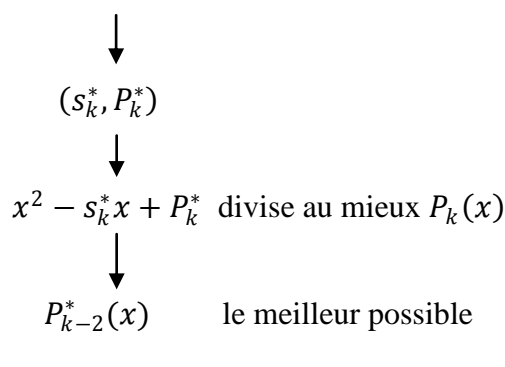
Réduction quasi-totale de la propagation des erreurs dues aux divisions successives des polynômes.

b- Cas des racines imaginaires

L'amélioration se fait par la méthode de Newton à une variable dans le plan complexe \mathbb{C} . Le test d'arrêt utilisé dans la méthode de Newton est le test optimal (i.e. la satisfaction des résidus normés du polynôme $P_N(x)$)

$$x^2 - s_k x + P_k = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - s_k x + P_k \\ z_1 \\ \text{deux contrôles} \\ \hat{\rho}_R \\ \hat{\rho}_I \end{array} \right\} \rightarrow z_1^*(x_1^*, y_1^*), z_2^* = -z_1^*(x_2^* = x_1^*, y_2^* = -y_1^*)$$



Réduction quasi-totale de la propagation des erreurs dues aux divisions successives des polynômes.

c- Notion de domaine d'incertitude

x^* : racine de $P_N(x)$

X^* : racine informatique relative à x^*

$$\rho = \sum_{i=0}^N A_i X^{*N-i}$$

$D = \{X^{*(1)}, X^{*(2)}, \dots, X^{*(k)}\}$, domaine d'incertitude.

Tout point de D correspond à une solution informatique satisfaisante et ses limites permettent de définir sa précision.

d- Evaluation théorique de la précision sur la solution calculée

$$f(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^{N-i} = 0$$

La méthode de permutation permet de fournir l'ensemble des images informatiques.

$F(X^*) = 0$, une image informatique.

C_{op} , le cardinal de l'ensemble des images.

La méthode de permutation permet d'obtenir $D = \{X^{*(1)}, X^{*(2)}, \dots, X^{*(k)}\}$

La valeur moyenne $\hat{\varepsilon}$ de l'erreur sur la racine calculée est estimée, à partir de la population des éléments de l'ensemble, comme suit.

x^* : racine de $P_N(x)$

X_1^* : solution informatique de x^* , élément de D , sur laquelle est calculée la précision.

X^* : image informatique de x^* .

$$\bar{X} = \overline{X^{*(j)}}, j = 1, 2, \dots, k$$

$$\sigma^2 = \text{variance de } X^{*(j)}$$

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{(X^{*(1)} - \bar{X})^2 + \sigma^2} : \text{erreur quadratique moyenne sur } X^{*(1)}.$$

Le nombre de chiffres significatifs décimaux exacts (CX) sur la solution informatique $X^{*(1)}$:

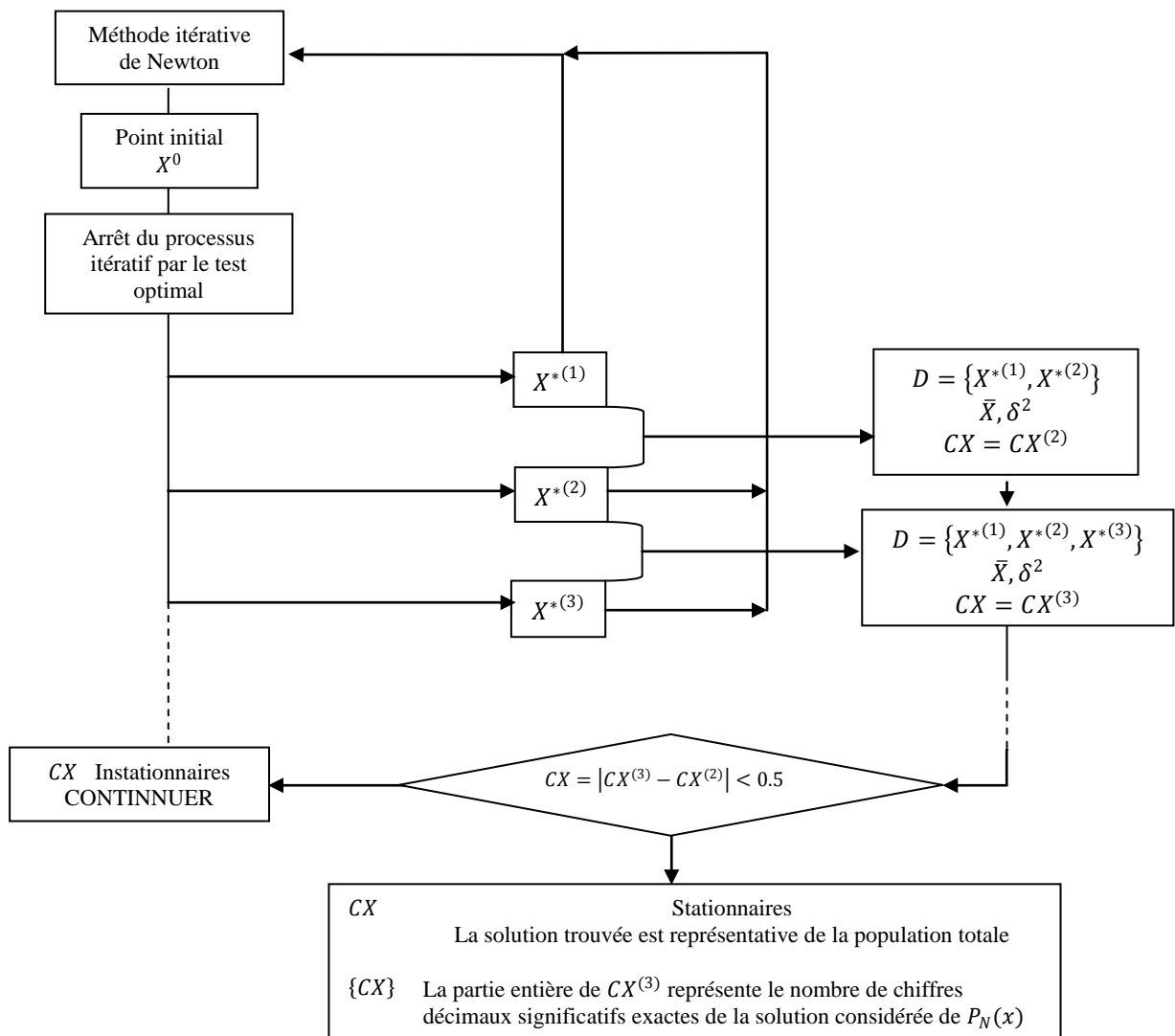
$$\frac{\hat{\varepsilon}}{|X^{*(1)}|} = 10^{-CX}$$

Pour les racines complexes, les parties réelles et imaginaires sont traitées séparément.

e- Evaluation pratique de la précision sur la solution

Calcul du nombre de chiffres décimaux significatifs exacts de la solution

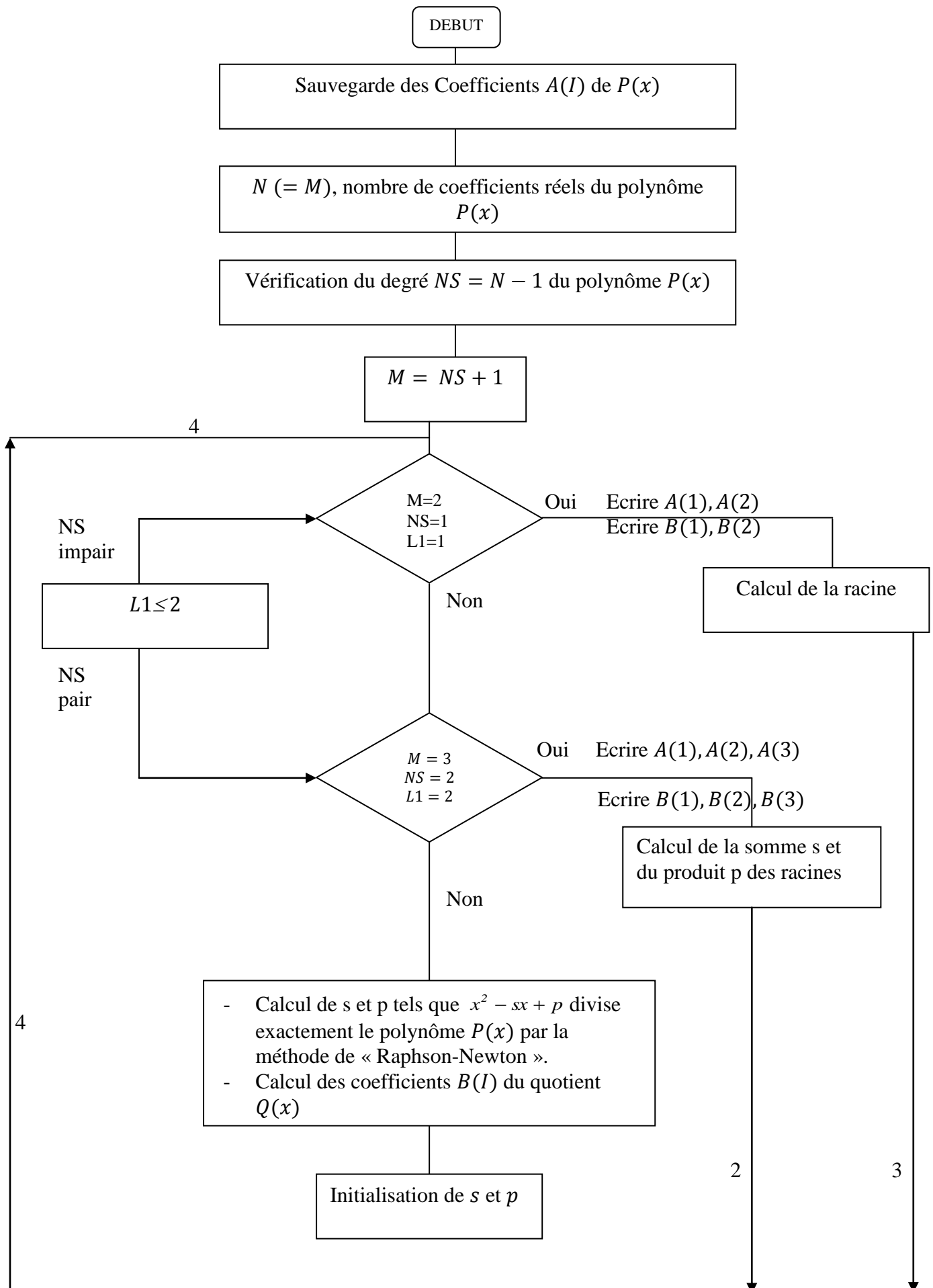
CX : le nombre de chiffres décimaux exacts de la racine $X^{*(1)}$, à calculer.



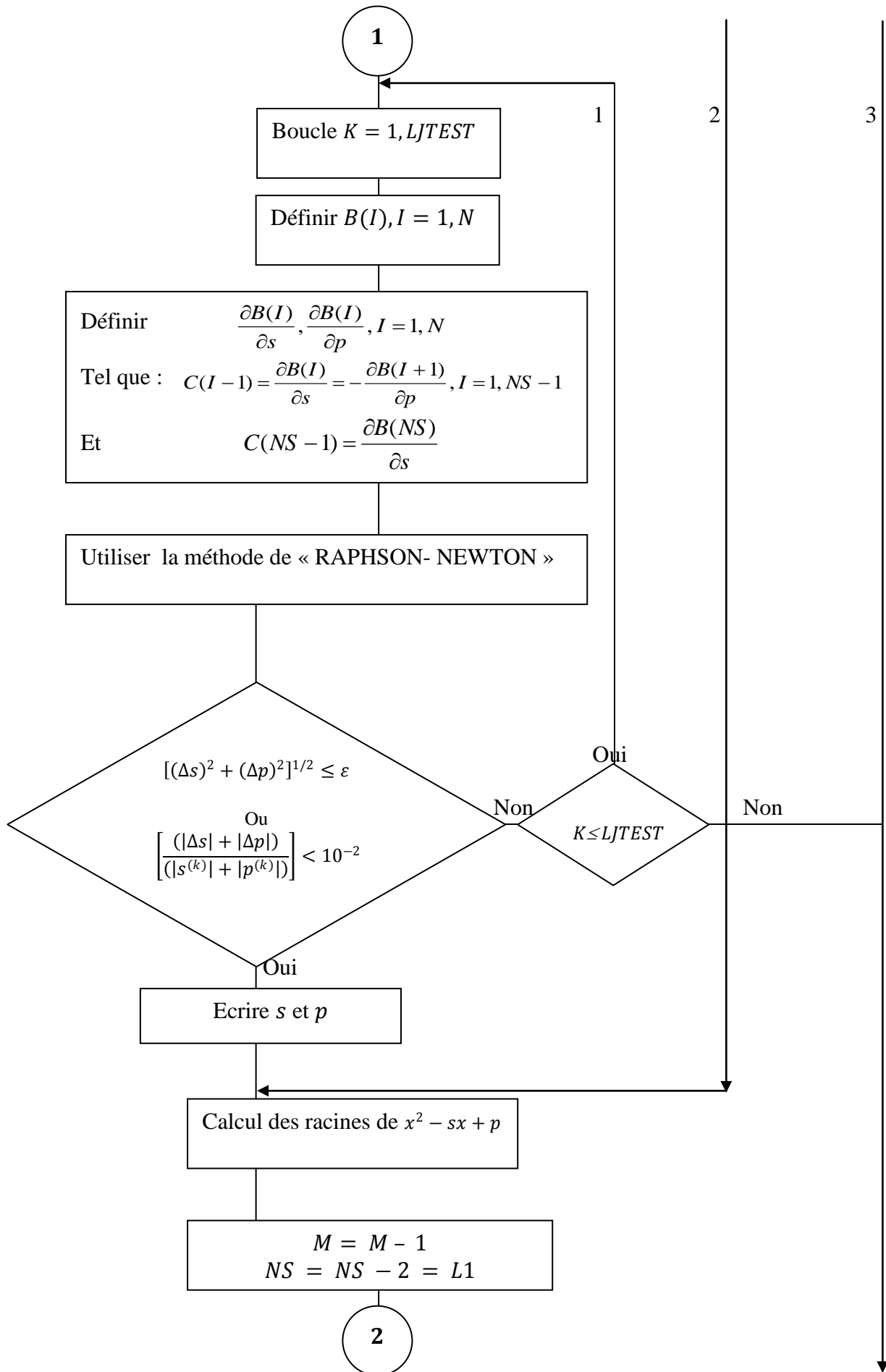
Le calcul de $\{CX\}$ doit être fait pour toutes les racines réelles ou complexes de $P_N(x)$.

Cette méthode n'a jamais été mise en défaut, en général $\{CX\}$ de la solution s'obtient avec trois éléments.

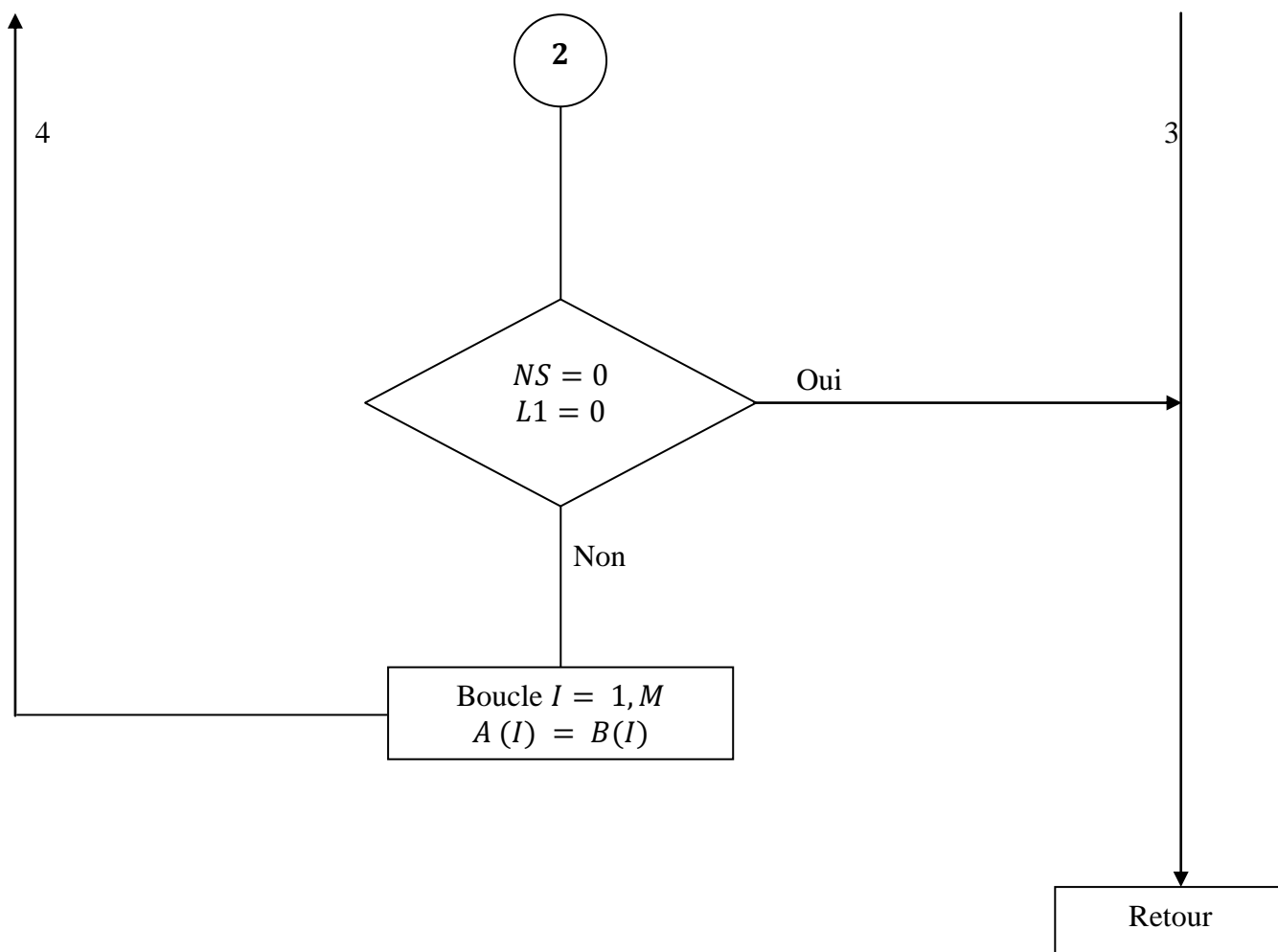
Les différentes étapes de la méthode de la Bairstow stabilisée par le test d'arrêt optimal et le contrôle et l'amélioration de la précision de la solution sont illustrées par l'organigramme. 4.



4



2



Organigramme .3- Méthode de Bairstow classique.

Formulation numériquement stable pour le calcul numérique des racines du polynôme

$$\begin{cases} x^2 - sx + p \\ x^2 - sx + p = 0 \\ \Delta = s^2 - 4p \end{cases} \quad (\text{Organigramme .2}).$$

ε_Δ , l'erreur numérique estimée sur le calcul d'une somme de produits de nombres introduite par l'arithmétique approchée de la machine.

$$\varepsilon_\Delta = 2 \cdot 2^{-n} [s^4 + 16p^2]^{1/2} \quad (144)$$

(Arithmétique de l'ordinateur avec troncature)

Ou,

$$\varepsilon_\Delta = 2^{-n} [2(s^4 + 16p^2)]^{1/2} \quad (145)$$

(Arithmétique de l'ordinateur avec arrondi)

n , le nombre de bits de la mantisse en virgule flottante binaire normalisée ($n = 48$).

$$\Delta \leq \varepsilon_\Delta$$

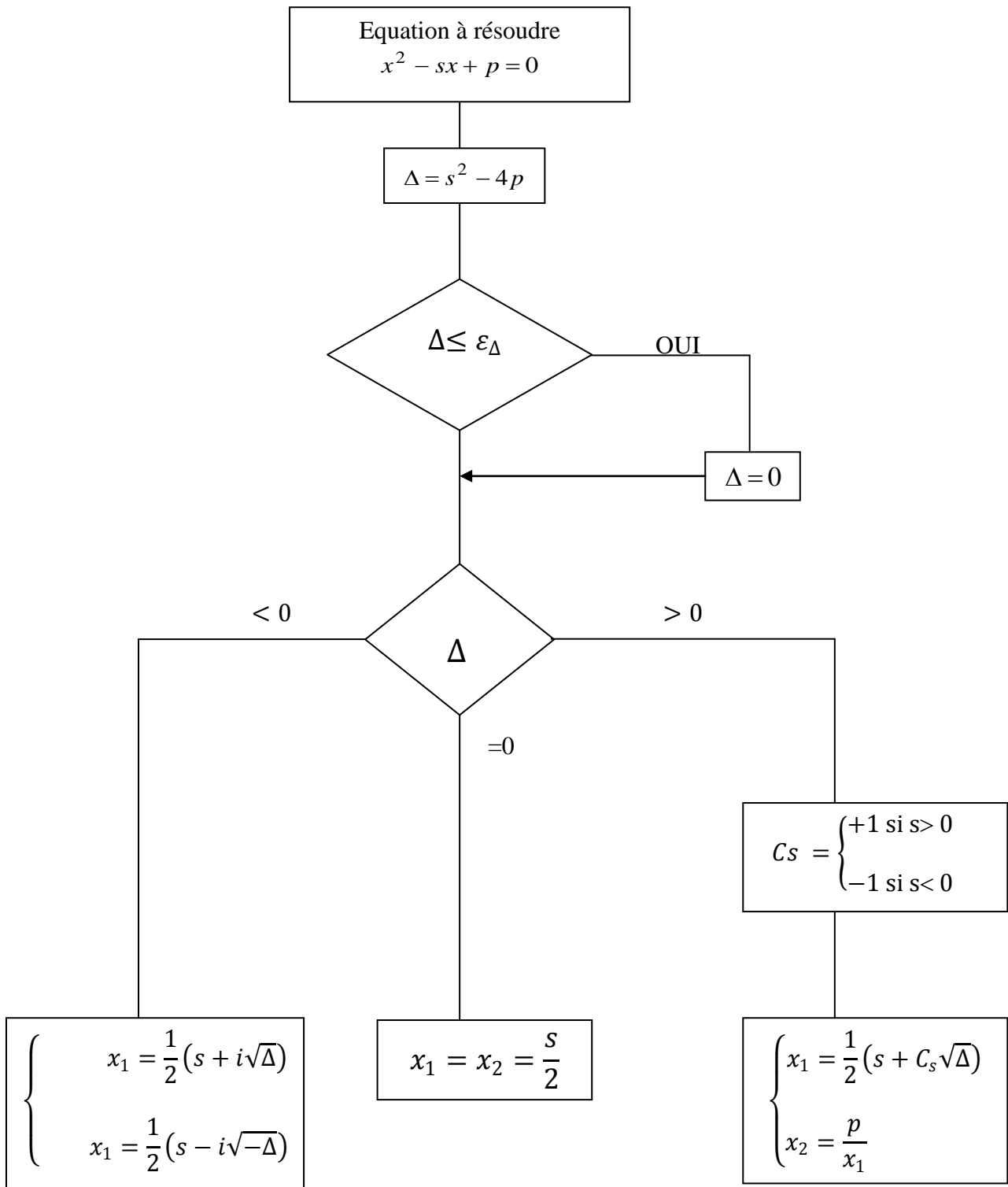
$$\text{Informatiquement } \begin{cases} x_1 = x_2 = \frac{s}{2} \end{cases}$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta < 0 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(s + i\sqrt{-\Delta}) \\ x_2 = \frac{1}{2}(s - i\sqrt{-\Delta}) \end{cases}$$

$$\Delta > 0 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(s + C_s\sqrt{\Delta}), \quad C_s = \begin{cases} 1, & \text{si } s > 0 \\ -1, & \text{si } s < 0 \end{cases} \\ x_2 = \frac{p}{x_1} \end{cases}$$

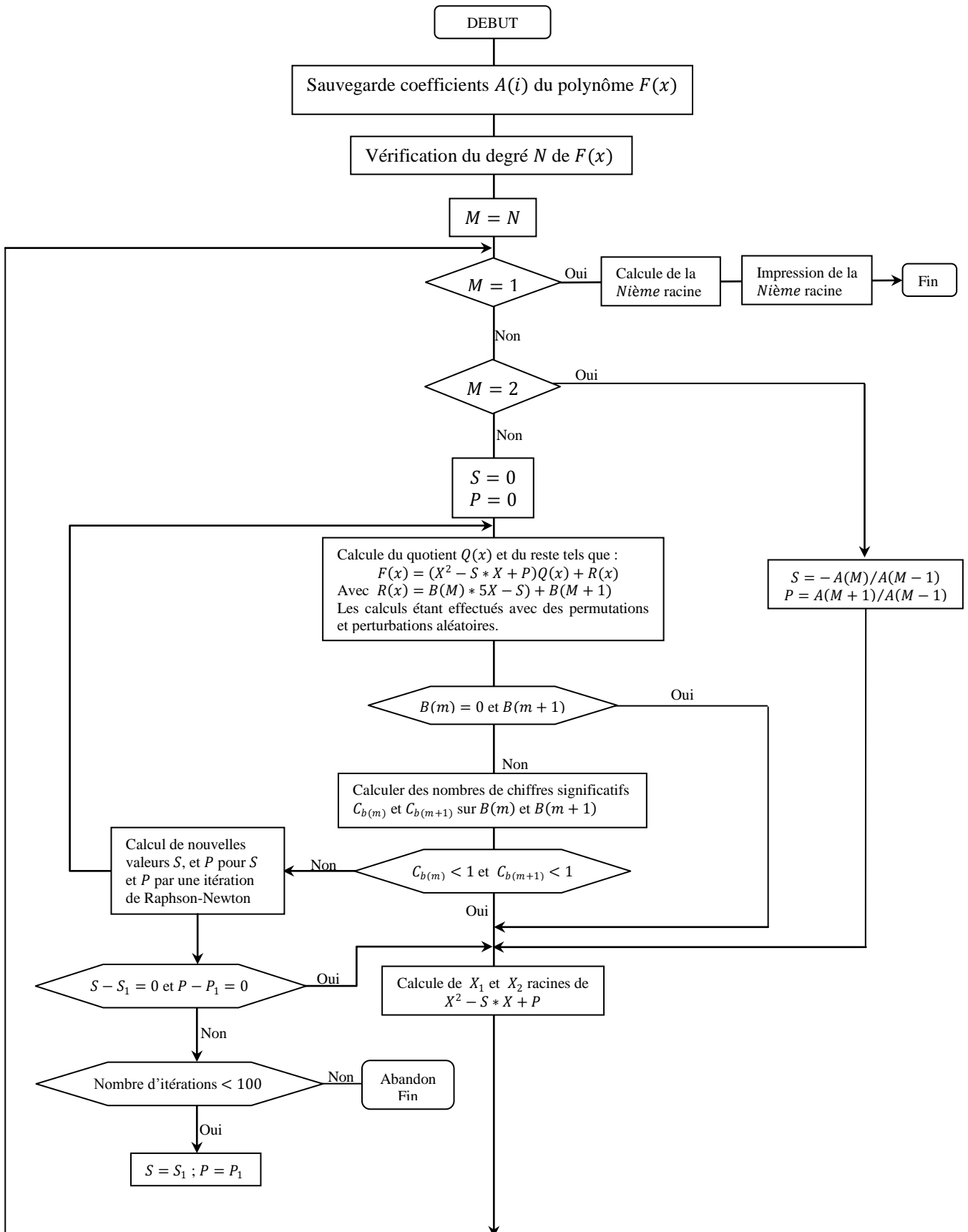
Le calcul des racines peut donc être explicité par l'organigramme .2 ci-après.

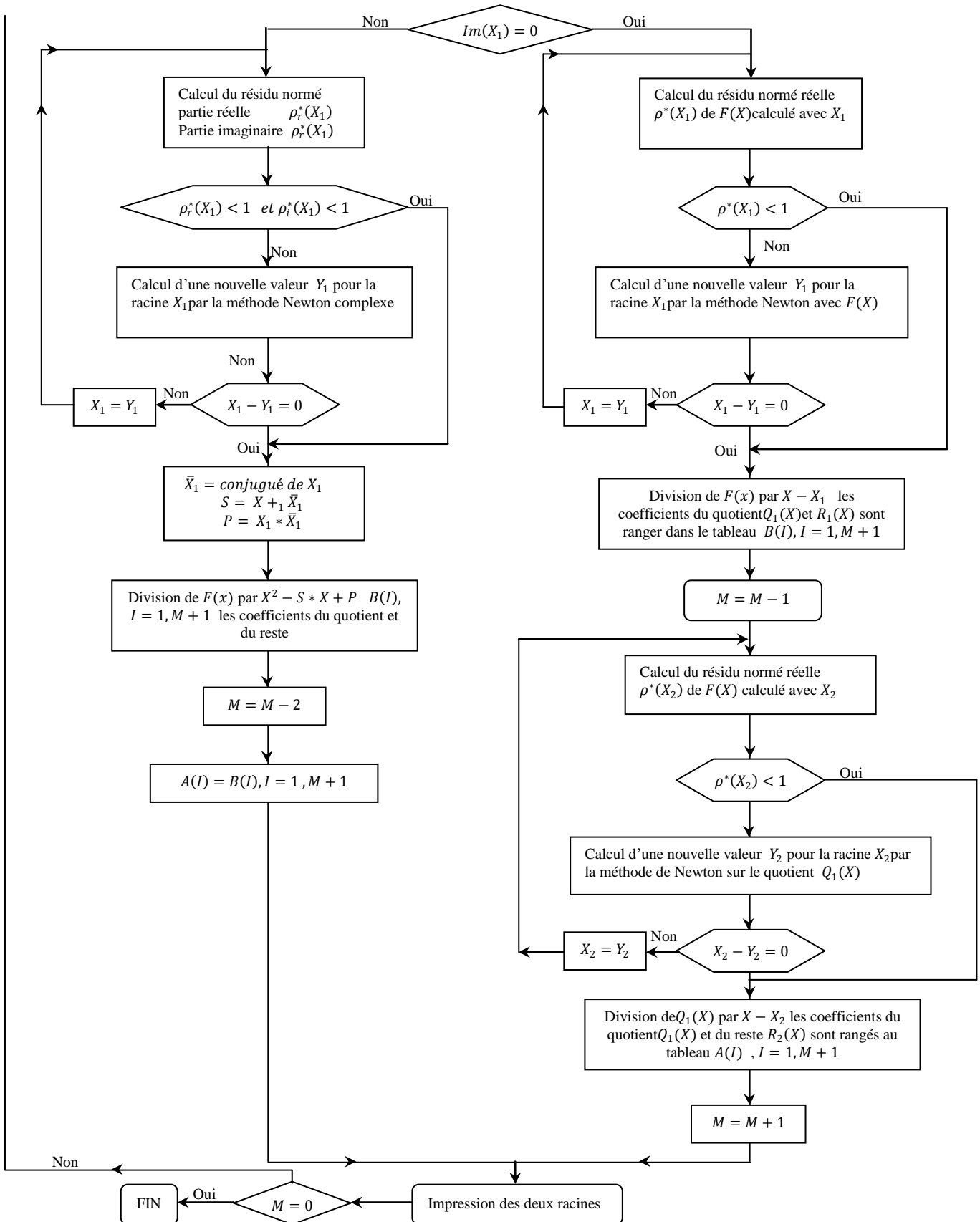


Organigramme .2 : Méthode de résolution algébrique du polynôme du deuxième degré
 $x^2 - sx + p$

IV.2.5. Organigramme de la méthode de Bairstow avec test d'arrêt optimal

Le principe de la méthode de Bairstow avec test d'arrêt optimal est illustré par l'organigramme.4 ci-après.

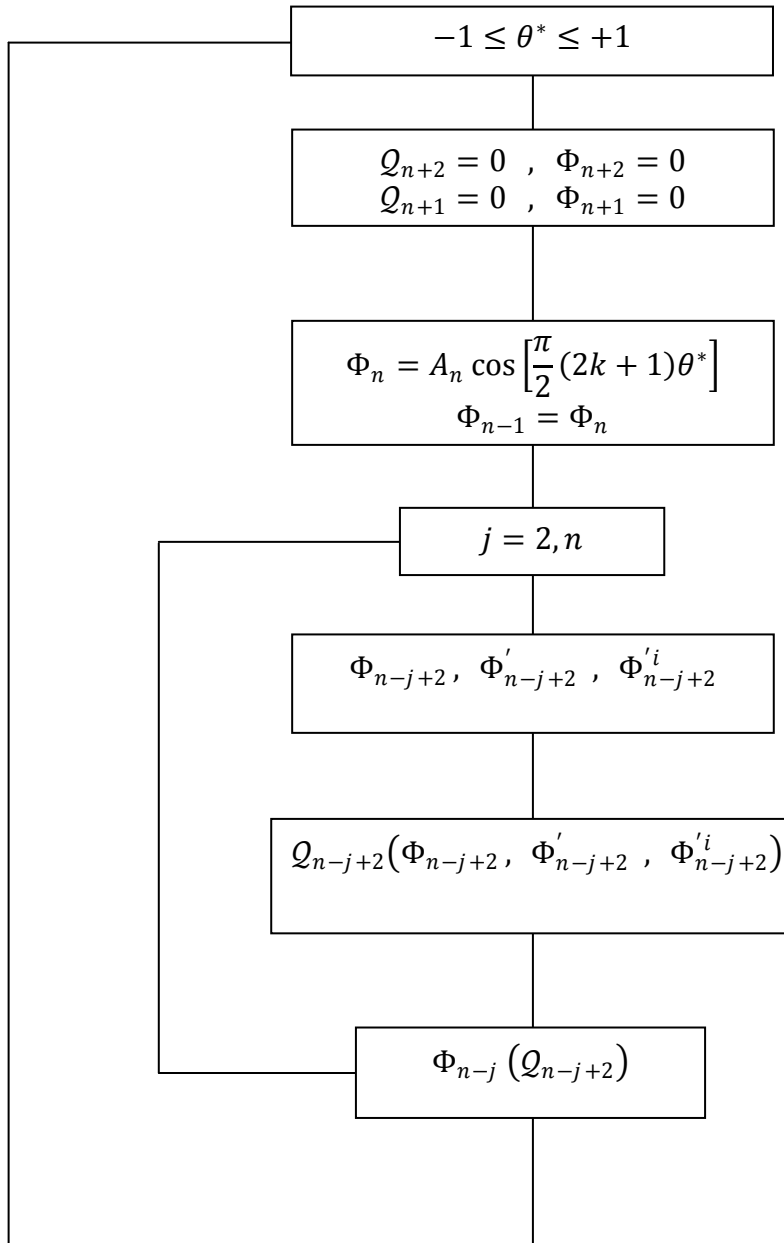




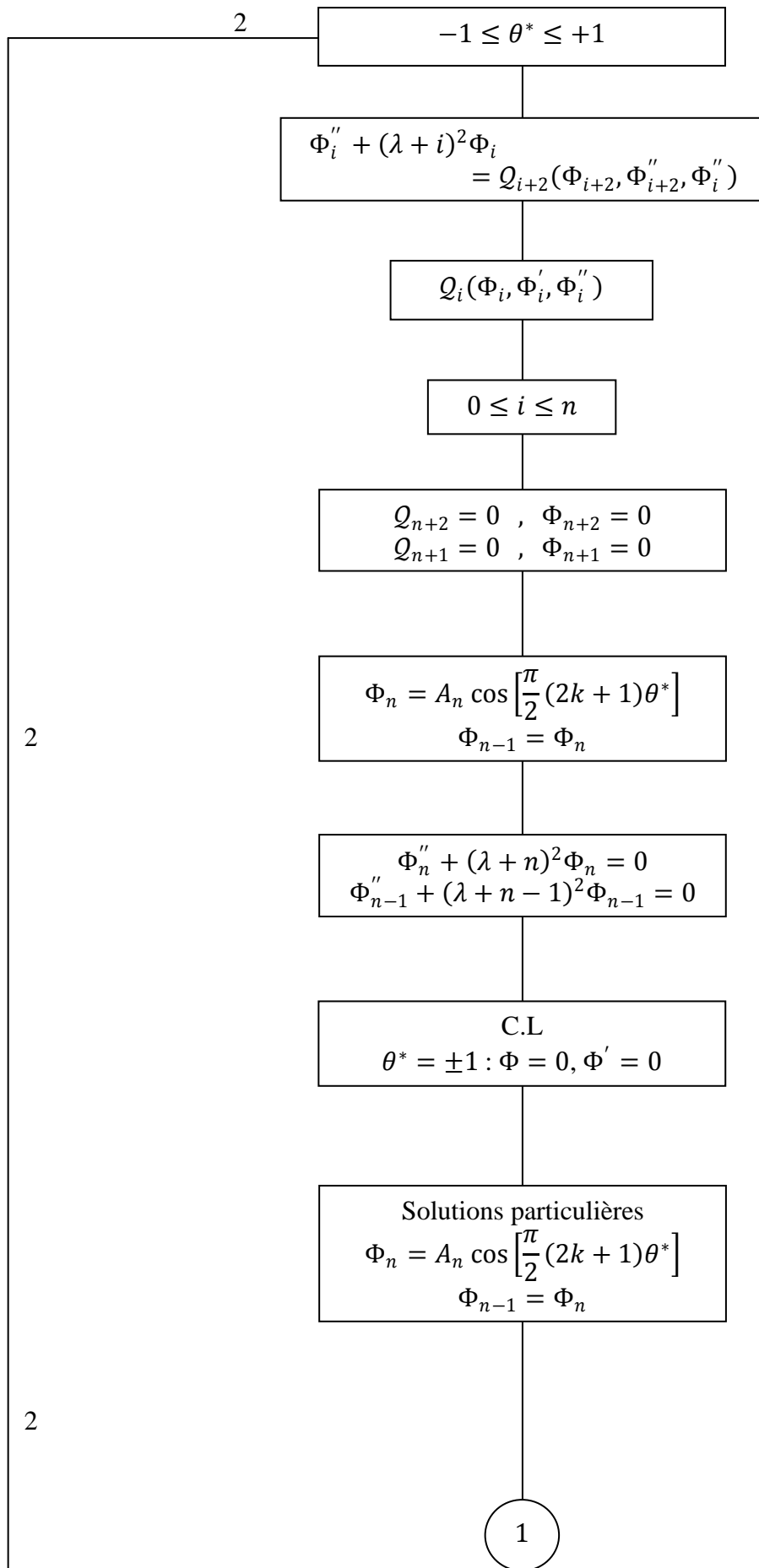
Organigramme.4 : Les différentes étapes de la méthode de la Bairstow stabilisée par le test d'arrêt optimal et le contrôle et l'amélioration de la précision de la précision de la solution.

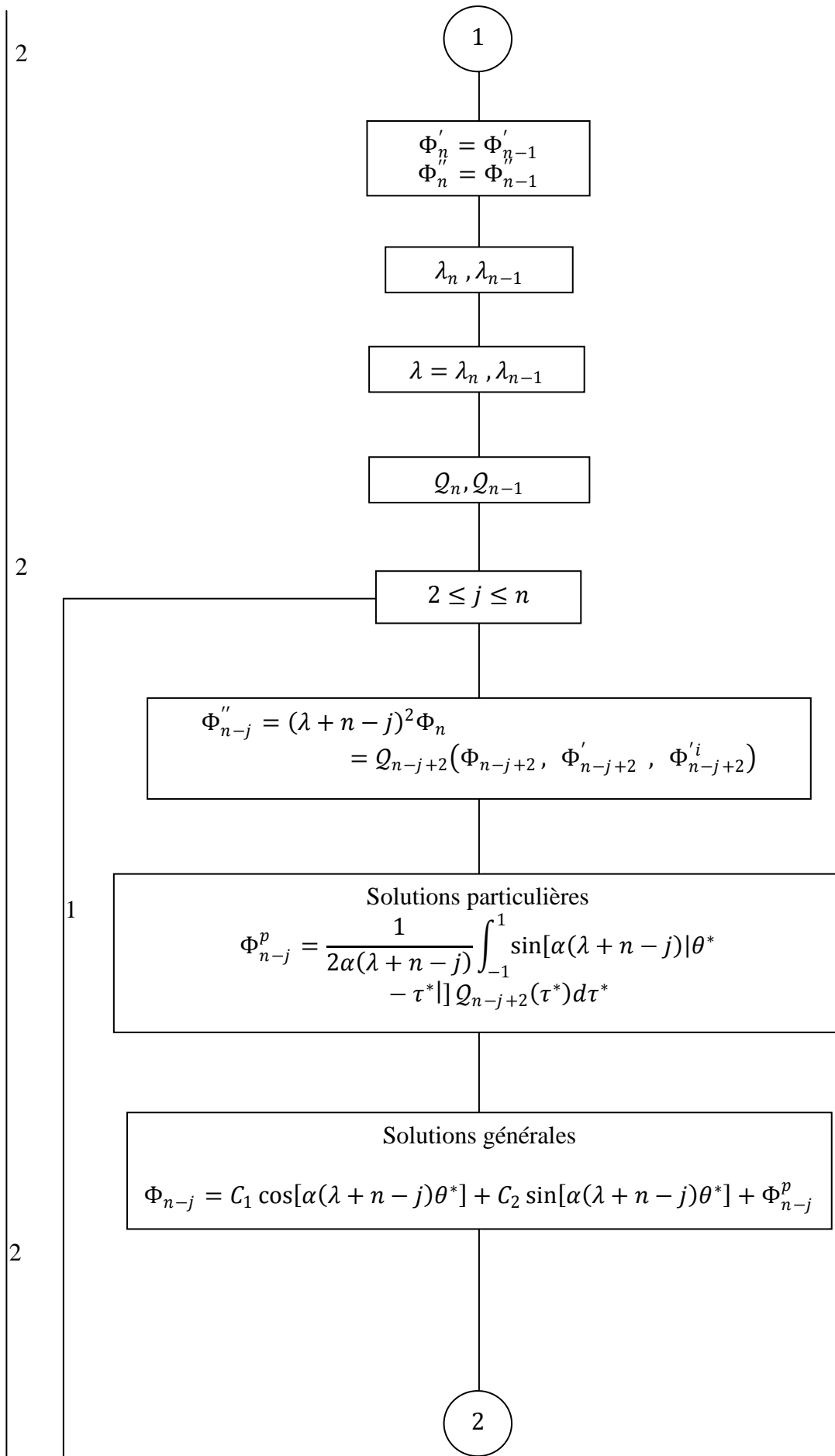
IV.3. Traitement informatique de la stabilité du modèle utilisé

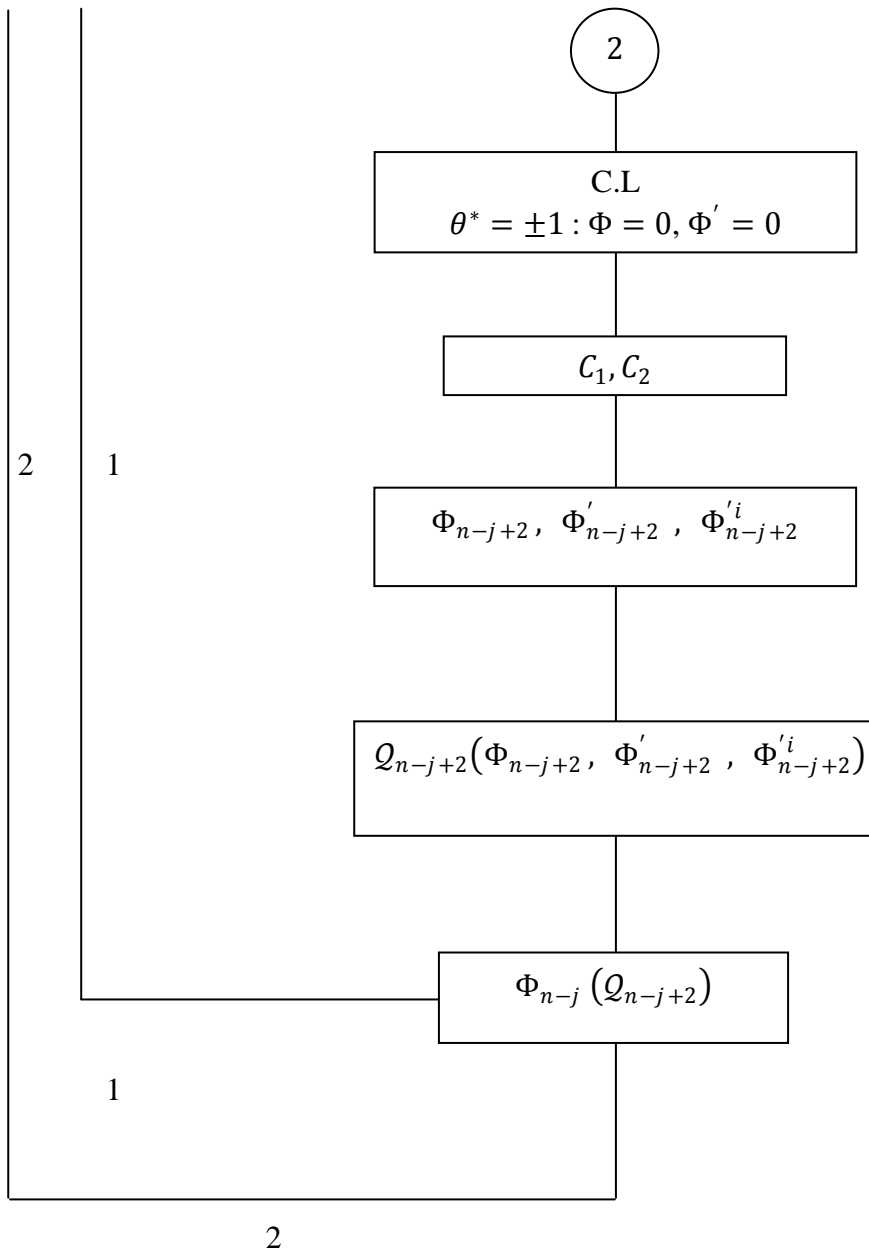
L'adaptation de l'équation de la petite perturbation non stationnaire superposée à la solution stationnaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel est explicitée par les organigrammes (5.a), (5.b) et (5.c) ci-après.



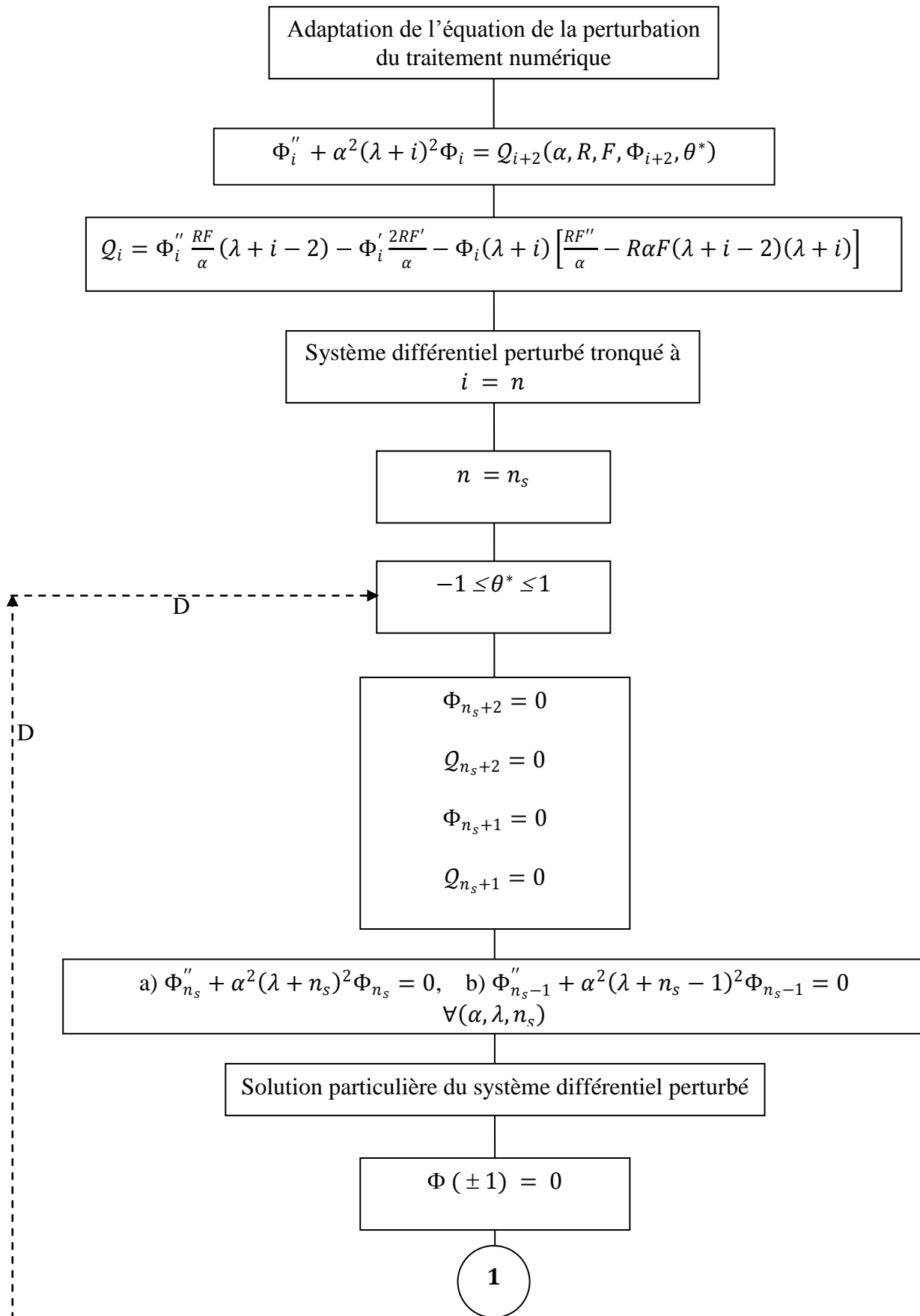
Organigramme : (5.a)

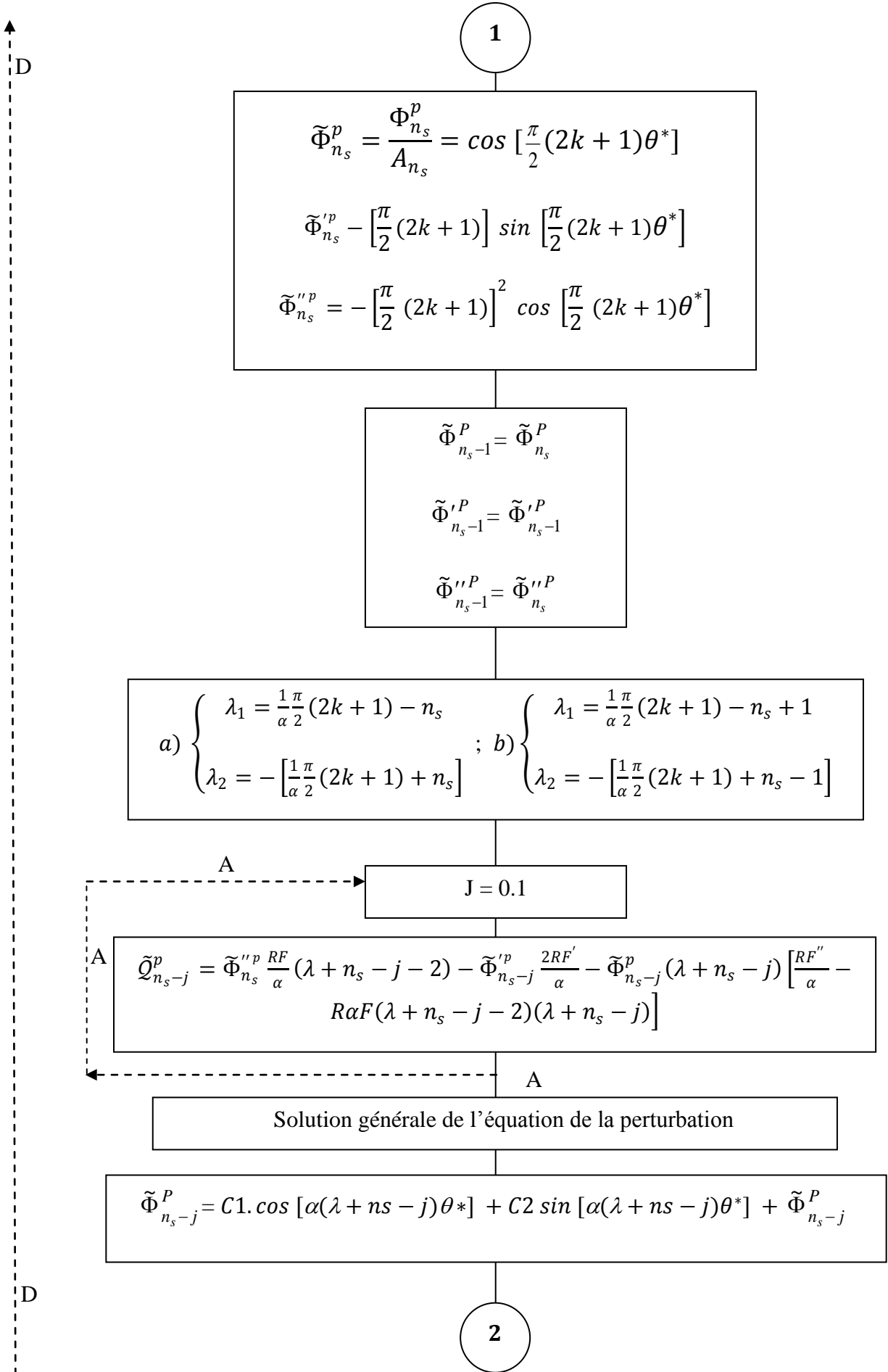


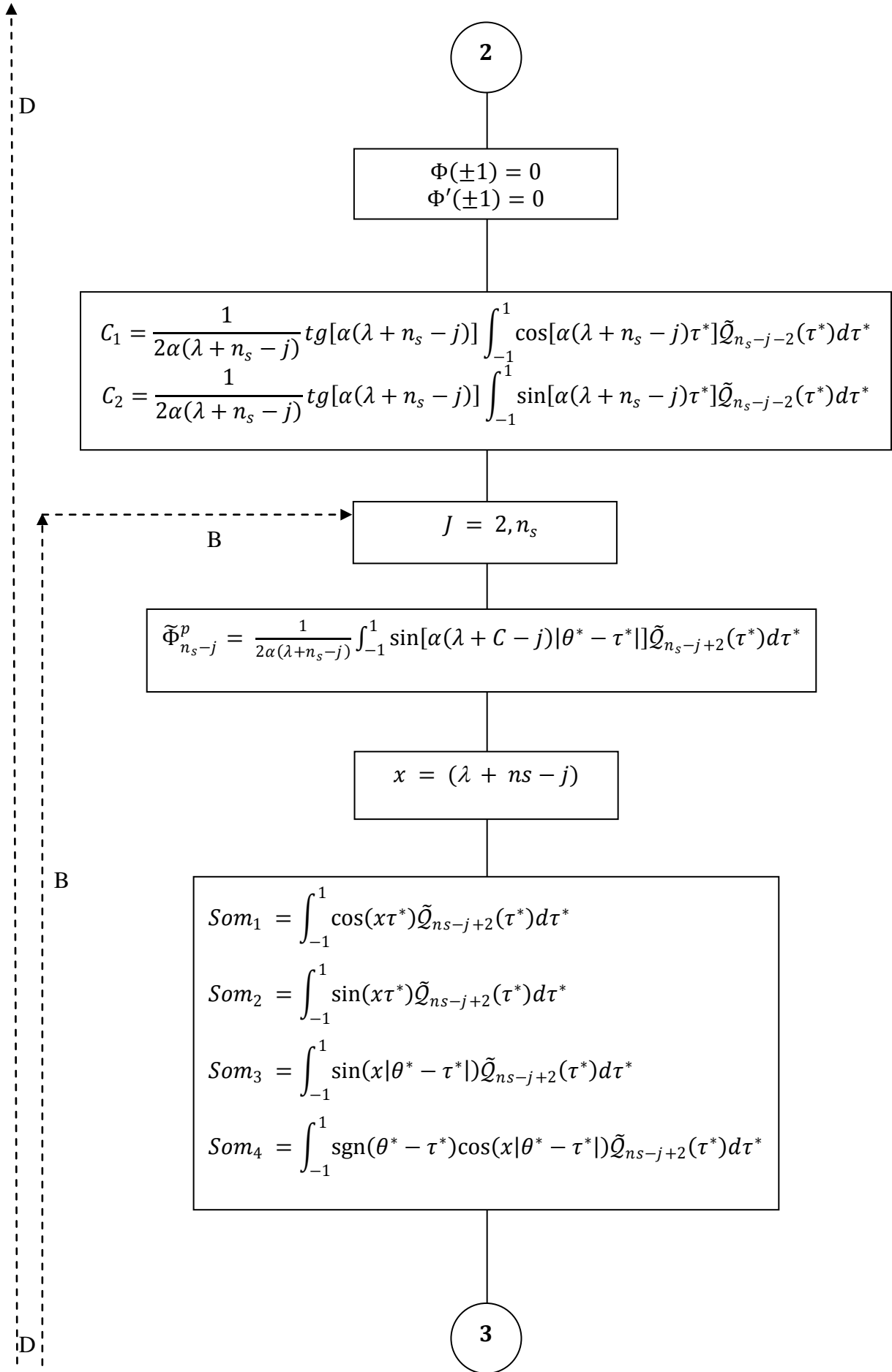


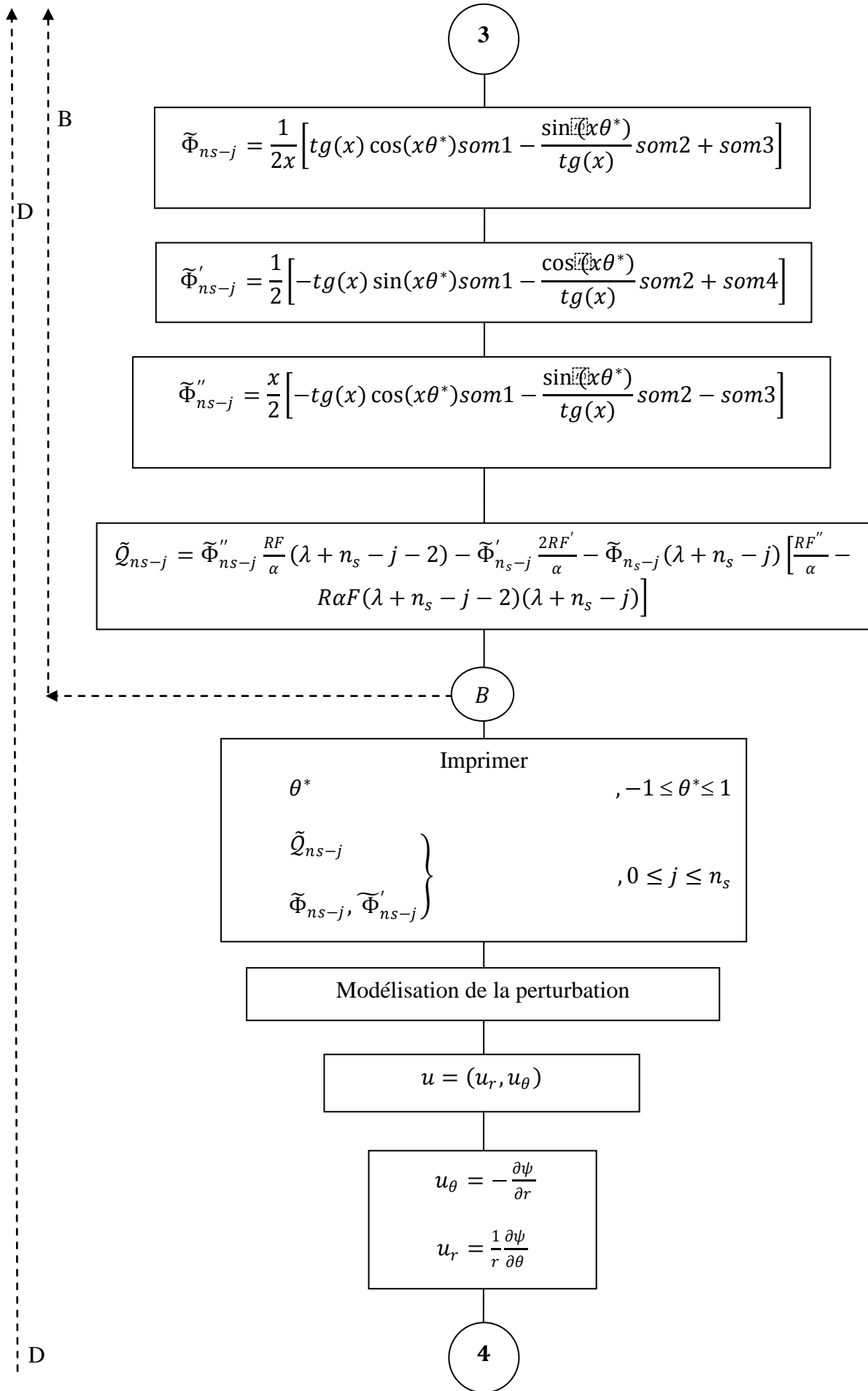


Organigramme : (5.b)









D

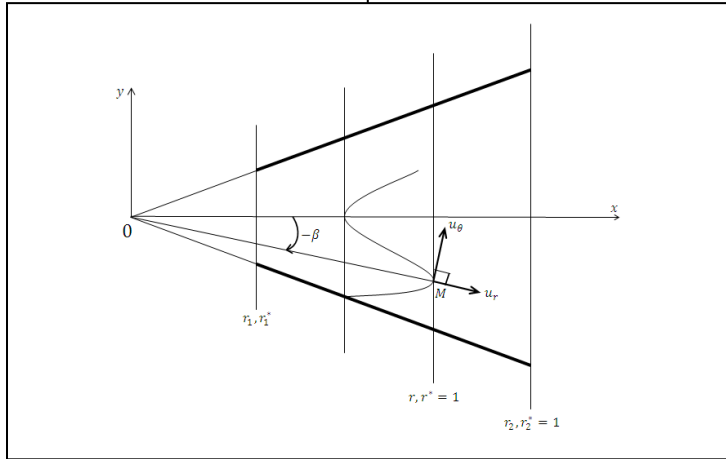
4

$$\hat{r} = r^* (-s)^{1/2}$$

$$r^* = \frac{r}{r_2}$$

$$\theta^* = \frac{\theta}{\alpha}$$

$$\psi(t, \hat{r}, \theta^*, \alpha, R) = e^{st} x(\hat{r}, \theta^*, \alpha, R)$$



$$M (r^* = 1, \theta = -\beta)$$

$$\frac{u_r}{u_\theta} = 1$$

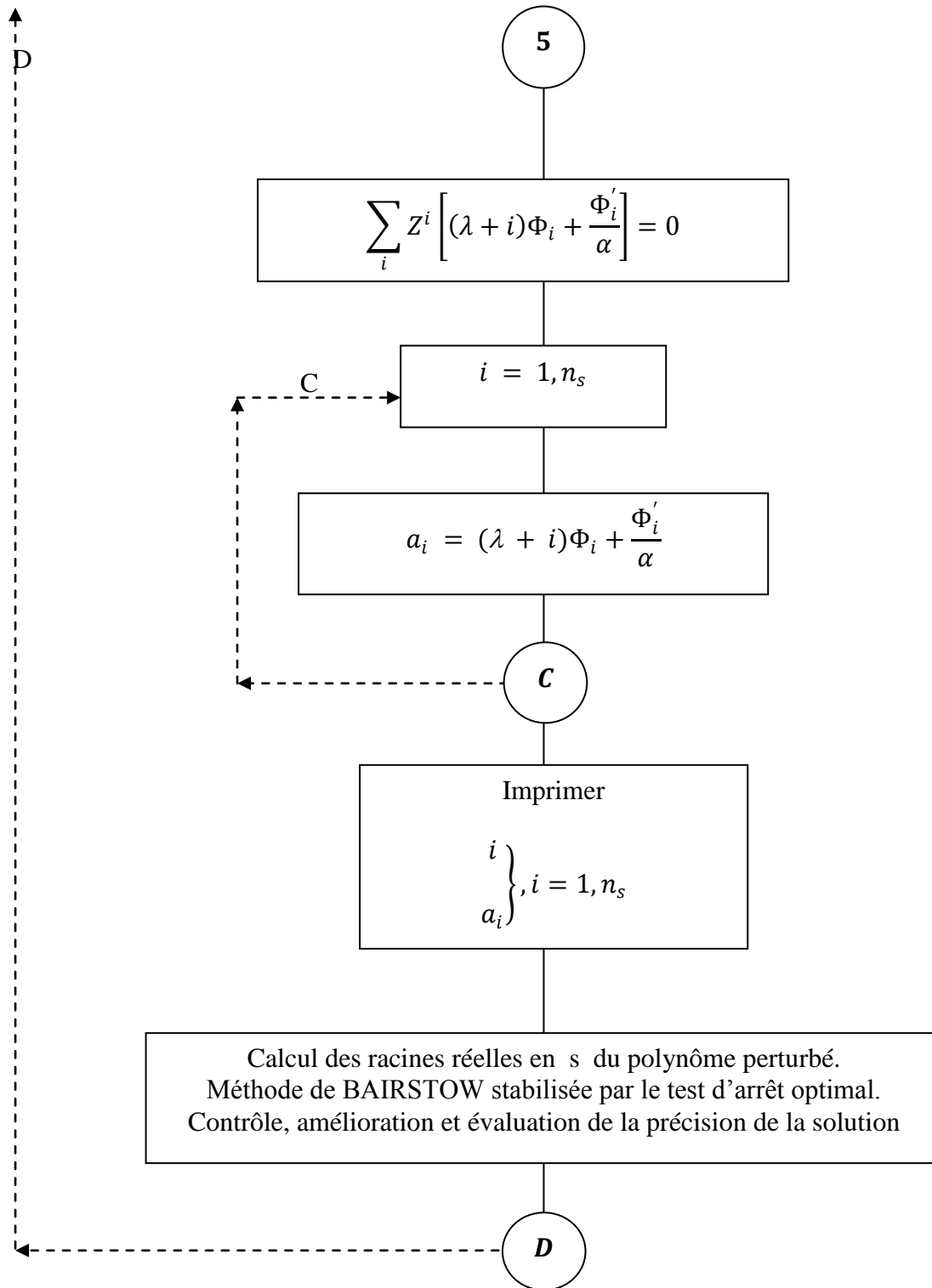
$$n_s$$

$$Z^2 = (-s)$$

5

$$\rightarrow LS / -\frac{\beta}{\alpha} (= -\frac{1}{2})$$

LS = 51 : Position du point $i/\theta_i^* = -0.5$



Organigramme : (5.a. b. c) : Traitement numérique de la stabilité linéaire dans le temps de l'écoulement de Jeffery-Hamel

Calcul de λ

$$\begin{cases} \Phi_n = A_n \cos \left[\frac{\pi}{2} (2k+1) \theta^* \right] \\ \Phi_{n-1} = \Phi_n \end{cases}, \text{ solutions particulières}$$

$$\begin{cases} \Phi_n'' = -A \left[\frac{\pi}{2} (2k+1) \right]^2 \cos \left[\frac{\pi}{2} (2k+1) \theta^* \right] \\ \Phi_{n-1}'' = \Phi_n'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_n'' + \alpha^2 (\lambda + n)^2 \Phi_n = 0 & , (a) \\ \Phi_{n-1}'' + \alpha^2 (\lambda + n - 1)^2 \Phi_{n-1} = 0 & , (b) \end{cases}, (\forall \alpha, \lambda, n)$$

$$a) \begin{cases} \lambda_1 = - \left[\frac{1}{\alpha^2} \pi (2k+1) + n \right] \\ \lambda_2 = \frac{1}{\alpha^2} \pi (2k+1) - n \end{cases}, \quad b) \begin{cases} \lambda_1 = - \left[\frac{1}{\alpha^2} \pi (2k+1) + n - 1 \right] \\ \lambda_2 = \frac{1}{\alpha^2} \pi (2k+1) - n + 1 \end{cases}$$

Symboles Fortran : $\alpha \rightarrow AA$ $ns \rightarrow NS$ (L'ordre du polynôme perturbé). $n \rightarrow NS$ (L'ordre de troncature du système différentiel perturbé). $ns + 1 \rightarrow N0$ (Le nombre de coefficients du polynôme perturbé). $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (U_1, U_2)$ $\pi \rightarrow PI$ $k \rightarrow Z$ -----
 $X0 = (2.* Z + 1.) * PI/2$ $XY = FLOAT(NS)$ $U1 = -(X0/AA + XY)$

IV.1. Résultats et discussion

Les valeurs réelles des plus grandes "fréquences" possibles, S , de la petite perturbation, ε , instationnaire superposée à la solution stationnaire qui représente le champ de base de l'écoulement considéré en fonction du nombre $Re\alpha$, pour ($\alpha = 0.0001$, $\alpha = 0.001$, $\alpha = 0.00124$, $\alpha = 0.01$) (tableaux (3, 4,5,6)) sont données pour le divergent et pour le convergent comme suit.

Tableau 3. Valeurs des fréquences de la perturbation (0.0001).

$Re\alpha$	Convergent	Divergent
0.000000E+00	0.649675435214351E-15	0.649675435214351E-15
	0.649675435214351E-15	0.649675435214351E-15
	-0.649675435214351E-15	-0.649675435214351E-15
	-0.649675329335232E-15	-0.649675329335232E-15
	-0.100039696693420E+01	-0.100039696693420E+01
0.300000E-02	-0.711057204264463E+24	-0.711252984747464E+24
	-0.711057204264463E+24	-0.711252984747464E+24
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	-0.284422881705785E+25	-0.284501222722023E+25
0.450000E-02	-0.159976606556116E+25	-0.160043418357308E+25
	-0.159976606556116E+25	-0.160043418357308E+25
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	-0.639906426224465E+25	-0.640173673429233E+25
0.600000E-02	-0.284384892942208E+25	-0.284541286744308E+25
	-0.284384892942208E+25	-0.284541286744308E+25
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	-0.113753957176883E+26	-0.113816537756153E+26
0.750000E-02	-0.444316348209901E+25	-0.444629164637138E+25
	-0.444316348209901E+25	-0.444629164637138E+25
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	-0.177726539283960E+26	-0.177851665854855E+26
0.900000E-02	-0.639774359066112E+25	-0.640305971171886E+25
	-0.639774359066112E+25	-0.640305971171886E+25
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15

	-0.255909743626445E+26	-0.256122388468755E+26
0.1050000E-01	-0.870744081646472E+25 -0.870744081646472E+25 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.348297632658589E+26	-0.871595975346226E+25 -0.871595975346226E+25 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.348638390138490E+26
0.1200000E-01	-0.113722148072571E+26 -0.113722148072571E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.454888592290285E+26	-0.113847874162649E+26 -0.113847874162649E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.455391588884315E+26
0.1350000E-01	-0.143918868602051E+26 -0.143918868602051E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.575675474408206E+26	-0.144098090249943E+26 -0.144098090249943E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.576392360999770E+26
0.1500000E-01	-0.177666206901624E+26 -0.177666206901624E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.710664827606497E+26	-0.177913047395760E+26 -0.177913047395760E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.711652189583042E+26
0.1650000E-01	-0.214960623502270E+26 -0.214960623502270E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.859842494009081E+26	-0.215288329910740E+26 -0.215288329910740E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.861153319642959E+26
0.1800000E-01	-0.255802752510817E+26 -0.255802752510817E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.102321101004327E+27	-0.256230809207048E+26 -0.256230809207048E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.102492323682819E+27
0.1950000E-01	-0.300192098171018E+26 -0.300192098171018E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.120076839268407E+27	-0.300735262550269E+26 -0.300735262550269E+26 0.999999897748375E-15 0.999999897748375E-15 -0.120294105020108E+27
0.2100000E-01	-0.348127346152358E+26 -0.348127346152358E+26	-0.348806555269152E+26 -0.348806555269152E+26

0.2250000E-01	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	-0.139250938460943E+27	-0.139522622107661E+27
	-0.399609741610062E+26	-0.400440536846281E+26
	-0.399609741610062E+26	-0.400440536846281E+26
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
0.2400000E-01	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	-0.159843896644025E+27	-0.160176214738513E+27
	-0.454633427702886E+26	-0.455646430653693E+26
	-0.454633427702886E+26	-0.455646430653693E+26
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
0.2550000E-01	-0.181853371081154E+27	-0.182258572261477E+27
	-0.513206682407233E+26	-0.514419371362638E+26
	-0.513206682407233E+26	-0.514419371362638E+26
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	0.99999897748375E-15	0.99999897748375E-15
	-0.205282672962893E+27	-0.205767748545055E+27

Tableau 4. Valeurs des fréquences de la perturbation (0.001).

$Re\alpha$	Convergent	Divergent
0.000000E+00	0.649675435214351E-15 0.649675435214351E-15 -0.649675435214351E-15 -0.649675329335232E-15 -0.100397455692291E+01	0.649675435214351E-15 0.649675435214351E-15 -0.649675435214351E-15 -0.649675329335232E-15 -0.100397455692291E+01
0.150000E-01	-0.370409164800000E+10 -0.370409164800000E+10 -0.497783142400000E+10 -0.181855261325836E+00 -0.124245017600000E+10	0.370666700800000E+10 0.370666700800000E+10 0.370666854400000E+10 0.370666854400000E+10 -0.285257577896118E+00
0.300000E-01	-0.740564428800000E+10 -0.740564428800000E+10 -0.203519836160000E+11 -0.301783889532089E+00 -0.245152480000000E+09	0.741589145600000E+10 0.741589145600000E+10 0.741589248000000E+10 0.741589248000000E+10 -0.282181590795517E+00
0.450000E-01	-0.111046379520000E+11 -0.111046379520000E+11 -0.260360704000000E+11 -0.212199568748474E+00 -0.158760570000000E+08	0.111276707840000E+11 0.111276707840000E+11 0.111276677120000E+11 0.111276677120000E+11 -0.284981578588486E+00
0.600000E-01	-0.148010946560000E+11 -0.148010946560000E+11 -0.686597283840000E+11 -0.33726638555267E+00 -0.181233520640000E+11	0.148420044800000E+11 0.148420044800000E+11 0.148420024320000E+11 0.148420024320000E+11 -0.275325894355774E+00
0.750000E-01	-0.184949923840000E+11 -0.184949923840000E+11 -0.275940474880000E+11 -0.216557368636131E+00 -0.386212454400000E+11	0.185589002240000E+11 0.185589002240000E+11 0.185589002240000E+11 0.185589002240000E+11 -0.272350549697876E+00
0.900000E-01	-0.221864243200000E+11 -0.221864243200000E+11	0.222783508480000E+11 0.222783508480000E+11

	-0.562462310400000E+11	0.222783549440000E+11
	-0.309158056974411E+00	0.222783549440000E+11
	-0.249351782400000E+11	-0.281140297651291E+00
0.1050000E+00	-0.258751344640000E+11	0.260003819520000E+11
	-0.258751344640000E+11	0.260003819520000E+11
	-0.139171659776000E+12	0.260003778560000E+11
	-0.243229925632477E+00	0.260003778560000E+11
	-0.360122245120000E+11	-0.282002925872803E+00
0.1200000E+00	-0.295614177280000E+11	0.297249607680000E+11
	-0.295614177280000E+11	0.297249607680000E+11
	-0.305743687680000E+11	0.297249648640000E+11
	-0.307461768388748E+00	0.297249648640000E+11
	-0.152532633600000E+11	-0.265409022569656E+00
0.1350000E+00	-0.332451102720000E+11	0.334521077760000E+11
	-0.332451102720000E+11	0.334521077760000E+11
	-0.664248844288000E+12	0.334521077760000E+11
	-0.310547977685928E+00	0.334521077760000E+11
	-0.387540746240000E+11	-0.293400526046753E+00
0.1500000E+00	-0.369262878720000E+11	0.371818373120000E+11
	-0.369262878720000E+11	0.371818373120000E+11
	-0.920103157760000E+12	0.371818414080000E+11
	-0.149502143263817E+00	0.371818414080000E+11
	-0.431710412800000E+11	-0.303976118564606E+00
0.1650000E+00	-0.406050078720000E+11	0.409141125120000E+11
	-0.406050078720000E+11	0.409141125120000E+11
	-0.219141373952000E+12	0.409141125120000E+11
	-0.343073010444641E+00	0.409141125120000E+11
	-0.564880834560000E+11	-0.280120104551315E+00

Tableau 5. Valeurs des fréquences de la perturbation (0.00124).

$Re\alpha$	Convergent	Divergent
0.000000E+00	0.649675435214351E-15 0.649675435214351E-15 -0.649675435214351E-15 -0.649675329335232E-15 -0.100492966175079E+01	0.649675435214351E-15 0.649675435214351E-15 -0.649675435214351E-15 -0.649675329335232E-15 -0.100492966175079E+01
0.186000E-01	-0.193695065600000E+10 -0.193695065600000E+10 -0.951734988800000E+10 -0.294736027717590E+00 -0.291939379200000E+10	0.193861478400000E+10 0.193861478400000E+10 0.193861401600000E+10 0.193861401600000E+10 -0.285524874925613E+00
0.372000E-01	-0.387229158400000E+10 -0.387229158400000E+10 -0.443724349440000E+11 -0.353185653686523E+00 -0.447598745600000E+10	0.387888563200000E+10 0.387888563200000E+10 0.387888358400000E+10 0.387888358400000E+10 -0.286486506462097E+00
0.558000E-01	-0.580595660800000E+10 -0.580595660800000E+10 -0.202164262400000E+10 -0.531865300000000E+07 -0.122239868928000E+12	0.582081280000000E+10 0.582081280000000E+10 0.582081331200000E+10 0.582081331200000E+10 -0.276478976011276E+00
0.744000E-01	-0.773791232000000E+10 -0.773791232000000E+10 -0.428237578240000E+11 -0.218456223607063E+00 -0.107276216320000E+11	0.776439040000000E+10 0.776439040000000E+10 0.776439091200000E+10 0.776439091200000E+10 -0.276695162057877E+00
0.930000E-01	-0.966833971200000E+10 -0.966833971200000E+10 -0.246913075200000E+10 -0.334161520004272E+00 -0.574133125120000E+11	0.970962944000000E+10 0.970962944000000E+10 0.970963046400000E+10 0.970963046400000E+10 -0.280854910612106E+00
0.111600E+00	-0.115970385920000E+11 -0.115970385920000E+11 -0.373792870400000E+10 -0.251475960016251E+00 -0.627413893120000E+11	0.116565176320000E+11 0.116565176320000E+11 0.116565155840000E+11 0.116565155840000E+11 -0.278705447912216E+00

0.1302000E+00	-0.135241041920000E+11 -0.135241041920000E+11 -0.312556871680000E+11 -0.613554626464844E+03 -0.425259000000000E+08	0.136050810880000E+11 0.136050810880000E+11 0.136050800640000E+11 0.136050800640000E+11 -0.273856729269028E+00
0.1488000E+00	-0.154494464000000E+11 -0.154494464000000E+11 -0.785540218880000E+11 -0.215625479817390E+00 -0.176048189440000E+11	0.155552952320000E+11 0.155552952320000E+11 0.155552901120000E+11 0.155552901120000E+11 -0.304298043251038E+00
0.1674000E+00	-0.173733007360000E+11 -0.173733007360000E+11 -0.677713346560000E+11 -0.259946495294571E+00 -0.253633843200000E+11	0.175071641600000E+11 0.175071641600000E+11 0.175071641600000E+11 0.175071641600000E+11 -0.275189131498337E+00
0.1860000E+00	-0.192953364480000E+11 -0.192953364480000E+11 -0.448507084800000E+10 -0.283834743499756E+02 -0.173807636480000E+11	0.194606858240000E+11 0.194606858240000E+11 0.194606878720000E+11 0.194606878720000E+11 -0.279915213584900E+00
0.2046000E+00	-0.212158382080000E+11 -0.212158382080000E+11 -0.205807786393600E+13 -0.785323104858398E+02 -0.112249955942400E+14	0.214159093760000E+11 0.214159093760000E+11 0.214159093760000E+11 0.214159093760000E+11 -0.289821088314056E+00

Tableau 6. Valeurs des fréquences de la perturbation (0.01).

$Re\alpha$	Convergent	Divergent
0.000000E+00	0.649675435214351E-15 0.649675435214351E-15 -0.649675435214351E-15 -0.649675329335232E-15 -0.104010033607483E+01	0.649675435214351E-15 0.649675435214351E-15 -0.649675435214351E-15 -0.649675329335232E-15 -0.104010033607483E+01
-0.150000E+00	-0.329016150000000E+07 -0.329016150000000E+07 -0.239261750000000E+07 -0.240401253104210E+00 -0.228286250000000E+07	0.331133250000000E+07 0.331133250000000E+07 0.331143225000000E+07 0.331143225000000E+07 -0.240863010287285E+00
-0.300000E+00	-0.656012500000000E+07 -0.656012500000000E+07 -0.415754050000000E+07 -0.239977657794952E+00 -0.239065800000000E+08	0.664345050000000E+07 0.664345050000000E+07 0.664330650000000E+07 0.664330650000000E+07 -0.240881919860840E+00
-0.450000E+00	-0.980962100000000E+07 -0.980962100000000E+07 -0.331726048000000E+09 -0.253174841403961E+00 -0.218210483200000E+10	0.999608500000000E+07 0.999608500000000E+07 0.999591000000000E+07 0.999591000000000E+07 -0.241118222475052E+00
-0.600000E+00	-0.130411590000000E+08 -0.130411590000000E+08 -0.669113600000000E+09 -0.231308683753014E+00 -0.159858124800000E+10	0.133693640000000E+08 0.133693640000000E+08 0.133691610000000E+08 0.133691610000000E+08 -0.240763828158379E+00
0.750000E+00	-0.162472980000000E+08 -0.162472980000000E+08 -0.166337180000000E+08 -0.234620675444603E+00 -0.420512080000000E+08	0.167632640000000E+08 0.167632640000000E+08 0.167630340000000E+08 0.167630340000000E+08 -0.240610167384148E+00
0.900000E+00	-0.194386060000000E+08 -0.194386060000000E+08 -0.196141460000000E+08 -0.242545887827873E+00 -0.104556770000000E+08	0.201777840000000E+08 0.201777840000000E+08 0.201775320000000E+08 0.201775320000000E+08 -0.240728437900543E+00

0.1050000E+01	-0.226035540000000E+08 -0.226035540000000E+08 -0.183482560000000E+08 -0.243980869650841E+00 -0.146906290000000E+08	0.236129140000000E+08 0.236129140000000E+08 0.236126360000000E+08 0.236126360000000E+08 -0.240677937865257E+00
0.1200000E+01	-0.257512700000000E+08 -0.257512700000000E+08 -0.134517008000000E+09 -0.241426959633827E+00 -0.349947480000000E+08	0.270683260000000E+08 0.270683260000000E+08 0.270686220000000E+08 0.270686220000000E+08 -0.241084516048431E+00
0.1350000E+01	-0.288788060000000E+08 -0.288788060000000E+08 -0.153497344000000E+09 -0.239005178213120E+00 -0.391556840000000E+08	0.305448360000000E+08 0.305448360000000E+08 0.305445240000000E+08 0.305445240000000E+08 -0.240268528461456E+00
0.1500000E+01	-0.319901620000000E+08 -0.319901620000000E+08 -0.171802976000000E+09 -0.246459707617760E+00 -0.433028760000000E+08	0.340415080000000E+08 0.340415080000000E+08 0.340411800000000E+08 0.340411800000000E+08 -0.239970549941063E+00
0.1650000E+01	-0.350778480000000E+08 -0.350778480000000E+08 -0.458160040000000E+08 -0.238921582698822E+00 -0.126412590000000E+08	0.375586280000000E+08 0.375586280000000E+08 0.375582920000000E+08 0.375582920000000E+08 -0.239998474717140E+00

Cas du convergent

Nos résultats indiquent d'une part que l'écoulement symétrique convergent est partout stable pour l'angle α donné et pour tout nombre de Reynolds Re .

Aux très grands nombres de Reynolds ($Re \gg 1$), l'écoulement de Jeffery-Hamel correspondrait à un écoulement non visqueux potentiel à vitesse radiale $V_r(r)$ indépendante de l'angle θ et de grandeur décroissante en raison inverse du rayon r . Ainsi pour les grands nombres de Reynolds l'écoulement convergent diffère en réalité, très peu de l'écoulement potentiel d'un fluide parfait. L'influence de la viscosité ne se manifeste que dans une couche très fine au voisinage des parois (couche limite) où le gradient de vitesse est très grand, étant donné que la vitesse de l'écoulement décroît brusquement à partir de la valeur correspondant à l'écoulement potentiel pour s'annuler à la paroi.

Pour le convergent, les résultats obtenus sont réels.

Cas du divergent

Nos résultats indiquent qu'une faible divergence, $0.0001 \leq \alpha \leq 0.01$, un écoulement divergent symétrique stable n'est quasiment pas possible ; c'est-à-dire que dans le cas du divergent l'écoulement de Jeffery-Hamel est partout instable excepté pour l'angle $\alpha = 0.0001$, l'écoulement divergent est stable pour $0 \leq Re\alpha \leq 0.0255$ c'est-à-dire pour $0 \leq Re \leq 255$.

D'après Banks et al [1, 36], l'écoulement de Jeffery-Hamel de base est instable lorsque $Re\alpha > (Re\alpha)_c \sim 4,712$.

$(Re\alpha)_c$ étant la valeur de $Re\alpha$ correspondant à la valeur critique du nombre de Reynolds Re , pour l'angle α donné, pour lequel l'écoulement n'est pas un écoulement de Jeffery-Hamel ou ce qui revient au même l'écoulement de Jeffery-Hamel est instable.

IV.5. conclusion

Nous observons que les résultats que nous trouvons pour l'écoulement faiblement divergent ne diffèrent approximativement de ceux trouvés par les travaux d'autres auteurs que par de très faibles intervalles [36].

Nos résultats indiquent qu'une petite divergence a une forte influence de déstabilisation, et qu'une petite convergence a une forte influence de stabilisation pour l'écoulement plan parallèle de Poiseuille.

Conclusion générale

A partir des équations de continuité et de Navier-Stokes, nous utilisons la méthode de tir pour le traitement des conditions aux limites et la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre quatre pour décrire de la meilleure manière possible l'écoulement de Jeffery-Hamel. Nos résultats indiquent que l'écoulement de Jeffery-Hamel est partout symétrique convergent pour tout angle α donné à diverses valeurs du nombre de Reynolds Re , et qu'il n'est symétrique divergent à un angle α donné que pour $Re\alpha < (Re\alpha)_{max}$, $(\alpha, (Re\alpha)_{max})$ étant le point de retour de l'écoulement. L'écoulement de Jeffery-Hamel n'existe pas pour $Re\alpha > (Re\alpha)_{max}$, ce peut être utile de remarquer que lorsque $\alpha \rightarrow 0 : (Re\alpha)_{max} \sim 5,46$ (Fraenkel 1962) [10]. Nos résultats indiquent, par conséquent, la même tendance.

La perturbation élémentaire instationnaire, $\vec{u}(r, \theta, t)$, superposée à la solution exacte des équations de Navier-Stokes de l'écoulement de Jeffery-Hamel est régie par un système d'équations aux dérivées partielles aux conditions aux limites. Après utilisation de la fonction de courant $\psi(r, \theta, t)$ pour réduire les variables, et après passage aux grandeurs adimensionnelles $\psi^*(r^*, \theta^*, t^*)$, l'équation de la perturbation prend la forme d'une équation différentielle normale d'ordre quatre aux conditions aux limites. Pour étudier la stabilité dans le temps de l'écoulement de Jeffery-Hamel, la solution générale de l'équation différentielle de la perturbation est mise, après séparation des variables du temps et de l'espace, sous la forme d'une somme de solutions particulières du temps par l'intermédiaire d'une fonction de la forme e^{st} . Ainsi la stabilité linéaire temporelle exige que toutes les 'fréquences' s qui sont en général complexes aient leurs parties réelles négatives, sinon cet écoulement est instable. A titre instructif nous avons utilisé la méthode du calcul des variations, examiné le cas $Re = 0$ et élargi les résultats obtenus par Banks et al. [1]. Nous avons effectué le changement de variable $\hat{r} = r^*(-s)^{1/2}$, et en écrivant la solution de l'équation différentielle adimensionnelle d'ordre quatre à variables séparables en mode propre sous la forme $\chi(\hat{r}, \theta^*) = \sum_i \hat{r}^{(i+\lambda)} \Phi_i(\theta^*)$, la perturbation est régie par une équation différentielle d'ordre quatre à valeur propre aux conditions aux limites. Pour le traitement numérique de la stabilité de l'écoulement de Jeffery-Hamel, nous avons introduit une légère simplification à l'équation de la perturbation pour l'écrire sous forme d'une équation différentielle du deuxième ordre à valeur propre aux conditions aux limites. Nous avons choisi, pour la perturbation, un modèle qui consiste à choisir un point fixe $M(\theta_i, r_i)$ à l'intérieur de l'écoulement entre les parois planes rigides inclinées et examiné l'évolution dans le temps de cette perturbation. Nous avons choisi le point M tel que $\theta_i = -\beta$, $r_i^* = 1$ et les composantes u_r et u_θ en M telles que $u_r = u_\theta$. Par l'emploi de ce modèle, la perturbation est, en définitive, régie par un polynôme $P_N(x)$ de degré N à coefficients réels. Nous avons enfin utilisé la méthode de Bairstow avec test optimal pour obtenir une meilleure solution.

Nos résultats suggèrent, par comparaison avec ceux obtenus par les travaux de recherches d'autres auteurs [1, 36], que la stabilité linéaire dans le temps de l'écoulement symétrique de base dans un coin tel l'écoulement de Jeffery-Hamel est comme suit.

Dans le cas du convergent l'écoulement de Jeffery-Hamel est partout stable. Alors que dans le cas du divergent, l'écoulement de base n'est pas un écoulement de Jeffery-Hamel, il

est partout instable, et que l'approximation des écoulements entre des parois planes inclinées de faible courbure n'est pas légitime excepté pour l'angle $\alpha = 0.0001$, l'écoulement divergent est stable pour $0 \leq Re\alpha \leq 0.0255$ c'est-à-dire pour $0 \leq Re \leq 255$.

Le résultat dominant obtenu par cette contribution est qu'un faible non-parallélisme des parois rigides limites de l'écoulement de Jeffery-Hamel a une influence remarquablement très forte de stabilisation, cas d'une faible convergence, ou de déstabilisation, cas d'une faible divergence, pour l'écoulement.

Le problème de la stabilité temporelle est difficile. Pour une extension meilleure de nos résultats nous suggérons que le calcul des valeurs propres s du mode propre normal réductible à un problème à valeur propre aux dérivées partielles avec les variables indépendantes (r, θ) , soit fait :

- Avec implications subtiles des conditions aux limites à $r = 0, \infty$ (loin à l'amont et à l'aval du courant dans le canal)
- Par des méthodes asymptotiques pour les écoulements presque parallèles ($\alpha \rightarrow 0$)
- Par des simulations numériques directes dans le domaine de l'écoulement dans le

$$\text{canal} \begin{cases} r_1 \leq r \leq r_2 \\ -\alpha \leq \theta \leq \alpha \end{cases}$$

Cela a été suggéré par la théorie quasi-parallèle d'Eagles (1966) [40], conjecturé pour des raisons analytiques par Banks et al. (1988) [1] pour les écoulements de Jeffery-Hamel eux-mêmes, et démontré numériquement par Hamadiche et al. (1994) [42] pour les écoulements de Jeffery-Hamel le long d'un secteur perforé. Le problème de la stabilité linéaire des modes normaux de la forme

$$\psi(r, \theta, t) = Re[e^{st} \phi(r, \theta)]$$

est réductible à un problème à valeur propre aux dérivées partielles et à variables indépendantes (r, θ) [42]. Ce problème de la stabilité temporelle est difficile avec des implications subtiles avec des conditions aux limites à $r = 0, \infty$ (Banks et al. 1988) [1] et un faible progrès seulement à été fait pour trouver les valeurs propres s par les méthodes asymptotiques pour des écoulements presque parallèles (Allmen et Eagles 1984) [2] et par simulation directe dans le domaine $r_1 \leq r \leq r_2, -\alpha \leq \theta \leq +\alpha$ (Hamadiche 1994) [42]. Suivant l'esprit de la méthode de Tam (1996) [41] Drazin (1996) [36] cherche à résoudre le problème de la stabilité spatiale et asymptotiquement pour r grand en prenant des modes de la forme

$$\begin{cases} \psi'(r, \theta, t) = Re\{exp[ik(\alpha^{-1} \ln r - ct/\alpha^2 r^2)]f(\theta^*)\} \\ \text{où } \theta^* = \theta/\alpha \end{cases}$$

Cependant Dean (1934) [38] avait trouvé qu'il y a aussi un problème à valeur propre aux dérivées partielles linéaires séparables pour des modes spatiaux permanents en prenant un mode de la forme

$$\psi'(r, \theta) = \text{Re} \left(r^\lambda \phi(\theta) \right)$$

Notons que ce dernier mode est équivalent au mode de Drazin avec $c = 0$ et $\lambda = ik/\alpha$.

D'après Dean, Drazin et autres, il est suggéré par une extension de la théorie d'Orr-Sommerfeld, que les nombres de Reynolds critiques Re_c de l'écoulement plan de Poiseuille pour la stabilité des perturbations infinitésimales peuvent être réduits de 3848 ($\alpha = 0$) à 1000 par inclinaison des parois planes rigides limites d'un angle aussi petit que 0.001 rad , un angle pas plus grand que la tolérance lorsque le canal est construit dans un atelier de fabrication mécanique (d'usinage).

Réciproquement, si les parois sont inclinées d'un angle de 0.0001 rad , les nombres de Reynolds critiques Re_c de l'écoulement convergent augmentent à presque 7000 .

Notons que le mode propre classique d'Orr-Sommerfeld à la limite lorsque $\alpha \rightarrow 0$ est de la forme

$$\psi'(r, \theta, t) = \text{Re} \{ e^{ik(x-ct)} f(\theta^*) \}, \quad \text{où} \quad \theta^* = \theta/\alpha, \quad x = (r - r_0)/\alpha r_0$$

Nos résultats, comme ceux de Drazin, Dean, et autres en mode propre spatial, qui ont les mêmes tendances générales, montrent qu'une faible convergence a une forte influence de stabilisation, et qu'une faible divergence a une forte influence de déstabilisation pour les écoulements plans parallèles.

Le modèle que nous avons développé constitue une première étape pour l'estimation approximative du non-parallélisme des parois planes qui est une difficulté importante de la stabilité hydrodynamique.

Bibliographie

- [1] BANKS, W. H. H., DRAZIN, P. G. & ZATURSKA, M. B.: Perturbations of Jeffery-Hamel flow. *J. Fluid Mech.* (1988), vol. 186, pp. 559-581.
- [2] ALLMEN, M. J. & EAGLES, P. M., 1984 Stability of divergent channel flows: a numerical approach. *Proc. R. soc. Lond.* A392, 395-372.
- [3] BRADY, J. F., 1984 Fluid development in a porous channel and tube. *Phys. Fluids* 27, 1061-1067.
- [4] BRAMLEY, J. S. & DENNIS, S. C. R. 1982 The calculation of eigenvalues for the stationary perturbation of Poiseuille flow. *J. Comp. Phys.* 47, 179-198.
- [5] BUITRAGO, S. E. 1983 Detailed analysis of the higher Jeffery-Hamel solutions. M. Phil. Thesis, University of Sussex.
- [6] CHEDRON, W., DURST, F. & WHITELAW, J. H. 1978 Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions. *J. Fluid Mech.* 84, 13-31.
- [7] CLIFFE, K. A. & GRENNFIELD, A. C. 1982 Some comments on laminar flow in symmetric two-dimensional channels. Rep. TP 939. AERE. Harwell.
- [8] DEAN, W. R. & MONTAGNON, P. E. 1949 On the steady motion of viscous liquid in a corner, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 45, 389-394.
- [9] DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- [10] FRAENKEL, L. E. 1962 Laminar Flow in symmetrical channels with slightly curved walls. I. On the Jeffery-Hamel solutions for flow between plane walls. *Proc. R. soc. Lond.* A267, 119-138.
- [11] FRAENKEL, L. E. 1963 Laminar Flow in symmetrical channels with slightly curved walls. II. An asymptotic series for the stream function, *Proc. R. soc. Lond.* A272, 406-428.
- [12] FRAENKEL, L. E. 1973 On a theory of Laminar Flow in channels of a certain class *Proc. Camb. Phil.* 73, 361-390.
- [13] GERGIYOU, G. A. & EAGLES, P. M. 1985 The stability of flows in channels with small wall curvature. *J. Fluid Mech.* 159, 259-287.
- [14] HAMEL, G. 1916 Spiralformige Bewegungen zaher Flussigkeiten. *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung* 25, 34-60.
- [15] JEFFERY, G. B. 1915 The two dimensional steady motion of a viscous fluid. *Phil. Mag.* (6) 29, 455-465.
- [16] LUGT, H. J. & SCHIWIDERSKI, E. W. 1965 Flows around dihedral angles. I. Eigenmotion and analysis. *Proc. R. Soc. Lond.* A285, 382-399.
- [17] MOFFAT, H. K. & DUFFY, B. R. 1980 Local similarity solutions and their limitations. *J. Fluid*

- Mech. 96, 299-313.
- [18] SOBEY, L. J. & DRAZIN, P. G. 1986 Bifurcation of two dimensional channel flows. J. Fluid Mech. 171, 263-287.
- [19] SOBEY, L. J. 1982 Observations of waves during oscillatory channel flow. J. Fluid Mech. 151, 395-426.
- [20] STERNBERG, E. & KOLTER, W. T. 1958 The wedge under a concentrated couple : a paradox in the two dimensional theory of elasticity. Trans. ASME E: J. Appl. Mech. 25, 575-581.
- [21] BAKER, G. R., McGRORY, R. L., VERDON, C. P. & ORSZAG, S. A. : Rayleigh-Taylor instability of fluid layers. J. FLUID Mech (1987), vol. 178, pp 161-175.
- [22] PHILIPPE R. SPALART & KYUNG-SOO YANG: Numerical study of ribbon induced transition in Blasius flow. J. Fluid Mech. (1987), vol. 178, pp. 345-365.
- [23] NISHIOKA, M. & MORKOVIN, M. V.: Boundary-Layer receptivity to unsteady pressure gradients: experiments and overview J. Fluid Mech.(1986), vol. 171, pp. 219-261.
- [24] SHUNICHI WAKITANI: Non-parallel-flow stability of a two-dimensional buoyant plume. J. Fluid Mech. (1985), vol. 159, pp. 241-258.
- [25] SYDNEY GLODSTEIN: On backward boundary layers and flow in converging passages. J. Fluid Mech. (1965), vol. 21, pp. 33-45.
- [26] THORWALD HERBERT: Viscous fluid motion in a spinning and nutating cylinder. J. Fluid Mech. (1986), vol. 167, pp. 181-198.
- [27] WAZZAN, A. R., TACHAVI, H. & PAFFORD, D.: Spatial viscous instability of the incompressible Falkner-Skan similarity profile at separation.
- [28] FRANCIS SHEID : Analyse Numérique. Série schaum.
- [29] LANDAU, L. & LIFCHITZ : Mécanique des fluides. Editions MIR-MOSCOU-1971.
- [30] MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M.: Statistical, Fluid Mechanics-Mechanics of Turbulence. Volume 1. The wit press.
- [31] NOUGIER, G. P. : Méthodes de calcul numérique. 2^{ème} édition-MASSON.
- [32] SIBONY, M. & MARDON, Cl. J. : Analyse numérique II. Approximations et équations différentielles. HERMANN.
- [33] SEYMOUR LIPSCHUTZ & ARTHUR POE : Programmation Fortran-série SCHAUM.
- [34] SMIRNOV, V. : Cours de mathématiques supérieures. Tome 4 (1^{ère} partie). Editions MIR-MOSCOU.
- [35] WHITE & FRANCK, M. (1974): Viscous fluid flow. Mc Graw Hill, New york.
- [36] McALPINE, A. & DRAZIN, P. G. 1998 On the spatio-temporal development of small perturbations of Jeffery-Hamel flows. J. Fluid Dynamics Research, vol.22, pp. 123-138.
- [37] BATCHELOR, G.K., 1967. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge.

- [38] DEAN, W.R., 1934. Note on the divergent flow of fluid. *Philos. Mag.* 18 (7), 759-777.
- [39] DRAZIN, P.G., 1995. Stability of flow in a diverging channel. In: G.P. Galdi (Ed.), *Stability and Wave Propagation in Fluids and Solids*, Springer, Wien, pp. 39-65.
- [40] EAGLES, P.M., 1966. The stability of a family of Jeffery-Hamel solutions for divergent channel flow. *J. Fluid Mech.* 24,191-207.
- [41] TAM, K.K., 1996. Linear stability of the non-parallel Bickley jet. *Can. Appl. Math. Quart.* 3, 99-110.
- [42] HAMADICHE, M., Scott, J., Jeandel, D., 1994. Temporal stability of Jeffery-Hamel flow. *J. Fluid Mech.* 268, 71-88.