

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR - ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté: Sciences de l'Ingénieur
Département: Electronique

Année : 2008

MEMOIRE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER
en Automatique

Intitulé

Commande Robuste par la Synthèse LQG/LTR

Option : Commande Avancée

Par : M. LARABI Mohand Saïd

DIRECTEUR DE THESE: Pr. YAHMEDI Saïd

DEVANT Le JURY

PRESIDENT: Dr. BENSACKER Bachir, Professeur en Automatique

RAPPORTEUR: Dr. YAHMEDI Saïd, Professeur en Automatique

EXAMINATEURS: Dr. KHADIR Med Tarek, Maitre de Conférences en Automatique

Dr. BENACER Layachi, Maitre de Conférences en Electronique

Dr. BOUCHAMI Tidjani, Maitre de Conférences en Génie Chimique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR - ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté: Sciences de l'Ingénieur
Département: Electronique

Année : 2008

MEMOIRE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER
en Automatique

Intitulé

Commande Robuste par la Synthèse LQG/LTR

Option : Commande Avancée

Par : M. LARABI Mohand Saïd

DIRECTEUR DE THESE: Pr. YAHMEDI Saïd

DEVANT Le JURY

PRESIDENT: Dr. BENSACKER Bachir, Professeur en Automatique

RAPPORTEUR: Dr. YAHMEDI Saïd, Professeur en Automatique

EXAMINATEURS: Dr. KHADIR Med Tarek, Maitre de Conférences en Automatique

Dr. BENACER Layachi, Maitre de Conférences en Electronique

Dr. BOUCHAMI Tidjani, Maitre de Conférences en Génie Chimique

Remerciements

Avant tout, louange à Dieu le tout puissant de m'avoir aidé et permis d'achever ce modeste travail.

Je ne saurais trop remercier mon encadreur, monsieur S. YAHMEDI pour tout le temps et l'intérêt qu'il m'a consacré. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie également les membres du jury, messieurs B. Bensaker Professeur en Automatique, S. Yahmedi Professeur en Automatique, M. T. Khadir Maître de Conférences en Automatique, L. Benacer Maître de Conférences en Electronique, T. Bouchami Maître de Conférences en Génie Chimique, d'avoir bien voulu juger mon travail.

Je n'oublierai pas de remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents véritables soutiens de mon succès, puisse Dieu les protéger.

Mon très cher frère Abdelhak.

Mon très cher frère Mokrane.

Mon très cher frère Idriss.

Ma très chère sœur Meriem.

Ma très chère grand mère Zohra.

Mes très chères tantes.

Mes très chers oncles.

Toute la famille sans exception, tous mes amis (Redouane, Hamza, Mohamed, Rami, Hichem) toutes les personnes qui me sont chères, et toutes celles qui m'ont apporté aide et soutien.

Sommaire :

INTRODUCTION GENERALE.....	1
-----------------------------------	----------

CHAPITRE I : Notions de la Commande Robuste

1.1. Introduction.....	3
1.2. Normes matricielles.....	3
• Valeurs singulières.....	3
• Nombre de conditionnement d'une matrice.....	3
1.3. Analyse des systèmes bouclés.....	3
1.3.1. Représentation des incertitudes.....	4
1.3.2. Matrices de sensibilité.....	6
• Matrices de sensibilité en sortie.....	6
• Matrices de sensibilité en entrée.....	6
1.4. Détermination de la spécification sur la stabilité et sur les performances.....	7
• Spécification sur la stabilité.....	7
• Spécification sur les performances.....	7
1.5. Conditions de robustesse sur la stabilité et les performances.....	8
1.6. Conclusion.....	8

CHAPITRE II : Synthèse Linéaire Quadratique Gaussienne LQG/LTR

2.1. Introduction.....	9
2.2. La Commande Linéaire Quadratique.....	9
2.2.1. La Commande LQ à horizon fini.....	9
2.2.2. La Commande LQ à horizon infini.....	11
2.2.3. Résolution de l'équation de Riccati.....	11
2.2.3.1. Propriété de la matrice Hamiltonienne.....	11
Démonstration.....	11
2.2.3.2. Résolution par les sous espaces invariants.....	12
2.2.4. Propriétés de robustesse de la méthode LQ.....	12
- Schéma de Principe.....	12

2.3. La Commande LQG.....	14
- Calcul le gain optimal du Filtre de KALMAN.....	15
2.4. Synthèse LQG/LTR (Loop Transfert Recovery).....	16
2.4.1. Choix des matrices de pondération.....	17
• Le concept de « loop-shaping » utilisé pour la commande LQ.....	17
a. Condition de robustesse sur les performances en BF.....	17
b. Condition de robustesse sur la stabilité en HF.....	17
2.4.2. Recouvrement asymptotique.....	18
Théorème1.....	18
2.5. Synthèse LQG/LTR Dual.....	18
2.5.1. Choix des matrices des paramètres Γ et ρ	19
a. Condition de robustesse sur les performances en BF.....	19
b. Condition de robustesse sur la stabilité en HF.....	19
2.5.2. Recouvrement asymptotique.....	19
Théorème2.....	19
2.6. Conclusion.....	20

**CHAPITRE III : Étude en simulation de la technique LQG\LTR
appliqué à la machine asynchrone**

3.1. Introduction.....	21
3.2. Présentation de la Machine Asynchrone.....	21
• Le modèle mathématique du processus.....	21
3.3. Fonctionnement en régime nominal du Processus.....	21
3.3.1. La réponse temporelle.....	21
3.3.2. Représentation des valeurs singulières du processus.....	22
3.4. Choix des spécifications sur la stabilité et les performances.....	23
• Condition de robustesse sur la stabilité et les performances.....	24
3.5. Application de la synthèse LQG\LTR à la Machine asynchrone.....	25
3.5.1. Synthèse LQG.....	26
• Réglage des matrices de variance W et V (Réglage du Filtre de KALMAN).....	26
• Réglage des matrices de pondération Q et R pour avoir un bon retour d'état.....	28
3.5.2. Recouvrement du transfert de la boucle, LTR.....	28

Première étape.....	28
Deuxième étape.....	29
3.6. Vérification des conditions de robustesse sur la stabilité et les performances.....	29
1. Le cas sans recouvrement $q = 0$ pour le correcteur LQG.....	30
2. cas avec recouvrement total pour le correcteur LQG\LTR.....	30
3.7. Représentations temporelles du régime nominal.....	32
3.7.1. Validation des Commandes.....	32
• Cas sans recouvrement $q = 0$	32
• Cas avec recouvrement total.....	33
3.7.2. La réponse indicielle du processus avec contrôleur.....	34
• Cas sans recouvrement $q = 0$	34
• Cas avec recouvrement total.....	34
3.8. Représentations temporelles du régime perturbé.....	35
3.8.1. Validation des Commandes.....	35
• Cas sans recouvrement $q = 0$	35
• Cas avec recouvrement total.....	36
3.8.2. La réponse indicielle du processus perturbé avec contrôleur.....	37
• Cas sans recouvrement $q = 0$	37
• Cas avec recouvrement total.....	37
3.9. Conclusion.....	38

CHAPITRE IV : Étude en simulation de la technique LQG\LTR appliquée à l'AIRCRAFT

4.1. Introduction.....	39
4.2. Présentation de l'AIRCRAFT.....	39
• Le modèle mathématique du processus.....	39
4.3. Fonctionnement en régime nominal du Processus.....	39
4.3.1 La réponse temporelle.....	39
4.3.2. Représentation des gains principaux du processus.....	40
4.4. Choix des spécifications sur la stabilité et les performances.....	41
• Condition de robustesse sur la stabilité et les performances.....	42
4.5. Application de la synthèse LQG\LTR au processus AIRCRAFT.....	43

4.5.1. Synthèse LQG.....	44
• Réglage des matrices de variance W et V (Réglage du Filtre de KALMAN).....	44
• Réglage des matrices de pondération Q et R pour avoir un bon retour d'état.....	47
4.5.2. Recouvrement du transfert de la boucle, LTR.....	47
Première étape.....	47
Deuxième étape.....	48
4.6. Vérification des conditions de robustesse sur la stabilité et les performances.....	48
1. Le cas sans recouvrement $q = 0$ pour le contrôleur LQG.....	49
2. cas avec recouvrement total pour le correcteur LQG\LTR.....	49
4.7. Représentations temporelles du régime nominal.....	50
4.7.1. Validation des Commandes.....	50
• Cas sans recouvrement $q = 0$	50
• Cas avec recouvrement total.....	51
4.7.2. La réponse indicielle du processus avec contrôleur.....	52
• Cas sans recouvrement $q = 0$	52
• Cas du recouvrement total.....	52
4.8. Représentations temporelles du régime perturbé.....	53
4.8.1. Validation des Commandes.....	53
• Cas sans recouvrement $q = 0$	53
• Cas avec recouvrement total.....	54
4.8.2. La réponse indicielle du processus perturbé avec contrôleur.....	55
• Cas sans recouvrement $q = 0$	55
• Cas avec recouvrement total.....	56
4.9. Conclusion.....	56
 CONCLUSION GENERALE.....	 57
 REFERENCES.....	 58
 RESUMES.....	 60

Introduction

générale

INTERODUCTION GENERALE :

De nos jours, la théorie de la commande robuste constitue un domaine d'applications pratiques extrêmement vaste dans le milieu industriel où elle se révèle un outil précieux pour l'analyse des systèmes soumis à des perturbations paramétriques. Ces dernières proviennent essentiellement d'erreurs ou d'approximation de modélisation, de variations de paramètres, ou encore de dynamiques rapides négligées.

La modélisation d'un processus physique consiste à établir des équations mathématiques qui représentent le comportement réel du système, avec une certaine approximation, or cette dernière engendre une représentation imparfaite du système réel. On déduit alors, que le système subit des perturbations paramétriques, qui sont des défauts de conformité entre le processus réel et le modèle.

Et c'est ainsi, que plusieurs techniques de commande robuste ont été développées pour garantir la stabilité et un niveau de performance acceptable pour les systèmes commandés malgré des incertitudes paramétriques agissant sur le modèle. Parmi les techniques de commande robuste les plus répondues, la technique LQG\LTR et H_∞ .

L'avantage essentiel de la commande robuste est de générer une loi de commande qui satisfait les conditions de robustesse de la stabilité et des performances. Plus précisément, étant donné des spécifications fréquentielle sur les incertitudes paramétriques et les performances, la théorie évalue la faisabilité, produit une loi de commande adaptée, et fournit une garantie sur le domaine de validité de cette loi de commande robuste.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à synthétiser des régulateurs robustes par la technique Linéaire Quadratique Gaussienne\recouvrement du transfert de la boucle (LQG\LTR), qui consiste à générer un régulateur de type LQG dont la boucle fermée retrouve asymptotiquement les propriétés de robustesse du Filtre de KALMAN, pour qu'ils nous permettent d'assurer la robustesse de la stabilité et des performances pour les régimes de fonctionnement nominal et perturbé.

L'idée de base de la synthèse LQG\LTR, de DOYLE et STEIN [11] est de synthétiser une commande de type LQG qui « recouvre » asymptotiquement soit les propriétés de robustesse

de la méthode LQ, soit celles du filtre de KALMAN, depuis de nombreux travaux ont été menés sur ce sujet.

Notre choix d'étude a porté sur deux modèles de synthèse multivariable, le premier est une machine asynchrone à deux entrées et deux sorties, et le deuxième AIRCRAFT à trois entrées et trois sorties, et leur description sera étudiée respectivement aux chapitres 3 et 4.

Le présent mémoire comprend quatre chapitres :

Le chapitre I présente une étude théorique sur les Notions de la Commande Robuste.

Le chapitre II présente une étude théorique de la Synthèse Linéaire Quadratique Gaussienne LQG\LTR.

Le chapitre III présente une étude en simulation de la technique LQG\LTR appliquée à la machine asynchrone.

Le chapitre IV présente une étude en simulation de la technique LQG\LTR appliquée à l'AIRCRAFT.

Chapitre I :

Notions de la Commande Robuste

1.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons faire un rappel sur les normes matricielles et sur l'analyse des propriétés d'un système bouclé multivariable. Ainsi, nous nous intéressons aux notions de robustesse, en rappelant les conditions de robustesse qui en découlent, conditions que nous utilisons par la suite pour synthétiser un contrôleur robuste assurant les objectifs de robustesse.

1.2. Normes matricielles :

- **Valeurs singulières (ou gains principaux [3])**

La norme de matrice induite par la norme euclidienne de vecteurs est la plus grande valeur singulière, notée $\overline{\sigma}(A)$, pour A matrice complexe non nécessairement carrée ($A \in C^{n \times m}$).

Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres de (AA^*) et de (A^*A) (A^* désigne la matrice transposée conjuguée de A).

On montre que : [11]

$$\overline{\sigma}(A) = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \equiv \sqrt{\lambda_{\max}[A^*A]}. \quad (1.1)$$

On notera $\underline{\sigma}(A)$ la plus petite valeur singulière :

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{\|x\|=1} \|Ax\| \equiv \sqrt{\lambda_{\min}[A^*A]}. \quad (1.2)$$

- **Nombre de conditionnement d'une matrice**

Dans le cas d'une matrice A (éventuellement complexe), le rapport de sa valeur singulière maximale sur sa valeur singulière minimale est appelé nombre de conditionnement. Ce nombre est un indicateur de la difficulté à inverser cette matrice. C'est-à-dire, qu'une faible modification sur la matrice A donne une matrice inverse très différente. On parle alors de forte sensibilité.

$$cond = \frac{\overline{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)} \quad (1.3)$$

On dit qu'un Système multivariable est mal conditionné si le rapport entre les valeurs singulières maximales et minimales est important

1.3. Analyse des systèmes bouclés [6]:

L'analyse de propriétés d'un système bouclé multivariable utilise les notions principales suivantes :

- La stabilité nominale est la première des propriétés à assurer : la commande, appliquée au modèle de commande du système (appelé modèle nominal), doit évidemment stabiliser celui-ci.
- Les performances nominales sont des propriétés plus exigeantes, qui consistent à garantir que le modèle nominal de commande bouclé possède des propriétés de performances (précision et rapidité de la réponse notamment) satisfaisantes.
- La robustesse en stabilité est obtenue si la commande calculée à partir du modèle nominal du système assure la stabilité en boucle fermée d'un système qui diffère du modèle nominal ; cela revient à vérifier que la stabilité continue à être assurée malgré les incertitudes du modèle. Pour étudier cette propriété, il convient au préalable de définir les incertitudes de modélisation vis-à-vis desquelles on veut garantir la stabilité.

1.3.1. Représentation des incertitudes :

Le modèle de commande d'un système, quelle que soit la façon dont il a été obtenu, n'est qu'une approximation. Il subsiste en effet, toujours un certain nombre d'incertitudes qui sont essentiellement de deux types : les incertitudes paramétriques et les incertitudes de modélisation.

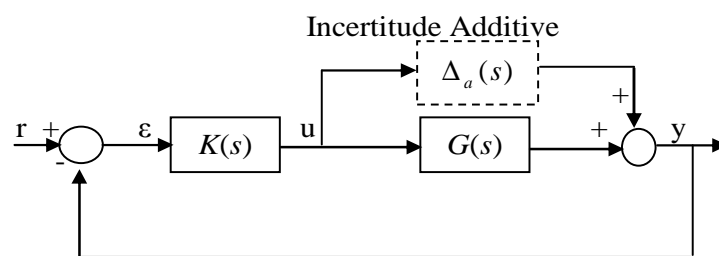


Figure 1.1 configuration générale d'un système bouclé perturbé soumis à des perturbations additives

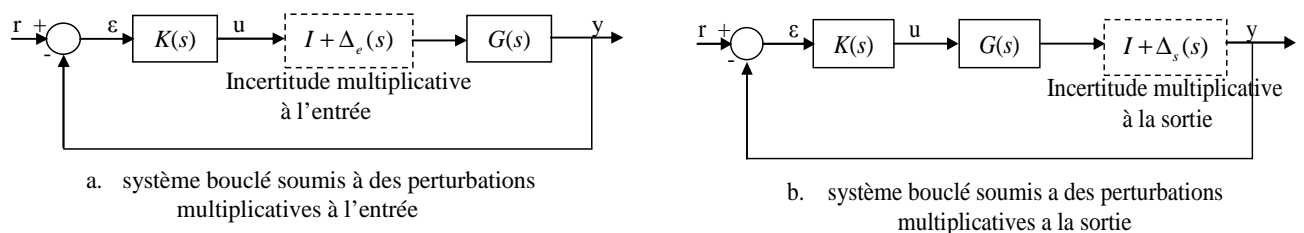


Figure 1.2 configuration générale d'un système bouclé soumis à des perturbations multiplicatives

Avec : u :commande, y : sortie, r : référence, ε : écart,
 $G(s)$: matrice de transfert du système,
 $K(s)$: matrice de transfert du contrôleur,

$\Delta_a(s)$: la matrice de transfert de l'incertitude additive.

$\Delta_s(s)$: la matrice de transfert de l'incertitude multiplicative à la sortie.

$\Delta_e(s)$: la matrice de transfert de l'incertitude multiplicative à l'entrée.

Nous savons que toute mise en équations d'un processus physique nécessite des approximations, d'où résultent par conséquent des erreurs de modèle. La représentation de celles-ci peut être exprimée sous différentes formes, suivant le degré d'information qu'on souhaite voir apparaître : la représentation de ces incertitudes qu'on adopte par la suite doit être sous une forme simple à utiliser sur le plan mathématique.

D'après les schémas bloc présenté par les Figures (1.1 et 1.2) les incertitudes peuvent être modélisées sous forme : [7]

- additive : on peut représenter toutes les incertitudes sous une forme globale, par exemple en considérant que la matrice de transfert du système $G_p(j\omega)$ s'écarte d'une matrice de transfert nominale $G(j\omega)$ d'une quantité $\Delta_a(j\omega)$, ce qui s'écrit : (Figure 1.1)

$$G_p(j\omega) = G(j\omega) + \Delta_a(j\omega) \quad \text{avec} \quad \|\Delta_a(j\omega)\| < \delta_a(\omega) \quad \forall \omega, \quad (1.4)$$

(où $\delta_a(j\omega)$ représente la borne supérieure d'une norme de l'incertitude de modèle)

- multiplicative : il peut s'avérer préférable de relativiser Δ_a par rapport à G , ce qui peut se faire en adoptant l'une des deux formes suivantes, dites *multiplicatives directes* : (Figure 1.2)

$$G_p(j\omega) = (I_p + \Delta_s(j\omega))G(j\omega) \quad \text{avec} \quad \|\Delta_s(j\omega)\| < \delta_s(\omega) \quad \forall \omega, \quad (1.5)$$

$$G_p(j\omega) = G(j\omega)(I_m + \Delta_e(j\omega)) \quad \text{avec} \quad \|\Delta_e(j\omega)\| < \delta_e(\omega) \quad \forall \omega.$$

Dans le premier cas, les incertitudes de modélisation sont ramenées en sortie du système, dans le second cas, elles apparaissent en entrée.

- multiplicative inverse : on peut aussi utiliser les deux formes suivantes, dites *multiplicatives inverses*, comme nous le constatons, complètent utilement les précédentes :

$$G_p(j\omega) = (I_p + \Delta_{is}(j\omega))^{-1}G(j\omega) \quad \text{avec} \quad \|\Delta_{is}(j\omega)\| < \delta_{is}(\omega) \quad \forall \omega, \quad (1.6)$$

$$G_p(j\omega) = G(j\omega)(I_m + \Delta_{ie}(j\omega))^{-1} \quad \text{avec} \quad \|\Delta_{ie}(j\omega)\| < \delta_{ie}(\omega) \quad \forall \omega.$$

Notons que dans les cinq formulations retenues, $\Delta \equiv 0$ correspond à l'absence d'incertitude de modélisation. L'utilisation de ces cinq formes d'incertitudes est générale, car elles

permettent de traiter par le même formalisme les incertitudes de nature diverse, comme par exemple :

- les erreurs de modélisation concernant les actionneurs (dont la dynamique peut être mal connue ou négligée) ; elles sont prises en compte en utilisant l'une des deux formes directe ou inverse en entrée.
- de même les erreurs de modélisation concernant les capteurs ; elles sont prises en compte par l'une des deux formes en sortie.
- l'utilisation d'un modèle simplifié, en vue de faciliter le calcul de la commande, peut se représenter par n'importe laquelle des cinq formes.
- la présence de non-linéarité peut également être prise en compte par l'une des cinq formes.

1.3.2. Matrices de sensibilité [6] :

Pour l'analyse de la robustesse d'un système multivariable, un certain nombre de matrices de transfert caractéristiques du système en boucle fermée sont utiles :

- **Matrices de sensibilité en sortie**

$S_y(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$ est appelée matrice de sensibilité en sortie. Elle représente la matrice de transfert entre la référence r et l'erreur ε ; elle traduit l'influence des perturbations sur la sortie et sur l'erreur ε . Par défaut, le terme « matrice de sensibilité » fera implicitement référence à la matrice de sensibilité en sortie.

$T_y(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)$ est appelée matrice de sensibilité complémentaire en sortie. Elle représente la matrice de transfert entre la référence r et la sortie y ; elle traduit l'influence des bruits de mesure sur la sortie et sur l'erreur ε . Par défaut, le terme « matrice de Transfert en boucle fermée » fera implicitement référence à la matrice de sensibilité complémentaire en sortie.

- **Matrices de sensibilité en entrée**

$S_u(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}$ est appelée matrice de sensibilité en entrée. Elle représente la matrice de transfert entre la perturbation d et l'erreur ε .

$T_u(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}K(s)G(s)$ est appelée matrice de sensibilité complémentaire en entrée. Elle représente la matrice de transfert entre la perturbation d et la commande u .

Les matrices de transfert $T(s)$ et $S(s)$ sont complémentaires :

$$S(s) + T(s) = I \quad (1.7)$$

Cette complémentarité rappelle le dilemme ou le compromis naturel qui existe entre la stabilité et les performances d'un système; donc tout ajustement sur la stabilité engendre un ajustement sur les performances.

1.4. Détermination de la spécification sur la stabilité et sur les performances [17]:

- **Spécification sur la stabilité :**

Dans notre étude nous considérons les perturbations paramétriques comme des incertitudes multiplicatives à la sortie, qui sont l'écart entre le modèle de synthèse simplifié et le modèle du régime de fonctionnement réel.

$$\text{D'après l'équation} \quad G_p(j\omega) = (I_p + \Delta_s(j\omega))G(j\omega) \quad (1.8)$$

On a alors la perturbation paramétrique multiplicative $\Delta_s(j\omega)$ définie par :

$$\Delta_s(j\omega) = [G_p(j\omega) - G(j\omega)]G^{-1}(j\omega) \quad (1.9)$$

D'où la norme de la perturbation multiplicative à la sortie exprimée par les valeurs singulières maximales données par :

$$\bar{\sigma}[\Delta_s(j\omega)] = \bar{\sigma}([G_p(j\omega) - G(j\omega)]G^{-1}(j\omega)) \quad (1.10)$$

La relation (1.10), traduit qu'en basses fréquences on ne peut pas tolérer une incertitude de 100%, mais en hautes fréquences l'incertitude croit et dépasse les 100%. [11]

D'où la spécification sur la stabilité W_t , donnée par la relation suivante [9], [11]:

$$\bar{\sigma}[\Delta_s(j\omega)] \leq \bar{\sigma}[W_t(j\omega)] \quad \forall \omega \quad (1.11)$$

D'après la relation (1.11), la spécification sur la stabilité $W_t(j\omega)$ représente la borne supérieure d'une perturbation paramétrique $\Delta_s(j\omega)$.

- **Spécification sur les performances :**

La spécification sur les performances est de la forme suivante :

$$W_p(s) = \left(\frac{1 + \alpha.s}{\alpha.s} \right) \cdot I_n \quad (1.12)$$

La relation (1.12), est choisie de telle sorte que l'erreur statique soit nulle, le temps de réponse du système en boucle fermée doit être du même ordre de grandeur que celui du processus en boucle ouverte et sa réponse ne doit pas contenir de dépassement important c'est-à-dire douce.

1.5. Conditions de robustesse sur la stabilité et les performances [17]:

Le but de ce paragraphe est de rappeler les conditions de robustesse sur la stabilité et les performances d'un système soumis à des incertitudes de modélisation. Considérons un système bouclé dont la matrice de transfert nominale de boucle ouverte est $G(s)$, soumis à des incertitudes de modélisation de forme multiplicative à la sortie représentées par l'équation (1.8) citées auparavant.

Les conditions de robustesses sur la stabilité et les performances correspondant à la perturbation paramétrique (1.9) sont :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}[S_y(j\omega)]\bar{\sigma}[W_p(j\omega)] &\leq 1 \quad \forall \omega \\ \bar{\sigma}[T_y(j\omega)]\bar{\sigma}[W_t(j\omega)] &\leq 1 \quad \forall \omega\end{aligned}\tag{1.13}$$

La robustesse en performances est obtenue lorsqu'on a un bon suivi de la référence et une bonne rejection des perturbations pour le système nominal. D'après la première condition de (1.13), en cherchant à rendre les valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité se posés au dessous de l'inverse des valeurs singulières maximales de la spécification sur les performances $W_p(j\omega)$. Cet objectif peut être traduit par la condition suivante :

$$\bar{\sigma}[S_y(j\omega)] \leq \frac{1}{\bar{\sigma}[W_p(j\omega)]} \quad \forall \omega\tag{1.14}$$

La robustesse en stabilité est obtenue lorsqu'on a une bonne rejection des bruits de mesure, d'après la deuxième condition de (1.13), on doit chercher à rendre les gains principaux du processus se posés au dessous de l'inverse des valeurs singulières maximales de la perturbation paramétrique $W_t(j\omega)$. Cet objectif peut être traduit par la condition suivante :

$$\bar{\sigma}[T_y(j\omega)] \leq \frac{1}{\bar{\sigma}[W_t(j\omega)]} \quad \forall \omega\tag{1.15}$$

1.6. Conclusion :

A l'issue de ce chapitre on peut conclure que, les notions présentées précédemment permettent l'analyse de la robustesse en performance et en stabilité d'un système de matrice de transfert nominale $G(s)$ soumis a des perturbations de type incertitudes paramétriques ou de modélisation, de déterminer le choix du régulateur $K(s)$ et pour en faciliter aussi sa synthèse.

Chapitre II :

Synthèse Lineaire

Quadratique Gaussienne

LQG/LTR

2.1. Introduction :

Nous allons présenter dans ce chapitre la technique LQG\LTR. C'est une méthode d'optimisation qui consiste à générer un contrôleur robuste de type LQG, par le concept de « loop-shaping », dont la boucle fermée retrouve asymptotiquement les propriétés de robustesse du filtre de KALMAN, soit celles de la commande LQ (par retour d'état) qui constitue la première partie de ce chapitre.

2.2. La Commande Linéaire Quadratique [1], [5], [10], [15]:

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR (linear quadratic regulator) dont Le système est linéaire et la commande est quadratique où La commande optimale est un retour d'état.

2.2.1. La Commande LQ à horizon fini :

Soit le problème de commande optimale du système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.1)$$

avec le critère

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)) dt, \quad (2.2)$$

les matrices Q et R étant symétriques avec $Q \geq 0$ et $R > 0$.

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L(x, u, p, t) = p^T A(t)x + p^T B(t)u + \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u). \quad (2.3)$$

Le principe du maximum donne les conditions suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0, \quad (2.4)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x, \quad (2.5)$$

$$p(t_f) = Sx(t_f). \quad (2.6)$$

De l'équation (2.4), on déduit :

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t). \quad (2.7)$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p(t). \quad (2.8)$$

Les équations (2.5) et (2.8) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé *système hamiltonien* :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Ecrivons $p(t) = P(t)x(t)$, comme nous y incite (2.6), avec comme condition finale $P(t_f) = S$. L'équation (2.5) s'écrit alors

$$\dot{p}(t) = -(A^T(t)P(t) + Q(t))x(t). \quad (2.10)$$

Avec $\dot{p}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t)$ et l'équation d'état (2.1) du système, l'équation (2.10) s'écrit (en omettant la référence au temps afin d'alléger les notations) :

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (2.11)$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.12)$$

avec la condition finale $P(t_f) = S$.

Remarquons que la condition

$$x^T (\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (2.13)$$

s'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt} (x^T P x) + x^T Q x + u^T R u = 0. \quad (2.14)$$

En intégrant cette relation entre τ et t_f , on obtient

$$\frac{1}{2} x_\tau^T P(\tau) x_\tau = J_0(\tau, x_\tau, u) \quad (2.15)$$

où $J_0(\tau, x_\tau, u)$ est le critère évalué à partir $\tau \in [t_0, t_f]$ (au lieu de t_0) et avec la condition initiale $x(\tau) = x_\tau$.

$$J_0(\tau, x_\tau, u) = \frac{1}{2} x_\tau^T (t_f) S x_\tau + \int_\tau^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t) x + u^T R(t) u) dt. \quad (2.16)$$

Le minimum du critère est donc :

$$\tilde{J}(x_0) = J_0(t_0, x_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2} x_0^T P(t_0) x_0. \quad (2.17)$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état $u(t) = -K(t)x(t)$ avec :

$$K = R^{-1} B^T P. \quad (2.18)$$

Néanmoins, n'oublions pas que, dans le cas présent, K varie en fonction du temps, même dans le cas d'un système et d'un critère à temps invariant (c'est-à-dire si les matrices A , B , Q et R ne

dépendent pas du temps). En effet, la matrice $P(t)$ reste dépendant du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

2.2.2. La Commande LQ à horizon infini :

Intéressons nous ici au cas du système LTV précédent où

$$J(x_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)) dt. \quad (2.19)$$

Ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $K(t)$ tel que les valeurs propres de $A - BK$ soient à partie réelle négative). Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable.

Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état constant $u(t) = -K x(t)$ où K est exprimé par l'équation (2.18) et où P vérifie l'équation algébrique de Riccati :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (2.20)$$

NB : on peut trouver l'équation de LYAPUNOV en boucle fermée à partir de l'équation de RICCATI en boucle ouverte (2.20) et du gain optimal (2.18), en rajoutant et en retranchant $PBR^{-1}B^T P$ dans (2.20) en aura :

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T R K = 0 \quad (2.21)$$

2.2.3. Résolution de l'équation de Riccati [6] :

L'équation (2.20) s'écrit aussi :
$$\begin{bmatrix} P & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} = 0.$$

$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$ est appelée la matrice hamiltonienne associée à l'équation de

Riccati.

2.2.3.1. Propriété de la matrice Hamiltonienne :

Les $2n$ valeurs propres de H sont :

- les n valeurs propres stables de la boucle fermée $\det(sI - (A - BK))$,
- les n valeurs propres opposées par rapport à l'axe imaginaire (donc instables).

Démonstration : Effectuons une transformation régulière sur H :

$$\tilde{H} = M^{-1} H M \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P & I_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P & I_n \end{bmatrix},$$

alors :
$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P & -BR^{-1}B^T \\ -Q - A^T P & -A^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P & -BR^{-1}B^T \\ -PA - A^T P - Q - PBR^{-1}B^T P & -A^T + PBR^{-1}B^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A - BK & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BK)^T \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc : $\det(sI_{2n} - \tilde{H}) = \det(sI_{2n} - H) = \det(sI_n - (A - BK)) \det(sI_n + (A - BK)^T)$

2.2.3.2. Résolution par les sous espaces invariants:

La démonstration précédente nous montre que $\begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$ est la matrice des vecteurs (de longueur $2n$) qui engendrent le sous espace invariant associé aux n valeurs propres stables de H ($\det(sI - (A - BK))$). Soit Λ la matrice $n \times n$ (diagonale ou non) des n valeurs propres stables et soit X la matrice des vecteurs propres de H associés à Λ calculés par exemple par une décomposition spectrale ou une décomposition de SCHUR de H :

$$HX = X\Lambda,$$

si l'on partitionne X en deux sous matrices X_1 et X_2 de dimension $n \times n$:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

alors on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} X_1 \Lambda X_1^{-1}$$

et donc : $P = X_2 X_1^{-1}$.

P est unique car il n'existe qu'un seul ensemble de n valeurs propres stables de H .

2.2.4. Propriétés de robustesse de la méthode LQ [5], [12], [13] :

- Schéma de Principe:

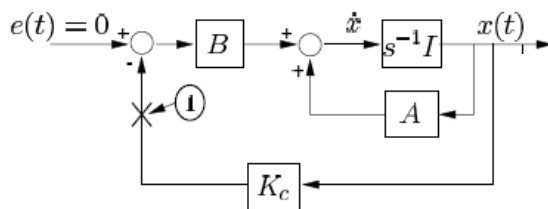


Figure.2.1 Schéma général de la commande linéaire quadratique.

Le schéma général de cette commande peut se représenter comme indiqué sur la Figure 2.1 ci-dessus.

En ouvrant la boucle en (1), la matrice de transfert de boucle s'écrit :

$$L(s) = K(sI - A)^{-1} B \quad (2.22)$$

L'équation de RICCATI (2.20) peut s'écrire sous forme

$$Q - PBR^{-1}B^T P - (-sI - A^T)P - P(sI - A) = 0. \quad (2.23)$$

En multipliant chaque terme de cette dernière expression, à gauche par $B^T(-sI - A^T)^{-1}$ et à droite par $(sI - A)^{-1}B$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} & B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \\ & - B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B \\ & - B^T P(sI - A)^{-1}B - B^T(-sI - A^T)^{-1}PB = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

En notant que d'après (2.18), on a $B^T P = RK$ et $PB = K^T R$, on obtient :

$$\begin{aligned} & B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T R + RK(sI - A)^{-1}B \\ & + B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B \\ & = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le premier membre de l'égalité s'écrit :

$$(I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) - R.$$

On obtient finalement l'équation de la différence de retour [5]:

$$(I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) = R + B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B. \quad (2.26)$$

Les marges de stabilité :

Reprenons l'équation de la différence de retour en fréquentiel avec $s = j\omega$ et en notant

$\Phi(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}$. On obtient alors pour tout ω :

$$(I + K\Phi(j\omega)B)^H R(I + K\Phi(j\omega)B) = R + (\Phi(j\omega)B)^H Q\Phi(j\omega)B \quad (2.27)$$

Où M^H est le hermicien de M , c'est-à-dire le conjugué transposé.

Restreignons nous au cas où $R = \rho I$ et factorisons Q en $Q = H^T H$.

L'égalité (2.27) s'écrit alors :

$$(I + K\Phi(j\omega)B)^H (I + K\Phi(j\omega)B) = I + \frac{1}{\rho} (H\Phi(j\omega)B)^H (H\Phi(j\omega)B) \quad (2.28)$$

dont on déduit les valeurs singulières de $I + K\Phi(j\omega)B$:

$$\sigma_i(I + K\Phi(j\omega)B) = \sqrt{\lambda_i((I + K\Phi(j\omega)B)^H (I + K\Phi(j\omega)B))} \quad (2.29)$$

$$= \sqrt{\lambda_i\left(I + \frac{1}{\rho} (H\Phi(j\omega)B)^H (H\Phi(j\omega)B)\right)} \quad (2.30)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \sigma_i^2(H\Phi(j\omega)B)} \quad (2.31)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x} - Du) \quad (2.35)$$

où K_f est le gain optimal du Filtre de KALMAN.

- **Calcul le gain optimal du Filtre de KALMAN :**

Nous allons maintenant calculer le gain de KALMAN K_f afin de minimiser la variance de l'erreur d'estimation $\varepsilon_x = x - \hat{x}$ de l'état du système en régime permanent (c'est-à-dire lorsque ce signal aléatoire est devenu stationnaire et que l'effet de conditions initiales a disparu).

Le critère mathématique que l'on cherche à minimiser est :

$$\min_{K_f} J_G \quad \text{avec} \quad J_G = E[\varepsilon_x^T \varepsilon_x].$$

A partir des équations (2.34) et (2.35), on déduit l'équation d'évolution de l'erreur d'estimation :

$$\dot{\varepsilon}_x = A\varepsilon_x + w - K_f(C\varepsilon_x + v) \quad (2.36)$$

$$= (A - K_f C)\varepsilon_x + [I_n \quad -K_f] \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

En appliquant le théorème du passage d'un bruit blanc dans un système linéaire à l'équation (2.37) :

Le vecteur d'entrée augmenté $[w^T v^T]^T$ est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale

$\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$, car w et v sont indépendants. On note $m(t_0)$ et $P_f(t_0)$ la moyenne et la covariance

de l'erreur d'estimation initiale $\varepsilon_x(t_0)$. Alors $\varepsilon(t)$ est un signal aléatoire gaussien :

— de moyenne :

$$m(t) = E[\varepsilon_x(t)] = e^{(A - K_f C)(t - t_0)} m(t_0).$$

Si le filtre est stable (les valeurs propres de $A - K_f C$ sont à partie réelle négative) alors, après un régime transitoire au cours duquel l'erreur d'estimation initiale $\varepsilon_x(t)$ est recalée, la moyenne de l'erreur d'estimation en régime permanent s'annule. On dit que l'estimateur est non biaisé.

— de covariance :

$P_f(t) = [(\varepsilon_x(t) - m(t))(\varepsilon_x(t) - m(t))^T]$ vérifiant l'équation différentielle :

$$\dot{P}_f(t) = (A - K_f C)P_f(t) + P_f(t)(A - K_f C)^T + [I_n \quad -K_f] \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n^T \\ -K_f^T \end{bmatrix}$$

En régime permanent : $\dot{P}_f(t) = 0$ et $P_f(t) = P_f$ vérifie alors l'équation de LYAPUNOV

$$\text{continue : } (A - K_f C)P_f + P_f(A - K_f C)^T + \begin{bmatrix} I_n & -K_f \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ -K_f^T \end{bmatrix} = 0$$

$$(A - K_f C)P_f + P_f(A - K_f C)^T + W + K_f V K_f^T = 0. \quad (2.38)$$

Les équations (2.21) et (2.38) font apparaître une remarquable dualité entre l'estimation et la commande avec les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow A^T & K &\leftrightarrow K_f^T \\ B &\leftrightarrow C^T & P &\leftrightarrow P_f \\ R &\leftrightarrow V & Q &\leftrightarrow W \end{aligned} \quad (2.39)$$

Vont donc nous permettre d'exprimer directement les conditions d'optimalité du gain K_f à partir de celles obtenues pour le gain K de la commande LQ:

$K_f = P_f C^T V^{-1}$ où P_f obéit à l'équation de RICCATI suivante :

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + W = 0 \quad (2.40)$$

avec $P_f = P_f^T > 0$.

- En appliquant l'estimé \hat{x} à la commande par retour d'état $u(t) = -K\hat{x}(t)$ comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état x , où K est calculé en considérant le problème de commande optimale linéaire (méthode LQ) correspondant (en enlevant v et w de l'équation d'état (2.33) et E dans le critère (2.34)) :

$$u = -K\hat{x}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} K = R^{-1} B^T P \\ PA + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

D'après la Figure 2.2, la représentation d'état du contrôleur LQG s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK - K_f C + K_f DK & K_f \\ -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

On déduit de l'équation d'état (2.42), la matrice de transfert du contrôleur $K(s)$:

$$K(s) = -K(sI - A + BK + K_f C - K_f DK)^{-1} K_f \quad (2.43)$$

2.4. Synthèse LQG/LTR (Loop Transfert Recovery) [11]:

L'approche LQG/LTR consiste à synthétiser une commande par retour d'état « commande LQ » par un choix approprié des pondérations Q et R en prenant en compte les

propriétés de robustesse, puis à calculer le filtre de KALMAN à partir d'un réglage des matrices de variance W et V afin que la matrice de transfert de boucle ouverte de l'ensemble se rapproche progressivement de celle obtenue à la première étape par la commande LQ (au sens des valeurs singulières), d'où son nom (LTR « Loop Transfert Recovery » où en français recouvrement du transfert de la boucle).

2.4.1. Choix des matrices de pondération :

Une première étape de la synthèse LQG/LTR concerne le choix des matrices de pondération Q et R pour le calcul de la commande par retour d'état LQ de la façon suivante :

$Q = H^T H$ et $R = \rho I_n$. D'où H et ρ sont déterminés pour atteindre les objectifs de performance en Basse Fréquence (BF) tant que la condition de robustesse sur la stabilité est satisfaisante en Haute Fréquence (HF).

- **Le concept de « loop-shaping » utilisé pour la commande LQ :**

Comme nous l'avons vu, l'expression (2.31) détermine les propriétés de robustesse sur les performances et sur la stabilité de la boucle LQ.

b. Condition de robustesse sur les performances en BF :

Dans cette gamme de fréquences (basse fréquence) les valeurs singulières minimales de $L_{LQ}(s)$ sont strictement très grandes de l'unité $\underline{\sigma}[L_{LQ}] \gg 1$, alors l'expression (2.31) devient par approximation :

$$\sigma_i[L_{LQ}(j\omega)] \approx \sigma_i[H\Phi(j\omega)B]/\sqrt{\rho} \quad (2.44)$$

Nous pouvons donc choisir ρ et H tel que $\underline{\sigma}[L_{LQ}]$ soit très proche de $\overline{\sigma}[L_{LQ}]$. Et pour satisfaire l'égalité suivante :

$$\underline{\sigma}[I + L_{LQ}(j\omega)] \geq \sigma_i[W_p(j\omega)] \quad (2.45)$$

On obtient par approximation :

$$\underline{\sigma}[L_{LQ}(j\omega)] \geq \sigma_i[W_p(j\omega)] \quad (2.46)$$

D'après les expressions (2.44) et (2.46) on aura la condition :

$$\underline{\sigma}[L_{LQ}(j\omega)] \approx \underline{\sigma}[H\Phi(j\omega)B]/\sqrt{\rho} \geq \sigma_i[W_p(j\omega)] \quad (2.47)$$

b. Condition de robustesse sur la stabilité en HF :

Pour $\omega \gg 1$, on a :

$$\overline{\sigma}[L_{LQ}(j\omega)] \approx \overline{\sigma}[HB]/\omega\sqrt{\rho} \quad (2.48)$$

Puisque les fréquences de coupures se produit en $\sigma_i[L_{LQ}(j\omega_c)] = 1$, donc on peut écrire la fréquence de coupure maximale sous la forme :

$$\omega_{c_{\max}} = \overline{\sigma}[HB] / \sqrt{\rho} \quad (2.49)$$

Pour garantir la robustesse sur la stabilité, on doit assurer la condition suivante :

$$\omega_{c_{\max}} = \overline{\sigma}[HB] / \sqrt{\rho} \leq \omega_m \quad (2.50)$$

Où ω_m est la fréquence de coupure de l'inverse de la valeur singulière maximale de la spécification sur la stabilité $\frac{1}{\overline{\sigma}[W_t]}$.

2.4.2. Recouvrement asymptotique :

La deuxième étape repose sur l'écriture des matrices de variance de bruit (voir système (2.33)) :

$$E\{ww^T\} = W = W_0 + q^2.BB^T, \quad E\{vv^T\} = V = V_0 \quad (2.51)$$

D'après les matrices de variance (2.51), l'auteur dans (J. C. Doyle, 1981) [11] a démontré le théorème du LTR suivant :

Théorème1 : (théorème du LTR) – Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $\dim y \geq \dim u$ ($p \geq m$) (nombre égal d'entrées et de sorties).
- $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ est à minimum de phase ($G(s)$ n'a aucun zéro dans le demi-plan droit $\text{Re}(s) \geq 0$).

$$\text{alors : } \lim_{q \rightarrow \infty} K(s)G(s) \rightarrow L_{LQ} = K\Phi B. \quad (2.52)$$

où $\Phi = (sI_n - A)^{-1}$, et q paramètre scalaire de réglage.

On montre que le transfert de la boucle ouverte $K(s)G(s)$ du contrôleur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de la boucle ouverte de retour d'état LQ, lorsque q tend vers l'infini (2.52). Ainsi, à partir d'un contrôleur initial reposant sur les matrices de variance nominale W_0 et V_0 du filtre de KALMAN, on augmente petit à petit q jusqu'à obtenir la robustesse suffisante (2.51).

2.5. Synthèse LQG/LTR Duale [11]:

D'après les correspondances mentionnées en (2.39) une approche duale peut être appliquée pour la synthèse :

La méthode reste la même, on calcule le filtre de KALMAN par un choix approprié des matrices de variance de bruit $E\{ww^T\} = W = \Gamma\Gamma^T$ et $E\{vv^T\} = V = \rho I$ en prenant en compte les propriétés de robustesse duale pour le choix des paramètres Γ et ρ , puis en calculant la commande par retour d'état (commande LQ) à partir d'un réglage des matrices de pondération

Q et R afin que la matrice de transfert de la boucle ouverte de l'ensemble se rapproche progressivement de celle obtenue par le filtre de KALMAN.

2.5.1. Choix des matrices des paramètres Γ et ρ :

Le choix est similaire à celui obtenu par l'approche primale du concept « loop-shaping » utilisé pour la commande LQ, donc on doit assurer les propriétés de robustesse duale suivante :

b. Condition de robustesse sur les performances en BF :

$$\underline{\sigma}[L_{FK}(j\omega)] \approx \underline{\sigma}[C\Phi(j\omega)\Gamma] / \sqrt{\rho} \geq \overline{\sigma}[W_p(j\omega)] \quad (2.53)$$

Nous pouvons donc choisir ρ et Γ tel que $\underline{\sigma}[L_{FK}]$ soit très proche de $\overline{\sigma}[L_{FK}]$.

b. Condition de robustesse sur la stabilité en HF :

Pour la robustesse sur la stabilité il faut donc, d'assurer la condition suivante :

$$\omega_{c\max} = \overline{\sigma}[C\Gamma] / \sqrt{\rho} \leq \omega_m \quad (2.54)$$

Où : ω_m est la fréquence de coupure de l'inverse de la valeur singulière maximale de la spécification sur la stabilité $\frac{1}{\overline{\sigma}[W_r]}$.

$L_{FK}(j\omega) = C\Phi(j\omega)K_f$ est la fonction de transfert de la boucle ouverte du filtre de KALMAN

2.5.2. Recouvrement asymptotique :

Le réglage se fait par un choix des matrices de pondération de la forme :

$$Q = Q_0 + q^2.C^T C, \quad R = R_0 \quad (2.55)$$

De l'équation (2.55) on peut réécrire le théorème du LTR dual de la façon suivante :

Théorème2 : (théorème du LTR Dual) – Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $\dim y \geq \dim u$ ($p \geq m$) (nombre égal d'entrées et de sorties).
- $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ est à minimum de phase ($G(s)$ n'a aucun zéro dans le demi-plan droit $\text{Re}(s) \geq 0$).

$$\text{alors : } \lim_{q \rightarrow \infty} K(s)G(s) \rightarrow L_{FK} = C\Phi K_f \quad (2.56)$$

Ce théorème montre que le transfert de la boucle ouverte $K(s)G(s)$ du contrôleur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de la boucle ouverte du filtre de KALMAN, lorsque q tend vers l'infini (2.56). Ainsi, à partir d'un contrôleur initial reposant sur les matrices de pondération nominale Q_0 et R_0 de la commande par retour d'état (LQ), on augmente petit à petit q jusqu'à obtenir la robustesse désiré (2.55).

2.6. Conclusion :

Nous avons opté dans ce chapitre à un formalisme de la synthèse d'un contrôleur robuste par la technique LQG\LTR qui sera utilisé par la suite dans notre étude en simulation.

Chapitre III :



Etude en simulation

de la technique LQG/LTR

Appliqué à la Machine Asynchrone

3.1. Introduction:

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude en simulation de la méthode de synthèse d'un régulateur robuste par l'approche LQG\LTR détaillée dans le chapitre 2. L'application de cette technique concerne la génération d'une loi de commande robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques affectant la machine asynchrone.

3.2. Présentation de la MAS :

- **Le modèle mathématique du processus :**

Le système à commander est une machine asynchrone. Elle est représentée par un modèle mathématique linéaire, Ce modèle possède deux variables d'états, deux entrées et deux sorties données par les équations d'état suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{dr}(t) \\ \dot{\Phi}_{qr}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16,7157 & 146,6000 \\ -146,6000 & -16,7157 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{dr}(t) \\ \Phi_{qr}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18,5945 & -186,3924 \\ 186,3924 & -18,5945 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{dr}(t) \\ \Phi_{qr}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,1124 & 0 \\ 0 & 1,1124 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix}$$

Avec :

- Les variables d'états : Φ_{dr}, Φ_{qr} sont respectivement les composantes du vecteur flux rotorique selon l'axe 'd' et 'q'.
- Les variables de commande : V_{dr}, V_{qr} sont respectivement les composantes du vecteur tension rotorique selon l'axe 'd' et 'q'.
- Les sorties : V_{ds}, V_{qs} sont respectivement les composantes du vecteur tension statorique selon l'axe 'd' et 'q'. (grandeurs à commander)

Le système possède deux modes complexes conjugués :

$$\det(sI_n - A) = s^2 + 33,4314.s + 21770,9746 = 0$$

$$S_1 = -16,72 + 146,60i$$

$$S_2 = -16,72 - 146,60i$$

3.3. Fonctionnement en régime nominal du Processus :

3.3.1. La réponse temporelle :

Appliquons à l'entrée du processus un signal de type échelon unitaire sous forme

$$U(t) = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \text{ où } u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}. \text{ Un tel test est largement utilisé pour l'analyse des}$$

systèmes car on considère que l'action des perturbations est similaire à un signal saut.

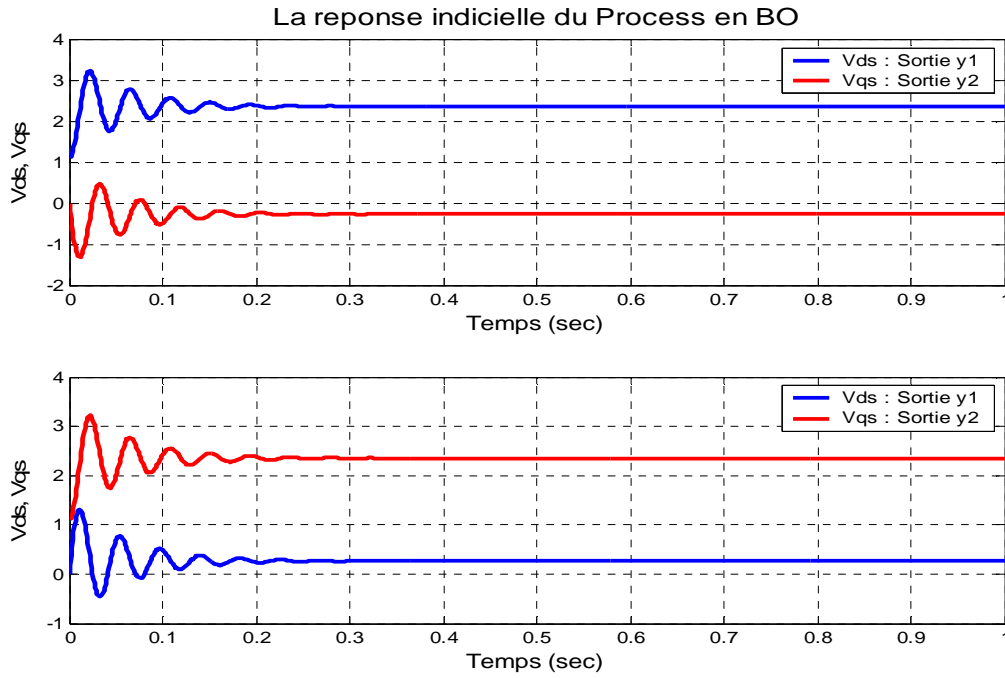


Figure 3.1

La figure (3.1) montre que les sorties oscillent un peu, avant de se stabiliser sur sa valeur finale de régime permanent au bout d'un temps de réponse de l'ordre de 0,176 (sec) et 0,186 (sec).

3.3.2. Représentation des valeurs singulières du processus :

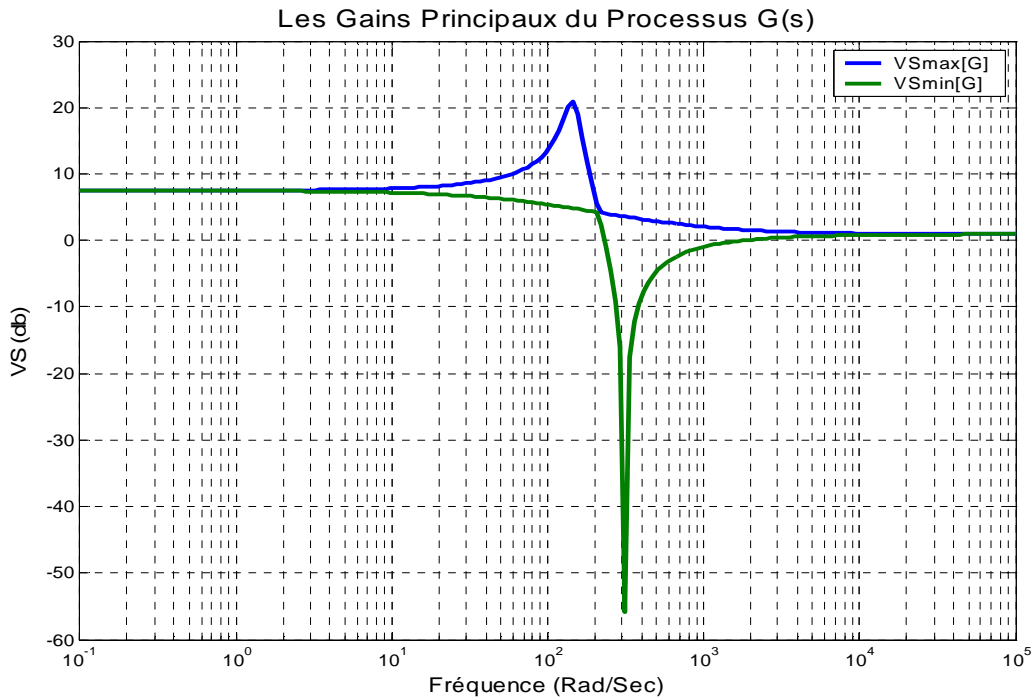


Figure 3.2

Le gabarit fréquentiel ci-dessus illustre les valeurs singulières maximales et minimales du processus qui est mal conditionné, ce mal conditionnement est traduit par le fait que les deux

gains principaux sont éloignés en moyenne fréquence quand $\omega \in]10^2; 10^3[rad / s$ à cause de la nature physique du processus qui possède deux modes complexes conjugués.

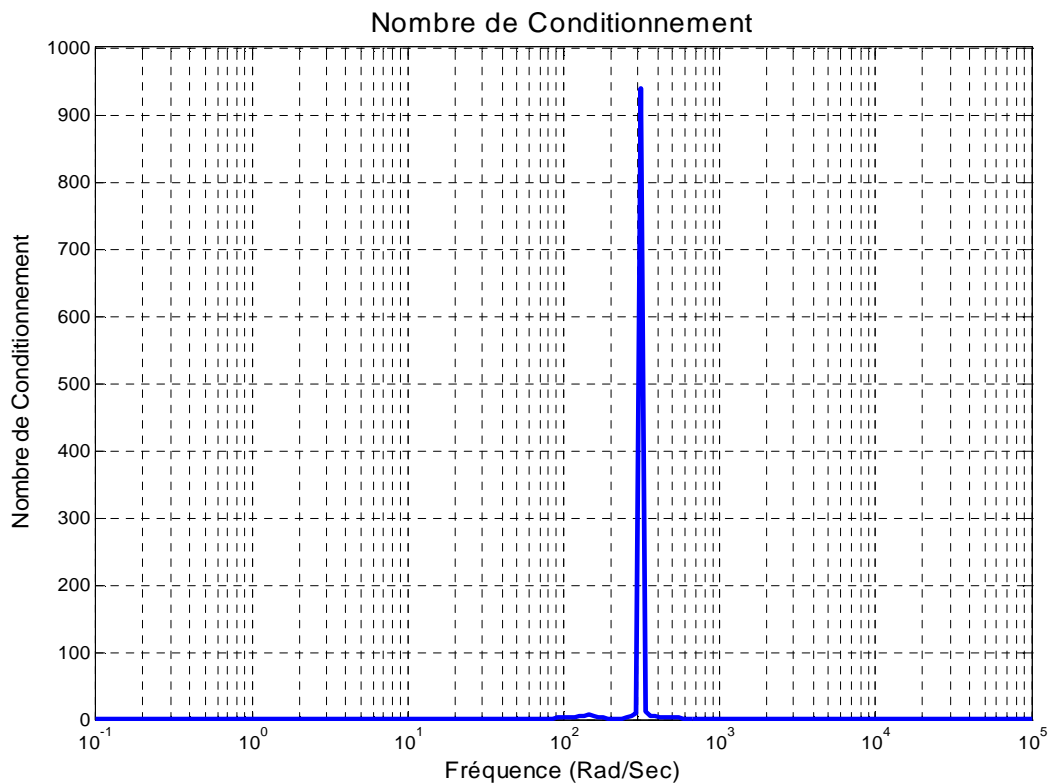


Figure 3.3

Selon le nombre de conditionnement le rapport entre les valeurs singulières maximales et minimales est important de 939 lorsque $\omega = 10^{2,5} rad / s$ figure (3.3).

3.4. Choix des spécifications sur la stabilité et les performances :

Nous avons vu au premier chapitre comment choisir les spécifications sur les performances et sur la stabilité pour assurer la robustesse du processus soumis à des perturbations.

On obtient ainsi notre choix de la forme suivante :

$$\text{Spécification sur les performances : } W_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1+0,0598s}{0,0598s} & 0 \\ 0 & \frac{1+0,0598s}{0,0598s} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

$$\text{Spécification sur la stabilité : } W_t(s) = \begin{bmatrix} 0,85(1+0,0165s) & 0 \\ 0 & 0,85(1+0,0165s) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Le gabarit fréquentiel des spécifications est représenté sur la figure (3.4).

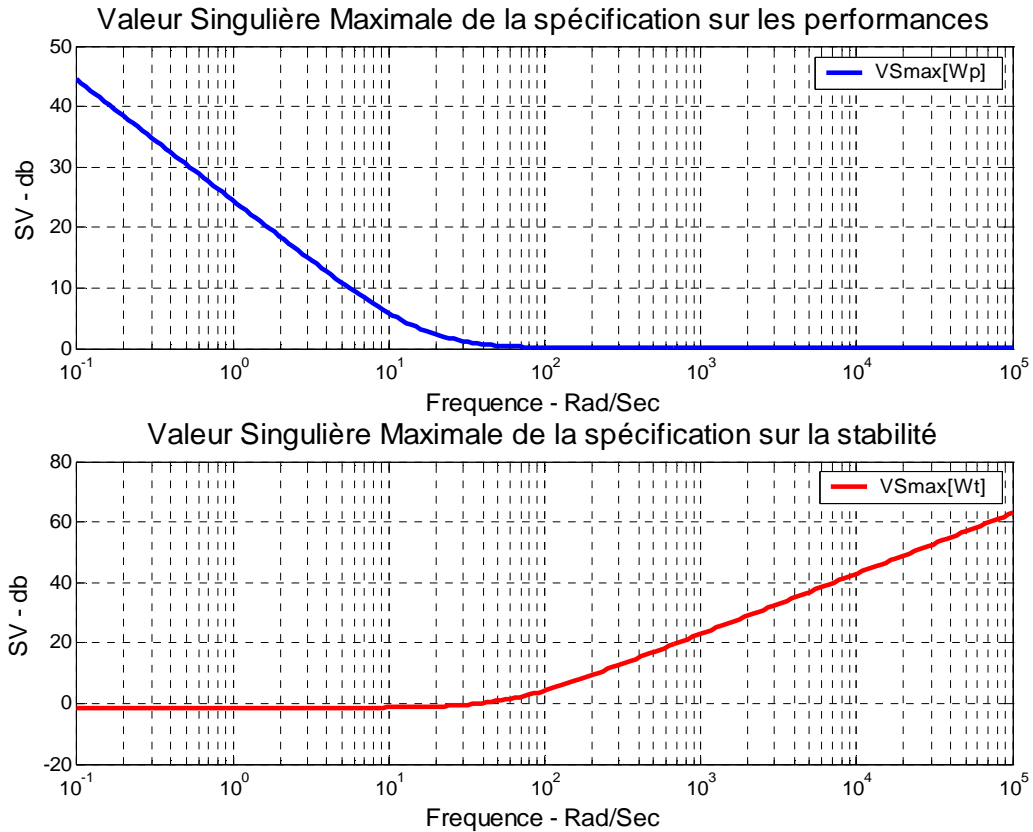


Figure 3.4

- **Condition de robustesse sur la stabilité et les performances :**

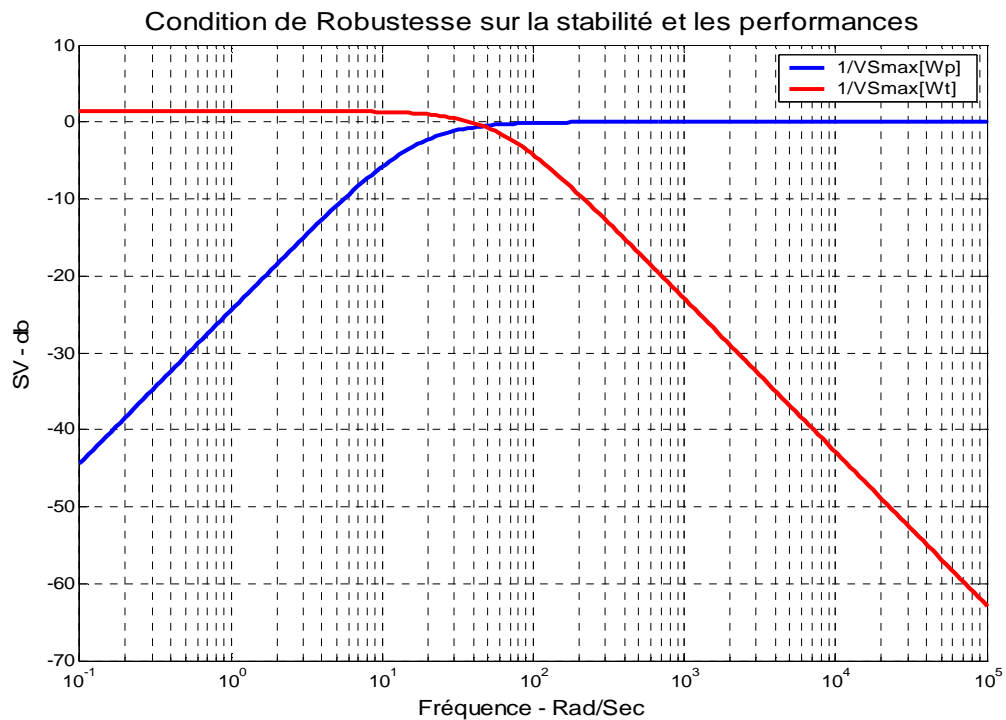


Figure 3.5

3.5. Application de la synthèse LQG\LTR à la Machine asynchrone :

On applique la synthèse LQG\LTR Duale, après avoir rajouté un intégrateur au processus, pour assurer la précision du correcteur (l'annulation de l'erreur statique). [4], [14]

Donc, la dynamique du modèle augmenté a pour représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_a x(t) + B_a u(t) \\ y(t) = C_a x(t) + D_a u(t) \end{cases}, \quad \text{Avec :}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -18,5945 & -186,3924 \\ 0 & 0 & 186,3924 & -18,5945 \\ 0 & 0 & -16,7157 & 146,6000 \\ 0 & 0 & -146,6000 & -16,7157 \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1124 & 0 \\ 0 & 1,1124 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C_a = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_a = 0_{m \times m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Où : n : l'ordre du système ; m : le nombre d'entrées égal au nombre de sorties.

Représentation fréquentielle des valeurs singulières du modèle augmenté :

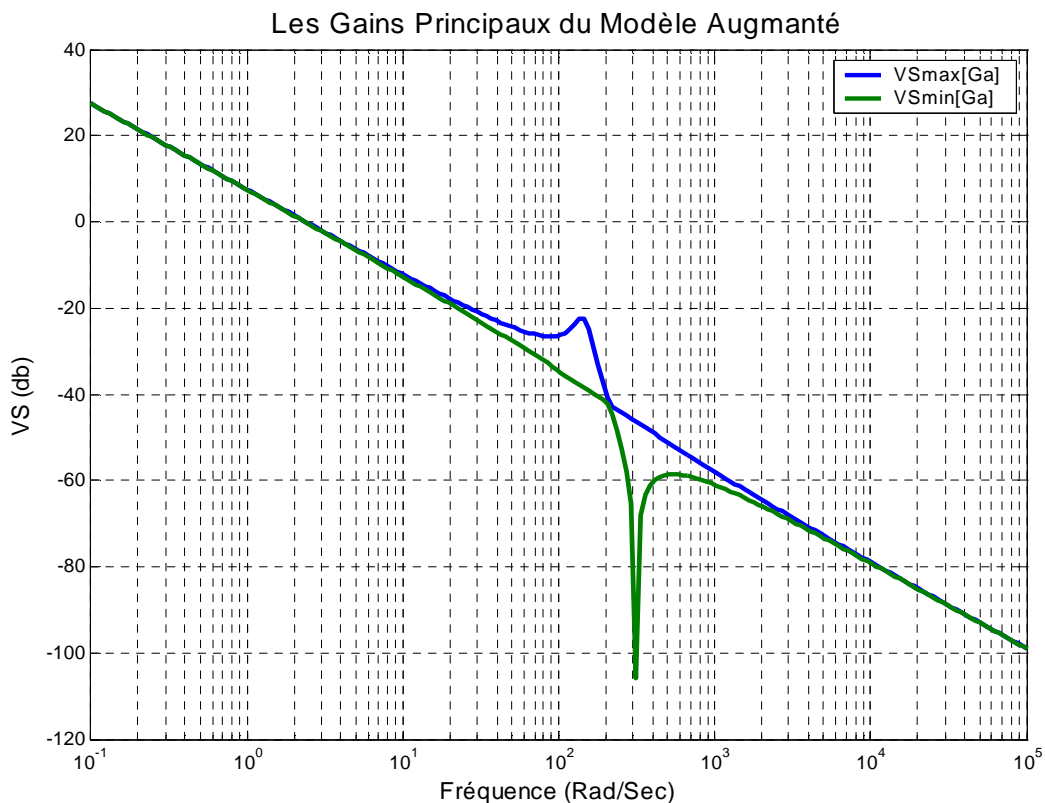


Figure 3.6

On observe sur la figure (3.6), que les valeurs singulières du modèle ont changées de pente de 20 dB/décade à cause de l'intégrateur pur rajouté au processus.

3.5.1. Synthèse LQG:

On avait vu dans le chapitre 2, que le réglage du correcteur LQG repose sur un réglage séparé du filtre de KALMAN et de la commande LQ (par retour d'état), théorème de séparation, ce qui nécessite de régler le filtre de KALMAN par les matrices de variance V et W de sorte que l'état soit 'bien' reconstruit et de régler la commande LQ par les matrices de pondération Q et R pour avoir un 'bon' retour d'état.

- **Réglage des matrices de variance W et V (Réglage du Filtre de KALMAN) :**

Des bruits blanc gaussiens sont ajoutées sur les entrées et les sorties du modèle w et v respectivement.

Le réglage du Filtre de KALMAN s'appuie sur la commande u et sur la mesure y du processus pour donner l'estimée de l'état x .

Pour obtenir un observateur qui permet de restituer l'état x du modèle on doit choisir comme matrices de variance des bruits w et v :

$$W = E\{w^T w\} = \Gamma \Gamma^T \text{ et } V = E\{v^T v\} = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Avec :}$$

Γ et ρ sont déterminés par le concept de « loop-shaping » pour atteindre les objectifs de performance en Basse Fréquence et de garantir la robustesse sur la stabilité en Haute Fréquence.

On fait rappels aux conditions de robustesse mentionnées au chapitre 2 :

Condition sur les performances en BF:

$$\underline{\sigma}[L_{FK}(j\omega)] \approx \underline{\sigma}[C_a \Phi(j\omega) \Gamma] / \sqrt{\rho} \geq \overline{\sigma}[W_p(j\omega)], \quad (3.4)$$

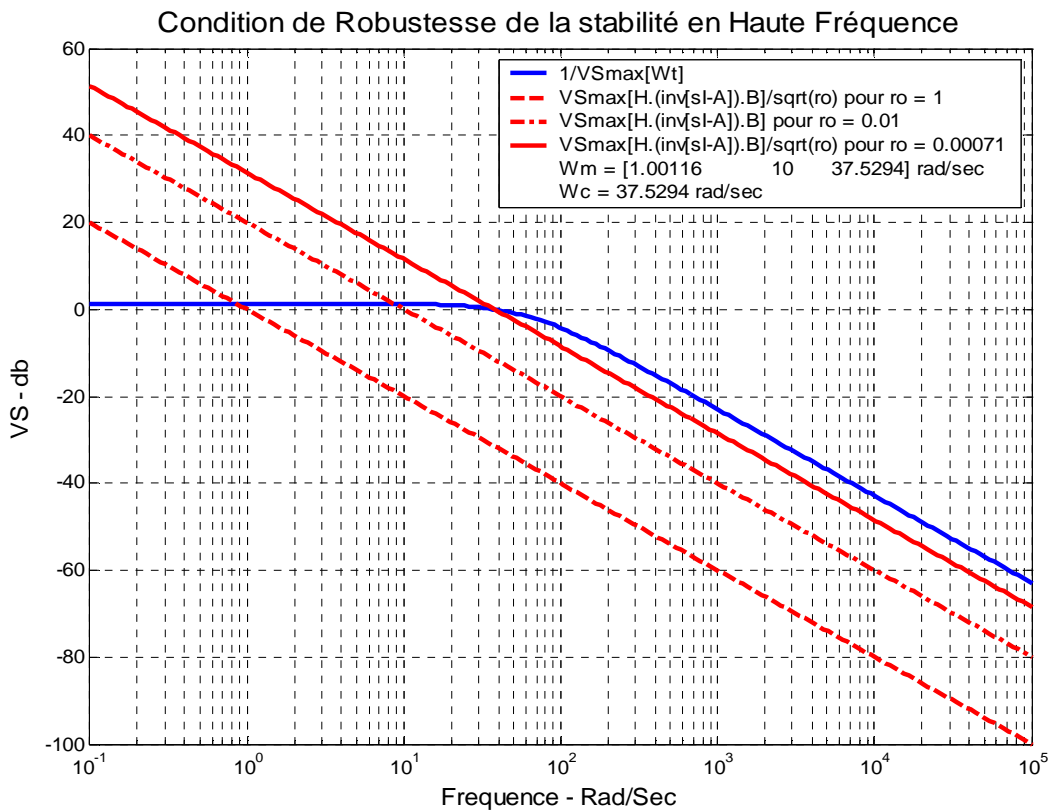
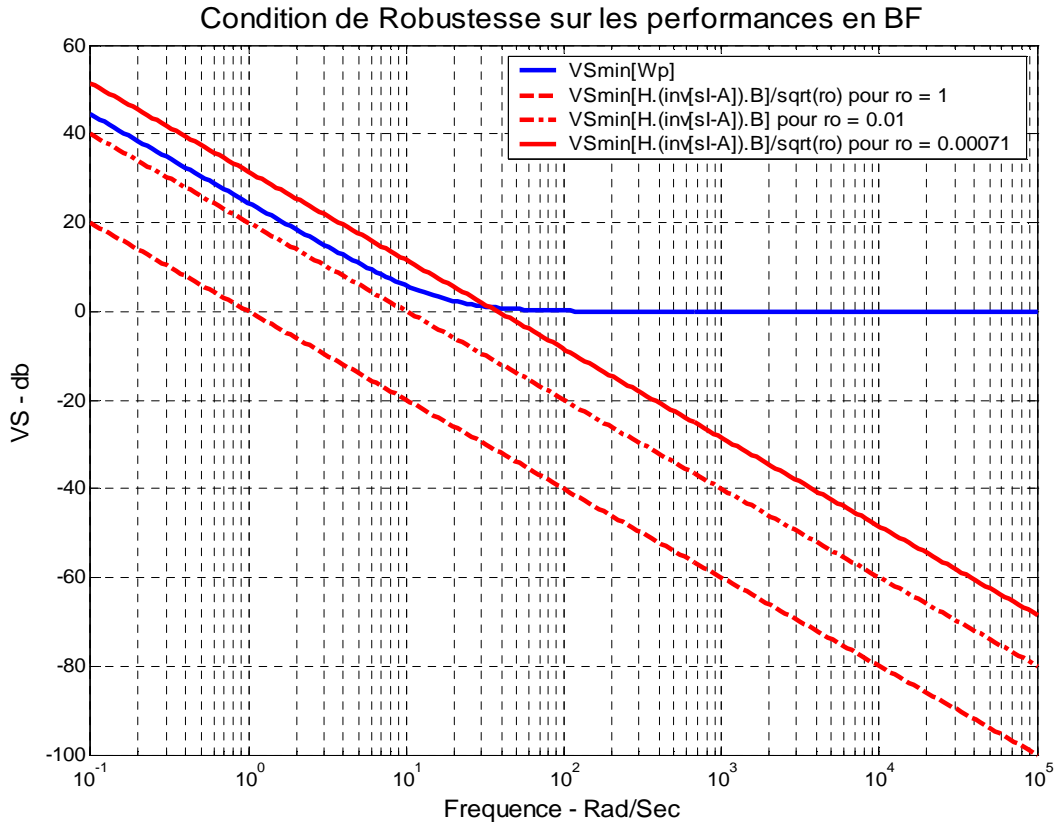
Donc pour garantir cette condition il faut assurer la condition de robustesse sur la stabilité en HF:

$$\omega_{c \max} = \overline{\sigma}[C_a \Gamma] / \sqrt{\rho} \leq \omega_m \quad (3.5)$$

Où ω_m : est la fréquence de coupure de l'inverse des valeurs singulières de la spécification sur la stabilité $\frac{1}{\sigma_i[W_t]}$.

Les figures (3.7) et (3.8) illustres la détermination de Γ et ρ , se fait par essai - erreur à partir

des conditions de robustesse précédentes. On obtient ainsi : $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \rho = 0,00071.$



Puisque les conditions de robustesse sont vérifiées, alors on peut calculer le gain optimal du Filtre de KALMAN par la relation $K_f = P_f C_a^T V^{-1}$. Avec P_f est la solution de l'équation de RICCATI $P_f A_a^T + A_a P_f - P_f C_a^T V^{-1} C_a P_f + W = 0$, on obtient ainsi les modes de l'estimation, valeurs propres de $(A_a - K_f C_a)$, $\det(sI - (A_a - K_f C_a)) = 0$ sont égaux à :

$$\begin{aligned} S_{f1} &= -16,72 + 146,60i. & S_{f2} &= -16,72 - 146,60i. \\ S_{f3} &= -37,53. & S_{f4} &= -37,53. \end{aligned}$$

- **Réglage des matrices de pondération Q et R pour avoir un bon retour d'état :**

Pour obtenir un contrôleur LQG qui permet de récupérer les propriétés de robustesse de l'observateur optimal (Filtre de KALMAN), on a choisi les matrices de pondération de la forme suivante :

$$Q = C^T C \text{ et } R = 3.10^{-3} I_2,$$

En calculant le gain optimal de la commande LQ par la relation $K = R^{-1} B_a^T P$. Avec P est la solution de l'équation de RICCATI $PA_a + A_a^T P - PB_a R^{-1} B_a^T P + Q = 0$, on obtient ainsi les modes de commande, valeurs propres de $(A_a - B_a K)$, $\det(sI - (A_a - B_a K)) = 0$ sont égaux à :

$$\begin{aligned} S_1 &= -26,05 + 152,08i. & S_2 &= -26,05 - 152,08i. \\ S_3 &= -40,99 + 5,48i. & S_4 &= -40,99 - 5,48i. \end{aligned}$$

On remarque que la dynamique de l'observateur optimal (Filtre de KALMAN) est relativement lente devant celle de la commande LQ, on peut dire que la robustesse de l'ensemble processus avec contrôleur est vérifiée en stabilité, tandis que la robustesse sur les performances n'est pas garantie Figure (3.10), c'est-à-dire que le contrôleur LQG n'a pas atteint la robustesse sur les performances de l'observateur optimal. Ce réglage nous a conduit à un contrôleur LQG initial assez performant. Il faudrait, pour remédier à cela, effectuer le recouvrement du transfert de la boucle LTR Figure (3.9), cette démarche est développée ci-dessous au paragraphe suivant.

3.5.2. Recouvrement du transfert de la boucle, LTR :

Le recouvrement s'appuie sur l'écriture des matrices de pondération Q et R de la forme :

$$Q = Q_0 + q^2 C^T C, \quad R = R_0 \quad (3.6)$$

Première étape : (cas sans recouvrement LTR)

Au début on commence par $q = 0$ ce qui donne un correcteur initial reposant sur les pondérations nominale Q_0 et R_0 , c'est-à-dire le contrôleur obtenu est synthétisé par la technique LQG représenté précédemment.

Deuxième étape :

En utilisant la technique de recouvrement développé auparavant au chapitre 2. Ainsi, à partir du contrôleur LQG initial reposant sur les pondérations nominale Q_0 et R_0 , on augmente progressivement la valeur de q jusqu'à obtenir le recouvrement souhaité. Figure (3.9)

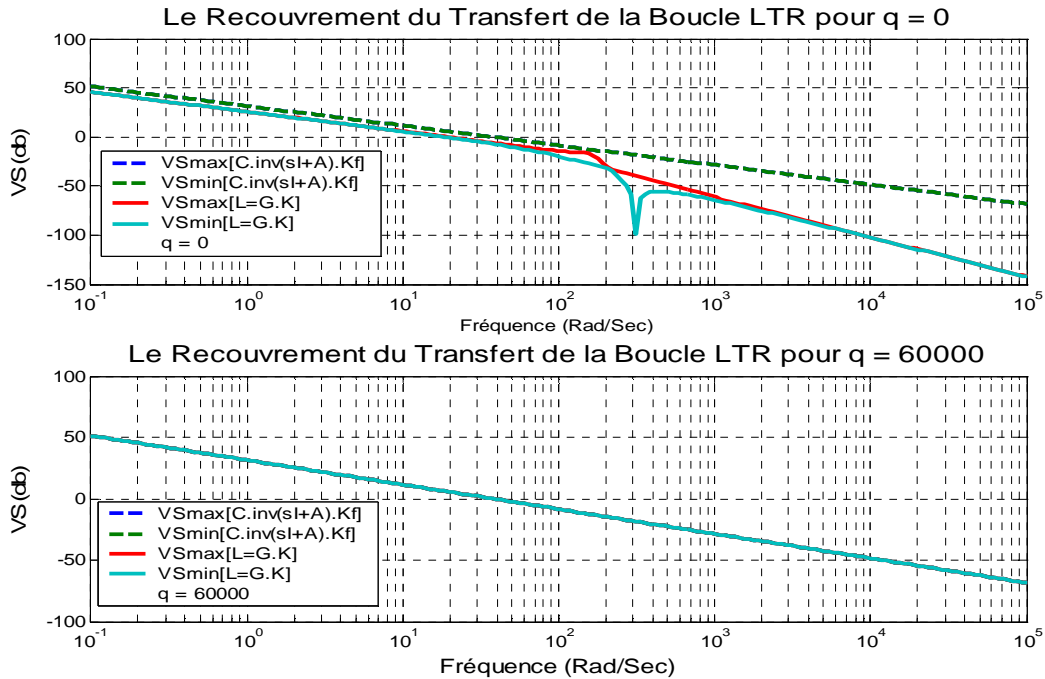


Figure 3.9

D'après la figure ci-dessus on observe, que les gains principaux de $L(s) = G(s)K(s)$ tend vers les gains principaux de l'observateur optimal $L_{FK}(s) = K(sI - A_a)^{-1}B_a$, avec un recouvrement total, on peut dire, que le contrôleur LQG a parfaitement assurés les propriétés de robustesse du Filtre de KALMAN.

3.6. Vérification des conditions de robustesse sur la stabilité et les performances :

On rappelle que les conditions de robustesse sont données par :

$$\text{Condition sur la stabilité : } \overline{\sigma}[T(s)] \leq \frac{1}{\sigma[W_t(s)]} \quad (3.7)$$

$$\text{Condition sur les performances : } \overline{\sigma}[S(s)] \leq \frac{1}{\sigma[W_p(s)]} \quad (3.8)$$

Les résultats obtenus sont illustrés sur les figures (3.10) et (3.11). Les valeurs singulières maximales de la matrice de transfert en boucle fermée sont comparées aux valeurs singulières maximales de la spécification sur la stabilité et les valeurs singulières maximales de la sensibilité sont comparées aux valeurs singulières maximales de la spécification sur les performances afin de vérifier que les conditions de robustesse sont satisfaisantes.

1. Le cas sans recouvrement $q = 0$ pour le correcteur LQG :

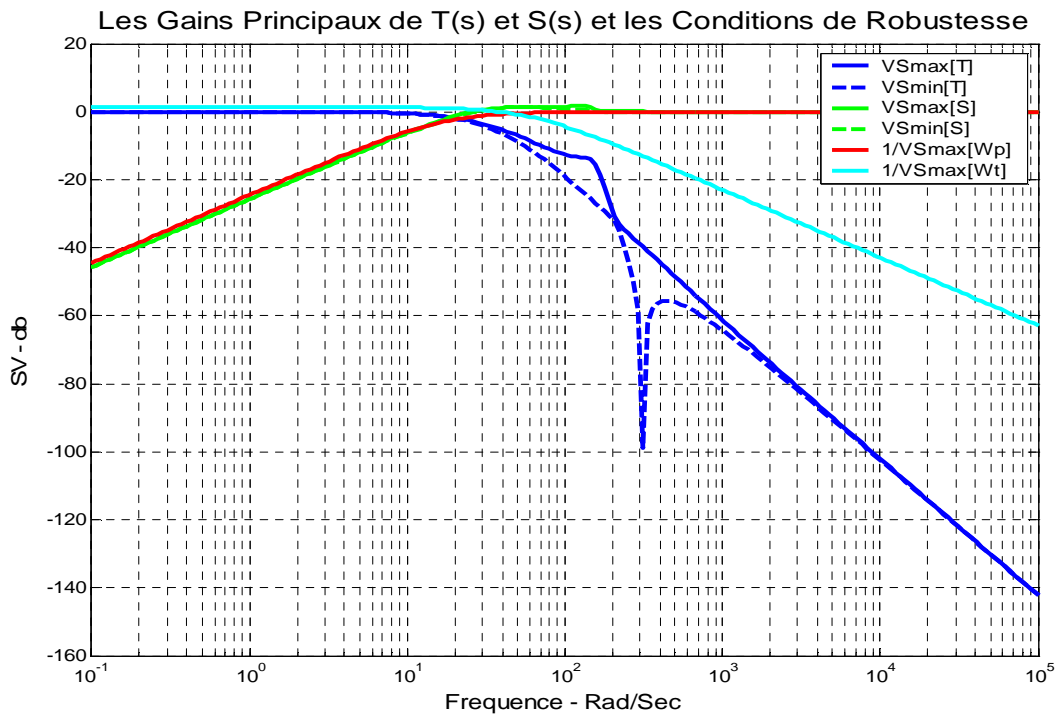


Figure 3.10

On voit bien sur la figure (3.10), que la condition de robustesse sur la stabilité est vérifiée, mais la condition de robustesse sur les performances est violée en moyenne fréquence.

2. cas avec recouvrement total pour le correcteur LQG\LTR :

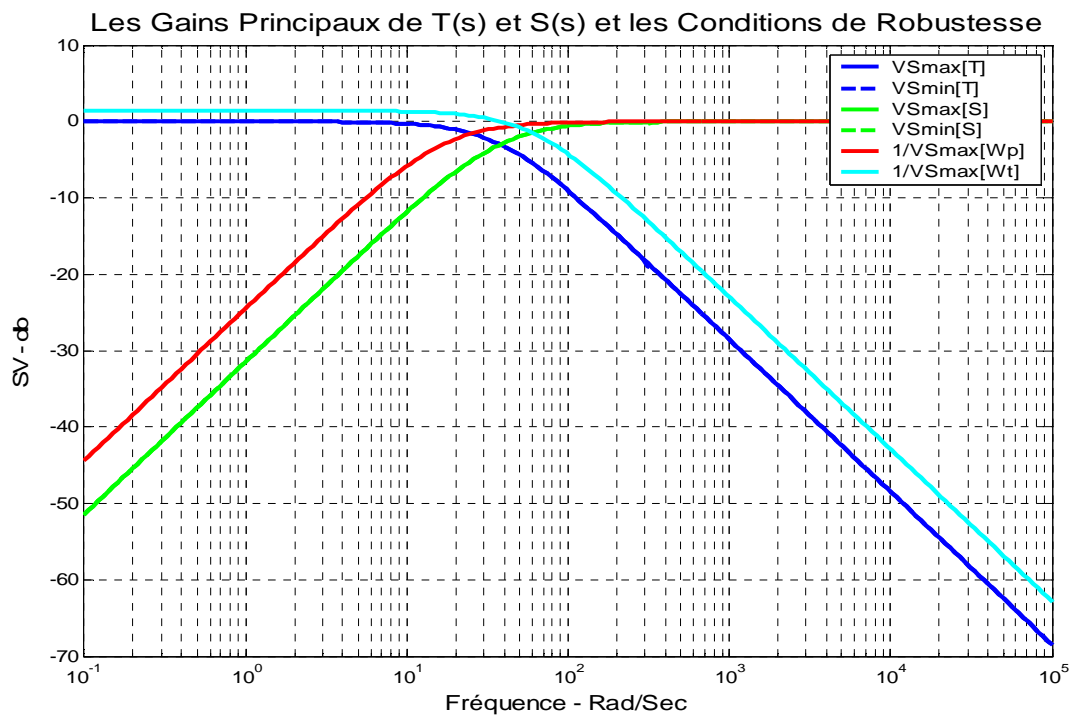


Figure 3.11

Par comparaison avec les figures (3.10) et (3.11), nous pouvons constater que Les conditions de robustesse sur la figure (3.11) sont améliorée de celles obtenues à la figure (3.10), où les valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité sont posées au dessous de l'inverse des valeurs singulières maximales de la spécification sur les performances $W_p(s)$, et les valeurs singulières maximales de la matrice de transfert en boucle fermée sont posées au dessous de l'inverse des valeurs singulières maximales de la spécification sur la stabilité $W_t(s)$, ainsi que les valeurs singulières de la matrice de sensibilité et de la matrice de transfert en boucle fermée sont superposées, ceci montrent le découplage total du système.

3.7. Représentations temporelles du régime nominal :

3.7.1. Validation des Commandes :

- Cas sans recouvrement $q = 0$:

D'après la figure (3.12), on voit bien que les commandes atteints l'inverse du gain statique

$[G(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4195 & 0.0478 \\ -0.0478 & 0.4195 \end{bmatrix}$, et l'erreur de poursuite est ramenée à zéro.

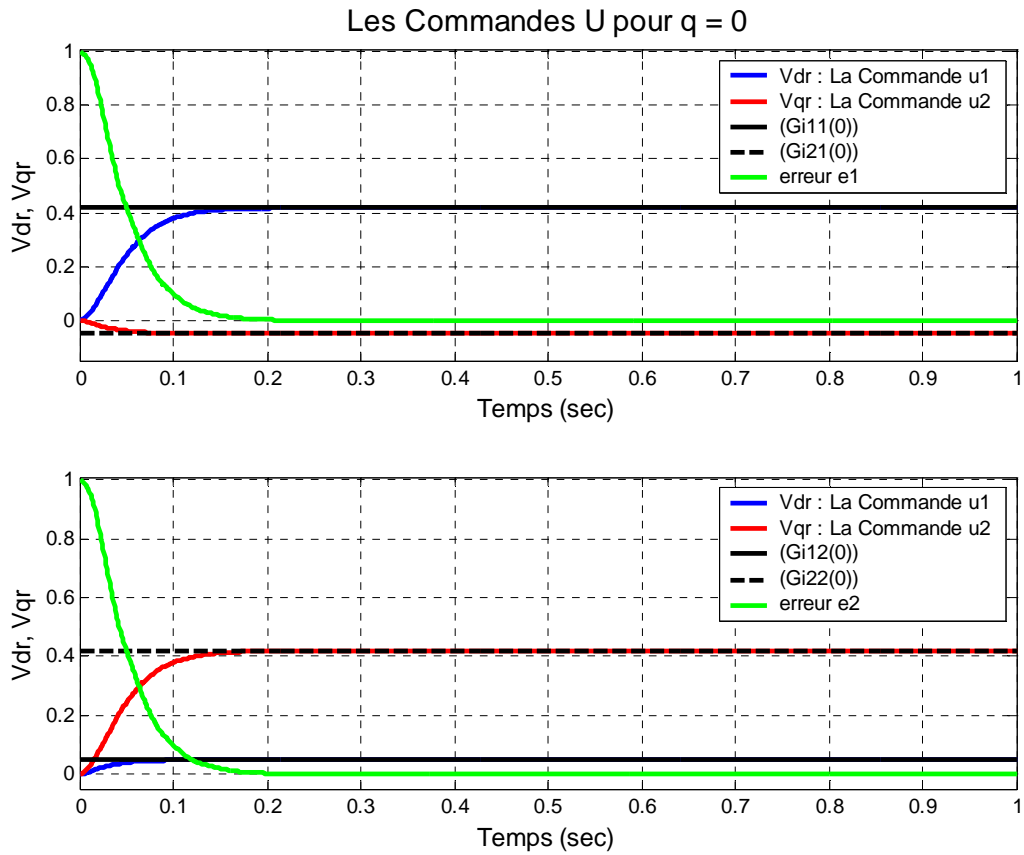


Figure 3.12

- **Cas avec recouvrement total :**

Sur la figure ci-dessous on voit bien que l'erreur de suivi est ramenée à zéro, et les commandes atteints l'inverse du gain statique $[G(0)]^{-1}$ avec des oscillations harmoniques.

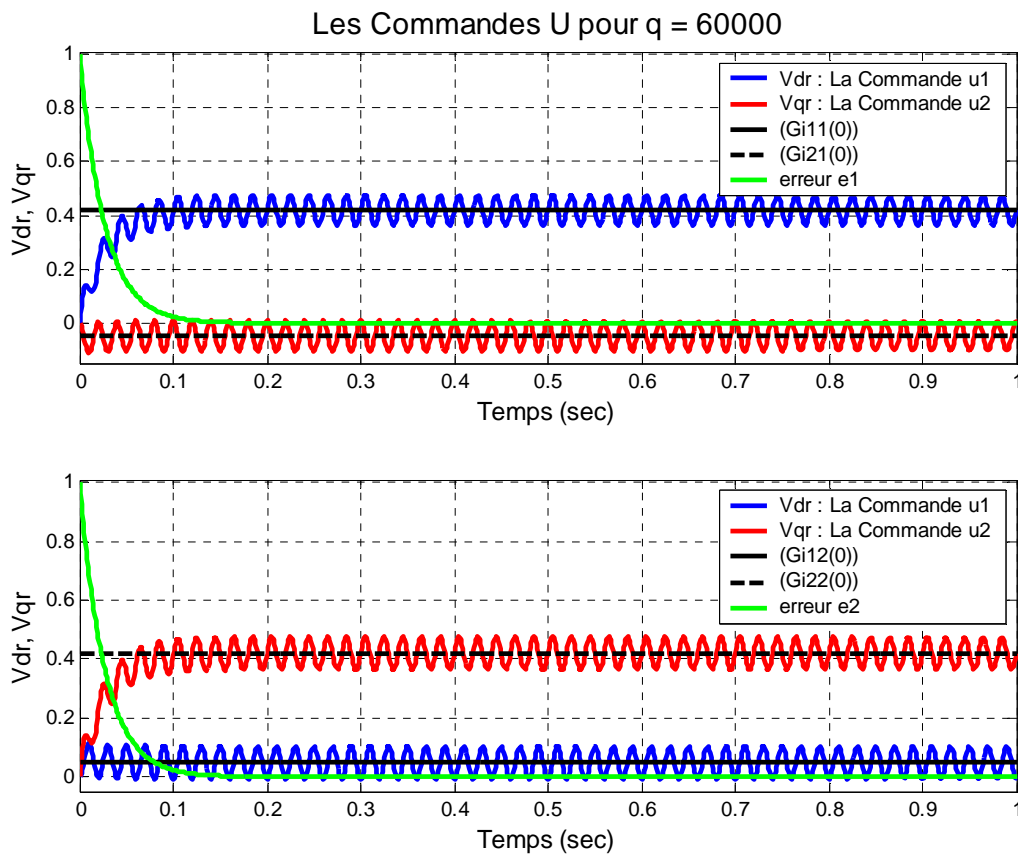


Figure 3.13

3.7.2. La réponse indicielle du processus avec contrôleur :

- Cas sans recouvrement $q = 0$:

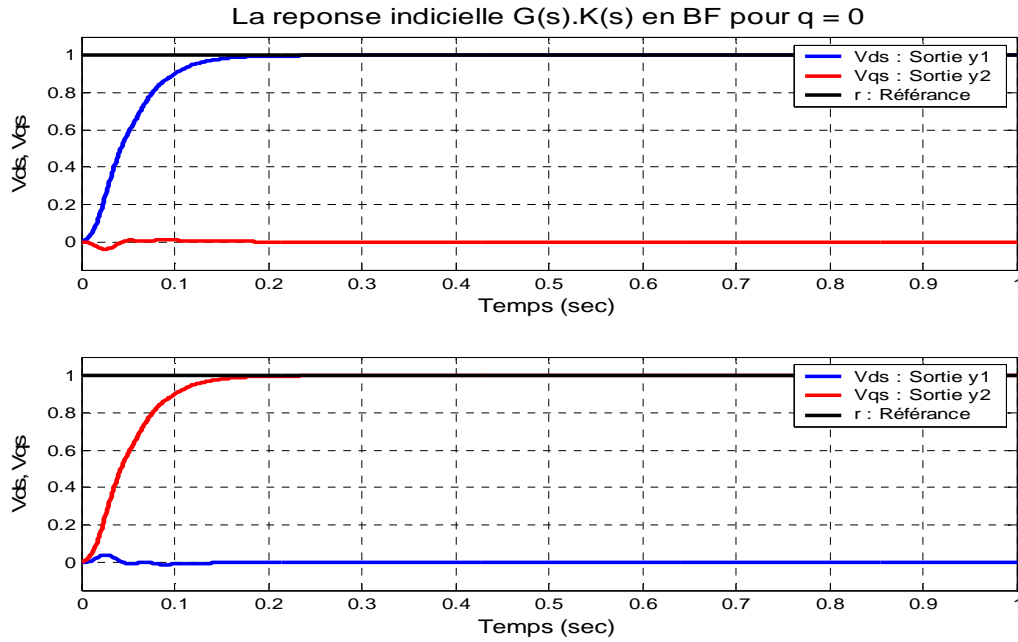


Figure 3.14

La réponse indicielle du processus représentée sur la figure (3.14) montre, que les sorties atteints la consigne sans aucun dépassement avec un temps de réponse de 0,12 (sec) et un très faible couplage.

- Cas avec recouvrement total :

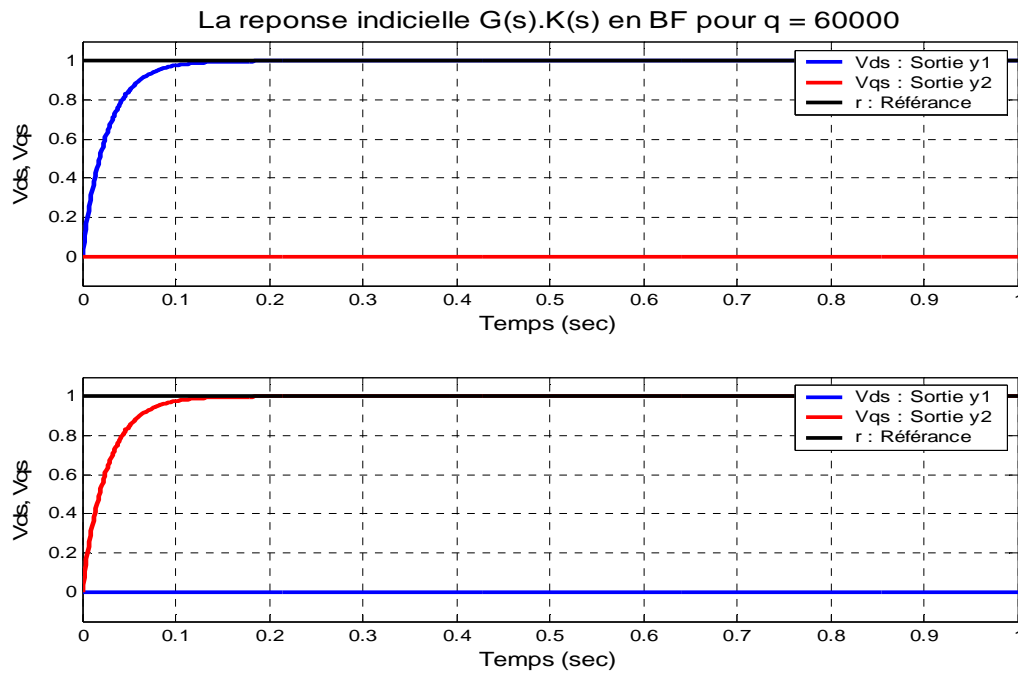


Figure 3.15

De même la réponse temporelle représentée sur la figure (3.15) montre que les sorties atteints la consigne sans aucun dépassement et le temps de réponse est amélioré de 0,12 (sec) à 0,0798 (sec) avec un découplage total.

3.8. Représentations temporelles du régime perturbé :

Nous avons considéré au chapitre 1 que la perturbation paramétrique est multiplicative à la sortie du processus d'où apparaît :

$$G_p(j\omega) = (I_p + \Delta_s(j\omega))G(j\omega)$$

3.8.1. Validation des Commandes :

- Cas sans recouvrement $q = 0$:

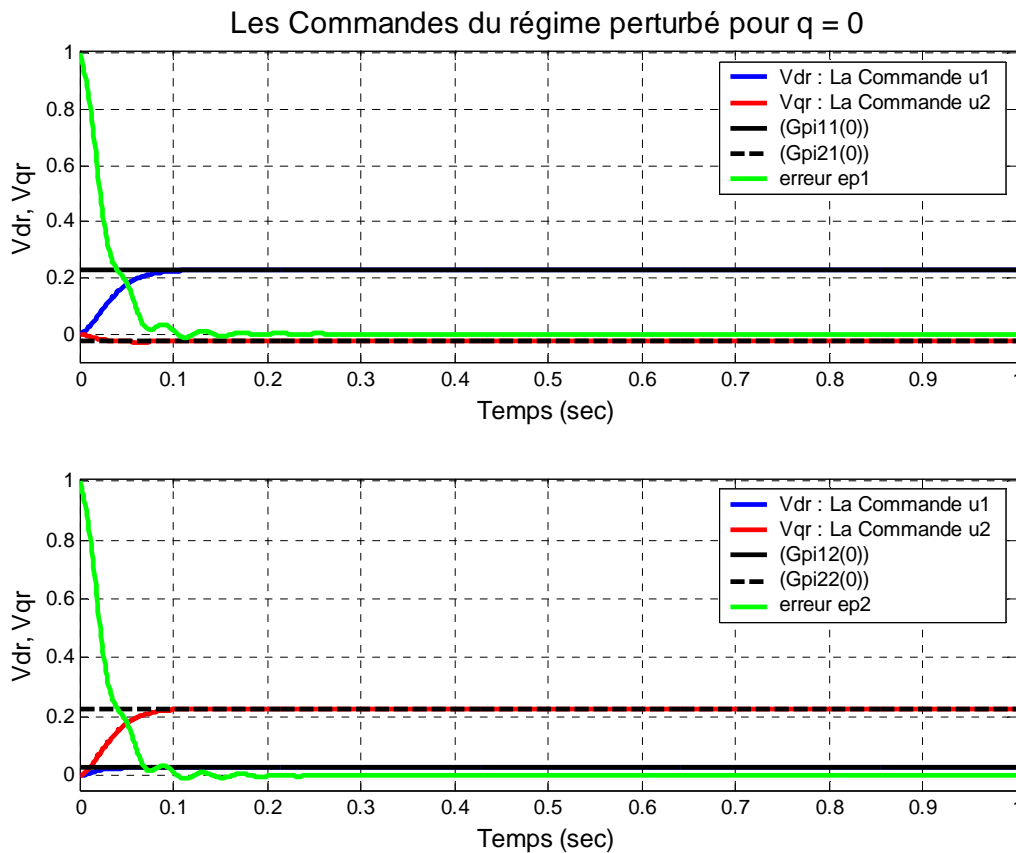


Figure 3.16

Également on observe sur la figure ci-dessus, que la commande tend vers l'inverse du gain

statique $[G_p(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2268 & 0,0259 \\ -0,0259 & 0,2268 \end{bmatrix}$, avec l'erreur de suivi ramenée à zéro.

- **Cas avec recouvrement total :**

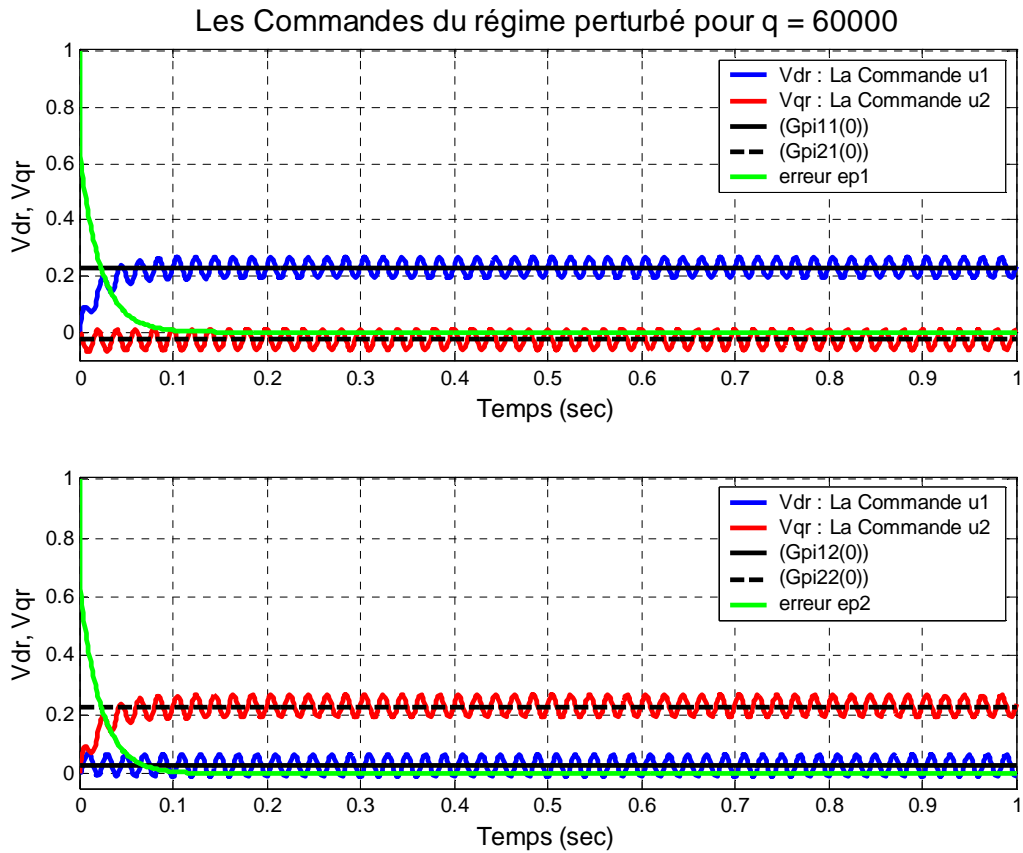


Figure 3.17

On voit sur la figure (3.17), que la commande à même effet d'oscillations harmoniques comme au modèle nominal, et atteint l'inverse du gain statique $[G_p(0)]^{-1}$ avec l'annulation de l'erreur de suivi.

3.8.2. La réponse indicielle du processus perturbé avec contrôleur :

- Cas sans recouvrement $q = 0$:

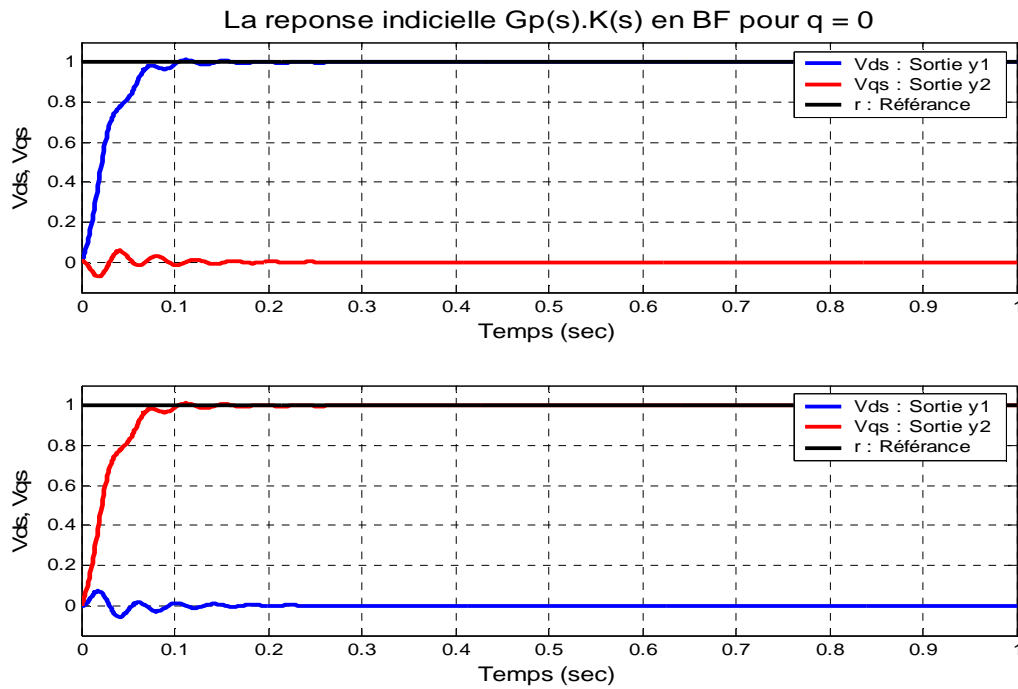


Figure 3.18

Sur la figure (3.18) nous observons, que la sortie générée dispose des oscillations avant d'atteindre le régime permanent sans dépassement avec un temps de réponse de 0,0653 (sec).

- Cas avec recouvrement total :

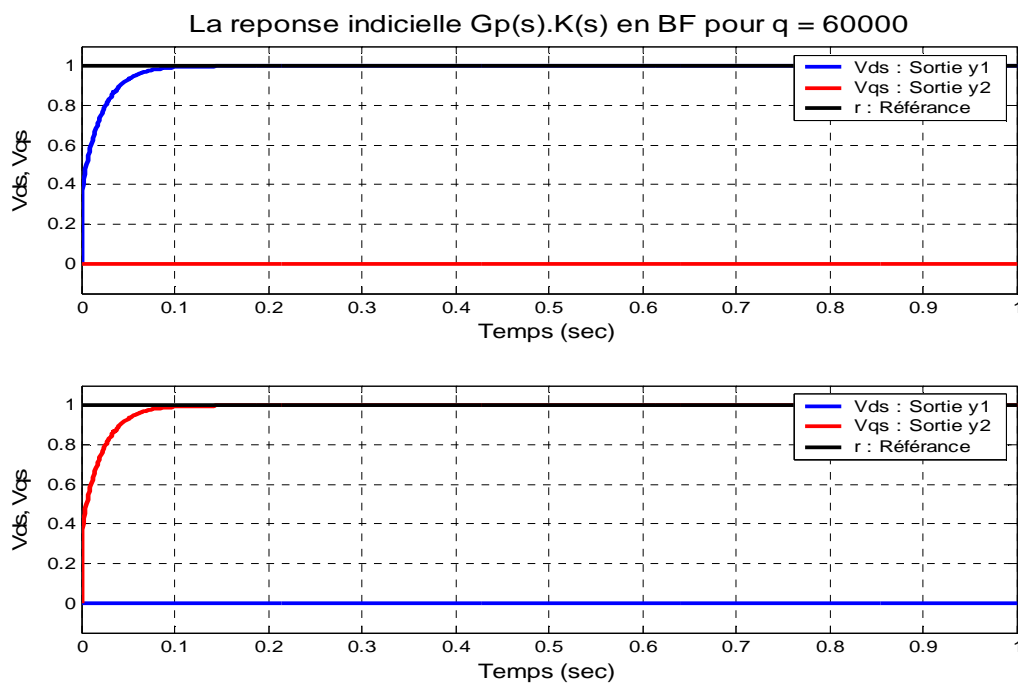


Figure 3.19

On observe sur la figure (3.19), que la réponse du processus perturbé atteint la consigne sans dépassement et sans oscillations en régime transitoire avec un temps de réponse de 0,0565 (sec) accéléré un peu par rapport au résultat du processus nominal dû à la constante de temps de la perturbation paramétrique.

3.9. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons appliqué une méthode pour la conception d'une loi de commande robuste aux perturbations paramétriques pouvant affecter la machine asynchrone. La commande a été développée en utilisant l'approche LQG/LTR détaillée dans le chapitre 2. L'application de la technique LQG/LTR à la machine asynchrone, a donné des résultats en simulation très concluants, notamment pour le fonctionnement en régime perturbé.

D'où les gabarits fréquentiels permettant d'obtenir la robustesse sur les performances et sur la stabilité sont réalisés avec succès.

Nous allons appliquer dans le chapitre qui suit, la même technique sur un modèle différent (AIRCRAFT).

Chapitre IV :



Etude en simulation

de la technique LQG/LTR

Appliqué à l'AIRCRAFT

4.1. Introduction:

Le contenu du présent chapitre comme dans le précédent, est une étude en simulation sur la méthode de synthèse d'un contrôleur robuste par l'approche LQG\LTR Duale, l'étude est réalisée sur le modèle mathématique d'un système physique AIRCRAFT.

4.2. Présentation de l'AIRCRAFT :

- **Le modèle mathématique du processus :**

Le processus à contrôler est un AIRCRAFT. Il est représenté par un modèle mathématique linéaire, ce modèle possède quatre variables d'états, trois entrées et trois sorties où sa dynamique est décrite par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = A.X + B.U \\ Y = C.X + D.U \end{cases} \quad \text{Où :}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4,873 & 0,758 & 9,541 & 8,763 \\ 4,673 & -5,385 & 10,94 & -435,2 \\ -0,3003 & -0,6001 & -5,334 & -20,23 \\ 0,03852 & 0,7446 & 0,5703 & -83,28 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0,483 & 0,003854 & -5,2 \\ 1,498 & 9,072 \cdot 10^{-4} & -39,405 \\ 9,889 & -2,865 \cdot 10^{-5} & 12,04 \\ 0,1282 & -13,96 & -1,0995 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1066 & -0,0186 & -0,01059 & -4,438 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,1165 \cdot 10^{-4} & -1,891 \cdot 10^{-5} & 2,64 \end{bmatrix};$$

Le processus possède quatre modes dont deux complexes conjugués d'où vient :

$$\det(sI_n - A) = s^4 + 98,87 s^3 + 1721 s^2 + 1,086 \cdot 10^4 s + 2,666 \cdot 10^4 = 0$$

$$S_1 = -4,8255 + 2,9901i, \quad S_2 = -4,8255 - 2,9901i,$$

$$S_3 = -10,5106, \quad S_4 = -78,7103.$$

Le lecteur intéressé par plus de détails sur le modèle peut se reporter à [2].

4.3. Fonctionnement en régime nominal du Processus :

4.3.1 La réponse temporelle :

Appliquons à l'entrée du processus un signal de type échelon unitaire sous forme

$$U(t) = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad \text{où } u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}. \quad \text{Un tel test est largement utilisé pour l'analyse des}$$

systèmes car on considère que l'action des perturbations est similaire à un signal saut.

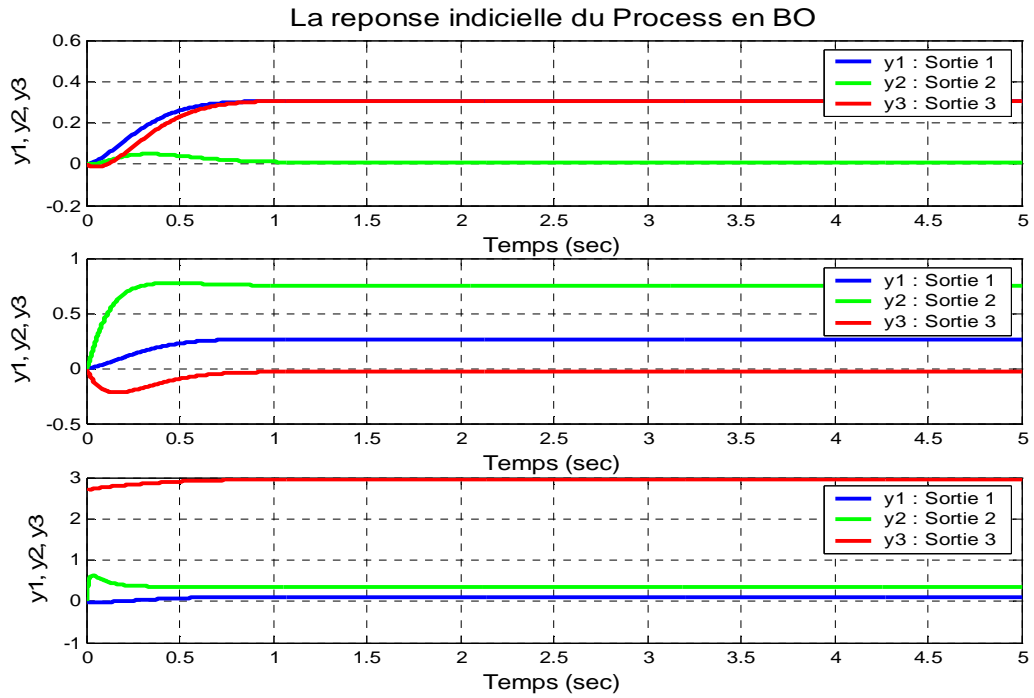


Figure 4.1

La figure (4.1) montre que le système est fortement couplé où les sorties ont un temps de réponse différent.

4.3.2. Représentation des gains principaux du processus :

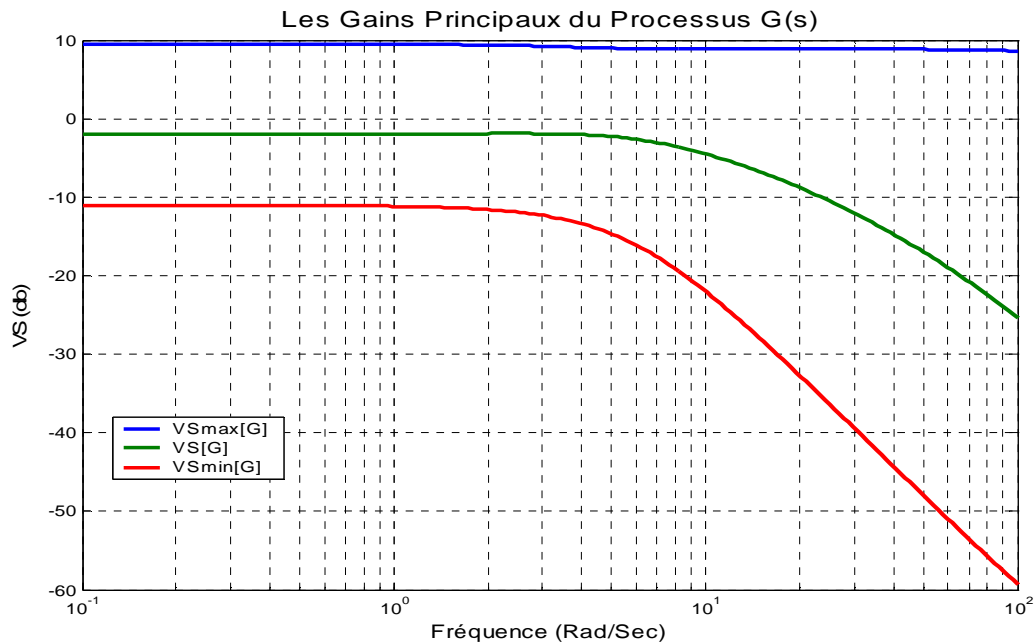


Figure 4.2

Le gabarit fréquentiel ci-dessus illustre, les valeurs singulières du processus qui est mal conditionné. En effet, le gain principal maximal commence à s'éloigner du gain principal minimal à partir des moyennes fréquences.

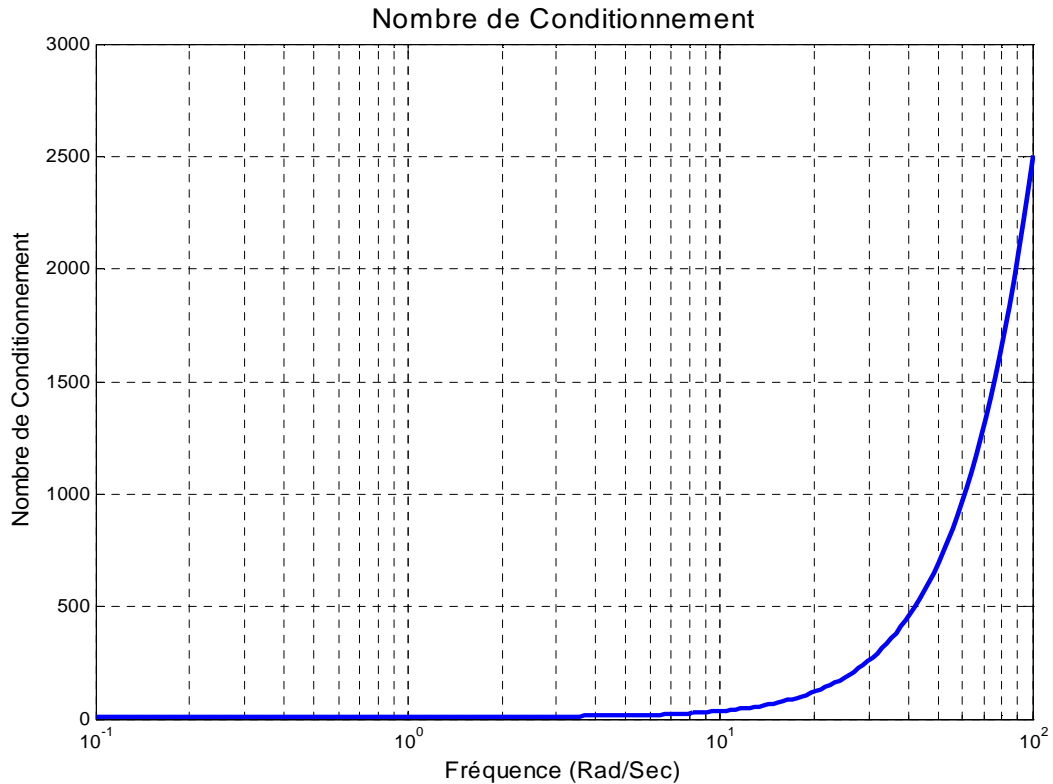


Figure 4.3

D'après la figure (4.3), on observe que le nombre de conditionnement débute par une faible valeur en basses fréquences et commence à devenir important en moyenne fréquence et ne cesse de croître en haute fréquence.

4.4. Choix des spécifications sur la stabilité et les performances :

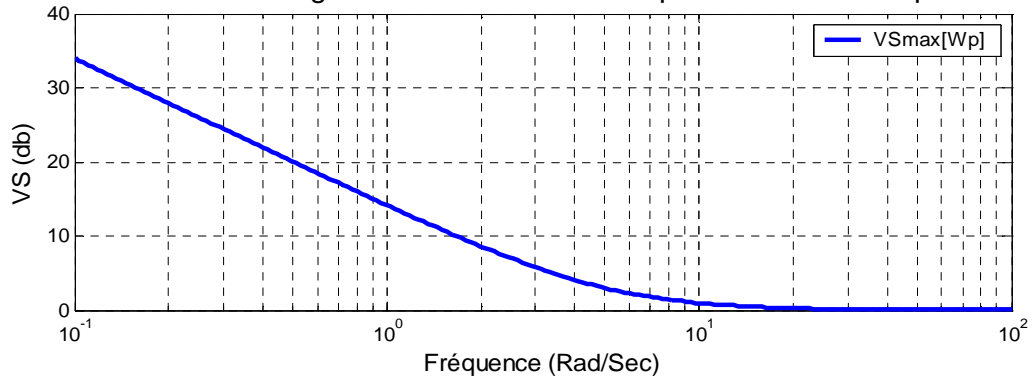
Le choix des spécifications sur la stabilité et les performances se fait comme nous l'avons défini au premier chapitre, pour assurer la robustesse du processus soumis à des incertitudes paramétriques, ainsi on obtient notre choix de la forme suivante :

$$\text{Spécification sur la stabilité : } W_t(s) = \begin{bmatrix} 0,8(1+0,2s) & 0 & 0 \\ 0 & 0,8(1+0,2s) & 0 \\ 0 & 0 & 0,8(1+0,2s) \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

$$\text{Spécification sur les performances : } W_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1+0,2s}{0,2s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+0,2s}{0,2s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+0,2s}{0,2s} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Le gabarit fréquentiel des spécifications est représenté sur la figure (4.4).

Le tracé des Valeurs Singulières Maximales de la spécification sur les performances



Le tracé des Valeurs Singulières Maximales de la spécification sur la stabilité

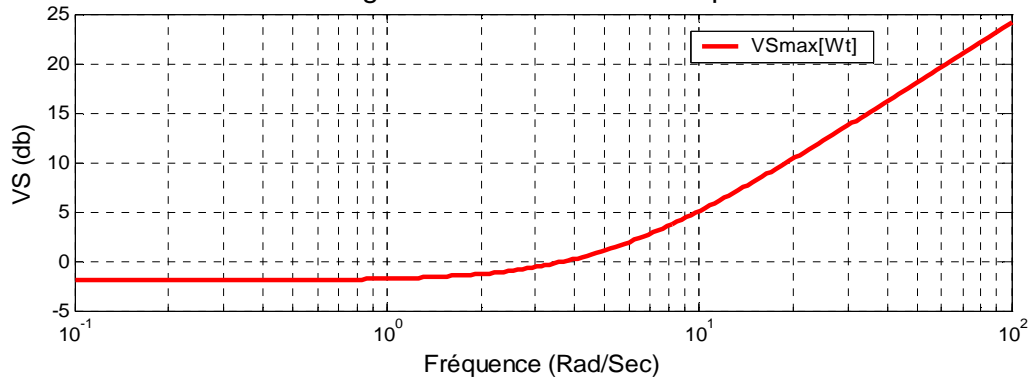


Figure 4.4

- **Condition de robustesse sur la stabilité et les performances :**

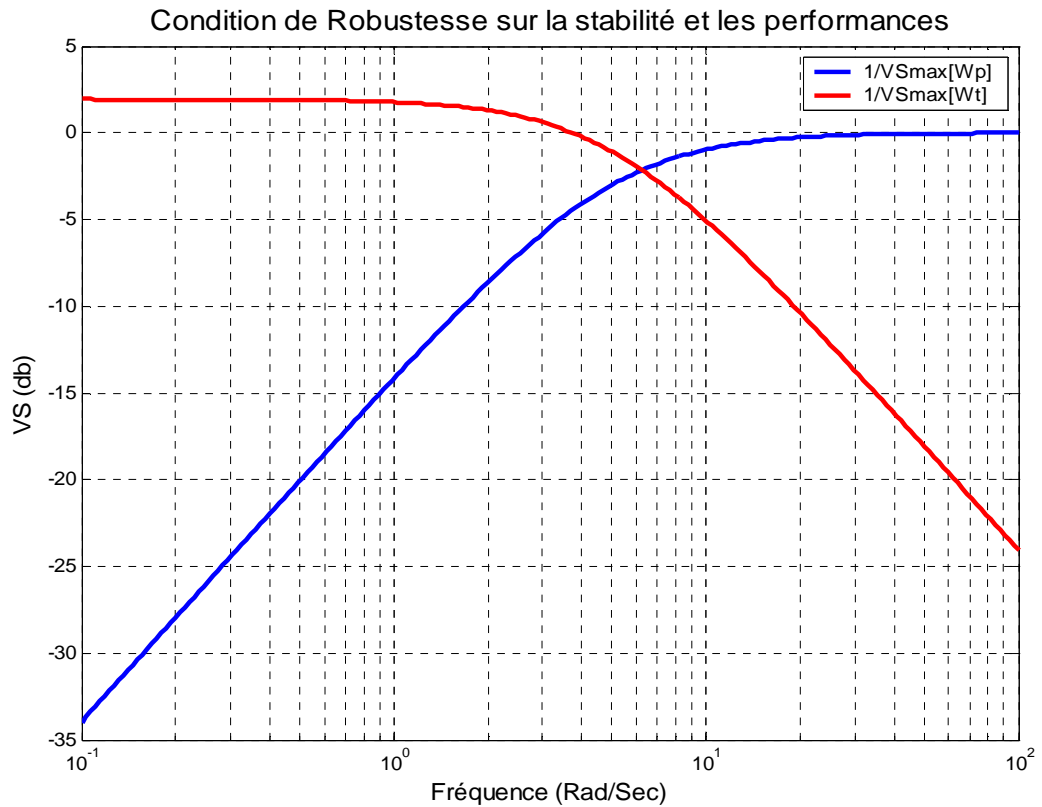


Figure 4.5

4.5. Application de la synthèse LQG\LTR au processus AIRCRAFT :

De la même manière que pour l'application précédente, on rajoute un intégrateur au processus avant d'appliquer la synthèse LQG\LTR Duale, pour assurer la précision du contrôleur (l'annulation de l'erreur statique). [4], [14]

La dynamique du modèle augmenté a pour présentation :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_a x(t) + B_a u(t) \\ y(t) = C_a x(t) + D_a u(t) \end{cases}$$

Avec :

$$A_a = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & C \\ 0_{n \times m} & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1066 & -0,0186 & -0,01059 & -4,438 \\ 0 & 0 & 0 & -4,873 & 0,758 & 9,541 & 8,763 \\ 0 & 0 & 0 & 4,673 & -5,385 & 10,94 & -435,2 \\ 0 & 0 & 0 & -0,3003 & -0,6001 & -5,334 & -20,23 \\ 0 & 0 & 0 & 0,03852 & 0,7446 & 0,5703 & -83,28 \end{bmatrix} ;$$

$$B_a = \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,1165 \cdot 10^{-4} & -1,891 \cdot 10^{-5} & 2,64 \\ 0,483 & 0,003854 & -5,2 \\ 1,498 & 9,072 \cdot 10^{-4} & -39,405 \\ 9,889 & -2,865 \cdot 10^{-5} & 12,04 \\ 0,1282 & -13,96 & -1,0995 \end{bmatrix} ;$$

$$C_a = [I_{m \times m} \quad 0_{n \times n}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad D_a = [0_{m \times m}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

Où : n : l'ordre du système ; m : le nombre d'entrées égal au nombre de sorties ;

La représentation fréquentielle des gains principaux du modèle augmenté est sur la figure (4.6) :

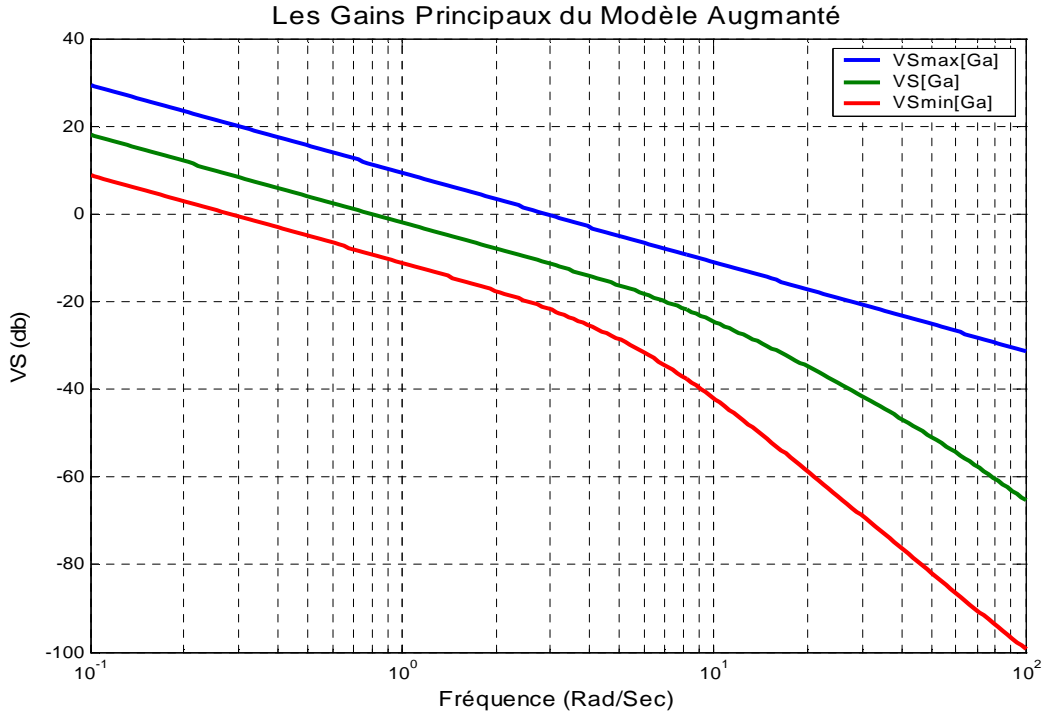


Figure 4.6

On observe sur la figure (4.6), que les valeurs singulières du modèle ont changées de pente dans toute la gamme de fréquence à cause de l'intégrateur rajouté au processus.

4.5.1. Synthèse LQG :

De la même façon que dans le chapitre précédent, on règle séparément le filtre de KALMAN et la commande LQ (par retour d'état), théorème de séparation, il est nécessaire de régler le Filtre de KALMAN par les matrices de variance V et W , de telle sorte de garantir les conditions de robustesse sur la stabilité et les performances, pour que l'état soit 'bien' reconstruit. Et de régler la commande LQ par les matrices de pondération Q et R pour avoir un 'bon' retour d'état, pour atteindre les propriétés de robustesse du processus avec contrôleur obtenu.

- **Réglage des matrices de variance W et V (Réglage du Filtre de KALMAN) :**

Des bruits blanc gaussiens sont ajoutées sur les entrées et les sorties du modèle w et v respectivement.

Le réglage du Filtre de KALMAN s'appuie sur la commande u et sur la mesure y du processus pour donner l'estimée de l'état x .

Pour obtenir un observateur qui permet de restituer l'état x du modèle on doit choisir comme matrices de variance des bruits w et v :

$$W = E\{w^T w\} = \Gamma \Gamma^T \text{ et } V = E\{v^T v\} = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Avec :}$$

Γ et ρ sont déterminés par le concept de « loop-shaping » pour atteindre les objectifs de performance en Basse Fréquence et de garantir la robustesse sur la stabilité en Haute Fréquence.

En rappelant les conditions de robustesse qu'on doit assurer :

La condition de robustesse sur les performances en BF :

$$\underline{\sigma}[L_{FK}(j\omega)] \approx \underline{\sigma}[C_a \Phi(j\omega)\Gamma] / \sqrt{\rho} \geq \bar{\sigma}[W_p(j\omega)], \quad (4.3)$$

La condition de robustesse sur la stabilité en HF :

$$\omega_{c \max} = \bar{\sigma}[C_a \Gamma] / \sqrt{\rho} \leq \omega_m \quad (4.4)$$

Où ω_m : est la fréquence de coupure de l'inverse des valeurs singulières de la spécification sur la stabilité $\frac{1}{\bar{\sigma}[W_t]}$.

Après avoir effectué plusieurs essais -erreurs sur les deux conditions précédentes on abouti à des résultats assez concluantes, car si on assure la robustesse en stabilité on la perd en performance et vice versa, donc on a essayer de les ajustés ensembles afin d'assurer la robustesse souhaité figures (4.7) et (4.8), d'où on a remplacé la condition (4.4) de telle sorte que la robustesse sur la stabilité en HF soit garanti, de la forme suivante :

$$\bar{\sigma}[L_{FK}(j\omega)] < 1/\bar{\sigma}[W_t(j\omega)], \text{ dans [13] avec : } \bar{\sigma}[L_{FK}(j\omega)] \approx \bar{\sigma}[C_a \Phi(j\omega)\Gamma] / \sqrt{\rho}$$

$$\text{On obtient ainsi : } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \rho = 0,038.$$

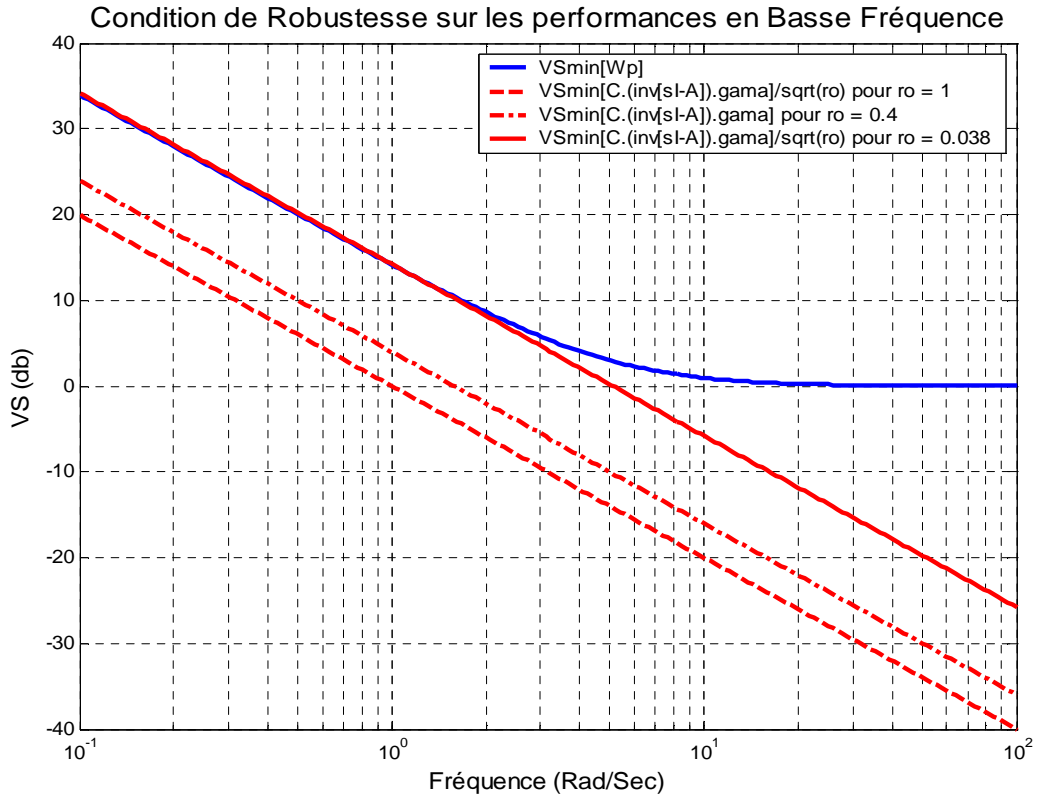


Figure 4.7

Tout en respectant la condition de robustesse sur la stabilité en BF figure (4.8) :

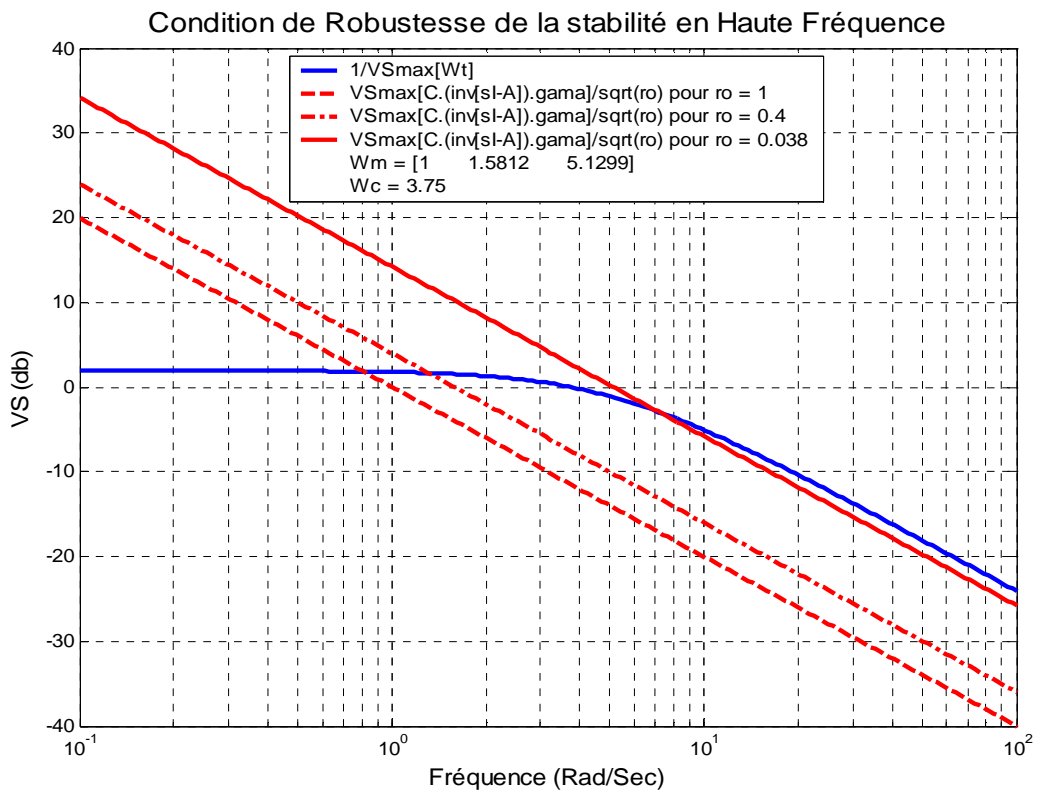


Figure 4.8

Puisque les conditions de robustesse sont vérifiées, alors on peut calculer le gain optimal du Filtre de KALMAN par la relation $K_f = P_f C_a^T V^{-1}$. Avec P_f solution de l'équation de RICCATI $P_f A_a^T + A_a P_f - P_f C_a^T V^{-1} C_a P_f + W = 0$, on obtient ainsi les modes de l'estimation, valeurs propres de $(A_a - K_f C_a)$ sont égaux à :

$$\det(sI - (A_a - K_f C_a)) = 0.$$

$$S_{f1} = -78,7103, \quad S_{f2} = -10,5106, \quad S_{f3} = -4,8255 + 2,9901i,$$

$$S_{f4} = -4,8255 - 2,9901i, \quad S_{f5} = S_{f6} = S_{f7} = -5,5902,$$

- **Réglage des matrices de pondération Q et R pour avoir un bon retour d'état :**

Les matrices de pondération sont déterminées de la forme suivante :

$Q = C^T C$ et $R = 10^{-4} I$, ce choix est imposé de telle sorte pour que le contrôleur LQG obtenu récupère les propriétés de robustesse de l'observateur optimal (Filtre de KALMAN), en effet :

En calculant le gain optimal de la commande LQ par la relation $K = R^{-1} B_a^T P$. Avec P solution de l'équation de RICCATI $P A_a + A_a^T P - P B_a R^{-1} B_a^T P + Q = 0$, on obtient ainsi les modes de commande, valeurs propres de $(A_a - B_a K)$ sont égaux à :

$$\det(sI - (A_a - B_a K)) = 0.$$

$$S_1 = -262,33, \quad S_2 = -84,71, \quad S_3 = -5,40 + 8,03i, \quad S_4 = -5,40 - 8,03i,$$

$$S_5 = -10,34, \quad S_6 = -20,41 + 20,36i, \quad S_7 = -20,41 - 20,36i.$$

Donc la dynamique de l'observateur optimal (Filtre de KALMAN) est relativement lente devant celle de la commande LQ, on peut dire que la robustesse de l'ensemble processus avec contrôleur est maintenue en stabilité mais en performances elle n'est pas assurée Figure (4.10). Ce réglage nous a conduit à un contrôleur LQG initial assez performant. Il faudrait, pour remédier à cela, effectuer le recouvrement du transfert de la boucle LTR Figure (4.9), cette démarche est développée ci-dessous au paragraphe suivant.

4.5.2. Recouvrement du transfert de la boucle, LTR :

Le recouvrement s'appuie sur l'écriture des matrices de pondération Q et R de la forme :

$$Q = Q_0 + q^2 C^T C, \quad R = R_0 \quad (4.5)$$

Première étape : (cas sans recouvrement LTR)

Au début on commence par $q = 0$ ce qui donne un contrôleur initial reposant sur les pondérations nominale Q_0 et R_0 , c'est-à-dire le contrôleur est synthétisé par la technique LQG représenté précédemment.

Deuxième étape :

La technique de recouvrement est la même utilisé dans le chapitre 3, donc à partir d'un contrôleur LQG initial reposant sur les pondérations nominale Q_0 et R_0 , on augmente progressivement la valeur de q jusqu'à obtenir le recouvrement souhaité. Figure (4.9)

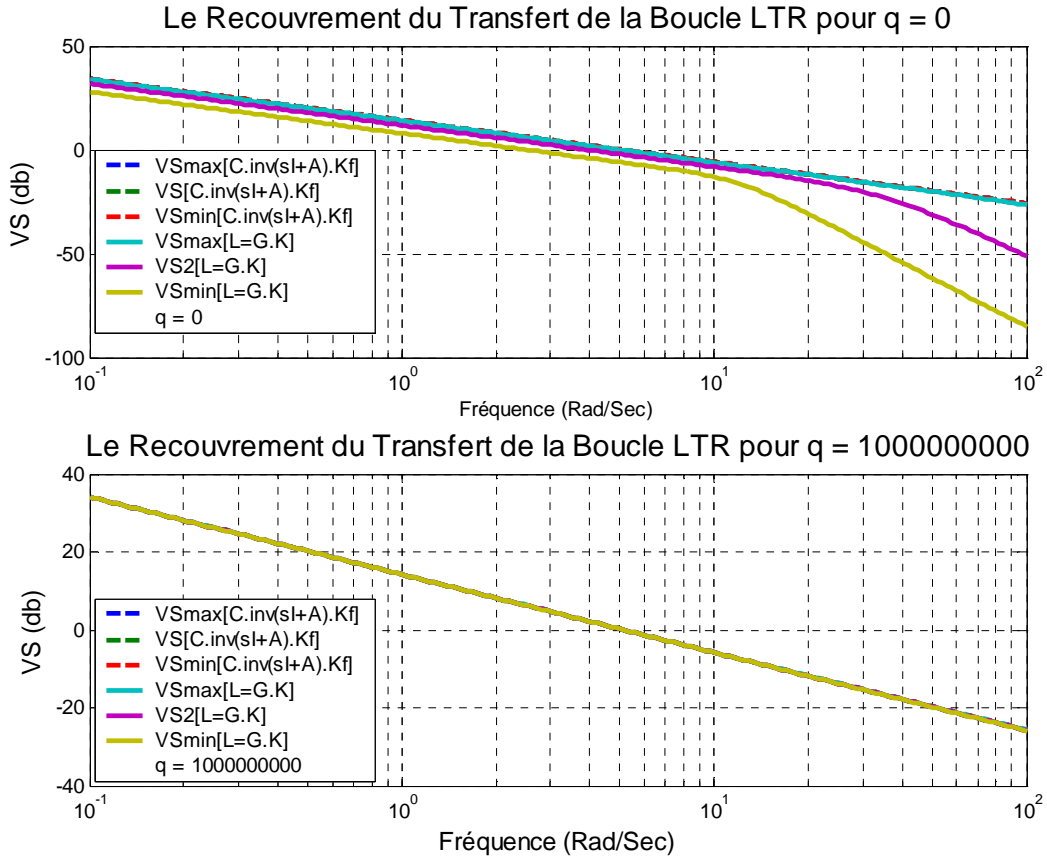


Figure 4.9

D'après la figure ci-dessus on observe que les gains principaux de $L(s) = G(s)K(s)$ tend vers les gains principaux de l'observateur optimal (Filtre de KALMAN) $L_{FK}(s) = C_a(sI - A_a)^{-1}K_f$ lorsque $q = 10^9$, avec un recouvrement total.

4.6. Vérification des conditions de robustesse sur la stabilité et les performances :

On rappelle que les conditions de robustesse sont données par :

$$\text{Condition sur la stabilité : } \overline{\sigma}[T(s)] \leq \frac{1}{\sigma[W_r(s)]} \quad (4.6)$$

$$\text{Condition sur les performances : } \overline{\sigma}[S(s)] \leq \frac{1}{\sigma[W_p(s)]} \quad (4.7)$$

Les résultats obtenus sur les conditions de robustesse sont illustrés sur les figures (4.10) et (4.11).

1. Le cas sans recouvrement $q = 0$ pour le contrôleur LQG :

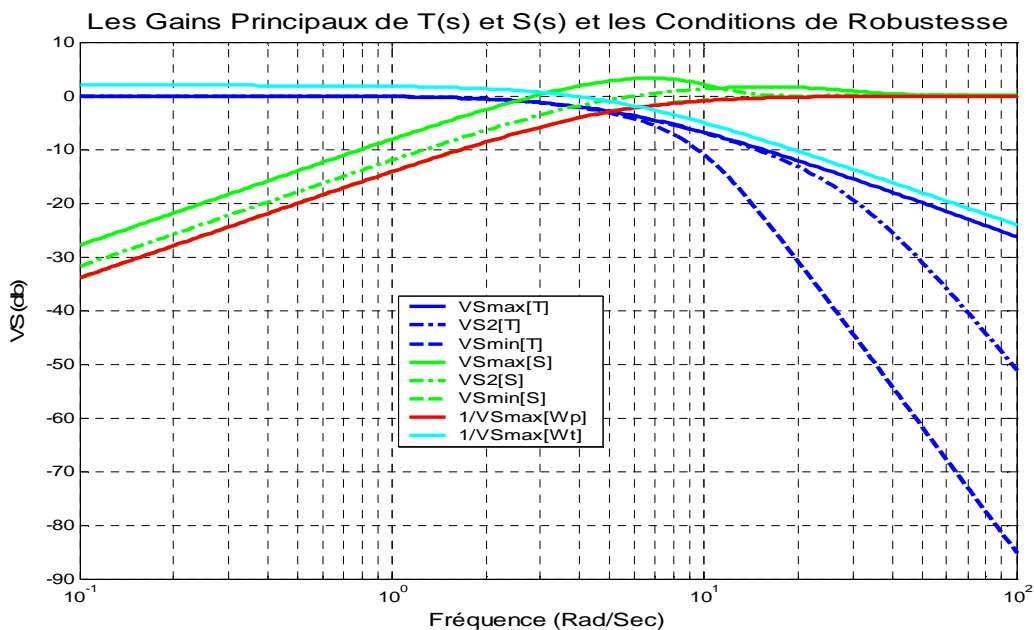


Figure 4.10

On visualise sur la figure (4.10), que le contrôleur obtenu dans se cas ($q = 0$) viole les conditions de robustesse sur les performances avec un faible découplage.

2. cas avec recouvrement total pour le contrôleur LQG\LTR :

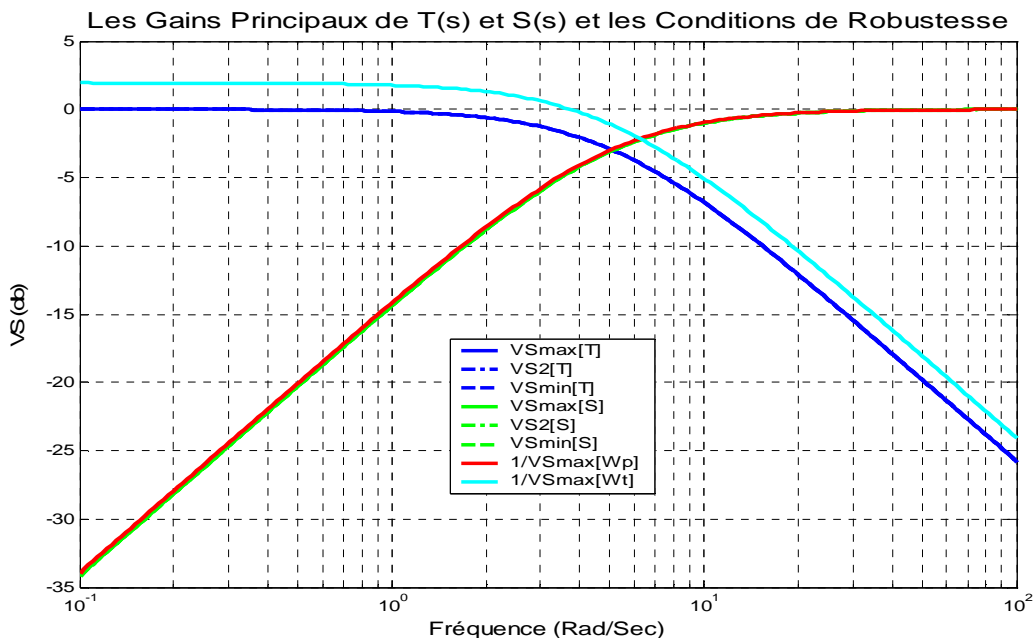


Figure 4.11

Nous observons sur la figure (4.11) que les conditions de robustesse sont assurées, ainsi que le système est complètement découplé où les gains principaux de la fonction de transfert en boucle fermée sont superposés.

4.7. Représentations temporelles du régime nominal :

4.7.1. Validation des Commandes :

- Cas sans recouvrement $q = 0$:

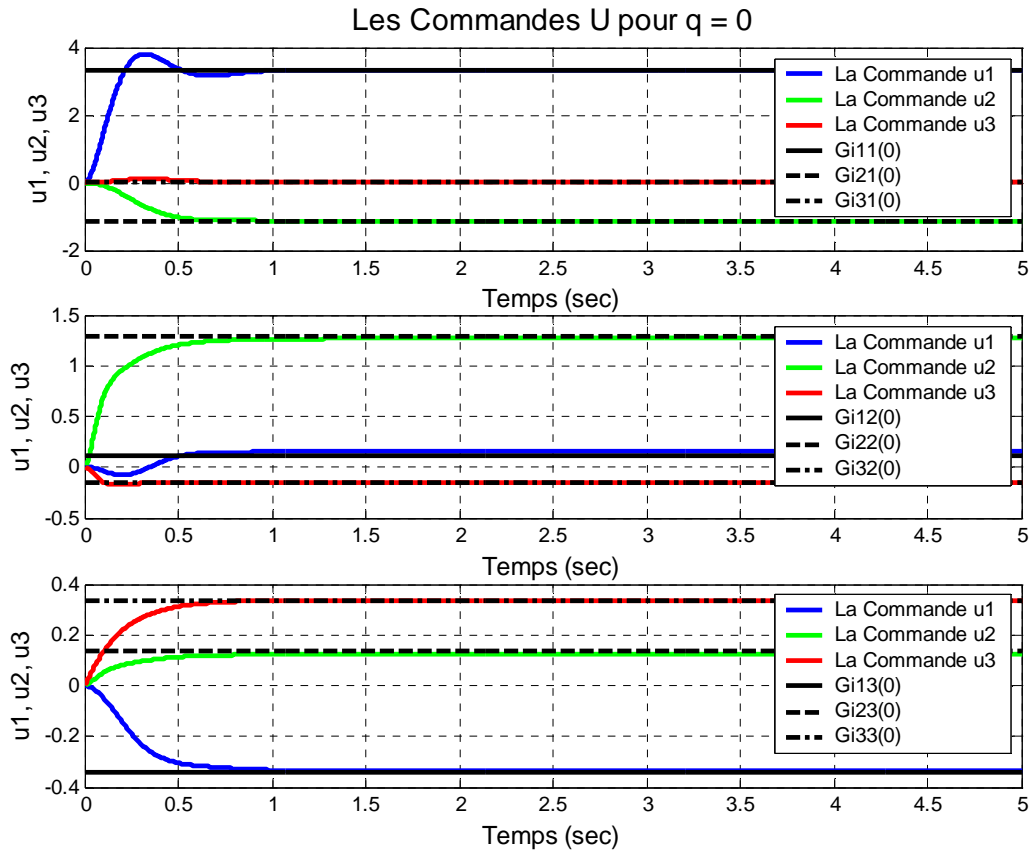


Figure 4.12

D'après la figure (4.12), on voit bien que les commandes atteints l'inverse du gain statique

$$[G(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 3,3228 & 0,1130 & -0,3413 \\ -1,1607 & 1,2846 & 0,1344 \\ 0,0129 & -0,1495 & 0,3360 \end{bmatrix} .$$

• Cas avec recouvrement total :

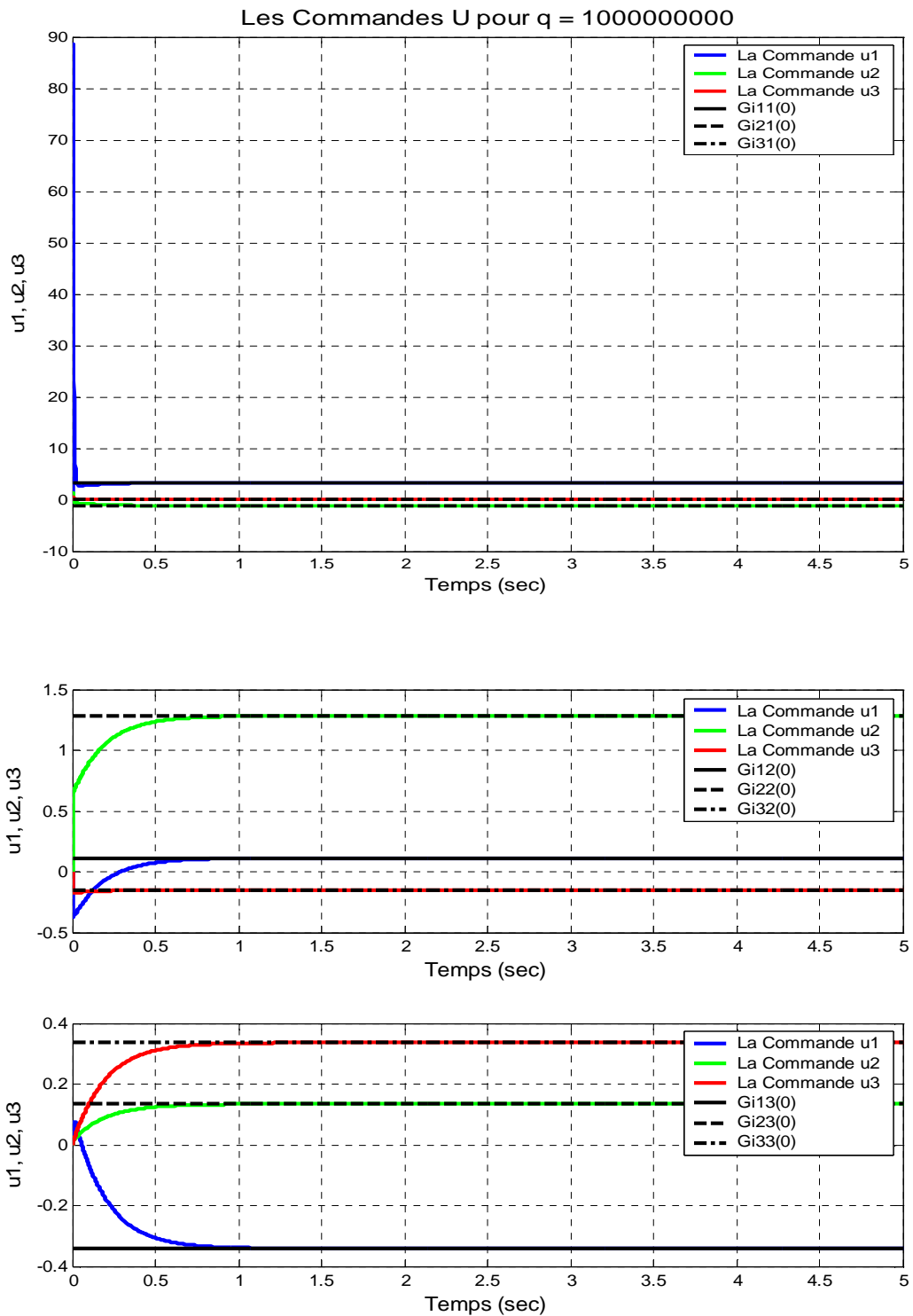


Figure 4.13

Sur la figure ci-dessous on voit bien que, la première commande démarre par une forte énergie puis devient faible pour donné le temps d'accélééré la première sortie du processus, par contre la dernière commande commence par une très faible énergie pour décélééré la troisième sortie, on observe aussi que toutes les commandes atteints l'inverse du gain statique $[G(0)]^{-1}$.

4.7.2. La réponse indicielle du processus avec contrôleur :

- Cas sans recouvrement $q = 0$:

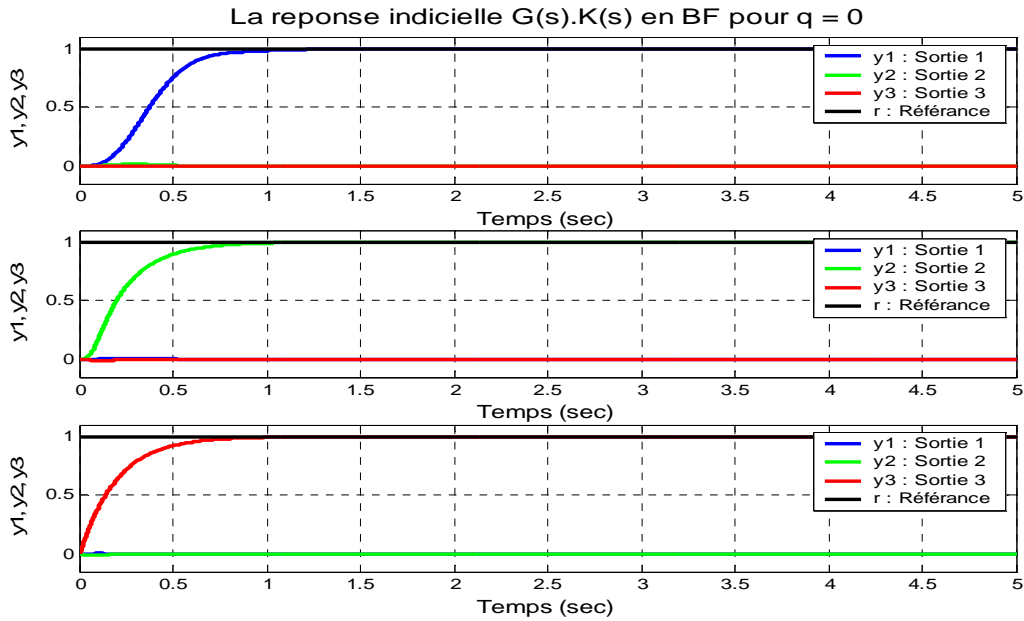


Figure 4.14

La réponse indicielle du processus représentée sur la figure (4.14) montre que les sorties atteints la consigne sans aucun dépassement et le régime transitoire est faiblement découplé, car le temps de réponse est différent pour chaque sortie 0,735, 0,645 et 0,588 (sec).

- Cas du recouvrement total :

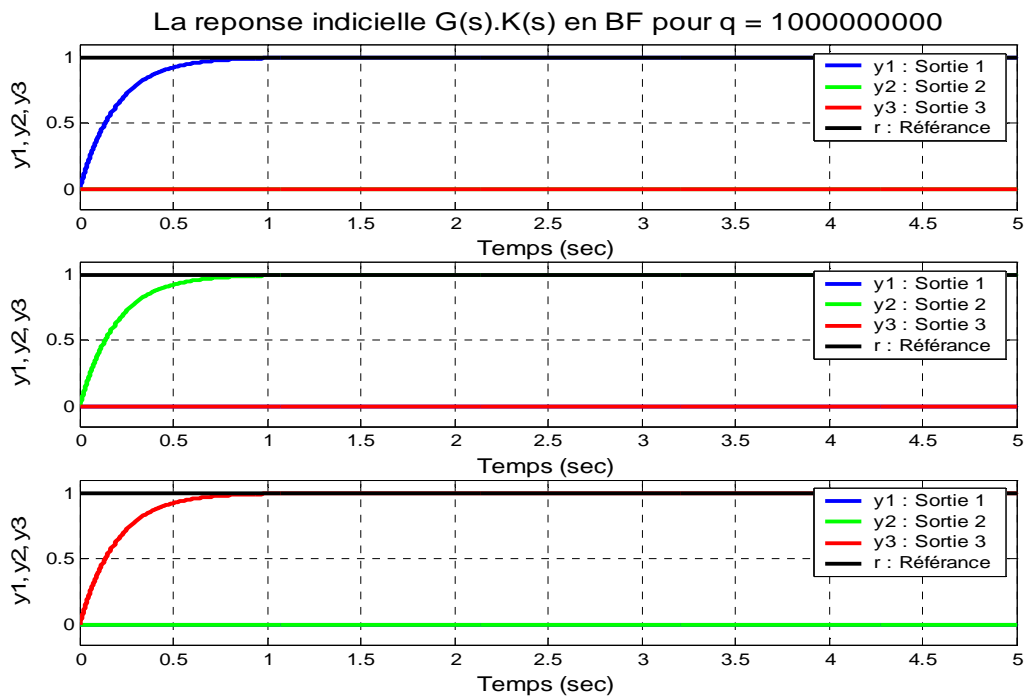


Figure 4.15

La réponse temporelle représentée sur la figure (4.15) montre que les sorties atteints la consigne sans aucun dépassement avec un découplage total et le temps de réponse est amélioré de 0,584 (sec).

4.8. Représentations temporelles du régime perturbé :

Nous avons considéré au chapitre 1 que la perturbation paramétrique est multiplicative à la sortie du processus d'où apparaît :

$$G_p(j\omega) = (I_p + \Delta_s(j\omega))G(j\omega) \quad (4.8)$$

4.8.1. Validation des Commandes :

- Cas sans recouvrement $q = 0$:

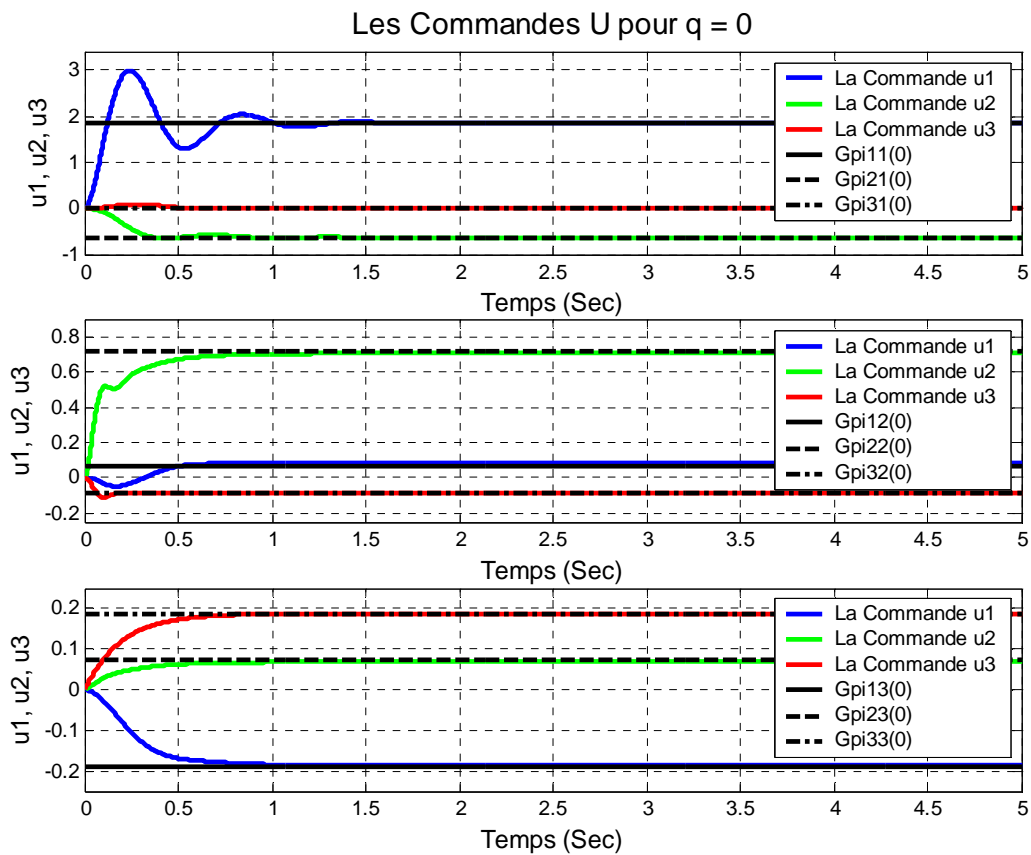


Figure 4.16

Également on observe sur la figure ci-dessus que la commande atteint l'inverse du gain

$$\text{statique } [G(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,8460 & 0,0628 & -0,1896 \\ -0,6449 & 0,7137 & 0,0747 \\ 0,0072 & -0,0830 & 0,1867 \end{bmatrix}.$$

- Cas avec recouvrement total :

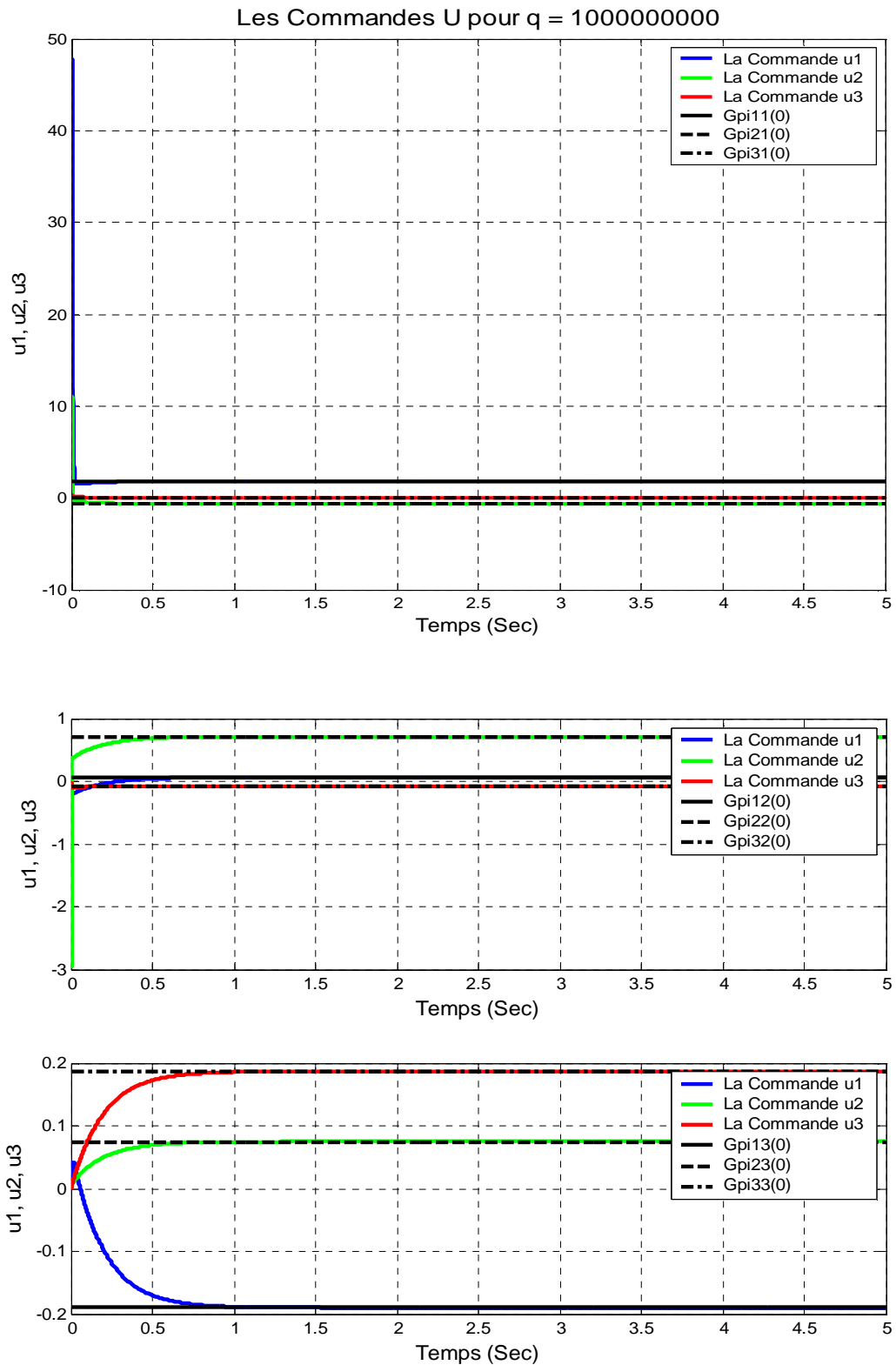


Figure 4.17

On voit sur la figure (4.17) que, les commandes atteints l'inverse du gain statique $[G_p(0)]^{-1}$, ainsi comme au régime nominal la première sortie a besoin d'une forte énergie de commande

au départ pour l'accélération, tandis que la troisième sortie n'a besoin que d'une très faible énergie de commande au départ pour la décélérer.

4.8.2. La réponse indicielle du processus perturbé avec contrôleur :

- Cas sans recouvrement $q = 0$:

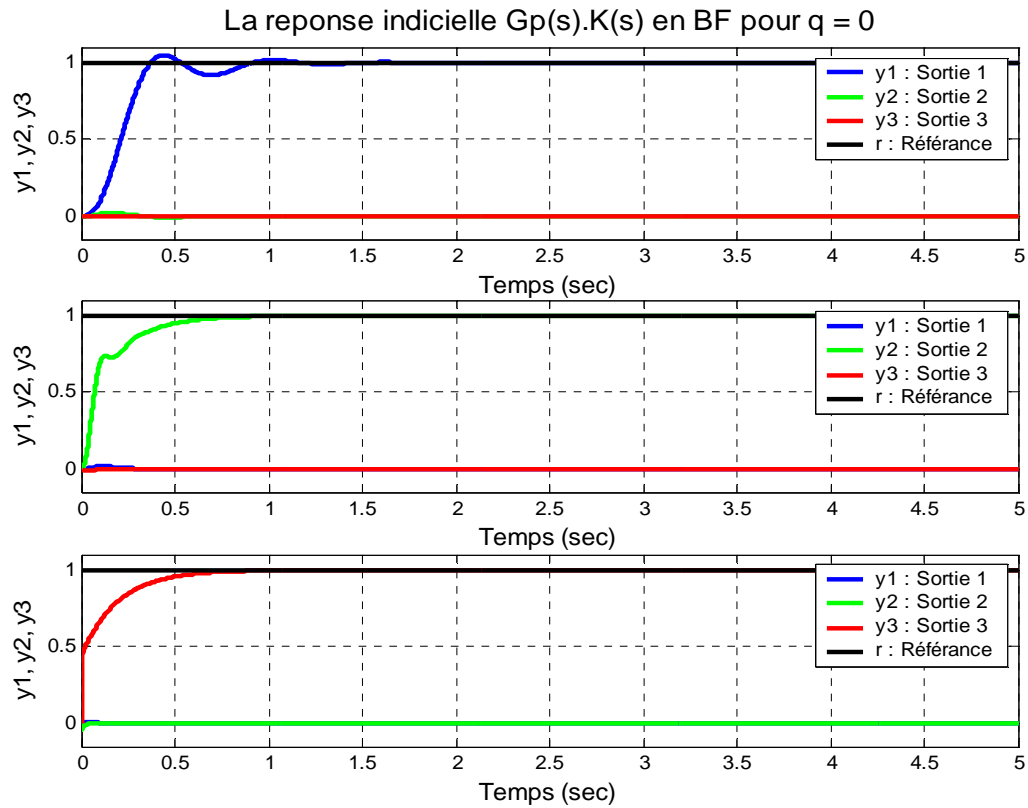


Figure 4.18

Nous voyons sur la figure (4.18), que le processus perturbé est couplé en régime transitoire se qui possède des oscillations sur la première sortie avec un dépassement de 1,05 à 0,44 (sec), et le temps de réponse est différent pour chaque sortie respectivement de 0,806, 0,503 et 0,475 (sec).

- **Cas avec recouvrement total :**

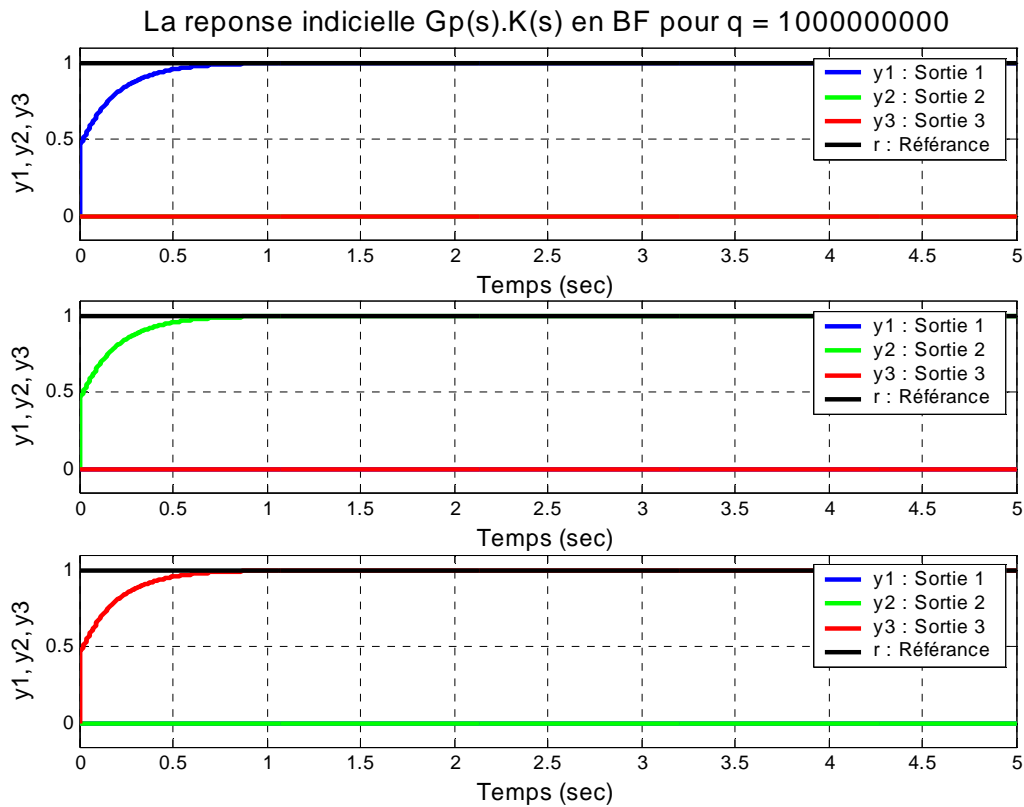


Figure 4.19

On observe sur la figure (4.19) que, la réponse du processus perturbé atteint la consigne sans dépassement, c'est-à-dire douce avec un temps de réponse de 0,473 (sec).

4.9. Conclusion :

Ce chapitre a présenté les résultats obtenus en simulation, qui nous permettent de conclure à l'efficacité de la technique LQG\LTR pour la commande robuste des systèmes bouclés multivariables subis à des perturbations, particulièrement dans notre étude à des incertitudes paramétriques pouvant affecter l' AIRCRAFT.

Conclusion

générale

CONCLUSION GENERALE :

Dans ce mémoire, nous avons appliqué une méthode pour la conception d'une loi de commande robuste aux incertitudes paramétriques affectant les deux modèles de synthèse la machine asynchrone et l'AIRCRAFT.

La commande a été développée en utilisant la méthode de commande LQG/LTR Duale où, un observateur optimal a été développé, qui permet de reconstituer l'état du système, en tenant compte des conditions de robustesse sur la stabilité et les performances, puis en calculant la commande par retour d'état (LQ) de façon à ne pas dégrader les propriétés de robustesse de l'observateur optimal (Filtre de KALMAN). Ensuite la commande et l'observateur ont été appliqués aux deux modèles de Synthèse.

Les résultats obtenus en simulation de la robustesse du contrôleur LQG ont montré la faiblesse de la commande LQG aux niveaux des performances, alors on a introduit le recouvrement LTR afin de tendre la commande LQG vers l'observateur optimal (Filtre de KALMAN) pour rendre cette commande plus robuste (LQG/LTR).

Les résultats de simulations réalisés sur la commande LQG/LTR montrent un comportement très satisfaisant de la robustesse sur le régime nominal et perturbé.

De même, il est possible d'appliquer la même méthodologie en utilisant une synthèse H_{∞} .

Quelle que soit la méthode (*LQG/LTR* ou H_{∞}) utilisée l'important est de satisfaire les gabarits fréquentiels permettant d'obtenir la robustesse sur les performances et sur la stabilité désirées.

Références

Bibliographiques

REFERENCES :

- [1] A. P. Sage and C. C. White, "Optimum Systems Control", Prentice Hall, 1977.
- [2] A. T. Miller, "Integrated controls and diagnostics: An application to a nonlinear aircraft engine model," Master's thesis, ECE Dept. Northeastern Univ. 1989.
- [3] A. G. J. MacFarlane and B. Kouvaritakis, "A design technique for linear multivariable feedback systems", Int. J. Contr., Vol. 25, pp. 837-879, 1977.
- [4] Athans M, "A tutorial on the LQG/LTR method", Proc. American Control Conference, 1986.
- [5] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, "Linear optimal control". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [6] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, G. Ferreres, "Robustesse et Commande Optimale", Cépaduès Editions, 1999.
- [7] D. Milich, L. Valavani and M. Athans, "Feedback System Design with an Uncertainty Plant" Laboratory for Information and Decision Systems, M.I.T., LIDS-P-1614, October 1986.
- [8] F. R. Rubio and J. Aracil, "Design of a combined tracking control system", Control Eng. Practice, Vol. 5, No. 1, pp. 23-31,1997.
- [9] G. Stein and M. Athans, "The LQG/LTR Procedure for multivariable feedback control design method". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, n°2, 1987.
- [10] H. Kwakernaak and R. Sivan, "Linear optimal control systems". Wiley inter - science, 1972.

- [11] J. C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, n°1, 1981.
- [12] J. Douglas and M. Athans, "Robust Linear Quadratic Designs with real parameters uncertainty", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, n°7, 1994.
- [13] M. G. Safonov and M. Athans, "Gain and phase margin of multiloop LQG regulators", IEEE Transactions on Automatic Control. Apr. 1977.
- [14] P. Colaneri and G. Nicolao, "Multirate LQG Control of Continuous-time Stochastic Systems", Automatica, Vol. 31, No. 4, pp.591-596, 1995.
- [15] V. Zoubov, "Théorie de la commande", Traduit du russe par I. Pétrouva, Traduction française Editions Mir, 1978.
- [16] W. H. Kwon and S. J. Lee, "LQG/LTR Methods for Linear Systems with Delay in State" IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, n°7, 1988.
- [17] Yahmedi. S, (1993), "Mise en œuvre d'Outils Algorithmiques Permettant l'Etude de la Robustesse de la Stabilité et des Performances des Systèmes Multivariables Bouclés", Ph. D Thesis (French Text), Université Laval, Québec, Canada.

Résumés

RESUME :

Ce mémoire traite de la commande robuste par la synthèse LQG/LTR des systèmes multivariables soumis à des perturbations paramétriques. Nous avons choisi d'appliquer cette loi de commande robuste sur deux modèles de synthèse mal conditionnés : la machine asynchrone et l'AIRCRAFT.

L'approche consiste à synthétiser un contrôleur robuste minimisant un critère quadratique (contrôleur LQG) pour les systèmes multivariables décrits sous forme temporelle dans l'espace d'état. Le contrôleur LQG est constitué d'un Estimateur d'état (Filtre de KALMAN) et d'une commande par retour d'état (LQ). La présence de cette dernière fait qu'affaiblir les propriétés de robustesse de l'Estimateur, alors on a utilisé le recouvrement du transfert de la boucle LTR, pour restaurer les propriétés de robustesse de l'Estimateur, par conséquent les résultats obtenus en simulation ont montrés l'efficacité de cette approche sur le régime nominal et perturbé des deux systèmes.

ABSTRACT:

This memory is about robust control by the LQG/LTR synthesis of multivariable systems with parametric perturbations. We chose of applied this robust control law on two models of synthesis badly conditioned: the asynchronous machine and the AIRCRAFT.

The approach is based to synthesizing a robust controller minimizing a quadratic criterion (controller LQG) for multivariable systems described by temporal shape in the state space. The controller LQG is constituted of Estimator (KALMAN Filter) and state feedback control (LQ). The presence of this last did reduce robustness properties of the Estimator, then one used the Loop Transfer Recovery (LTR), to restore robustness properties of the Estimator, from where results in simulation showed the efficiency of this approach on the nominal and unsettled regime of two systems.

الملخص

لقد تطرقنا في هذه المذكرة في البحث عن التحكم المتين باستعمال (LQG/LTR) الشامل للأنظمة متعددة المتغيرات الخاضعة للاضطرابات المعلمة. لقد وقع اختيارنا بتطبيق التحكم المتين على نموذجين اصطناعيين سيء المشروط هم : المولد المتزامنة و الطائرة.

تكمن هذه الطريقة في تركيب مراقب متين بالحد الأدنى في معيار رباعي (مراقب LQG) للأنظمة متعددة المتغيرات الموصوفة على الصيغة الزمنية في بعد الحالة. المراقب (LQG) مؤلف من مقيم الحالة (مرشح كلمان، Filtre de KALMAN) و التحكم برجوع الحالة (LQ). هذا الأخير يعمل على إضعاف خاصيات متانة المقيم، فلجانا إلى استعمال استرجاع بتحويل الحلقة (LTR) الذي يتعلق بإعادة خاصيات متانة المقيم، حيث أننا أثبتنا في النتائج المتحصل عليها في التصنع على فعالية هذه الطريقة على النظام الاسمي و المضطرب للنموذجين.