



Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université d'Annaba
BADJI MOKHTAR

Faculté des sciences de l'ingénieur- Département d'Electronique

Modèle ASM : Analyse de Sensibilité et Modélisation par multi-modèle

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 13 Janvier 2010

pour l'obtention du

Magistère en Électronique

(spécialité Surveillance des systèmes à capteurs intelligents)

par

MENDACI Khaled

Composition du jury

<i>Président :</i>	DJEGHABA Messaoud	Professeur à l'université d'Annaba
<i>Rapporteur :</i>	HARKAT Mohamed Faouzi	M.C. à l'université d'Annaba
<i>Examineurs :</i>	DOGHMANE Nouredine BENOUARET Mohamed KHADIR Tarek	Professeur à l'université d'Annaba M.C. à l'université d'Annaba M.C. à l'université d'Annaba

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je tiens à remercier fortement mon promoteur Monsieur HARKAT Mohamed Faouzi , Maitre de conference à l'université d'Annaba, de m'avoir encadré durant ce travail. Qu'il trouve ici toute mes reconnaissances pour la confiance qu'il a su m'accorder, ainsi pour avoir contribué de manière essentielle aux résultats de ce travail, par sa clarté à l'heure de structurer le travail, ses conseils, son professionnalisme, ses compétences techniques qui ont été très importantes pour la réalisation du travail et très formateurs pour moi.

Je tiens à remercier aussi Monsieur DOGHMANE Noureddine et tout les enseignants de l'option : Diagnostic , de m'avoir aidé durant tout le parcours de post-garduation.

J'adresse de sincères remerciements à tous les notables membres du jury pour l'honneur de leur présence indispensable et d'accepter l'évaluation objective de ce modeste travail.

Que soient remerciées aussi toutes les personnes qui, par la confiance qu'ils m'ont octroyée, les connaissances qu'ils ont toujours su partager avec moi, leur soutien morale , ainsi que leur support quotidien, ont rendu possible ce travail. Qu'ils retrouvent dans ces quelques lignes toute mes gratitudes et mes reconnaissances.

À mes chers parents.

À tout les membres de ma famille.

À tout mes amis.

À tout ceux qui m'aime.

Table des matières

Table des figures	vii
Liste des tableaux	ix
Notations	xi
Introduction générale	1

Chapitre 1 Station d'épuration des eaux usées modélisée par ASM1

1.1	Les procédés de traitement des eaux usées	4
1.1.1	L'eau et la pollution	4
1.1.2	Le traitement des eaux usées	6
1.2	Le traitement biologique des eaux usées	10
1.2.1	Les principaux polluants	11
1.2.2	Les micro-organismes épurateurs	13
1.2.3	Les processus métaboliques	17
1.2.4	Les traitements biologiques	19
1.3	Système étudié	24
1.3.1	Le modèle ASM1 : Phénomènes biologiques et variables d'état	25

Chapitre 2 Modélisation des systèmes non linéaires par multi-modèle
--

2.1	Introduction	29
2.2	Modélisation	30
2.3	Recherche des modèles locaux par linéarisation	32
2.3.1	Points de fonctionnement statiques	33
2.3.2	Optimisation paramétrique	35
2.3.3	Conclusion	39

Chapitre 3 Fonctions de sensibilité
--

3.1	Introduction	41
3.2	Analyse de sensibilité	41
3.2.1	Méthode des différences finies	43
3.2.2	Méthode directe	43

Chapitre 4	
Application sur ASM1	
4.1	Méthode différentielle directe 46
4.1.1	Fonction sensibilité 46
4.1.2	Modèle réduit 48
4.1.3	Remarque 49
4.2	Application de la représentation multimodèle 49
4.2.1	Remarque 50
4.2.2	Conclusion 50
Chapitre 5	
Conclusions	
Annexes	61
Annexe A	
Algorithme de LEVENBERG-MARQUARDT	
Bibliographie	69

Table des figures

1.1	Différentes filières du procédé d'épuration des eaux résiduaires	7
1.2	Les micro-organismes et leurs besoins nutritifs et énergétiques	16
1.3	Schéma de fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées	23
1.4	traitement biologique par boues activées	24
1.5	Procédé d'élimination du nitrogène	25
2.1	Architecture d'un multimodèle à modèle locaux couplés	32
2.2	Entrées $u(t)$ du système	34
2.3	Caractéristiques statiques des états du modèle réel (x_{1s}, x_{2s})	35
2.4	Fonctions d'activations $\mu_i(u(t))$ et $\omega_i(u(t))$ du système	36
2.5	Caractéristiques des états du modèle réel (x_{1s}, x_{2s}) et du multi modèle (x_{1m}, x_{2m})	37
2.6	Fonctions d'activations $\mu_i(u(t))$ et $\omega_i(u(t))$ du système	38
2.7	Caractéristiques des états du modèle réel (x_{1s}, x_{2s}) et du multi modèle (x_{1m}, x_{2m})	39
4.1	Paramètres à étudier	45
4.2	Courbes de sensibilités de S_s par rapport aux différents paramètres	51
4.3	Courbes de sensibilités de S_o par rapport aux différents paramètres	51
4.4	Courbes de sensibilités de SNH par rapport aux différents paramètres	52
4.5	Courbes de sensibilités de SNO par rapport aux différents paramètres	52
4.6	Courbes de sensibilités de XH par rapport aux différents paramètres	53
4.7	Courbes de sensibilités de XA par rapport aux différents paramètres	53
4.8	Entrées du système	54
4.9	Etats du modèle ASM1 et modèle réduit : cas d'anoxie	54
4.10	Etats du modèle ASM1 et modèle réduit : cas d'aérobie	55
4.11	Erreur sur les états entre modèle ASM1 et modèle réduit : cas d'anoxie	55
4.12	Erreur sur les états entre modèle ASM1 et modèle réduit : cas d'aérobie	56
4.13	Sorties du modèle et du multi modèle : cas de 6 points de fonctionnement (à droite : aérobie, à gauche : anoxie)	56
4.14	Erreur entre modèle et multi modèle : cas de 6 points de fonctionnement (à droite : aérobie, à gauche : anoxie)	57
4.15	Sorties du modèle et du multi modèle : cas de 10 points de fonctionnement (à droite : aérobie, à gauche : anoxie)	57
4.16	Erreur entre modèle et multi modèle : cas de 10 points de fonctionnement (à droite : aérobie, à gauche : anoxie)	58

Liste des tableaux

1.1	Définition des paramètres utilisés dans le modèle ASM1.	27
4.1	Paramètres clé du modèle ASM1 obtenu par analyse de sensibilité.	48

Notations

- ASM* : Activated Sludge Model
BSM : Simulation Model
IAWQ : International Association for Water Quality
Z : vecteur facteur de qualité de l'eau
S^TR(Z) : vecteur de débit de réaction
S_s : Concentration de composés organiques solubles biodégradable ($mg.L^{-1}$)
S_O : Concentration d'oxygène dissous ($mg.L^{-1}$)
S_{NH} : Concentration d'azote ammoniacal ($mg.L^{-1}$)
S_{NO} : Concentration des nitrates-nitrites ($mg.L^{-1}$)
X_H : Concentration de la biomasse hétérotrophe ($mg.L^{-1}$)
X_A : Concentration de la biomasse autotrophe ($mg.L^{-1}$)
Y_A : Taux de conversion substrat / biomasse autotrophe
Y_H : Taux de conversion substrat / biomasse hétérotrophe
f_p : Fraction de composés inertes générés par la biomasse morte
i_{XB} : Fraction d'azote dans la biomasse hétérotrophe
i_{XP} : Fraction d'azote issu de la mort de la biomasse
μ_H : Taux de croissance maximal de la biomasse hétérotrophe (j^{-1})
μ_A : Taux de croissance maximal de la biomasse autotrophe (j^{-1})
b_H : Coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe (j^{-1})
b_A : Coefficient de mortalité de la biomasse autotrophe (j^{-1})
K_S : Coefficient de demi-saturation en substrat rapidement biodégradable ($g.m^{-3}$)
K_{OH} : Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse hétérotrophe ($g.m^{-3}$)
K_{NO} : Coefficient de demi-saturation du nitrate pour la biomasse hétérotrophe ($g.m^{-3}$)
K_{NH} : Coefficient de demi-saturation de l'azote ammoniacal pour la biomasse autotrophe ($g.m^{-3}$)
K_{OA} : Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse autotrophe ($g.m^{-3}$)
η_g : Facteur de correction pour *μ_H* sous condition anoxie
k_a : Taux d'ammonification ($m^3.(g.j)^{-1}$)
S_{o,sat} : Concentration d'oxygène dissous en saturation ($g.m^{-3}$)
V : Volume du bassin (m^3)
K_{La} : Coefficient de transfert d'oxygène (j^{-1})
q_{circ} : Débit de circulation ($m^3.j^{-1}$)
q_a : Débit d'aération ($m^3.j^{-1}$)
LTI : Linear Time Invariant
f_i(x(t)) : modèle local
x(t) : vecteur d'état
ω_i(ξ(t)) : fonction de validité
μ_i(ξ(t)) : fonction d'activation

Notations

$\xi(t)$: vecteur des variables de décision

$y_m(t)$: sortie multimodèle

σ_i^2 : variance

$J(\theta)$: critère de minimisation.

θ : vecteur des paramètres.

$S(t), Z_p$: fonction de sensibilité

Introduction générale

L'automatique repose sur la notion du système, représentant un ensemble d'éléments pour former une structure complète. L'automaticien construit un schéma théorique qui vise à rendre compte du comportement dynamique interne de ce système. On obtient alors un modèle, représentation mathématique qui doit tendre à ressembler le mieux possible à la réalité du processus. Le problème réside alors entre la fidélité du modèle avec le processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable. Les lois définissant un système relient entre elles un certain nombre de grandeurs : les entrées $u(t)$ qui reflètent l'action de l'environnement sur le système, les sorties $y(t)$ qui représentent l'action du système sur l'environnement ainsi que les mesures extraites du système, et enfin les états $x(t)$ qui décrivent le système à un moment donné. Par exemple, un système se modélise par une loi mathématique $g(u(t), y(t)) = 0$ du comportement entrées/sorties ou par une loi $dx(t)/dt = f(x(t), u(t))$ de l'évolution de son état. Ces lois doivent être les plus complètes possibles. Devant la difficulté de la tâche, l'automaticien est souvent amené, à considérer certaines classes de systèmes manipulables par des outils mathématiques existants. Des restrictions structurelles (linéarité vis-à-vis de l'entrée, convexité) produisant des approximations de modèles sont considérées. Au début de cette démarche, la tendance a été d'utiliser des modèles LTI. Cette approche est d'ailleurs probante dans la mesure où nombre de systèmes, en première approximation et au voisinage d'un point de fonctionnement, sont bien représentés par leur modèle LTI ; le modèle non linéaire est alors représenté par un seul modèle linéaire (linéarisé tangent autour d'un point d'équilibre). L'inconvénient d'une telle approche est son aspect uniquement local, le modèle linéaire n'étant qu'une description locale du comportement du système. Une approche globale basée sur de multiples modèles LTI autour de différents points de fonctionnement a été élaborée

ces dernières années. Cette approche, dite multimodèle, peut être obtenue directement à partir d'un modèle mathématique non linéaire ou par linéarisation autour de différents points de fonctionnement.

Dans certains cas, les modèles non linéaires complexes sont difficilement exploitables ce qui oblige l'automaticien à chercher une approximation qui simplifie la représentation du modèle tout en gardant la fiabilité de modélisation souhaitée.

Dans ce travail, nous étudions la représentation des systèmes non-linéaire par des multimodèles. Aussi nous procédons à l'analyse de sensibilité aux paramètres des systèmes non-linéaire. En suite nous essayons d'appliquer notre étude sur un procédé réel de traitement des eaux usées modélisé par ASM1.

Notre travail est organisé comme suit :

- Chapitre1 : description et présentation d'une station d'épuration des eaux usées modélisées par ASM1.
- Chapitre2 : introduction à la modélisation des systèmes non-linéaires par multimodèles linéaires.
- Chapitre3 : Présentation de l'analyse de sensibilité et deux techniques de son détermination.
- Chapitre4 : application sur le modèle ASM1 et discussion des résultats obtenus.

Station d'épuration des eaux usées modélisée par ASM1

Sommaire

1.1	Les procédés de traitement des eaux usées	4
1.1.1	L'eau et la pollution	4
1.1.2	Le traitement des eaux usées	6
1.2	Le traitement biologique des eaux usées	10
1.2.1	Les principaux polluants	11
1.2.2	Les micro-organismes épurateurs	13
1.2.3	Les processus métaboliques	17
1.2.4	Les traitements biologiques	19
1.3	Système étudié	24
1.3.1	Le modèle ASM1 : Phénomènes biologiques et variables d'état	25

La forme de vie dite « moderne » de l'homme a beaucoup modifié l'équilibre écologique naturel autrefois existant sur la planète. Les problèmes d'environnement liés à la concentration des populations et aux activités humaines, que ce soit au niveau urbain, agricole ou industriel, deviennent de plus en plus importants. La pollution générée par l'homme affecte de plus en plus le cycle de l'eau et des traitements artificiels doivent souvent être appliqués pour compléter les cycles naturels d'auto-épuration. Ces traitements sont en place à l'heure actuelle sur les stations d'épuration. Le vaste domaine du traitement des eaux usées met en jeu plusieurs disciplines qui se matérialisent par exemple au niveau de la conception, la mise au point et la conduite des stations d'épuration. Cette pluridisciplinarité est constituée de la microbiologie et du génie génétique, en passant par le génie civil, jusqu'à l'automatique. Nous tenterons donc, de présenter dans ce chapitre, quelques concepts fondamentaux liés au problème d'assainis-

sement biologique de l'eau, ainsi que la modélisation d'une partie d'une station d'épuration.

1.1 Les procédés de traitement des eaux usées

1.1.1 L'eau et la pollution

La pollution se définit comme l'introduction dans un milieu naturel de substances provoquant sa dégradation. La pollution des ressources en eau au niveau des stations d'épuration provient de diverses sources, notamment les formes relatives aux activités humaines :

- La pollution domestique et urbaine : les eaux usées urbaines sont rejetées par les installations collectives (hôpitaux, écoles, commerces, ...) et comportent les eaux ménagères (détergents, graisses, ...) et les eaux vannes (eaux sanitaires : matière organique et azotée, germes, ...). Les eaux résiduaires urbaines peuvent être considérées comme la plus importante industrie en termes de masse de matériaux bruts à traiter. A titre d'exemple, en France la consommation moyenne en eau est généralement estimée à 150 litres par jour et par habitant. Dans la communauté européenne il est produit quotidiennement un volume proche à 40 millions de m^3 d'eaux usées.
- La pollution industrielle : le degré et la nature de la pollution générée par des rejets industriels varient suivant la spécificité de chaque activité industrielle. Certains rejets troublent la transparence et l'oxygénation de l'eau ; ils peuvent avoir un effet nocif sur les organismes vivants et nuire au pouvoir d'auto-épuration de l'eau. Ils peuvent causer aussi l'accumulation de certains éléments dans la chaîne alimentaire (métaux, pesticides, radioactivité, ...). Les eaux résiduaires industrielles représentent une partie importante des rejets arrivant aux stations d'épuration. A titre d'exemple, les deux tiers des industriels redevables des Agences de l'Eau en France (ceux qui génèrent le plus de pollution) sont raccordés aux stations d'épuration des collectivités territoriales. Ils produisent 10% de la charge polluante industrielle brute, ce qui équivaut à un quart de la pollution domestique. Cet apport pose de sérieux problèmes aux exploitants de stations d'épuration urbaines, tant au niveau des capacités que des performances de traitement. En effet, les effluents industriels toxiques constituent

un danger permanent pour les stations de dépollution biologique. De plus, il faut bien noter que, selon des études sur l'environnement, une grande quantité des rejets industriels s'échappent encore dans la nature sans aucun traitement !

- La pollution agricole : ce type de pollution s'intensifie depuis que l'agriculture est entrée dans un stade d'industrialisation. Les pollutions d'origine agricole englobent à la fois celles qui ont trait aux cultures (pesticides et engrais) et à l'élevage (lisiers et purins). Néanmoins, le problème de la pollution agricole est un peu différent, dans la mesure où cette source de pollution n'arrive qu'indirectement à la station. C'est le cas en particulier des engrais et pesticides qui passent d'abord à travers les milieux naturels (nappes phréatiques, rivières...). C'est aussi le cas des déchets solides issus des industries agroalimentaires et des concentrations des élevages qui entraînent un excédent de déjections animales (lisiers d'animaux, fientes des volailles...) par rapport à la capacité d'absorption des terres agricoles ; celles-ci, sous l'effet du ruissellement de l'eau et de l'infiltration dans le sous-sol, enrichissent les cours d'eau et les nappes souterraines en dérivés azotés et constituent aussi une source de pollution bactériologique.
- La pollution d'origine naturelle et l'eau de pluie : La teneur de l'eau en substances indésirables n'est pas toujours le fait de l'activité humaine directe. Certains phénomènes naturels peuvent y contribuer (contact de l'eau avec les gisements minéraux, ruissellement des eaux de pluie, éruptions volcaniques, ...). En ce qui concerne l'eau de pluie, bien que longtemps considérée comme propre, l'eau d'origine pluviale est en fait relativement polluée. L'origine de cette pollution peut provenir des gaz ou solides en suspension rejetés dans l'atmosphère par les véhicules, les usines ou les centrales thermiques. Ces polluants (oxyde de carbone, dioxyde de soufre, poussière) sont envoyés vers le sol à la moindre averse. Lorsqu'elle ruisselle, l'eau de pluie a un second effet nocif : elle transporte les hydrocarbures, les papiers, les plastiques et les débris végétaux accumulés sur la terre et les toitures. De plus, cette pollution est déversée sur de courtes périodes et peut atteindre des valeurs très élevées ce qui provoque un effet de choc sur le milieu biologique.

En ne parlant que de la pollution de l'eau, ce bilan est loin d'être exhaustif puisqu'il faudrait lui rajouter tous les déchets solides, constitués d'ordures ménagères, des déchets ménagers encombrants (meublier, cuisinières, réfrigérateurs,...), des déchets automobiles (carcasses, batteries, huiles et pneus usagés), des déchets provenant de l'entretien des espaces verts urbains, des déchets d'assainissement des eaux usées (boues), des déchets inertes (les 2/3 des déchets solides industriels), et enfin des déchets produits ou recyclés dans l'agriculture et les industries agro-alimentaires.

1.1.2 Le traitement des eaux usées

L'eau est le véhicule de transport et de dissémination idéal de nombreux polluants. Les contraintes d'assainissement, de plus en plus strictes, exigent le traitement d'un nombre plus important de polluants (matières organiques, minérales, pathogènes et toxiques). Etant donnée la grande diversité de ces déchets, l'épuration d'un affluent résiduaire comporte plusieurs étapes, chacune spécifique aux caractéristiques particulières des éléments à traiter. D'un point de vue général, est sans vouloir être exhaustif, compte tenu de la diversité des procédés mis en oeuvre selon les cas, l'épuration de l'eau amène toujours avant leur rejet dans le milieu naturel à : - séparer et éliminer les matières en suspension, - éliminer la pollution organique, principalement par voie biologique, et, plus récemment les pollutions azotées et phosphorées.

Le schéma fonctionnel de la filière d'épuration des eaux résiduaires est indiqué sur la figure 1.1 [9]. Globalement, la filière de traitement est constituée de différents modules où les eaux brutes sont soumises à une combinaison ou une succession de différents processus de purification. L'épuration d'un effluent pollué peut comporter cinq phases principales :

Le prétraitement

C'est un traitement préliminaire comportant un certain nombre d'opérations à caractère mécanique (procédés physiques). Le but est d'extraire de l'eau les gros déchets en suspension ou en flottation (sables, huiles) qui pourraient gêner les traitements subséquents. L'élimination préalable de ces matières permet d'éviter des effets nocifs secondaires (odeurs, colmatage...). Parmi ces méthodes de séparation primaires, les plus courantes

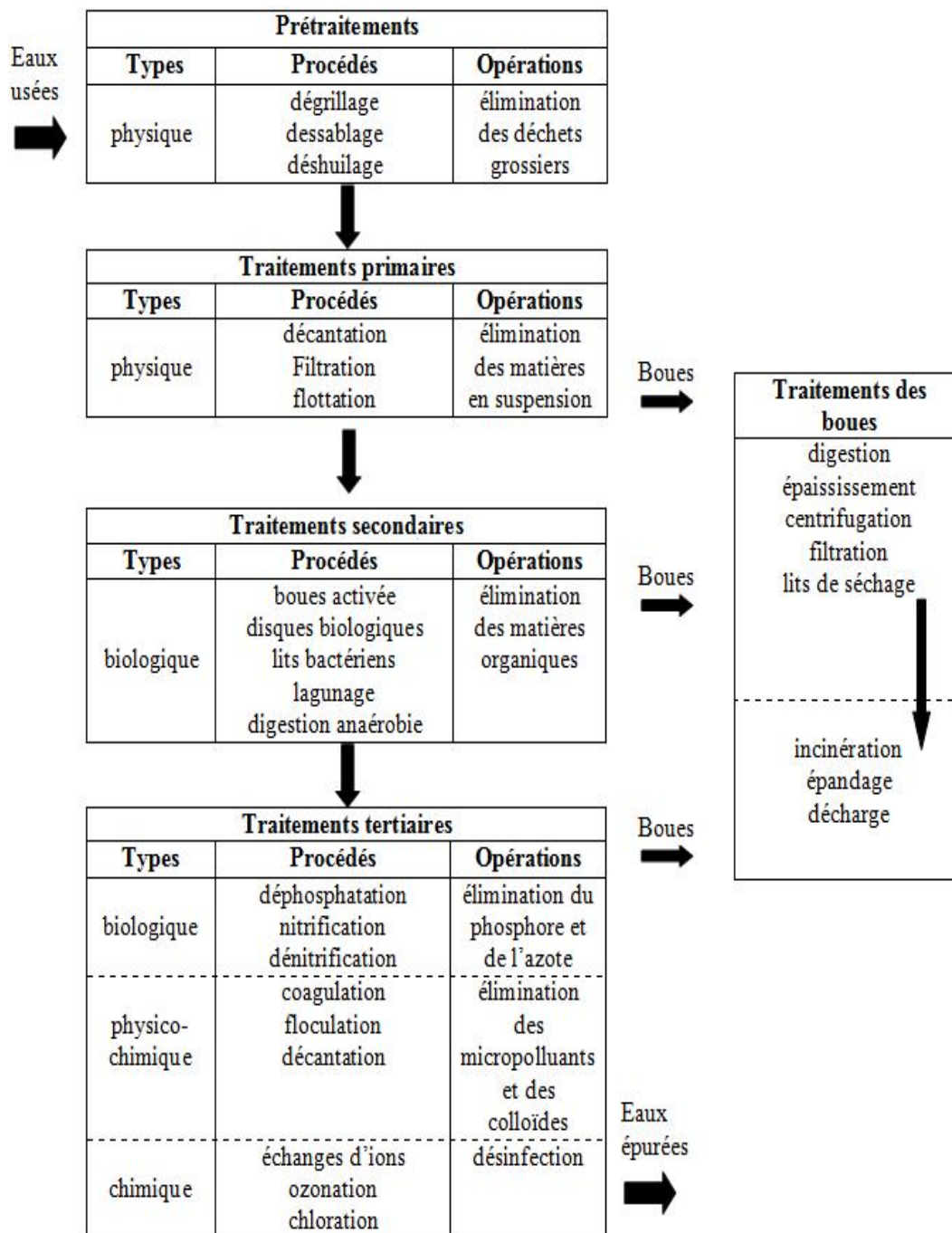


FIGURE 1.1 – Différentes filières du procédé d'épuration des eaux résiduaires

sont :

- le dégrillage, qui a pour fonction la suppression des déchets les plus grossiers par passage à travers une grille.
- le dessablage, qui permet le dépôt du sable et des graviers susceptibles d'endommager les machines de pompage.
- le déshuilage, qui favorise, par injection d'air, la flottation des graisses et des hydrocarbures qui sont séparés par raclage de surface.

Le traitement primaire

Permet d'éliminer de l'eau plus de la moitié des matières en suspension sous forme de boues dites « boues primaires », recueillies ensuite par pompage de fond. Il fait appel à différents procédés physiques :

- La flottation, visant à séparer les phases solides des phases liquides par la poussée d'Archimède. En flottation naturelle, les floes de faible densité remontent librement à la surface. La flottation assistée s'obtient par injection d'air.
- La décantation, permet aux matières en suspension de se déposer, sous forme de boues, en utilisant la force de gravité pour séparer les particules de densité supérieure à celle du liquide.
- La filtration, est le passage du mélange liquide-solide à travers un milieu poreux (filtre) qui retient les solides et laisse passer les liquides.

Le traitement secondaire

A pour objectif principal l'élimination des matières en suspension et des composants solubles dans l'eau (matières organiques, substances minérales...). Il fait habituellement appel aux procédés biotechnologiques, car les matières présentes dans les eaux usées sont généralement d'origine organique. Au terme du traitement secondaire, l'eau, débarrassée des éléments qui la polluaient est épurée à 90%. Les matières polluantes agglomérées à la suite de ce traitement sont recueillies par décantation sous forme de boues. On utilise typiquement :

- Les traitements physico-chimiques, qui consistent à transformer chimiquement, à l'aide de réactifs, les éléments polluants non touchés par les traitements biologiques (matières non biodégradables).

- Les traitements biologiques, qui sont appliqués aux matières organiques en utilisant des cultures de microorganismes (notamment bactéries) reproduisent le processus de l'autoépuration naturelle dans des bassins adaptés à ce propos (les bioréacteurs). Plus récemment, le traitement biologique de l'azote a été intégré à cette étape, et de la même manière, le traitement des phosphates commence aussi à y être intégré. Les impuretés sont alors digérées par des êtres vivants microscopiques et transformées en boues. La culture des bactéries se fait soit en milieu aéré (aérobie), soit en absence d'oxygène (anoxie). On distingue aussi les cultures fixées (lits bactériens, disques biologiques), et les cultures libres (lagunage aéré, boues activées). On reviendra dans la section 1.2.4 plus en détail sur le traitement biologique des eaux usées.

Le traitement tertiaire

Est un traitement complémentaire qui a un rôle d'affinage, dans le but soit d'une réutilisation des eaux épurées à des fins agricoles ou industrielles (e.g. refroidissement des turbines), soit de la protection du milieu récepteur pour des usages spécifiques (rejet dans les milieux aquatiques en zone plus ou moins sensible), soit encore de la protection des prises d'eau situées en aval. Différentes méthodes de nature variée peuvent alors être utilisées :

- biologiques, pour l'élimination de l'azote (processus de nitrification-dénitrification) et du phosphore (déphosphatation).
- physico-chimiques, pour la précipitation du phosphore (coagulation-décantation) ou l'élimination des dernières matières en suspension (filtration sur lits de sable, tamis métalliques ou charbon actif). L'élimination de l'azote et du phosphore par voie biologique ou chimique évite la prolifération de végétaux dans les corps d'eau (les lacs, les étangs ou les rivières) et protège la vie aquatique.
- chimiques, pour la désinfection dans le traitement final des effluents. L'élimination des risques de contamination bactériologique ou virale se fait souvent par oxydation en utilisant des agents tels que le chlore et l'ozone. Les procédés chimiques sont utilisés aussi pour l'adoucissement de l'eau et pour la neutralisation en agissant sur le pH.
- radiatifs, pour les opérations de désinfection de l'eau telle que les rayonnements ultraviolets qui irradiant les cellules vivantes indési-

rables permettant d'éliminer les risques de contamination due aux bactéries et virus. Suivant la quantité d'énergie UV reçue, elles sont soit stérilisées (effet bactériostatique) soit détruites (effet bactéricide).

Le traitement des boues

A pour but le traitement et le conditionnement des boues résiduaires extraites du décanteur, en permettant de réduire leur volume en éliminant l'eau (épaississement, déshydratation) et les cas échéant de les stabiliser (digestion, compostage). Pour ces boues, quatre destinations sont typiquement possibles :

- l'épandage agricole, qui représente une valorisation de ce sous-produit fertilisant.
- l'élaboration de compost, par incorporation de paille ou de sciure.
- l'incinération, pour quelques grosses unités ou lorsqu'une installation locale existe déjà pour les ordures ménagères.
- la mise en décharge, solution qui devrait être progressivement abandonnée dans les années à venir.

1.2 Le traitement biologique des eaux usées

Le traitement biologique des effluents dans des installations appropriées est un moyen efficace pour répondre aux problèmes environnementaux liés aux activités humaines et compléter l'activité des micro-organismes dans les écosystèmes, en imitant les cycles naturels d'auto-épuration. Les procédés de traitement biologique de l'eau sont particulièrement adaptés à l'épuration d'eaux polluées essentiellement par de la matière organique facilement biodégradable et, dans tous les cas, exemptes de composés toxiques à des concentrations importantes. Ces procédés sont donc particulièrement adaptés à l'épuration des eaux résiduaires urbaines. Les eaux industrielles nécessitent généralement des traitements spécifiques. Elles peuvent parfois rejoindre la station d'épuration, au prix toutefois d'un traitement physico-chimique préalable, car la présence de toxique détruirait la flore bactérienne. Le principe général d'un procédé biologique, ou bioprocédé, est d'utiliser les propriétés naturelles d'organismes vivants afin de produire ou d'éliminer certaines substances chimiques ou biochimiques, dans des conditions optimales de fonctionnement. En effet, certains micro-organismes ont

de grandes facultés de transformation métabolique et de décomposition des matières biodégradables. Ils constituent par leur multiplication rapide et leur action biochimique, des agents épurateurs très efficaces. Dans cette section nous présentons en quelques lignes une vue panoramique du traitement biologique des eaux usées. En particulier nous insisterons sur quelques points particuliers : les substrats polluants, les micro-organismes épurateurs, les processus métaboliques et les traitements biologiques .

1.2.1 Les principaux polluants

Les phénomènes de pollution des eaux se traduisent par des effets particuliers liés aux spécificités écologiques propres aux milieux aquatiques. En effet, l'eau peut dissoudre, souvent avec facilité, de nombreuses substances chimiques et biologiques. Par conséquent, tout polluant peut être véhiculé fort loin de la source de contamination. La problématique des déchets présents dans l'eau peut être abordée de plusieurs façons, qui donnent chacune lieu à une classification différente. Ainsi, les impuretés peuvent être identifiées suivant qu'elles soient vivantes ou inertes, minérales ou organiques, solides ou dissoutes. D'autres techniques de classification sont basées sur leur dimension, leurs degrés de toxicité, . . . Parmi les principaux polluants on peut distinguer les suivants :

Les matières organiques

Constituent, de loin, la première cause de pollution des ressources en eaux. Ces matières organiques (déjections animales et humaines, graisses, . . .) sont notamment issues des effluents domestiques, mais également des rejets industriels (industries agro-alimentaire, en particulier). La pollution organique peut être absorbée par le milieu récepteur tant que la limite d'auto-épuration n'est pas atteinte.

Les éléments minéraux

Regroupent essentiellement les produits azotés ainsi que les produits phosphorés. Ces matières proviennent principalement des activités agricoles. La pollution minérale des eaux peut provoquer le dérèglement de la croissance végétale ou des troubles physiologiques chez les animaux.

Les métaux lourds

Les plus fréquemment rencontrés mais qui sont aussi les plus dangereux sont le mercure, le cuivre, le cadmium, le chrome, le plomb et le zinc. Ils ont la particularité de s'accumuler dans les organismes vivants ainsi que dans la chaîne trophique. La pollution radioactive peut avoir des effets cancérigènes et mutagènes sur les peuplements aquatiques.

Les matières pathogènes

Sont constituées de virus et bactéries entraînant souvent une inhibition des mécanismes biologiques. La pollution micro-biologique se développe conjointement à la pollution organique, par une prolifération des germes d'origine humaine ou animale dont certains sont éminemment pathogènes.

Les substances toxiques

Sont des composés chimiques de synthèse, issus des activités industrielles et agricoles. Les conséquences souvent dramatiques de la pollution chimique sur les écosystèmes, varient suivant la concentration de composés dans les rejets.

Les hydrocarbures

Provenant des industries pétrolières et des transports, ces composés chimiques sont des substances peu solubles dans l'eau est difficilement biodégradables. Leur densité inférieure à l'eau les fait surnager et leur vitesse de propagation dans le sol est 5 à 7 fois supérieure à celle de l'eau. Ils constituent un redoutable danger pour les nappes phréatiques. Une autre classification très importante est fondée sur le pouvoir de dégradation des déchets polluants. On distingue ainsi deux classes principales :

Les matières biodégradables

Affectées par les activités biologiques des microorganismes, ces substances sont soumises aux divers processus biochimiques de conversion. Cette fraction biodégradable peut être structurée en deux groupes :

- Les matières aisément dégradables, composées des substances solubles, ces matières ont la caractéristique de pouvoir être directement absorbées par les bactéries.
- Les matières lentement dégradables, composées des substrats particuliers formés par un mélange de substances organiques solides, colloïdales et solubles. Ces matières sont soumises à certains processus intermédiaires avant d'être absorbées par les populations bactériennes.

Les matières non-biodégradables

Ces substances inertes ne subissent aucun phénomène biologique de transformation. Ces matières sont soit présentes dans les eaux résiduaires, comme les métaux lourds, soit issues des phénomènes de mortalité des micro-organismes au cours des processus biologique d'épuration. Les composants non-biodégradables solubles peuvent traverser la station d'épuration sans être modifiés mais les matières inertes en suspension peuvent être éliminées par des mécanismes de décantation.

La structure chimique des polluants permet de distinguer deux types de composés :

Les matières organiques

Elles sont constituées d'un grand nombre de composés qui ont la particularité commune de posséder au moins un atome de carbone, d'où leur nom de substance carbonées. Ces atomes de carbone sont oxydés biologiquement par les microorganismes pour fournir l'énergie nécessaire à leur croissance.

Les matières inorganiques

Sont des substances ne contenant pas de carbone. La fraction minérale des eaux résiduaires représente principalement les produits azotés et phosphorés.

1.2.2 Les micro-organismes épurateurs

Le monde vivant est classé en trois catégories principales : les végétaux, les animaux et les protistes (organismes eucaryotes unicellulaires), qui se distinguent des deux autres règnes par la structure relativement simple et la

multiplication rapide de leurs individus. Ces microorganismes sont composés essentiellement des bactéries, des algues et des protozoaires (prédateurs des bactéries). Certains de ces populations microbiologiques ont la faculté de dégrader les substances polluantes présentes dans les eaux résiduaires pour les convertir en eau, en dioxyde de carbone et en matières minérales dont l'effet polluant est moins nuisible pour les milieux récepteurs. Ces micro-organismes sont à la base de l'épuration biologique qui est le procédé le plus utilisé pour restaurer la qualité de l'eau en la débarrassant de ses principales impuretés pourvu qu'elles soient plus ou moins biodégradables et ne contiennent pas de toxiques qui font l'objet d'un traitement particulier (épuration physico-chimique).

Parmi tous les individus du monde protiste, trois populations jouent un rôle fondamental dans le traitement :

Les bactéries

Unicellulaires, ces micro-organismes possèdent la structure interne la plus simple de toutes les espèces vivantes. Les tests effectués sur différentes populations ont montré que les bactéries sont composées de 80% d'eau et 20% de matière sèche dont 90% est organique. Elles croissent et se multiplient en général par scissiparité (scission binaire). Ces cellules représentent la plus importante population de la communauté microbienne dans tous les procédés biologiques, avec souvent des concentrations qui dépassent 10^6 bactéries/mL.

Les protozoaires

De structure plus complexe que celle des bactéries, la distinction de protozoaires est plus simple. Certains groupes de protozoaires sont de redoutables prédateurs pour les bactéries. Ils ont la faculté de se déplacer et sont classifiés suivant leur mode de mouvement (nageurs, rampants, ...). Ces organismes peuvent jouer un rôle important au cours du processus d'épuration par leur abondance et leurs interactions avec les bactéries épuratrices (compétition et prédation).

Les algues

Ce sont des organismes photosynthétiques unicellulaires ou multicellulaires formant une population hétérogène. Les algues sont indésirables dans les sources d'eau car elles affectent leur goût et leur odeur. Dans le traitement, on les retrouve dans deux types de procédés uniquement : les lits bactériens ainsi que les bassins de lagunage, mais ce n'est que dans ces derniers qu'elles jouent un rôle bénéfique dans l'épuration. Une grande partie du poids sec des micro-organismes est constitué en général, du carbone (50%), d'oxygène (20%), d'azote (10 à 15%), d'hydrogène (8 à 10%) et du phosphore (1 à 3%). Afin d'accomplir ses fonctions biologiques, cette faune microscopique se nourrit des matières organiques qui contiennent ces éléments nutritifs vitaux pour son développement. La consommation des polluants permet aux populations bactériennes de :

- fournir la matière nécessaire pour la synthèse cytoplasmique dont le composé fondamental est le carbone ;
- assurer leurs besoins nutritifs pour leur croissance, l'azote étant nécessaire pour la synthèse des protéines par exemple ;
- servir comme source d'énergie pour la croissance cellulaire et les réactions biosynthétiques, le phosphore joue un rôle très important dans le transfert d'énergie ;
- servir comme accepteur final d'électrons libérés au cours des réactions d'oxydation, l'oxygène joue le rôle d'agent oxydant dans le processus de respiration aérobie.

Selon la nature de leurs besoins nutritifs, les micro-organismes peuvent être classés en plusieurs catégories. Sans vouloir rentrer dans les détails d'autres classifications plus élaborées, les catégories les plus couramment utilisées sont :

Forme chimique du carbone nécessaire

- les autotrophes, utilisent le dioxyde de carbone (CO_2) et le carbonate (HCO_3^-) comme unique source de carbone pour la synthèse de leurs biomolécules (les plantes par exemple).
- les hétérotrophes, utilisent le carbone sous forme organique relativement complexe pour la synthèse de nouvelles cellules vivantes (les animaux par exemple).

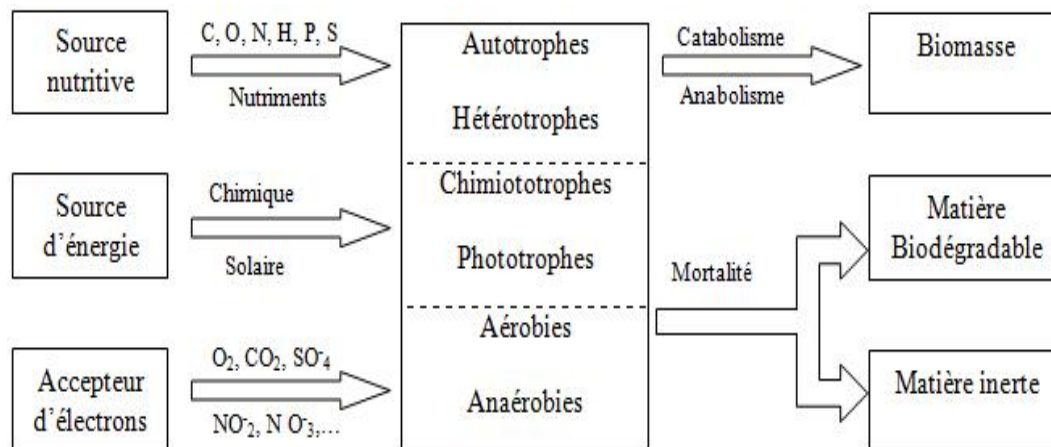


FIGURE 1.2 – Les micro-organismes et leurs besoins nutritifs et énergétiques

Source d'énergie

- les phototrophes, utilisent la lumière solaire comme source d'énergie (les plantes par exemple).
- les chimiotrophes, obtiennent leur énergie à partir des réactions d'oxydo-réduction (les animaux par exemple).

Accepteur final d'électrons

- aérobies, se servent des molécules d'oxygène comme accepteurs d'électrons. Les microorganismes aérobies se développent donc en présence d'oxygène (les animaux par exemple).
- anaérobies, ont la faculté d'utiliser d'autres molécules que l'oxygène comme accepteurs d'électrons (dioxyde de carbone, sulfate,...). Les micro-organismes anaérobies peuvent se passer d'oxygène pour se développer (certaines souches de bactéries comme les acidogènes et les méthanogènes par exemple).
- facultatifs, utilisent comme agents oxydants, l'oxygène ou d'autres composants chimiques comme le nitrate (conditions d'anoxie). Cependant, leur croissance est plus efficace sous les conditions d'aérobiose (les plantes par exemple).

La figure 1.2 présente un résumé des populations biologiques et leurs besoins nutritifs et énergétiques.

1.2.3 Les processus métaboliques

Les composants chimiques consommés par les micro-organismes sont soumis à de nombreuses réactions biochimiques qui font partie d'un des deux mécanismes métaboliques fondamentaux pour le développement des bactéries :

le catabolisme

Représente l'ensemble des réactions d'oxydation et de dégradation enzymatique. C'est une activité exothermique qui libère l'énergie inhérente à la structure complexe des molécules organiques et minérales, et qui est stockée par les microorganismes.

l'anabolisme

Représente l'ensemble des réactions de réduction et de synthèse enzymatique. C'est une activité endothermique qui utilise l'énergie libérée par les processus catabolique pour développer la taille et la structure chimique des composants organiques.

Parmi le grand nombre de processus biochimiques mis en jeu au cours du traitement biologique des polluants par les différentes populations bactériennes, on peut distinguer principalement les activités suivantes :

Oxydation

C'est une réaction qui implique une perte d'électrons suivie d'une production d'énergie. Une partie des matières absorbées par les micro organismes est utilisée pour fournir l'énergie nécessaire afin d'accomplir leurs fonctions biologiques. Selon la nature de l'accepteur final d'électrons, le processus d'oxydation peut s'effectuer sous les conditions d'aérobiose (présence d'oxygène), d'anaérobiose (absence d'oxygène) ou d'anoxie (présence de nitrate).

Digestion

La caractéristique de la digestion appelée aussi fermentation est que ce processus ne nécessite pas un accepteur d'électrons externe. C'est un mécanisme anaérobie de production d'énergie qui n'implique pas de chaîne

de transport d'électrons. La fermentation est provoquée par des bactéries anaérobies capables de décomposer la matière organique en acides et alcools et de donner du méthane (CH_4) et du gaz carbonique (CO_2).

Nitrification

C'est une transformation chimique de l'azote organique en nitrate (NO_3^-) par des organismes dits nitrifiants (Nitrosomas et Nitrobacter). La nitrification a lieu en trois étapes dans les conditions d'aérobiose : l'ammonification (conversion de l'azote organique en ammoniac (NH_4^+)), la nitritation (oxydation de l'ion ammoniac en nitrite (NO_2^-)) et la nitratation (oxydation du nitrite en nitrate).

Dénitrification

C'est un processus de conversion du nitrate, effectué par les hétérotrophes facultatifs sous les conditions d'anoxie. La dénitrification peut avoir lieu selon deux activités biologiques différentes : l'assimilation, où le nitrate est réduit en ammoniac qui peut servir comme source d'azote pour la synthèse cellulaire et la dissimilation, qui joue un rôle plus important dans l'élimination totale du nitrate.

Floculation

Dans les cultures en suspension où les micro-organismes flottent librement dans les eaux à traiter, ceux-ci ont tendance à s'agglutiner sous forme de petits amas appelés bioflocs. Certaines substances biodégradables (particules, colloïdes, grosses molécules) ne sont pas directement absorbées par les bactéries. La floculation permet aux micro-organismes d'améliorer leurs caractéristiques d'adsorption des aliments sur leur membrane cellulaire.

Adsorption

Certains composés organiques comme les substances biodégradables particulières ne peuvent pas être directement absorbés par les bactéries. Ces matières sont d'abord adsorbées par les micro-organismes et stockées à leur surface avant de subir un processus de conversion qui génère des substances simples aisément dégradables.

Hydrolyse

C'est une série de réactions enzymatiques extra-cellulaires appliquées aux substances adsorbées et qui ont lieu à la surface des micro-organismes. Les molécules organiques complexes sont converties en molécules plus simples qui peuvent diffuser à travers la membrane cellulaire.

Mortalité

La population biologique est soumise à divers phénomènes de mortalité : la prédation (protozoaires), le processus de lyse (dissolution) et la respiration endogène où une partie des composants cellulaires est oxydée pour satisfaire les besoins en énergie nécessaires pour maintenir en vie les autres cellules quand le substrat n'est pas disponible. Une fraction des produits de mortalité est biodégradable, l'autre partie représente les résidus endogènes inertes.

1.2.4 Les traitements biologiques

Le traitement biologique est largement utilisé dans la dépollution de l'eau, compte tenu des grandes facultés de certains micro-organismes, notamment des bactéries, de transformation métabolique et de décomposition de la matière organique biodégradable, lorsque les composés toxiques sont à des concentrations faibles. L'épuration biologique consiste alors à favoriser la prolifération de ces micro-organismes pour utiliser leurs propriétés remarquables dans les conditions les plus adaptées au résultat désiré. Ces conditions reproduisent le processus de l'auto-épuration naturelle dans les bioréacteurs, des bassins adaptés à ce propos. Les impuretés sont alors digérées par les micro-organismes et transformées en boues. Les polluants ingérés par la biomasse sont d'origine organique mais certains éléments minéraux ou inertes sont affectés par les processus métaboliques ou floculés au cours des réactions biochimiques. L'élimination de la production polluante conduit toujours, en fonction des caractéristiques physico-chimiques des rejets et du degré d'épuration souhaité, à la conception d'une chaîne de traitement constituée d'une succession d'opérations unitaires ou de stades de traitement entre lesquels il existe généralement des interactions. On peut cependant, dans de nombreux cas, simplifier le fonctionnement global du cycle d'épuration de l'eau (de son prélèvement à son renvoi dans

le milieu naturel, en passant par son utilisation, les traitements physico-chimiques et biologiques, et la gestion des boues produites) en plusieurs sous-systèmes traités indépendamment. C'est en particulier le cas pour les stations de traitement biologique, dans lesquelles les traitements de la pollution peuvent être, selon les cas, considérés de manière globale ou découpée. Historiquement, le premier objectif des installations de traitement des eaux usées était l'élimination de la pollution carbonée. La nitrification, mieux connue et mieux maîtrisée que la dénitrification, a ensuite été ajoutée à ces installations. Les procédés de dénitrification sont apparus plus tardivement et se sont intégrés aux systèmes nitrifiants préexistants. L'étape de traitement du phosphore, quant à elle, commence aussi à y être intégré dans les procédés modernes. Cette chronologie historique explique le nombre important de réacteurs en cascade pouvant être observés dans les configurations de traitement tertiaire existantes à l'heure actuelle. Parmi les différentes possibilités de classement de bioprocédés de traitement des eaux usées, nous voulons faire appel à ceux qui correspondent aux trois critères suivants : l'emplacement des populations bactériennes, les conditions de l'environnement et les types de procédés biologiques.

Suivant l'emplacement des bactéries épuratrices dans le bioréacteur, on distingue deux dispositifs :

Le procédé à cultures libres

Les micro-organismes sont maintenus en suspension dans le mélange à épurer. La biomasse entre ainsi constamment en contact avec les polluants. Ces dispositifs ont l'avantage d'avoir un traitement plus homogène et une meilleure maîtrise des facteurs d'épuration (apport d'eau résiduaire et de masse bactérienne) comparés aux procédés à culture fixée.

Le procédé à cultures fixées

Les micro-organismes sont fixés sur des supports. Le contact entre les eaux à traiter et les cellules épuratrices est assuré soit par arrosage des supports avec l'eau usée (lits bactériennes), soit par rotation des supports dans le mélange pollué (disques biologiques). Ces procédés permettent d'obtenir des concentrations en biomasse plus importantes et donc des traitements intensifs, mais présentent des risques de colmatage ou d'émanation

d'odeurs. Une purge des boues accumulées dans l'ouvrage est cependant régulièrement nécessaire pour prévenir le colmatage du filtre. Néanmoins, les procédés à biomasse fixée gagnent en compacité par rapport aux procédés à boues activées et ne nécessitent pas la présence d'un décanteur en sortie.

Suivant les conditions de l'environnement des cellules dans l'unité de dépollution, on distingue deux modes de traitement :

Le traitement aérobie

Ce type de traitement fait appel aux bactéries aérobies qui se développent en présence d'oxygène. La dégradation des polluants est effectuée par des réactions d'oxydation dans un milieu aéré.

Le traitement anaérobie

Ce traitement s'effectue en condition d'anaérobiose, c'est-à-dire, en absence d'oxygène. Les bactéries anaérobies assurent la décomposition métabolique des composés biodégradables par des processus de fermentation. Parmi l'ensemble des procédés biologiques utilisés dans le traitement des eaux usées, on peut citer les principaux procédés suivants :

Les lits bactériens

Ce procédé aérobie à cultures fixées consiste à faire supporter les micro-organismes par des matériaux poreux. L'effluent est distribué par aspersion en surface et l'oxygénation est apportée par ventilation naturelle de bas en haut. L'affluent arrive par la partie supérieure alors que l'effluent est évacué par le fond afin de ne pas perturber la fonction aérobie. De ce fait, ce système présente un inconvénient majeur, dans le sens qu'il nécessite un dispositif de relevage. La biomasse se développe à la surface du support. Lorsqu'elle devient trop importante, la pellicule bactérienne se détache naturellement ; elle doit alors être séparée de l'effluent par décantation.

Les disques biologiques

Dans ce procédé, les micro-organismes sont fixés sur des disques à demi immergés et tournent lentement (quelques tours par minute) autour d'un axe horizontal. La biomasse est ainsi alternativement mouillée par les eaux

résiduaire et aérée par l'air ambiant. Cette technique présente l'avantage d'être peu coûteuse en énergie mais peut entraîner l'émanation d'odeurs.

Les boues activées

Ce système comprend deux compartiments principaux. Le premier est le bassin d'aération où ont lieu les activités biologiques de transformation des polluants biodégradables par l'intermédiaire des micro-organismes en suspension. Le bassin est associé à un décanteur-clarificateur qui permet de recycler les boues en tête du bassin d'une part, et de récupérer l'effluent traité d'autre part. Outre les matières organiques assimilés par les hétérotrophes, principaux constituants des boues activées, les composés azotés peuvent aussi être oxydés par des phénomènes de nitrification-dénitrification. Les bactéries floculantes utilisées dans ce système, ont la faculté de transformer les éléments ingérés en matière corpusculaire. Les flocs formés dans le bassin d'aération sont alors conduits vers un second compartiment appelé décanteur secondaire où a lieu la séparation des solides de la phase liquide par décantation. De nombreuses variantes du procédé par boues activées sont disponibles. Par exemple, selon le cas, le bassin d'aération peut être constitué de plusieurs bassins en série privilégiant chacun le traitement d'une pollution spécifique (organique, nitrification, dénitrification, déphosphatation), ou d'un seul bassin permettant de réaliser les différentes réactions biologiques simultanément, par exemple par alternance de phases aérées et non aérées intégrant même au sein d'un unique bassin des cultures aérobies et anoxies.

Le lagunage

Il s'agit d'un étang ou un système de lagunes mettant en oeuvre une culture mixte algo-bactérienne. Le lagunage est un procédé de traitement extensif qui repose sur le principe de la dégradation en eau libre de la pollution organique. Il s'agit d'une boue activée sans recyclage de boue, avec ou sans décanteur final. L'aération peut être naturelle ou artificielle, lorsque l'apport d'oxygène est assuré par des aérateurs externes. Suivant la profondeur du bassin, on peut distinguer différents régimes de fonctionnement.

- En zone peu profonde, le traitement s'effectue dans des conditions

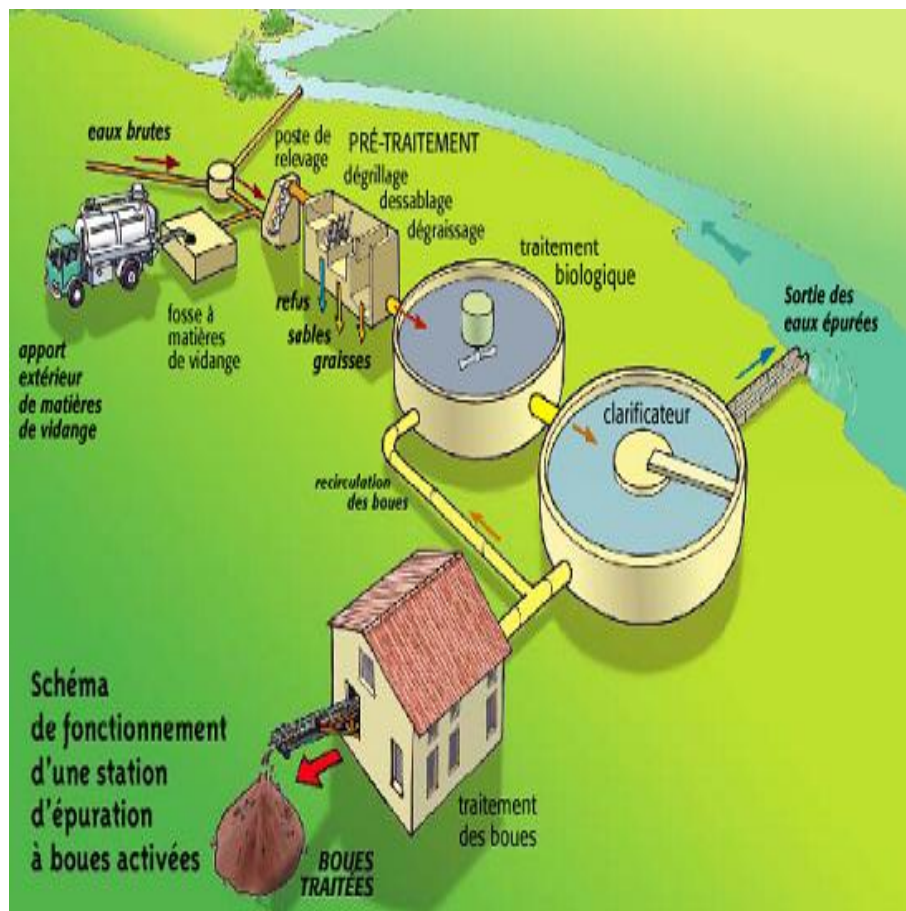


FIGURE 1.3 – Schéma de fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées

d'aérobiose. Les deux populations vivent en symbiose. Les besoins en oxygène des bactéries sont principalement assurés par l'activité photosynthétique des algues exposées à la lumière. De leur côté, les végétaux profitent du gaz carbonique ainsi que des nutriments inorganiques produits au cours des réactions métaboliques des cellules vivantes.

- Dans le cas de lagunes plus profondes, en plus de la zone supérieure aérobie, on peut distinguer une région intermédiaire où la disponibilité de l'oxygène dépend de la lumière solaire. Le traitement a lieu dans des conditions d'aérobiose le jour, et en anaérobiose durant la nuit. Les dépôts de boues au fond des bassins suffisamment profonds forment une couche anaérobique où ont lieu des processus de fermentation.

La digestion anaérobie

Ce procédé repose sur les réactions de fermentation qui ont lieu dans des conditions d'anaérobiose et sont effectuées par une biomasse anaérobie complexe. De manière générale, on distingue trois étapes dans ce processus. Dans la phase de liquéfaction, des bactéries hydrolytiques solubilisent les matières complexes. Dans la deuxième étape, une population acétogène transforme les composés organiques en acides, qui serviront ultérieurement de nourriture à des bactéries méthanogènes. Au cours de l'étape finale les acides organiques sont transformés en méthane et gaz carbonique. Le métabolisme anaérobie libérant très peu d'énergie comparé au processus aérobie, provoque une faible production de boues. Nonobstant, l'épuration anaérobie est plus lente que l'épuration aérobie.

1.3 Système étudié

Le procédé étudié dans notre travail est celui du traitement biologique par boues activées, il est peut être illustré par la figure 1.4.

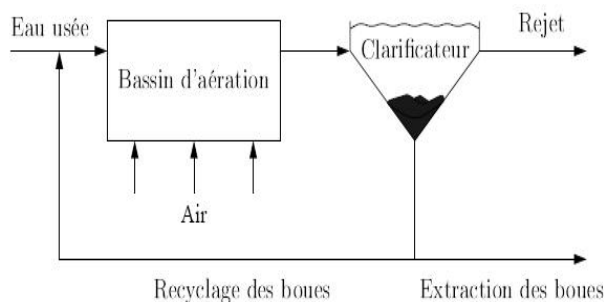


FIGURE 1.4 – traitement biologique par boues activées

De nombreuses études portant sur la modélisation des mécanismes de dégradations biologiques dans les stations d'épuration ont été réalisées. Elles culminent dans la publication par l'IAWQ des modèles ASM1, ASM2 et ASM3. L'utilisation largement répandue de ces modèles dans de multiples domaines d'application a permis de prouver leurs capacités de prédiction. La modélisation des processus de décantation à également fait l'objet de nombreux travaux.

La partie qui nous intéresse est celle de l'aérateur modélisé par ASM1. L'aérateur de la première biologie est divisé en deux bassins montés en

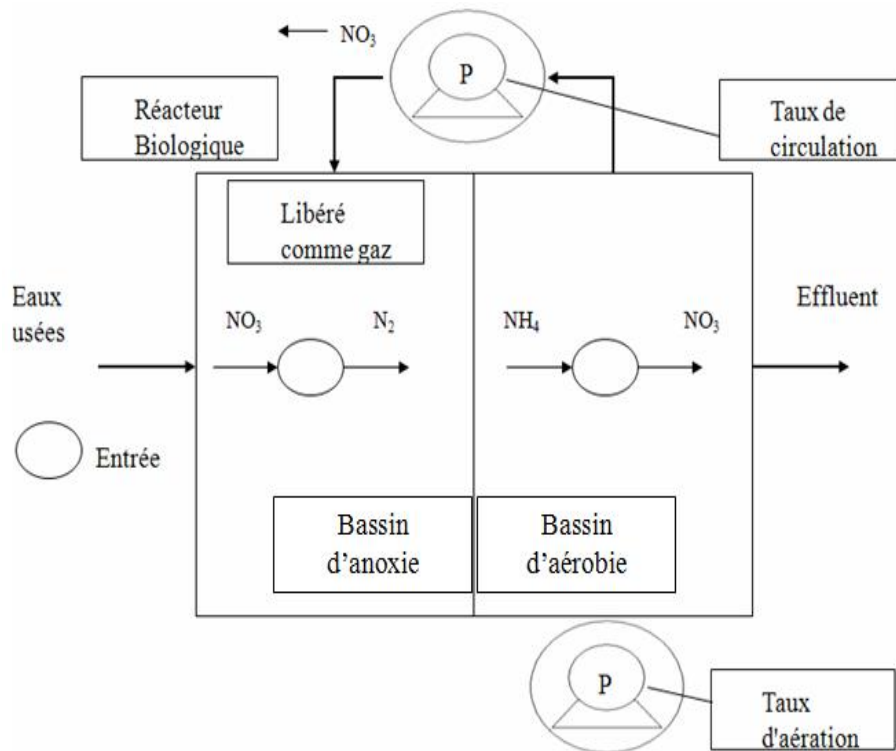


FIGURE 1.5 – Procédé d'élimination du nitrogène

cascade : aérobie et anoxie (figure 1.5) , nous allons observer donc l'évolution des concentrations dans les deux milieux anoxie et aérobie.

1.3.1 Le modèle ASM1 : Phénomènes biologiques et variables d'état

Le modèle ASM1 constitue un modèle général capable de représenter de façon précise le comportement du procédé lors du traitement d'un effluent chargé en matières azotées et carbonées [10].

L'ensemble des réactions qui sont pris en compte dans ce modèle sont :

- la croissance de la biomasse au travers de la réaction d'oxydation de la matière carbonée et des réactions de nitrification et de dénitrification ;
- la mort de la biomasse ;
- l'ammonification de l'azote organique ;
- l'hydrolyse de la matière organique en suspension (azotée ou carbonée).

Ces phénomènes biologiques font appel à différents types de composés représentés par douze variables d'état. La lettre X est proposée pour les composés particulaires et la lettre S pour les composés solubles. Nous pouvons classer ces variables d'état en quatre groupes :

- les substrats : Concentration de composés organiques solubles biodégradable S_s ($mg.L^{-1}$);
- les biomasses : Concentration de la biomasse hétérotrophe X_H ($mg.L^{-1}$), responsable de l'oxydation des matières organiques et de la dénitrification, et concentration de la biomasse autotrophe X_A ($mg.L^{-1}$);
- les composés azotés : Concentration d'azote ammoniacal S_{NH} ($mg.L^{-1}$) et concentration des nitrates-nitrites S_{NO} ($mg.L^{-1}$);
- Concentration d'oxygène dissous S_O ($mg.L^{-1}$).

Les paramètres utilisés dans ce modèle sont définis dans le tableau 1.1 [5][6][7][8][11].

Ecriture du modèle

Le modèle décrit ici est celui de [JO Sato et al., 2002] [1] inspiré de ASM1, l'étude sera concentrée sur le système en boucle ouverte du traitement par lots (apport et sortie nuls). Les entrées du système sont le débit d'aération dans le bassin d'aérobie q_a ($m^3.j^{-1}$), et le débit de circulation de la pompe de circulation dans le bassin d'anoxie q_{circ} ($m^3.j^{-1}$). Les sorties du système sont les concentrations des substances chimiques évoluées dans le procédé. Le procédé d'enlèvement d'azote est accompli dans le bassin d'aérobie et le bassin d'anoxie, comme indiqué dans Fig 1.5. Puisque l'entrée diffère entre les deux bassins nous procédons à l'étude de deux modèles : un pour l'aérobie, et l'autre pour l'anoxie. Le modèle peut être décrit comme suit :

- Bassin d'anoxie :

$$\frac{dZ}{dt} = S^T R(Z) + \frac{q_{circ}}{V} Z \quad (1.1)$$

- Bassin d'aérobie :

$$\frac{dZ}{dt} = S^T R(Z) + [0, K_{La}, 0, \dots, 0]^T (S_{O,sat} - Z_2) - \frac{q_{circ}}{V} Z \quad (1.2)$$

où Z est le vecteur facteur de qualité de l'eau, $S^T R(Z)$ est le vecteur de débit de réaction, $S_{O,sat}$ est la concentration d'oxygène dissous saturé, K_{La} est le coefficient de transfert d'oxygène, V est le volume d'eau usée, q_{circ} est le débit de circulation de pompe de circulation. La matrice stœchiométrique et le vecteur facteur de débit de réaction de l'ASM1 sont donnés par l'IAWQ. Ils sont particulièrement défini par :

Notation	Signification	Valeur	Unité
Y_A	Taux de conversion substrat / biomasse autotrophe	0.24	-
Y_H	Taux de conversion substrat / biomasse hétérotrophe	0.67	-
f_p	Fraction de composés inertes générés par la biomasse morte	0.08	-
i_{XB}	Fraction d'azote dans la biomasse hétérotrophe	0.08	-
i_{XP}	Fraction d'azote issu de la mort de la biomasse	0.06	-
μ_H	Taux de croissance maximal de la biomasse hétérotrophe	4.0	j^{-1}
μ_A	Taux de croissance maximal de la biomasse autotrophe	0.5	j^{-1}
b_H	Coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe	0.3	j^{-1}
b_A	Coefficient de mortalité de la biomasse autotrophe	0.05	j^{-1}
K_S	Coefficient de demi-saturation en substrat rapidement biodégradable	10.0	$g.m^{-3}$
K_{OH}	Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse hétérotrophe	0.2	$g.m^{-3}$
K_{NO}	Coefficient de demi-saturation du nitrate pour la biomasse hétérotrophe	0.5	$g.m^{-3}$
K_{NH}	Coefficient de demi-saturation de l'azote ammoniacal pour la biomasse autotrophe	1.0	$g.m^{-3}$
K_{OA}	Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse autotrophe	0.4	$g.m^{-3}$
η_g	Facteur de correction pour μ_H sous condition anoxie	0.8	-
k_a	Taux d'ammonification	0.05	$m^3.(g.j)^{-1}$
$S_{o,sat}$	Concentration d'oxygène dissous en saturation	0.01	$g.m^{-3}$
V	Volume du bassin	1000	m^3

TABLE 1.1 – Définition des paramètres utilisés dans le modèle ASM1.

$$Z = [S_S, S_O, S_{NH}, S_{NO}, X_H, X_A]^T \quad (1.3)$$

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{Y_H} & \frac{Y_H-1}{Y_H} & -i_{XB} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{Y_H} & 0 & -i_{XB} & \frac{Y_H-1}{2.86Y_H} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{Y_A-1}{Y_A} & -i_{XB} - \frac{1}{Y_A} & \frac{1}{Y_A} & 0 & 1 \\ 1 - f_p & 0 & -i_{XB} - f_p i_{XP} & 0 & -1 & 0 \\ 1 - f_p & 0 & -i_{XB} - f_p i_{XP} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$R(Z) = \begin{pmatrix} \mu_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \right) X_H \\ \mu_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{OH} + S_{NO}} \right) \eta_g X_H \\ \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{OA} + S_O} \right) X_A \\ b_H X_H \\ b_A X_A \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

En outre, soit K_a une constante et q_a soit le flux d'aération de sorte que K_{La} puisse être décrit par :

$$K_{La} = K_a q_a \quad (1.6)$$

Modélisation des systèmes non linéaires par multi-modèle

Sommaire

2.1	Introduction	29
2.2	Modélisation	30
2.3	Recherche des modèles locaux par linéarisation	32
2.3.1	Points de fonctionnement statiques	33
2.3.2	Optimisation paramétrique	35
2.3.3	Conclusion	39

2.1 Introduction

Les sciences de l'ingénieur font largement appel aux modèles non linéaires pour décrire les comportements dynamiques des systèmes physiques réels.

Si les modèles non linéaires sont en mesure de décrire correctement les comportements non linéaires d'un système, ils peuvent néanmoins s'avérer, en fonction de leur complexité mathématique, difficilement exploitable dans un contexte de synthèse d'une loi de commande et/ou de mise en place d'une stratégie de diagnostic du système.

Une hypothèse contraignante, mais largement utilisée, consiste à supposer que le système évolue autour d'un point de fonctionnement. Il est alors possible d'envisager une étape de linéarisation du modèle non linéaire afin de réduire sa complexité mathématique et permettre l'emploi des outils d'analyse des systèmes linéaires. En pratique, cependant, cette hypothèse de linéarité n'est pas toujours respectée et par conséquent le modèle linéarisé n'est pas complètement représentatif du comportement global du

système. Une amélioration consiste, lorsque le point de fonctionnement change, à réactualiser le modèle linéarisé.

Dans ce qui suit, on préfère rechercher un modèle apte à donner une bonne caractérisation globale du comportement dynamique du procédé.

La méthode utilisée représente un système non linéaire comme une combinaison de systèmes linéaires. Chaque modèle local est un système dynamique LTI valide autour d'un point de fonctionnement [12][13][14]. Selon l'information dont on dispose, plusieurs méthodes distinctes peuvent être utilisées pour l'obtention d'un multi modèle. Si l'on ne dispose que des mesures des entrées et sorties du système, on procède par identification en cherchant ou en imposant la structure du multi modèle. Si, en revanche, on dispose d'un modèle non linéaire explicite que l'on souhaite "simplifier" ou rendre plus manipulable on pourra procéder par linéarisation autour de différents points de fonctionnement.

2.2 Modélisation

Illustrons l'approche où on dispose un modèle non linéaire explicite en considérant un système non linéaire (2.1), pour lequel nous cherchons à déterminer une représentation multi-modèle permettant de décrire le comportement de ce système.

$$y(t) = F(x(t)) \quad (2.1)$$

Supposons qu'on dispose d'un ensemble de M modèles locaux $f_i(x(t))$ descriptifs du comportement du système dans différentes zones de fonctionnement. Ces modèles peuvent être construits par exemple à partir de connaissances physiques sur le fonctionnement du système dans ces zones. La validité locale de chaque modèle f_i est indiquée par une fonction de validité $\omega_i(x(t))$ pour $i \in \{1, \dots, M\}$. Le modèle global s'obtient de la manière suivante :

$$y_m(t) = \frac{\sum_{i=1}^M \omega_i(x(t)) f_i(x(t))}{\sum_{j=1}^M \omega_j(x(t))} \quad (2.2)$$

$$\mu_i(x(t)) = \frac{\omega_i(x(t))}{\sum_{j=1}^M \omega_j(x(t))} \quad (2.3)$$

En combinant les équations (2) et (3), on obtient l'expression générale d'une structure multi modèle :

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(x(t)) f_i(x(t)) \quad (2.4)$$

La fonction d'activation $\mu_i(x(t))$ détermine le degré d'activation du $i^{\text{ème}}$ modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global (multi modèle). Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions sont généralement de forme triangulaire, sigmoïdale ou gaussienne, et doivent satisfaire les propriétés suivantes (de convexité) :

$$\sum_{i=1}^M \mu_i(x(t)) = 1 \quad (2.5)$$

$$0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1 \quad (2.6)$$

On peut noter l'existence de plusieurs structures de multi modèles, parmi ceux qui existent on s'intéresse à la structure couplée où la représentation multi modèle est obtenue par interpolation de M modèles locaux linéaires :

$$\dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \quad (2.7)$$

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (C_i x_m(t) + E_i u(t) + N_i) \quad (2.8)$$

Où, $\mu_i(\xi(t)), i \in \{1, \dots, M\}$ sont les fonctions d'activation et $\xi(t)$ est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et éventuellement de la commande $u(t)$.

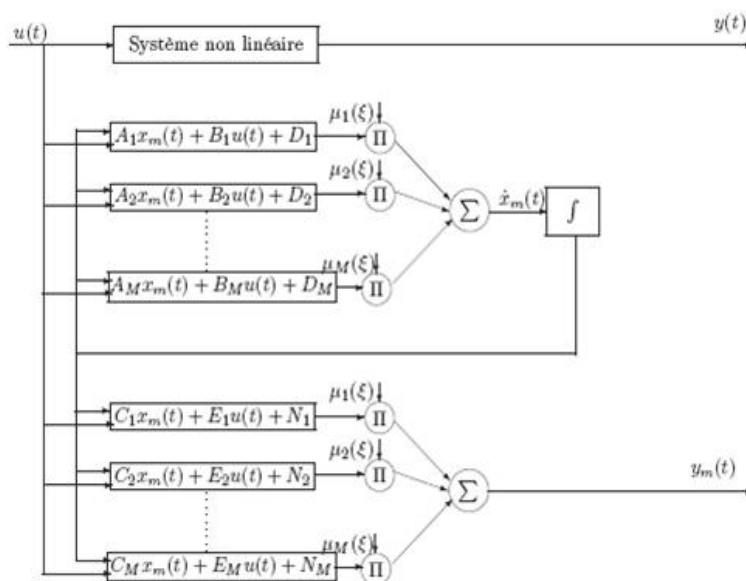


FIGURE 2.1 – Architecture d'un multimodèle à modèles locaux couplés

2.3 Recherche des modèles locaux par linéarisation

Dans ce cas, on dispose de la forme analytique du modèle non linéaire du processus physique qu'on linéarise autour de différents points de fonctionnement judicieusement choisis. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \quad (2.9)$$

$$y(t) = G(x(t), u(t)) \quad (2.10)$$

Où $(F, G) \in R^{2n}$ sont des fonctions non linéaires continues, $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état et $u(t) \in R^m$ est le vecteur d'entrée. Par la suite, nous représenterons le système non linéaire (9, 10) par un multi modèle, composé de plusieurs modèles locaux linéaires ou affines, tel que chaque modèle local est obtenu en linéarisant le système non linéaire autour d'un point de fonctionnement $(x_i, u_i) \in R^n \times R^m$.

Dans ce cas, on considère la définition des modèles locaux comme le premier terme du développement en série de Taylor du système (9, 10).

D'un point de vue mathématique, ceci correspond à approcher une fonction non linéaire par son plan tangent au point (x_i, u_i) . On suppose que les différents modèles locaux sont issus d'une linéarisation autour de M points de fonctionnement (x_i, u_i) . La formulation multi modèle est la suivante :

$$\dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \quad (2.11)$$

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(C_i x_m(t) + E_i u(t) + N_i) \quad (2.12)$$

Avec :

$$A_i = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x_i, u=u_i}, B_i = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x_i, u=u_i}, \quad (2.13)$$

$$D_i = F(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \quad (2.14)$$

$$C_i = \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x_i, u=u_i}, E_i = \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x_i, u=u_i}, \quad (2.15)$$

$$N_i = G(x_i, u_i) - C_i x_i - E_i u_i \quad (2.16)$$

Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux (M) dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation, ces dernières devant satisfaire les propriétés (5, 6).

2.3.1 Points de fonctionnement statiques

Considérant le système non-linéaire avec les dynamiques définies en (9, 10).

L'ensemble des points de fonctionnement d'équilibre de ce système non linéaire, sont les points : (x_0, y_0, u_0) pour les quels :

$$F(x_0, u_0) = 0 \quad (2.17)$$

$$G(x_0, u_0) = y_0 \quad (2.18)$$

Exemple illustratif

Soit le système suivant :

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 4x_2(t) \quad (2.19)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)x_1(t) + u(t) \quad (2.20)$$

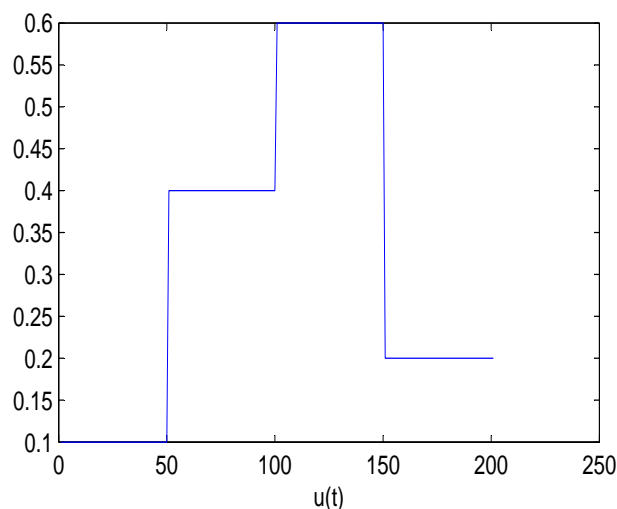


FIGURE 2.2 – Entrées $u(t)$ du système

La figure 2.3 montre bien qu'il s'agit d'un modèle non-linéaire. Pour une commande $u(t)$ donnée par la figure 2.2, en cherchant les solutions des équations (17, 18), on trouve plusieurs points de fonctionnement :

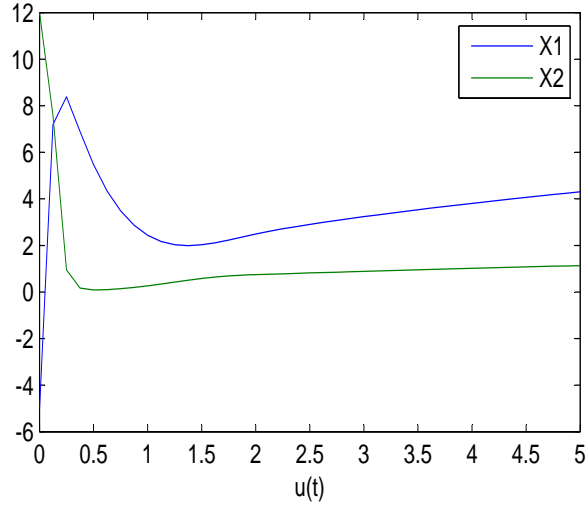
$$(x_{10}, x_{20}, u_0) = \left\{ \begin{array}{l} (0.6325, 0.1581, 0.1000), (1.2649, 0.3162, 0.4000), \\ (1.5492, 0.3873, 0.6000), (0.8944, 0.2236, 0.2000) \end{array} \right\}$$

L'approximation des états est donnée par l'équation :

$$\dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i)$$

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \end{bmatrix}$$

Avec l'indice i correspond au $i^{\text{ème}}$ modèle local et M est le nombre de modèles locaux, dans notre cas $M = 4$. Les fonctions d'activation μ_i choisies sont gaussiennes :


 FIGURE 2.3 – Caractéristiques statiques des états du modèle réel (x_{1s}, x_{2s})

$$\omega_i(u(t)) = \exp \frac{-(u(t)-u_i)^2}{2\sigma_i^2}$$

$$\mu_i(u(t)) = \frac{\omega_i(u(t))}{\sum_{j=1}^4 \omega_j(u(t))}$$

Les variances σ_i^2 ont été choisies arbitrairement de manière à obtenir une erreur minimale entre le modèle approximé et le modèle réel.

En fonction de la vitesse de transition d'un sous-modèle à l'autre et du recouvrement (zone où deux fonctions de pondération sont significativement non nulles en même temps), on peut introduire les notions de fonctions de pondération *fortement mélangées* et *peu mélangées*. Les figures 2.4 et 2.5 illustrent le résultat obtenu pour le deuxième cas (mélange faible), (Le cas limite, vitesse de transition infinie et recouvrement nul, correspond au cas des modèles linéaires par morceaux où les fonctions de pondération sont booléennes).

2.3.2 Optimisation paramétrique

Lorsque le modèle du système est non linéaire par rapport aux paramètres, il n'existe pas de solution analytique. Afin d'estimer ces paramètres, on a recourt à des techniques itératives d'optimisation non linéaire.

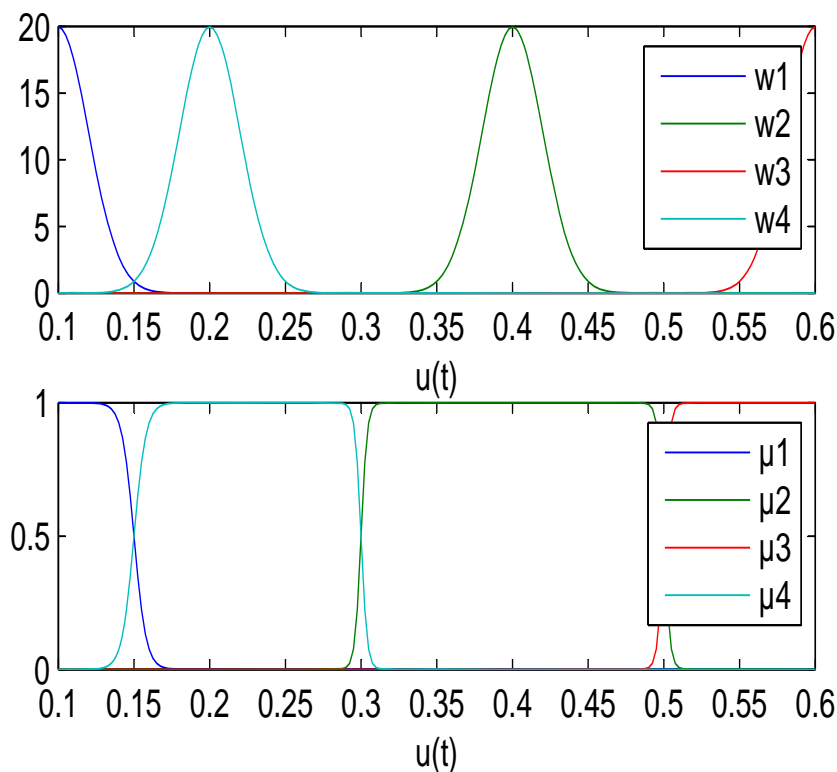


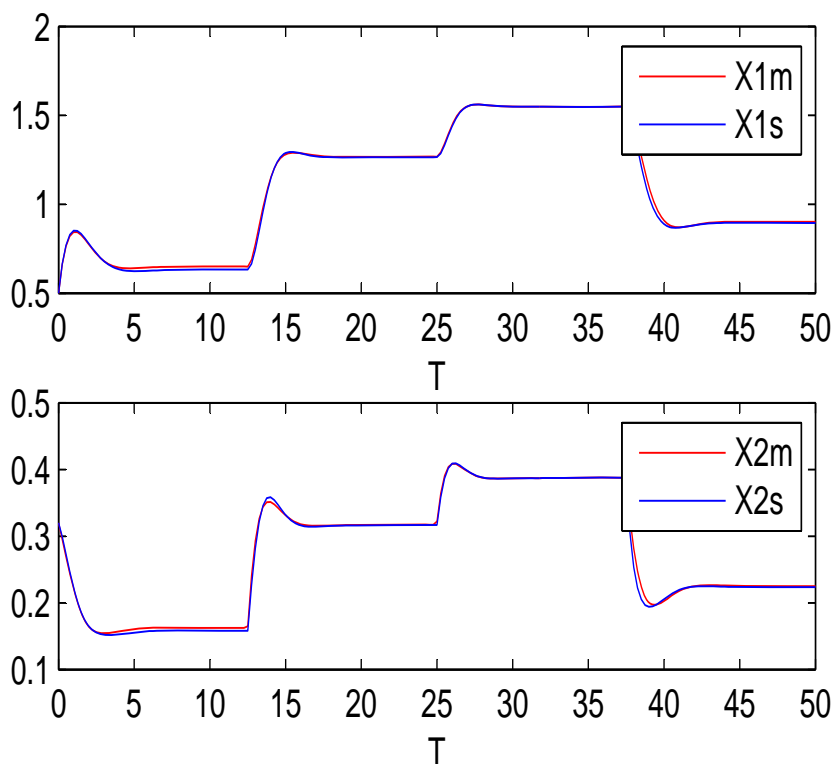
FIGURE 2.4 – Fonctions d’activations $\mu_i(u(t))$ et $\omega_i(u(t))$ du système

Plusieurs méthodes d’optimisation peuvent être utilisées, selon les informations disponibles a priori. Si la connaissance a priori sur les paramètres des fonctions d’activation et ceux des modèles locaux ne sont pas disponibles. Alors, ces paramètres doivent être optimisés au moyen d’une procédure itérative en raison des non-linéarités du modèle global (multi modèle) par rapport à ses paramètres.

Les méthodes d’identification de l’ensemble de tous les paramètres sont généralement basées sur la minimisation d’une fonctionnelle de l’écart entre les sorties : estimée $y_m(t)$ du multi modèle et mesurée $y(t)$ du système . Le critère le plus utilisé est le critère qui représente l’écart quadratique entre les deux sorties indiquées :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon(t, \theta)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_m(t) - y(t))^2$$

où N est l’horizon d’observation et θ est le vecteur de paramètres des

FIGURE 2.5 – Caractéristiques des états du modèle réel (x_{1s}, x_{2s}) et du multi modèle (x_{1m}, x_{2m})

modèles locaux et ceux des fonctions d'activation.

Les méthodes de minimisation du critère $J(\theta)$ s'appuient, le plus souvent, sur un développement limité du critère $J(\theta)$ autour d'une valeur particulière du vecteur de paramètres θ et d'une procédure itérative de modification progressive de la solution.

Exemple illustratif

Soit le système (19, 20) donné dans l'exemple précédent. On va identifier les points de fonctionnement (x_{1i}, x_{2i}, u_i) et les variances σ_i^2 des fonctions d'activation, à partir de la minimisation du critère suivant :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(x_{1s}(t) - x_{1m}(t))^2 + (x_{2s}(t) - x_{2m}(t))^2]$$

θ : représente le vecteur des paramètres à identifier

$$\theta = [(x_{11}, x_{21}, u_1), \dots, (x_{1N}, x_{2N}, u_N), \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N]$$

Plusieurs méthodes d'optimisation peuvent être utilisées, dans notre cas l'algorithme choisi est celui de Levenberg-Marquardt, qui nécessite un vecteur de paramètres initial. Pour avoir une convergence de l'algorithme et obtenir ce vecteur on a utilisé la méthode de classification k-means.

Les variances des fonctions d'activation sont choisies aléatoirement dans une plage de valeurs.

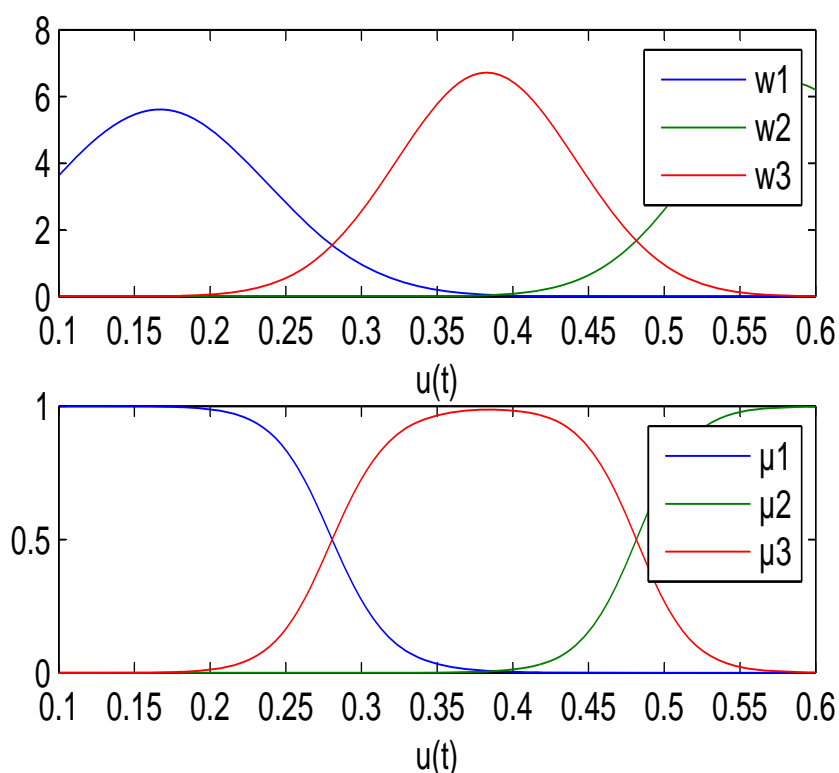


FIGURE 2.6 – Fonctions d'activations $\mu_i(u(t))$ et $\omega_i(u(t))$ du système

Les figure 2.6 et 2.7 illustrent le cas de trois modèles locaux $M = 3$ pour la même entrée précédente. Les trois points obtenus après l'optimisation sont :

$$(x_{1i}, x_{2i}, u_i) = \{(0.9275, 0.2619, 0.2054), (0.3165, 0.4939, 0.6370), (0.1127, 0.0136, 0.0488)\}$$

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1.4793, 0.1914, 0.0143)$$

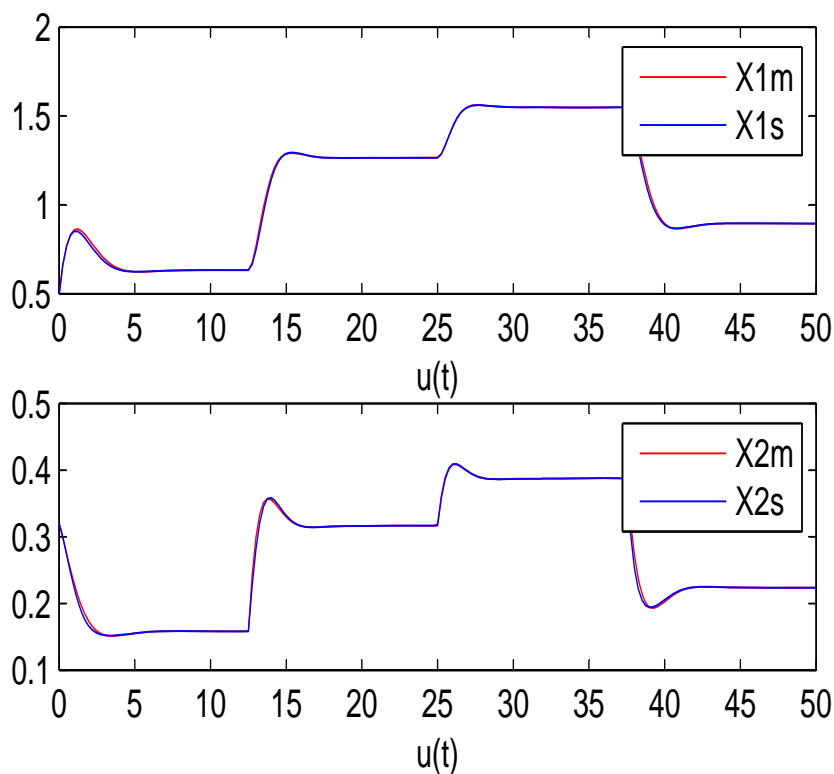


FIGURE 2.7 – Caractéristiques des états du modèle réel (x_{1s}, x_{2s}) et du multi modèle (x_{1m}, x_{2m})

2.3.3 Conclusion

On peut conclure que l'approche multi modèle donne une bonne approximation des modèles non linéaires par des modèles locaux linéaires, et on peut remarquer que l'utilisation de l'optimisation dans le choix des points de fonctionnement donne des résultats mieux que ceux obtenus avec des points de fonctionnement statiques, seulement elle a une grande complexité de calcul et de mise en œuvre.

3

Fonctions de sensibilité

Sommaire

3.1	Introduction	41
3.2	Analyse de sensibilité	41
3.2.1	Méthode des différences finies	43
3.2.2	Méthode directe	43

3.1 Introduction

L'analyse de sensibilité peut être utilisée pour quantifier l'amplitude de la dépendance des prédictions du modèle sous certaines suppositions de modélisation, elle étudie la "sensibilité" des sorties d'un système aux changements dans les paramètres, entrées ou conditions initiales qui sont généralement mal connues. L'analyse de sensibilité peut être divisée en deux catégories larges : méthode locale et globale d'analyse de sensibilité. Les méthodes locales d'analyse de sensibilité se réfèrent au petit changement des paramètres, pendant que les méthodes globales se réfèrent à l'effet simultané, de l'ordre possible de l'amplitude des changements dans le paramètre. La méthode des différences finies et la méthode différentielle directe, des techniques d'analyse locale et globale de la sensibilité respectivement, sont présentées ici en détail.

3.2 Analyse de sensibilité

La forme générale du système qui va être étudié est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \theta) \quad (3.1)$$

Avec y est le vecteur des variables d'état de dimension n , θ est le vecteur des paramètres du système de dimension p (qui peut inclure les conditions initiales et les variables d'entrée), et t est la variable indépendante.

La sensibilité d'une variable d'état y à un paramètre θ peut être exprimée comme une fonction sensibilité (équation 3.2). Une variable d'état y est dite sensible à θ si des petits changements dans θ produisent des changements significatifs dans y . Dans l'autre côté, une variable y est dite insensible à θ si les changements dans θ ne produisent aucun changement dans y .

$$S(t) = \frac{dy(t)}{d\theta} \quad (3.2)$$

Cette dérivée partielle peut être résolue analytiquement si la solution analytique de (3.1) est connue. Malheureusement, ceci est un cas rare et les méthodes numériques doivent être utilisées pour approximer la fonction de sensibilité (équation 3.2). Les techniques locales d'analyse de sensibilité évaluent cette dérivée partielle à une valeur spécifique unique d'un paramètre, aussi connue comme valeur nominale du paramètre. Dans l'autre côté les techniques globales d'analyse de sensibilité évaluent cette dérivée partielle dans différents points du domaine paramétrique. Les deux techniques en même temps sont utilisables dans l'étude du comportement du système comme chacune d'entre elles a ses avantages et ses inconvénients. Deux techniques vont être principalement décrites ici, qui sont (a) la méthode différentielles directe, (b) la méthode des différences finies. Il existe aussi d'autres méthodes comme la méthode découplée et ses variantes, la méthode d'approximation polynomiale et la méthode de différentiation automatique que nous n'avons pas détaillé ici.

Pratiquement la plupart des techniques nécessitent toutes des manipulations complexes des équations du model surtout lorsque les modèles sont très compliqués. Lorsque les équations du model ne sont pas directement accessible (ex .car ils sont compilés dans un code exécutable commercial) on a recours à la technique des différences finies. C'est la raison principale que la méthode des différences finies qu'elle est encore très utilisée [2][3].

3.2.1 Méthode des différences finies

La façon la plus simple pour le calcul de la sensibilité locale c'est d'utiliser l'approximation des différences finies. Cette technique est aussi dite méthode 'brute force' ou méthode indirecte. La dérivée partielle définie dans l'équation 3.2 peut être mathématiquement formulées par l'équation donnée ci-dessous (différence directe) :

$$\frac{\partial y_i}{\partial \theta_j} = \lim_{\Delta\theta_j \rightarrow 0} \frac{y_i(t, \theta_j + \Delta\theta_j) - y_i(t, \theta_j)}{\Delta\theta_j} \quad (3.3)$$

Cette équation est valide seulement si on considère une variation infinitésimale (perturbation) des paramètres, entrées ou conditions initiales $\theta(\Delta\theta_j \rightarrow 0)$.

L'équation 3.3 montre que l'application de la méthode des différences finies nécessite la solution du model (équation1) en utilisant la valeur nominale des paramètres $y_i(t, \theta_j)$ et p solutions de l'équation en utilisant les paramètres perturbés $y_i(t, \theta_j + \Delta\theta_j)$. On doit seulement noté ici qu'un seul paramètre est perturbé à la fois pendant que les autres sont gardés a leur valeur nominale. Les sensibilités obtenues appartiennent à l'ensemble des paramètres $(\theta + \Delta\theta/2)$ car l'équation 3.3 peut être aussi vue comme la moyenne des sensibilités de la sortie du model y_i à θ_j et $\theta_j + \Delta\theta_j$. Si on désire obtenir des coefficients de sensibilité qui appartiennent à la valeur nominale, l'équation 3 doit être modifiée à :

$$\frac{\partial y_i}{\partial \theta_j} \approx \lim_{\Delta\theta_j \rightarrow 0} \frac{y_i(t, \theta_j + \Delta\theta_j) - y_i(t, \theta_j - \Delta\theta_j)}{2\Delta\theta_j} \quad (3.4)$$

La formule de différence centrale nécessite $2p$ solutions.

3.2.2 Méthode directe

La technique des différences finies est connue d'être très intensive en matière de calcul, spécialement dans le cas ou les sensibilités à plusieurs paramètres sont nécessaires. C'est pour cela que la méthode directe a été développée pour l'analyse de sensibilité. La différenciation de l'équation

3.1 par rapport à θ_j donne l'ensemble suivant des équations différentielles de sensibilité. La solution de ces équations résulte dans les fonctions de sensibilité.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial \theta_j} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta_j} + \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \quad (3.5)$$

Le terme $\frac{\partial f}{\partial y}$ de l'équation 3.5 est reconnu comme étant le Jacobien J du système original donné par l'équation 1. Les équations 3.1 et 3.5 sont couplés à partir de $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$. Cela signifie que la solution de l'équation 3.5 nécessite la connaissance de la solution de l'équation 1 sur tout les points où le solveur ODE calcule le côté droit de l'équation 3.5. La connexion entre ces deux ensembles d'équations peut être faite par l'une des méthodes suivantes :

1. Résoudre les équations 1 et 5 pour tout paramètre θ simultanément, ce qui nécessite la solution de $(p + 1)n$ ODE. La solution directe de ce système large nécessite beaucoup de calcul.
2. Résoudre le couple des équations 1 et 5, ce qui nécessite la solution de $2n$ ODE p fois (pour chaque paramètre). Cette version est la plus simple à programmer, mais est moins économique et peut causer des problèmes numériques due aux matrices jacobienne mal conditionnées.

4

Application sur ASM1

Sommaire

4.1	Méthode différentielle directe	46
4.1.1	Fonction sensibilité	46
4.1.2	Modèle réduit	48
4.1.3	Remarque	49
4.2	Application de la représentation multimodèle	49
4.2.1	Remarque	50
4.2.2	Conclusion	50

Dans ce travail, nous proposons l'application de l'analyse de sensibilité afin de déterminer les paramètres principaux du système de traitement des eaux résiduaires, et nous proposons également un modèle simplifié basé sur le résultat obtenu de l'analyse de sensibilité .

Les entrées du modèle sont q_a et q_{circ} tandis que la sortie c'est Z . A ce stade le modèle contient 18 paramètres à étudier :

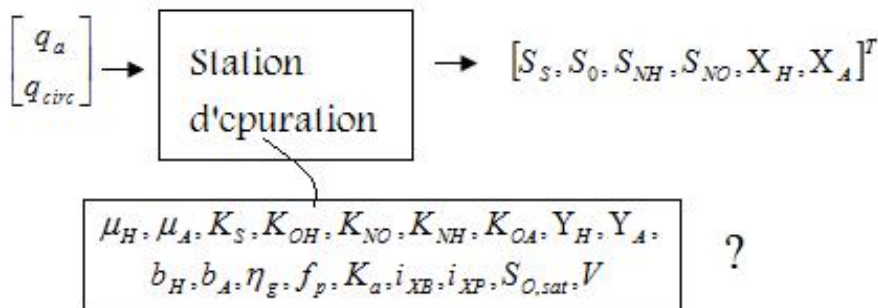


FIGURE 4.1 – Paramètres à étudier

4.1 Méthode différentielle directe

4.1.1 Fonction sensibilité

Soit la fonction Z_p de sensibilité du système :

$$\dot{Z}(p, t) = f(Z(p, t), p, u) \quad (4.1)$$

Soit définie par :

$$Z_p = \frac{\partial Z}{\partial p} \quad (4.2)$$

Ou en termes de composants :

$$(Z_p)_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial p_j} \quad (4.3)$$

En d'autres mots, la fonction sensibilité $(Z_p)_{ij}$ est une description mathématique qui indique l'influence d'un léger changement dans le paramètre p_j sur la variable d'état Z_i . La différentiation de (4.1) par le vecteur paramètre p donne :

$$\dot{Z}_p(t) = \frac{\partial f}{\partial z} Z_p(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial p} \quad (4.4)$$

La fonction sensibilité peut être obtenu en résolvant cette équation pour Z_p .

Comme le model étudié peut être décrit par (1.1) et (1.2), (4.4) spécialement devient comme suit. Soit :

$$p = [\mu_H, \mu_A, K_S, K_{OH}, K_{NO}, K_{NH}, K_{OA}, Y_H, Y_A, b_H, b_A, \eta_g, f_p, K_a, i_{XB}, i_{XP}, S_{O,sat}, V]^T$$

– Bassin d'anoxie :

$$\text{Lorsque : } f_{anoxie} = S^T R(Z) + \frac{q_{circ}}{V} Z$$

$$Z_p = \begin{bmatrix} S_{S,\mu_H} & \cdots & S_{S,V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{A,\mu_H} & \cdots & X_{A,V} \end{bmatrix}$$

Les termes du coté droit de (4.4) peuvent être écrits comme suit :

$$\frac{\partial f_{anoxie}}{\partial Z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{anoxie,S_S}}{\partial S_S} & \cdots & \frac{\partial f_{anoxie,S_S}}{\partial X_A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{anoxie,X_A}}{\partial S_S} & \cdots & \frac{\partial f_{anoxie,X_A}}{\partial X_A} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial f_{anoxie}}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{anoxie,S_S}}{\partial \mu_H} & \cdots & \frac{\partial f_{anoxie,S_S}}{\partial V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{anoxie,X_A}}{\partial \mu_H} & \cdots & \frac{\partial f_{anoxie,X_A}}{\partial V} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

– Bassin d'aérobie :

Lorsque : $f_{aérobie} = S^T R(Z) + [0, K_a q_a, 0, 0, 0, 0]^T (S_{O,sat} - S_O) - \frac{q_{circ}}{V} Z$

$$Z_p = \begin{bmatrix} S_{S,\mu_H} & \cdots & S_{S,V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{A,\mu_H} & \cdots & X_{A,V} \end{bmatrix}$$

Les termes du coté droit de (4.4) peuvent être écrits comme suit :

$$\frac{\partial f_{aérobie}}{\partial Z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{aérobie,S_S}}{\partial S_S} & \cdots & \frac{\partial f_{aérobie,S_S}}{\partial X_A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{aérobie,X_A}}{\partial S_S} & \cdots & \frac{\partial f_{aérobie,X_A}}{\partial X_A} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial f_{aérobie}}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{aérobie,S_S}}{\partial \mu_H} & \cdots & \frac{\partial f_{aérobie,S_S}}{\partial V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{aérobie,X_A}}{\partial \mu_H} & \cdots & \frac{\partial f_{aérobie,X_A}}{\partial V} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Les figures 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7 sont des courbes de sensibilité pour les différentes concentrations et qui sont obtenues en résolvant (4.4). Pour la comparaison, la sensibilité relative pZ_p est tracée par rapport au temps. On peut observer que quelques courbes restent près de zéro ; l'effet de ces paramètres sur le changement des différentes concentrations peut être assumé d'être très diminutive, et ils peuvent être conclus ainsi pour avoir une sensibilité basse. Ici, nous avons assumé cela : si le maximum absolu d'une courbe de sensibilité spécifique est inférieur à 20% du maximum absolu le plus haut de pZ_p , le paramètre a une sensibilité basse .

Discussion

La table 4.1 donne la liste des paramètres qui ont la haute sensibilité.

	S_S	S_O	S_{NH}	S_{NO}	X_H	X_A
μ_H	*	*		*	*	*
μ_A				*		*
K_S		*				
K_{OH}	*	*		*		
K_{NO}	*	*				
K_{NH}		*				
K_{OA}						
Y_H		*	*	*	*	*
Y_A			*	*		*
b_H	*				*	
b_A				*		*
η_g						
f_p						
k_a	*	*	*	*	*	*
i_{XB}		*	*		*	
i_{XP}						
$S_{O,sat}$	*	*	*	*	*	*
V					*	

TABLE 4.1 – Paramètres clé du modèle ASM1 obtenu par analyse de sensibilité.

Les paramètres trouvés qui ont la plus haute sensibilité pour au moins une variable sont :

$$[\mu_H, \mu_A, K_S, K_{OH}, K_{NO}, K_{NH}, Y_H, Y_A, b_H, b_A, K_a, i_{XB}, S_{O,sat}, V]$$

Alors l'étape suivante consiste à faire une comparaison entre le modèle ASM1 et le modèle réduit.

4.1.2 Modèle réduit

D'après l'analyse faite précédemment ; $\mu_H, \mu_A, K_S, K_{OH}, K_{NO}, K_{NH}, Y_H, Y_A, b_H, b_A, K_a, i_{XB}, S_{O,sat}, V$ sont les paramètres clé , pour les autres paramètres nous allons supposé que leur influence est pratiquement nulle et donc ils seront pris comme élément neutre , le modèle précédent peut être écrit comme suit :

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{Y_H} & \frac{Y_H-1}{Y_H} & -i_{XB} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{Y_H} & 0 & -i_{XB} & \frac{Y_H-1}{2.86Y_H} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{Y_A-1}{Y_A} & -i_{XB} - \frac{1}{Y_A} & \frac{1}{Y_A} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i_{XB} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -i_{XB} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$R(Z) = \begin{pmatrix} \mu_H \left(\frac{S_S}{K_S+S_S} \right) \left(\frac{S_O}{K_{OH}+S_O} \right) X_H \\ \mu_H \left(\frac{S_S}{K_S+S_S} \right) \left(\frac{K_{OH}}{K_{OH}+S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{OH}+S_{NO}} \right) X_H \\ \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH}+S_{NH}} \right) X_A \\ b_H X_H \\ b_A X_A \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Pour évaluer ce modèle , nous avons tracé les sorties du modèle ASM1 et celles du modèle réduit pour les deux cas : anoxie et aérobie . Les entrées du système sont prisent sous formes de mélange de deux sinusoïdes bruitées de périodes différentes pour approcher mieux au cas réel (figure 4.8)[4], les résultats sont indiqués dans les figures 4.9 et 4.10.

Les figures 4.11 et 4.12 illustrent l'erreur entre le modèle ASM1 et le modèle réduit.

4.1.3 Remarque

On remarque bien que les sorties du modèle réduit était proche à un degré près à celle du modèle initial , le résultat obtenu était mieux dans le cas d'anoxie que dans le cas de l'aérobie . Ce résultat reste à améliorer en vue d'obtenir un modèle plus simplifié et plus précis.

4.2 Application de la représentation multimodèle

Ici, nous avons essayé d'établir un multi modèle depuis le modèle obtenu en appliquant les démarches citées dans le chapitre 2. Comme le modèle est

fortement non- linéaire, nous avons utilisé l'optimisation pour l'obtention des paramètres du multi modèle. Les fonctions d'activations sont présent sous la forme suivante :

$$\omega_i(u_1(t)) = \exp \frac{-(u_1(t)-u_{1i})^2}{2\sigma_i^2}$$

$$\mu_i(u_1(t)) = \frac{\omega_i(u_1(t))}{\sum_{j=1}^M \omega_j(u(t))}$$

avec : $u_1(t) = q_a$

Pour la simulation, nous avons pris deux cas : M=6 points de fonctionnements et M=10 points de fonctionnement. Les figures 4.13 et 4.15 illustrent les résultats obtenus.

4.2.1 Remarque

On remarque que les sorties du multi modèles se rapproche de plus en plus à celle du modèle initial mais malgré, l'augmentation du nombre des points de fonctionnement, le résultat reste à améliorer pour avoir un écart acceptable.

4.2.2 Conclusion

D'après l'étude faite dans ce chapitre on peut déduire que l'analyse de sensibilité nous a permis d'avoir une approximation acceptable du modèle original par un autre modèle réduit , ceci en étudiant la sensibilité des sorties par rapport aux paramètres puis en éliminant les paramètres dont l'influence est négligeable. L'intérêt d'une telle opération réside aussi dans l'opération d'identification des paramètres c'est-à-dire la réduction des paramètres à estimer dans un système donné. Dans la deuxième application, nous avons vu que malgré l'augmentation du nombre des points de fonctionnement dans le multimodèle , l'écart était important entre le modèle initial et le multimodèle ,et l'augmentation du nombre de points de fonctionnement cause une divergence de l'algorithme d'optimisation , ceci peut être justifier par les causes suivantes :

- La complexité du système non linéaire
- Le choix du vecteur des paramètres initiaux : points de fonctionnement .
- Le choix des fonctions d'activations.
- La précision souhaitée.

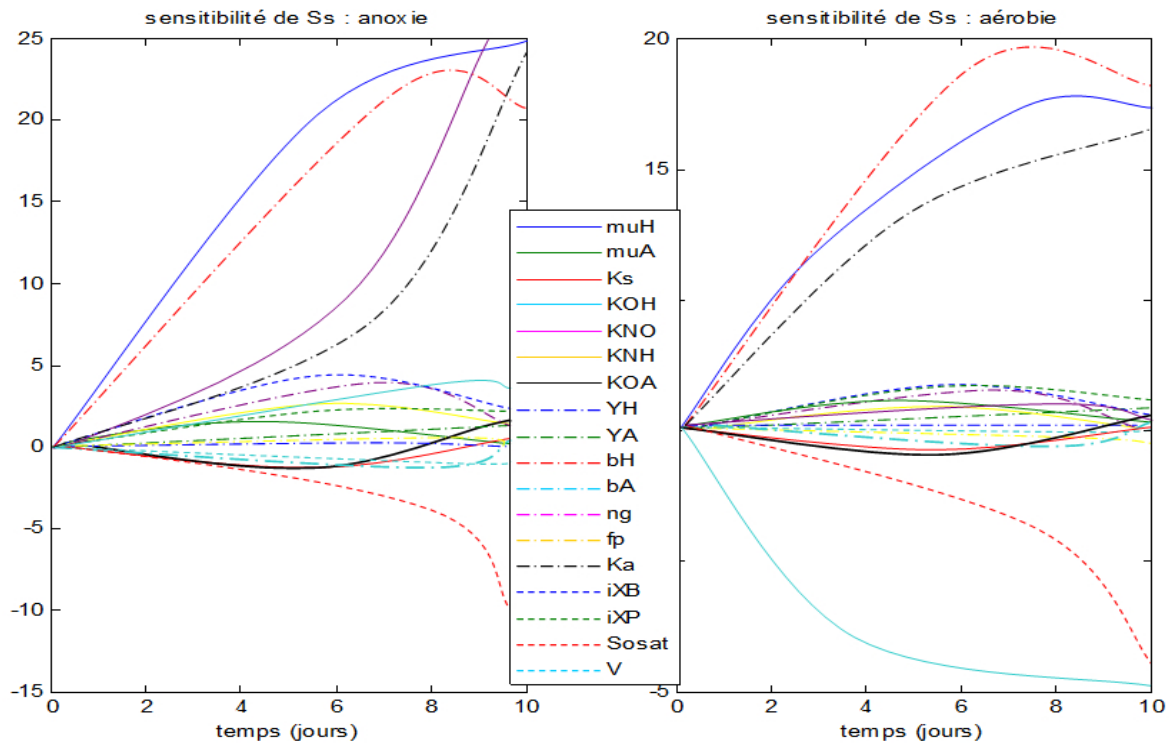


FIGURE 4.2 – Courbes de sensibilités de S_s par rapport aux différents paramètres

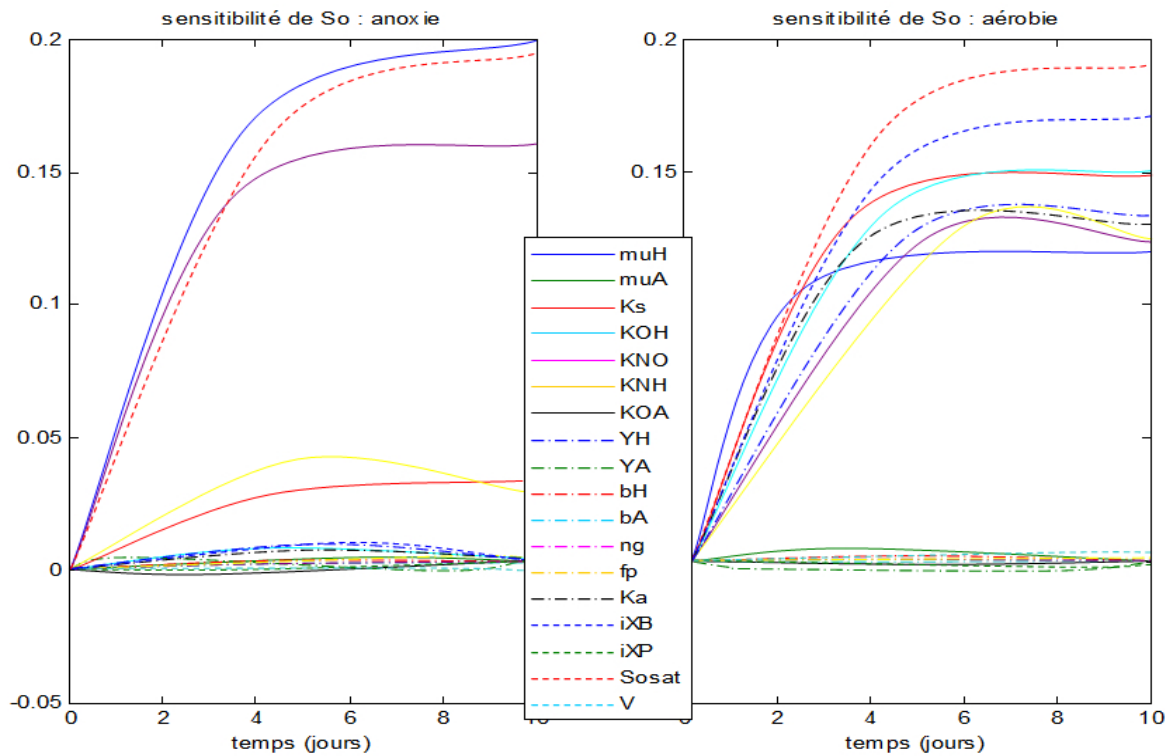


FIGURE 4.3 – Courbes de sensibilités de S_o par rapport aux différents paramètres

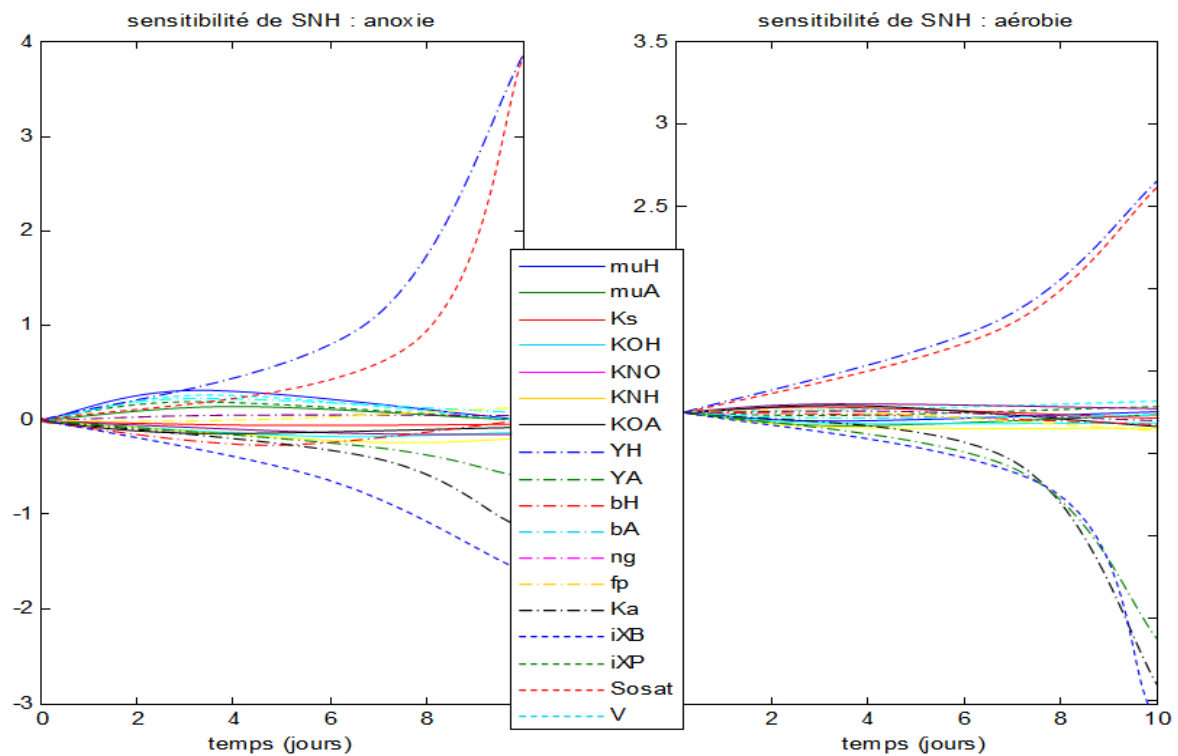


FIGURE 4.4 – Courbes de sensibilités de SNH par rapport aux différents paramètres

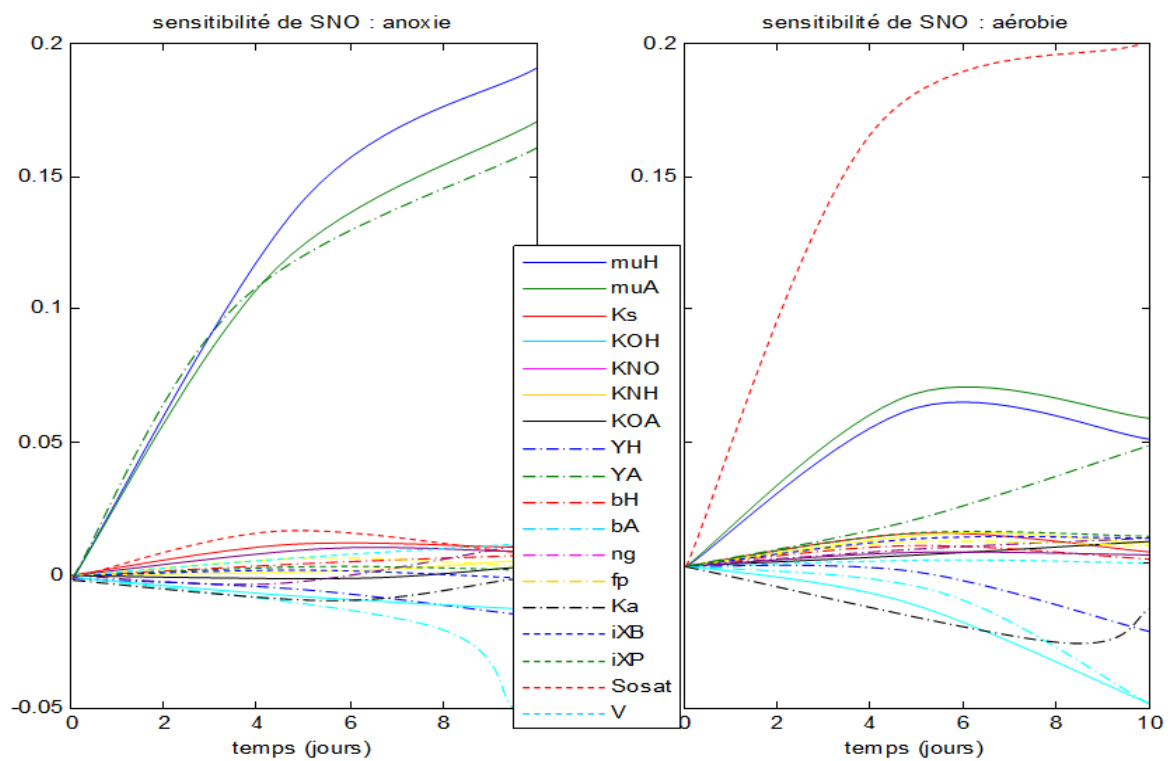


FIGURE 4.5 – Courbes de sensibilités de SNO par rapport aux différents paramètres

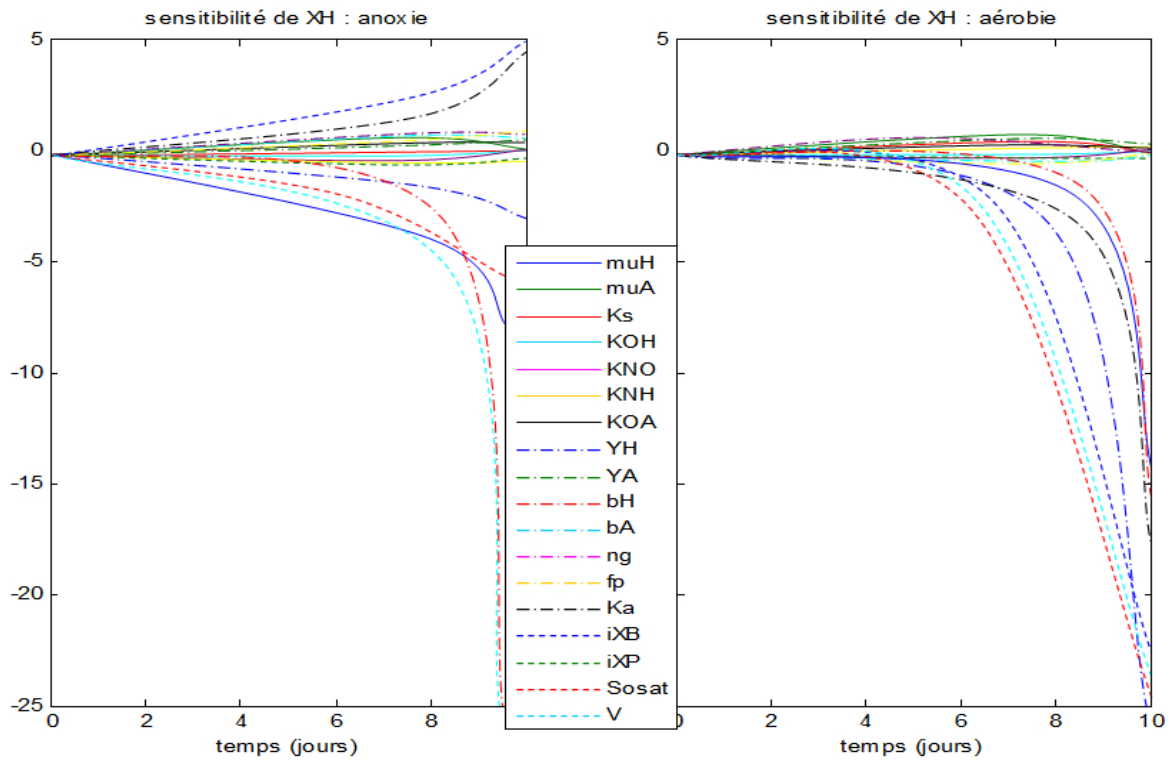


FIGURE 4.6 – Courbes de sensibilités de XH par rapport aux différents paramètres

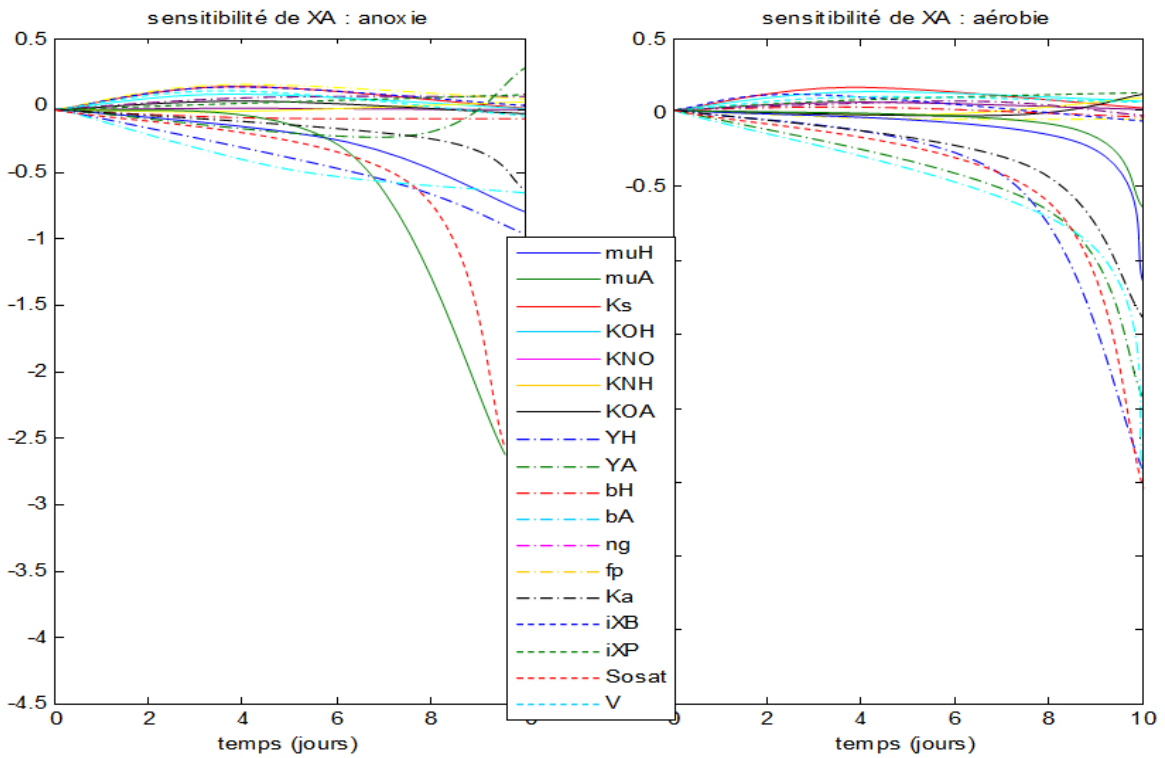


FIGURE 4.7 – Courbes de sensibilités de XA par rapport aux différents paramètres

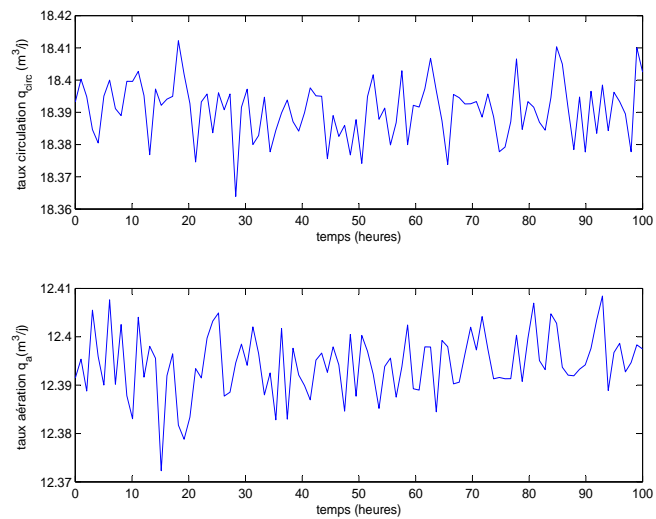


FIGURE 4.8 – Entrées du système

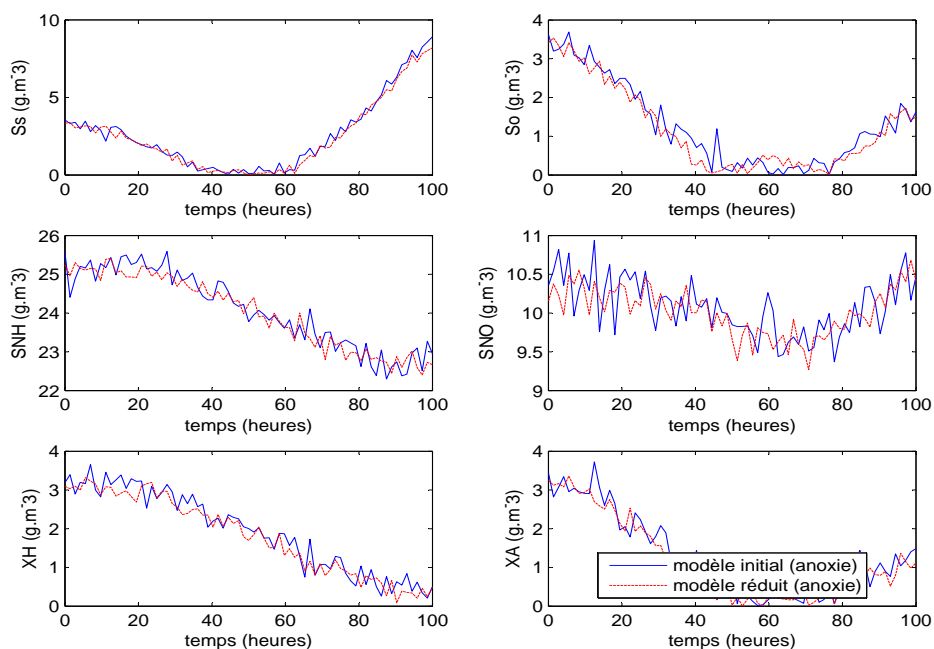


FIGURE 4.9 – Etats du modèle ASM1 et modèle réduit : cas d'anoxie

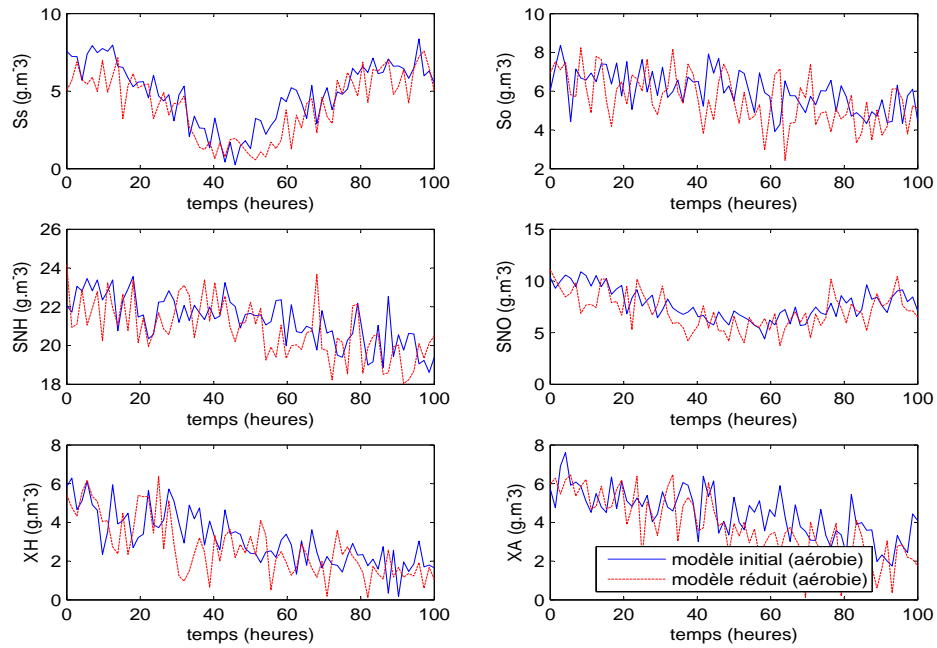


FIGURE 4.10 – Etats du modèle ASM1 et modèle réduit : cas d'aérobie

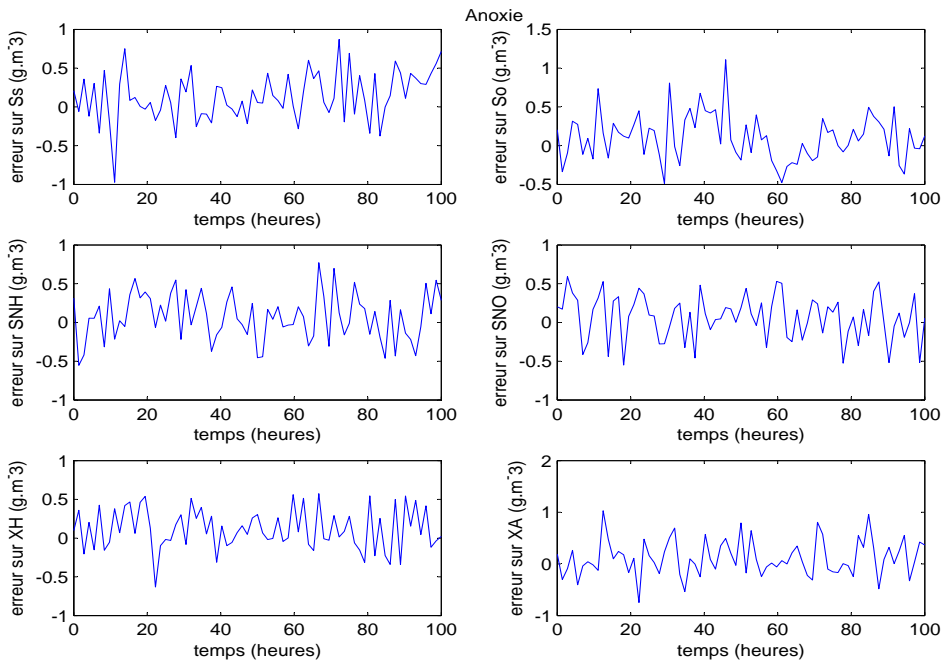


FIGURE 4.11 – Erreur sur les états entre modèle ASM1 et modèle réduit : cas d'anoxie

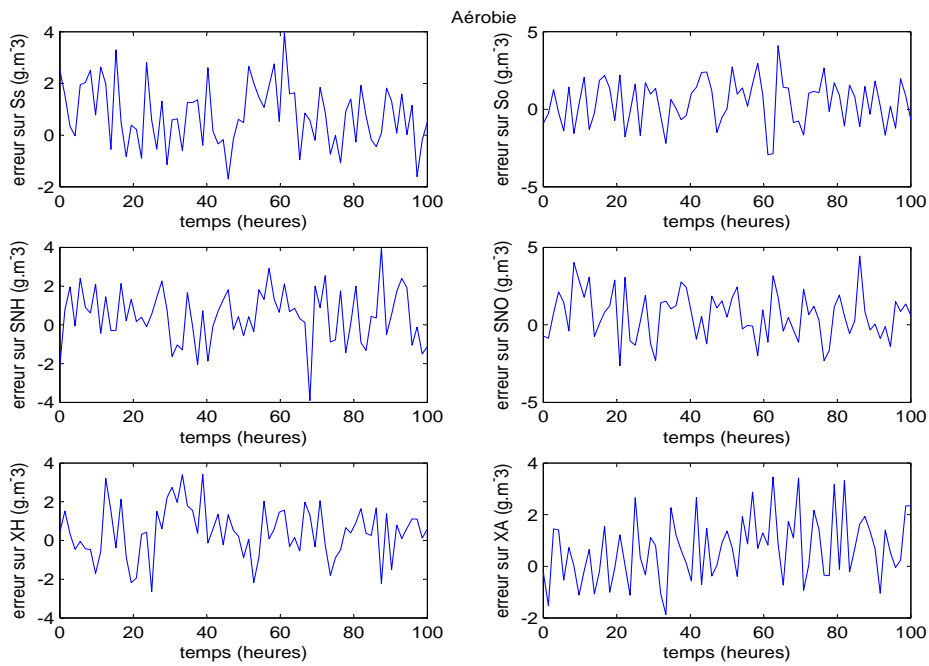


FIGURE 4.12 – Erreur sur les états entre modèle ASM1 et modèle réduit : cas d'aérobie

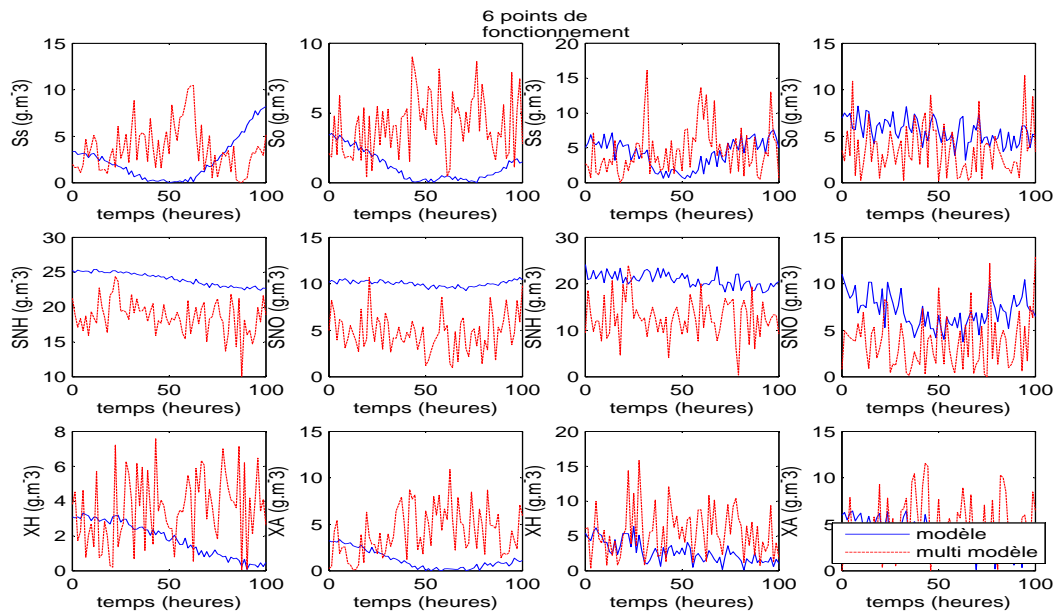


FIGURE 4.13 – Sorties du modèle et du multi modèle : cas de 6 points de fonctionnement (à droite : aérobie, à gauche : anoxie)

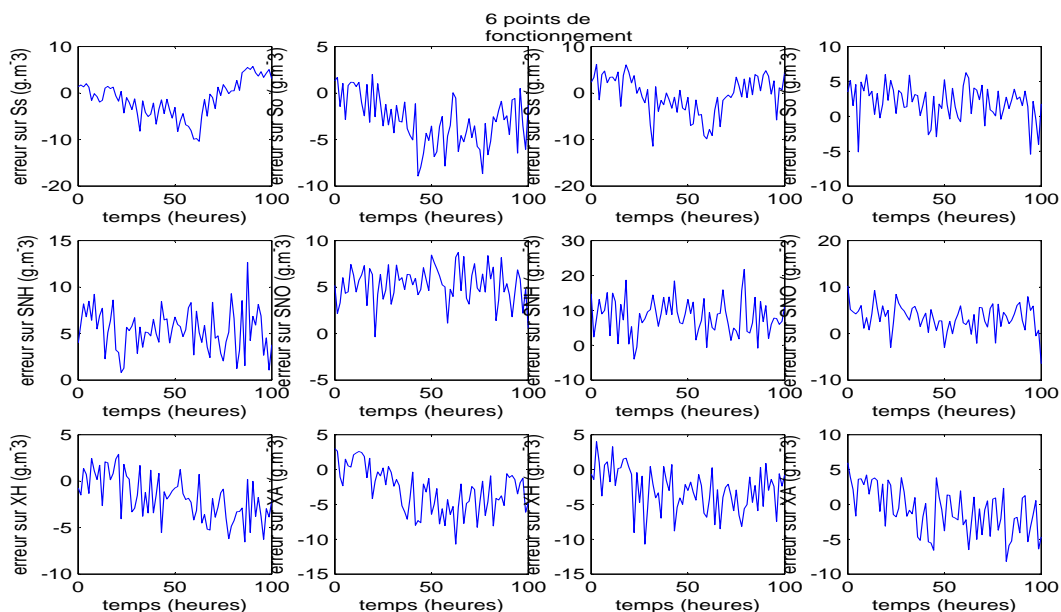


FIGURE 4.14 – Erreur entre modèle et multi modèle : cas de 6 points de fonctionnement (à droite : aérobie, à gauche : anoxie)

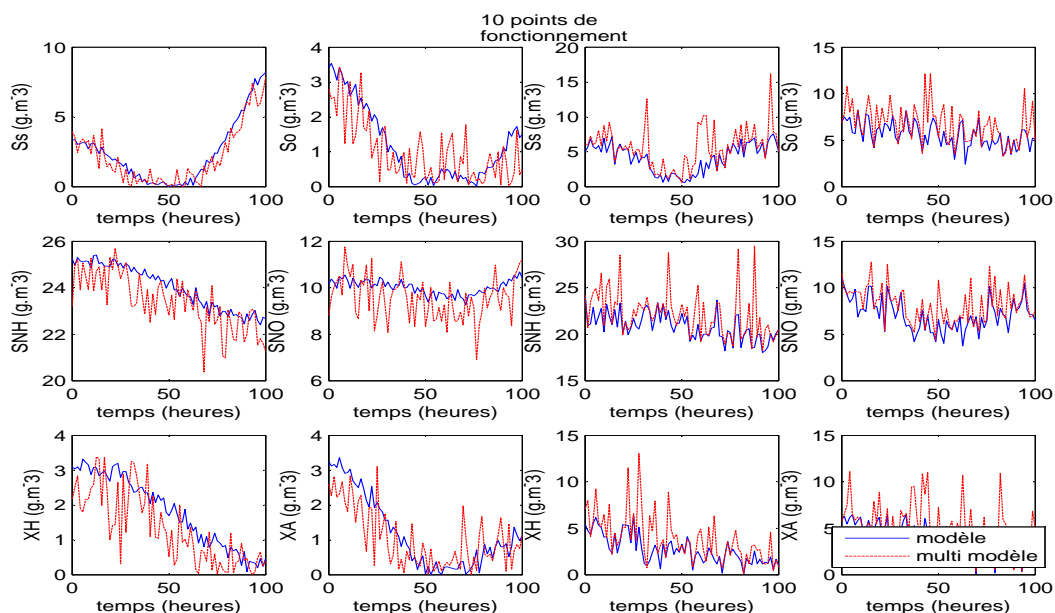


FIGURE 4.15 – Sorties du modèle et du multi modèle : cas de 10 points de fonctionnement (à droite : aérobie, à gauche : anoxie)

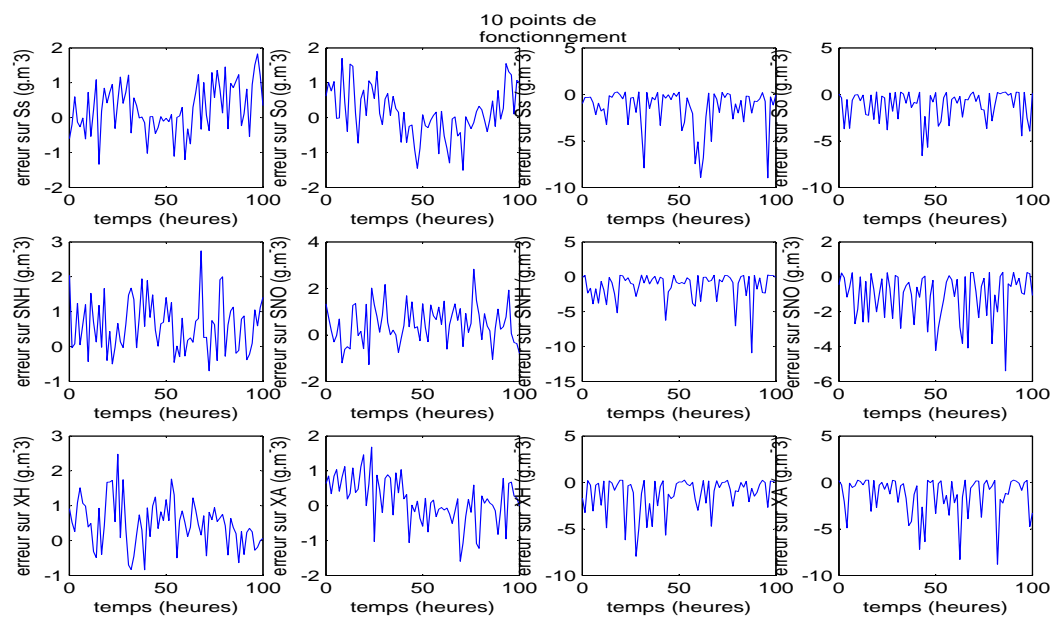


FIGURE 4.16 – Erreur entre modèle et multi model : cas de 10 points de fonctionnement (à droite : aérobie, à gauche : anoxie)

Conclusions

Dans ce travail, nous avons étudié une partie d'une station d'épuration des eaux usées modélisée par ASM1. en premier lieu, nous avons essayé de représenter un système non-linéaire par un multimodèle et nous avons démontré l'efficacité de l'approximation obtenue et l'intérêt majeur qui réside dans la possibilité d'étendre les propriétés d'analyse des systèmes LTI aux systèmes non-linéaire .Comme une deuxième étude nous avons introduit la notion de sensibilité, nous avons fait appel à l'analyse de sensibilité des paramètres d'un système non-linéaire.

Comme application nous avons pris le modèle ASM1 : ce système a l'avantage d'être très répandue et donne une complexité offrant beaucoup de sujets d'études. Les résultats obtenus montrent à un degré près la possibilité de réduire la complexité du système en se basant sur l'étude de la sensibilité des paramètres qui ont une grande influence seulement, l'avantage de telle approche réside aussi dans la possibilité d'étendre cette étude à l'identification en passant à un nombre moins de paramètres. Aussi nous avons vu la capacité du multimodèle à approximer le comportement du système avec des limitations et difficultés trouvés et qui sont causés principalement par : la forte non-linéarité du système étudié, le grand nombre de paramètre à optimiser, leurs valeurs initiales et les différents choix présent dans la structure elle-même.

Comme travail futur nous envisagerons d'étendre l'étude sur un modèle plus complet de la station d'épuration des eaux usées BSM1 (Benchmark Simulation Model 1) en essayons d'approcher au mieux aux cas réels tout améliorant nos résultats.

A

Algorithme de LEVENBERG-MARQUARDT

Un problème de régression non linéaire consiste à chercher le minimum de la fonction

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^n p_i [f(\alpha, x_i) - y_i]^2 \quad (\text{A.1})$$

en faisant varier les paramètres $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q)$. Ce minimum étant un point où le gradient de S s'annule, cela revient à trouver les α tels que $\vec{\text{grad}}S = 0$. Lorsque le modèle de régression non linéaire $f(\alpha, x_i)$ dépend linéairement des paramètres à optimiser, la fonction S est du second degré, donc son gradient est linéaire. L'équation $\vec{\text{grad}}S = 0$ est alors un système linéaire de Q équations à Q inconnues qu'on résout numériquement par la méthode du pivot de Gauss.

N. B. On notera que le terme *linéaire* (ou le terme *non linéaire*) a, dans le présent contexte, deux sens indépendants à ne pas confondre : le modèle de régression *non linéaire* $f(\alpha, x_i)$ peut dépendre *linéairement* ou non des paramètres α : $y = f(\alpha, x)$ est un modèle de régression *non linéaire* si f dépend non linéairement de x , mais il peut dépendre linéairement de α ; ainsi $f(\alpha, x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ est un modèle de régression non linéaire, qui dépend linéairement de α . Lorsque la dépendance en α n'est pas linéaire on doit traiter un système non linéaire de Q équations à Q inconnues et il existe pour cela un algorithme numérique qui a fait ses preuves, connu sous le nom de Levenberg – Marquardt.

Étant donné que la fonction $S(\alpha)$ s'exprime analytiquement à l'aide de fonctions élémentaires (la fonction $f(\alpha, x)$ ne peut offrir un bon modèle de

régression que si elle est élémentaire), elle est facile à dériver. On a

$$S_\ell = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\ell} = \sum_{i=1}^n 2 p_i [f(\alpha, x_i) - y_i] \frac{\partial f}{\partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i) \quad (\text{A.2})$$

Le vecteur $\{S_\ell\}_{\ell=1,2,\dots,Q}$ est le gradient déjà mentionné. Les dérivées secondes seront

$$S_{k\ell} = \frac{\partial S_\ell}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial S_k}{\partial \alpha_\ell} = \sum_{i=1}^n 2 p_i \left\{ [f(\alpha, x_i) - y_i] \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_\ell \partial \alpha_k}(\alpha, x_i) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}(\alpha, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i) \right\} \quad (\text{A.3})$$

Ces expressions se prêtent parfaitement bien à la programmation et par conséquent l'algorithme itératif qui conviendra le mieux à la résolution du système d'équations $\vec{grad}S = 0$ est la méthode de Newton ou méthode de la tangente. Elle consiste à choisir des valeurs initiales $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_Q^{(0)}$ — qu'on notera collectivement $\alpha^{(0)}$ — à partir desquelles on calcule $\alpha^{(1)}$ par

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - G_2^{-1} \circ G_1 \quad (\text{A.4})$$

où $G_1 = S(\alpha^{(0)})$ et G_2 est la matrice des $S_{k\ell}(\alpha^{(0)})$. Après quoi on recommence en remplaçant $\alpha^{(0)}$ par $\alpha^{(1)}$, puis $\alpha^{(1)}$ par $\alpha^{(2)}$, et ainsi de suite. Rappelons que cette méthode de Newton s'interprète géométriquement de la manière suivante : l'équation

$$\beta = \vec{grad}S = 0 (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q) \quad (\text{A.5})$$

représente une hypersurface de dimension Q dans l'espace R^{2Q} des coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_Q$; la solution du système d'équations $\vec{grad}S = 0$ (ce qu'on cherche) correspond à l'intersection de cette hypersurface avec le sous-espace (de dimension Q) $\beta = 0$. La méthode consiste alors à se rapprocher de ce point en suivant l'hyperplan tangent à l'hypersurface; celui-ci en effet coupe le sous-espace $\beta = 0$ en un seul point.

Ainsi $\alpha^{(1)}$ est ce point d'intersection ; puis $\alpha^{(2)}$ sera le point d'intersection de l'hyperplan tangent en $\alpha^{(1)}$ avec le sous-espace $\beta = 0$, et ainsi de suite.

La méthode de Newton est recommandée lorsque la dérivée de la fonction (ici $\vec{grad}S$) est facile à programmer, ce qui est justement le cas. Elle converge extrêmement vite, à condition de prendre $\alpha^{(0)}$ déjà près du point qu'on veut atteindre : l'erreur est alors à chaque itération de l'ordre du carré de l'erreur précédente, ce qui signifie que le nombre de décimales exactes double à chaque itération. Mais si le point de départ $\alpha^{(0)}$ est éloigné du point qu'on veut atteindre, la méthode ne converge plus du tout ou converge trop lentement pour être efficace. Or dans le problème des moindres carrés on ne peut pas deviner a priori un bon point initial.

L'idée essentielle de la méthode de Marquardt est de proposer un moyen simple et algorithmiquement économique pour, dans un premier temps, se rapprocher du minimum (appelons cela la *phase de descente rapide*) ; après quoi, dans un second temps, on peut amorcer avec profit l'itération de Newton (qu'on appellera la *phase critique*).

Le principe est le suivant (la mise en œuvre pratique exigera quelques aménagements semi-empiriques qu'on décrira après). Il s'agit, partant d'un point fixé arbitrairement, de se rapprocher aussi rapidement que possible du minimum (suffisamment pour que l'itération de Newton devienne efficace). Pour cela il est logique de suivre la ligne de plus grande pente sur la surface d'équation

$$\gamma = S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q) \text{ (A.6)}$$

N. B. L'équation A.5 considérée avant est vectorielle : c'est un *système* de Q équations, il lui correspond donc une hypersurface de dimension Q dans l'espace R^{2Q} . Par contre l'équation A.6 est scalaire, il lui correspond aussi une hypersurface de dimension Q , mais dans l'espace R^{Q+1} des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q, \gamma$.

Or la ligne de plus grande pente sur une surface d'équation A.6 (projetée sur le sous-espace R^Q des coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q$) a pour vecteur

tangent le vecteur S_1, S_2, \dots, S_Q . Ce vecteur est centrifuge par rapport au minimum. Donc pour se rapprocher du minimum à partir d'un point $\alpha^{(0)}$ initial situé sur le plan des α , il suffit de prendre la direction $-\vec{grad}S(\alpha^{(0)})$. Ainsi on choisira le second point $\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - \lambda \vec{grad}S(\alpha^{(0)})$ (avec évidemment $\lambda > 0$). Mais il faut choisir λ de manière optimale. Si on prend un λ trop petit il faudra un nombre trop grand d'itérations pour arriver dans le voisinage du minimum ; si on le prend trop grand, on risque de dépasser ce minimum. C'est alors pour déterminer le meilleur choix de ce paramètre λ qu'interviennent plusieurs aménagements empiriques que nous décrivons maintenant.

D'abord les maxima ou minima locaux sont fréquents, surtout si la dimension du modèle, c'est-à-dire le nombre de paramètres α , est grande. Marquardt a donc proposé de placer dans le programme le test simple suivant : on commence avec un λ petit, par exemple 1/100 et on calcule $\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - \lambda \vec{grad}S(\alpha^{(0)})$; si $S(\alpha^{(1)}) < S(\alpha^{(0)})$, cela indique qu'on descend la pente ; on recommence alors avec un λ beaucoup plus grand (ainsi on évite des maxima locaux).

Par ailleurs il n'est pas indispensable de suivre *exactement* la ligne de plus grande pente ; en pratique il suffit de ne pas trop s'en écarter, et sur ce point une approximation même grossière est fortement recommandée si elle économise du temps de calcul. C'est pourquoi Marquardt propose de suivre la direction du vecteur R de composantes $R_\ell = S_\ell / S_{\ell,\ell}$. La bonne raison pour cela est que de cette manière le paramètre λ sera sans dimension. Ce point n'est pas indifférent car le test doit choisir les valeurs petites ou grandes de λ sans connaître les ordres de grandeurs sur le terrain. En introduisant le vecteur R on diminue les risques entraînés par un mauvais choix. Toutefois, d'après la définition A.3 des $S_{k,\ell}$, les éléments diagonaux $S_{\ell,\ell}$ ne sont pas forcément positifs et peuvent parfois s'annuler ou devenir trop petits ; c'est pourquoi Marquardt a proposé aussi de remplacer la définition A.3 par

$$S_{k\ell} = \sum_{i=1}^n 2 p_i \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}(\alpha, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i) \quad (\text{A.7})$$

qui garantit que les termes diagonaux seront positifs : ils ne peuvent devenir nuls que si $\vec{\text{grad}}_{\alpha} f$ peut lui-même devenir nul, ce qu'on évitera par le choix du modèle. Cela implique que la méthode de Newton est quelque peu modifiée. Mais les termes négligés (les dérivées secondes de f par rapport aux paramètres α) sont multipliés par les facteurs $f(\alpha, x_i) - y_i$. Or de deux choses l'une :

— ou bien ces facteurs ne deviennent pas tous petits lorsqu'on se rapproche du minimum ; alors les termes négligés ne sont pas négligeables et le calcul sera faux ;

— ou bien ces facteurs deviennent tous petits lorsqu'on se rapproche du minimum, et alors le calcul sera correct.

Mais si les facteurs $f(\alpha, x_i) - y_i$ ne deviennent pas tous petits lorsqu'on se rapproche du minimum, c'est que le minimum de $S(\alpha)$ n'est pas petit et que donc le modèle est mauvais : il ne permet pas d'approcher les points x_i, y_i . La méthode des moindres carrés n'ayant de toute façon aucun sens dans ce cas, on voit que la proposition de Marquardt est justifiée.

Il existe encore une autre raison, au moins aussi importante que la positivité des $S_{\ell, \ell}$, de remplacer A.3 par A.7. Comme nous venons de le voir, ce changement ne s'écarte guère de la méthode de Newton si le minimum de $S(\alpha)$ est petit ; par contre si les facteurs $f(x_i) - y_i$ restent appréciables, l'itération ne converge plus vers le minimum puisqu'on ne suit plus la tangente. *Or cela est même un avantage* : en effet, l'un des défauts bien connus de la méthode de Newton est qu'elle converge trop facilement vers des minima locaux (il suffit de l'amorcer avec une valeur initiale α_0 située dans le bassin d'attraction d'un tel minimum local pour qu'elle converge vers celui-ci et non vers celui qu'on veut) ; mais si on applique A.7 au lieu de A.3, la méthode ne convergera justement *que* si on est près du vrai minimum (le minimum absolu). Si on se trouve par hasard au voisinage d'un minimum local où $S(\alpha)$ n'est pas petit, l'itération ne conduira pas à s'en rapprocher ; au contraire, au bout de quelques itérations on sortira de son bassin d'attraction et on recommencera le processus ailleurs. Ainsi seuls les minima effectivement petits feront converger le procédé. En optant pour A.7 au lieu de A.3, Marquardt fait donc d'une pierre deux coups.

Une troisième astuce de Marquardt est encore la suivante. La tactique générale est, comme on l'a vu plus haut, de suivre la pente (ou plutôt le

vecteur R) lorsqu'on est loin du minimum, puis de passer à la méthode de la tangente — modifiée comme on vient de voir — lorsqu'on est suffisamment près. Marquardt introduit pour cela la matrice D dont les éléments sont

$$D_{j,k}(\alpha) = \begin{cases} S_{j,j}(\alpha) \cdot (1 + \lambda) & \text{si } j = k \\ S_{j,k}(\alpha) & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

où $S_{j,k}(\alpha)$ est défini par A.7, et propose d'appliquer la formule A.4 avec la matrice D ainsi définie au lieu de la matrice G :

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - D(\alpha^{(0)})^{-1} \circ \vec{grad}S(\alpha^{(0)}) \quad (\text{A.9})$$

Cela se comprend ainsi : lorsque λ est petit, la matrice $D_{j,k}(\alpha^{(0)})$ est pratiquement identique à la matrice $S_{j,k}(\alpha^{(0)})$, donc avec A.9 on applique en fait la méthode de Newton ; si au contraire λ est grand, la matrice $D_{j,k}(\alpha^{(0)})$ est pratiquement identique à la matrice diagonale d'éléments $S_{j,j}(\alpha^{(0)})$, par conséquent $D^{-1} \circ \vec{grad}S$ est pratiquement identique au vecteur R introduit ci-dessus. Ainsi on dispose d'une grande souplesse algorithmique pour passer progressivement de la phase de descente rapide à la phase critique : il suffit de jouer sur les valeurs du paramètre λ .

Tous ces aménagements sont des recettes empiriques : choisir λ grand ou petit selon des critères qui ne sont pas absolument fiables, suivre le vecteur R plutôt que la ligne de plus grande pente, remplacer A.3 par A.7, tout cela ne peut pas être justifié par des démonstrations rigoureuses et formelles et c'est uniquement l'usage pratique qui a tranché. En effet, cette méthode de Marquardt a aujourd'hui convaincu tous les praticiens et elle est implémentée dans les logiciels de calcul (Matlab, Statistica, etc). Mais il est clair qu'elle ne marche pas à coup sûr. Son succès est dû à ce qu'on n'a pas trouvé mieux.

Parmi les causes de "plantage" possibles, la plus courante est de tourner en rond dans une zone de minima dégénérés ; le test qui sert à déterminer λ saute alors éternellement entre un petit λ et un grand. Un programme bien conçu doit donc prévoir un test d'arrêt avec message d'erreur pour sortir

d'une telle boucle sans fin ; par exemple si λ passe plus de dix fois d'une grande valeur à une petite et vice-versa, arrêter le processus et afficher "Sorry, but it seems I am in a wrong track". La meilleure solution est que le programme prévoie alors une sortie de secours avec entrée manuelle des valeurs de λ .

On peut donc résumer la méthode comme suit.

a) Créer des routines qui calculent le vecteur $\vec{grad}S(\alpha)$ donné par A.2 et la matrice D donnée par A.8 en fonction de α et λ , ainsi que son inverse D^{-1} par la méthode du pivot.

b) Choisir une valeur initiale $\alpha^{(0)}$ (en général complètement arbitraire car on n'a aucun critère de choix), calculer $S(\alpha^{(0)})$, et commencer l'itération de A.9 avec un λ moyen mais plutôt petit (de l'ordre de 0.01 ou 0.001), ce qui va donner $S(\alpha^{(1)})$. Le fait de choisir ce premier λ plutôt petit revient à appliquer la méthode de Newton modifiée par A.7.

c) Calculer $S(\alpha^{(1)})$ et le comparer à $S(\alpha^{(0)})$:

— **c1)** si $S(\alpha^{(1)}) \geq S(\alpha^{(0)})$ (ce qui veut dire qu'on n'était certainement pas au voisinage du bon minimum : on devait être au voisinage d'une instabilité, ou d'un minimum local non petit dont on s'est écarté du fait qu'on n'applique pas A.3, mais A.7), prendre un λ beaucoup plus grand, par exemple $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0.1$ (ce qui veut dire qu'on suit maintenant plutôt le vecteur R afin de s'écarter nettement de ce point qui n'était visiblement pas bon) et recommencer **b** ;

— **c2)** si $S(\alpha^{(1)}) < S(\alpha^{(0)})$ (on peut alors penser qu'on est sur la bonne voie vers le minimum) prendre un λ encore plus petit (disons dix fois, ce qui veut dire qu'on applique maintenant la méthode de Newton modifiée comme on a vu) et recommencer aussi longtemps que $S(\alpha^{(n)})$ diminue, ce qui va donner $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \dots$. Continuer l'itération tant que $\Delta S = S(\alpha^{(n-1)}) - S(\alpha^{(n)})$ est positif et appréciable ; revenir à **c1** dès que ΔS devient < 0 ; stopper lorsque ΔS devient petit en restant > 0 , on est alors arrivé à destination (la petitesse ici est aussi question de flair : en général on convient que l'itération peut s'arrêter quand ΔS devient inférieur à 0.01 ; en réalité, cela dépend fortement du modèle et de l'échantillon).

N. B. Au stade **c2** rien ne prouve encore définitivement qu'on est sur la bonne voie : si on l'est, on s'écartera peu de l'hyperplan tangent à l'hypersurface d'équation A.5 et — si le minimum n'est pas dégénéré —

l'itération convergera ; sinon, il arrivera tôt ou tard que $S(\alpha^{(n)})$ augmente à nouveau, puisqu'on ne suit pas l'hyperplan tangent.

Les logiciels du commerce sont contraints de choisir forfaitairement les critères tels que le choix de λ ou la petitesse de ΔS . Mais les meilleurs sont programmables (par exemple Matlab) et permettent un ajustement par l'utilisateur. Cette possibilité est essentielle, car ces choix ne peuvent vraiment être rendus optimaux que pour un modèle donné, d'après les exigences de précision et de temps de calcul imposés par les conditions concrètes du problème. Le meilleur ajustement est toujours empirique, mais l'utilisateur ne peut intervenir à bon escient que s'il a compris les principes théoriques exposés ci-dessus. Il est intéressant de comparer les calculs effectués selon la méthode de Marquardt, lorsque le modèle $y = f(\alpha, x)$ ne dépend pas linéairement des paramètres α , avec les calculs à effectuer lorsque le modèle dépend linéairement des paramètres. Dans ce dernier cas, il y a seulement à résoudre un système linéaire de Q équations à Q inconnues, donc on applique une seule fois la méthode du pivot. Dans la méthode de Marquardt, la méthode du pivot est réappliquée à chaque itération (cf **a**). Cette partie du programme représente évidemment la quasi totalité du temps de calcul, sauf si la dimension Q est petite. Ainsi, si N itérations en tout sont nécessaires pour parvenir au résultat, le modèle sera N fois plus dispendieux qu'un modèle à dépendance linéaire. Cet argument doit être pris en compte lorsqu'on décide de choisir un modèle de grande dimension. En revanche, un modèle à dépendance non linéaire de dimension $Q = 2$ ou $Q = 3$, est certainement préférable à un modèle à dépendance linéaire de dimension élevée. Par exemple un modèle du type $f(\alpha_1, \alpha_2, x) = x\alpha_1^{-\alpha_2}$ sera bien meilleur (s'il convient à l'échantillon) qu'un polynôme de degré 10.

Bibliographie

- [1] JO Sato et HIROMITSU Ohmori , Sensitivity Analysis and Parameter Identification of Wastewater Treatment System Based on Activated Sludge Model No.1,SICE 2002 Osaka 5-7 Aout 2002.
- [2] Dirk J.W. De Pauw and Peter A., Practical Aspects of Sensitivity Analysis for dynamic models, Vanrolleghem, Biomath, Ghent University, Belgium.
- [3] EFIM Rosenwasser et RAFAEL Yusupov, Sensitivity of Automatic Control Systems, CRC press pp 14, 51 (2000).
- [4] Ilse Y. SMETS et al. , Linearization of the Activated Sludge Model ASM1 For Fast and Reliable Predictions, Elsevier,15 Novembre 2002.
- [5] Udo Wiesmann, In Su Choi and Eva-Maria Dombrowski, Fundamentals of Biological Wastewater Treatment, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. pp 267-289 (2007).
- [6] GABRIEL Bitton, Wastewater Microbiology, John Wiley & Sons pp 225 (2005).
- [7] Benoit CHACHUAT, Méthodologie d'optimisation dynamique et de commande optimale des petites stations d'épuration à boues activées, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 18 décembre 2001.
- [8] Ulf Jeppsson, Modelling Aspects of Wastewater Treatment Processes, Thèse de doctorat de l'Université de Lund - Suède, 1996.
- [9] Victor-Hugo GRISALES PALACIO, Modélisation et Commande Floues de Type TAKAGI-SUGENO Appliquées à un Bioprocédé de Traitement des Eaux Usées, Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier - Toulouse III, le 22 février 2007.
- [10] Emilie JARDÉ, Composition Organique de Boues Résiduelles de Stations d'Épuration LORRAINES : Caractérisation Moléculaire et Ef-

- fets de la Biodégradation , Thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy I, 20 décembre 2002.
- [11] [http ://www.ensic.inpl-nancy.fr/benchmarkWWTP/Benchmark.htm](http://www.ensic.inpl-nancy.fr/benchmarkWWTP/Benchmark.htm)
- [12] AKHENAK Abdelkader, Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, décembre 2004.
- [13] Mickaël RODRIGUES , Diagnostic et Commande Active Tolérante aux Défauts Appliqués aux Systèmes Décrits par des Multi-modèles Linéaires, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 06 décembre 2005.
- [14] Mohamed CHADLI, Stabilité et Commande de Systèmes décrits par des multimodèles, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 09 décembre 2002.

Résumé

Mots-clés: système, multimodèle, systèmes non-linéaire, ASM1, analyse de sensibilité.

Dans ce travail, nous avons étudié la représentation des systèmes non linéaire par multi modèle tout en déterminant des points de fonctionnement judicieusement choisis. Aussi nous avons introduit la notion de l'analyse de sensibilité des systèmes et les différentes techniques de son détermination. Comme exemple de simulation nous avons pris un procédé de traitement d'eaux résiduaires modélisé par ASM1 et nous avons confirmé l'efficacité de l'analyse de sensibilité dans la réduction du nombre de paramètres .

Abstract

Keywords: system, multi-model, non-linear systems , ASM1, sensitivity analysis.

We studied in this work, multi model representation of non linear systems by determining operating points. Also, we studied the sensitivity analysis and different techniques to determine it. For simulation we have applied the method on a waste water treatment plant modelled by ASM1 in which we have confirmed the effectiveness of the method and how it is useful to make parameters reduction.

