وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHEMATIQUES

Sur la non-Existence de Solutions non Triviales de Certaines Equations et Systèmes aux Dérivées Partielles

Option : *E.D.P et Théorie des opérateurs*

Par

Kamel AKROUT

Sous la direction de

Professeur : **Brahim KHODJA.** Université d'Annaba

Soutenue le **30 juin 2009** devant le jury composé de:

Président	:	**A. DJOUDI**	Prof.	Université d'Annaba.
Examinateur	:	**S. MECHERI**	Prof.	Université de Tébessa.
Examinateur	:	**A. YOUKANA**	M. C.	Université de Batna.
Examinateur	:	**F. ZOUYED**	M. C.	Université d'Annaba.

Dédicace

*A l'a mémoire de mon * Père **

A mon adorable Mère **

*A mon * épouse **

*A tous mes * Frères *, mes * Sœurs **

*et leurs * Enfants **

*A tous mes * Amis *, mes * Collègues **

*et à mes * Etudiants **

je dédie ce travail.

Remerciements

Je remercie Dieu tout-puissant, qui m'a donné la force et la patience pour accomplir cette thèse

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur B. KHODJA, Professeur à l'université d'Annaba, de m'avoir proposé ce sujet. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils judicieux que j'ai pu mener à bien ce travail de recherche.

Je tiens à remercier Monsieur A. DJOUDI, Professeur à l'université d'Annaba, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je remercie également Messieurs :

S. MECHERI, Professeur à l'université de Tébessa,

Monsieur : A. YOUKANA, Maître de conférence à l'université de Batna,

et Madame : F. ZOUYED, Maître de conférence à l'université d'Annaba,

d'avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.

ملخص

نقدم في هذه الرسالة، لنيل شهادة الدكتوراه في الرياضيات، نتائج عن عدم وجود حلول غير تافهة، لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية، الإهليجية و الزائدية، في مفتوحات محدودة أو غير محدودة من IR^n، مع المعطيات الحافوية المعدومة لـ **Dirichlet**، **Neumann** أو **Robin**.

هذه النتائج تعتمد على متطابقات تكاملية من شكل **Pohozaěv**، مبدأ الحد الأعلى و بعض نتائج التحليل الدالي.

Abstract

We present in this manuscript of doctorat of mathematics, some results of non-existence of solutions for partial differential equations and systems of elliptic or hyperbolic type, in bounded or unbounded domains of $\mathbb{R}^n$, with null boundary conditions of Dirichlet, Neumann or Robin.

these results are obtained by using integral identities of **Pohozaěv** type, the maximum principal and some tools of functional analysis.

Résumé

On présente dans ce manuscrit de doctorat de mathématiques, des résultats de non-existence de solutions pour des équations et des systèmes aux dérivées partielles de type elliptiques ou hyperboliques, dans des domaines bornés ou non de $\mathbb{R}^n$, avec des conditions de Dirichlet, de Neumann ou Robin nulles sur le bord.

Ces résultats sont obtenus grâce à des identités intégrales de type Pohozaev, le principe du maximum et quelques outils d'analyse fonctionnelle.

Table des matières

Introduction

Cette thèse contient les travaux de **K. Akrout & B. Khodja** qui traitent la question de non-existence de solutions non triviales de certaines classes d'équations et des systèmes aux dérivés partielles non-linéaires dans des domaines bornés ou non de $\mathbb{R}^n$.

Le premier chapitre est un préliminaire, qui comporte des définitions, des théorèmes, des propositions et des lemmes utilisés dans le reste de la thèse.

Le deuxième chapitre contient l'identité intégrale obtenue par **S. I. Pohozaĕv** qui permet d'obtenir la non-existence de solutions non triviale de certaines équations non-linéaires dans des domaines bornés ou non de $\mathbb{R}^n$, avec des conditions de Dirichlet nulles sur le bord. Ce chapitre contient aussi l'identité variationnelle générale de **P. Pucci & J. Serrin** [**17**] qui généralise l'identité de **Pohozaĕv**.

Le troisième chapitre comporte des résultats obtenus par **K. Akrout & B. Khodja** concernant la non-existence de solutions non triviales d'une classe des systèmes elliptiques semi-linéaires de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u + A(x)\, u + K(x)\, g(v) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta v + A(x)\, v + H(x)\, f(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

dans des domaines bornés de $\mathbb{R}^n$. Ce résultat s'étend aux systèmes de m-équations.

En fin, dans le quatrième chapitre, nous présentons les résultats de **K. Akrout & B. Khodja** [**1**], concernant l'absence de solutions non triviales d' équations aux dérivées partielles non-linéaires de la forme

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda(t)\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(p(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f(x,u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times\Omega, \\ u + \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\partial\Omega. \end{cases}$$

Cela s'étend aussi aux systèmes de m-équations.

Les résultats du chapitre 4 ont fait l'objet d'une publication intitulé dans Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.

Chapitre 1

Préliminaire

1- Espaces de fonctions continues.

2- Espace L^p.

3- Espace de Sobolev.

4- Critères de convergence.

5- Principe du maximum.

6- fonctionnelles différentiables.

1.1 Espace de fonctions continues

On donne ici quelques notations et conventions utilisées dans la suite.

Notons par $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x)=\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i.Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T \quad \text{et} \quad |\nabla u|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2$$

$$\Delta u(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(x).$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(C(\Omega))^m$ est l'ensemble des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $C_b\left(\overline{\Omega}\right)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\overline{\Omega}$, on le munit de la norme $\|.\|_\infty$;

$$\|u\|_\infty=\sup_{x\in\overline{\Omega}}|u(x)|$$

Pour $k\geq 1$ entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.

$C_c^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, dont le support est compact et contenu dans Ω.

Nous définissons aussi $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, comme l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des éléments de $C^k(\mathbb{R}^n)$ ou bien comme étant l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, telle que pour tous $0\leq j\leq k$, et tout $x_0\in\partial\Omega$, la limite $\lim\limits_{x\to x_0}D^j u(x)$ existe et dépend uniquement de x_0.

$C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $\mathfrak{D}(\Omega)$, est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions tests.

1.2 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de **Lebesgue** dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|\, dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\}$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On définit aussi l'espace $L^\infty(\Omega)$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable, } \exists c > 0, \text{ tel que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \}$$

Il sera muni de la norme du sup-essentiel

$$\|u\|_{L^\infty} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{ c;\ \ |u(x)| \leq c \quad \text{p.p sur } \Omega \}$$

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Remarque 1.1 *L'espace L^2 muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg dx, \quad f, g \in L^2(\Omega)$$

*est un espace de **Hilbert.***

1.3 Espaces de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}$, *et* $1 \leq i \leq n$, *une fonction* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *a une* i*-ème dérivée faible dans* $L^1_{loc}(\Omega)$. *S'il existe* $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ *telle que pour tout* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *on ait*

$$\int_\Omega u(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f_i(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Cela revient à dire que la i*-ème dérivée au sense des distributions de* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *,on posera*

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné ou non de $\mathbb{R}^n$, et $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ;\ \text{tel que } \partial_i u \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Théorème 1.1 [8] *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *s'injecte continûment dans* $L^\infty(\Omega)$ $(W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega))$ *pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$, *i.e qu'il existe un constant* C *(dépendant seulement de* Ω *) tel que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

De plus, si Ω *est borné on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega) \text{ avec injection compacte, } 1 < p \leq +\infty,$$
$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ avec injection compacte, } 1 \leq q < +\infty.$$

Corollaire 1.1 *Supposons que Ω un ouvert non borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors*

$$\lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ x \in \Omega}} u(x) = 0$$

Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ la langueur de α et $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sense de la définition (1.1).

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum\nolimits_{0 < |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

Remarque 1.2 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de **Hilbert**, avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum\nolimits_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \quad \text{pour } u, v \in H^m(\Omega)$$

Espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2 *Pour $1 \leq p < +\infty$ on définit l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, on note aussi que*

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,2}} = H_0^1(\Omega)$$

Formule d'intégration par parties

Définition 1.3 *Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} v u n_i ds.$$

Où $n_i(x) = \cos(n, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle de la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x avec l'axe x_i.

Formule de Green

Définition 1.4 *Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$. Alors on a*

$$\int_\Omega v \Delta u dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds.$$

Domaine étoilé

Définition 1.5 [14] *un domaine Ω est dit étoilé s'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que les segments $\overline{x_0 x}$ sont contenues dans Ω pour tout $x \in \Omega$. Si Ω est étoilé par rapport à l'origine, alors on a $x.\nu \geq 0$ sur $\partial\Omega$.*

1.4 Critéres de convergence

Théorème 1.2 (Théorème de la convergence monotone) [8] *Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$une suite croissante de fonctions mesurables positives satisfaisant*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$$

Alors

$$\int_\Omega f(x) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) dx$$

Lemme 1.1 (lemme de Fatou) [8] *Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$une suite de fonctions mesurables positives. Alors*

$$\int_\Omega \lim_{n\to+\infty} \inf_{n\geq 1} f_n(x) dx \leq \lim_{n\to+\infty} \inf_{n\geq 1} \int_\Omega f_n(x) dx$$

Théorème 1.3 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue) [8] *Soit* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *convergeant presque partout vers une fonction mesurable* f. *On suppose qu'il existe* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour tout* $n \geq 1$, *on ait*

$$|f_n| \leq g \quad p.p \ sur \ \Omega$$

Alors : $\quad f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0, \ et \quad \int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx$$

1.5 Principe du maximum

Un grand nombre de résultats d'existence ou d'unicité de solutions des problèmes aux limites (elliptiques ou paraboliques), peut être établi en utilisant le principe du maximum.

On donne ici quelques variantes de principe du maximum.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a(.) = (a_{ij}(.))_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice, $b(.) = (b_i(.))_{1\leq i\leq n}$ un champ de vecteur et c une fonction. On considère l'opérateur symétrique du second ordre L défini par

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i\partial_i u + cu \tag{1.1}$$

On suppose que la matrice carrée $a(.)$ vérifie la condition de coercivité (ou d'ellipticité)

$$\exists\alpha > 0,\ \forall\xi \in \mathbb{R},\ a(x)\,\xi.\xi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\xi|^2 \quad \text{p.p sur } \Omega, \tag{1.2}$$

où $|\xi|$ désigne la norme euclidienne de ξ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.4 (principe du maximum classique) [8] *Soit Ω un ouvert borné connexe, et L comme dans* (1.1). *On suppose que $c \geq 0$, que* (1.2) *est satisfaite et que $a_{ij}, b_i,\ c \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ vérifie $Lu \leq 0$ alors on a*

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \sup_{\sigma \in \partial\Omega} u^+(\sigma) \qquad où \;\; u^+(\sigma) = \max(u(\sigma), 0)$$

Théorème 1.5 (principe du maximum de Hopf) [8] *Soit Ω un ouvert borné connexe, et L comme dans* (1.1). *On suppose que $c \geq 0$, que* (1.2) *est satisfaite et que $a_{ij}, b_i,\ c \in C\left(\overline{\Omega}\right)$.Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ vérifie $Lu \leq 0$ et si u atteint un maximum ≥ 0 à l'intérieur de Ω, alors u est constante sur Ω.*

Théorème 1.6 (principe du maximum d'Aleksandrov) [8] *Soit Ω un ouvert borné connexe, et L comme dans* (1.1). *On suppose que $c \geq 0$, que* (1.2) *est satisfaite et que $a_{ij}, b_i,\ c \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ et $f \in L^N(\Omega)$. Il existe un constant $C > 0$ dépendant uniquement de N, $\|b\|_{L^N(\Omega)}$ et de diamètre de Ω tel que si $u \in W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ vérifie $Lu \leq f$ on a*

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \sup_{\sigma \in \partial\Omega} u(\sigma) + C\|f\|_{L^N(\Omega)}$$

Lemme 1.2 (lemme du point frontière) [19] *Supposons que u est continue dans Ω, $Lu \geq 0$ (resp. $Lu \leq 0$) dans Ω, et u atteint son maximum (resp ; minimum) en un point $p \in \partial\Omega$. Alors, tous les dérivés directionnels vers l'extérieur de u au point p sont positifes (resp ; négatifes).*

1.6 Fonctionnelles différentiables

Définition 1.6 [8] *Soient ω une partie d'un espace de **Banach** X et $F : \omega \to \mathbb{R}$. Si $u \in \omega$, on dit que F est dérivable au sens de **Gâteaux** (ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u, s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $F(u + tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F'_z(u)$ existe et on a*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t} = F'_z(u).$$

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de **Caratheodory** c'est à dire mesurable en x, continue en s. Pour $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$ on pose

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\sigma)\, d\sigma. \tag{1.3}$$

On définit alors la fonctionnelle V par

$$V(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\, dx.$$

On va voir dans quelles conditions l'application $u \to V(u)$ est continue où de class C^1.

Lemme 1.3 [8] *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p,q < +\infty$ des constantes réelles et f une fonction de **Caratheodory** de $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Supposons qu'il existe $a \in L^q(\Omega)$ et $b \geq 0$ tels que la condition de croissance

$$\forall s \in \mathbb{R}, \ \ |f(\cdot,s)| \leq a(\cdot) + b\,|s|^{\frac{p}{q}} \ \ p.p \ sur \ \Omega. \tag{1.4}$$

est satisfaite. On définit pour toute fonction mesurable u de Ω dans $\mathbb{R}$, l'opérateur B comme suit

$$(Bu)(x) = f(x, u(x)).$$

Alors B est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Lemme 1.4 *On suppose qu'il existe $a \in L^1(\Omega)$, $b \geq 0$ et $1 \leq p < +\infty$ et f une fonction de $\Omega\times$ $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \ \ |F(\cdot,s)| \leq a(\cdot) + b\,|s|^p \ \ p.p \ sur \ \Omega.$$

Si F vérifie (1.3), Alors V est continue sur L^p
En particulier si $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie (1.3), et s'il existe $a \in L^{p'}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$ et $p' = \dfrac{p}{p-1}$, et $b_0 \geq 0$ tels que

$$\forall s \in, \ \ |f(\cdot,s)| \leq a_0(\cdot) + b_0\,|s|^{p-1} \ \ p.p \ sur \ \Omega.$$

Alors V est de classe C^1 sur $L^p(\Omega)$ et on a

$$V'(u) = f(\cdot, u(\cdot))$$

Preuve Si f vérifie la condition (1.3), le Lemme (1.4) implique la continuité de l'application $u \to F(\cdot, u(\cdot))$ de $L^p(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ et par conséquent V est continue sur $L^p(\Omega)$. L'hypothèse sur f, la condition (1.3) et l'inégalité de **Young** $\left(\alpha\beta \leq \frac{1}{p'}\alpha^{p'} + \frac{1}{p}\beta^p\right)$
impliquent

$$|F(x,s)| \leq a_0(x)|x| + \frac{b_0}{p}|s|^p \leq \frac{1}{p'}|a_0(x)|^{p'} + \frac{1}{p}(1+b_0)|s|^p$$

En utilisant la premiére partie du Lemme, V est continue de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Pour montrer que V est de classe C^1, on va montrer que V est G-dérivable est que la G-dérivée est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Posons

$$\varphi(t,x) = \frac{F(x, u(x) + tv(x)) - F(x, u(x))}{t} - f(x, u(x))v(x)$$

On a

$$\frac{V(u+tv) - V(u)}{t} - \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\,dx = \int_\Omega \varphi(t,x)\,dx.$$

Il existe $\theta(x.t) \in \left]0,1\right[$ tel que

$$|\varphi(t,x)| = |f(x, u(x) + \theta(x,t)tv(x)) - f(x, u(x))|\,|v(x)|.$$

et on a

$$|\varphi(t,x)| \leq 2\left(a_0(x) + b_0(|u(x)| + |v(x)|)^{p-1} + b_0|u(x)|^{p-1}\right)|v(x)|.$$

Comme le second membre de l'inégalité est dans $L^1(\Omega)$, et que $\varphi(t,x) \to 0$ quand $t \to 0$, p.p en $x \in \Omega$.

Le théorème de la convergence dominée de **Lebesgue** implique que

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{V(u+tv) - V(u)}{t} - \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\,dx\right] = \int_\Omega \lim_{t\to 0}\varphi(t,x)\,dx = 0.$$

donc la G-dérivée $V'(u)$ existe et on a pour tout $v \in L^p(\Omega)$

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x, u(x))\, v(x)\, dx$$

C'est à dire que

$$V'(u) = f(\cdot, u)$$

De plus, la condition de croissance (1.3) imposée sur f et le Lemme (1.4) impliquent que l'opérateur $u \to V'(u) = f(., u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. ■

Chapitre 2

Identités intégrales.

1- Identité de Pohozaěv.

2- Identité variaonnelle générale de Pucci & Serrin.

2.1 Identité de Pohozaĕv.

Le résultat suivant a été établi en **1965** par **S. I. Pohozaĕv** dans le cas où Ω est borné. Ce résultat a des conséquences importantes.

Proposition 2.1 (Identité de Pohozaĕv) [8] *Soient Ω un ouvert de classe C^1, g est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même dont on désignera par G la primitive s'annulant en zéro et $u \in H_0^1(\Omega) \cap H_{loc}^2(\overline{\Omega})$ une fonction satisfaisant l'équation*

$$-\Delta u = g(u) . \tag{2.1}$$

Si de plus, $G(u) \in L^1(\Omega)$ et $\nu(\sigma)$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$, alors pour tout $z^* \in \mathbb{R}^n$ fixé, u satisfait l'identité

$$\begin{aligned} &(n-2) \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*, \nu(\sigma)) \, d\sigma \\ &= 2n \int_{\Omega} G(u(x)) \, dx \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve Soit φ_0 une fonction de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ telle que $\varphi_0(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq 1$, et $\varphi_0(t) = 0$ pour $t \geq 2$. En posant, pour $j \geq 1$ entier,

$$\varphi_j(x) = \varphi_0\left(\frac{|x|}{j}\right),$$

on vérifie facilement que $\left|\nabla \varphi_j(x)\right| \leq C$, où C est une constante indépendante de j et que

$$|x| \left|\nabla \varphi_j\right| \leq \frac{|x|}{j} \left|\varphi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right)\right| \leq C \left\|\varphi_0'\right\|_\infty,$$

On peut alors, pour un indice i fixé, multiplier les deux membres de l'équation $-\Delta u = g(u)$ par

$$(x_i - z_i^*) \, \partial_i u(x) \, \varphi_j(x) .$$

En intégrant par parties le terme de droite, on obtient

$$\int_\Omega g\left(u\left(x\right)\right)\left(x_i - z_i^*\right)\partial_i u\left(x\right)\varphi_j\left(x\right)dx = \int_\Omega \left(x_i - z_i^*\right)\varphi_j\left(x\right)\partial_i G\left(u\left(x\right)\right)dx$$

$$= -\int_\Omega \varphi_j\left(x\right)G\left(u\left(x\right)\right)dx - \int_\Omega \left(x_i - z_i^*\right)\partial_i\varphi_j\left(x\right)G\left(u\left(x\right)\right)dx$$

et par un passage à la limite et après utilisation du théorème de convergence dominée et le fait que $\partial_i\varphi_j\left(x\right)$ tend vert zéro lorsque $j \to \infty$, on obtient

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g\left(u\left(x\right)\right)dx\left(x_i - z_i^*\right)\partial_i u\left(x\right)\varphi_j\left(x\right)dx = -\int_\Omega G\left(u\left(x\right)\right)dx \tag{2.3}$$

D'autre part, après intégration par parties du terme de gauche de l'équation, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u\left(x\right)\left(x_i - z_i^*\right)\partial_i u\left(x\right)\varphi_j\left(x\right)dx$$

$$= -\int_{\partial\Omega}\left(\sigma_i - z_i^*\right)\varphi_j\left(\sigma\right)\partial_i\nabla u\left(\sigma\right)\nu\left(\sigma\right)d\sigma$$

$$+\int_\Omega \nabla u\left(x\right)\nabla\left(\left(x_i - z_i^*\right)\partial_i u\left(x\right)\varphi_j\left(x\right)\right)dx$$

Or le dernier terme s'écrit

$$\int_\Omega \nabla u\left(x\right)\nabla\left(\left(x_i - z_i^*\right)\partial_i u\left(x\right)\varphi_j\left(x\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(x_i - z_i^*\right)\varphi_j\left(x\right)\partial_i\left(\left|\nabla u\left(x\right)\right|^2\right)dx + \int_\Omega \left|\partial_i u\left(x\right)\right|^2\varphi_j\left(x\right)dx \tag{2.4}$$

$$+\int_\Omega \left(x_i - z_i^*\right)\partial_i u\left(x\right)\nabla u\left(x\right)\nabla\varphi_j\left(x\right)dx$$

Notons par E_{1j}, E_{2j} et E_{3j} respectivement les trois termes de droite, on a lorsque $j \to \infty$

$$E_{3j} \to 0 \text{ et } E_{2j} \to \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^2 \, dx \tag{2.5}$$

D'autre part, on intégrant par parties, E_{1j} s'écrit

$$E_{1j} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \partial_i \big((x_i - z_i^*) \varphi_j(x) \big) \, dx$$

$$+\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*) \varphi_j(\sigma) \nu_i(\sigma) \, d\sigma$$

et donc lorsque $j \to \infty$ on a

$$E_{1j} \to -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*) \nu_i(\sigma) \, d\sigma$$

Finalement en reportant cette dernière limite ainsi que (2.5) dans la relation (2.4), on a grace à (2.3)

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^2 \, dx \\ &+\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*) \nu_i(\sigma) \, d\sigma \\ &- \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*) \partial_i u(\sigma) \nabla u(\sigma) \nu(\sigma) \, d\sigma \\ &= -\int_{\Omega} G(u(x)) \, dx \end{aligned} \tag{2.6}$$

ce qui, en faisant la somme i et sachant que lorsque $u = 0$ sur le bord alors le gradient $\nabla u(\sigma)$ est parallèle à $\nu(\sigma)$, conduit à

$$\frac{n-2}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*) \nu_i(\sigma) \, d\sigma$$

$$= n \int_{\Omega} G(u(x)) \, dx$$

■

Remarque 2.1 *Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, en multipliant l'équation $-\Delta u = g(u)$ par u on déduit que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) g(u(x)) \, dx,$$

*ce qui donne avec l'identité de **Pohozaěv***

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{n-2}{2n} u(x) g(u(x)) - G(u(x)) \right) dx = 0.$$

Cela implique en particulier que la fonction

$$s \to \frac{n-2}{2n} s g(s) - G(s)$$

doit prendre des valeurs positives et négatives, si elle n'est pas identiquement nulle. Par exemple si $g(s) = \lambda |s|^{p-1} s$ avec $p \geq 1$ et $\lambda \neq 0$ on en déduit que, si $n \geq 3$, le seul exposant p pour le quelle l'équation

$$-\Delta u = \lambda |u|^{p-1} u$$

peut avoir une solution non nulle dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ est $p = \dfrac{n+2}{n-2}$, alors que si $n = 2$ l'équation n'a aucune solution non nulle. Il est aussi intéressant de noter que cet argument appliqué à $p = 1$ permet de voir que le Laplacien n'a pas de fonction propre sur $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.2 *soit Ωun ouvert borné régulier. L'identité de **Pohozaěv** implique que si $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ vérifie*

$$-\Delta u = |u|^{p-1} u,$$

comme on a aussi

$$\int_\Omega \left[-\Delta u\left(x\right)\right] u\left(x\right) dx = \int_\Omega \left|\nabla u\left(x\right)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|u\left(x\right)\right|^{p+1} dx.$$

alors :

$$\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{p+1}\right) \int_\Omega \left|u\left(x\right)\right|^{p+1} dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left|\nabla u\left(\sigma\right)\right|^2 \left(\sigma - z^*, \nu\left(\sigma\right)\right) d\sigma = 0 \tag{2.7}$$

Supposons que l'ouvert Ω est étoilé par rapport à un point z^* de $\mathbb{R}^n$, par exemple (pour simplifier) $z^* = 0$; plus précisément, supposons que pour tout $\sigma \in \partial\Omega$, on a $\sigma.\nu\left(\sigma\right) > 0$. On définit de (2.7) que si

$$\frac{n-2}{2} - \frac{n}{p+1} > 0$$

Alors $u \equiv 0$. Si

$$\frac{n-2}{2} = \frac{n}{p+1}$$

Donc $\nabla u = 0$ sur $\partial\Omega$, et si de plus $u \geq 0$, alors par le théorème de Green

$$0 = \int_{\partial\Omega} \nabla u\left(\sigma\right) \nu\left(\sigma\right) d\sigma = \int_\Omega -\Delta u\left(x\right) dx = \int_\Omega u\left(x\right)^p dx,$$

ce qui implique que $u \equiv 0$, c'est le résultat de **S. I. pohozaěv** (en fait on peut montrer que même si on ne suppose pas que $u \geq 0$, alors $u \equiv 0$). Nous attirons l'attention sur le fait que le résultat de non-existence de solution non nulle est spécifique au cas où $g\left(s\right) = \left|s\right|^{p-1} s, p = \dfrac{n+2}{n-2}$ est l'exposant critique de Sobolev et Ω est étoilé.

2.2 Identité variationnelle générale de Pucci & Serrin

Soit Ω un domaine régulier, borné de $\mathbb{R}^n$.Considérons pour toute fonction $F = F(x, u, p), p = (p_1, ..., p_n)$, de classe C^1dans $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et toute fonction vectorielle

$$F_p(x, u, p) = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial p_n}\right)(x, u, p)$$

de classe C^1dans $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, l'équation d'**Euler-Lagrange** suivante

$$\operatorname{div}(F_p(x, u, \nabla u)) = F_u(x, u, \nabla u) \tag{2.8}$$

Où

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T$$

$$F_u = \frac{\partial F}{\partial u}, F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} et F_{p_i} = \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

Supposons pour simplifier et sans perte de généralité que $F(x, 0, 0) = 0$ dans Ω. Nous avons maintenant le résultat suivant

Proposition 2.2 (Identité variationnelle générale de Pucci-Serrin) [14] *Soit* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *solution d'équation* (2.8), *avec* $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *et soient* a *et* h, *respectivement, scalaire et fonction vectorielle de classe* C^1. *Alors l'identité suivante est vérifiée*

$$\int_{\partial\Omega} \left[F(x, 0, \nabla u) - \frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}(x, 0, \nabla u)\right](h, \nu)\, ds$$

$$= \int_{\Omega} \left[F(x, u, \nabla u) \operatorname{div} h + h_i F_{x_i}(x, u, \nabla u) - \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + u\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) F_{p_i}(x, u, \nabla u)\right. \tag{2.9}$$

$$\left. - a\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}(x, u, \nabla u) + u F_u(x, u, \nabla u)\right)\right] dx$$

Preuve la relation suivante est vérifiée dans Ω

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[h_i F\left(x,u,\nabla u\right) - h_j \frac{\partial u}{\partial x_j} F_{p_i}\left(x,u,\nabla u\right) - auF_{p_i}\left(x,u,\nabla u\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_i} F\left(x,u,\nabla u\right) + h_i F_{x_i}\left(x,u,\nabla u\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + u\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) F_{p_i}\left(x,u,\nabla u\right)\right. \tag{2.10}$$

$$\left. -a\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}\left(x,u,\nabla u\right) + uF_u\left(x,u,\nabla u\right)\right)\right]$$

Cette relation est obtenue par un calcul direct en utilisant l'équation (2.8) pour éliminer le terme $\operatorname{div}\left(F_p\left(x,u,\nabla u\right)\right)$.

$u = 0$ sur $\partial\Omega$, implique que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu_i \text{ sur } \partial\Omega$$

ainsi

$$h_j \frac{\partial u}{\partial x_j} F_{p_i}\left(x,u,\nabla u\right)\nu_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}\left(x,u,\nabla u\right) h_j \nu_j \text{ sur } \partial\Omega$$

Intégrons maintenant l'identité (2.10) sur Ω et utilisons la condition sur le bord $u = 0$. Assumons aussi que a et h sont dans $C^1\left(\Omega\right) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, alors le théorème de divergence permet d'obtenir l'identité (2.9). ■

Si on pose

$$F\left(x,u,p\right) = \frac{1}{2}\left|p\right|^2 - G\left(u\right),$$

l'équation d'Euler-Lagrange correspondante est

$$-\Delta u = g\left(u\right) \text{ dans } \Omega$$

où

$$G\left(u\right) = \textstyle\int_0^u g\left(t\right)dt$$

Dans ce cas, le chois $h(x) = x$ et $a(x) = \dfrac{n-2}{2}$ donne l'identité de **Pohozaěv** (2.2).

$$\frac{n-2}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(s)|^2 (x,\nu) \, ds$$

$$= n\int_{\Omega} G(u(x)) \, dx$$

Le chois $h(x) = x$ et $a(x) = a =$ constant dans (2.9) donne

$$\int_{\partial\Omega} \left[F(x,0,\nabla u) - \frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}(x,0,\nabla u) \right] (h,\nu) \, ds$$

$$= \int_{\Omega} [nF(x,u,\nabla u) + x_i F_{x_i}(x,u,\nabla u) - auF_u(x,u,\nabla u) \tag{2.11}$$

$$\left. -(a+1)\frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}(x,u,\nabla u) \right] dx$$

Cette identité conduite à la généralisation du théorème de non-existence de solutions de **Pohozaěv** suivant

Théorème 2.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, étoilé par rapport à l'origine. Supposons que*

$$p_i F_{p_i}(x,0,p) - F(x,0,p) \geq 0, \forall x \in \partial\Omega, p \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

Il existe un nombre réel a tel que

$$\begin{aligned} &nF(x,u,p) + x_i F_{x_i}(x,u,p) - auF_u(x,u,p) \\ &-(a+1)\frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}(x,u,p) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

pour tout $(x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On a égalité dans la formule (2.13) *seulement si $u = 0$ ou $p = 0$. Alors l'équation* (2.8) *n'admet pas des solutions non triviales qui s'annulent sur la frontière.*

Preuve Toute solution de l'équation (2.8) qui s'anulle sur $\partial\Omega$ satisfait l'identité (2.9). En vertue de (2.12), on a que

$$\int_{\partial\Omega} \left[F(x,0,\nabla u) - \frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}(x,0,\nabla u) \right] (h,\nu)\, ds \leq 0$$

car $(h,\nu) \geq 0$ sur $\partial\Omega$. d'autre part (2.13) implique que

$$\int_\Omega [nF(x,u,\nabla u) + x_i F_{x_i}(x,u,\nabla u) - auF_u(x,u,\nabla u)$$

$$\left. - (a+1) \frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}(x,u,\nabla u) \right] dx \geq 0$$

ce qui permet de déduire que

$$\int_\Omega [nF(x,u,\nabla u) + x_i F_{x_i}(x,u,\nabla u) - auF_u(x,u,\nabla u)$$

$$\left. - (a+1) \frac{\partial u}{\partial x_i} F_{p_i}(x,u,\nabla u) \right] dx = 0$$

et que $u = 0$ ou $\nabla u = 0$ dans Ω. Ce qui donne le résultat. ■

Chapitre 3

Non-existence de solutions d'une classe de systèmes elliptiques semi-linéaires

---

3.1 Introduction

La non-existence de solutions non triviales d'équations elliptiques semi-linéaires à intérssé peaucoup d'hauteurs. Nous citons à titre d'exemple les travaux rapportés par **M. J. Esteban & P. L. Lions [5], S. I. Pohozaĕv [15], T. Teramoto [20], A. Haraux & B. Khodja [7]** et **R. C. A. M. Van Der Vorst [21].**

Pour illustrer des résultats connus, considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0, u \in C^2(\overline{\Omega}), \\ \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

sous les hypothèses

$$\nabla u \in L^2(\Omega),$$

$$f(0) = 0,$$

$$F(u) = \int\limits_0^u f(s)ds \in L^1(\Omega),$$

où Ω est un domaine connexe non borné de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\exists \Lambda \in \mathbb{R}^n, \|\Lambda\| = 1, \langle n(x), \Lambda\rangle \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega, \langle n(x), \Lambda\rangle \neq 0,$$

($n(x)$ est le vecteur normal de $\partial\Omega$ au point x) **M.J. Esteban & P.L. Lions** [5] établirent que le problème de Dirichlet ne dispose pas de solutions non triviales sous l'hypothèse

$$|\nabla u| \in L^2(\Omega), F(u) \in L^1(\Omega), \text{ où } F(u) = \int_0^u f(s)\, ds.$$

L'identité de **Pohozaĕv** publié en 1965 pour les solutions du problème de Dirichlet prouvé l'absence de solutions non triviale pour quelques équations elliptiques semi-linéaires, où Ω est un domaine borné étoilé de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ satisfait

$$(n-2)F(u) - 2nuf(u) > 0,$$

où, $n = \dim \mathbb{R}^n$.

Quand

$$\Omega = J \times \omega,$$

où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle **non borné** et ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, **A. Haraux & B. Khodja [7]** ont établi sous l'hypothèse

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ \\ 2F(u) - uf(u) \leq 0, \end{cases}$$

en assumant que $u \in H^2(J \times \omega) \cap L^\infty(J \times \omega)$ est une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ \left(u \text{ ou } \dfrac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \text{ sur } \partial\left(J \times \omega\right). \end{cases}$$

alors, ces deux problèmes (Dirichlet et Neumann) n'admettent que la solution nulle.

Quand

$$f(u) = u\left(u+1\right)\left(u+2\right),$$

et

$$\Omega = \mathbb{R} \times]0, a[\,\left(a < \pi\right),$$

le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u\left(u+1\right)\left(u+2\right) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

reste encore un problème ouvert.

T. Teramoto [20] à montré l'absence de solutions radiales pour le système

$$\begin{cases} -\Delta_p u = K\left(|x|\right) v^{\alpha} \text{ dans } \mathbb{R}^n, \\ \\ -\Delta_q v = H\left(|x|\right) u^{\beta} \text{ dans } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$$

sous les assomptions

$$\begin{cases} H, K : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\text{ continue} \\ \\ H\left(|x|\right) \geq \dfrac{L_1}{|x|^{\lambda}},\ K\left(|x|\right) \geq \dfrac{L_2}{|x|^{\mu}},\ |x| \geq \mathbb{R}_0 > 0, \end{cases}$$

où $L_1, L_2 > 0$ et λ, μ des constants vérifient quelques hypothèses.

R. C. A. M. Van Der Vorst [21] montre que, pour $u_k \in C^2\left(\Omega\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right), \left(1 \leq k \leq s\right),$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, le système

$$\begin{cases} -\Delta u_k = u_{k+1} \text{ dans } \Omega, 1 \leq k \leq s-1, u_1 \geq 0, \\ \\ -\Delta u_s = f\left(u_1\right) \text{ dans } \Omega, \\ \\ u_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

n'admets pas de solutions non triviales, sous les hypothèses

$$i)\ \Omega \text{ est étoilé, } \partial\Omega \text{ est régulière,}$$

$$ii)\ nF\left(u_1\right) - a_1 u_1 f\left(u_1\right) \leq 0, u \neq 0,$$

$$iii)\ \sum_{i=1}^{s}\left(1 + a_k - \frac{n}{2}\right) \leq 0,$$

$$iv)\ \sum_{i=1}^{s-1}\left(\frac{n}{2} - a_{k+1}\right) \leq 0.$$

Cela nous a incités à étudier cette question de non-existence de solutions pour d'autres classes de systèmes.

Nous assumons dans tout ce paragraphe que

$$u, v \in C^2\left(\Omega\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right),$$

et sont solutions du système

$$\begin{cases} -\Delta u + A\left(x\right) u + K\left(x\right) g\left(v\right) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ -\Delta v + A\left(x\right) v + H\left(x\right) f\left(u\right) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert borné régulier, A, K et H sont des fonctions réelles de classe C^1 , $A(x) \geq 0$, f et g sont des fonctions réelles continues vérifient

$$f\left(0\right) = g\left(0\right) = 0,$$

de sorte que

$$u = v = 0$$

est une solution du problème (3.1).

Notons par

$$F(u)=\int_0^u f(\sigma)\,d\sigma \text{ et } G(v)=\int_0^v g(\sigma)\,d\sigma.$$

Nous allons montrer que lorsque les données A, H, K, f et g vérifient des hypothèses raisonnables de croissance, il n'existe pas de solutions non triviales du système (3.1).

Nous étendons par la suite cette technique aux systèmes des m-équations $(m=2\mathbb{R}, \mathbb{R}\in\mathbb{N})$

$$\begin{cases} -\Delta u_k + A(x)\,u_k + f_k(u_1,...,u_m) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ u_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f_k:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $(1\le k\le m=2\mathbb{R})$ sont des fonctions réelles continues vérifient

$$f_k(u_1,...,u_{j-1},0,u_{j+1},...,u_m)=0, 1\le j\le m=2\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \exists F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, F\in C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}) \text{ telle que} \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial s_1}(s_1,...,s_m) = f_m(s_1,...,s_m) + f_2(s_1,...,s_m), \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial s_k}(s_1,...,s_m) = f_{k-1}(s_1,...,s_m) + f_{k+1}(s_1,...,s_m), 2\le k\le m-1, \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial s_m}(s_1,...,s_m) = f_{m-1}(s_1,...,s_m) + f_1(s_1,...,s_m). \end{cases}$$

Notre technique est basée sur l'identité intégrale établie dans la section 2, qui permet de montrer le résultat principal de l'absence de solutions cité dans la section 3. Dans la section 4 on illustre les résultats théoriques par des exemples.

3.2 Identités du type Pohozaěv

Nous commençons cette section par deux identités intégrales utiles pour les résultats principaux.

Pour le système (3.1), nous avons

Lemme 3.1 *soit* $(u,v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^2$ *une solution du système* (3.1), *alors nous avons pour* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, *l'identité intégrale suivante*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Bigg[(2-n+a_1+a_2)\nabla u \nabla v - \left((n-a_1-a_2)A(x) + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial A}{\partial x_j}\right) uv \\
&- \left(\left(nH(x) + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial H}{\partial x_j}\right) F(u) - a_1 u H(x) f(u)\right) \\
&- \left(\left(nK(x) + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial K}{\partial x_j}\right) G(v) - a_2 v K(x) g(v)\right)\Bigg] dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \nabla u \nabla v (x,\nu)\, ds.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Preuve Multipliant la première équation par $x_j \dfrac{\partial v}{\partial x_j}$ et la seconde par $x_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ et intégrant les nouvelles équations sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Bigg[\sum_{i=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + x_j A(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} u \\
&- \left(nK(x) + x_j \frac{\partial K}{\partial x_j}\right) G(v)\Bigg] dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} x_j \nu_i ds
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Bigg[\sum_{i=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n x_j \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + x_j A(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v\Bigg] \\
&- \left(nH(x) + x_j \frac{\partial H}{\partial x_j}\right) F(u)\Bigg] dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} x_j \nu_i ds.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Combinant (3.4) et (3.5) et sommant sur j de 1 à n , on aura

$$\int_{\Omega}\left[(2-n)\nabla u\nabla v-\left(nA(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)uv\right.$$
$$\left.-\left(nH(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)F(u)-\left(nK(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial K}{\partial x_j}\right)G(v)\right]dx \tag{3.6}$$
$$=\int_{\partial\Omega}\nabla u\nabla v(x,\nu)\,ds$$

Maintenant, multipliant les équations du système (3.1) respectivemant par a_2v et a_1u $(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$ et intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_{\Omega}[(a_1+a_2)\nabla u\nabla v+(a_1+a_2)A(x)uv$$
$$+a_1uH(x)f(u)+a_2vK(x)g(v)]\,dx=0 \tag{3.7}$$

L'identité (3.3) est obtenue par combinaison de (3.6) et (3.7). ■

Lemme 3.2 *Soit*

$$u_k \in C^2(\Omega)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$$

solutions du système (3.2), $(1 \leq k \leq m = 2\mathbb{R})$. *Alors,* u_k *vérifient l'identité intégrale suivante*

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{m}(2-n+a_k+a_{k+1})\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_i}\right.$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\left((n-a_k-a_{k+1})A(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)u_ku_{k+1}$$
$$\left.-\left(nF(u_1,...,u_m)-\sum_{k=1}^{m}(a_{k-1}u_{k-1}+a_{k+1}u_{k+1})f_k(u_1,...,u_m)\right)\right]dx \tag{3.8}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\int_{\partial\Omega}\nabla u_k\nabla u_{k+1}(x,\nu)\,ds.$$

où a_k sont des constantes réelles.

Par convention, on prend

$$\begin{cases} u_0 = u_m \ \text{ et } u_{m+1} = u_1, \\ \\ a_0 = a_m \ \text{ et } a_{m+1} = a_1. \end{cases}$$

Preuve Comme dans la précédente preuve, la multiplication de l'équation du système (3.2) par $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j} \right)$ et son intégration par partie sur Ω, permettent d'obtenir

$$\int\limits_{\Omega} \left(-\Delta u_k + A(x)\, u_k\right) \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j} \right) dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j} \right) \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} x_j \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} A(x)\, x_j \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j} \right) u_k \right] dx$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j} \right) x_j \nu_i \, ds,$$

et la somme sur k de 1 à m, donne

$$\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(-\Delta u_k+A\left(x\right)u_k\right)\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j}\right)dx$$

$$=\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_i}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}x_j\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}A\left(x\right)x_j\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j}\right)u_k\right]dx$$

$$-\int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \nu}+\frac{\partial u_{k+1}}{\partial \nu}\right)x_j\nu_j\nu_i^2ds$$

$$=\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left[2\nabla u_k\nabla u_{k+1}+\sum_{i,j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_i}\right)dx\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}A\left(x\right)x_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_ku_{k+1}-2\int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{m}\nabla u_k\nabla u_{k+1}\left(x,\nu\right)\right]ds$$

$$=\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left[\left(2-n\right)\nabla u_k\nabla u_{k+1}-\left(nA\left(x\right)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)u_ku_{k+1}\right]dx$$

$$-\int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{m}\nabla u_k\nabla u_{k+1}\left(x,\nu\right)ds$$

le deuxième membre devient

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} x_j \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j} \right) f_k \left(u_1, ..., u_m\right) dx$$

$$= \int_\Omega x_j \left[\left(\left(f_m + f_2\right) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \sum_{k=2}^{m-1} \left(f_{k-1} + f_{k+1}\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(f_{m-1} + f_1\right) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right] \left(u_1, ..., u_m\right) dx$$

$$= \int_\Omega x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} \left(u_1, ..., u_m\right) dx = - \int_\Omega F \left(u_1, ..., u_m\right) dx$$

i.e

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_j} \right) f_k \left(u_1, ..., u_m\right) dx$$

$$= - \int_\Omega nF \left(u_1, ..., u_m\right) dx.$$

Aussi, une autre identité est obtenue de la même manière si l'on multiplie l'équation (3.2) par $\left(a_{k-1}u_{k-1} + a_{k+1}u_{k+1}\right)$

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left[\left(a_k + a_{k+1}\right) \nabla u_k \nabla u_{k+1} + \left(a_k + a_{k+1}\right) A\left(x\right) u_k u_{k+1} \right.$$

$$\left. + \left(a_{k-1}u_{k-1} + a_{k+1}u_{k+1}\right) f_k \left(u_1, ..., u_m\right) \right] dx = 0.$$

Une combinaison de ces deux identités intégrales donne le résultat désiré. ■

3.3 Résultat principal

Dans cette section, on donne des conditions suffisantes sur A, K, H, f et g pour garantir la non-existence de solutions non triviales des systèmes (3.1) et (3.2) dans des domaines étoilés.

Théorème 3.1 *Soit Ω un domaine étoilé de $\mathbb{R}^n$ d'une frentière régulière $\partial\Omega$, $(u,v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^2$ une solution du système* (3.1)*, a_1, a_2, A, K, H, f et g des donnés vérifiant*

$$(1) \quad 2A(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \geq 0,$$

$$(2) \quad H(x) f(u) K(x) g(v) \leq 0,$$

$$(3) \quad \left(nH(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial H}{\partial x_j}\right) F(u) - a_1 u H(x) f(u) \leq 0,$$

$$(4) \quad \left(nK(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial K}{\partial x_j}\right) G(v) - a_2 v K(x) g(v) \leq 0,$$

$$(5) \quad 2 - n + a_1 + a_2 < 0.$$

Alors le système (3.1) *n'admet pas de solutions non triviales.*

Preuve Si $H(x) f(u) \geq 0$ (resp $H(x) f(u) \leq 0$), alors le principe du maximum et le lemme du point frontière de Hopf appliqué sur la deuxième équation donnent

$$\begin{cases} v \leq 0 \text{ dans } \Omega \text{ (resp } v \geq 0), \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ (resp } \dfrac{\partial v}{\partial \nu} \leq 0). \end{cases}$$

L' hypothèse (2) donne

$$K(x) g(v) \leq 0 \text{ (resp } K(x) g(v) \geq 0).$$

De même manière, on aura

$$\begin{cases} u \geq 0 \text{ dans } \Omega \text{ (resp } u \leq 0), \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ (resp } \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0). \end{cases}$$

Ω est étoilé, implique que

$$(x, \nu) \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Puisque

$$u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

alors

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu \text{ et } \nabla v = \frac{\partial v}{\partial \nu}\nu$$

par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} (x, \nu) \nabla u \nabla v d\sigma = \int_{\partial\Omega} (x, \nu) \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma \leq 0. \tag{3.9}$$

De plus, la multiplication de la première équation du système (3.1) par u et l'intégration de l'équation obtenue sur Ω, donne la formule

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + A(x)\, uv)\, dx = -\int_{\Omega} uH(x)\, f(u)\, dx.$$

L'hypothèse (5) implique que

$$\int_{\Omega} (2 - n + a_1 + a_2) (\nabla u \nabla v + A(x)\, uv)\, dx$$

$$= -\int_{\Omega} (2 - n + a_1 + a_2)\, uH(x)\, f(u)\, dx \geq 0$$

$(1), (3)$ et (4) permettent d'avoir

$$\int_{\Omega}\left[(2-n+a_1+a_2)(\nabla u\nabla v+A(x)uv)-\left(2A(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)uv\right.$$

$$\left.-\left(\left(nH(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)F(u)-a_1uH(x)f(u)\right)\right]dx \tag{3.10}$$

$$-\left(\left(nK(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial K}{\partial x_j}\right)G(v)-a_2vK(x)g(v)\right)dx\geq 0.$$

Au vu de ces formules (3.9) et (3.10), en déduit que

$$\int_{\Omega}(2-n+a_1+a_2)(\nabla u\nabla v+A(x)uv)\,dx$$

$$=-\int_{\Omega}(2-n+a_1+a_2)\,uH(x)f(u)\,dx=0,$$

qui implique que

$$u=0 \text{ ou } H(x)=0 \text{ ou } f(u)=0 \text{ dans } \Omega.$$

La seconde équation du système devient

$$\Delta v=0 \text{ dans } \Omega,$$

qui donne

$$\int_{\Omega}|\nabla v|^2\,dx=0,$$

par conséquent

$$v=const=0.$$

De la même manière, on obtient $u=0$. ■

Théorème 3.2 *Supposons que* Ω *est étoilé,* a_k *et* f_k $(1 \leq k \leq m = 2\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$(6) \quad 2A(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \geq 0 \ dans \ \Omega,$$

$$(7) \quad (f_k f_{k+1})(u_1, ..., u_m) \leq 0,$$

$$(8) \quad nF(u_1, ..., u_m) - \sum_{k=1}^{m} (a_{k-1}u_{k-1} + a_{k+1}u_{k+1}) f_k(u_1, ..., u_m) \leq 0,$$

$$(9) \quad 2 - n + a_k + a_{k+1} < 0.$$

Si $u_1, ..., u_m \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *solutions du système* (3.2), *alors*

$$u_1 = u_2 = ... = u_m = 0.$$

Preuve Si $f_k(u_1, ..., u_m) \geq 0$ (resp $f_k(u_1, ..., u_m) \leq 0$), alors le principe de maximum et le lemme du point frontière permettent d'écrire

$$\begin{cases} u_k \leq 0 \text{ dans } \Omega \text{ (resp } u_k \geq 0), \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial \nu} \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ (resp } \dfrac{\partial u_k}{\partial \nu} \leq 0). \end{cases}$$

L'hypothèse (7), implique que

$$\begin{cases} u_k u_{k+1} \leq 0 \text{ dans } \Omega, \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial \nu} \dfrac{\partial u_{k+1}}{\partial \nu} \leq 0 \text{ dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme dans la preuve précédente

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \nabla u_k \nabla u_{k+1}(x, \nu)\, d\sigma = \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial \nu} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \nu}(x, \nu)\, d\sigma \leq 0. \tag{3.11}$$

Après multiplication de l'équation du système (3.2) par u_{k+1} et son intégration sur Ω, on aura

$$\int_\Omega (\nabla u_k \nabla u_{k+1} + A(x) u_k u_{k+1})\, dx = -\int_\Omega u_{k+1} f_k (u_1, ..., u_m)\, dx.$$

l'hypothèse (9) implique que

$$\int_\Omega (2 - n + a_k + a_{k+1}) (\nabla u_k \nabla u_{k+1} + A(x) u_k u_{k+1})\, dx$$

$$= -\int_\Omega (2 - n + a_k + a_{k+1}) u_{k+1} f_k (u_1, ..., u_m)\, dx \geq 0.$$

Les assomptions (6) et (8) conduisent directement à la formule

$$\int_\Omega \Bigg[\sum_{k=1}^m (2 - n + a_k + a_{k+1}) (\nabla u_k \nabla u_{k+1} + A(x) u_k u_{k+1})$$

$$- \sum_{k=1}^m \left(2A(x) + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial A}{\partial x_j}\right) u_k u_{k+1}$$

$$- \left(nF(u_1, ..., u_m) - \sum_{k=1}^m (a_{k-1} u_{k-1} + a_{k+1} u_{k+1}) f_k (u_1, ..., u_m)\right)\Bigg] dx \geq 0.$$

Combinant (3.11) et (3.12) on aura

$$\int_\Omega (2 - n + a_k + a_{k+1}) (\nabla u_k \nabla u_{k+1} + A(x) u_k u_{k+1})\, dx$$

$$= -\int_\Omega (2 - n + a_k + a_{k+1}) u_{k+1} f_k (u_1, ..., u_m)\, dx = 0,$$

par conséquent

$$u_k = 0, (1 \leq k \leq m).$$

■

3.4 Exemples

Exemple 3.1 *Soit* Ω *un ouvert borné étoilé de* $\mathbb{R}^n$, *considérons pour* $(u,v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^2$, *le système suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \dfrac{c_1}{(1+|x|)^\lambda} |v|^{p-1} v = 0 \ \ dans\ \Omega, \\ \\ -\Delta v + v + \dfrac{c_2}{(1+|x|)^\mu} |u|^{q-1} u \ = 0 \ \ dans\ \Omega, \\ \\ u = v = 0 \ \ sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

où $p, q \geq 1, c_1, c_2 \geq 0, \lambda$ *et* μ *des constants réels.*

Les hypothèses du théorème 3.1 sont vérifiées, si

$$\begin{cases} (n - \lambda - a_2(p+1))|x| + n - a_2(p+1) \leq 0, \\ \\ (n - \mu - a_1(q+1))|x| + n - a_1(q+1) \leq 0, \\ \\ a_1 + a_2 < n - 2. \end{cases}$$

Le système (3.13) *n'admet pas de solutions non triviales, dans les situations suivantes*

$$i) \quad \lambda, \mu > 0 \ \ et\ \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < \frac{n-2}{n},$$

$$ii) \quad \lambda, \mu < 0 \ \ et\ \frac{n-\lambda}{p+1} + \frac{n-\mu}{q+1} < n-2,$$

$$iii) \quad \lambda > 0, \mu < 0 \ \ et\ \frac{n}{p+1} + \frac{n-\mu}{q+1} < n-2,$$

$$iv) \quad \lambda < 0, \mu > 0 \ \ et\ \frac{n-\lambda}{p+1} + \frac{n}{p+1} < n-2.$$

Exemple 3.2 *Soit Ω est un ouvert borné étoilé de $\mathbb{R}^n$ $(n > 6)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Considérons le système*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u_1 - (u_2 + u_4)^2 = 0 \ in\ \Omega, \\ \\ -\Delta u_2 + \lambda u_2 + (u_1 + u_3)^2 = 0 \ in\ \Omega, \\ \\ -\Delta u_3 + \lambda u_3 - (u_2 + u_4)^2 = \ 0 \ in\ \Omega, \\ \\ -\Delta u_4 + \lambda u_4 + (u_1 + u_3)^2 = 0 \ in\ \Omega, \\ \\ u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0 \ sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

en choisissant

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{n}{3}$$

les fonctions

$$f_1(u_1, u_2, u_3, u_4) = \ f_3(u_1, u_2, u_3, u_4) = -(u_2 + u_4)^2$$

$$f_2(u_1, u_2, u_3, u_4) = \ f_4(u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_1 + u_3)^2$$

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{2}{3}(u_1^3 + u_3^3 - u_2^3 - u_4^3) + 2u_1^2 u_3 + 2u_1 u_3^2 - 2u_2^2 u_4 - 2u_2 u_4^2$$

vérifient

$$nF\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right)-\left(a_2u_2+a_4u_4\right)\left(f_1+f_3\right)-\left(a_1u_1+a_3u_3\right)\left(f_2+f_4\right)$$

$$=2\left(\frac{n}{3}-a_1\right)u_1^3+2\left(\frac{n}{3}-a_3\right)u_3^3-2\left(\frac{n}{3}-a_2\right)u_2^3-2\left(\frac{n}{3}-a_4\right)u_4^3$$

$$+2\left(n-2a_1-a_3\right)u_1^2u_3+2\left(n-2a_3-a_1\right)u_1u_3^2-2\left(n-2a_2-a_4\right)u_2^2u_4$$

$$-2\left(n-2a_4-a_2\right)u_2^2u_4=0$$

ce qui donne alors

$$u_1=u_2=u_3=u_4=0.$$

Chapitre 4

Absence de solutions non triviales d'une classe d'équations et des systèmes aux dérivées partielles dans des domaines non bornés.

1- Introduction.

2- Identités de type énergie.

3- Résultat principal.

4- Applications.

4.1 Introduction

Dans ce dérnier chapitre, nous abordons la question de non-existence de solutions non triviales pour une équation semi-linéaire, que nous généralisons par la suite à un système, plus précisément nous étendons le résultats établi par **B. Khodja [11]**, sur les équations de la forme

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}(q(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}) + f(x,y,u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times\omega, \\ \\ u + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\partial\omega, \end{cases}$$

considéré dans $H^2(\mathbb{R}\times\omega)\cap L^\infty(\mathbb{R}\times\omega)$, où $\omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$, aux équations de la forme

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda(t)\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(p(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f(x,u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times\Omega, \\ \\ u + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon < +\infty$, pour des fonctions , $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ ne changeant pas les signes.

Utilisons les notations suivantes

$$H = L^2(\Omega),$$

$$\|u(t,x)\| = \left(\int_\Omega |u(t,x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ la norme de } u \text{ dans } H,$$

$$\|\nabla u(t,x)\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx,$$

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,\sigma)d\sigma, \ \forall\, x\in\Omega,\ u\in\mathbb{R}.$$

Soit L l'opérateur défini par

$$Lu\,(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\,(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue, localement Lipschitzienne en u, telle que

$$f(x,0) = 0,\ \ \forall\ x \in \Omega.$$

Nous supposons dans ce chapitre que

$$u \in H^2(\mathbb{R}; H) \cap L^\infty(\mathbb{R}; L^\infty(\Omega)),$$

satisfais l'équation

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda\,(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,(t)\right) + Lu\,(t,x) + f(x,u) = 0\ , (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \tag{4.2}$$

sous les conditions sur le bord

$$(u + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial n})\,(t,\sigma) = 0, (t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega,\ \text{condition de Robin}, \tag{4.3}$$

$$u(t,\sigma) = 0, (t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega,\ \text{condition de Dirichlet}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial u(t,\sigma)}{\partial n} = 0, (t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega,\ \text{condition de Neumann}. \tag{4.5}$$

Nous étendons ces résultats aux systèmes de m-équations suivants

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda\,(t)\,\dfrac{\partial u_k}{\partial t}\right) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(p_k\,(t,x)\,\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + f_k\,(x, u_1, ..., u_m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times\Omega, \\ \\ u_k + \varepsilon\dfrac{\partial u_k}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

$1 \leq k \leq m$, où $f_k : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, sont des fonctions réelles continues, localement Lipchitziennes en $u_i, 1 \leq i \leq m$, vérifiant

$$f_k(x, u_1, ..., 0, ..., u_m) = 0, \ \forall \ x \in \Omega,$$

$$\exists F_m : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ telle que } \frac{\partial F_m}{\partial s_j} = f_j\left(x, s_1, ..., s_m\right), 1 \leq j \leq m,$$

Soit L_k l'opérateur défini par

$$L_k u\left(t, x\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_k\left(t, x\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

et que

$$u_k \in H^2(\mathbb{R}; H) \cap L^\infty(\mathbb{R}; L^\infty(\Omega)),$$

sont des solutions du système

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda\left(t\right)\frac{\partial u_k}{\partial t}\left(t\right)\right) + \sum_{k=1}^{m} L_k u_k\left(t, x\right) + f(x, u_1, ..., u_m) = 0 \ , (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \tag{4.7}$$

$1 \leq k \leq m$, avec les conditions au bord

$$(u_k + \varepsilon\frac{\partial u_k}{\partial n})\left(t, \sigma\right) = 0, (t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega, \text{ condition de Robin,} \tag{4.8}$$

$$u_k(t, \sigma) = 0, (t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega, \text{ condition de Dirichlet,} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u_k(t, \sigma)}{\partial n} = 0, (t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega, \text{ condition de Neumann.} \tag{4.10}$$

Selon le signe de λ, ces problèmes correspondent à deux types d'équations : elliptiques ou hyperboliques.

Nous démontrons nos résultats en utilisant des identités de type énergie établies dans la deuxième section, qui permettent d'obtenir les résultats principaux de non-existence dans la section 3. Dans la section 4, nous appliquons les résultats sur quelques exemples.

4.2 Identités de type énergie

Dans cette section, on donne des lemmes utiles pour le résultat principal.

Lemme 4.1 *Si λ et p vérifient*

$$\begin{aligned} &\lambda'(t) \leq 0 \ \ (resp \ \geq 0), \forall t \in \mathbb{R}, \\ &\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) \leq 0 \ \ (resp \ \geq 0), \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Alors, l'identité énergétique suivante,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\lambda(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega p(t,x)\left|\nabla u\right|^2 dx \\ &+\int_\Omega F(x,u)dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega} p(t,s)u^2(t,s)\,ds = 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

est vérifié pour toutes les solutions du problème de Robin (4.2), (4.3).

Preuve Les assomptions $f \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}), p \in L^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$ et $f(x,0) = 0, \forall x \in \Omega$, permettent de déduire l'existence de deux constantes positives C_1et C_2, te que

$$|p(t,x)| \leq C_1, \ \ |F(x,u)| \leq C_2 \left|u(t,x)\right|^2.$$

Considérons les fonctions

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega p(t,x)\left|\nabla u\right|^2 dx, \ \ \Phi(t) = \int_\Omega F(x,u)dx, t \in \mathbb{R},$$

où Φ et Ψ sont de classe C^1, et

$$|\Psi(t)| \leq C_1 \|\nabla u(t,x)\|^2, \quad |\Phi(t)| \leq C_2 \|u(t,x)\|^2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\Phi'(t) = \int_\Omega f(x,u)\frac{\partial u}{\partial t}dx, \forall t \in \mathbb{R},$$

et

$$\Psi'(t) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n p(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial t}(t,x)|\nabla u|^2\right)dx$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(t,x)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)\tfrac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}(t,x)|\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} p(t,s)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\,ds.$$

Définissons la fonction $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$K(t) = -\frac{1}{2}\lambda(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2 + \Psi(t) + \Phi(t).$$

K est absolument continu et différentiable presque partout sur $\mathbb{R}$, et

$$K'(t) = -\frac{1}{2}\lambda'(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2 - \lambda(t)\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx + \Psi'(t) + \Phi'(t)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda'(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}(t,x)|\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} p(t,s)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\,ds$$

$$+\int_\Omega \left(-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f(x,u)\right)\frac{\partial u}{\partial t}dx.$$

Puisque u est une solution de $(4.2), (4.3)$, on déduit que

$$K'(x) = \frac{1}{2}\lambda'(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}|\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} p(t,x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\,ds,$$

Le troisième terme du second membre peut s'écrire

$$\int_{\partial\Omega} p(t,x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\,ds = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} p(t,s)\frac{\partial u}{\partial t}u\,(t,s)\,ds.$$

Et par suite

$$K'(t) = \frac{1}{2}\lambda'(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial p}{\partial t}(t,x)\left|\nabla u\right|^2 dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} p(t,s)\frac{\partial u}{\partial t}u\,(t,s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\lambda'(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial p}{\partial t}(t,x)\left|\nabla u\right|^2 dx$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\partial\Omega} p(t,s)u^2(t,s)\,ds\right) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial p}{\partial t}(t,s)u^2(t,s)\,ds,$$

i.e

$$\frac{d}{dt}\left(K(t) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega} p(t,s)u^2(t,s)\,ds\right) = \frac{1}{2}\lambda'(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial p}{\partial t}(t,x)\left|\nabla u\right|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial p}{\partial t}(t,s)u^2(t,s)\,ds.$$

Posons

$$M(t) = K(t) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega} p(t,s)u^2(t,s)\,ds.$$

La condition (4.11) implique que

$$M'(t) \leq 0 \ \ (\text{resp} \geq 0), \forall t \in \mathbb{R},$$

i.e M est monotone. Mais aussi cette fonction vérifie

$$\lim_{|t|\to+\infty} M(t) = 0,$$

parceque $M \in L^2(\mathbb{R})$. on doit avoir $M(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, ce qui donne le résultat désiré. ■

Lemme 4.2 *Si λ et p vérifient* (4.11). *La solution du problème de Dirichlet* (4.2), (4.4) *ou de*

Neumann $(4.2), (4.5)$, *satisfait l'identité énergétique suivante*

$$-\frac{1}{2}\lambda(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega p(t,x)\left|\nabla u\right|^2 dx+\int_\Omega F(x,u)dx=0. \tag{4.13}$$

Preuve Pour le problème $(4.2), (4.4)$, du fait que $u=0$ sur la frontière, on a

$$\int_{\partial\Omega} p(t,x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\,ds=\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega} p(t,x)\frac{\partial u}{\partial \nu}u(t,s)\,ds\right)$$

$$-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \nu}u(t,s)\,ds-\int_{\partial\Omega} p(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \nu}u(t,s)\,ds=0.$$

quant au problème de Neumann $(4.2), (4.5)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0$ sur la frontière, implique que

$$\int_{\partial\Omega} p(t,x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\,ds=0.$$

Le reste de la démonstration est similaire à celle de Lemme 1. ■

Lemme 4.3 *Soient* λ *et* p_k *des fonctions vérifiant*

$$\begin{aligned}&\lambda'(t)\le 0\ \ (resp\ \ \ge 0), \forall t\in\mathbb{R},\\&\frac{\partial p_k}{\partial t}(t,x)\le 0\ \ (resp\ \ \ge 0), 1\le k\le m, \forall (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Alors, les solutions du système $(4.7), (4.8)$ *vérifient pour tous les* $t\in\mathbb{R}$, *l'identité énergétique suivante*

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\lambda(t)\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}(t,x)\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\int_\Omega p_k(t,x)\left|\nabla u_k\right|^2 dx\\&+\int_\Omega F_m(x,u_1,...,u_m)dx+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^m\int_{\partial\Omega} p_k(t,s)u_k^2(t,s)\,ds=0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Lemme 4.4 *Soient* λ *et* p_k *comme dans le lemme* (4.3). *Alors les solutions du système* $(4.7), (4.9)$

ou $(4.7), (4.10)$, *satisfont pour tous* $t \in \mathbb{R}$, *la formule suivante*

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\lambda(t)\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}(t,x)\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega}p_k(t,x)\left|\nabla u_k\right|^2dx+\int_{\Omega}F_m(x,u_1,...,u_m)dx=0. \quad (4.16)$$

Preuve Définissons les fonctions $K_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$K_m(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\lambda(t)\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}(t,x)\right\|^2+\Psi_m(t)+\Phi_m(t),$$

où les fonctions Ψ_m et Φ_m sont définies comme suit

$$\Psi_m(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}p_k(t,x)\left|\nabla u_k\right|^2dx, t\in\mathbb{R},$$

$$\Phi_m(t)=\int_{\Omega}F_m(x,u_1,...,u_m)dx, t\in\mathbb{R}.$$

Le reste de la preuve est similaire aux résultats précédents. ■

4.3 Résultat principal

Théorème 4.1 *Supposons que* λ, F *et* f *vérifient*

$$\begin{aligned} &\lambda(t)>0 \ \ (resp<0), \forall t\in\mathbb{R}, \\ &2F(x,u)-uf(x,u)\leq 0 \ \ (resp\geq 0), \end{aligned} \quad (4.17)$$

et (4.11), *alors le problème* $(4.2), (4.3)$ *n'admet que la solution nulle.*

Preuve Nous introduisons la fonction E par

$$E(t)=\left\|u(x,t)\right\|^2.$$

Multiplions l'équation (4.2) par u et intégrons la nouvelle équation sur Ω, on obtient

$$\int\limits_{\Omega}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda\left(t\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\left(t,x\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-f\left(x,u\right)\right]udx$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left[-\frac{1}{2}\left(\lambda'\left(t\right)\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial t}+\lambda\left(t\right)\frac{\partial^2\left(u^2\right)}{\partial t^2}\right)+\lambda\left(t\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right.$$

$$\left.+p\left(t,x\right)\left|\nabla u\right|^2+uf\left(x,u\right)\right]dx-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\partial\Omega}p\left(t,s\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}u\left(t,s\right)\nu_i ds$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\lambda\left(t\right)E''\left(t\right)+\lambda'\left(t\right)E'\left(t\right)\right)+\lambda\left(t\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\left(t,x\right)\right\|^2+\int\limits_{\Omega}p\left(t,x\right)\left|\nabla u\right|^2dx$$

$$+\int\limits_{\Omega}uf\left(x,u\right)dx-\int\limits_{\partial\Omega}p\left(t,s\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}u\left(t,s\right)ds=0.$$

L'identité (4.12) donne

$$\tfrac{d}{dt}\left(\lambda\left(t\right)E'\left(t\right)\right)=\lambda\left(t\right)E''\left(t\right)+\lambda'\left(t\right)E'\left(t\right)$$

$$=2\lambda\left(t\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\left(t\right)\right\|^2+2\int\limits_{\Omega}p\left(t,x\right)\left|\nabla u\left(t,x\right)\right|^2dx$$

$$+2\int\limits_{\Omega}u\left(t,x\right)f\left(x,u\left(t,x\right)\right)dx+\frac{2}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\Omega}p\left(t,s\right)u^2\left(t,s\right)ds$$

$$=4\lambda\left(t\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\left(t\right)\right\|^2-2\int\limits_{\Omega}\left(2F\left(x,u\right)-uf\left(x,u\right)\right)dx.$$

Si $\lambda\left(t\right)>0$, l'assumption (4.17) implique que

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda\left(t\right)E'\left(t\right)\right)=\lambda\left(t\right)E''\left(t\right)+\lambda'\left(t\right)E'\left(t\right)\geq 0\ ,\forall t\in\mathbb{R}. \tag{4.18}$$

on conclut alors que

$$E'(t) \leq 0,$$

dans le cas contraire,

$$\exists t_1 \geq 0, E'(t_1) \geq 0. \tag{4.19}$$

l'équation (4.18) implique que $\lambda(t) E'(t)$ est une fonction croissante

$$\lambda(t_1) E'(t_1) \leq \lambda(t) E'(t), \forall t \geq t_1,$$

Comme

$$\lim_{|t| \to +\infty} E'(t) = 0,$$

du fait que $E' \in L^1(\mathbb{R})$, ce qui permet d'avoir

$$\lambda(t_1) E'(t_1) \leq 0 \text{ et } \lambda(t_1) > 0 \Rightarrow E'(t_1) \leq 0,$$

ceci contredit la relation (4.19). Par conséquent,

$$E'(t) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

i.e E est monotone. Mais, cette fonction vérifie

$$\lim_{|t| \to +\infty} E(t) = 0,$$

ce qui implique que

$$E(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

Donc $u = 0$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$.

Si $\lambda(t) < 0$, nous déduisons de la même manière que $u = 0$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$. ■

Théorème 4.2 *Si* λ, F *et* f *vérifient* (4.11) *et* (4.17), *alors la seule solution des problèmes* $(4.2).(4.4)$ *ou* $(4.2).(4.5)$ *est la solution nulle.*

Preuve Identique à celle du Théorème 4.1. ■

Théorème 4.3 *Supposons que* λ, F_m *et* $f_k, 1 \leq k \leq m$, *vérifient*

$$\begin{aligned} &\lambda(t) > 0 \ \ (resp \ < 0), \forall t \in \mathbb{R}, \\ &F_m(x, u_1, ..., u_m) - \textstyle\sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x, u_1, ..., u_m) \leq 0 \ \ (résp \ \geq 0), \end{aligned} \tag{4.20}$$

et (4.14) *vérifié. Alors le système* (4.7) . (4.8) *admet que la solution nulle.*

Preuve Multipliant l'équation (4.7) par u_k et intégrant la nouvelle équation sur Ω, on obtient

$$-\frac{1}{2}\left(\lambda(t)\frac{d^2}{dt^2}\|u_k(t,x)\|^2 + \lambda'(t)\frac{d}{dt}\|u_k(t,x)\|^2\right) + \lambda(t)\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}(t,x)\right\|^2 + \int_\Omega p_k(t,x)|\nabla u_k|^2 dx$$

$$+\int_\Omega u_k f_k(x, u_1, ..., u_m)\, dx - \int_{\partial\Omega} p_k(t,s)\frac{\partial u_k}{\partial \nu} u_k(t,s)\, ds = 0.$$

La somme sur k de 1 à m donne

$$-\frac{1}{2}\left(\lambda(t) E_m''(t) + \lambda'(t) E_m'(t)\right) + \lambda(t)\textstyle\sum_{k=1}^{m}\left\|\dfrac{\partial u_k}{\partial t}(t,x)\right\|^2 + \textstyle\sum_{k=1}^{m}\displaystyle\int_\Omega p_k(t,x)|\nabla u_k|^2 dx$$

$$+\textstyle\sum_{k=1}^{m}\displaystyle\int_\Omega u_k(t,x) f_k(x, u_1, ..., u_m)\, dx - \textstyle\sum_{k=1}^{m}\displaystyle\int_{\partial\Omega} p_k(t,s)\frac{\partial u_k}{\partial \nu} u_k(t,s)\, ds = 0.$$

Utilisant l'identité (4.15), en conclure que

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda(t) E_m'(t)\right) = \lambda(t) E_m''(t) + \lambda'(t) E_m'(t)$$

$$= 4\lambda(t)\textstyle\sum_{k=1}^{m}\left\|\dfrac{\partial u_k}{\partial t}(t)\right\|^2 - 2\displaystyle\int_\Omega \left(2F_m(x, u_1, ..., u_m) - \textstyle\sum_{k=1}^{m} u_k(t,x) f_k(x, u_1, ..., u_m)\right) dx.$$

Alors l'hypothèse (4.20) donne le résultat. ■

Théorème 4.4 *Si* λ, p *et* F *vérifient*

$$\begin{aligned}
&\lambda(t) > 0, p(t,x) < 0 \ \text{ et } F(x,u) \leq 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\Omega, \\
&ou \\
&\lambda(t) < 0, p(t,x) > 0 \ \text{ et } F(x,u) \geq 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\Omega,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

et (4.11), *alors les problèmes* (4.2).(4.3), (4.2).(4.4) *et* (4.2).(4.5) *n'admettent que les solutions nulles.*

Preuve Les assomptions (4.21) et l'égalité (4.13) permettent d'avoir

$$-\frac{1}{2}\lambda(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega p(t,x)\left|\nabla u\right|^2 dx + \int_\Omega F(x,u)dx = 0,$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\Omega,$$

i.e.

$$u(t,x) = u(x).$$

Comme $u \in H^2(\mathbb{R}\times\not\leq)$ i.e,

$$\int_{\mathbb{R}\times\Omega} |u(t,x)|^2 dtdx = \int_{\mathbb{R}\times\Omega} |u(x)|^2 dtdx < +\infty,$$

alors $u \equiv 0$. ■

Théorème 4.5 *Si* λ, p_k $(1 \leq k \leq m)$ *et* f *vérifient*

$$\begin{aligned}
&\lambda(t) > 0, p_k(t,x) < 0 \ \text{ et } F_m(x,u_1,...,u_m) \leq 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\Omega, \\
&ou \\
&\lambda(t) < 0, p_k(t,x) > 0 \ \text{ et } F_m(x,u_1,...,u_m) \geq 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\Omega.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

et (4.17), *alors les systèmes* (4.7) . (4.8) , (4.7) . (4.9) *et* (4.7) . (4.10) *n'admettent que les solutions nulles.*

Preuve Similair à celle de Théorème 4.2. ■

Remarque 4.1 *En peut appliqué ces résultats dans le domaine $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, avec la condition initiale*

$$u\left(0,x\right)=0, \forall x\in\Omega.$$

4.4 Applications

Exemple 4.1 *Soit*

$$\theta,\theta_1,\theta_2:\overline{\Omega}\rightarrow\mathbb{R},$$

des fonctions non négatives de classe $C\left(\mathbb{R}\right),p,q\geq 1$ et $m\in\mathbb{R}$, tel que

$$f(x,u)=mu+\theta_1\left(x\right)\left|u\right|^{p-1}u+\theta_2\left(x\right)\left|u\right|^{q-1}u.$$

Alors le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\theta\left(x\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)+f(x,u)=0 \ \textit{dans}\ \mathbb{R}\times\Omega, \\ \\ \left(u+\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)(x,\sigma)=0\ \textit{sur}\ \mathbb{R}\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.23}$$

admet que la solution nulle.

Dans ce cas, il suffit de vérifier

$$2F(x,u)-uf(x,u)=$$

$$\theta_1\left(x\right)(\frac{2}{p+1}-1)\left|u\right|^{p+1}+\theta_2\left(x\right)(\frac{2}{q+1}-1)\left|u\right|^{q+1}\leq 0,$$

et appliqué le Théorème 4.1.

Exemple 4.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, le problème*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \Delta u = \theta(x)\,|u|^{p-1}\,u \ \textit{dans}\ \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \left(u + \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)(t,\sigma) = 0 \ \textit{sur}\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = 0, \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.24}$$

où

$$p \geq 1,\ \ \theta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ \ \textit{non négative},$$

n'admet que la solution triviale, $u \equiv 0$.

En effet,

$$\lambda(t) = e^{-t^2} > 0, \lambda'(t) = -2te^{-t^2} \leq 0, \forall t \geq 0,$$

$$2F(x,u) - uf(x,u) = \theta(x)\,(\frac{2}{p+1} - 1)\,|u|^{p+1} \leq 0.$$

Le Théorème 4.1 donne le résultat.

Exemple 4.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $p, q \geq 1$, Alors, le système*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda(t)\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \Delta u + (p+1)\,\theta(x)\,u\,|u|^{p-1}\,|v|^{q+1} = 0 \ \textit{dans}\ \mathbb{R} \times \Omega, \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda(t)\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) - \Delta v + (q+1)\,\theta(x)\,v\,|v|^{q-1}\,|u|^{p+1} = 0 \ \textit{dans}\ \mathbb{R} \times \Omega, \\ \left(u + \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)(t,\sigma) = \left(v + \varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial n}\right)(t,\sigma) = 0 \ \textit{sur}\ \mathbb{R} \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.25}$$

où

$$\theta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ \ \textit{non négatif},$$

$$\lambda(t) > 0 \ \textit{de classe}\ L^\infty(\mathbb{R}),$$

n'admet que les solutions triviales, $u \equiv v \equiv 0$.

En effet, il existe une fonction F définie par

$$F(x,u,v) = \theta\,(x)\,|u|^{p+1}\,|v|^{q+1}\,,$$

qui satisfait

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_1(x,u,v) = (p+1)\,\theta\,(x)\,u\,|u|^{p-1}\,|v|^{q+1}\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = f_2(x,u,v) = (q+1)\,\theta\,(x)\,v\,|v|^{q-1}\,|u|^{p+1}\,,$$

$$F(x,u,v) - uf_1(x,u,v) - vf_2\,(x,u,v) = -\theta\,(x)\,(p+q+1)\,|u|^{p+1}\,|v|^{q+1} \leq 0.$$

Théorème 4.3 donne le résultat.

Conclusion

Ce travail est une synthèse de résultats élaberés par **K. Akrout & B. Khodja ,** sur la non-existence de solutions non triviales de quelques équations et systèmes aux dérivées partielles.

Où la technique utilisée est basé sur des identités intégrales qui permettent selon la géométrie du domaine et la non linéarité de f, de prouver que l'unique solution du problème semi-linéaire étudié est la solution triviale, en utilisant le principe de maximum et des résultats d'analyse réel et d'analyse fonctionnelle.

Bibliographie

[1] **K. AKROUT & B. KHODJA**, *Absence of nontrivial solutions for a class of partial differential equations and systems in unbounded domains*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2009, No. 27, 1-10.

[2] **H. BREZIS,** *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson. Parie.

[3] **G. CARISTI AND E. MITIDIERI**, *Nonexistence of positive solutions of quasilinear equations.* Adv. in Diff. Equations, 2 (1997), 319-359.

[4] **D. DE FIGUEIREDO**, *Semilinear elliptic systems.* Nonlinear Functional Analysis and Application to differential Equations (1998), 122-152, ICTP Trieste ITALY, 21 April-9 May 1997. World Scientific.

[5] **M. J. ESTEBAN & P .LIONS,** *Existence and non-existence results for semi linear elliptic problems in unbounded domains,* Proc.Roy.Soc.Edimburgh. 93-A(1982),1-14.

[6] **B. GIDAS & WEI-MING NI & L. NIRENBERG,** *Symmetry and related properties via the maximum principle,* Commun.Math.Phys.68.209-243(1979).

[7] **A. HARAUX & B. KHODJA,** *Caractère triviale de la solution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires dans des ouverts cylindriques de* $\mathbb{R}^n$, Portugaliae Mathematica, Vol.42, Fasc.2,1982,1–9.

[8] **O. KAVIAN**, *Introduction à la théorique des points critiques et applications aux problèmes elliptiques,* Springer-Velarg.France, Parie, 1993.

[9] **N. KAWARNO, W. NI AND SYOTSUTANI**, *Generalised pohozaěv identity and its applications.* J. Math. Soc. Japan. Vol. 42 N°3 (1990), 541-563.

[10] **B. KHODJA,** *Equations elliptiques semi linéaires dans des domaines non bornés de* $\mathbb{R}^n$, Portugaliae Mathematica Vol.53 Fasc.4-1996.

[11] **B. KHODJA,** *non-existence of solutions for semilinear equations and systems in sylindrical domains.*

[12] **E. MITIDIERI**, *Nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic systems in* $\mathbb{R}^n$. Diff. and Int. Equations, 9 (1996), 465-479.

[13] **Y. NAITO & H. USAMI,** *Nonexistence results of positive entire solutions for quasilinar elliptic inequalitis,* Canad. Math. Bull. Vol. 40 (2), 1977 pp. 244-253.

[14] **W. NI. AND J. SERRIN**, *Nonexistence theorems for quasilinear partial differential equations.* Red.Circ. Mat. Palermo, suppl. Math. 8 (1985), 171-185.

[15] **S. I. POHOZAĚV,** *Eeigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet.Math.Dokl.(1965), 1408-1411.

[16] **M. H. PROTTER & H. F. WEINBERGER,** *Maximum principal in differential equations,* Prentice-Hall.Englewood Cliffs, New Jersey.1967.

[17] **P. PUCCI & J. SERRIN**, *A general variational identity*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 35, No. 3 (1986).

[18] **L. SCHWARTZ**, *Analyse mathemathique,* Hermann.Paris.1967.

[19] **J. SMOLLER,** *Shock waves and reaction-diffusion equations,* Springer-Velarg.New York Inc.1983.

[20] **T. TERAMOTO**, *Existence and nonexistence of positive radial entire solutions of second order quasiliniar elliptic systems.* Hiroshima Math. J. 30 (2000), 437-461.

[21] **R. C. A. M. VAN DER VORST,** *Variational identities and applications to differential systems,* Arch.Rational Mech.Anal.116(1991)375-398.Springer-Verlage.1992.**H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris (1983).*

[22] **C. YARUR**, *Nonexistence of positive singular solutions for a class of semilinear elliptic systems*. Electronic Journal of Diff. Equations, 8 (1996),