

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES
Option : Mathématiques Appliquées

OSCILLATIONS DANS DES ÉQUATIONS DE LIÉNARD

Par

Souhila BOUDJEMA

Sous la direction de

Pr. MAKHLOUF AMAR	U.B.M. Annaba	Encadreur
Pr. BLOT JOËL	U. P. Sorbonne. Paris1	Co-encadreur

Devant le jury

SISSAOUI HOCINE	U.B.M. Annaba	Pr	PRESIDENT
BEBBOUCHI RACHID	USTHB. Alger	Pr	EXAMINATEUR
LAKRIB MUSTAPHA	U. Sidi Bel Abbès	Pr	EXAMINATEUR
LAOUAR ABD EL HAMID	U.B.M. Annaba	M.C.A	EXAMINATEUR

Année universitaire 2013/2014

Remerciements

J'exprime toute ma reconnaissance aux Professeurs MA-KHLOUF Amar et Joël BLOT, d'avoir dirigé cette thèse, et pour tout leur dynamisme et compétences scientifiques qui m'ont permis de mener à bien cette étude.

Un grand remerciement au Professeur Hocine SISSAOUI pour sa sympathie et pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le Jury.

Ma respectueuse reconnaissance aux Monsieur BEBOUCHI Rachid, Professeur à l'université USTHB d'Alger, et Monsieur LAKRIB Mustapha, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès, et Monsieur LAOUAR Abd el Hamid, Maître de Conférence à l'université Badji Mokhtar d'Annaba, d'avoir accepté de rapporter et d'être membres de jury de ce travail.

Je suis très honorée du fait que Monsieur Philippe CIEUTAT, Professeur à l'Université Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines, ait accepté de collaborer avec moi dans le deuxième travail de ma thèse.

Un immense merci à ma famille, et surtout à mes parents, qui m'ont permis de poursuivre mes études jusqu'à présent.

Abstract

In this work, near an equilibrium we study the existence of almost periodic (a.p.), asymptotically a.p., pseudo a.p., weighed pseudo a.p., almost automorphic (a.a.), asymptotically a.a., pseudo a.a., and weighed pseudo a.a. solutions of Liénard differential equations in the form

$$x''(t) + f(x(t), p).x'(t) + g(x(t), p) = e_p(t),$$

where the term e_p possesses a similar nature, and where p is a parameter in a Banach space. We use a theorem of implicit functions around an equilibrium. We also study two special cases of the previous family of equations that are

$$x''(t) + f(x(t)).x'(t) + g(x(t)) = e(t)$$

and

$$x''(t) + f(x(t), q).x'(t) + g(x(t), q) = e(t).$$

Keywords

Almost periodic functions, Almost automorphic functions, Liénard Equation, Asymptotically almost periodic functions, Pseudo almost periodic functions, Weighted pseudo almost periodic functions.

Résumé

Dans ce travail, on étudie, au voisinage d'un point d'équilibre, l'existence des solutions presque-périodiques (p.p.), asymptotiquement p.p., pseudo p.p., pseudo p.p. avec poids, presque-automorphe (p.a.), asymptotiquement p.a., pseudo p.a. et pseudo p.a. avec poids de l'équation différentielle de Liénard forcée de la forme

$$x''(t) + f(x(t), p).x'(t) + g(x(t), p) = e_p(t),$$

où le terme e_p est de la même nature que la solution, et où p est un paramètre dans un espace de Banach. On utilise le théorème des fonctions implicites au voisinage de l'équilibre. On étudie aussi deux cas particuliers de la famille d'équations précédente qui sont

$$x''(t) + f(x(t)).x'(t) + g(x(t)) = e(t)$$

et

$$x''(t) + f(x(t), q).x'(t) + g(x(t), q) = e(t).$$

Mots-clés

Fonctions presque-périodiques, Fonctions presque-automorphes, Equation de Liénard, Fonctions asymptotiquement presque-périodiques, Fonctions pseudo presque-périodiques, Fonctions pseudo presque-périodiques avec poids.

Table des matières

Introduction générale	6
1 RAPPELS SUR DIVERS TYPES DE FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES	9
1 Fonctions presque-périodiques	9
2 Fonctions presque-périodiques avec un paramètre	11
3 Existence d'une solution presque-périodique pour certains types d'équations différentielles.	14
4 Fonctions presque-automorphes	17
5 Fonctions presque-automorphes avec un paramètre	17
6 Existence et unicité d'une solution "mild" presque-automorphe pour l'équation différentielle non homogène.	19
7 Fonctions asymptotiquement presque-périodiques (respectivement asymptotiquement presque-automorphes)	20
8 Fonctions pseudo presque-périodiques (respectivement pseudo presque-automorphes)	21
9 Fonctions pseudo presque-périodiques avec poids (respectivement pseudo presque-automorphes avec poids)	23
2 PETITES OSCILLATIONS PRESQU'AUTOMORPHES ET PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION DE LIÉNARD FORCÉE.	27
1 Introduction	27
2 Préliminaires	28
3 Résultats	31
4 Démonstration des théorèmes	33
3 DIFFÉRENT TYPES D'OSCILLATIONS DE L'ÉQUATION DE LIÉNARD FORCÉE.	40
1 Introduction	40
2 Préliminaires	41
3 Résultats	45
4 Cas particuliers	50

Introduction générale

La notion de fonction presque-périodique (p.p.) est introduite pour la première fois par H. Bohr [15] en 1925-1926. Jouant un rôle important dans l'étude des équations différentielles, elle a été développée après par d'autres auteurs, notamment par Bochner qui a donné, en 1933, une propriété équivalente à la définition donnée par Bohr.

Comme généralisation des fonctions p.p., Bochner dans [13] a introduit la notion de fonctions presque-automorphes (p.a.) pour lesquelles certaines propriétés fondamentales des fonctions p.p. ne sont pas vérifiées. Cette notion a été développée aussi par G.M. N'Guérékata dans [36].

En 1941 Fréchet, dans [28], a introduit la notion de fonction asymptotiquement presque-périodique, et en 1992, C. Zhang, dans [34], a généralisé cette notion en introduisant les fonctions pseudo presque-périodiques.

Dans le but d'étudier l'existence et l'unicité des solutions "mild" de quelques équations différentielles abstraites, les auteurs de [22], [21], [23] et [9] ont introduit aussi une nouvelle notion de fonction pseudo presque-périodique avec poids. Comme généralisation de ces fonctions, on trouve les fonctions pseudo presque-automorphes avec poids, introduites par Blot, Mophou, N'Guérékata et Pennequin dans [12].

L'existence et l'unicité des solutions p.p., asymptotiquement p.p., pseudo p.p. et pseudo p.p. avec poids (respectivement p.p., asymptotiquement p.a., pseudo p.a. et pseudo p.a. avec poids,) sont d'une grande importance dans l'étude qualitative de la théorie des équations différentielles à cause à leurs applications dans plusieurs domaines comme la biologie mathématique, la physique, la théorie du contrôle et d'autres domaines. Parmi ces applications, on trouve comme modèle oscillatoire important dans le domaine de la physique, l'équation de Liénard forcée. En 1960, A. Perov dans [37], a étudié l'existence et l'unicité d'une solution presque-périodique d'une équation plus générale que celle de Liénard, de la forme

$$X'(t) = M(t, X(t)). \quad (1)$$

Dans le même travail, l'auteur a prouvé d'abord l'existence et l'unicité d'une solution bornée de l'équation (1). Il a aussi constaté que cette solution peut

être presque-périodique ou même périodique en ajoutant des conditions sur la fonction M de cette équation. Toujours dans le but d'étudier l'existence et l'unicité des solutions presque-périodiques de l'équation de Liénard, on peut citer le travail de Cieutat dans [17] sur le système

$$x''(t) + \frac{d}{dt}(\nabla F(x(t))) + Cx(t) = e(t),$$

et aussi celui de Blot, Cieutat et Mawhin dans [7] sur la recherche d'une solution presque-périodique de l'équation différentielle forcée

$$x''(t) + [b(t)I + B(t)]x'(t) - F(t, x(t)) = e(t). \quad (2)$$

De même existe l'article de Cieutat [18] sur un cas plus général que (2), qui est

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)),$$

où il a appliqué des résultats utilisés dans [7] pour l'équation (2).

Plan de la thèse

Les principaux résultats obtenus dans ce travail concernent l'existence et l'unicité des solutions de différents types de l'équation de Liénard forcée. Pour réaliser notre objectif, nous utilisons des outils d'analyse fonctionnelle non linéaire et des résultats sur les équations linéaires qu'on trouve dans les travaux suivants : [8], [9], [10], [22], [35].

Dans le Chapitre I, on rappelle les définitions et propriétés de divers types de fonctions presque-périodiques en abordant quelques résultats d'existence de solutions presque-périodiques pour quelques types d'équations différentielles et des solutions "mild" presque-automorphes pour une équation différentielle non homogène.

Dans le Chapitre II, on établit un résultat d'existence et d'unicité d'une solution presque-périodique (respectivement presque-automorphe) x_p de la famille d'équations suivantes :

$$x''(t) + f(x(t), p).x'(t) + g(x(t), p) = e_p(t), \quad (3)$$

pour un p , dans un voisinage de 0, dans un espace de Banach, et pour e_p p.p. (respectivement p.a.). Pour aboutir à notre résultat, on traduit le problème dans un cadre d'analyse Fonctionnelle Non Linéaire et on applique le théorème des fonctions implicites.

On considère aussi deux cas particuliers de la famille (3), qui sont

$$x''(t) + f_1(x(t)).x'(t) + g_1(x(t)) = e(t),$$

et

$$x''(t) + f_2(x(t), q).x'(t) + g_2(x(t), q) = e(t).$$

Dans le Chapitre III, nous étendons les résultats du chapitre 2 aux fonctions asymptotiquement p.p., asymptotiquement p.a., pseudo p.p., pseudo p.a., pseudo p.p. avec poids et pseudo p.a. avec poids.

Chapitre 1

RAPPELS SUR DIVERS TYPES DE FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES

Résumé. Ce chapitre est une collection de résultats qui seront utiles pour la suite de la thèse. On rappellera quelques définitions et propriétés des fonctions presque-périodiques, et de même on donnera la définition et quelques propriétés des fonctions presque-automorphes, fonctions asymptotiquement p.p., asymptotiquement p.a., pseudo p.p., pseudo p.a., pseudo p.p. avec poids et pseudo p.a. avec poids.

Pour toute la suite, $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ sont deux espaces de Banach.

1 Fonctions presque-périodiques

Définition 1.1 *Un ensemble T de \mathbb{R} est dit relativement dense dans \mathbb{R} s'il existe un nombre réel $\ell > 0$, tel que, $T \cap [a, a + \ell] \neq \emptyset$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.2 *(Harald Bohr). [26], [28]. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. On dit que f est presque-périodique (p.p.) au sens de Bohr si pour $\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble*

$$T := \{\tau \in \mathbb{R}; \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + \tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon\}$$

est relativement dense dans \mathbb{R} .

Remarque 1.1 *On dit que f est presque-périodique au sens de Bohr si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [\alpha, \alpha + \ell], \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + \tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

On notera par $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ ou $AP^0(\mathbb{E})$ l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr à valeurs dans \mathbb{E} .

Proposition 1.1 [1], [15], [28]. $AP^0(\mathbb{E})$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(t)\|_{\mathbb{E}}; t \in \mathbb{R}\}$$

est un espace de Banach.

exemple 1.1 [4]. $t \mapsto f(t) = \sin 2\pi t + \sin 2\pi t\sqrt{2}$ est une fonction presque-périodique. En effet pour un $\varepsilon > 0$, si on choisi τ un entier et que pour un autre entier q on a $|\tau\sqrt{2} - q| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$, on obtient

$$f(t + \tau) = \sin(2\pi t + 2\pi\tau) + \sin(2\pi t\sqrt{2} + 2\pi\tau\sqrt{2}),$$

alors

$$f(t + \tau) = \sin(2\pi t) + \sin(2\pi t\sqrt{2} + (2\lambda - 1)\varepsilon + 2\pi q),$$

où $\lambda \in [0, 1]$, donc puisque q est un entier et si on pose $(2\lambda - 1)\varepsilon = \theta$ on obtient

$$f(t + \tau) = \sin(2\pi t) + \sin(2\pi t\sqrt{2} + \theta\varepsilon); \text{ avec } \theta \in [-1, 1].$$

En appliquant le théorème des accroissements Finis sur la fonction $t \mapsto \sin t$ entre $A := 2\pi t\sqrt{2}$ et $B := 2\pi t\sqrt{2} + \theta\varepsilon$ on obtient

$$f(t + \tau) = f(t) + \theta\varepsilon \cos(\zeta); \text{ avec } \zeta \in [A, B].$$

Puisque $\zeta \in [A, B]$, donc $\zeta = 2\pi t\sqrt{2} + \alpha\theta\varepsilon$ avec $\alpha \in [0, 1]$. Posant $\theta \cos(\zeta) = \theta'$, alors

$$f(t + \tau) = f(t) + \varepsilon\theta'; \text{ avec } \theta' \in [-1, 1].$$

Propriétés 1.1 [1]. Si $f \in AP^0(\mathbb{E})$, alors

- f est uniformément continue.
- L'image de f est relativement compacte dans \mathbb{E} , donc f est bornée sur \mathbb{R} .
- Si \mathbb{F} est un espace de Banach, $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est une application continue sur l'adhérence de l'image de f , alors $g \circ f \in AP^0(\mathbb{F})$.
- Si $f \in AP^0(\mathbb{E}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et f' est uniformément continue sur \mathbb{R} , alors $f' \in AP^0(\mathbb{E})$.
- On note $H(t) = \int_0^t f(s)ds$. Si l'image de H est relativement compact dans E , alors $H \in AP^0(\mathbb{E})$.

Proposition 1.2 [1]. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur de translation

$$\tau_a(f)(t) := f(t + a).$$

Si $f \in AP^0(\mathbb{E})$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\tau_a(f) \in AP^0(\mathbb{E})$.

Soit $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{E} .

Théorème 1.1 (Bochner) [1]. Soit $f \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Alors $f \in AP^0(\mathbb{E})$ si et seulement si $\{\tau_a(f); a \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$AP^k(\mathbb{E}) := \{f \in AP^0(\mathbb{E}) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in AP^0(\mathbb{E})\}.$$

Proposition 1.3 [1], [15], [28]

Muni de la norme

$$\|f\|_{AP^k(\mathbb{E})} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathbb{E}} + \sum_{i=1}^k \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d^i f}{dt^i}(t) \right\|_{\mathbb{E}}$$

$AP^k(\mathbb{E})$ est un espace de Banach.

2 Fonctions presque-périodiques avec un paramètre

Définition 2.1 [11]. Soit $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$. on dit que f est presque-périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact K de \mathbb{E} lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [\alpha, \alpha + \ell], \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in K} \|f(t + \tau, x) - f(t, x)\|_{\mathbb{F}} \leq \varepsilon.$$

L'ensemble des fonction presque-périodiques en t uniformément par rapport à x sur tout compact K de \mathbb{E} de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ sur \mathbb{F} est noté $APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Lemme 2.1 ([11], lemme 3.4). Soit $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ et soit $u \in AP^0(\mathbb{E})$ alors on a $[t \mapsto f(t, u(t))] \in AP^0(\mathbb{F})$.

Théorème 2.1 ([11], théorème 3.5). Si $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ est presque-périodique uniformément en t par rapport à x sur tout compact K de \mathbb{E} , alors l'opérateur de Nemytski construit sur f , $N_f : AP^0(\mathbb{E}) \rightarrow AP^0(\mathbb{F})$ défini par l'application $N_f(u) := [t \mapsto f(t, u(t))]$, est continu.

Pour la démonstration on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.2 ([11], lemme 3.7). Soit $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors on a, pour tout compact \mathcal{K} dans \mathbb{E} et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\mathcal{K}, \varepsilon)$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{K}$ et pour tout $z \in \mathbb{E}$, si $\|x - z\| \leq \delta$ alors $\|f(t, x) - f(t, z)\| \leq \varepsilon$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration du théorème 2.1.

On fixe $u \in AP^0(\mathbb{E})$, et $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{K} = \overline{u(\mathbb{R})}$ est un compact, on considère $\delta = \delta(\mathcal{K}, \varepsilon)$ donnée par le lemme 2.2. Alors pour $v \in AP^0(\mathbb{E})$ qui satisfait $\|v - u\|_\infty \leq \delta$, on a $\|v(t) - u(t)\| \leq \delta$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et avec $u(t) \in \mathcal{K}$. Donc le lemme 2.2 implique qu'on a

$$\|f(t, v(t)) - f(t, u(t))\| \leq \varepsilon,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$; on passe au sup sur t et on obtient

$$\|N_f(v) - N_f(u)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

□

Théorème 2.2 ([11], théorème 5.1). *Soit $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ tel que $D_x f(t, x)$ existe pour tout $(t, x) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}$ (au sens de Fréchet) et tel que $D_x f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$. Alors l'opérateur de superposition $N_f(u) := [t \mapsto f(t, u(t))]$ de $AP^0(\mathbb{E})$ sur $AP^0(\mathbb{F})$ est de classe C^1 , et on a*

$$DN_f(u).v = [t \mapsto D_x f(t, u(t)).v(t)], \quad \text{pour chaque } u, v \in AP^0(\mathbb{E}).$$

Démonstration du théorème 2.2

Puisque $D_x f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$, et par l'utilisation du théorème 2.1 on a :

$$N_{D_x f} \text{ est continu de } AP^0(\mathbb{E}) \text{ dans } AP^0(\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})). \quad (2.1)$$

On fixe $u \in AP^0(\mathbb{E})$ et on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad L(t) := D_x f(t, u(t)). \quad (2.2)$$

$L \in AP^0(\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$ d'après (2.1). La fonction F de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ dans \mathbb{F} , donnée par

$$F(t, z) := L(t)z, \quad (2.3)$$

est dans $APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$. En effet, puisque $F = B \circ (L \circ pr_1, pr_2)$ où B est l'opérateur défini de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \times \mathbb{E}$ dans \mathbb{F} par $B(T, x) = T.x$ et pr_1, pr_2 les deux projections sur $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, alors F est continu comme une composition d'opérateurs continus. On fixe \mathcal{K} compact dans \mathbb{E} et $\varepsilon > 0$. Soit $\rho > 0$ tel que $\|x\| \leq \rho$ pour tout $x \in \mathcal{K}$. et puisque L est presque-périodique, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\exists \ell = \ell\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right), \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \exists \tau \in [r, r + \ell] \text{ tels que } \|L(t + \tau) - L(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Par conséquent on a

$$\|F(t + \tau, x) - F(t, x)\| \leq \|L(t + \tau) - L(t)\| \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \rho = \varepsilon,$$

d'où $F \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$. D'après le lemme 2.1 on a

$$\forall v \in AP^0(\mathbb{E}) \quad \Lambda.v := [t \mapsto D_x f(t, u(t))v(t)] \in AP^0(\mathbb{F}). \quad (2.4)$$

D'après le théorème de la moyenne ([24], p.164), on a, pour tout $v \in AP^0(\mathbb{E})$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \|f(t, u(t) + v(t)) - f(t, u(t)) - D_x f(t, u(t))v(t)\| \\ & \leq \sup_{\varsigma \in]u(t), u(t)+v(t)[} \|D_x f(t, \varsigma) - D_x f(t, u(t))\| \cdot \|v(t)\|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

On pose $\mathcal{K} = \overline{u(\mathbb{R})}$, on applique le lemme 2.2, et on obtient : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\mathcal{K}, \varepsilon)$ tels que pour tout $x \in \mathcal{K}$ et pour tout $z \in \mathbb{E}$, si $\|x - z\| \leq \delta$ alors $\|D_x f(t, x) - D_x f(t, z)\| \leq \varepsilon$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On fixe ε et on considère $v \in AP^0(\mathbb{E})$ tel que $\|v\|_\infty \leq \delta$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varsigma \in]u(t), u(t) + v(t)[$ on a $\|\varsigma - u(t)\| \leq \delta$ et alors

$$\|D_x f(t, \varsigma) - D_x f(t, u(t))\| \leq \varepsilon,$$

donc l'inégalité (2.5) implique :

$$\|f(t, u(t) + v(t)) - f(t, u(t)) - D_x f(t, u(t))v(t)\| \leq \varepsilon \|v(t)\|.$$

On passe au sup sur $t \in \mathbb{R}$ et on obtient

$$\|N_f(u + v) - N_f(u) - \Lambda v\|_\infty \leq \|v\|_\infty$$

pour $\|v\|_\infty \leq \delta$ donc N_f est Fréchet-différentiable, et

$$DN_f(u) \cdot v = [t \mapsto D_x f(t, u(t))v(t)]. \quad (2.6)$$

Il suffit de montrer la continuité de DN_f . Par l'utilisation de (2.1) et du théorème 2.1, on a : pour tout $u \in AP^0(\mathbb{E})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(u, \varepsilon)$ tel que, pour tout $u_1 \in AP^0(\mathbb{E})$, si $\|u - u_1\|_\infty \leq \eta$ alors $\|N_{D_x f}(u) - N_{D_x f}(u_1)\| \leq \varepsilon$. Donc si on fixe $u \in AP^0(\mathbb{E})$ et $\varepsilon > 0$, alors pour $v \in AP^0(\mathbb{E})$ tel que $\|v\|_\infty \leq 1$ on a

$$\begin{aligned} \|D_x f(t, u(t))v(t) - D_x f(t, u_1(t))v(t)\| & \leq \|D_x f(t, u(t)) - D_x f(t, u_1(t))\| \cdot \|v(t)\| \\ & \leq \|N_{D_x f}(u) - N_{D_x f}(u_1)\| \cdot \|v\|_\infty \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En passant au sup sur \mathbb{R} on obtient

$$\|DN_f(u) \cdot v - DN_f(u_1) \cdot v\|_\infty \leq \varepsilon,$$

et si on passe au sup sur $v \in AP^0(\mathbb{E})$ tel que $\|v\|_\infty \leq 1$, on obtient

$$\|DN_f(t, u(t)) - DN_f(t, u_1(t))\|_\infty \leq \varepsilon;$$

d'où la continuité de DN_f . □

Remarque 2.1 Si $\phi \in C^0(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, et si on pose $f(t, x) = \phi(x)$, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$, alors on a $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Corollaire 2.1 ([11], p. 56).

Soit $n \in \mathbb{N}_*$ et $\phi \in C^n(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors l'opérateur de superposition $N_\phi : u \mapsto \phi \circ u$ est de classe C^n de $AP^0(\mathbb{E})$ sur $AP^0(\mathbb{F})$ et pour tout $u, v_1, \dots, v_n \in AP^0(\mathbb{E})$, on a

$$D^n N_\phi(u).(v_1, \dots, v_n) = [t \mapsto D^n \phi(u(t)).(v_1(t), \dots, v_n(t))].$$

Lorsque $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est presque-périodique en t uniformément par rapport à x , on note

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &:= \{\lambda \in \mathbb{R}; \mathcal{M}\{f(t, x)e^{-i\lambda t}\}_t \neq 0\}, \\ &:= \{\lambda \in \mathbb{R}; \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t, x)e^{-i\lambda t} dt \neq 0\}. \end{aligned}$$

Le module de f , noté $Mod(f)$ est le sous-groupe de \mathbb{R} engendré par $\Lambda(f)$.

3 Existence d'une solution presque-périodique pour certains types d'équations différentielles.

Dans cette partie, on rappelle des théorèmes sur l'existence et l'unicité d'une solution presque-périodique de divers types d'équations, comme les équations différentielles non linéaires $\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$, $y' = Ay + q(t, y, \varepsilon)$ et l'équation $X'(t) = M(t, X(t))$, et aussi les équations forcées $x''(t) + \frac{d}{dt}(\nabla F(x(t))) + Cx(t) = e(t)$, $x''(t) + [b(t) + B(t)]x'(t) - F(t, x(t)) = e(t)$.

Théorème 3.1 (Bohr-Neugebauer) ([40], p. 207).

Si A est une matrice constante dont les valeurs propres sont toutes à partie réelle non nulle, f est une fonction vectorielle continue presque-périodique, alors l'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

possède une solution presque-périodique unique x , et il existe un nombre α qui ne dépend que de A tel que :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| \leq \alpha \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|.$$

Théorème 3.2 (A.I. Perov) [37].

Soit la fonction $M : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ à valeurs dans un espace de Hilbert H , continue par rapport à $t \in \mathbb{R}$ et satisfaisant :

(1) La condition de Lipschitz par rapport à $X \in H$:

$$\|M(t, X_1) - M(t, X_2)\| \leq k\|X_1 - X_2\|. \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall X_1, X_2 \in H$$

(2) $\forall t \in \mathbb{R}; \forall X_1, X_2 \in H$,

$$\langle M(t, X_1) - M(t, X_2) | A(X_1 - X_2) \rangle \geq \theta \|X_1 - X_2\|^2,$$

où A est un opérateur borné auto-adjoint et θ est une constante positive.

Alors, si $t \mapsto \|M(t, 0)\|$ est bornée, l'équation

$$X'(t) = M(t, X(t)),$$

possède une unique solution bornée. Si de plus M est périodique par rapport à t ($M(t+T, X) = M(t, X)$) ou uniformément presque-périodique pour tout compact $K \subseteq H$, alors cette solution bornée est T -périodique ou presque-périodique, respectivement.

Théorème 3.3 (P. Cieutat) [17].

Sur le système de Liénard

$$x''(t) + \frac{d}{dt}(\nabla F(x(t))) + Cx(t) = e(t). \quad (3.1)$$

On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

(A) C est un opérateur linéaire symétrique et inversible de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n .

(B) ∇F est le gradient d'une fonction convexe de classe C^2 de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} .

(C) $\exists c_* > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \nabla F(x_1) - \nabla F(x_2) | x_1 - x_2 \rangle \geq c_* \|x_1 - x_2\|^2.$$

(D) $\exists k_* > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\|\nabla F(x_1) - \nabla F(x_2)\| \leq k_* \|x_1 - x_2\|.$$

Si $e(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ alors il existe une unique solution x_0 presque-périodique de l'équation (3.1). De plus, $x_0 \in AP^2(\mathbb{R}^n)$ et $Mod(x_0) \subset Mod(e)$.

Théorème 3.4 (J.K. Hale) ([29], p.123)

Soit l'équation

$$y' = Ay + q(t, y, \varepsilon), \quad (3.2)$$

où ε est un paramètre, y, q des fonctions vectorielles et A une matrice constante ($n \times n$). On suppose les conditions suivantes vérifiées :

1. Les valeurs propres de la matrice A sont toutes à partie réelle non nulle.

2. q est une fonction presque-périodique en t uniformément par rapport à (y, ε) pour $\|y\| \leq R$, ($R > 0$) et $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, ($\varepsilon_0 > 0$).
3. Il existe deux fonctions $\eta(\varepsilon, \rho)$ et $M(\varepsilon)$ continues et croissantes de ε, ρ pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $0 \leq \rho \leq R$ et tel que : $\eta(0, 0) = 0$, $M(0) = 0$ et

$$\|q(t, y_1, \varepsilon) - q(t, y_2, \varepsilon)\| \leq \eta(\varepsilon, \rho)\|y_1 - y_2\|$$

$$q(t, 0, \varepsilon) \leq M(\varepsilon),$$

pour $t \in \mathbb{R}$, $\|y_1\| \leq \rho$, $\|y_2\| \leq \rho$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Alors, il existe $\delta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ tels que :

1. Pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$, il existe une solution $y^*(\cdot, \varepsilon)$ de (3.2) qui est presque-périodique.
2. $y^*(t, \varepsilon)$ est continue en ε dans $]0, \varepsilon_1]$.
3. $y^*(t, \varepsilon)$ converge uniformément vers 0 pour $\varepsilon \rightarrow 0$.
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour $0 \leq \|y\| \leq \delta$, y^* est l'unique solution de (3.2).

Théorème 3.5 [7] (J. Blot, P. Cieutat, J. Mawhin)

Soit l'équation différentielle forcée suivante

$$x''(t) + [b(t)I + B(t)]x'(t) - F(t, x(t)) = e(t), \quad (3.3)$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sous les conditions :

1. $\exists c_* > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(F(t, y) - F(t, x) - \frac{1}{4}B(t)B^*(t)(y - x)) \geq c_*|y - x|^2$$

où $B^*(t)$ est le transposé de $B(t)$

2. $e \in AP^0(\mathbb{R}^n)$
3. F est une fonction presque-périodique en t uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$
4. $b \in AP^0(\mathbb{R})$
5. $B \in AP^0(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$,

il existe une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \cap AP^0(\mathbb{R}^n)$, de l'équation (3.3) dans \mathbb{R} . En plus on a $u \in AP^2(\mathbb{R}^n)$, et si b et B sont des constantes on a $Mod(u) \subset Mod(F + e)$.

4 Fonctions presque-automorphes

Définition 4.1 [14] Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite presque-automorphe (p.a.) si pour toute suite de nombres réels $(s_n)_n$ on peut extraire une sous-suite $(s'_n)_n$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t + s'_n) = g(t) \quad \text{est bien définie pour tout } t \in \mathbb{R},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t - s'_n) = f(t) \quad \text{pour chaque } t \in \mathbb{R}.$$

On note par $AA^0(\mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions presque-automorphes de \mathbb{R} dans \mathbb{E} . On a $AA^0(\mathbb{E}) \subset BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, et $AA^0(\mathbb{E})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$AA^k(\mathbb{E}) := \{f \in AA^0(\mathbb{E}) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in AA^0(\mathbb{E})\}.$$

Proposition 4.1 $AA^k(\mathbb{E})$, muni de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathbb{E}} + \sum_{i=1}^k \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d^i f}{dt^i}(t) \right\|_{\mathbb{E}},$$

est un espace de Banach.

Propriétés 4.1 ([36], p. 13). Si $f, f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ sont des fonctions presque-automorphes, alors on a :

- $f_1 + f_2$ est presque-automorphe.
- cf est presque-automorphe quand $c \in \mathbb{R}$.
- $\tau_a(f)(t) \equiv f(t + a)$ est presque-automorphe pour tout a fixé dans \mathbb{R} .
- $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty$ c'est-à-dire : f est une fonction bornée.
- L'image $R_f = \{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compacte dans \mathbb{E} .

5 Fonctions presque-automorphes avec un paramètre

Définition 5.1 ([11], p. 45). Une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est dite presque-automorphe en t uniformément par rapport à x sur tout compact K dans \mathbb{E} si

- (1) $f(\cdot, x) \in AA^0(\mathbb{F})$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.
- (2) pour tout compact $K \subset \mathbb{E}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ satisfaisant $\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \varepsilon$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $y, z \in K$ tels que $\|y - z\| < \delta$.

On note par $AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'ensemble des fonctions presque-automorphes dans t uniformément pour x .

Lemme 5.1 ([11], lemme 9.4) Soit $f \in AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $u \in AA^0(\mathbb{E})$. Alors on a $[t \mapsto f(t, u(t))] \in AA^0(\mathbb{F})$.

Pour $f \in AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ et par le lemme 5.1 on peut donner la définition d'opérateur de superposition suivant :

$$N_f : AA^0(\mathbb{E}) \longrightarrow AA^0(\mathbb{F}), \quad N_f(u) := [t \mapsto f(t, u(t))].$$

Théorème 5.1 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ une fonction. Alors on a l'équivalence entre les assertions suivantes :

- (i) $f \in AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$.
- (ii) L'opérateur de superposition N_f est continu de $AA^0(\mathbb{E})$ dans $AA^0(\mathbb{F})$.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème on donne d'abord le lemme suivant.

Lemme 5.2 ([11], lemme 9.6). Soit $f \in AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors on a : pour tout compact \mathcal{K} dans \mathbb{E} et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\mathcal{K}, \varepsilon)$ tels que pour tout $x \in \mathcal{K}$ et pour tout $z \in \mathbb{E}$, si $\|x - z\| \leq \delta$ alors $\|f(t, x) - f(t, z)\| \leq \varepsilon$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration du théorème 5.1

(i \Rightarrow ii).

La démonstration de cette implication est la même que celle du théorème 2.1, si on remplace l'utilisation du lemme 2.2 par le lemme 5.2.

(ii \Rightarrow i).

(1) Pour tout $x \in \mathbb{E}$, on considère la fonction constante $u_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ donnée par $u_x(t) = x$. Alors on a $u_x \in AA^0(\mathbb{E})$, et puisque $N_f(AA^0(\mathbb{E})) \subset AA^0(\mathbb{F})$, on obtient donc $f(\cdot, x) = N_f(u_x) \in AA^0(\mathbb{F})$.

(2) Puisque la fonction

$$U : \mathbb{E} \rightarrow AA^0(\mathbb{E}), \quad U(x) = u_x,$$

est continue, et puisque N_f est continu, alors la composition $N_f \circ U$ est aussi continue sur \mathbb{E} . Alors par l'utilisation du théorème de Heine, pour tout compact \mathcal{K} , la fonction $[x \mapsto f(\cdot, x) = N_f \circ U(x)]$ est uniformément continue sur \mathcal{K} .

Donc de (1) et (2) on a $f \in AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Théorème 5.2 ([11], p. 67). Soit $f \in AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ tel que $D_x f(t, x)$ existe pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ (au sens de Fréchet) et tel que $D_x f \in AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$. Alors l'opérateur de superposition $N_f(u) := [t \mapsto f(t, u(t))]$ de $AA^0(\mathbb{E})$ dans $AA^0(\mathbb{F})$ est Fréchet continûment différentiable, et on a

$$DN_f(u).v = [t \mapsto D_x f(t, u(t)).v(t)], \quad \text{pour chaque } u, v \in AA^0(\mathbb{E}).$$

La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème 2.2 en remplaçant l'utilisation du théorème 2.1 par le théorème 5.1, et par le remplacement de l'utilisation du Lemme 2.1 par le Lemme 5.1.

Remarque 5.1 Si $\phi \in C^0(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et si on pose $f(x, t) = \phi(x)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}$, alors $f \in AAU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$.

6 Existence et unicité d'une solution "mild" presque-automorphe pour l'équation différentielle non homogène.

On a besoin d'abord de quelques définitions importantes avant de donner le théorème d'existence et d'unicité d'une solution mild presque-automorphe de l'équation différentielle non homogène

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

Définition 6.1 Une famille à un paramètre $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach \mathbb{E} est un semi-groupe fortement continu (ou C_0 -semi-groupe) si

- (i) $T(0) = I_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$
- (ii) $\forall (s, t) \geq 0, T(s+t) = T(s) \circ T(t)$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{E}, \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, ce qui implique, $\forall x \in \mathbb{E}$ la fonction $t \mapsto T(t)x$ est continue de $[0, +\infty)$ sur \mathbb{E} .

Définition 6.2 Le C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable s'il existe $K > 0, w < 0$ tel que

$$\|T(t)\| \leq Ke^{wt}, \quad \text{pour chaque } t \geq 0.$$

Définition 6.3 [36]. On définit le générateur infinitésimal A d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ comme l'opérateur $A : D(A) \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ où :

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{E}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$\forall x \in D(A), Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Dans le cas où A est borné alors

$$T(t) = e^{tA} = \sum_0^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Définition 6.4 [36]. *La fonction x continûment dérivable et telle que $x(t) \in D(A)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ est dite solution classique de l'équation (6.1) si elle vérifie cette dernière.*

Définition 6.5 [36]. *La fonction $x \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ donnée par*

$$x(t) = T(t-a)x(a) + \int_a^t T(t-s)f(s)ds,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \geq a$, est dite solution mild de (6.1).

Il est clair que toute solution classique est une solution mild. L'inverse n'est pas toujours vrai.

Théorème 6.1 ([36], p.56). *Soit $f \in AA^0(\mathbb{E})$ et A un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe exponentiellement stable, alors l'équation (6.1) possède une unique solution mild presque-automorphe sur \mathbb{R} .*

7 Fonctions asymptotiquement presque-périodiques (respectivement asymptotiquement presque-automorphes)

On note par $BC(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ vers \mathbb{F} . On considère les deux espaces suivants :

$$C_0(\mathbb{E}) := \{u \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0\},$$

$C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}) := \{u \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|u(t, x)\| = 0$ uniformément pour tout compact dans $\mathbb{E}\}$.

Définition 7.1 . [35] *Une fonction continue et bornée $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite asymptotiquement presque-périodique (respectivement asymptotiquement presque-automorphe) si u se décompose comme suit :*

$$u = u_1 + u_2$$

où u_1 est presque-périodique (respectivement presque-automorphe) et $u_2 \in C_0(\mathbb{E})$.

On note par $AAP^0(\mathbb{E})$ (respectivement $AAA^0(\mathbb{E})$) l'ensemble des fonctions asymptotiquement presque-périodiques (respectivement asymptotiquement presque-automorphes). $AAP^0(\mathbb{E})$ (respectivement $AAA^0(\mathbb{E})$) muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Définition 7.2 . [35] Une fonction continue et bornée $u : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ est dite asymptotiquement presque-périodique (respectivement asymptotiquement presque'automorphe) en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} si u se décompose comme suit :

$$u = u_1 + u_2$$

où u_1 est presque-périodique (respectivement presque'automorphe) en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} et $u_2 \in C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$.

On note par $AAPU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ (respectivement $AAAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$) l'ensemble des fonctions asymptotiquement presque-périodiques (respectivement asymptotiquement presque'automorphes) en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} .

Remarque 7.1 La décomposition de u dans les deux définitions 7.1 et 7.2 est unique.

Théorème 7.1 ([11], Lemme 8.3). Soit f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ vers \mathbb{F} telle que $f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x)$ et telle que f est une fonction asymptotiquement presque-périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} alors pour $x \in AAP^0(\mathbb{E})$ on a $f(\cdot, x(\cdot)) \in AAP^0(\mathbb{F})$.

Théorème 7.2 ([34], Théorème 2.3). Soit f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ vers \mathbb{F} telle que $f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x)$ et telle que f est une fonction asymptotiquement presque-automorphe en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} et on a $f_2(t, x)$ est uniformément continue sur tout sous ensemble borné K de \mathbb{E} , alors pour $x \in AAA^0(\mathbb{E})$ on a $f(\cdot, x(\cdot)) \in AAA^0(\mathbb{F})$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$AAP^k(\mathbb{E}) := \{f \in AAP^0(\mathbb{E}) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in AAP^0(\mathbb{E})\}$$

$$AAA^k(\mathbb{E}) := \{f \in AAA^0(\mathbb{E}) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in AAA^0(\mathbb{E})\}.$$

8 Fonctions pseudo presque-périodiques (respectivement pseudo presque'automorphes)

Soit l'espace

$$P_0(\mathbb{E}) := \{u \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|u(s)\| ds = 0\}.$$

$P_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}) := \{u \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}) : u(\cdot, x) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{F}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{E} \text{ et}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|u(s, x)\| ds = 0 \text{ uniformément pour } x \in \mathbb{E}\}$$

Définition 8.1 . [21], [35] Une fonction continue et bornée $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque-périodique (respectivement pseudo presque'automorphe) si u se décompose comme suit :

$$u = u_1 + u_2$$

où u_1 est presque-périodique (respectivement presque'automorphe) et $u_2 \in P_0(\mathbb{E})$. La fonction u_1 est appelée la partie presque-périodique (respectivement presque'automorphe) de u et u_2 est appelée la perturbation ergodique de la fonction u .

On note par $PAP^0(\mathbb{E})$ (respectivement $PAA^0(\mathbb{E})$) l'ensemble des fonctions pseudo presque-périodiques (respectivement pseudo presque'automorphes). $PAP^0(\mathbb{E})$ (respectivement $PAA^0(\mathbb{E})$), muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.

Définition 8.2 . [21], [35] Une fonction continue et bornée $u : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est dite pseudo presque-périodique (respectivement pseudo presque'automorphe) en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} si u se décompose comme suit :

$$u = u_1 + u_2$$

où u_1 est presque-périodique (respectivement presque'automorphes) en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} et $u_2 \in P_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$.

On note par $PAPU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ (respectivement $PAAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$) l'ensemble des fonctions pseudo presque-périodiques (respectivement pseudo presque'automorphes) en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} .

Remarque 8.1 La décomposition de u dans les deux définitions 8.1 et 8.2 est unique.

Dans [44] le théorème donné par Zhang pour la composition pour les fonctions pseudo presque-périodiques dans un espaces de Banach de dimension finie, est généralisé par Amir et Maniar dans [2] pour le cas d'un espace de Banach de dimension infinie.

Théorème 8.1 ([2], Théorème 5). Soit f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ vers \mathbb{F} pseudo presque-périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} tel que f vérifie la condition de Lipschitz :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\mathbb{F}} \leq k\|x - y\|_{\mathbb{E}}, \text{ for all } x, y \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{R}.$$

alors pour $x \in PAP^0(\mathbb{E})$ on a $f(\cdot, x(\cdot)) \in PAP^0(\mathbb{F})$.

Théorème 8.2 ([34], Théorème 2.4). Soit f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ vers \mathbb{F} tel que $f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x)$ et tel que f est une fonction pseudo presque-automorphe en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} et on a

- $f(t, x)$ est uniformément continue sur tout sous-ensemble borné K de \mathbb{E}
- $f_2(t, x)$ est uniformément continue sur tout sous-ensemble borné K de \mathbb{E}

alors pour $x \in PAA^0(\mathbb{E})$ on a $f(\cdot, x(\cdot)) \in PAA^0(\mathbb{F})$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$PAP^k(\mathbb{E}) := \{f \in PAP^0(\mathbb{E}) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in PAP^0(\mathbb{E})\}$$

$$PAA^k(\mathbb{E}) := \{f \in PAA^0(\mathbb{E}) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in PAA^0(\mathbb{E})\}.$$

9 Fonctions pseudo presque-périodiques avec poids (respectivement pseudo presque-automorphes avec poids)

Soit $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}, (0, \infty))$ l'ensemble des toutes les fonctions $\rho : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ qui sont positives et localement Lebesgue-intégrables sur \mathbb{R} .

Pour $r > 0$, soit

$$m(r, \rho) := \int_{-r}^{+r} \rho(x) dx, \quad \text{pour tout } \rho \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}, (0, \infty)),$$

et on définit

$$\mathcal{U}_\infty := \{\rho \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}, (0, \infty)) : \lim_{r \rightarrow \infty} m(r, \rho) = \infty\}$$

For $\rho \in \mathcal{U}_\infty$ on considère

$$P_0(\mathbb{E}, \rho) := \{u \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{m(r, \rho)} \int_{-r}^{+r} \|u(s)\| \rho(s) ds = 0\}.$$

$P_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}, \rho) := \{u \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}) : u(\cdot, x) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{F}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{E}$

$$\text{et } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{m(r, \rho)} \int_{-r}^{+r} \|u(t, s)\| \rho(s) ds = 0; \text{ uniformément pour } x \in \mathbb{E}\}$$

Définition 9.1 . [22], [12] Une fonction continue et bornée $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque-périodique avec poids (respectivement pseudo presque-automorphe avec poids) si u se décompose comme suit :

$$u = u_1 + u_2$$

où u_1 est presque-périodique (respectivement pseudo-presqu'automorphe) et $u_2 \in P_0(\mathbb{E}, \rho)$.

On note par $WPAP^0(\mathbb{E}, \rho)$ (respectivement $WPAA^0(\mathbb{E}, \rho)$) l'ensemble des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids (respectivement pseudo pseudo-presqu'automorphes avec poids).

Définition 9.2 . [22], [12] Une fonction continue et bornée $u : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est dite pseudo presque-périodique avec poids (respectivement pseudo pseudo-presqu'automorphe avec poids) en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} si u se décompose comme suit :

$$u = u_1 + u_2$$

où u_1 est presque-périodique (respectivement pseudo-presqu'automorphe) en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} et $u_2 \in P_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}, \rho)$.

On note par $WPAPU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}, \rho)$ (respectivement $WPAAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}, \rho)$) l'ensemble des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids (respectivement pseudo pseudo-presqu'automorphes avec poids).

Remarque 9.1 La décomposition de u dans les deux définitions 9.1 et 9.2 n'est pas unique.

Soit

$$\mathcal{U}_T := \{\rho \in \mathcal{U}_\infty : \rho \text{ satisfait } (H)\},$$

où (H) est la condition suivante due à : [8]

(H) Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, il existe une constante $\beta \in (0, \infty)$ et un intervalle borné I tel que

$$\rho(t + \tau) \leq \beta \rho(t) \text{ presque pour tout } t \in \mathbb{R} \setminus I.$$

Soit μ une mesure positive sur \mathbb{R} . La fonction u est dite μ -pseudo presque périodique (respectivement μ pseudo pseudo-presqu'automorphe) si $u = g + \phi$, avec g est une fonction presque-périodique (respectivement pseudo-presqu'automorphe) et ϕ satisfait :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu[-r, r]} \int_{[-r, r]} \|\phi(s)\| d\mu(s) = 0,$$

où $\mu[-r, r]$ est la mesure de $[-r, r]$. On peut remarquer que une fonction pseudo presque périodique avec poids (respectivement pseudo pseudo-presqu'automorphe avec poids) est une fonction μ - pseudo presque périodique (respectivement μ - pseudo pseudo-presqu'automorphe), où la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et sa dérivée de Radon-Nikodym

par rapport à la mesure de Lebesgue est $\rho = \frac{d\mu}{dt}$. ρ satisfait (H) si et seulement si la mesure μ satisfait :

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, il existe $\beta > 0$ est un intervalle borné I tel que

$$\mu(\{a + \tau : a \in K\}) \leq \beta\mu(K),$$

pour tout $K \in \mathfrak{B}$ (\mathfrak{B} est la tribu de Lebesgue de \mathbb{R}), satisfait $K \cap I = \emptyset$, Remarque 3.1 [8].

Lemme 9.1 *Soit $\rho \in \mathcal{U}_T$. Alors on a*

$$WPAP^0(\mathbb{E}, \rho) := AP^0(\mathbb{E}) \oplus P_0(\mathbb{E}, \rho),$$

(respectivement $WPAA^0(\mathbb{E}, \rho) := AA^0(\mathbb{E}) \oplus P_0(\mathbb{E}, \rho)$). De plus on a

$$WPAPU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}, \rho) := APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}) \oplus P_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}, \rho),$$

(respectivement $WPAAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}, \rho) := AAU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}) \oplus P_0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F}, \rho)$).

Pour la démonstration voir (Corollaire 2.29 [9]) pour le cas $WPAP^0(\mathbb{E}, \rho)$ et (Théorème 4.7 [8]) pour le cas $WPAA^0(\mathbb{E}, \rho)$.

Lemme 9.2 *Soit $\rho \in \mathcal{U}_T$. Alors $(WPAP^0(\mathbb{E}, \rho), \|\cdot\|_\infty)$ (respectivement $(WPAA^0(\mathbb{E}, \rho), \|\cdot\|_\infty)$) est un espace de Banach.*

Pour la démonstration voir (Corollaire 2.31 [9]) pour le cas $WPAP^0(\mathbb{E}, \rho)$ et (Théorème 4.9 [8]) pour le cas $WPAA^0(\mathbb{E}, \rho)$.

Théorème 9.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ vers \mathbb{F} pseudo presque-périodique avec poids en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} tel que f vérifie la condition de Lipschitz :*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\mathbb{F}} \leq k\|x - y\|_{\mathbb{E}}, \text{ for all } x, y \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{R}.$$

alors pour $x \in WPAP^0(\mathbb{E}, \rho)$ on a $f(\cdot, x(\cdot)) \in WPAP^0(\mathbb{F}, \rho)$.

Pour la démonstration voir ([22], Théorème 3.4)

Théorème 9.2 *Soit $\rho \in \mathcal{U}_\infty$ et f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ vers \mathbb{F} tel que $f(t, x) = f_1(t, x) + f_2(t, x)$ et tel que f est une fonction pseudo presque-automorphe avec poids en t uniformément par rapport à x sur tout compact de \mathbb{E} et on a*

- $f(t, x)$ est uniformément continue sur tout sous ensemble borné K de \mathbb{E}
- $f_2(t, x)$ est uniformément continue sur tout sous ensemble borné K de \mathbb{E}

alors pour $x \in WPAA^0(\mathbb{E}, \rho)$ on a $f(\cdot, x(\cdot)) \in WPAA^0(\mathbb{F}, \rho)$.

Pour la démonstration voir ([12], Théorème 2.10)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$WPAP^k(\mathbb{E}, \rho) := \{f \in WPAP^0(\mathbb{E}, \rho) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in WPAP^0(\mathbb{E}, \rho)\}$$

$$WPAA^k(\mathbb{E}, \rho) := \{f \in WPAA^0(\mathbb{E}, \rho) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}); \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in WPAA^0(\mathbb{E}, \rho)\}.$$

Chapitre 2

PETITES OSCILLATIONS PRESQU'AUTOMORPHES ET PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION DE LIÉNARD FORCÉE.

1 Introduction

Soit P un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On fixe $(e_p)_{p \in P}$ qui est une famille de fonctions presque-périodiques ou presqu'automorphes. On considère la famille d'équations de Liénard forcées suivantes :

$$(\mathcal{E}, p) \quad x''(t) + f(x(t), p).x'(t) + g(x(t), p) = e_p(t).$$

À partir de $0 \in P$ pour lequel $e_0 = 0$ et pour lequel la fonction nulle est une solution de (\mathcal{E}, p) , on donne des conditions pour établir le résultat suivant : pour tout p appartenant à un voisinage de 0 , il existe une solution x_p presque-périodique (respectivement presqu'automorphe) de (\mathcal{E}, p) où e_p est presque-périodique (respectivement presqu'automorphe) et la dépendance $p \mapsto e_p$ est continûment différentiable. Alors ce qui implique que x_p est uniformément convergente vers 0 quand p converge vers 0 .

On considère aussi la famille d'équations suivantes.

$$(\mathcal{F}, e) \quad x''(t) + f_1(x(t)).x'(t) + g_1(x(t)) = e(t).$$

est un cas particulier de (\mathcal{E}, p) en prenant P l'espace des fonctions presque-périodiques (ou fonctions presqu'automorphes) et en posant $f(x, p) = f_1(x)$,

$g(x, p) = g_1(x)$ et $p \mapsto e_p$ est l'application identité.

Enfin on considère la famille d'équations :

$$(\mathcal{G}, e, q) \quad x''(t) + f_2(x(t), q).x'(t) + g_2(x(t), q) = e(t)$$

où q appartient à l'espace de Banach Q , est un cas particulier de (\mathcal{E}, p) en prenant $p = (e, q)$, $f(x, e, q) = f_2(x, q)$, $g(x, e, q) = g_2(x, q)$ et $e_{(e, q)} = e$.

Sur (\mathcal{F}, e) et (\mathcal{G}, e, q) on obtient les mêmes résultats obtenues sur (\mathcal{E}, p) .

Notons que (\mathcal{E}, p) ne sont pas des cas particuliers des équations différentielles $x''(t) + [b(t)I + B(t)]x'(t) + F(t, x(t)) = e(t)$, puisque le terme $[b(t)I + B(t)]$ ne contient pas $x(t)$, et notons que (\mathcal{E}, p) ne sont pas des cas particuliers des équations différentielles $x''(t) + \frac{d}{dt}\nabla F(x(t)) + Cx(t) = e(t)$, puisque le C est linéaire et g n'est pas linéaire. Notons aussi que (\mathcal{E}, p) ne sont pas des cas particuliers des équations différentielles $x'(t) = Ax(t) + q(t, x, \varepsilon)$ où A est une matrice constante non nulle. Maintenant nous décrivons le contenu de ce chapitre. Dans la section 2 nous précisons les notations des espaces de fonctions qui sont utilisés dans le chapitre et nous rappelons certaines de leurs propriétés. Dans la section 3 on formule les résultats principaux du chapitre. Dans la section 4 on donne la démonstration des théorèmes principaux.

2 Préliminaires

Pour X et Y deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(X, Y)$ est l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de X dans Y , et $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ est la norme des opérateurs :

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Pour $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, une solution p.p. (respectivement p.a.) d'une équation différentielle du second ordre $x''(t) = F(t, x(t), x'(t))$ est une fonction $x \in AP^2(X)$ (respectivement $AA^2(X)$) qui est une solution classique de l'équation différentielle.

Le lemme suivant généralise le théorème de Bohr-Neugebauer (Théorème 3.1 du chapitre 1) sur les solutions presque-automorphes.

Lemme 2.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que toutes ses valeurs propres ont une partie réelle différente de zéro. Alors, pour tout $h \in AA^0(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution presque-automorphe de l'équation différentielle*

$$u'(t) = Au(t) + h(t). \tag{2.1}$$

Démonstration

On note par $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ les valeurs propre de A , $\nu \leq n$. on fixe $h \in AA^0(\mathbb{R}^n)$.

Étape 1 :

Le cas où $\Re\lambda_k < 0$ pour tout $k = 1, \dots, \nu$.

Dans cette situation l'origine est un point foyer ([31] p. 145) pour le système dynamique

$$u' = Au$$

et par l'utilisation du théorème 1 de [31] (p. 145), il existe $K \in]0, \infty[$ et $\omega \in]0, \infty[$ tels que

$$\forall t \in [0, \infty[, \quad \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}} \leq K.e^{-t\omega}.$$

D'après la terminologie de la théorie des semi-groupes, cette dernière condition signifie que $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe exponentiellement stable. On remarque que : dire que u est une solution classique de (2.1) est équivalent à dire que u est une solution mild de (2.1) (au sens donné dans le chapitre 1) puisque le domaine de A est \mathbb{R}^n . Alors, le Théorème 6.1 du chapitre 1 assure l'existence d'une unique solution p.a. de (2.1).

Étape 2 :

Dans le cas où $\Re\lambda_k > 0$ pour tout $k = 1, \dots, \nu$.

u est une solution de (2.1) sur \mathbb{R} si et seulement si v est une solution sur \mathbb{R}^n de l'équation

$$v'(t) = -Av(t) - h(-t.) \tag{2.2}$$

où v est définie par

$$v(t) := u(-t).$$

Puisque les valeurs propre de $-A$ sont $-\lambda_1, \dots, -\lambda_\nu$. Et puisque $t \mapsto -h(-t)$ appartient à $AA^0(\mathbb{R}^n)$, et par l'application de la première étape sur le système dynamique (2.2), il existe une unique solution p.a. de (2.2), notée v . Donc la fonction u définie par

$$u(t) := v(-t),$$

est l'unique solution p.a. de (2.1).

Étape 3 : Dans le cas complexe.

On peut considérer le système complexe associé à (2.1).

$$z'(t) = Az(t) + \zeta(t), \quad z(t) \in \mathbb{C}^n, \zeta(t) \in \mathbb{C}^n. \tag{2.3}$$

Soit

$$z(t) = x(t) + i.y(t),$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont des solutions de (2.3). Puisque A est réel, x est une solution de 2.1 avec $h = \Re\zeta$, et y est une solution de 2.1 avec $h = \Im\zeta$.

Dans un premier temps on suppose que $\Re\lambda_k < 0$ pour tout $k = 1, \dots, \nu$. Quand $\zeta \in AA^0(\mathbb{C}^n)$, alors $\Re\zeta$ et $\Im\zeta$ appartiennent à $AA^0(\mathbb{R}^n)$, et par l'utilisation de la première étape, il existe une unique solution p.a. x de (2.1)

pour $h = \Re\zeta$ et il existe une unique solution p.a. y de (2.1) pour $h = \Im\zeta$, et donc $z := x + i.y$ est l'unique solution p.a. de (2.3).

Avec le même raisonnement, on utilise la deuxième étape pour le cas où $\Re\lambda_k > 0$ pour tout $k = 1, \dots, \nu$. On obtient pour tout $\zeta \in AA^0(\mathbb{C}^n)$ qu'il existe une unique solution a.p. de (2.3).

Étape 4 :

Dans le cas où il existe un nombre entier m tel que $1 \leq m < \nu$ satisfaisant

$$\Re\lambda_k < 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq m$$

et

$$\Re\lambda_k > 0 \text{ pour } m < k \leq \nu.$$

On note par $E(A, \lambda_j)$ le sous-espace spectral associé à λ_j . On pose comme dans ([31] p. 110)

$$E_- := E(A, \lambda_1) \oplus \dots \oplus E(A, \lambda_m)$$

et

$$E_+ := E(A, \lambda_{m+1}) \oplus \dots \oplus E(A, \lambda_\nu).$$

On a

$$\mathbb{C}^n = E_- \oplus E_+$$

avec

$$A(E_-) \subset E_- \text{ et } A(E_+) \subset E_+.$$

On note

$$A_- \in \mathcal{L}(E_-, E_-)$$

la restriction de A sur E_- , et on note

$$A_+ \in \mathcal{L}(E_+, E_+)$$

la restriction de A sur E_+ . Les valeurs propre de A_- ont des parties réelles négatives et les valeurs propres de A_+ ont des parties réelles positives.

Pour $h \in AA^0(\mathbb{R}^n)$ on peut considérer $h = h + i.0$, un élément de $AA^0(\mathbb{C}^n)$. On pose

$$h = h_- \oplus h_+$$

où $h_- \in AA^0(E_-)$ et $h_+ \in AA^0(E_+)$. Par l'utilisation de la troisième étape, il existe $z_- \in AA^1(E_-)$ l'unique solution p.a. de

$$z'_-(t) = A_- . z_-(t) + h_-(t),$$

et il existe $z_+ \in AA^1(E_+)$ l'unique solution p.a. de

$$z'_+(t) = A_+ . z_+(t) + h_+(t).$$

Alors $z := z_- \oplus z_+$ est l'unique solution p.a. de (2.3) avec $\zeta = h$, et donc $x := \Re z$ est l'unique solution p.a. de (2.1). \square

3 Résultats

D'abord on donne une liste d'hypothèses concernant l'équation (\mathcal{E}, p) .

- (A1) $f \in C^1(\mathbb{R} \times P, \mathbb{R})$ et $g \in C^1(\mathbb{R} \times P, \mathbb{R})$.
- (A2) $g(0, 0) = 0$.
- (A3) $p \mapsto e_p \in C^1(P, AP^0(\mathbb{R}))$ et $e_0 = 0$.
- (A4) $f(0, 0) \neq 0$ lorsque $f(0, 0)^2 < 4 \frac{\partial g(0,0)}{\partial x}$, et $\frac{\partial g(0,0)}{\partial x} \neq 0$ lorsque $f(0, 0)^2 \geq 4 \frac{\partial g(0,0)}{\partial x}$.
- (A5) $p \mapsto e_p \in C^1(P, AA^0(X))$ et $e_0 = 0$.

Sur les solutions p.p. de (\mathcal{E}, p) , on donne le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (A1-A4), il existe un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $AP^2(\mathbb{R})$, un voisinage \mathcal{V} de 0 dans P et une application $p \mapsto \underline{x}[p]$ de classe C^1 de \mathcal{V} dans \mathcal{U} qui satisfait les conditions suivantes :*

- (i) $\underline{x}[0] = 0$.
- (ii) Pour tout $p \in \mathcal{V}$, $\underline{x}[p]$ est une solution p.p. de (\mathcal{E}, p) .
- (iii) Si $x \in \mathcal{U}$ est une solution p.p. de (\mathcal{E}, p) avec $p \in \mathcal{V}$, alors $x = \underline{x}[p]$.

Sur les solutions p.a. de (\mathcal{E}, p) , on donne le résultat suivant :

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (A1-A2) et (A4-A5), il existe un voisinage \mathcal{U}_1 de 0 dans $AA^2(\mathbb{R})$, un voisinage \mathcal{V}_1 de 0 dans P et une application $p \mapsto \underline{x}_1[p]$ de classe C^1 de \mathcal{V}_1 dans \mathcal{U}_1 qui satisfait les conditions suivantes :*

- (i) $\underline{x}_1[0] = 0$.
- (ii) Pour tout $p \in \mathcal{V}_1$, $\underline{x}_1[p]$ est une solution p.a. de (\mathcal{E}, p) .
- (iii) Si $x \in \mathcal{U}_1$ est une solution p.a. de (\mathcal{E}, p) avec $p \in \mathcal{V}_1$, alors $x = \underline{x}_1[p]$.

Pour l'équation (\mathcal{F}, e) , la liste des hypothèses est :

- (A6) $f_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (A7) $g_1(0) = 0$.
- (A8) $f_1(0) \neq 0$ lorsque $f_1(0)^2 < 4g_1'(0)$, et $g_1'(0) \neq 0$ lorsque $f_1(0)^2 \geq 4g_1'(0)$.

Sur les solutions p.p. et p.a. de (\mathcal{F}, e) on donne le résultat suivant :

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses (A6-A8), il existe un voisinage \mathcal{W} de 0 dans $AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R})$), un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$) et une application $e \mapsto \underline{x}[e]$ de classe C^1 , de \mathcal{W} dans \mathcal{U} qui satisfont les conditions suivantes :*

- (i) $\underline{x}[0] = 0$.
- (ii) Pour tout $e \in \mathcal{W}$, $\underline{x}[e]$ est une solution p.p. (respectivement p.a.) de (\mathcal{F}, e) .

(iii) Si $x \in \mathcal{U}$ solution p.p. (respectivement a.a.) de (\mathcal{F}, e) avec $e \in \mathcal{W}$ dans $AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R})$), alors on a $x = \underline{x}[e]$.

Démonstration

D'abord, nous traitons le cas de p.p.. On pose $P := AP^0(\mathbb{R})$. On définit $f : \mathbb{R} \times AP^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(x, e) := f_1(x)$, et on définit $g : \mathbb{R} \times AP^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $g(x, e) := g_1(x)$. On définit $p \mapsto e_p$ comme l'opérateur identité de $AP^0(\mathbb{R})$ dans $AP^0(\mathbb{R})$. Alors (\mathcal{F}, e) devient (\mathcal{E}, p) .

L'hypothèse (A6) implique (A1), l'hypothèse (A7) implique (A2). Puisque l'opérateur identité est un C^1 -diffeomorphisme, alors l'hypothèse (A3) est vérifiée, et l'hypothèse (A8) implique (A4).

Alors on obtient la conclusion par l'utilisation de théorème 3.1. Le raisonnement est le même dans le cas de p.a. par l'utilisation du théorème 3.2 au lieu du théorème 3.1. \square

Les hypothèses pour l'équation (\mathcal{G}, e, q) sont les suivantes :

(A9) $f_2 \in C^1(\mathbb{R} \times Q, \mathbb{R})$ et $g_2 \in C^1(\mathbb{R} \times Q, \mathbb{R})$.

(A10) $g_2(0, 0) = 0$.

(A11) $f_2(0, 0) \neq 0$ lorsque $f_2(0, 0)^2 < 4 \frac{\partial g_2(0, 0)}{\partial x}$, et $\frac{\partial g_2(0, 0)}{\partial x} \neq 0$ lorsque $f_2(0, 0)^2 \geq 4 \frac{\partial g_2(0, 0)}{\partial x}$.

Sur les solutions p.p. et p.a. de l'équation (\mathcal{G}, e, q) , on donne le résultat suivant :

Corollaire 3.2 *Sous les hypothèses (A9-A11), il existe un voisinage \mathcal{W}_2 de 0 dans $AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R})$), un voisinage \mathcal{U}_2 de 0 dans $AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$), un voisinage \mathcal{V}_2 de 0 dans Q et une application $e \mapsto \underline{x}[e, q]$ de classe C^1 , de $\mathcal{W}_2 \times \mathcal{V}_2$ dans \mathcal{U}_2 qui satisfont :*

(i) $\underline{x}[0, 0] = 0$.

(ii) Pour tout $e \in \mathcal{W}_2$ dans $AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R})$) et pour tout $q \in \mathcal{V}_2$, $\underline{x}[e, q]$ est une solution p.p. (respectivement a.a.) de (\mathcal{G}, e, q) .

(iii) Si $x \in \mathcal{U}_2$ est une solution p.p. (respectivement a.a.) de (\mathcal{G}, e, q) avec $e \in \mathcal{W}_2$ dans $AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R})$) et $q \in \mathcal{V}_2$, alors on a $x = \underline{x}[e, q]$.

Démonstration

D'abord, on commence par le cas de p.p.. On pose $P := AP^0(\mathbb{R}) \times Q$. On définit $f : \mathbb{R} \times AP^0(\mathbb{R}) \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(x, e, q) := f_2(x, q)$, et on définit $g : \mathbb{R} \times AP^0(\mathbb{R}) \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $g(x, e, q) := g_2(x, q)$. On définit $(e, q) \mapsto e$ de $AP^0(\mathbb{R}) \times Q$ dans $AP^0(\mathbb{R})$ comme la projection de $AP^0(\mathbb{R}) \times Q$ sur le premier ensemble. Alors (\mathcal{G}, e, q) devient (\mathcal{E}, p) .

L'hypothèse (A9) implique (A1), l'hypothèse (A10) implique (A2), puisque l'opérateur de projection est linéaire et continu, alors il est de classe C^1 donc

(A3) est vérifiée. l'hypothèse (A11) implique (A4).

Alors on obtient la conclusion par l'utilisation du théorème 3.1. Le raisonnement est le même dans le cas p.a. par l'utilisation du théorème 3.2 au lieu du théorème 3.1. \square

4 Démonstration des théorèmes

On définit l'opérateur non linéaire $\Phi : AP^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$)

$$\Phi(x, p) := [t \mapsto x''(t) + f(x(t), p).x'(t) + g(x(t), p) - e_p(t)] \quad (4.1)$$

où $x \in AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$) et $p \in P$.

Il est facile de remarquer que, $x \in AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$) satisfait $\Phi(x, p) = 0$ si et seulement si x est une solution p.p. (respectivement p.a.) de (\mathcal{E}, p) .

Pour bien organiser notre démonstration des deux théorèmes (3.1 et 3.2), on va la découper en des lemmes avec leurs démonstrations pour assurer les hypothèses du théorème des fonctions implicites ([16], p. 61) sur $\Phi(x, p) = 0$ et donc l'existence et l'unicité d'une solution p.p (respectivement p.a) de (\mathcal{E}, p) .

Sous les hypothèses (A2) et (A3) (respectivement (A2) et (A5)), 0 est une solution p.p. (respectivement p.a.) de $(\mathcal{E}, 0)$, et alors on a l'égalité suivante :

$$\Phi(0, 0) = 0. \quad (4.2)$$

Lemme 4.1 *Sous les hypothèses (A1-A3) (respectivement (A1-A2) et (A5)), l'opérateur Φ est bien défini, et il est de classe C^1 de $AP^2(\mathbb{R}) \times P$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R}) \times P$). De plus la dérivée partielle de Φ par rapport à la première variable, au point $(x, p) = (0, 0)$, est donnée par*

$$D_x \Phi(0, 0).y = [t \mapsto y''(t) + f(0, 0).y'(t) + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}.y(t)]$$

où $y \in AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$).

Démonstration

Soit les opérateurs linéaires suivants :

- $\frac{d^2}{dt^2} : AP^2(\mathbb{R}) \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R}) \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) est défini par

$$\frac{d^2}{dt^2}x := x''. \quad (4.3)$$

Puisque

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2}x \right\|_{\infty} \leq \|x''\|_{\infty} + \|x'\|_{\infty} + \|x\|_{\infty},$$

on a

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} x \right\|_\infty \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur linéaire $\frac{d^2}{dt^2}$ est continu, donc de classe C^1 , et on a pour tout x, y dans $AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$)

$$D \frac{d^2}{dt^2} (x(\cdot))(y(\cdot)) = \frac{d^2}{dt^2} (y(\cdot))$$

– $\frac{d}{dt} : AP^1(\mathbb{R}) \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^1(\mathbb{R}) \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) est défini par

$$\frac{d}{dt} x := x'. \quad (4.4)$$

Puisque

$$\left\| \frac{d}{dt} x \right\|_\infty \leq \|x'\|_\infty + \|x\|_\infty,$$

on a

$$\left\| \frac{d}{dt} x \right\|_\infty \leq \|x\|_{BC^1}.$$

Alors l'opérateur linéaire $\frac{d}{dt}$ est continu, donc de classe C^1 , et on a pour tout x, y dans $AP^1(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^1(\mathbb{R})$)

$$D \frac{d}{dt} (x(\cdot))(y(\cdot)) = \frac{d}{dt} (y(\cdot))$$

– $\text{in}_1 : AP^2(\mathbb{R}) \rightarrow AP^1(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R}) \rightarrow AA^1(\mathbb{R})$) est défini par

$$\text{in}_1(x) := x. \quad (4.5)$$

Puisque

$$\|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty,$$

on a

$$\|x\|_{BC^1} \leq \|x\|_{BC^2},$$

d'où

$$\|\text{in}_1(x)\|_{BC^1} \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur linéaire in_1 est de classe C^1 , et on a, pour tout x, y dans $AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$)

$$D \text{in}_1(x(\cdot))(y(\cdot)) = \text{in}_1(y(\cdot)).$$

– $\text{in}_2 : AP^2(\mathbb{R}) \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R}) \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) est défini par

$$\text{in}_2(x) := x. \quad (4.6)$$

Puisque

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty,$$

on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_{BC^2},$$

d'où

$$\|\text{in}_2(x)\|_\infty \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur linéaire in_2 est de classe C^1 , et on a, pour tout x, y dans $AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$)

$$D\text{in}_2(x(\cdot))(y(\cdot)) = \text{in}_2(y(\cdot))$$

Donc on a,

$$\frac{d^2}{dt^2}, \frac{d}{dt}, \text{in}_1, \text{in}_2 \text{ sont de classe } C^1. \quad (4.7)$$

Maintenant nous définissons les opérateurs de Nemytski (dits aussi opérateurs de superposition) construits sur les fonctions f et g :

- $N_f : AP^0(\mathbb{R}) \times AP^0(P) \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$
(respectivement $AA^0(\mathbb{R}) \times AA^0(P) \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) défini par

$$N_f(x, p) := [t \mapsto f(x(t), p(t))], \quad (4.8)$$

- $N_g : AP^0(\mathbb{R}) \times AP^0(P) \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$
(respectivement $AA^0(\mathbb{R}) \times AA^0(P) \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) défini par

$$N_g(x, p) := [t \mapsto g(x(t), p(t))]. \quad (4.9)$$

Dans le cas de la presque-périodicité, d'après (A_1) et le corollaire 2.1 du chapitre 1, N_f et N_g sont de classe C^1 sur $AP^0(\mathbb{R}) \times AP^0(P) \equiv AP^0(\mathbb{R} \times P)$. Dans le cas presque'automorphe, si on pose

$$\hat{f}(x, p, t) := f(x, p) \text{ et } \hat{g}(x, p, t) := g(x, p) \text{ pour tout } (x, p, t) \in \mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$$

et par l'utilisation de la remarque 5.1 du chapitre 1, on obtient

$$\hat{f}, \hat{g} \in AAU(\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

et

$$D_{(x,p)}\hat{f}, D_{(x,p)}\hat{g} \in AAU(\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R} \times P, \mathbb{R})),$$

donc les fonctions \hat{f}, \hat{g} et $D_{(x,p)}\hat{f}, D_{(x,p)}\hat{g}$ satisfont les hypothèses du Théorème 5.2 du chapitre 1 pour lesquelles $N_{\hat{f}}$ et $N_{\hat{g}}$ sont de classe C^1 , donc N_f et N_g sont de classe C^1 . Alors on a la propriété :

$$N_f \text{ et } N_g \text{ sont de classe } C^1. \quad (4.10)$$

Dans le cas presque-périodique (respectivement presque'automorphe), le corollaire 2.1 du chapitre 1 (respectivement théorème 5.2 du chapitre 1) donne la formule de la différentielle de l'opérateur de Nemytski.

$$D_x N_f(x, p).y = [t \mapsto \frac{\partial f(x(t), p(t))}{\partial x}.y(t)] \quad (4.11)$$

$$D_x N_g(x, p).y = [t \mapsto \frac{\partial g(x(t), p(t))}{\partial x}.y(t)] \quad (4.12)$$

pour tous $x, y \in AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R})$) et pour tout $p \in AP^0(P)$ (respectivement $AA^0(P)$).

On peut assimiler le point $p \in P$ à la fonction constante $t \mapsto p$ qui appartient à $AP^0(P)$ (respectivement $AA^0(P)$), ça nous permet de considérer P comme un sous-espace vectoriel fermé de $AP^0(P)$ (respectivement $AA^0(P)$).

Donc on peut considérer les restrictions suivantes des opérateurs N_f et N_g :

- $S_f : AP^0(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) définie par

$$S_f(x, p) := [t \mapsto f(x(t), p)], \quad (4.13)$$

- $S_g : AP^0(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) définie par

$$S_g(x, p) := [t \mapsto g(x(t), p)], \quad (4.14)$$

où $x \in AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R})$) et $p \in P$.

Puisque la restriction d'une fonction de classe C^1 à un sous-espace de Banach est de classe C^1 , on a

$$S_f \text{ et } S_g \text{ sont de classe } C^1, \quad (4.15)$$

et les conséquences de (4.11) et (4.12) sont les formules suivantes :

$$D_x S_f(x, p).y = [t \mapsto \frac{\partial f(x(t), p)}{\partial x}.y(t)] \quad (4.16)$$

$$D_x S_g(x, p).y = [t \mapsto \frac{\partial g(x(t), p)}{\partial x}.y(t)] \quad (4.17)$$

pour tout $x, y \in AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^0(\mathbb{R})$) et pour tout $p \in P$.

Maintenant on considère les opérateurs suivants :

- $\pi_1 : AP^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AA^2(\mathbb{R})$) défini par

$$\pi_1(x, p) := x \quad (4.18)$$

On a

$$\|x\|_{BC^2} \leq \sup(\|x\|_{BC^2}, \|p\|_P),$$

donc

$$\|\pi_1(x, p)\|_{BC^2} \leq \|(x, p)\|_{BC^2 \times P}.$$

Alors l'opérateur linéaire π_1 est continu, donc il est de classe C^1 .

- $\pi_2 : AP^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow P$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow P$) défini par

$$\pi_2(x, p) := p. \quad (4.19)$$

On a

$$\|p\|_P \leq \sup(\|x\|_{BC^2}, \|p\|_P),$$

donc

$$\|\pi_2(x, p)\|_P \leq \|(x, p)\|_{BC^2 \times P}.$$

Alors l'opérateur linéaire π_2 est continu, donc il est de classe C^1 .

– $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$B(r, s) := r.s,$$

est un opérateur bilinéaire continu donc B est de classe C^1

On considère l'opérateur de Nemystki construit sur B , $N_B : AP^0(\mathbb{R}) \times AP^0(\mathbb{R}) \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ défini par

$$N_B(u, v) := [t \mapsto u(t).v(t) = B(u(t), v(t))]. \quad (4.20)$$

Par l'utilisation du Corollaire 2.1 du chapitre 1 (respectivement Théorème 5.2 du chapitre 1) donc N_B est de classe C^1 , et on a

$$DN_B(a, b)(u, v) := [t \mapsto DB(a(t), b(t))(u(t), v(t))],$$

donc

$$DN_B(a, b)(u, v) := [t \mapsto B(a(t), v(t)) + B(u(t), b(t))],$$

alors

$$DN_B(a, b)(u, v) = N_B(a, v) + N_B(u, b).$$

– $C : AP^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) défini par

$$C(x, p) := -e_p. \quad (4.21)$$

On note par $\varepsilon : P \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement $P \rightarrow AA^0(\mathbb{R})$) la fonction $p \mapsto e_p$, ε est de classe C^1 d'après (A3) (respectivement (A5)), et $C = -\varepsilon \circ \pi_2$ est de classe C^1 comme une composition de fonctions de classe C^1 .

Donc

$$\pi_1, \pi_2, N_B \text{ et } C \text{ sont de classe } C^1. \quad (4.22)$$

Maintenant on note que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\Phi = \frac{d^2}{dt^2} \circ \pi_1 + N_B \circ (S_f \circ (\text{in}_2 \circ \pi_1, \pi_2), \frac{d}{dt} \circ (\text{in}_1 \circ \pi_1)) + S_g \circ (\text{in}_2 \circ \pi_1, \pi_2) + C. \quad (4.23)$$

Par l'utilisation de (4.7), (4.15), (4.22), (4.23) et les règles habituelles du calcul différentiel dans les espaces de Banach, on obtient que Φ est de classe C^1 .

De (4.23) on déduit que

$$\Phi(., 0) = \frac{d^2}{dt^2} + N_B \circ (S_f \circ (\text{in}_2, 0), \frac{d}{dt} \circ \text{in}_1) + S_g \circ (\text{in}_2, 0) + C(., 0),$$

et alors, pour tout $y \in AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$), et par l'utilisation des formules classiques du calcul différentiel dans les espaces de Banach et (4.16), (4.17), on obtient

$$D_x \Phi(0, 0).y = \frac{d^2}{dt^2}y + N_B(D_x S_f(0, 0).y, 0) + N_B(S_f(0, 0), \frac{d}{dt}.y) + D_x S_g(0, 0).y + 0,$$

donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$(D_x \Phi(0, 0).y)(t) = y''(t) + f(0, 0).y'(t) + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}.y(t).$$

□

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses (A1-A4) (respectivement (A1-A2) et (A4-A5)), $D_x \Phi(0, 0)$ est bijectif de $AP^2(\mathbb{R})$ sur $AP^0(\mathbb{R})$ (respectivement de $AP^2(\mathbb{R})$ sur $AP^0(\mathbb{R})$).*

Démonstration

Soit $b \in AP^0(\mathbb{R})$. Nous voulons montrer qu'il existe une unique $y \in AP^2(\mathbb{R})$ tel que $D_x \Phi(0, 0).y = b$. En utilisant la formule prouvée par le lemme 4.1, cette équation est équivalente à dire que y est une solution p.p. de l'équation différentielle linéaire du seconde ordre (qui est l'équation de Duffing) :

$$y''(t) + f(0, 0).y'(t) + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}.y(t) = b(t). \quad (4.24)$$

Le système différentiel suivant du premier ordre est équivalent à l'équation (4.24) :

$$X'(t) = M.X(t) + B(t) \quad (4.25)$$

où $X(t) := \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$, $B(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$, et $M := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} & -f(0, 0) \end{bmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de M est

$$\lambda^2 + f(0, 0).\lambda + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}.$$

On note par λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres (égales ou différentes) de M . Dans le cas où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, c.-à-d.

$$f(0, 0)^2 \geq 4 \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x},$$

la condition (A4) implique que $\lambda_1 \neq 0$ and $\lambda_2 \neq 0$ car on a

$$\frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} = \lambda_1.\lambda_2.$$

Dans le cas où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, c.-à-d.

$$f(0,0)^2 < 4 \frac{\partial g(0,0)}{\partial x},$$

la condition (A4) implique que $\Re \lambda_1 \neq 0$ et $\Re \lambda_2 \neq 0$ puisque

$$f(0,0) = -2\Re \lambda_1 = -2\Re \lambda_2.$$

Alors les hypothèses du théorème 3.1 de Bohr-Neugebauer (du chapitre 1) sont vérifiées, et donc il existe une unique solution p.p. $X \in AP^1(\mathbb{R}^2)$ de (4.25). Par conséquent, la première coordonnée de X , notée par y , est l'unique solution p.p de (4.24). Donc y est l'unique élément dans $AP^2(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$D_x \Phi(0,0).y = b.$$

Le même raisonnement tient dans le cas presque-automorphe en utilisant le lemme 2.1 au lieu du théorème 3.1 de Bohr-Neugebauer (du chapitre 1).

En effet, soit $b \in AA^0(\mathbb{R})$ et $y \in AA^2(\mathbb{R})$. Dire $D_x \phi(0,0).y = b$ est équivalent à dire que y est une solution p.a. de (4.24) qui est aussi équivalent à dire que $X(t) := \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ est une solution p.a. de (4.25).

La condition (A4) est équivalente à dire que les parties réelles des valeurs propre de M sont non nulles. Alors par l'utilisation du lemme 2.1 on obtient l'existence d'une unique solution p.a. X de (4.25), et alors l'existence d'une solution p.a. y de (4.24), et c'est l'unique solution $y \in AA^2(\mathbb{R})$ qui satisfait

$$D_x \Phi(0,0).y = b.$$

□

Démonstration du théorème 3.1 et 3.2

Par l'utilisation de (4.2), du lemme 4.1, du lemme 4.2 et du théorème des fonctions implicites ([16], p. 61) on obtient l'existence d'un voisinage \mathcal{U} (respectivement \mathcal{U}_1) de 0 in $AP^2(\mathbb{R})$ (respectivement $AA^2(\mathbb{R})$), un voisinage \mathcal{V} (respectivement \mathcal{V}_1) de 0 in P et une application $p \mapsto \underline{x}[p]$ de classe C^1 (respectivement $p \mapsto \underline{x}_1[p]$), de \mathcal{V} dans \mathcal{U} (respectivement de \mathcal{V}_1 dans \mathcal{U}_1) qui satisfont les conditions suivantes :

- a/ $\underline{x}[0] = 0$, qui est la condition (i) du théorème 3.1 (respectivement théorème 3.2).
- b/ $\Phi(\underline{x}[p], p) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{V}$ (respectivement \mathcal{V}_1), on assure alors que $\underline{x}[p]$ est une solution p.p. (respectivement p.a.) de (\mathcal{E}, p) pour tout $p \in \mathcal{V}$ (respectivement \mathcal{V}_1), et c'est la conclusion (ii) du Théorème 3.1 (respectivement théorème 3.2).
- c/ $\{(x, p) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} : \Phi(x, p) = 0\} = \{(\underline{x}[p], p) : p \in \mathcal{V}\}$ (respectivement $\{(x, p) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_1 : \Phi(x, p) = 0\} = \{(\underline{x}_1[p], p) : p \in \mathcal{V}_1\}$) et donc la conclusion (iii) du théorème 3.1 (respectivement théorème 3.2).

Ainsi le théorème 3.1 et le théorème 3.2 sont prouvés. □

Chapitre 3

DIFFÉRENT TYPES D'OSCILLATIONS DE L'ÉQUATION DE LIÉNARD FORCÉE.

1 Introduction

Soit la famille des équations suivantes

$$(\mathcal{E}, p) \quad x''(t) + f(x(t), p) \cdot x'(t) + g(x(t), p) = e_p(t)$$

où P est un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions données, et pour tout $p \in P$, e_p est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour e_p une fonction p.p. (presque périodique au sens de Bohr) (respectivement p.a. (presqu'automorphe)), dans le chapitre 2 (Théorème 3.1, Théorème 3.2) nous avons prouvé l'existence d'une solution x_p p.p. (respectivement p.a.) de (\mathcal{E}, p) , en utilisant une méthode de perturbation dans un cadre d'analyse fonctionnelle non linéaire, voir [5].

Dans le présent chapitre nous étendons ce résultat aux fonctions asymptotiquement p.p., asymptotiquement p.a., pseudo p.p., pseudo p.a., fonctions pseudo p.p. avec poids et les fonctions pseudo p.a. avec poids.

Pour réaliser cet objectif, nous utilisons des outils d'analyse fonctionnelle non linéaire, et des résultats sur les solutions d'équations linéaires dus à : Zaidman, Lizama, N'Guérakata, Diagana, Cieutat, Ezzinbi, Morphou, Pennequin et Blot, voir [8], [9], [10], [22], [35].

Nous considérons aussi deux cas particuliers de (\mathcal{E}, p) qui sont

$$x''(t) + f(x(t)) \cdot x'(t) + g(x(t)) = e(t)$$

et

$$x''(t) + f(x(t), q) \cdot x'(t) + g(x(t), q) = \epsilon(t).$$

Pour l'existence d'une solution asymptotiquement p.p., asymptotiquement p.a., pseudo p.p., pseudo p.a., pseudo p.p. avec poids et pseudo p.a. avec poids, pour les deux cas précédents, nous obtenons des résultats similaires à ceux obtenus sur la famille (\mathcal{E}, p) .

Maintenant nous décrivons le contenu de ce chapitre. Dans la section 2, nous fixons nos notations, nous rappelons quelques résultats sur les opérateurs de Nemytski et sur les équations linéaires. Dans la section 3, nous donnons le théorème principal de ce chapitre avec sa preuve. Dans la section 4, on donne deux corollaires pour les deux cas particuliers de (\mathcal{E}, p) .

2 Préliminaires

Soit X un espace de Banach. Pour $\rho \in \mathcal{U}_T$, $E^0(X)$ désigne l'un des espaces suivants $AAP^0(X)$, $AAA^0(X)$, $PAP^0(X)$, $PAA^0(X)$, $WPAP^0(X, \rho)$, $WPAA^0(X, \rho)$.

$BK(\mathbb{R}, X)$ désigne l'espace des fonctions $u \in BC^0(\mathbb{R}, X)$ tel que $u(\mathbb{R})$ est relativement compact, on note par $F(X) := E^0(X) \cap BK(\mathbb{R}, X)$.

$(E^0(X), \|\cdot\|_\infty)$, $(F(X), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces de Banach. $E^1(X)$ désigne l'espace des fonctions $u \in BC^1(\mathbb{R}, X)$ tel que $u, u' \in E^0(X)$. Muni de la norme $\|\cdot\|_{BC^1}$, $E^1(X)$ est un espace de Banach. $E^2(X)$ désigne l'espace des fonctions $u \in BC^2(\mathbb{R}, X)$ tel que $u, u', u'' \in E^0(X)$. Muni de la norme $\|\cdot\|_{BC^2}$, $E^2(X)$ est un espace de Banach.

Lemme 2.1 *Soit X et Y deux espaces de Banach, et soit $\phi : X \rightarrow Y$ une fonction continue.*

Alors l'opérateur de Nemytski $N_\phi : F(X) \rightarrow F(Y)$, défini par

$$N_\phi(u) := [t \mapsto \phi(u(t))],$$

est continu.

Démonstration

Pour $E^0(X) = AP^0(X)$ et $E^0(Y) = AP^0(Y)$ ce résultat est prouvé dans [11], corollaire 3.13.

Pour $E^0(X) = AA^0(X)$ et $E^0(Y) = AA^0(Y)$ ce résultat est une conséquence du théorème 9.6 dans [11].

Pour $E^0(X) = AAP^0(X)$ et $E^0(Y) = AAP^0(Y)$, en remplaçant \mathbb{R}_+ par \mathbb{R} , ce résultat est une variation du théorème 8.4 dans [11].

Notons que le cas des fonctions pseudo presque-périodiques (respectivement pseudo presque-automorphes) est un cas particulier des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids (respectivement pseudo presque-automorphes avec

poids) en prenant $\rho(t) := 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; en notant que la mesure associée est exactement la mesure de Lebesgue, il suffit donc de prouver le cas des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids et pseudo presque-automorphes avec poids. On utilise le corollaire 4.12 dans [9] (respectivement corollaire 5.10 dans [8]), nous savons que $N_\phi(WPAP^0(X, \rho)) \subset WPAP^0(Y, \rho)$ (respectivement $N_\phi(WPAA^0(X, \rho)) \subset WPAA^0(Y, \rho)$). On a aussi $N_\phi(BK(\mathbb{R}, X)) \subset BK(\mathbb{R}, Y)$. En effet, $\forall u \in BK(\mathbb{R}, X)$, puisque ϕ est continue on a $\overline{\phi(u(\mathbb{R}))}$ est un compact, alors $\phi(\overline{u(\mathbb{R})})$ est un fermé, et donc $\overline{\phi(u(\mathbb{R}))} = \phi(\overline{u(\mathbb{R})})$, ce qui donne

$$\overline{\phi(u(\mathbb{R}))} = \overline{\phi(\overline{u(\mathbb{R})})}. \quad (2.1)$$

D'une autre part

$$\phi(u(\mathbb{R})) \subset \overline{\phi(u(\mathbb{R}))},$$

alors on a

$$\overline{\phi(u(\mathbb{R}))} \subset \overline{\overline{\phi(u(\mathbb{R}))}}.$$

On obtient donc d'après (2.1)

$$\overline{\phi(u(\mathbb{R}))} \subset \overline{\phi(\overline{u(\mathbb{R})})}. \quad (2.2)$$

alors $\phi(u(\mathbb{R}))$ est relativement compact, et donc $\forall u \in BK(\mathbb{R}, X)$ on a

$$N_\phi = \phi \circ u \in BK(\mathbb{R}, Y).$$

On obtient donc pour $F(X) = WPAP^0(X, \rho) \cap BK(\mathbb{R}, X)$ et $F(Y) = WPAP^0(Y, \rho) \cap BK(\mathbb{R}, Y)$ (respectivement $F(X) = WPAA^0(X, \rho) \cap BK(\mathbb{R}, X)$ et $F(Y) = WPAA^0(Y, \rho) \cap BK(\mathbb{R}, Y)$),

$$N_\phi(F(X)) \subset F(Y).$$

Pour la continuité de N_ϕ sur $F(X)$, on peut suivre la même démonstration dans le cas de l'espace des fonctions presque-périodiques ([11], corollaire 3.13), seulement on remplace l'espace $AP^0(X)$ par $F(X)$ et $AP^0(Y)$ par $F(Y)$. \square

Remarque 2.1 *Si X un espace de Banach de dimension finie, alors $F(X) := E^0(X)$.*

Lemme 2.2 *Soit X et Y deux espaces de Banach, et soit $\phi : X \rightarrow Y$ une fonction Fréchet continûment différentiable. Alors l'opérateur de Nemytski $N_\phi : F(X) \rightarrow F(Y)$ est Fréchet continûment différentiable de $F(X)$ dans $F(Y)$, et on a*

$$DN_\phi(u).v = [t \mapsto D_\phi(u(t)).v(t)] \text{ pour tout } u, v \in F(X).$$

Démonstration

Pour $E^0(X) = AP^0(X)$ et $E^0(Y) = AP^0(Y)$ ce résultat est prouvé dans [11], corollaire 5.3.

Pour $E^0(X) = AA^0(X)$ et $E^0(Y) = AA^0(Y)$ ce résultat est une conséquence du théorème 9.7 dans [11].

Pour $E^0(X) = AAP^0(X)$ et $E^0(Y) = AAP^0(Y)$, remplaçant \mathbb{R}_+ par \mathbb{R} , ce résultat est une variante du théorème 8.5 dans [11].

Pour le cas $E^0(X) = WPAP^0(X, \rho)$ et $E^0(Y) = WPAP^0(Y, \rho)$ (respectivement $E^0(X) = WPAA^0(X, \rho)$ et $E^0(Y) = WPAA^0(Y, \rho)$), nous savons que pour $F(X) = WPAP^0(X, \rho) \cap BK(\mathbb{R}, X)$ et $F(Y) = WPAP^0(Y, \rho) \cap BK(\mathbb{R}, Y)$ (respectivement $F(X) = WPAA^0(X, \rho) \cap BK(\mathbb{R}, X)$ et $F(Y) = WPAA^0(Y, \rho) \cap BK(\mathbb{R}, Y)$),

$$N_\phi(F(X) \subset F(Y),$$

et on a

$$(D\phi) \circ u \in F(\mathcal{L}(X, Y)), \quad \forall u \in F(X).$$

Pour démontrer que N_ϕ est Fréchet continûment différentiable de $F(X)$ dans $F(Y)$, et que

$$DN_\phi(u).v = [t \mapsto D\phi(u(t)).v(t)] \text{ pour tout } u, v \in F(X),$$

on peut suivre la même démonstration dans le cas de l'espace des fonctions presque-périodiques ([11], corollaire 5.3), seulement on remplace l'espace $AP^0(X)$ par $F(X)$ et $AP^0(Y)$ par $F(Y)$. \square

Lemme 2.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle différente de zéro. Soit $\rho \in \mathcal{U}_T$, alors pour tout $h \in E^0(\mathbb{R}^n)$, il existe une solution dans $E^0(\mathbb{R}^n)$ de l'équation différentielle*

$$u'(t) = Au(t) + h(t). \quad (2.3)$$

Démonstration

Pour le système dynamique $u' = Au$, dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle négative, par l'utilisation du théorème 1 dans ([31], p.145), il existe $M \in (0, \infty)$, et $w \in (0, \infty)$ tel que

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-tw}, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

alors $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-group exponentiellement stable ([36], p.56). Pour $h \in E^0(\mathbb{R}^n)$ et par l'utilisation du corollaire 3.6 dans [35] dans le cas de $AAP^0(\mathbb{R}^n)$, $AAA^0(\mathbb{R}^n)$, $PAP^0(\mathbb{R}^n)$, $PAA^0(\mathbb{R}^n)$, et par l'utilisation du théorème 6.1 dans [8] dans le cas de $WPAA^0(\mathbb{R}^n, \rho)$, et par l'utilisation du théorème 5.4 dans [9] dans le cas de $WPAP^0((\mathbb{R}^n, \rho)$, il existe une unique

mild solution dans $E^0(\mathbb{R}^n)$ de (2.3), alors il existe une unique solution dans $E^0(\mathbb{R}^n)$ de (2.3), puisque le domaine de A est \mathbb{R}^n .

Dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle positive, on pose $v(t) =: u(-t)$, alors l'équation (2.3) est équivalente à

$$v'(t) = -Av(t) - h(-t). \quad (2.4)$$

Dans le cas de $AAP^0(\mathbb{R}^n)$, $AAA^0(\mathbb{R}^n)$, $PAP^0(\mathbb{R}^n)$, $PAA^0(\mathbb{R}^n)$, pour $h \in E^0(\mathbb{R}^n)$, la fonction $t \mapsto -h(-t)$ appartient à $E^0(\mathbb{R}^n)$, mais dans le cas où $E^0(\mathbb{R}^n) = WPAP^0(\mathbb{R}^n, \rho)$ ou $WPAA^0(\mathbb{R}^n, \rho)$, $t \mapsto -h(-t)$ appartient à $WPAP^0(\mathbb{R}^n, \rho^1)$ ou à $WPAA^0(\mathbb{R}^n, \rho^1)$, où $\rho^1(t) =: \rho(-t)$. Puisque les valeurs propres de $-A$ ont une partie réelle négative, alors par l'utilisation du premier cas, il existe une unique solution v dans $WPAP^0(\mathbb{R}^n, \rho^1)$ ou dans $WPAA^0(\mathbb{R}^n, \rho^1)$ de (2.4), et par conséquent il existe une unique solution u de (2.3) dans $E^0(\mathbb{R}^n)$, définie par $u(t) := v(-t)$.

Maintenant on considère le système complexe associé à 2.3 :

$$z'(t) = Az(t) + L(t), \quad z(t) \in \mathbb{C}^n, \quad L(t) \in \mathbb{C}^n. \quad (2.5)$$

Puisque \mathbb{C}^n est isomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors si on utilise la norme

$$\|(x, y)\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} = \max(\|x\|_{\mathbb{R}^n}, \|y\|_{\mathbb{R}^n})$$

et pour $L \in E^0(\mathbb{C}^n)$ on a $\Re L$ la partie réelle de L et $\Im L$ la partie imaginaire de L appartient à $E^0(\mathbb{R}^n)$. Soit $z(t) = x(t) + iy(t)$ avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$, une solution de (2.5). Puisque A est réelle, et si on suppose que ses valeurs propres ont une partie réelle négative, alors par l'utilisation du premier cas et pour $L \in E^0(\mathbb{C}^n)$, il existe une unique solution $x \in E^0(\mathbb{R}^n)$ de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) + \Re L(t),$$

et une unique solution $y \in E^0(\mathbb{R}^n)$ de l'équation

$$y'(t) = Ay(t) + \Im L(t).$$

Donc $z := x + iy$ est l'unique solution de (2.3) dans $E^0(\mathbb{C}^n)$.

On utilise le même raisonnement dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle positive.

Dans le cas où une partie des valeurs propres de A sont de partie réelle négative et une autre avec une partie réelle positive, on a

$$\mathbb{C}^n = S_- \oplus S_+$$

où S_- (respectivement S_+) est la somme directe des sous-espaces propres spectraux associés aux valeurs propres de A qui ont une partie réelle négative (respectivement partie réelle positive) ([31], p.110).

Soit $A_- \in \mathcal{L}(S_-, S_-)$ (respectivement $A_+ \in \mathcal{L}(S_+, S_+)$) la restriction de A sur S_- (respectivement sur S_+), alors les valeurs propres de A_- ont une partie réelle négative (respectivement les valeurs propres de A_+ ont une partie réelle positive). Pour $h \in E^0(\mathbb{R}^n)$, on peut considérer h comme un élément de $E^0(\mathbb{C}^n)$ donc on a $h = h_- \oplus h_+$ où $h_- \in E^0(S_-)$ (respectivement $h_+ \in E^0(S_+)$). Par l'utilisation du cas complexe, il existe une unique solution z_- (respectivement z_+) de $z'_-(t) = A_- z_-(t) + h_-(t)$ (respectivement $z'_+(t) = A_+ z_+(t) + h_+(t)$) dans $E^0(S_-)$ (respectivement dans $E^0(S_+)$). alors avec $L = h$ on a $z := z_- \oplus z_+$ est l'unique solution de (2.5), et par conséquent $x := \mathfrak{A}z$ est l'unique solution de (2.3). \square

3 Résultats

On énonce le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 3.1 *Soit $\rho \in \mathcal{U}_T$. Sous les hypothèses*

(A1) $f \in C^1(\mathbb{R} \times P, \mathbb{R})$ et $g \in C^1(\mathbb{R} \times P, \mathbb{R})$,

(A2) $g(0, 0) = 0$,

(A3) $p \mapsto e_p \in C^1(P, E^0(\mathbb{R}))$ et $e_0 = 0$,

(A4) $f(0, 0) \neq 0$ lorsque $f(0, 0)^2 < 4 \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}$, et
 $\frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} \neq 0$ lorsque $f(0, 0)^2 \geq 4 \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}$,

il existe un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $E^2(\mathbb{R})$, un voisinage \mathcal{V} de 0 dans P et une application $p \mapsto \underline{x}[p]$ de classe C^1 de \mathcal{V} dans \mathcal{U} qui satisfont les conditions suivantes :

(i) $\underline{x}[0] = 0$.

(ii) Pour tout $p \in \mathcal{V}$, $\underline{x}[p]$ est une solution de (\mathcal{E}, p) dans $E^0(\mathbb{R})$.

(iii) Si $x \in \mathcal{U}$ est une solution de (\mathcal{E}, p) dans $E^0(\mathbb{R})$ avec $p \in \mathcal{V}$, alors $x = \underline{x}[p]$.

On définit l'opérateur non linéaire $\Phi : E^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow E^0(\mathbb{R})$ en posant

$$\Phi(x, p) := [t \mapsto x''(t) + f(x(t), p).x'(t) + g(x(t), p) - e_p(t)] \quad (3.1)$$

où $x \in E^2(\mathbb{R})$.

Il est facile de remarquer que $x \in E^2(\mathbb{R})$ satisfait $\Phi(x, p) = 0$ si et seulement si x est une solution de (\mathcal{E}, p) dans $E^0(\mathbb{R})$.

Sous les hypothèses (A2) et (A3), 0 est une solution de $(\mathcal{E}, 0)$ dans $E^0(\mathbb{R})$, et alors on a l'égalité suivante :

$$\Phi(0, 0) = 0. \quad (3.2)$$

Lemme 3.1 *Sous les hypothèses (A1-A3), l'opérateur Φ est bien défini, et il est de classe C^1 sur $E^2(\mathbb{R}) \times P$. De plus la différentielle partielle de Φ par rapport à la première variable, au point $(x, p) = (0, 0)$, est donnée par*

$$D_x \Phi(0, 0).y = [t \mapsto y''(t) + f(0, 0).y'(t) + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}.y(t)]$$

où $y \in E^2(\mathbb{R})$.

Démonstration

On considère les opérateurs linéaire suivants :

– $\frac{d^2}{dt^2} : E^2(\mathbb{R}) \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ défini par $\frac{d^2}{dt^2}x := x''$.

Puisque

$$\|\frac{d^2}{dt^2}x\|_\infty \leq \|x''\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x\|_\infty,$$

donc

$$\|\frac{d^2}{dt^2}x\|_\infty \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur linéaire $\frac{d^2}{dt^2}$ est continu, donc de classe C^1 , et on a, pour tout x, y dans $E^2(\mathbb{R})$,

$$D\frac{d^2}{dt^2}(x(\cdot))(y(\cdot)) = \frac{d^2}{dt^2}(y(\cdot)).$$

– $\frac{d}{dt} : E^1(\mathbb{R}) \rightarrow E^0(\mathbb{R})$ défini par $\frac{d}{dt}x := x'$.

Puisque

$$\|\frac{d}{dt}x\|_\infty \leq \|x'\|_\infty + \|x\|_\infty,$$

donc

$$\|\frac{d}{dt}x\|_\infty \leq \|x\|_{BC^1}.$$

Alors l'opérateur linéaire $\frac{d}{dt}$ est continu, donc de class C^1 , et on a, pour tout x, y dans $E^1(\mathbb{R})$,

$$D\frac{d}{dt}(x(\cdot))(y(\cdot)) = \frac{d}{dt}(y(\cdot))$$

– $\text{in}_1 : E^2(\mathbb{R}) \rightarrow E^1(\mathbb{R})$ défini par $\text{in}_1(x) := x$.

Puisque

$$\|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty,$$

donc

$$\|x\|_{BC^1} \leq \|x\|_{BC^2},$$

d'où

$$\|\text{in}_1(x)\|_{BC^1} \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur linéaire in_1 est de classe C^1 , et on a, pour tout x, y dans $E^2(\mathbb{R})$,

$$D\text{in}_1(x(\cdot))(y(\cdot)) = \text{in}_1(y(\cdot)).$$

– $\text{in}_2 : AP^2(\mathbb{R}) \rightarrow AP^0(\mathbb{R})$ est défini par $\text{in}_2(x) := x$.

Puisque

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty,$$

donc

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_{BC^2},$$

d'où

$$\|\text{in}_2(x)\|_\infty \leq \|x\|_{BC^2}.$$

Alors l'opérateur linéaire in_2 est de class C^1 , et on a, pour tout x, y dans $E^2(\mathbb{R})$,

$$D\text{in}_2(x(\cdot))(y(\cdot)) = \text{in}_2(y(\cdot))$$

Donc on a pour tout $x \in E^2(\mathbb{R})$.

$$\frac{d^2}{dt^2}, \frac{d}{dt}, \text{in}_1, \text{in}_2 \text{ sont de classe } C^1. \quad (3.3)$$

Maintenant nous définissons les opérateurs de Nemytski (dit aussi opérateurs de superposition) construits sur les fonctions f et $g : N_f : F(\mathbb{R} \times P) \rightarrow F(\mathbb{R})$ et $N_g : F(\mathbb{R} \times P) \rightarrow F(\mathbb{R})$ définis par $N_f(x, p) := [t \mapsto f(x(t), p(t))]$ et $N_g(x, p) := [t \mapsto g(x(t), p(t))]$. Par l'utilisation du lemme 2.2 N_f et N_g sont de classe C^1 sur $F(\mathbb{R}) \times F(P)$ assimilés à $F(\mathbb{R} \times P)$, et par le même lemme on obtient les formules différentielles des deux opérateurs N_f et N_g :

$$\left. \begin{aligned} D_x N_f(x, p) \cdot y &= [t \mapsto \frac{\partial f(x(t), p(t))}{\partial x} \cdot y(t)] \\ D_x N_g(x, p) \cdot y &= [t \mapsto \frac{\partial g(x(t), p(t))}{\partial x} \cdot y(t)] \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

pour tout $x, y \in F(\mathbb{R})$. Evidemment $F(\mathbb{R}) \times F(P) = E^0(\mathbb{R}) \times F(P)$ et $F(\mathbb{R}) = E^0(\mathbb{R})$

On peut assimiler le point $p \in P$ à la fonction constante $t \mapsto p$ qui appartient à $F(P)$, ce qui nous permet de considérer P comme un sous espace vectoriel fermé de $F(P)$. Donc on peut considérer les restrictions des opérateurs N_f et N_g suivantes :

$S_f : E^0(\mathbb{R}) \times P \rightarrow E^0(\mathbb{R})$ définie par

$$S_f(x, p) := [t \mapsto f(x(t), p)],$$

et $S_g : E^0(\mathbb{R}) \times P \rightarrow E^0(\mathbb{R})$ définie par

$$g(x, p) := [t \mapsto g(x(t), p)],$$

où $x \in E^0(\mathbb{R})$ et $p \in P$.

Puisque la restriction d'une fonction de classe C^1 sur un sous-espace de Banach est de classe C^1 donc on a

$$S_f \text{ et } S_g \text{ sont de classe } C^1, \quad (3.5)$$

et des conséquences de (3.4) sont les formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} D_x S_f(x, p).y &= [t \mapsto \frac{\partial f(x(t), p)}{\partial x}.y(t)] \\ D_x S_g(x, p).y &= [t \mapsto \frac{\partial g(x(t), p)}{\partial x}.y(t)] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

pour tout $x, y \in E^0(\mathbb{R})$ et pour tout $p \in P$.

Maintenant on considère les opérateurs suivants :
 – $\pi_1 : E^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow E^2(\mathbb{R})$ défini par $\pi_1(x, p) := x$. On a

$$\|x\|_{BC^2} \leq \sup(\|x\|_{BC^2}, \|p\|_P),$$

donc

$$\|\pi_1(x, p)\|_{BC^2} \leq \|(x, p)\|_{BC^2 \times P}.$$

Alors l'opérateur linéaire π_1 est continu, donc il est de classe C^1 .

– $\pi_2 : E^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow P$ défini par $\pi_2(x, p) := p$. On a

$$\|p\|_P \leq \sup(\|x\|_{BC^2}, \|p\|_P),$$

donc

$$\|\pi_2(x, p)\|_P \leq \|(x, p)\|_{BC^2 \times P}.$$

Alors l'opérateur linéaire π_2 continu, donc il est de classe C^1 .

– $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $B(r, s) := r.s$ est un opérateur bilinéaire continu donc B est de classe C^1 .

On considère l'opérateur de Nemystki construit sur B , $N_B : E^0(\mathbb{R}) \times E^0(\mathbb{R}) \rightarrow E^0(\mathbb{R})$ défini par $N_B(u, v) := [t \mapsto u(t).v(t) = B(u(t), v(t))]$. Par l'utilisation du lemme 2.2 et la remarque 2.1 l'opérateur N_B est de classe C^1 , et on a

$$DN_B(a, b)(u, v) := [t \mapsto DB(a(t), b(t))(u(t), v(t))],$$

donc

$$DN_B(a, b)(u, v) := [t \mapsto B(a(t), v(t)) + B(u(t), b(t))],$$

alors

$$DN_B(a, b)(u, v) = N_B(a, v) + N_B(u, b).$$

– $C : E^2(\mathbb{R}) \times P \rightarrow E^0(\mathbb{R})$ défini par $C(x, p) := -e_p$. On note par $\varepsilon : P \rightarrow E^0(\mathbb{R})$ la fonction $p \mapsto e_p$, ε est de classe C^1 d'après (A3), et donc $C = -\varepsilon \circ \pi_2$ est de classe C^1 comme une composition de fonctions de classe C^1 .

Maintenant on note que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\Phi = \frac{d^2}{dt^2} \circ \pi_1 + N_B \circ (S_f \circ (\text{in}_2 \circ \pi_1, \pi_2), \frac{d}{dt} \circ (\text{in}_1 \circ \pi_1)) + S_g \circ (\text{in}_2 \circ \pi_1, \pi_2) + C. \quad (3.7)$$

Pour $y \in E^2(\mathbb{R})$ et par l'utilisation des règles habituelles du calcul différentiel dans les espaces de Banach et (3.6), on obtient

$$\Phi(., 0) = \frac{d^2}{dt^2} + N_B \circ (S_f \circ (\text{in}_2, 0), \frac{d}{dt} \circ \text{in}_1) + S_g \circ (\text{in}_2, 0) + C(., 0),$$

donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(D_x \Phi(0, 0).y)(t) = y''(t) + f(0, 0).y'(t) + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}.y(t),$$

qui est la formule annoncée. \square

Lemme 3.2 *Sous les hypothèses (A1-A4), $D_x \Phi(0, 0)$ est bijectif de $E^2(\mathbb{R})$ sur $E^0(\mathbb{R})$.*

Démonstration

Soit $b \in E^0(\mathbb{R})$. Nous voulons montrer qu'il existe une unique $y \in E^2(\mathbb{R})$ tel que $D_x \Phi(0, 0).y = b$. en utilisant la formule prouvée par le lemme 3.1, cette équation est équivalente à dire que y est une solution dans $E^0(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle linéaire du seconde ordre (qui est l'équation de Duffing) :

$$y''(t) + f(0, 0).y'(t) + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}.y(t) = b(t). \quad (3.8)$$

Soit le système différentiel du premier ordre équivalent à l'équation (3.8) :

$$X'(t) = M.X(t) + B(t) \quad (3.9)$$

où $X(t) := \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$, $B(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$, et $M := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} & -f(0, 0) \end{bmatrix}$.

Pour $\rho \in \mathcal{U}_T$ et puisque la conditions (A4) et les hypothèses du lemme 2.3 sont vérifiées, alors il existe une unique solution $X \in E^1(\mathbb{R}^2)$ de (3.9). Donc la première coordonnée de X , notée par y , est l'unique solution de (3.8) dans $E^1(\mathbb{R})$ et par conséquent y est l'unique élément dans $E^2(\mathbb{R})$ qui satisfait

$$D_x \Phi(0, 0)y = b.$$

\square

Par l'utilisation de (3.2), lemme 3.1, lemme 3.2 on peut appliquer le théorème des fonctions implicites ([16], p. 61) donc il existe un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $E^2(\mathbb{R})$, et un voisinage \mathcal{V} de 0 dans P et une fonction de classe C^1 $p \mapsto \underline{x}[p]$, de \mathcal{V} sur \mathcal{U} tel que on a :

- a/ $\underline{x}[0] = 0$, et c'est la condition (i) de notre théorème.
b/ $\Phi(\underline{x}[p], p) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{V}$, qui assure $\underline{x}[p]$ est une solution de (\mathcal{E}, p) dans $E^1(\mathbb{R})$ pour tout $p \in \mathcal{V}$.
c/ $\{(x, p) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} : \Phi(x, p) = 0\} = \{(\underline{x}[p], p) : p \in \mathcal{V}\}$ et donc on a la conclusion (iii) du théorème principal de ce chapitre.

4 Cas particuliers

On considère l'équation

$$(\mathcal{F}, e) \quad x''(t) + f_1(x(t)) \cdot x'(t) + g_1(x(t)) = e(t),$$

qui est un cas particulier de (\mathcal{E}, p) , si on pose P est l'espace $E^0(X)$, et $f(x, p) = f_1(x)$, $g(x, p) = g_1(x)$ et $p \mapsto e_p$ et la fonction Identité.

Pour l'existence d'une solution de (\mathcal{F}, e) dans $\mathbb{E}^0(\mathbb{R})$ on donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.1 *Soit $\rho \in \mathcal{U}_T$. Sous les hypothèses suivantes :*

$$(A6) \quad f_1, g_1 \in C^1,$$

$$(A7) \quad g_1(0) = 0,$$

$$(A8) \quad f_1(0) \neq 0 \text{ quand } f_1(0)^2 < 4g_1'(0), \text{ et } g_1'(0) \neq 0 \text{ quand } f_1(0)^2 \geq 4g_1'(0),$$

il existe un voisinage \mathcal{W} de 0 dans $E^0(\mathbb{R})$, et un voisinage \mathcal{U} de 0 dans $E^2(\mathbb{R})$ et une fonction de classe C^1 $e \mapsto \underline{x}[e]$, de \mathcal{W} dans \mathcal{U} tels que :

$$(i) \quad \underline{x}[0] = 0,$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } e \in \mathcal{W}, \underline{x}[e] \text{ est une solution de } (\mathcal{F}, e) \text{ dans } \mathbb{E}^0(\mathbb{R}),$$

$$(iii) \quad \text{Si } x \in \mathcal{U} \text{ est une solution de } (\mathcal{F}, e) \text{ avec } e \in \mathcal{W} \text{ dans } \mathbb{E}^0(\mathbb{R}), \text{ alors on a } x = \underline{x}[e].$$

Le deuxième cas particulier de (\mathcal{E}, p) est

$$(\mathcal{G}, e, q) \quad x''(t) + f_2(x(t), q) \cdot x'(t) + g_2(x(t), q) = e(t)$$

où q est dans un espace de Banach \mathcal{Q} , on pose $p = (e, q)$, $f(x, e, q) = f_2(x, q)$, $g(x, e, q) = g_2(x, q)$ et $e_{(e, q)} = e$. Pour l'existence d'une solution de (\mathcal{G}, e, q) dans $\mathbb{E}^0(\mathbb{R})$ on a le résultat suivant :

Corollaire 4.2 *Soit $\rho \in \mathcal{U}_T$. Sous les hypothèses suivantes :*

$$(A10) \quad f_2, g_2 \in C^1,$$

$$(A11) \quad g_2(0, 0) = 0,$$

$$(A12) \quad f_2(0, 0) \neq 0 \text{ quand } f_2(0, 0)^2 < 4 \frac{\partial g_2(0, 0)}{\partial x}, \text{ et } \frac{\partial g_2(0, 0)}{\partial x} \neq 0 \text{ quand } f_2(0, 0)^2 \geq 4 \frac{\partial g_2(0, 0)}{\partial x},$$

alors il existe un voisinage \mathcal{W}_2 de 0 dans $E^0(\mathbb{R})$, et un voisinage \mathcal{U}_2 de 0 dans $E^2(\mathbb{R})$, un voisinage \mathcal{V}_2 de 0 dans Q et une fonction de classe C^1 , $e \mapsto \underline{x}[e, q]$, de $\mathcal{W}_2 \times \mathcal{V}_2$ dans \mathcal{U}_2 tel que on a

- (i) $\underline{x}[0, 0] = 0$,
- (ii) pour tout $e \in \mathcal{W}_2$ dans $E^0(\mathbb{R})$ et pour tout $q \in \mathcal{V}_2$, $\underline{x}[e, q]$ est une solution de (\mathcal{G}, e, q) dans $E^0(\mathbb{R})$,
- (iii) Si $x \in \mathcal{U}_2$ est une solution (\mathcal{G}, e, q) avec $e \in \mathcal{W}_2$ dans $E^0(\mathbb{R})$ et $q \in \mathcal{V}_2$, alors on a $x = \underline{x}[e, q]$.

Bibliographie

- [1] L. Amerio, & G. Prouse, *Almost Periodic Functions and Functional Equations*, van Nostrand Reinhold Company, 1971.
- [2] B. Amir, & L. Maniar, *Composition of Pseudo Almost Periodic Functions and Cauchy Problems with Operators of non Dense Domain*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, **6**, (1999), 1-11.
- [3] J. Ben Slimene, & J. Blot, *Quasi-periodic solutions of nonlinear differential equations via the Floquet-Lin theory*, Differential Equations and Applications, **2**(3), (2010), 331-343.
- [4] A.S. Besicovitch *Almost-periodic functions* , Dover Publications, Inc, Cambridge, 1954.
- [5] J. Blot, S. Boudjema, *Small almost periodic and almost automorphic oscillations in forced Liénard equation*, Journal of Abstract Differential Equations and Applications, **1**(2010), no.1, 1-11.
- [6] J. Blot, P. Cartigny, *Bounded solutions and oscillations of concave Lagrangian systems in presence of a discount rate*, Zeit. Anal. Anwendungen **14**(4), (1995), 731-750.
- [7] J. Blot, P. Cieutat, & J. Mawhin, *Almost-periodic oscillations of monotone second-order systems*, Advances in Differential Equations, **2**(5), (1997), 693-714.
- [8] J. Blot, P. Cieutat and K. Ezzinbi, *Measure theory and pseudo almost automorphic functions : New developments and applications*, Nonlinear Analysis, **75**(2012), 2426-2447.
- [9] J. Blot, P. Cieutat and K. Ezzinbi, *New approach for weighed pseudo almost periodic functions under the light of measure theory, basic results and applications*, Applicable Analysis, (2011), 1-34.
- [10] J. Blot, P. Cieutat, G.M. N'Guérékata, *Dependence results on almost periodic and almost automorphic solutions of evolution equations*, Electronic Journal of Differential Equations, **101** (2009), 1-13.
- [11] J. Blot , P. Cieutat, G.M. N'Guérékata, D. Pennequin, *Superposition operators between various spaces of almost periodic function spaces and applications*, Communications in Mathematical Analysis, **6**(1), (2009), 42-70.

- [12] J. Blot, G.M. Mophou, G.M. N'Guérékata, and D. Pennequin, *Weighted pseudo almost automorphic functions and applications to abstract differential equations*, *Nonlinear Analysis*, 71(2009), 903-909.
- [13] S. Bochner, *Beutrage zur theorie der fastperiodische functionen I. functionen einer variablen*. *Math. Ann.*96. (1927). [27]
- [14] S. Bochner, *Continuous Mappings of Almost Automorphic and Almost Periodic Function*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Volume 52, (1964), 907-910.
- [15] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New York, (1956).
- [16] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1977.
- [17] P. Cieutat, *Almost periodic solutions of forced vectorial Liénard equations*, *Journal of Differential Equations* **209** (2005), 302-328.
- [18] P. Cieutat, *Maximum principle and existence of almost-periodic solutions of second-order differential systems*, *Differential Integral Equations* 17, (2004), 921-942.
- [19] P. Cieutat, S. Fatajou, G.M. N'Guérékata, *Composition of pseudo almost periodic and pseudo automorphic functions and applications to evolution equations*, *Applicable Analysis*, 89(1), (2010), 11-27.
- [20] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, Wiley, New York, 1968.
- [21] T. Diagana, *Pseudo Almost Periodic Functions in Banach Spaces*, Nova Science Pub. Inc., 2007.
- [22] T. Diagana, *Weighted pseudo-almost periodic functions and applications*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris Series, I* 343(2006), 643-646.
- [23] T. Diagana, *Weighted pseudo-almost periodic solutions to some differential equations*, *Nonlinear Analalysis*, 68(2008), 2250-2260.
- [24] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse, tome 1 : fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [25] M. Farkas, *Periodic motions*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [26] J. Favard, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Gauthiers-Villars, Paris, 1933.
- [27] J.-P. Françoise, *Oscillations en biologie ; analyse qualitative et modèles*, Springer-verlag, Berlin, 2005.
- [28] A.M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations*, *Lecture Notes in Math.* n° 377, Springer-Verlag, Berlin (1974).
- [29] J.K. Hale, *Oscillations in nonlinear systems*, Dover Publication, Inc., New York, 1992.
- [30] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs at applications*, Masson, Paris, 1991.

- [31] M.W. Hirsch, S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic press, New York, 1974.
- [32] E.A. Jackson, *Perspectives of nonlinear dynamics, Volume 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [33] C.E. Langenhop, G. Seifert, *Almost Periodic Solutions of Second Order Nonlinear Differential Equations with Almost Periodic Forcing*, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol.10, No.3, 425-432, Jun, 1959.
- [34] J. Liang, J. Zhang, T.J. Xiao, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **340** (2008), 1493-1499.
- [35] C. Lizama, G.M. N'Guérékata, *Bounded mild solutions for semilinear integro-differential equations in Banach spaces*, Integral Equations Operator Theory. **68**(2010), 207-227.
- [36] G.M. N'Guérékata, *Topics in almost automorphy*, Springer Science+ Business Media, Inc., New York, 2005.
- [37] A.I. Perov, *Periodic, almost-periodic, and bounded solutions of the differential equation $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$* , Soviet Mathematics Doklady, **1** (1960), 605-608.
- [38] G.E.H. Reuther, *On Certain non Linear Differential Equations avec Almost Periodic Solutions*, Journal of the London Mathematical Society, Vol. 26, 215-221, 1951.
- [39] H. Rheinard, *Équations Différentielles, Fondements et Applications*, Dunod, Paris.
- [40] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [41] L. Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1976.
- [42] T. Yoshizawa, *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almot Periodic Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [43] S. Zaidman, *Almost-periodic functions in abstract spaces*, Pitman Publishing Inc., Marshfield, MA, 1985.
- [44] C. Zhang, *Pseudo almost-periodic solutions and their applications*, Ph.D. thesis, University of Western Ontario, 1992.