

وِزَارَةُ التَّعْلِيمِ العَالِي وَ البَحْثِ العِلْمِي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جَامِعَةُ بَادْجِي مُخْتَار
عَنَابَة

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Sur la dynamique de quelques méthodes donnant les racines de polynômes

Option Systèmes Dynamiques

Par

Sahari Mohamed Lamine

Sous la direction de

Ilhem Djellit (Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba)

Danièle Fournier-Prunaret (Professeur à l'INSA de Toulouse)

Devant le jury

Présidente :

Fatma-Zohra Nouri (Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba)

Examineurs :


Nourredine Akroune (Professeur à l'Université Abderrahmane Mira-Béjaïa)

Abdel-Kaddous Taha (Maître de conférences à l'INSA de Toulouse)

Mohamed Haiour (Maître de conférences à l'Université Badji Mokhtar-Annaba)

Année 2011

Remerciements

 Je tiens tout d'abord à remercier la directrice de cette thèse, Madame Ilhem Djellit, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba, pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais sur les systèmes dynamiques, puis pour m'avoir guidée, encouragée et conseillée.

Mes remerciements vont également à Madame Danièle Fournier-Prunaret, Professeur à l'INSA de Toulouse et directrice du laboratoire LATTIS, pour la gentillesse et la patience qu'elle a manifestée à mon égard durant cette thèse, pour l'hospitalité dont elle a fait preuve envers moi lors des séjours que j'ai effectués au Laboratoire LATTIS de Toulouse, et aussi pour m'avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Je réserve un remerciement chaleureux à Monsieur Abedel-Kaddous Taha, Maître de conférences à l'INSA de Toulouse, pour l'honneur qu'il m'a fait d'apporter son expérience et son savoir dans le domaine des systèmes dynamiques ainsi pour les conseils stimulants que j'ai eu l'honneur de recevoir de ça part. Aussi pour ça gentillesse et ça disponibilité ainsi que pour avoir accepté de faire partie de mon Jury de soutenance.

Je ne sais comment exprimer ma gratitude à ces trois personnes autrement qu'en leur promettant d'agir comme eux avec des étudiants dans ma situation, si un jour l'occasion m'en est donnée.

Je remercie tous particulièrement Madame Fatma-Zohra Nouri, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba, qui m'a fait l'honneur et le plaisir d'accepter de présider ce Jury de soutenance.

Je suis très sensible à la présence dans ce jury de Monsieur Nourredine Akroune, Professeur à l'Université Abderrahmane Mira-Béjaïa et Monsieur Mohamed Haiour, Maître de conférences à l'Université Badji Mokhtar-Annaba. Ils ont également contribué par leurs

nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire, et je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est : aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs suggestions ou contributions. Je pense ici en particulier à Boumendjel Mahieddine, Hadidi El-Bahi, Hamida Salim, Braikia Karim, Chettouh Mouard, Benhassine Hani, Ghanem Redouane, Jie Xu, Yanjun Xu, Guillaum Fuma et Côme Pruvost.

Je remercie de plus tous les auteurs des programmes du domaine public que j'ai utilisés intensément durant cette thèse, à savoir tous les contributeurs à $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, linux, gcc, xfig, gnuplot, ... Sans eux, mes conditions de travail auraient sans doute été très différentes et beaucoup moins agréables.

Pour leurs encouragements et leur assistance aussi bien matérielle que morale qui m'ont permis de faire cette thèse dans de bonnes conditions, je remercie chaudement mon père et ma mère et tous les membres de ma famille.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du laboratoire LATTIS (Laboratoire Toulousain de Technologie et d'Ingénierie des Systèmes) de Toulouse, et j'en remercie ici tous les membres.

إِلَّا أَبِي وَأُمِّي
إِلَّا أَيْمَنَ وَأَشْرَفَ

Introduction

Dans de nombreux contextes et applications, on est confronté au problème de la recherche d'une valeur x telle que $f(x) = 0$, pour une certaine fonction f . En dépit d'être un problème relativement facile à énoncer pour certains choix de f , cette tâche peut être très difficile en général. Vers la fin du 17^{ème} siècle, en s'appuyant sur des outils de calculs nouvellement développés, Issac Newton a proposé d'utiliser la méthode itérative

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad x_n \in \mathbb{R},$$

pour générer une suite $\{x_k\}_{k=0}^{k=\infty}$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \zeta,$$

où $f(\zeta) = 0$. En effet, pour x_0 suffisamment proche de ζ et quelques conditions sur la fonction f , la suite $\{x_k\}$ converge rapidement vers la racine ζ . Plus tard, en 1879 Arthur Cayley [9, 10], propose d'étudier le comportement de la méthode de Newton dans un autre contexte. Il considère la suite générée par

$$z_{k+1} = z_k - \frac{p(z_k)}{p'(z_k)}, \quad z_n \in \mathbb{C},$$

où p est un polynôme complexe et p' sa dérivée. Plus précisément, Cayley cherchait à caractériser le bassin d'attraction de chaque racine ζ de p . Ce bassin d'attraction, $\mathcal{A}(\zeta) = \{z_0 \in \mathbb{C} : z_k \rightarrow \zeta\}$, est l'ensemble des points initiaux convergeants vers la racine ζ par la méthode de Newton. Tout en parvenant à cette caractérisation dans le cas quadratique, Cayley remarqua que le cas cubique faisait apparaître de nombreuses difficultés. Ultérieurement

deux éminents mathématiciens français montrèrent que les conclusions de Cayley étaient bien fondées.

Après presque 40 ans, Pierre Fatou et Gaston Julia, fondèrent la théorie de l'itération des fractions rationnelles [3, 18, 26]. Cette théorie a permis de jeter la lumière sur le problème dit de Cayley, en mettant en évidence la notion d'ensembles de Julia, que plus tard a été généralisée par d'autres mathématiciens tels que Hans Brolin dans [7], révélant que le problème de Cayley n'est pas trivial.

À l'exception des travaux de Carl Ludwig Siegel [45] en 1942 et Brolin en 1966, On sait que le sujet - la théorie sur les itérations - est ensuite, pour l'essentiel, resté en repos, des années 1920 aux années 1980, où il a trouvé une nouvelle dynamique, popularisant les noms de Julia et Fatou.

Depuis une trentaine d'années, suite aux observations faites par Mitchell J. Feigenbaum [20] pour le cas réel, et pour le cas complexe, les expérimentations informatiques de Benoît Mandelbrot [34], ce sujet a connu un vaste développement, notamment sous la houlette de Adrien Douady, Jhon H. Hubbard et David Sullivan [14, 15, 49].

Dans la même période et suite aux découvertes d'Edouard Lorenz [33] sur les attracteurs étranges¹, mettant en évidence le fait qu'un comportement "pathogène" des systèmes dynamiques est observable, même pour des systèmes dynamiques très simples. Des mots comme : Attracteurs étranges, chaos, fractales, ... sont devenus, très populaires et même disant, à la mode.

À partir des années 1970, l'augmentation de la rapidité des ordinateurs ainsi que la résolution graphique des écrans - indispensables pour la visualisation des aspects géométriques et topologiques assez compliqués - a rendu l'étude et la compréhension des systèmes dynamiques possible jusqu'à maintenant [36].

Mais, si initialement, la visualisation graphique de quelques aspects des systèmes dynamiques était essentiellement dirigée vers la découverte et la popularisation de ces systèmes. Aujourd'hui ces techniques sont utilisées plutôt pour une exploration beaucoup plus fine,

1. Bien que, dès la fin du XIXe siècle, Henri Poincaré dans des travaux concernant le problème à N corps en mécanique céleste, puis, Hadamard avec un modèle mathématique abstrait aujourd'hui baptisé « flot géodésique sur une surface à courbure négative » ont mis en exergue le phénomène connu aujourd'hui sous la dénomination de sensibilité aux conditions initiales : pour un système chaotique, une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial dans l'espace des phases va se trouver (presque toujours) rapidement amplifiée.

pour mettre en application des résultats ou de propriétés fraîchement découvertes ou même pour mettre en évidence des conjectures non encore affirmées ou infirmées. Et ces outils interagissent parfois de manière très compliquée pour permettre tour à tour d'observer, de démontrer et d'illustrer des phénomènes mathématiques.

Le sujet du travail proposé, s'inscrit dans la vision exposée plus haut, en fait, à travers ce mémoire, nous essayons à chaque fois de dégager des propriétés théoriques sur les systèmes dynamiques, que nous allons exploiter "numériquement" afin de mieux comprendre le comportement de tels systèmes. Plus explicitement, nous cherchons à montrer qu'une dynamique peut être caractérisée (globalement ou partiellement), grâce à l'étude du comportement d'un sous ensemble - fini ou infini - du plan de phase. Aussi, nous mettrons l'accent sur quelques propriétés géométriques et topologiques des systèmes dynamiques holomorphes et non-holomorphes.

Cette thèse est divisée en quatre chapitres :

Chapitre 1

On introduit les outils de base pour la suite. On donne les plus importants des résultats de la théorie de l'itération des fractions rationnelles, utilisée dans ce travail. Quelques exemples sont donnés dans ce chapitre, et malgré leur simplicité, l'étude de ces exemples est nécessaire pour le reste de ce travail.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la méthode de Newton ou plutôt à la dynamique engendrée par cette méthode. Après avoir passé en revue les principaux résultats déjà établis, nous montrons que l'ensemble de Julia pour la dynamique associée à cette méthode peut être généré à partir d'un seul point par itérations inverses. Nous donnons ensuite deux variantes d'algorithmes produisant de tels ensembles. Un autre point est abordé dans ce chapitre, celui de l'influence d'un paramètre introduit dans la méthode de Newton, sur la complexité de l'ensemble de Julia [41]. Nous montrons que la dimension fractale de cet ensemble accroît proportionnellement avec le paramètre. À la fin de ce chapitre, nous étudions

le comportement de la méthode de Newton lorsque le paramètre tend vers zéro. Pour cela, nous utilisons la méthode de Newton continue [25, 30] et nous montrons quelques résultats permettant de décrire l'aspect des bassins d'attraction des points fixes.

Chapitre 3

Ce chapitre est consacré à la méthode de Cauchy, plus connue sous le nom d'algorithme du gradient [22, 39]. Cette méthode est polynomiale, contrairement à celle de Newton qui est une fraction rationnelle, et dans ce cas l'infini est un point fixe attractif. Nous commençons par voir que cette propriété est déterminante pour la dynamique de Cauchy et encore une fois nous montrons qu'en étudiant le comportement des points critiques de cette méthode, nous pouvons statuer sur l'aspect topologique des ensembles de Fatou et de Julia. La méthode de Cauchy "non-holomorphe" est aussi étudiée. Le paramètre non holomorphe introduit dans cette méthode va permettre à l'algorithme de converger vers toutes les racines d'un polynôme donné. On montrera que dans le cas d'un polynôme quadratique, on peut caractériser les frontières des bassins d'attraction des points fixes par itérations inverses d'un segment de droite bien défini.

Chapitre 4

A travers les chapitres précédents, on comprend bien l'importance des points critiques surtout dans la dynamique holomorphe (théorème de Fatou [4, 6]). Dans ce chapitre, nous essayons de faire de même pour le cas non-holomorphe et donc les systèmes dynamiques dans \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$. Déjà dans [46] et [12], on montre que pour le cas unidimensionnel (i.e. $n = 1$), un résultat similaire à celui du théorème de Fatou pour les points critiques est possible sous une condition imposée sur la dérivée Schwarzienne du système. Dans ce travail, nous donnons une condition généralisant le résultat de David Singer [46], pour le cas $n > 1$. Nous exploitons en suite ce résultat dans l'analyse - par un procédé numérique - du plan paramétrique d'un système dynamique engendré par la méthode de Cauchy perturbée.

Nous terminons par deux annexes, la première (Annexe A), contient le calcul des cycles attractifs d'ordre deux pour la méthode de Cauchy non-holomorphe. La deuxième annexe

(Annexe B) est consacrée aux codes de quelques programmes informatiques, utilisés dans ce travail.

Table des matières

1	Préliminaire	2
1.1	Sphère de Riemann	2
1.2	Dynamique des fonctions holomorphes	3
1.3	La dichotomie de Fatou et Julia	4
1.4	Exemples importants	5
1.4.1	L'itération de la transformation de Möbius	5
1.4.2	L'itération $z \mapsto z^2$	8
1.5	Quelques propriétés	11
1.6	Conjugaison	14
2	La dynamique de la méthode de Newton	16
2.1	Introduction	16
2.1.1	La méthode de Newton réelle	19
2.2	Problème de Cayley	21
2.3	La dynamique de la méthode de Newton	23
2.3.1	Application de la théorie de Julia et Fatou	24
2.4	Calcul numérique de l'ensemble de Julia	31
2.4.1	Première Méthode	31
2.4.2	Deuxième méthode (amélioration de la première méthode)	33
2.5	La méthode de Newton modifiée	34
2.5.1	Dimension fractale	35
2.5.2	La méthode de Newton continue (ce qui se passe lorsque $\lambda \rightarrow 0$)	41
2.6	Conclusion du chapitre 2	47

3	La dynamique de la méthode de Cauchy	49
3.1	Singularités, multiplicateurs et étude locale de la dynamique	49
3.2	Points critiques	50
3.3	Applications	51
3.3.1	Points critiques et connexité de l'ensemble de Julia	52
3.4	La Méthode de Cauchy non-holomorphe	54
3.4.1	Singularités	56
3.4.1.1	Cycles d'ordre deux	58
3.5	Conclusion du chapitre 3	59
4	La Méthode de Cauchy Perturbée	60
4.1	Position du problème	60
4.2	Points critiques et bassins d'attraction	61
4.2.1	Le cas unidimensionnel	61
4.3	Le cas bidimensionnel	63
4.3.1	Applications	67
4.4	Conclusion du chapitre 4	67
	Appendices	69
A	Calcul des cycles d'ordre deux de la récurrence g	70
A.1	Cycles d'ordre deux de la transformation g	70
B	Programmes en Fortran90 et en C++	72
B.1	Programme en Fortran90 donnant le bassin d'attraction d'une récurrence complexe	72
B.2	Programme en Fortran90 donnant le plan paramétrique d'une récurrence complexe	75
B.3	Programme en C++ donnant le bassin d'attraction de la méthode de Newton	80
	Bibliographie	86

Table des notations

Dans cette thèse, nous utilisons les notations suivantes :

\mathbb{N}	L'ensemble des entiers naturels
\mathbb{R}	Le corps des nombres réels
\mathbb{C}	Le corps des nombres complexes
S^n	La sphère unité euclidienne de \mathbb{R}^{n+1}
\mathbb{D}	Le disque unité ouvert dans \mathbb{C}

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions de base de la dynamique holomorphe et nous donnons quelques propriétés fondamentales.

1.1 Sphère de Riemann

Nous considérons l'ensemble $\hat{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ obtenu par adjonction au plan complexe \mathbb{C} , d'un point à l'infini. La projection stéréographique qui à tout point (x_1, x_2, x_3) de la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, excepté $(0, 0, 1)$, associe un nombre complexe

$$z = \pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3},$$

permet d'identifier $\hat{\mathbb{C}}$ à la sphère S^2 . De plus, la métrique sphérique d_S définie par

$$d_S(z, w) \equiv \left\| \pi^{-1}(z) - \pi^{-1}(w) \right\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

et

$$d_S(z, \infty) \equiv \lim_{w \rightarrow \infty} \left\| \pi^{-1}(z) - \pi^{-1}(w) \right\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

induit sur $\hat{\mathbb{C}}$ une structure de topologie qui, de plus les cartes $z \mapsto z$ sur \mathbb{C} et $z \mapsto \frac{1}{z}$ au voisinage de l'infini, munit $\hat{\mathbb{C}}$ d'une structure de variété compacte complexe de dimension 1, appelé la sphère de Riemann (voir [5]).

1.2 Dynamique des fonctions holomorphes

Définition 1.1. Une fonction $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est appelée fonction rationnelle si

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (1.1)$$

où P et Q sont deux polynômes complexes sans un facteur commun. Le degré de R est le nombre de points de $R^{-1}(a)$ (comptés avec multiplicité) pour $a \in \hat{\mathbb{C}}$, ou encore le maximum des degrés de P et de Q .

Le théorème suivant justifie l'intérêt pour les fractions rationnelles.

Théorème 1.1. L'ensemble des applications holomorphes de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ dans elle-même coïncide avec le corps des fractions rationnelles.

Démonstration. voir [1, 19]. \square

Par la suite, on note $R^k \equiv R \circ \dots \circ R$ (k fois) et $R^0 := I_d$. La dynamique holomorphe est formée par la composition répétée de l'application R de $\hat{\mathbb{C}}$ dans lui même.

Définition 1.2. Prenons un point $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, la suite $\{z_n\}$ est définie par

$$z_{k+1} = R^{k+1}(z_0) = R(z_k).$$

Cette suite est appelée l'orbite - future - de z_0 notée $\mathcal{O}(z_0)$. L'orbite inverse de z_0 notée $\mathcal{O}^-(z_0)$, est l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^-(z_0) &= \left\{ w : \exists k \in \mathbb{N}, R^k(w) = z_0 \right\}, \\ &= \bigcup_k R^{-k}\{z_0\}. \end{aligned}$$

Le problème central de la dynamique holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ consiste à étudier les différents types d'orbites $\mathcal{O}^-(z_0)$, $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, sous l'action du "semi-groupe" $\{R^n\}_{n \geq 0}$ des itérés d'une fraction rationnelle R de degré supérieur à un, ainsi que les variations subies par ces orbites lorsque le point z_0 varie. Cela conduit à donner les définitions suivantes :

Définition 1.3. Un point $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ est périodique de période $p > 1$ (ou p -périodique) s'il vérifie les deux relations

$$\begin{aligned} R^p(\alpha) &= \alpha \\ R^i(\alpha) &\neq \alpha, 1 < i < p. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Si

$$R(\alpha) = \alpha, \tag{1.3}$$

α est appelé point fixe.

Définition 1.4. Si α est p -périodique son orbite $\mathcal{O}(\alpha)$ est appelé aussi cycle d'ordre p (ou p -cycle) et on lui associe son multiplicateur μ défini par

$$\mu \equiv (R^p)'(\alpha) = \prod_{i=0}^{p-1} R'(R^i(\alpha)), \tag{1.4}$$

localement

$$R^p(z) = \alpha + \mu(z - \alpha) + O(|z - \alpha|^2). \tag{1.5}$$

Définition 1.5. On dit que le cycle α est

- répulsif* si $|\mu| > 1$;
- attractif (superattractif)* si $0 \leq |\mu| < 1$ ($\mu = 0$);
- indifférent rationnel* si $\mu = e^{2i\pi m/n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$;
- indifférent irrationnel* si $\mu = e^{2i\pi\theta}$, θ irrationnel.

1.3 La dichotomie de Fatou et Julia

Historiquement, c'est Fatou et Julia qui furent les premiers à proposer la dichotomie de la sphère de Riemann en deux sous ensembles disjoints sous l'action de la dynamique d'une fonction rationnelle.

Définition 1.6. Soit (X, d) un espace métrique et U un ouvert de X . La famille de fonctions $\{f_i : U \rightarrow X\}$ est équicontinue sur l'ensemble $E \subset U$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $d(x_1, x_2) < \delta$ pour $x_1, x_2 \in E$, implique $d(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \epsilon$, pour tout i .

Définition 1.7. On dit que la suite de fonctions $\{f_k\}$ est normale au sens de Montel en un point $z \in \hat{\mathbb{C}}$, s'il existe un voisinage V de z tel que la suite $\{f_k : V \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}$ soit équicontinue.

Théorème 1.2. Soit U un domaine (ensemble ouvert et connexe) dans $\hat{\mathbb{C}}$; a, b, c , trois points distincts et $\{f_k : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}} - \{a, b, c\}\}$ une suite de fonctions holomorphes, alors $\{f_k\}$ est normale sur U .

Démonstration. voir [1, 28]. \square

Définition 1.8. (La dichotomie de Julia et Fatou) L'ensemble de Fatou \mathcal{F}_R est l'ensemble des points où la suite de fonctions $\{R^k\}$ est normale; l'ensemble de Julia \mathcal{J}_R est l'ensemble défini par

$$\mathcal{J}_R = \hat{\mathbb{C}} - \mathcal{F}_R.$$

Autrement dit, La sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ est formée de deux ensembles complémentaires \mathcal{F}_R et \mathcal{J}_R ; l'ensemble de Fatou constitué des points $z \in \hat{\mathbb{C}}$ dont l'orbite $\mathcal{O}(z)$ est stable par perturbation du point initial z . En revanche, le comportement de l'orbite d'un point $z \in \mathcal{J}_R$ sous l'influence d'une perturbation de z n'est pas prévisible.

1.4 Exemples importants

Nous traitons maintenant quelques exemples célèbres de la théorie des itérations holomorphes

1.4.1 L'itération de la transformation de Möbius

La transformation de Möbius est la fonction rationnelle de la forme

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

On peut facilement vérifier que

$$R(\infty) = \frac{a}{c}, \quad R\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,$$

si $c \neq 0$. Et que $R(\infty) = \infty$, si $c = 0$. La transformation de Möbius est une classe de fonctions très strictes où il est possible de calculer explicitement les itérations successives. Par exemple, si $a = 3$, $b = -2$, $c = 2$ et $d = -1$, on a

$$R(z) = \frac{3z - 2}{2z - 1}.$$

Par induction

$$R^n(z) = \frac{(2n+1)z - 2n}{2nz - (2n-1)} = 1 + \frac{z-1}{2nz - (2n-1)},$$

et pour tout z on a

$$R^n(z) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Malgré les "apparences" le point 1 n'est pas un point fixe attractif. Puisque $R'(1) = 1$, quelques calculs montrent que pour $z_0 = 1 - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est assez petit, la suite $\{z_n\}$ commence par s'éloigner du point 1. Cependant elle finit par retourner vers celui-ci.

En général toute transformation de Möbius R possède un seul point fixe (double) ou deux points fixes distincts :

Cas 1 : R possède un seul point fixe. Supposons que R possède l'infini comme un point fixe unique. Alors $R(z) = z + \beta$, et pour $\beta \neq 0$ on a

$$R^n(z) = z + n\beta$$

pour tout z , $R^n(z) \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$.

Maintenant supposant que R admet $\alpha \in \mathbb{C}$ comme un point fixe unique. Dans ce cas, soit $M(z) = \frac{1}{z - \alpha}$, ($M^{-1}(z) = \alpha + \frac{1}{z}$) et définissons S par

$$S(z) = (MRM^{-1})(z). \tag{1.6}$$

S admet un point fixe z , si seulement si $z = \infty$, ce qui implique que S est une translation et

donc $S^n(z) \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$. De plus,

$$\begin{aligned} S^n(z) &= (MRM^{-1})(MRM^{-1}) \cdots (MRM^{-1})(z) \\ &= (MR^nM^{-1})(z), \end{aligned} \tag{1.7}$$

en remplaçant z par $M(z)$, et en appliquant M^{-1} , on obtient

$$M^{-1}S^nM = R^n,$$

impliquant

$$R^n(z) \rightarrow M^{-1}(\infty) = \alpha.$$

Donc si R est une application de Möbius avec un point fixe unique α , alors pour tout z , $R^n(z) \rightarrow \alpha$. Notons que la formule (1.7) permet de calculer R^n explicitement par

$$R^n = M^{-1}S^nM.$$

Cas 2 : R possède exactement deux points fixes distincts. Supposons que R fixe les deux points 0 et ∞ . Alors $R(z) = az$ et $R^n(z) = a^n z$, et pour tout z autre que 0 et ∞ , on a

$$\begin{aligned} R^n(z) &\rightarrow 0 && \text{si } |a| < 1; \\ |R^n| &= |z| && \text{si } |a| = 1; \\ R^n(z) &\rightarrow \infty && \text{si } |a| > 1. \end{aligned}$$

pour $|a| = 1$, on a aussi

- (i) a est la racine n -ème de l'unité et R^n est l'identité ;
- (ii) a n'est pas une racine de l'unité, et les points $R^n(z)$ sont denses dans le cercle centré à l'origine et de rayon $|z|$.

Maintenant, on suppose que R admet exactement deux points fixes α_1 et α_2 où $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Soit la transformation de Möbius suivante

$$M(z) = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}$$

qui transforme α_1 en 0 et α_2 en ∞ . Si $S = MRM^{-1}$, alors S fixe 0 et ∞ et les remarques précédentes s'appliquent dans ce cas. Nous avons vu que les itérés d'une fonction -assez simple- de degré un, à savoir les transformations de Möbius, se comportent d'une façon très simple, mais pour le reste de ce mémoire, nous serons seulement concernés par des fonctions rationnelles de degré supérieur ou égal à deux.

1.4.2 L'itération $z \mapsto z^2$

Soit l'itération quadratique

$$R(z) = z^2.$$

Les points fixe de R sont 0 (attractif), 1 (répulsif) et ∞ (attractif), et on a $z_n \rightarrow 0$, quand $|z_0| < 1$ et $z_n \rightarrow \infty$ quand $|z_0| > 1$. Il est évident que la dynamique intéressante de R (c'est-à-dire, l'action des itérés R^n) se produira sur le cercle d'unité

$$S^1 = \{z : |z| = 1\}$$

D'abord, le cercle S^1 a la propriété intéressante, d'être complètement invariant (c'est-à-dire, les points de S^1 restent dans S^1 , par les applications R et R^{-1}). Le fait que $\mathcal{J}_R = S^1$, et l'invariance de \mathcal{J}_R est un des résultats de base dans la théorie générale. Le comportement des points $R^n(e^{i\theta})$ sur le cercle unité S^1 est plutôt complexe et dépend du nombre θ (voir [13]).

Posons $z = e^{i\theta}$, on a

$$R^n(z) = e^{2^n i\theta}$$

donc, si z est de la forme

$$e^{\frac{2\pi ir}{2^m}} \tag{1.8}$$

pour certains entiers r et m , alors $R^m(z) = e^{2\pi ir} = 1$ et par conséquent

$$R^n(z) = 1 \quad \text{quand } n \geq m.$$

Notons que l'ensemble des points de la forme (1.8) est dense dans \mathbb{S}^1 et en partant d'un de ces points les itérations finissent sur le point fixe 1 après un nombre fini d'étapes. Par contre, si on démarre d'un point z_0 dans \mathbb{S}^1 , mais qui n'est pas de la forme (1.8), alors la suite z_n des itérations converge vers un point quelconque. En effet, si $z_n \rightarrow w$, alors w doit être un point fixe de R dans \mathbb{S}^1 et donc $w = 1$ qui est répulsif, et on doit avoir $z_n = 1$ pour un certain n (sinon $w = 1$ devient un point d'accumulation pour la suite $\{z_n\}$, contredisant le fait que w est un point fixe répulsif). Ce qui implique que z_0 doit être de la forme (1.8) contrairement à l'hypothèse.

Dans la suite nous analyserons le comportement complexe et "chaotique" des itérations $R^n(z)$ dans le cercle unité. En effet chaque arc du cercle \mathbb{S}^1 contient une infinité de points qui convergent vers le point 1 et d'autres qui ne convergent vers aucun point. Pour un point z_0 dans \mathbb{S}^1 on peut choisir un autre point $w_0 \in \mathbb{S}^1$ arbitrairement proche de z_0 de façon à ce que z_n et w_n se comportent différemment et que si z_0 et w_0 appartiennent au disque unité

$$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}.$$

Les point z_n et w_n convergent de manière similaire (convergence vers 0). La même chose si z_n et w_n sont dans $\{z : |z| > 1\}$ (les deux suites convergent vers ∞) ce qui implique

$$\mathcal{J}_R = \mathbb{S}^1$$

et

$$\mathcal{F}_R = \mathbb{S}^1 - \hat{\mathbb{C}}.$$

Maintenant, prenons n'importe quel arc I d'angle positif dans \mathbb{S}^1 . L'application $R^2 : z \mapsto z^2$ double l'angle polaire des points de \mathbb{S}^1 donc si l'arc I correspond à l'angle θ alors, l'arc $R(I)$ va correspondre à l'angle 2θ . Ce qui implique que pour n assez grand, $R^n(I)$ couvre le cercle unité \mathbb{S}^1 . Cette propriété reste valable pour I assez petit. Le fait que sous l'action de R^n un arc arbitrairement petit couvre le cercle unité \mathbb{S}^1 tout entier est une propriété très importante pour l'ensemble \mathcal{J}_R .

Considérons un point n -périodique de R , qui est un point fixe de R^n et puisque

$$R^n(z) = z^{2^n},$$

alors $R^n(z) = z$, impliquant

$$z^{2^n-1} = 1.$$

Donc, si

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{2^n-1}},$$

alors α est un point fixe de R^n mais pas de R^m pour tout $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et que pour tout entier k , il existe un point périodique dans \mathbb{S}^1 de période k .

Prenons z dans \mathbb{S}^1

$$z = e^{2\pi i\theta}$$

où θ vérifie $0 \leq \theta \leq 1$. L'image de z par R est $e^{2\pi i2\theta}$ en ignorant la partie entière de 2θ et puisque la fonction $t \mapsto e^t$ est périodique de période $2\pi i$, il est possible d'étudier le comportement de l'application R sur \mathbb{S}^1 par l'intermédiaire de l'application $\theta \mapsto 2\theta \bmod(1)$ dans l'intervalle $[0, 1[$.

Écrivons θ dans la base binaire

$$\theta = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \bmod(1),$$

où les a_i ($i = 1, 2, \dots$) sont des 0 ou des 1. L'action de $\theta \mapsto 2\theta$ est donnée par

$$2\theta = 0, a_2 a_3 a_4 \dots \bmod(1).$$

Maintenant, on peut construire des points z_0 dans \mathbb{S}^1 de telle façon que la suite z_n soit dense dans \mathbb{S}^1 . Simplement en mettant côte à côte les suites finies de séquences a_1, a_2, a_3, \dots formées seulement de 1 et de 0. En appliquant la transformation $\theta \mapsto 2\theta \bmod(1)$, un nombre bien défini de fois, la suite a_1, a_2, a_3, \dots est transformée en n'importe quelle suite prédéterminée. De la même façon, on peut construire des points z_0 dans \mathbb{S}^1 de manière à ce que la suite $\{z_k\}$ est infinie mais pas dense dans \mathbb{S}^1 (voir [13]).

Remarque 1.1. Il est clair que les propriétés de l'itération $z \mapsto z^2$ sont les mêmes que celle de l'itération $z \mapsto bz^d$ où $d \geq 2$ et $|b| = 1$ et que pour cette dernière $\mathcal{J}_R = \mathbb{S}^1$, donc on a aussi

$$\mathcal{F}_R = \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{S}^1.$$

Dans le cas général, si R est un polynôme de degré supérieur ou égal à deux, il est facile d'identifier les ensembles de Julia et de Fatou, grâce à la remarque suivante :

Remarque 1.2. Si R est un polynôme, l'ensemble de Julia \mathcal{J}_R est la frontière de l'ensemble des points bornés sous l'action de R . i.e.

$$K_R = \left\{ z : |R^k(z)| \not\rightarrow \infty, k \rightarrow \infty \right\},$$

appelé ensemble de Julia rempli (voir Fig. 1.1).

1.5 Quelques propriétés

Définition 1.9. Soit f une application d'un ensemble X vers lui même. Une partie $E \subset X$,

- (i) est invariante si $f(E) = E$;
- (ii) est inversement invariante si $f^{-1}(E) = E$;
- (iii) est complètement invariante si $f(E) = f^{-1}(E) = E$.

Théorème 1.3. Soit R une fonction rationnelle de degré supérieur ou égal à deux et supposons que la partie finie $E \subset \hat{\mathbb{C}}$ est complètement invariante. Alors E admet au plus deux éléments.

Démonstration. Voir [5] (Théorème 3.2.1, p53). \square

Proposition 1.1. \mathcal{F}_R est un ensemble ouvert complètement invariante i.e.

$$R(\mathcal{F}_R) = R^{-1}(\mathcal{F}_R) = \mathcal{F}_R. \quad (1.9)$$

Démonstration. Le fait que \mathcal{F}_R est ouvert découle directement de la définition, l'invariance aussi (voir aussi [6, 7]). \square

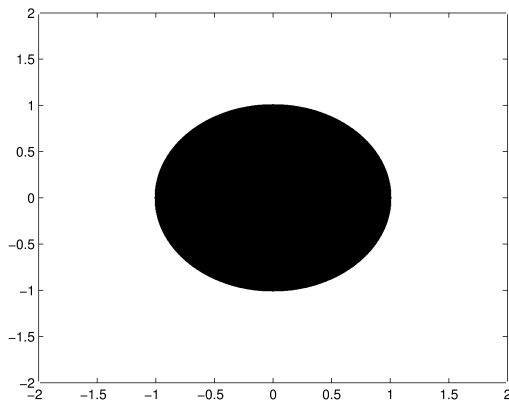
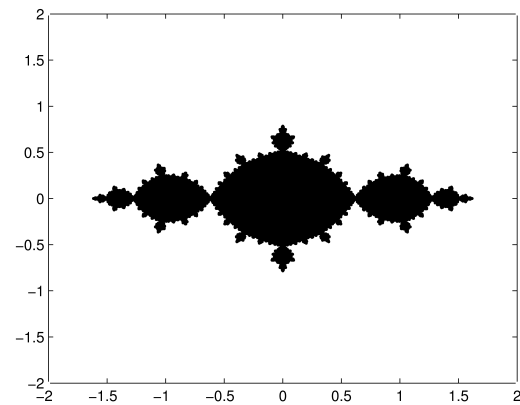

 (a) $R(z) = z^2$

 (b) $R(z) = z^2 - 1$

 Fig. 1.1: L'ensemble de Julia rempli pour le polynôme rationnelle $R(z) = z^2 + c$; $c \in \mathbb{C}$

Théorème 1.4. *L'ensemble de Julia \mathcal{J}_R est non vide, fermé et complètement invariant.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}_R = \hat{\mathbb{C}}$. La famille de fonction $\{R^n\}$ est normale sur $\hat{\mathbb{C}}$, donc elle possède une sous-suite $\{R^{n_i}\}$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe f qui est non constante, du fait que $R^{n_i}(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$. Puisque f est une fonction continue de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$, on obtient une contradiction si on calcul le degré de f ,

$$\deg(f) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \deg(R^{n_i}) = \infty.$$

Mais $\deg(f)$ est fini. L'invariance de \mathcal{J}_R est une conséquence de l'invariance de \mathcal{F}_R . \square

On trouve dans [4, 6, 7] les démonstrations des résultats suivants :

Lemme 1.1. *Pour toute fonction rationnelle R et pour tout entier positif k , $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_{R^k}$ et $\mathcal{J}_R = \mathcal{J}_{R^k}$.*

Lemme 1.2. *Les cycles attractifs (et super-attractifs) sont contenus dans l'ensemble de Fatou \mathcal{F}_R .*

Lemme 1.3. *Les cycles répulsifs ou indifférents rationnel, i.e. de multiplicateur*

$$e^{2i\pi \frac{p}{q}}$$

sont contenus dans l'ensemble de Julia \mathcal{J}_R .

Lemme 1.4. *Si \mathcal{P}_R est l'ensemble des points périodiques répulsifs ; alors*

$$\mathcal{J}_R = \overline{\mathcal{P}_R}.$$

Lemme 1.5. Si $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ est un point périodique répulsif pour R , alors

$$\mathcal{J}_R = \overline{\{z \in \hat{\mathbb{C}} : R^k(z) = \alpha, \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}\}}$$

Théorème 1.5. L'ensemble de Julia vérifie les propriétés suivantes :

- L'ensemble \mathcal{J}_R est d'intérieur vide sauf si $\mathcal{J}_R = \hat{\mathbb{C}}$.
- \mathcal{J}_R est parfait – sans points isolés –.

Remarque 1.3. La fonction

$$z \mapsto \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)},$$

(due à Lattès [32]) est un exemple d'une fonction rationnelle avec $\mathcal{J}_R = \hat{\mathbb{C}}$.

Définition 1.10. Le bassin d'attraction $\mathcal{A}(\alpha)$ d'un point périodique attractif α , associé à R est défini par

$$\mathcal{A}(\alpha) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : R^k(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha\}.$$

Le bassin immédiat de α est la composante connexe du bassin de α contenant α . le bassin (resp. bassin immédiat) d'un cycle attractif est la réunion des bassins (resp. bassins immédiat) des points de ce cycle.

Théorème 1.6. Les bassins d'attraction des cycles attractifs ou super-attractifs sont contenus dans l'ensemble de Fatou \mathcal{F}_R .

Théorème 1.7. Si α est un point périodique attractif pour R ; alors

$$\mathcal{J}_R = \partial\mathcal{A}(\alpha).$$

Définition 1.11. Un point critique de R est un point ω avec

$$R'(\omega) = 0.$$

Théorème 1.8 (Julia-Fatou). Tout bassin immédiat d'un cycle (fini) attractif contient au moins un point critique.

Théorème 1.9. Une fonction rationnelle de degré d possède $2d - 2$ points critiques comptés avec multiplicité.

En conséquence, on a le résultat suivant :

Corollaire 1.1. Une fonction rationnelle R de degré d , a au plus $2d - 2$ cycles attractifs.

1.6 Conjugaison

La notion de conjugaison joue un rôle important dans l'étude de la dynamique holomorphe.

Définition 1.12. Si $R(z)$ et $H(z)$ sont deux fonctions rationnelles et $M(z)$ est une transformation de Möbius (fonction rationnelle bijective), telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R} & \hat{\mathbb{C}} \\ M \downarrow & & \downarrow M \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{H} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

commute, alors on dit que R et H sont analytiquement conjuguées et on écrit

$$H = M \circ R \circ M^{-1}.$$

Remarque 1.4. Si R et H sont conjuguées par M , alors R^k et H^k sont aussi conjuguées par M , i.e.

$$H = M \circ R \circ M^{-1} \iff H^k = M \circ R^k \circ M^{-1}.$$

Dans ce cas les transformations R et H possèdent la même dynamique.

Théorème 1.10. Une fonction rationnelle non constante R est conjuguée à un polynôme, si seulement si, il existe un point $w \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $R^{-1}\{w\} = \{w\}$.

Démonstration. Il faut noter qu'une fonction rationnelle est un polynôme si et seulement si R admet un pôle en ∞ , et aucun dans \mathbb{C} ; plus précisément, si et seulement si $R^{-1}\{\infty\} = \{\infty\}$. Prenons

$$M(z) = \frac{z}{z-w}, \quad M^{-1}(z) = \frac{wz}{z-1},$$

par la conjugaison $H = M \circ R \circ M^{-1}$, on a

$$H^{-1}\{\infty\} = (M \circ R^{-1} \circ M^{-1})\{\infty\} = \{\infty\}.$$

□

Chapitre 2

La dynamique de la méthode de Newton

2.1 Introduction

La méthode de Newton est un procédé itératif classique d'approximation des zéros (ou racines) d'une fonction différentiable. Cette technique a été appliquée initialement sur la droite réelle de la manière suivante : Étant donnée une fonction différentiable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous voulons trouver un point $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $f(\xi) = 0$. Si x_0 est une approximation d'un zéro de $f(x)$, la méthode de Newton raffine cette approximation en prenant pour nouvelle valeur la solution x_1 de l'équation linéarisée au voisinage de x_0 :

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0.$$

Lorsque $f'(x_0)$ est non-nulle, on obtient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

D'où le procédé itératif suivant

$$x_{k+1} = N_f(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (2.1)$$

L'idée de résoudre une équation en améliorant une estimation de la solution, par l'ajout d'un terme correcteur est fort ancienne.

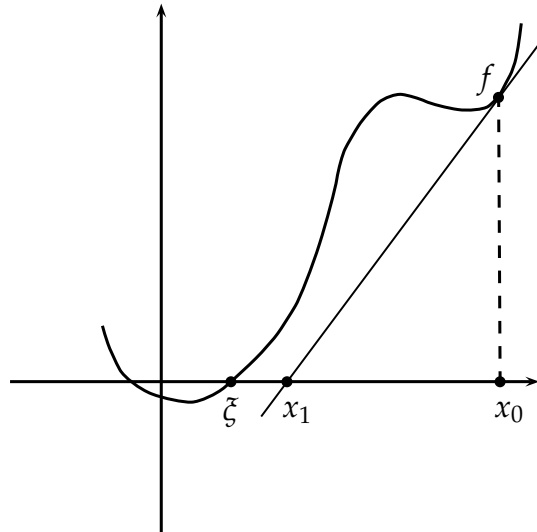


Fig. 2.1: Pour une valeur initiale x_0 suffisamment proche de la racine ξ de f , la racine x_1 de la tangente à f en x_1 est une meilleure approximation de ξ .

En 1664 Viète utilisait la formule

$$x_{k+1} = x_k - 10^{n-k-1} \left[\frac{f(x_k)}{f(x_k + 10^{n-k-1}) - f(x_k)} \right],$$

en s'inspirant de procédés semblables à ceux utilisés par des mathématiciens arabes du XI^{ème} au XII^{ème} siècle, tels que Al-Khayyām, Sharaf al-Dīn al-Tūsī et Al-Kashī [22, 50]. La méthode sera développée d'une manière satisfaisante dans "De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" de 1669, où Issac Newton (1643 – 1727) considère des fonctions polynomiales et utilise une technique de linéarisation. Le cas d'une fonction non-polynomiale ($f(x) = x - e \sin(x) + M$) est décrit dans "Philosophiae Naturalis Principia Mathematicae" publiée en 1687. D'autres noms sont associés à cette méthode : Joseph Raphson et Thomas Simpson [22], le premier pour avoir raffiné la méthode de Newton sur les polynômes et le deuxième pour avoir introduit la notion de "luxions" c'est-à-dire les dérivées. Dans le cas d'une fonction réelle continûment différentiable, la convergence d'une suite $\{x_n\}$ générée par la méthode de Newton peut être obtenue comme application de la formule de Taylor. En effet, si le point initial est choisi suffisamment proche d'une racine simple ξ de f . Au voisinage de ξ , on écrit

$$f(x) = f(\xi) + f'(x)(x - \xi) + \frac{f''(\mu)}{2}(x - \xi)^2,$$

avec μ entre x et ξ . Au bout d'une itération, la méthode de Newton donne la relation

$$N_f(x) - \xi = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \xi = \frac{f''(x)}{2f'(x)}(x - \xi)^2.$$

Pour un intervalle compact I incluant x et ξ , on pose $\mu_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|$ et $\mu_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|$.

Alors, pour tout $x_0 \in I$

$$|N_f(x_0) - \xi| < \frac{\mu_2}{2\mu_1} |x_0 - \xi|^2.$$

Par récurrence, on obtient

$$\mu |x_k - \xi| < (\mu |x_0 - \xi|)^{2^n}.$$

Où $\mu = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$, en passant par le logarithme

$$\log |x_k - \xi| < 2^n \log(\mu |x_0 - \xi|) - \log(\mu).$$

La convergence de x_k vers ξ est donc quadratique, si on considère que $|x_0 - \xi| < \frac{1}{\mu}$ ($\Rightarrow \log(\mu |x_0 - \xi|) < 0$). D'autre part, dans plusieurs cas, on peut trouver des ouverts de points initiaux tels que la suite des itérées ne converge vers aucune racine de f . Considérons

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$

pour tout point initial $x_0 \in \mathbb{R}$, la méthode de Newton donne l'itération suivante

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 - 1}{\frac{3}{2}x_k^2 - 1}.$$

Il est facile de voir que pour $x_0 = 0$, on a $x_1 = 1$ et $x_2 = 0 = x_0$, donc la suite ne converge pas vers une racine de f . On dit que la méthode possède un point périodique en 0, et son bassin d'attraction est un ouvert contenant des points ne convergeant pas vers une racine de f . Il faut noter que le procédé (2.1) reste valable dans des contextes bien plus larges que celui d'une simple fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (par exemple, dans le cas où f est une application différentiable d'un espace de Banach E , à valeurs dans E). Dans [27, 48], on démontre plusieurs types de résultats concernant la convergence :

- Un résultat de convergence locale : Pour toute solution ξ de l'équation $f(x) = 0$ telle

que $f'(\xi)$ soit inversible, il existe un voisinage U de ξ tel que pour tout $x_0 \in U$, la suite définie par la méthode de Newton soit définie pour tout entier et converge quadratiquement vers ξ .

- Un résultat de convergence un peu plus précis qui fournit, sous certaines hypothèses, l'existence d'une boule B telle que la suite donnée par la méthode de Newton soit définie pour tout premier terme dans B et converge (quadratiquement) vers un élément ξ de B qui est l'unique solution dans B de l'équation $f(x) = 0$.
- Dans certains cas très particuliers, comme celui des fonctions convexes, un résultat de convergence globale, pour toute valeur initiale x_0 .

2.1.1 La méthode de Newton réelle

Commençons par étudier la restriction de (2.1) à la droite réelle (voir [40, 41]). Si $p(x) = x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ et pour $x_0 \in \mathbb{R}$, la méthode de Newton s'écrit sous la forme

$$x_{k+1} = N_p(x_k) = \frac{2x_k^3 + 1}{3x_k^2} \quad (2.2)$$

Puisque $N_p(x) = x$ si et seulement si $p(x) = 0$, alors N_p possède un seul point fixe qui est $\alpha = 1$. Ce point est superattractif ($N'(1) = 0$). Il est clair que N_p n'est pas définie pour $x = 0$, donc 0 est dans l'ensemble de Julia ainsi que les points $x \in \mathbb{R}$ tels que $N_p^k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. L'idée maintenant est de construire une partie de l'ensemble des points non-convergeants

$$j_{N_p} = \{x \in \mathbb{R} : p(N_p(x)) \not\rightarrow 0\}$$

à partir des images du point à l'origine par la transformation inverse de N_p (cet ensemble est noté $r(p)$ dans [24]). En remplaçant dans (2.2), x_{k+1} par x_+ et x_k par x , et en résolvant cette dernière par rapport à x . Nous obtenons pour $x_+ < 1$ la solution unique

$$x = N_p^{-1} = \frac{\left(-2 + x_+^3 + 2\left(\sqrt{-x_+^3 + 1}\right)\right)^{2/3} + x_+^2}{2\left(-2 + x_+^3 + 2\left(\sqrt{-x_+^3 + 1}\right)\right)^{1/3}} + \frac{x_+}{2},$$

qui définit la transformation inverse de N_p . Donc, on peut construire l'ensemble $r(p)$ par

$$\begin{aligned}\chi_0 &= 0, \\ \chi_1 &= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ \chi_{k+1} &= N_p^{-1}(\chi_k).\end{aligned}\tag{2.3}$$

La transformation inverse N_p^{-1} n'admet pas de points fixe, puisque pour $u < 1$ nous avons

$$\frac{\left(-2 + u^3 + 2\left(\sqrt{-u^3 + 1}\right)\right)^{2/3} + u^2}{2\left(-2 + u^3 + 2\left(\sqrt{-u^3 + 1}\right)\right)^{1/3}} + \frac{u}{2} - u < 0$$

On remarque que la dernière inégalité implique la décroissance de la suite (2.3) et que $\{\chi_k\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbb{R}_-$. Terminons ce paragraphe par l'étude du comportement de la suite $\{\chi_k\}$ au voisinage de l'infini. En calculant le quotient

$$\frac{\chi_{k+1}}{\chi_k} = \frac{\Phi(\chi_k)^2 + \chi_k \Phi(\chi_k) + \chi_k^2}{2\chi_k \Phi(\chi_k)} = \frac{1}{2} \left(\Gamma + \frac{1}{\Gamma} \right) + \frac{1}{2}$$

où

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= -2 + u^3 + 2\left(\sqrt{1 - u^3}\right), \\ \Gamma &= \frac{\Phi(\chi_k)}{\chi_k}.\end{aligned}$$

et en résolvant le problème d'extrêma suivant

$$\min_{\Gamma > 0} \left(\Gamma + \frac{1}{\Gamma} \right),$$

on vérifie que

$$\frac{\chi_{k+1}}{\chi_k} > \frac{3}{2}$$

et puisque $\frac{\chi_{k+1}}{\chi_k} > 0$ et $\chi_k < 0$ pour tout $k \geq 0$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_k = -\infty$$

De plus, si $l_j = \chi_{j+1} - \chi_j$, on a $\frac{l_{j+1}}{l_j} = \frac{3}{2}$ et

$$\chi_j = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(1 - \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{3}{2} \right)^i \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Donc

$$r(p) = \{ \chi_j, j = 0, 1, 2, \dots \}.$$

2.2 Problème de Cayley

On considère la dynamique d'une classe spéciale de fonctions rationnelles, obtenues à partir de la méthode de Newton appliquée à des équations polynomiales complexes. L'étude de cette dynamique est très utile pour au moins deux raisons :

- Elle forme un cadre naturel des itérations non-polynomiales, et les propriétés de cette dynamique sont très utiles pour comprendre le comportement des algorithmes numériques.
- Elle permet de résoudre le problème de la convergence globale de la méthode de Newton, étant donné que les mêmes arguments du paragraphe précédent conduisent à déduire la convergence locale (au voisinage d'une racine) pour un polynôme complexe. En d'autres termes, définir les bassins d'attraction de ces racines et caractériser leurs frontières.

Arthur Cayley (1821 - 1895), fut le premier à proposer une solution au problème du comportement global de la méthode de Newton pour des polynômes quadratiques. En utilisant un langage mathématique moderne, nous énonçons les résultats obtenus par Cayley [9, 10] :

Théorème 2.1. *Soit $p(z)$ un polynôme quadratique, ayant deux racines distinctes. Alors la méthode de Newton*

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} \tag{2.4}$$

est analytiquement conjuguée avec le polynôme $R(z) \equiv z^2$.

Démonstration. Notons α et β , les racines de $p(z)$ et considérons la transformation de Möbius

$$M(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}.$$

Un calcul simple, nous donne

$$R(z) \equiv (M \circ N_p \circ M^{-1})(z) = z^2.$$

□

Le tableau (Tab. 2.1) contient la liste des points importants pour N_p et leurs images par la transformation de Möbius M .

z	α	β	∞	0
$M(z)$	0	∞	1	$\frac{\alpha}{\beta}$

Tab. 2.1: Les points important pour la transformation M

D'après l'analyse faite au chapitre précédent (paragraphe 1.4.2); R possède des points fixes superattractifs en 0 et ∞ . Leurs bassins d'attraction respectifs $\hat{\mathcal{A}}(0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$ et $\hat{\mathcal{A}}(\infty) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ sont séparés par l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_R = \partial\hat{\mathcal{A}}(0) = \partial\hat{\mathcal{A}}(\infty) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| = 1\}$. Alors que le 1 est un point fixe répulsif ($|R'(1)| > 1$). Par la conjugaison M on peut déduire que α et β sont des points fixes attractifs pour N_p , et que le point ∞ est répulsif, de plus on a

$$M(\mathcal{A}(\alpha)) = \hat{\mathcal{A}}(0),$$

$$M(\mathcal{A}(\beta)) = \hat{\mathcal{A}}(\infty),$$

$$M(\mathcal{J}_{N_p}) = \mathcal{J}_R.$$

L'ensemble de Julia \mathcal{J}_{N_p} correspond à la ligne

$$\Delta = \left\{ x + iy \in \hat{\mathbb{C}} : y = ax + b; a = \frac{\operatorname{Re}(\alpha) - \operatorname{Re}(\beta)}{\operatorname{Im}(\alpha) - \operatorname{Im}(\beta)}, b = \frac{\operatorname{Re}(\beta)^2 + \operatorname{Im}(\beta)^2 - \operatorname{Re}(\alpha)^2 + \operatorname{Im}(\alpha)^2}{\operatorname{Im}(\alpha) - \operatorname{Im}(\beta)} \right\},$$

médiane du segment de droite $[\alpha \beta]$. L'intérieur et l'extérieur du disque unité correspondent aux bassins d'attraction des seuls points fixes attractifs de la transformation N_p . Donc les deux demi-plans limités par la droite (Δ) , forment les bassins d'attraction $\mathcal{A}(\alpha)$ et $\mathcal{A}(\beta)$

(Voir Fig. 2.2). Cette analyse résoud parfaitement le problème dit de Cayley, dans le cas d'un polynôme de degré 2.

La question qui se pose maintenant est la suivante : Pouvons-nous appliquer la même technique de calcul à un polynôme de degré supérieur à 2 ? Autrement-dit, la fonction conjugaison M existe-elle pour la méthode de Newton dans ce cas ? Nous consacrons la première partie de ce chapitre pour répondre à cette question.

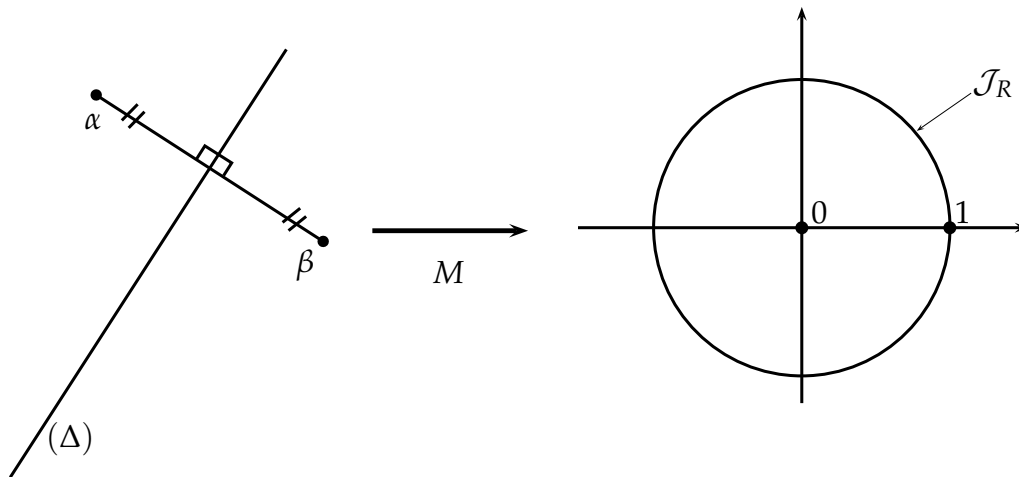


Fig. 2.2: La conjugaison par M

2.3 La dynamique de la méthode de Newton

Utiliser la méthode de Newton pour résoudre les équations polynomiales

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

revient à calculer l'orbite individuelle d'un système dynamique généré par la méthode de Newton

$$z_{k+1} = N_p(z_k) = z_k - \frac{p(z_k)}{p'(z_k)}. \quad (2.5)$$

Commençant nos investigations par un résumé de quelques remarques importantes concernant cette méthode.

Remarque 2.1.

(1) D'après (2.5), on voit que les racines de $p(z)$ correspondent aux points fixes de N_p

(2) Le point à l'infini est un point fixe répulsif (puisque $N'(\infty) = \frac{d}{d-1}$ via une conjugaison avec la transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$)

(3) La dérivée de N_p est

$$N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{[p'(z)]^2}, \tag{2.6}$$

donc les racines simples de $p(z)$ sont des points fixes superattractifs de N_p . En fait cette propriété est assez appréciée pour les algorithmes de résolution des équations algébriques, car elle permet de conclure qu'au voisinage d'un point fixe superattractif α , la convergence est quadratique. En effet, si z_k est assez proche de α , on a

$$N_p(z_k) = z_{k+1} = N_p(\alpha) + (z_k - \alpha)N'_p(\alpha) + \frac{N''_p(\alpha)}{2}(z_k - \alpha)^2$$

puisque $N_p(\alpha) = \alpha$ et $N'_p(\alpha) = 0$, on a

$$|z_{k+1} - \alpha| < c |z_k - \alpha|^2$$

avec $0 < c < \left| \frac{N''_p(\alpha)}{2} \right|$.

(4) Une racine α , de multiplicité $m > 1$ de $p(z)$ est un point fixe attractif mais non superattractif.

En effet la dérivée de N_p en α est

$$N'_p(\alpha) = \frac{m-1}{m}.$$

La convergence de l'algorithme est linéaire dans ce cas.

(5) Du fait que ∞ est un point fixe répulsif pour la méthode de Newton, et que les pôles de $N_p(z)$ sont des points critiques pour $p(z)$, alors, les orbites de N_p qui évitent les points critiques de $p(z)$, ont de grandes chances de converger rapidement vers les racines.

(6) D'après les remarques (3) et (5), il est clair qu'il y a deux types de points critiques de N_p , les racines et les points d'inflexions de $p(z)$.

2.3.1 Application de la théorie de Julia et Fatou

Dans ce paragraphe, nous verrons que l'application de la théorie de Julia et Fatou sur les itérations des fonctions rationnelles permet de répondre à la question de Cayley. Pour

la simplicité des calculs et sans perte de généralité, nous limiterons notre étude au cas du polynôme cubique

$$p(z) = z^3 - 1$$

l'équation de Newton (voir [40]) s'écrit sous la forme

$$2z_k^3 - 3z_{k+1}z_k^2 + 1 = 0, \quad (2.7)$$

plus explicitement

$$z_{k+1} = N_p(z_k) = z_k + \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} = \frac{2z_k^3 + 1}{3z_k^2}. \quad (2.8)$$

Les trois racines de $p(z)$ sont

$$\alpha_1 = 1, \alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

qui sont des points fixes superattractifs (remarque 2.1(3)) et, d'après le théorème 1.7, l'ensemble de Julia de N_p est donnée par

$$\mathcal{J}_{N_p} = \partial\mathcal{A}(\alpha_1) = \partial\mathcal{A}(\alpha_2) = \partial\mathcal{A}(\alpha_3). \quad (2.9)$$

Cette propriété exprime la dichotomie du plan $\hat{\mathbb{C}}$ et donne une réponse négative à la question de Cayley dans le sens où (2.9) veut dire qu'il n'y a pas de frontière lisse (une courbe de classe C^1) séparant les bassins d'attraction des racines de $p(z)$ (voir Fig. 2.3). Plus explicitement le théorème suivant permet de caractériser l'ensemble de Julia \mathcal{J}_{N_p} .

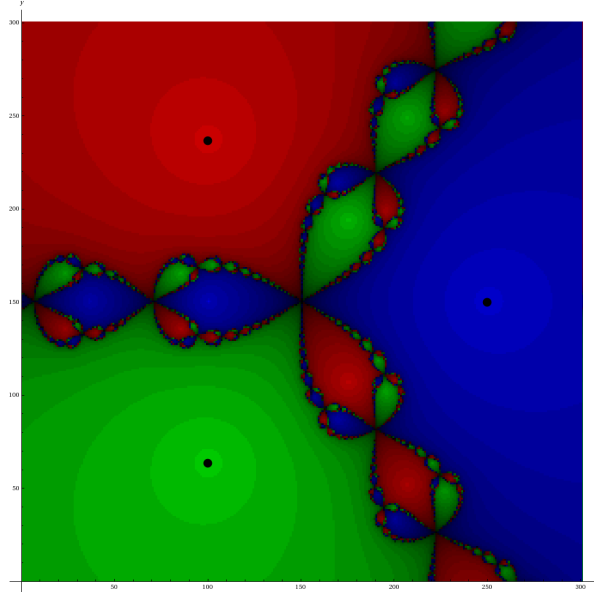


Fig. 2.3: La dichotomie de la méthode de Newton $N_p(z)$, $p(z) = z^3 - 1$.

Théorème 2.2. Si $p(z) = z^3 - 1$ et $N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$, alors

$$\mathcal{J}_{N_p} = \overline{\{N_p^{-k}(0), k \in \mathbb{N}\}}. \quad (2.10)$$

En effet, soit $z \in \mathcal{J}_{N_p}$ et U un voisinage arbitraire de z . Et par la propriété (2.10), on déduit qu'il existe $z' \in U$, tel que $N_p^k(z') = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Notons que $(N_p^k)'(z') \neq 0$ (sinon, $p(N_p^{k'}(z')) = 0$ pour un certain $k' \in \{0, \dots, k\}$), donc N_p^k est inversible sur un voisinage V de z' . Soit $B = B(0, \epsilon)$ une boule ouverte centrée en 0 et de rayon ϵ telle que N_p^k soit une bijection de V dans B . Soit $I_\epsilon =]0, \epsilon[\subset \mathbb{R}$, il est facile de voir (Fig. 2.4) que $I_\epsilon \subset \mathcal{A}(+1)$, et par symétrie, on a $D(I_\epsilon) \subset \mathcal{A}(\alpha_2)$ et $D^2(I_\epsilon) \subset \mathcal{A}(\alpha_3)$, où D est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, i.e.

$$D(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} z.$$

Donc

$$\mathcal{A}(\alpha_j) \cap U \neq \emptyset; j = 1, 2, 3.$$

Maintenant, pour la démonstration du théorème 2.2, il est nécessaire d'introduire la notion de points exceptionnels (voir [7, 26]).

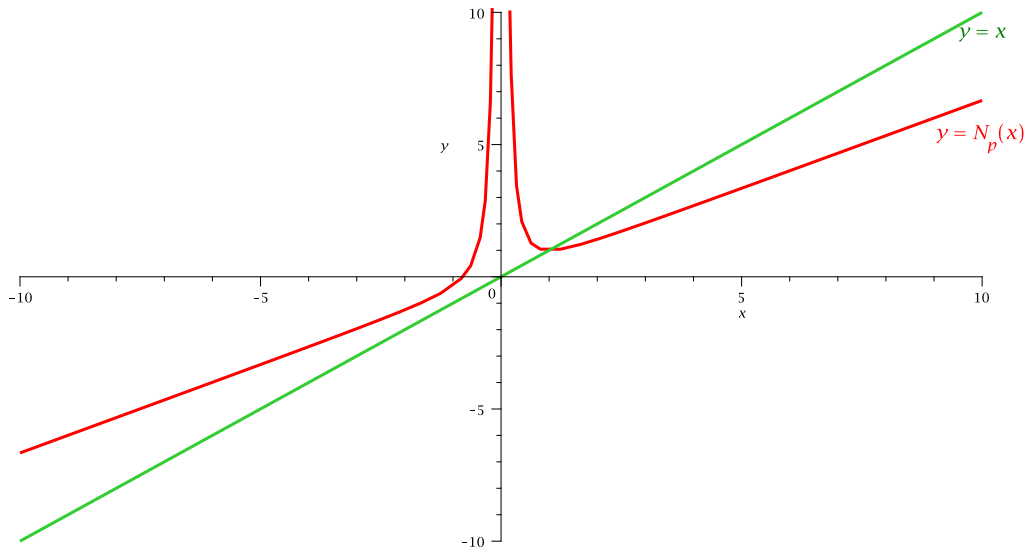


Fig. 2.4: La Méthode de Newton pour le polynôme $p(x) = x^3 - 1$.

Définition 2.1. Pour une application f d'un ensemble X dans lui même, La relation

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists (n, m) \in \mathbb{N}^2 : f^n(x) = f^m(y). \quad (2.11)$$

est une relation d'équivalence, et la classe d'équivalence $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ est appelée grande orbite de x .

Théorème 2.3. Soit f , une application de X dans lui même. Alors, $[x]$ est l'ensemble complètement invariant engendré par le singleton $\{x\}$.

Démonstration. On note $\langle x \rangle$, l'ensemble complètement invariant engendré par $\{x\}$ (le plus petit ensemble complètement invariant contenant x). Pour tout y dans $[x]$, il existe deux entiers naturels n et m tels que $f^n(x) = f^m(y)$ ce qui implique

$$y \in f^{-m} f^n \{x\} \subset f^{-m} f^n \langle x \rangle = \langle x \rangle$$

donc $[x] \subset \langle x \rangle$. Pour compléter la preuve il suffit de montrer que $[x]$ est complètement invariant. En effet, puisque $y \sim f(y)$, on a

$$x \sim y \Leftrightarrow x \sim f(y)$$

autrement

$$y \in [x] \Leftrightarrow f(y) \in [x] \quad (2.12)$$

ceci est équivalent à

$$y \in [x] \Leftrightarrow y \in f^{-1}([x]) \quad (2.13)$$

La relation (2.12) montre l'invariance de $[x]$, et (2.13) l'invariance inverse. Par conséquent on a $[x] \equiv \langle x \rangle$. \square

Définition 2.2. Pour une fonction rationnelle R , un point $z \in \hat{\mathbb{C}}$ est dit *exceptionnel*, si $[z]$ est fini. L'ensemble des points exceptionnels est noté par $\mathcal{E}(R)$.

Théorème 2.4. Une fonction rationnelle R de degré supérieur à deux, admet au plus deux points exceptionnels. Si $\mathcal{E}(R) = \{\zeta\}$, alors R est conjugué à un polynôme tel que ζ correspond à ∞ . Si $\mathcal{E}(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, tel que $\zeta_1 \neq \zeta_2$, alors R est conjugué à une application $z \mapsto z^d$, avec ζ_1 et ζ_2 qui correspondent à 0 et ∞ .

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{E}(R)$ est complètement invariant par R et d'après le théorème 1.3, R admet au plus deux points exceptionnels. A l'aide d'une conjugaison convenable, on peut considérer les quatre possibilités suivantes :

- (i) $\mathcal{E}(R) = \emptyset$;
- (ii) $\mathcal{E}(R) = \{\infty\} = [\infty]$;
- (iii) $\mathcal{E}(R) = \{0, \infty\}$, $[0] = \{0\}$, $[\infty] = \{\infty\}$;
- (iv) $\mathcal{E}(R) = \{0, \infty\} = [0] = [\infty]$;

Il n'y a rien à dire pour (i). Si (ii) est juste, alors R est un polynôme (d'après théorème 1.10). Si (iii) est juste, R est encore un polynôme mais cette fois, il est de la forme

$$z \mapsto az^d; d > 0.$$

Le derniers cas (iv) implique $R(0) = \infty$ et $R(\infty) = 0$, donc R est de la forme $z \mapsto az^d$, avec d un entier négatif. \square

Une conséquence directe de ce théorème est le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. Si $\deg(R) \geq 2$, alors les points exceptionnels de R sont dans \mathcal{F}_R . De plus, \mathcal{J}_R est infini.

Démonstration. Puisque $\deg(R) \geq 2$ et suite à une conjugaison convenable, on a $\mathcal{E}(R) = \{\infty\}$ ou $\mathcal{E}(R) = \{0, \infty\}$. Pour le premier cas R est un polynôme et donc le point ∞ est attractif, impliquant $\infty \in \mathcal{F}_R$. Le deuxième cas $R(z) = az^{\pm d}$; $d > 0$ et les points ∞ et 0 sont attractifs, alors $\{0, \infty\} \in \mathcal{F}_R$. Et puisque $\mathcal{J}_R \neq \emptyset$ (théorème 1.4), alors $\exists z \in \mathcal{J}_R$, si \mathcal{J}_R est fini, on a $\mathcal{J}_R = \{z_1, z_2, \dots\}$, l'invariance de $\mathcal{J}_R \subset \mathcal{E}(R) \subset \mathcal{F}_R$, conduit à une contradiction, donc \mathcal{J}_R est infini. \square

Puisque $\mathcal{O}^-(z) \subset [z]$, il est clair que tout point exceptionnel admet une orbite inverse finie, la réciproque de cette proposition est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.5. *L'orbite inverse $\mathcal{O}^-(z)$ de z est fini si seulement si z est exceptionnel.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, si $\mathcal{O}^-(z)$ est fini alors, z est un point exceptionnel. Définissons les ensembles non vides B_k par

$$B_k = \bigcup_{m \geq k} R^{-m}\{z\},$$

ainsi $R^{-1}(B_k) = B_{k+1}$ et

$$[z] \supset \mathcal{O}^-(z) = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots \quad (2.14)$$

Assumant maintenant, que $\mathcal{O}^-(z)$ est fini. Alors, chaque B_k est fini et donc, il existe un entier naturel m tel que $B_m = B_{m+1}$, impliquant $R^{-1}(B_m) = B_m$, donc B_m est complètement invariant, mais dans ce cas il existe un $w \in B_m$ tel que $[w] \subset B_m$ et de (2.14), on a

$$[z] \supset \mathcal{O}^-(z) = B_0 \supset B_m \supset [w],$$

donc $[z] = \mathcal{O}^-(z)$ et de ce fait $[z]$ est fini. \square

Lemme 2.1. *Soit R une fonction rationnelle de degré supérieur à deux, et soit U un ouvert non vide tel que*

$$U \cap \mathcal{J}_R \neq \emptyset,$$

alors

$$\hat{\mathcal{C}} - \mathcal{E}(R) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k(U) \quad (2.15)$$

Démonstration. Soit $U_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k(U)$, et $V = \hat{C} - U_0$. Il est clair que $R(U_0) \subset U_0$. Si V contient trois points distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; et en appliquant le théorème 1.2, on déduit que la famille $\{R^k : U_0 \rightarrow R^k(U_0) \subset U_0\}$ est normale sur U_0 et donc, $U_0 \subset \mathcal{F}_R$, qui est une contradiction. Ceci montre que U_0 couvre la sphère \hat{C} entièrement sauf au plus deux exceptions. Maintenant considérant un point $z \in \hat{C}$, qui n'est pas un point exceptionnel de R , d'après le théorème 2.5, z possède une orbite inverse infinie qui doit rencontrer U_0 (selon la remarque précédente). Donc il existe $w \in U_0$ et deux entiers naturels p et q , tel que $R^p(w) = z$ et $w \in R^q(U)$, ce qui implique

$$z \in R^{p+q}(U)$$

d'où (2.15). \square

Lemme 2.2. *Soit R une fonction rationnelle telle que $\deg(R) \geq 2$. Si z n'est pas un point exceptionnel, alors*

$$\mathcal{J}_R \subset \overline{\mathcal{O}^-(z)}.$$

Démonstration. Soit z un point non exceptionnel et $w \in \mathcal{J}_R$, et soit U un ouvert quelconque non vide U tel que $w \in U$. D'après le lemme 2.1, $z \in R^k(U)$ pour un certain entier naturel k , donc $\mathcal{O}^-(z) \cap U \neq \emptyset$, impliquant

$$w \in \overline{\mathcal{O}^-(z)}.$$

\square

Théorème 2.6. *Soit R une fonction rationnelle, telle que $\deg(R) \geq 2$. Si $z \in \mathcal{J}_R$, alors*

$$\mathcal{J}_R = \overline{\mathcal{O}^-(z)}$$

Démonstration. Puisque $z \in \mathcal{J}_R$ et du fait de l'invariance de \mathcal{J}_R , on a

$$\mathcal{O}^-(z) \subset \mathcal{J}_R$$

la fermeture de \mathcal{J}_R , implique

$$\overline{\mathcal{O}^-(z)} \subset \mathcal{J}_R.$$

De plus z n'est pas un point exceptionnel (corollaire 2.1), donc, le lemme précédent, donne

$$\mathcal{J}_R = \overline{\mathcal{O}^-(z)}.$$

□

Démonstration du théorème 2.2 : Le fait que $N_p(0) = \infty \in \mathcal{J}_{N_p}$, implique $0 \in \mathcal{J}_{N_p}$, une application directe du théorème 2.6 (en posant $R = N_p$), conduit à (2.10).□

Remarque. Le théorème 2.2 est à la base des algorithmes numériques qui nous ont permis de générer graphiquement, les ensembles de Julia, exposés dans ce travail ainsi que dans [40, 41, 42].

2.4 Calcul numérique de l'ensemble de Julia

En se basant sur le théorème 2.2, il est possible d'identifier numériquement l'ensemble de Julia par deux méthodes.

2.4.1 Première Méthode

Cette méthode consiste à calculer les éléments de \mathcal{J}_{N_p} , en itérant indéfiniment le point $z = 0$ par la transformation inverse N_p^{-1} . En effet, 0 est le premier élément de \mathcal{J}_{N_p} , on peut calculer d'autres éléments grâce à (2.10). Remplaçons dans l'équation de Newton (2.7), z_k par z et z_{k+1} par z_+ , ce qui donne

$$2z^3 - 3z_+z^2 + 1 = 0,$$

et résolvons cette dernière par rapport à z . Pour $z_+ = 0$, on obtient les trois solutions

$$\begin{aligned} z^1 &= -\frac{1}{2}2^{2/3}, \\ z^2 &= -\frac{1}{4}2^{2/3} + \frac{1}{4}I\sqrt{3}2^{2/3}, \\ z^3 &= -\frac{1}{4}2^{2/3} - \frac{1}{4}I\sqrt{3}2^{2/3}, \end{aligned}$$

et pour $z \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} z^1 &= T_1(z_+) = \frac{1}{2}[\varphi(z_+) + z_+], \\ z^2 &= T_2(z_+) = \frac{1}{4}[-\varphi(z_+) + 2z_+ + I\sqrt{3}\psi(z_+)], \\ z^3 &= T_3(z_+) = \frac{1}{4}[-\varphi(z_+) + 2z_+ - I\sqrt{3}\psi(z_+)]. \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sqrt[3]{-2 + z^3 + 2\sqrt{1 - z^3}} + \frac{z^2}{\sqrt[3]{-2 + z^3 + 2\sqrt{1 - z^3}}}, \\ \psi(z) &= \sqrt[3]{-2 + z^3 + 2\sqrt{1 - z^3}} - \frac{z^2}{\sqrt[3]{-2 + z^3 + 2\sqrt{1 - z^3}}}. \end{aligned}$$

A partir de là, on peut construire une approximation de l'ensemble \mathcal{J}_{N_p} de la manière suivante : Si on met $J_0 = \{0\}$ et $J_1 = \left\{0, -\frac{1}{4}2^{2/3}, -\frac{1}{4}2^{2/3} + \frac{1}{4}I\sqrt{3}2^{2/3}, -\frac{1}{4}2^{2/3} - \frac{1}{4}I\sqrt{3}2^{2/3}\right\}$, on définit l'ensemble de Julia de seconde génération par

$$J_2 = J_1 \cup \{T_1^j(u), T_2^j(u), T_3^j(u); u \in J_1, j = 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

ainsi la k - ième génération est donnée par

$$J_k = J_{k-1} \cup \{T_1^j(u), T_2^j(u), T_3^j(u); u \in J_{k-1}, j = 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

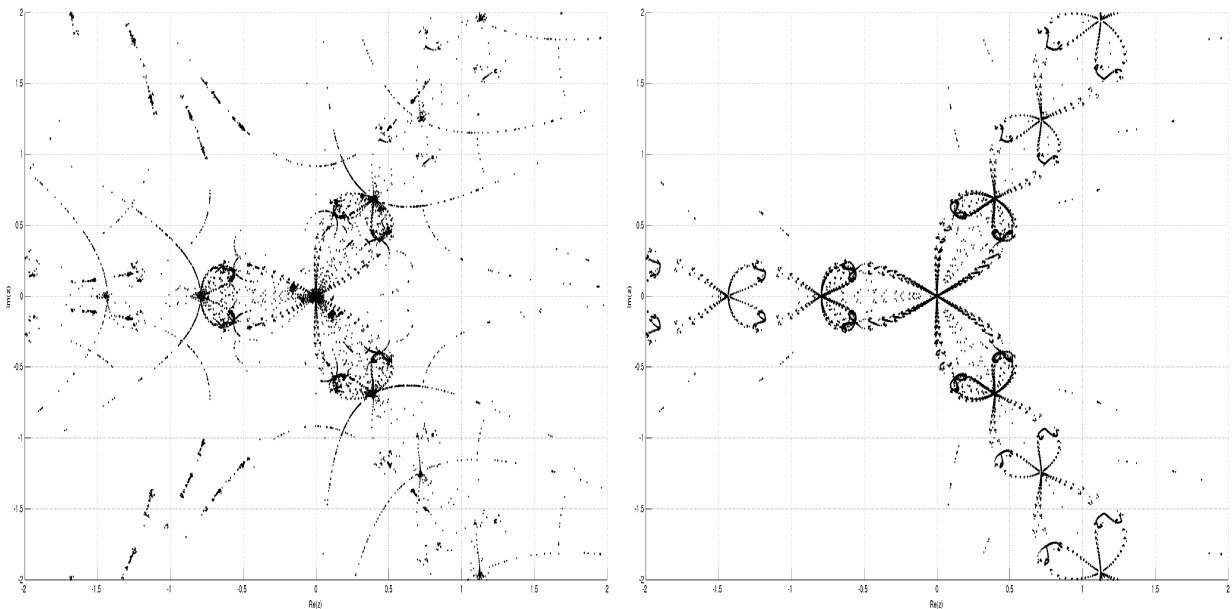
Il est clair d'après (2.10) que

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_k \subset \dots \subset \mathcal{J}_{N_p}.$$

De plus

$$\mathcal{J}_{N_p} = \overline{J_{\infty}}.$$

Pour des considérations techniques (liées au temps de calculs et limitation de la mémoire des ordinateurs), on prend $J_{k_{max}}$ comme une approximation de l'ensemble de Julia, où k_{max} est un entier naturel non nul. Comme on peut voir sur les figures Fig 2.5(a) et Fig 2.5(b), cette méthode génère des points qui n'appartiennent pas à l'ensemble \mathcal{J}_{N_p} . L'ensemble de Julia étant d'intérieur vide (théorème 1.5) et à cause de l'accumulation des erreurs d'arrondi, les points générés "tombent" rapidement en dehors de cet ensemble.



(a) L'ensemble de Julia de deuxième génération J_2 . (b) L'ensemble de Julia de troisième génération J_3 .

Fig. 2.5: L'ensemble de Julia \mathcal{J}_{N_p} avec $p(z) = z^3 - 1$, obtenue par la première méthode.

2.4.2 Deuxième méthode (amélioration de la première méthode)

L'inconvénient majeur de la méthode précédente est qu'à chaque étape de l'algorithme de calcul, on génère -théoriquement- un nombre infini de points, favorisant l'accumulation des erreurs d'arrondi. Dans la deuxième méthode, chaque étape consiste en la génération d'un nombre fini d'éléments, images par les transformations T_1 , T_2 et T_3 des éléments produits dans l'étape précédente. Si on pose $\mathfrak{J}_0 = \{z_1^0 = 0\}$, considéré comme l'ensemble

généralisé dans l'étape d'initialisation, dans l'étape suivante, on a

$$\tilde{\mathcal{J}}_1 = \left\{ 0, z_1^1, z_2^1, z_3^1 \right\} = \left\{ 0, -\frac{1}{4}2^{2/3}, -\frac{1}{4}2^{2/3} + \frac{1}{4}I\sqrt{3}2^{2/3}, -\frac{1}{4}2^{2/3} - \frac{1}{4}I\sqrt{3}2^{2/3} \right\},$$

dans la $k - i\grave{e}me$ étape, on obtient l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{J}}_k = \tilde{\mathcal{J}}_{k-1} \cup \{T_1(\tilde{\mathcal{J}}_{k-1}), T_2(\tilde{\mathcal{J}}_{k-1}), T_3(\tilde{\mathcal{J}}_{k-1})\},$$

de cardinalité 3^k . Le nombre total d'éléments produits après k étapes est égal à $\frac{3^{k+1} - 1}{2}$. Les figures Fig. 2.7(a) et Fig. 2.7(b), représentent une approximation de l'ensemble de Julia \mathcal{J}_{N_p} par l'ensemble $\tilde{\mathcal{J}}_{13}$ constituées de 2.391.484 points. Dans cette méthode, on n'est pas obligé d'itérer un nombre infini de fois, et quelques étapes suffisent pour avoir une approximation acceptable de \mathcal{J}_{N_p} .

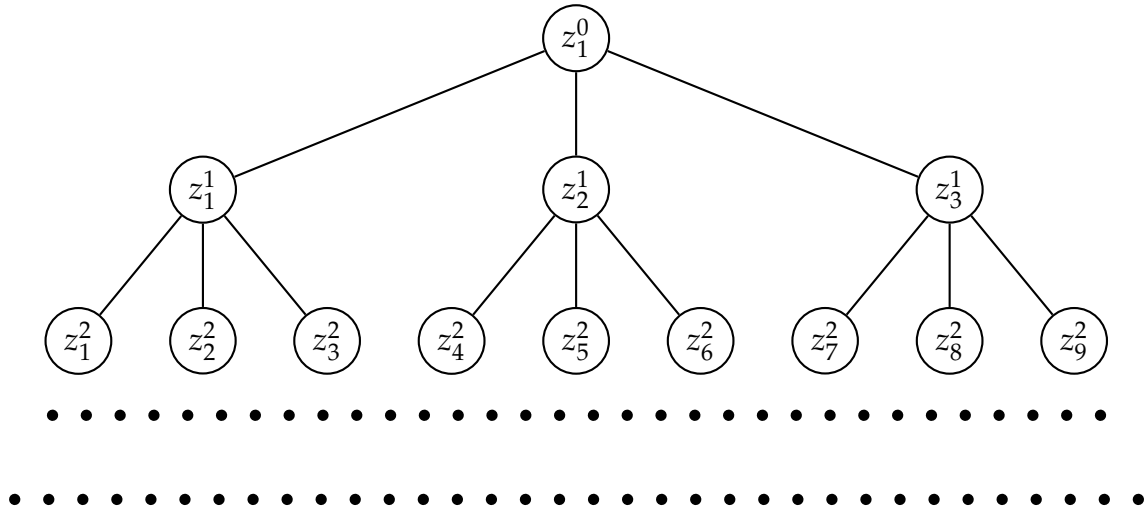


Fig. 2.6: Le schéma général de la deuxième méthode

2.5 La méthode de Newton modifiée

Maintenant, on s'intéresse à une modification de la méthode de Newton, qui consiste à introduire un paramètre réel ou complexe λ , i.e.

$$z_{k+1} = N_{p,\lambda}(z_k) = z_k - \lambda \frac{p(z_k)}{p'(z_k)}. \tag{2.16}$$

On trouve plusieurs justifications quand à l'introduction de cette modification, comme l'augmentation de l'efficacité de la méthode au voisinages des points fixes doubles [21] et la détection des cycles attractifs d'ordre supérieur à un (voir [37, 44]). Notre étude de la dynamique (2.16) se veut une contribution à un problème qui reste ouvert jusqu'à aujourd'hui, à savoir la recherche d'un ensemble de Julia (non-trivial) de mesure strictement positive. Dans [8], on montre l'existence de telles ensembles pour des systèmes quadratiques. Dans [41], nous montrons numériquement que la complexité de l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ accroît proportionnellement avec le paramètre $\lambda > 0$.

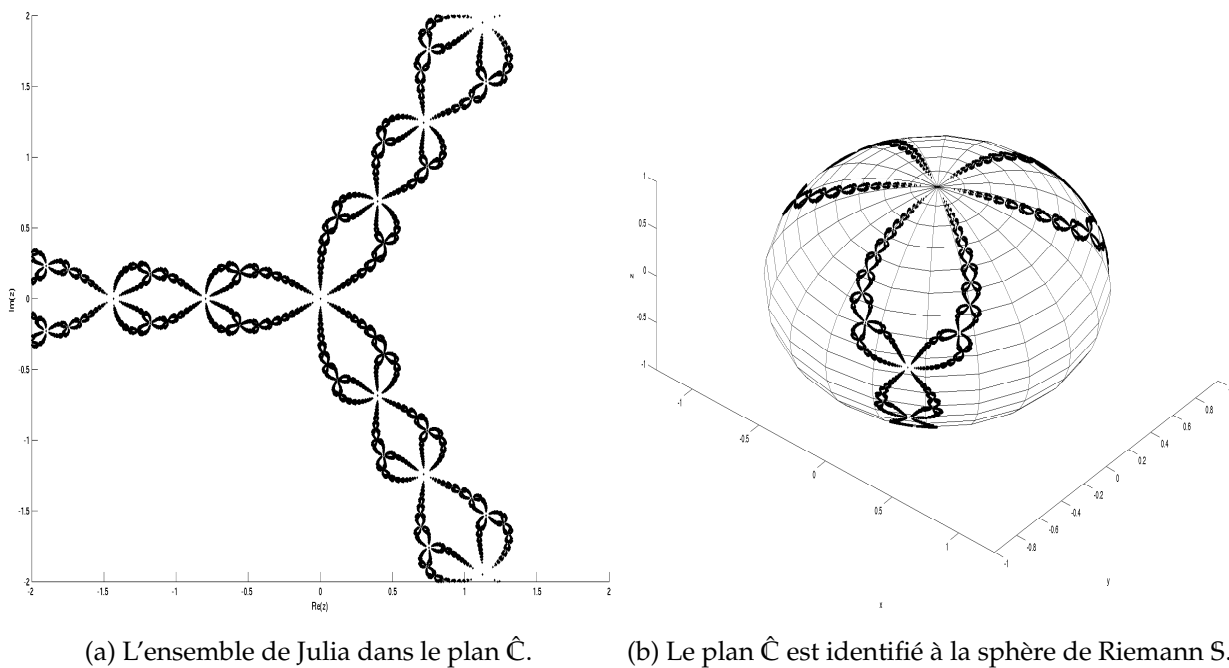


Fig. 2.7: L'ensemble de \mathcal{J}_{N_p} , $p(z) = z^3 - 1$.

2.5.1 Dimension fractale

Le calcul de la dimension fractale est un moyen très efficace pour mesurer le degré d'irrégularité d'un ensemble. Il existe plusieurs types de dimensions fractales, parmi elles la dimension de Hausdorff qui est la plus connue et la plus utilisée théoriquement [17]; par contre son calcul numérique est très délicat. Dans ce travail, on utilise la méthode de "comptage des boîtes" [2, 23]. Pour ce faire, l'ensemble $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ est immergé dans une grille de taille l (chaque cellule est carrée et a pour côté l). Si $\eta(l)$ désigne le nombre de cellules non vides contenant au moins un point de $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$, alors la dimension fractale de l'ensemble $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ notée

d est donnée par

$$d = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \eta(l)}{-\ln(l)}.$$

Le moyen le plus utilisé pour obtenir d est de calculer $\ln \eta(l)$ et $\ln(l)$ pour des valeurs de l de plus en plus petites ; on construit ainsi un nuage de points $(\ln \eta(l_s), \ln(l_s))$, $s = 1, 2, \dots, p$, et on ajuste ce dernier par une droite aux moindres carrés. La pente de cette droite donne une estimation de la dimension d . Les résultats numériques montrant l'influence de la valeur numérique de λ sur la dimension fractale sont résumés dans le tableau Tab. 2.2 et le graphe de la figure Fig. 2.8. Les calculs sur la dimension fractale montrent que le paramètre

λ	d
0.00	?
0.10	1.23854
0.20	1.19684
0.40	1.22622
0.60	1.30362
0.80	1.31607
1.00	1.35147
1.20	1.36894
1.40	1.41129
1.60	1.43465
1.80	1.57155

Tab. 2.2: La dimension fractale de l'ensemble $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ en fonction de λ .

$\lambda > 0$ est un facteur de complexité pour l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ du fait que sa dimension fractale croît avec λ (voir Fig. 2.9, Fig. 2.10 et Fig. 2.11. Malheureusement, il est très difficile de calculer numériquement la dimension fractale d de $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ pour des valeurs de $\lambda > 1.8$. Mais on espère qu'il existe un réel positif $\bar{\lambda}$, tel que

$$d \xrightarrow{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} 2.$$

Dans [41, 42], nous adoptons des schémas plus sophistiqués pour le choix du paramètre λ (paramètre choisi à chaque itération par une méthode de minimisation) qui conduisent à détruire la structure fractale de l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ ($d \approx 1.00983$ très proche de 1.0). Afin d'élargir les bassins d'attraction des points fixes de (2.16) (voir Fig. 2.9, Fig. 2.10(a)-(b)), un raisonnement similaire est adopté dans [47, 48], mais beaucoup plus simple car pour

$A > 0$, S. Smale prend

$$\lambda \equiv \lambda_k = \frac{A}{k}, k = 1, 2, \dots$$

Ce qui nous ramène à étudier le cas où $\lambda \rightarrow 0$.

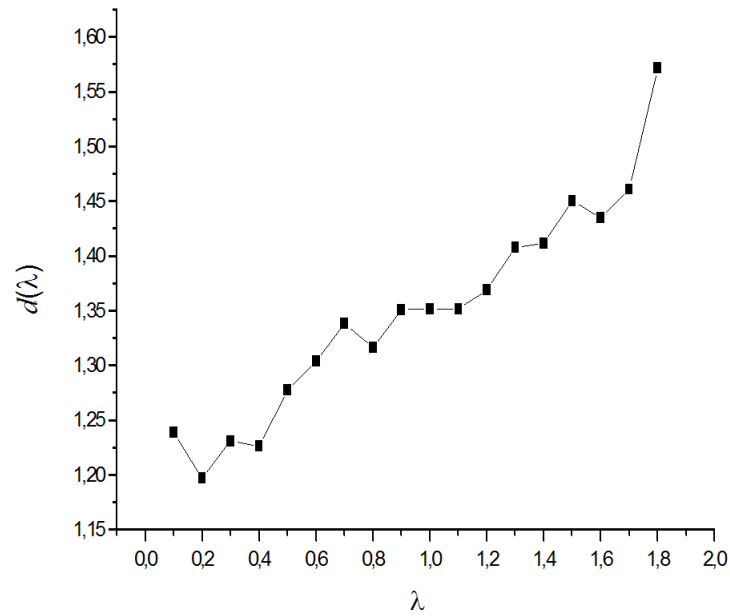
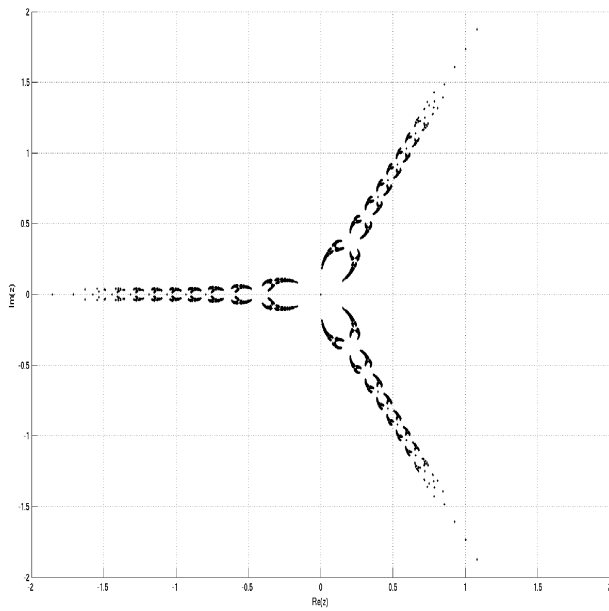
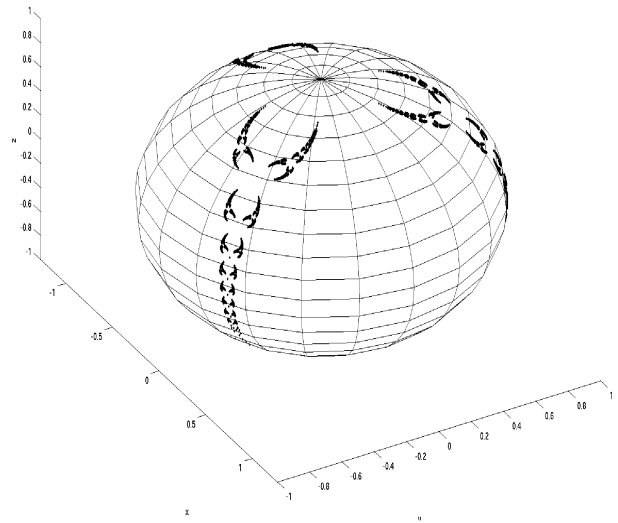


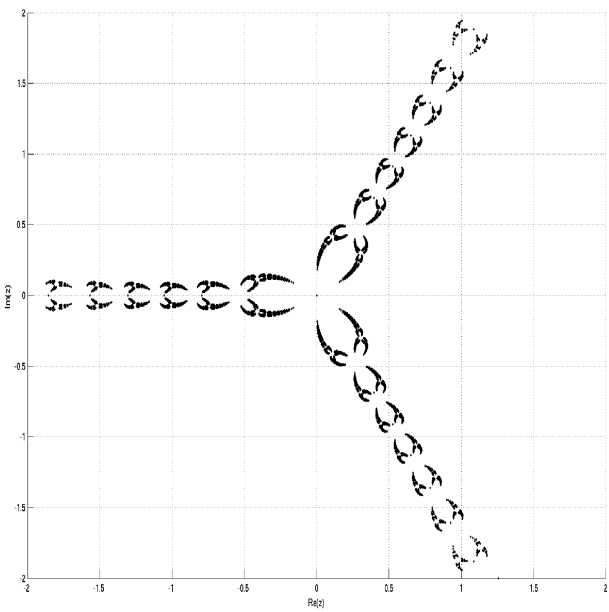
Fig. 2.8: L'évolution de la dimension fractale calculée d en fonction du paramètre λ .



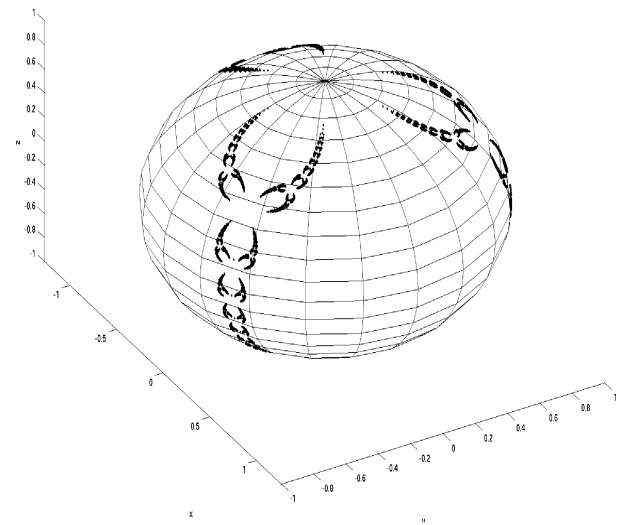
(a) $\lambda = 0.2$



(b) $\lambda = 0.2$

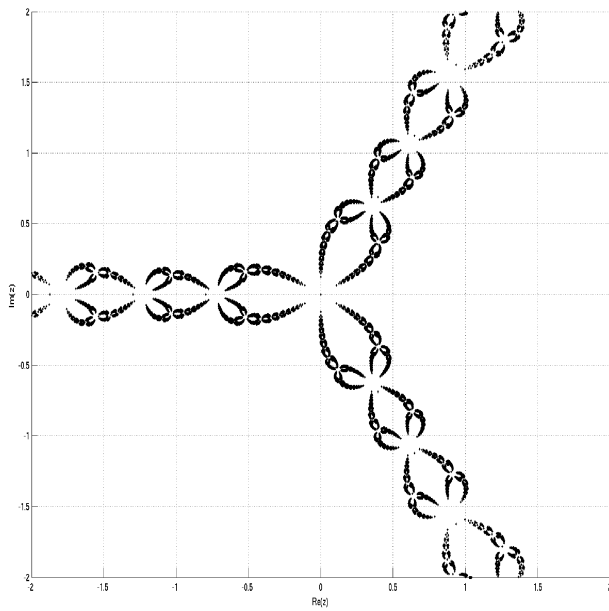


(c) $\lambda = 0.4$

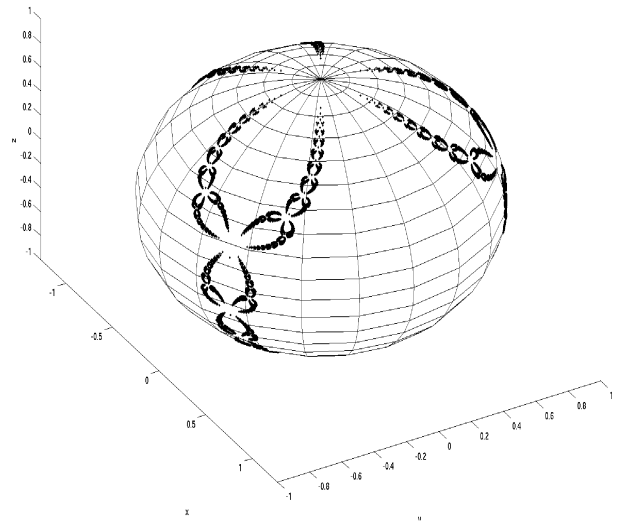


(d) $\lambda = 0.4$

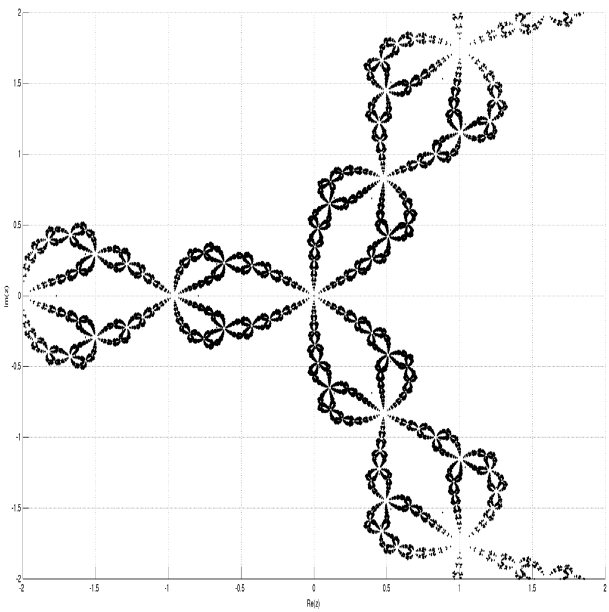
Fig. 2.9: L'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ de la méthode de Newton modifiée avec $p(z) = z^3 - 1$.



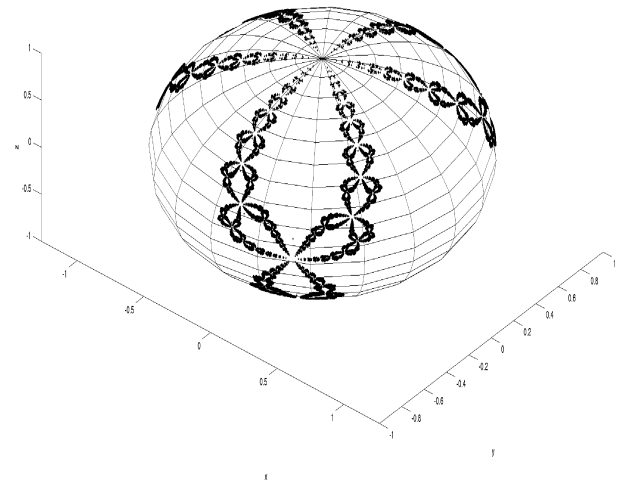
(a) $\lambda = 0.8$



(b) $\lambda = 0.8$

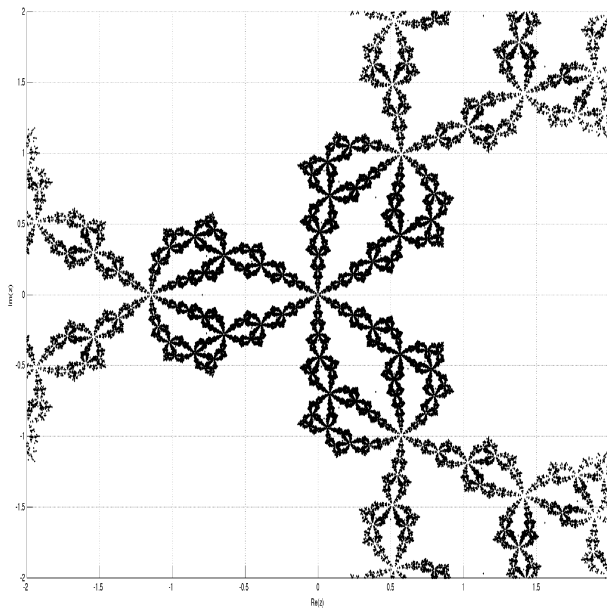


(c) $\lambda = 1.4$

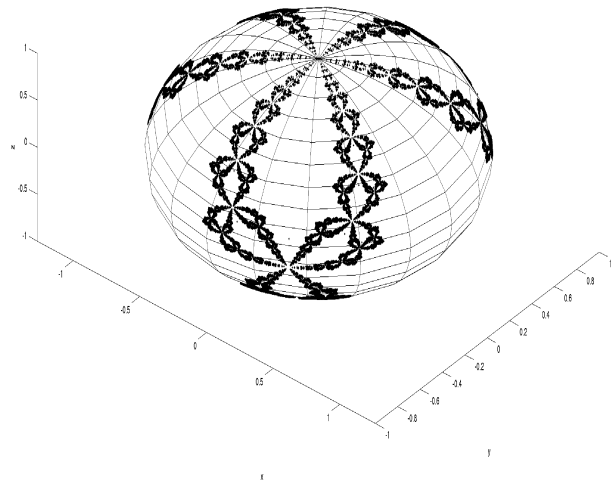


(d) $\lambda = 1.4$

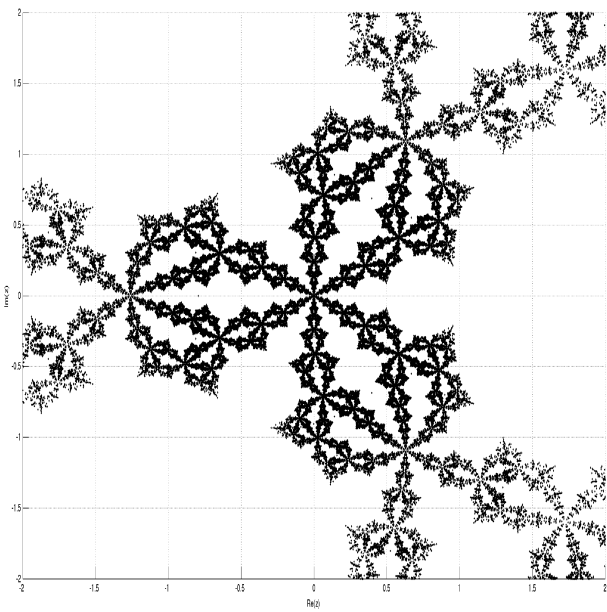
Fig. 2.10: L'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ de la méthode de Newton modifiée avec $p(z) = z^3 - 1$.



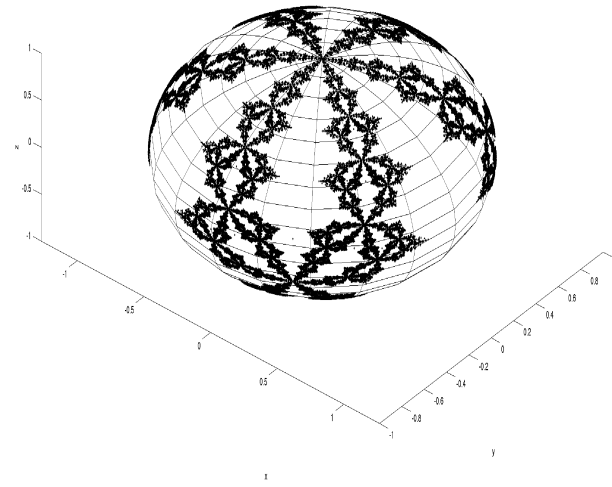
(a) $\lambda = 1.8$



(b) $\lambda = 1.8$



(c) $\lambda = 2.0$



(d) $\lambda = 2.0$

Fig. 2.11: L'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{N_{p,\lambda}}$ de la méthode de Newton modifiée avec $p(z) = z^3 - 1$.

2.5.2 La méthode de Newton continue (ce qui se passe lorsque $\lambda \rightarrow 0$)

La méthode (2.16), peut être interprétée comme le schémas discret résolvant le problème de Cauchy suivant : trouver une fonction $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $z(0) = z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$z'(t) = -\frac{p(z(t))}{p'(z(t))}, \quad (t \geq 0). \quad (2.17)$$

En effet pour $T > 0$, et m un entier naturel non nul, posons

$$\lambda = \frac{T}{m}.$$

Pour m assez grand de façon à ce que $\lambda \approx 0$, et en développant $z(t)$ au voisinage de t_k , nous obtenons

$$z(t_{k+1}) = z(t_k) - \lambda \frac{p(z(t_k))}{p'(z(t_k))},$$

avec $t_{k+1} = t_k + \lambda$. Maintenant, il suffit de poser $z_k = z(t_k)$, pour avoir (2.16).

Considérant maintenant la "désingularisation" (voir [25]) du problème (2.17) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction continue } z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ telle que} \\ z(0) = z_0, \\ [p(z)]'(t) = -p(z(t)). \end{array} \right. \quad (\mathcal{P})$$

et soit l'ensemble des solutions de (\mathcal{P})

$$\mathcal{S} = \{z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, z(t) \text{ solution de } (\mathcal{P})\}$$

Le résultat suivant semble être évident dans le sens où nous cherchons à montrer que les trajectoires (i.e. les solutions de (\mathcal{P})) tendent asymptotiquement vers les racines de p .

Théorème 2.7. Si z est un élément de \mathcal{S} , alors $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = u$ existe et $p(u) = 0$.

Démonstration. Soit z une solution du problème (\mathcal{P}) avec $x = z(0)$. Supposons que $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$ n'existe pas. Notons qu'on peut résoudre (\mathcal{P}), explicitement par rapport à p . Ce qui donne

$$p(z(t)) = e^{-t} p(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.18)$$

impliquant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(z(t)) = 0 \quad (2.19)$$

entraînant la compacité de l'ensemble $\{z(t) : t \geq 0\}$. Ceci implique l'existence de l'ensemble ω -limite noté Ω (l'ensemble des points w tels que $w = \lim_{k \rightarrow \infty} z(t_k)$ pour une certaine suite $t_k \rightarrow \infty$) et de (2.19), le fait de pouvoir isoler les racines de p et qu'à l'infini z doit prendre comme valeurs toutes ces racines, est une contradiction avec la continuité de p . \square

Par la suite on montre que chaque élément de \mathbb{C} appartient à une certaine trajectoire.

Théorème 2.8. *Pour tout $c \in \mathbb{C}$, il existe une trajectoire $z(t)$ ($z \in \mathcal{S}$) et un réel \bar{t} tel que*

$$c = z(\bar{t}).$$

Soit $\mathcal{G} = E \cup E'$, le sous ensemble des trajectoires singulières

$$E = \{z([\!-\infty, d]) \subset \mathbb{C} : z(d) = x, p(x) \neq 0, p'(x) = 0\},$$

$$E' = \{z([d, \infty[) \subset \mathbb{C} : z(d) = x, p(x) \neq 0, p'(x) = 0\}$$

et son complémentaire

$$\mathcal{M} = \mathbb{C} - \mathcal{G}.$$

Par analogie aux bassins immédiats des racines du polynôme p définis dans les paragraphes précédents, on définit les composantes connexes de \mathcal{M} notées \mathcal{M}' .

Théorème 2.9. *Chaque composante connexe \mathcal{M}' de \mathcal{M} contient une seule racine α de p . De plus, si $z \in \mathcal{S}$ et $\{z(t) : t \in \mathbb{R}\} \cap \mathcal{M}' \neq \emptyset$, alors*

$$z(t) \rightarrow \alpha, t \rightarrow \infty.$$

Maintenant il est clair que l'ensemble de Julia pour la méthode de Newton continue est constitué des trajectoires appartenant à \mathcal{G} (voir Fig. 2.12). Dans le cas où $p(z) = z^3 - 1$, on trouve

$$\mathcal{G} = \left\{ z(t) = -e^{-t} e^{\frac{2\pi i k}{3}}, k = 0, 1, 2 \right\}.$$

Démonstration des théorèmes 2.8 et 2.9 : Commençons par introduire deux lemmes nécessaires pour la suite.

Lemme 2.3. Soit $x \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{R}$ et $p'(x) \neq 0$. Alors il existe un intervalle maximal $]a, b[$ contenant q et une fonction v telle que

$$v(q) = x \text{ et } p'(v(t)) \neq 0, p'(v)(t) = -p(v(t)), t \in]a, b[. \quad (2.20)$$

De plus, cette fonction v est unique sur l'intervalle maximal.

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $x \in \mathbb{C}$ tel que $p'(x) \neq 0$ et $q \in \mathbb{R}$, le problème

$$z(q) = x \text{ et } p'(z(t)) \neq 0, z'(t) = -\frac{p(z(t))}{p'(z(t))} \quad (2.21)$$

admet une solution unique sur l'intervalle maximal $]a, b[$ contenant q (voir [38] p.87). \square

Lemme 2.4. Supposons que $x \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{R}$ et $p'(x) \neq 0$ avec v et $]a, b[$ donnés dans le lemme précédent. Si $b < \infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow b-} v(t) \text{ existe et } \lim_{t \rightarrow b-} p'(v(t)) = 0. \quad (2.22)$$

Si $a > -\infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow a+} v(t) \text{ existe et } \lim_{t \rightarrow a+} p'(v(t)) = 0. \quad (2.23)$$

Démonstration. Soit $b < +\infty \in \mathbb{C}$. Alors, $\{v(t) : t \in [q, b[\}$ est borné. Supposons que

$$\lim_{t \rightarrow b-} v(t)$$

n'existe pas. Puisque $v(t)$ vérifie

$$p(v(t)) = e^{-(t-q)} p(x), t \in]a, b[.$$

Alors, chaque point w de l'ensemble ω -limite de $v(t)$ satisfait l'équation

$$p(w) = e^{-(b-q)} p(x)$$

et on peut faire un raisonnement pareil à celui du théorème 2.7 pour avoir une contradiction. Maintenant, $\lim_{t \rightarrow b^-} v(t)$ existe, entraînant l'existence de $l = \lim_{t \rightarrow b^-} p'(w(t))$. Mais $l = 0$, sinon la solution (2.20) peut être prolongée en dehors de l'intervalle maximal $]a, b[$. On peut déduire (2.23) avec les mêmes arguments. \square

Lemme 2.5. *Supposons que $x \in \mathbb{C}$, $p'(x) = 0$ et $p(x) \neq 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $s \in \mathbb{R}$ et $0 < |s| < \delta$, alors*

1) *Pour $s > 0$, il existe une fonction $f : [0, s] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$f(0) = x \text{ et } p(f)'(t) = -p(f(t)), \quad t \in [0, s] \quad (2.24)$$

et

2) *Pour $s < 0$ et $\sigma = -s$, il existe une fonction $h : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$h(\sigma) = x \text{ et } p(h)'(t) = -p(g(t)), \quad t \in [0, \sigma]. \quad (2.25)$$

Démonstration. Choisissons $r_0 > 0$ tel que, si $y \in \mathbb{C}$, $0 < |y - x| < r_0$, on a $p(y) \neq p(x)$ et $p'(y) \neq 0$. Soit x_s la racine du polynôme défini par

$$Q_{s,x}(y) = p(y) - e^{-s}p(x), \quad y \in \mathbb{C}.$$

Pour $s \neq 0$, tel que $|x_s - x| < r_0$, prenons a_s, b_s et v_s de façon à ce que

$$v_s(0) = x_s, \quad p(v_s)'(t) = -p(v_s(t)), \quad t \in]a_s, b_s[,$$

avec $a_s < 0 < b_s$ et $]a_s, b_s[$ est maximal dans le sens du lemme 2.3. Choisissons $r > 0$ tel que $r < r_0$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < s < \delta$, on a

$$|v_s(t) - x| < r \text{ si } a_s < t < 0. \quad (2.26)$$

Pour montrer (2.26), on suppose le contraire. Soit $\{s_k\}_{k=0}^{k=\infty}$ une suite décroissante de réels positifs convergents vers 0, telle que, si k est un entier positif, alors il existe $t \in]a_{s_k}, 0[$,

permettant

$$|v_{s_k}(t) - x| \geq r.$$

Pour chaque entier positif k , notons par t_k la plus grande valeur dans $]a_{s_k}, 0[$ vérifiant

$$|v_{s_k}(t) - x| = r.$$

Il est clair que si $t_k \leq t \leq 0$, alors $|v_{s_k}(t) - x| \leq r$ et donc

$$p'(v_{s_k}(t)) \neq 0, \quad p(v_{s_k}(t)) \neq p(x). \quad (2.27)$$

Puisque pour tout k , $Q_{s_k, x}(x_{s_k}) = 0$, alors

$$p(v_{s_k}(t)) = e^{-t} p(x_{s_k}) = e^{-(t+s_k)} p(x), \quad a_{s_k} < t \leq 0. \quad (2.28)$$

Si $t_k \leq -s_k$, on peut prendre ici $t + s_k = 0$ et de (2.28), on a $p(v_{s_k}(t)) = p(x)$ malgré que $|v_{s_k}(t) - x| \leq r < r_0$, qui est une contradiction. Donc, $t_k > -s_k$, $k = 1, 2, \dots$ Puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k + s_k) = 0$ (du fait que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$) on a

$$p(v_{s_k}(t_k)) \rightarrow p(x) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

D'autre part, $|v_{s_k}(t_k) - x| = r$, $k = 1, 2, \dots$ il existe donc une sous suite de $\{v_{s_k}(t_k)\}_{k=0}^{\infty}$ qui converge vers un élément $y \in \mathbb{C}$ tel que $|y - x| = r$. Mais d'après (2.29), on a $p(y) = p(x)$, qui est une contradiction avec (2.27), donc (2.26) est vraie. Choisissons δ telle que (2.26) soit vérifiée. Si $s \in]0, \delta[$, on peut voir que $a_s = -s$, puisque les deux cas $a_s < -s$ et $a_s > -s$, conduisent à une contradiction. Mais d'après le lemme 2.4, si $0 < s < \delta$, alors $y = \lim_{t \rightarrow a_s^+} v_s(t)$ existe, $p'(y) = 0$ et $|y - x| \leq r$ puisque $a_s = -s$, impliquant $y = x$. Pour $0 < s < \delta$, on définit $f : [0, s] \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f(0) = x, \quad f(t) = v_s(t - s), \quad t \in [0, s]$$

et il est clair que f satisfait (2.24). Et de la même façon, on peut montrer (2.25). \square

Démonstration du théorème 2.8 : Prenons $x \in \mathbb{C}$.

Cas 1. Si $p(x) = 0$, alors on prend $z(t) = x$, $t \in \mathbb{R}$.

Cas 2. Supposons que $p(x) \neq 0$ et $p'(x) \neq 0$. Utilisant le lemme 2.3, choisissons v qui satisfait (2.20) où $]a, b[$ est maximale et $q = 0$, i.e. $v(0)x$. Si $b < \infty$, alors grâce au lemme 2.4, $y = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ existe et $p(y) \neq 0$ et $p'(y) = 0$. En utilisant le lemme 2.5, prenons une fonction f satisfaisant (2.24) et prenons $v(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} v(t)$ tel que si $t \in]0, s[$, alors $v(b+t) = f(t)$.

Utilisons maintenant, successivement les lemmes 2.3, 2.4 et 2.5 pour avoir une fonction v définie sur $]a, \infty[$ telle que $p(v)'(t) = -p(v(t))$, $t \in]a, \infty[$. Si $a = -\infty$ on conclut. Si $a > -\infty$, on passe à la limite et dans tous ces cas la fonction z est dans \mathcal{S} .

Cas 3. Supposons que $p(x) \neq 0$ et $p'(x) = 0$. Prenons f et h satisfaisant respectivement (2.24) et (2.25) et définissons w sur $[-\sigma, s]$ telle que

$$\begin{aligned} v(0) &= x, \\ v(t) &= h(t + \sigma), \quad (t \in [-\sigma, 0]), \\ v(t) &= f(t), \quad (t \in]0, s]). \end{aligned}$$

notons que $p(v)'(t) = -p(v(t))$, $t \in [-\sigma, s]$. Pour conclure, on utilise les lemmes 2.3, 2.4 et 2.5, puis prolonger z par passage à la limite lorsque $\sigma, s \rightarrow \infty$.

Démonstration du théorème 2.9 : Par définition, \mathcal{M} contient toutes les racines de p . De plus si $z \in \mathcal{S}$ et $z(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}' \neq \emptyset$ alors $z(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}'$ et dans ce cas la racine $u = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$ doit être dans \mathcal{S} .

Donc, chaque composante connexe \mathcal{M}' de \mathcal{M} contient au moins une racine de p .

Supposons qu'une composante connexe \mathcal{M}' de \mathcal{M} contient plus d'une seule racine de p , à savoir u_1, u_2, \dots, u_e où e est un entier strictement positif. Soit $\{\mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \dots, \mathcal{M}'_e\}$ une partition de l'ensemble \mathcal{M}' , telle que

$$\mathcal{M}'_j = \left\{ x \in \mathcal{M}' : z \in \mathcal{S}, x \in z(\mathbb{R}), u_j = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \right\}.$$

Puisque \mathcal{M}' est connexe, il existe des entiers $m, n \in \{1, \dots, e\}$ et une suite $\{v_k\}_{k=0}^{k=\infty} \subset \mathcal{M}'$

tels que $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k \in \mathcal{M}'_m$ alors que $v_0, v_1, \dots \in \mathcal{M}'_n$. Choisissons $z, z_1, z_2, \dots \in \mathcal{S}$ tels que $z(0) = v$ et $z_k(0) = v_k, k = 1, 2, \dots$ Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = u_m, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_k(t) = u_n, \quad k = 1, 2, \dots$$

Par conséquent, il existe une suite $t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(t_k) = u_m \implies \lim_{k \rightarrow \infty} p(z_k(t_k)) = 0$$

Cependant, si on fixe un entier positif k , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_k(t) = u_n, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p(z_k(t)) = 0$$

La continuité de chaque $z_k, k = 1, 2, \dots$ et le fait que \mathbb{C} est localement compact conduit à une contradiction puisque p peut avoir dans ce cas une infinité de racines.

2.6 Conclusion du chapitre 2

Dans ce chapitre, nous montrons que l'ensemble de Julia de la méthode de Newton appliquée pour trouver des zéros du polynôme complexe $p(z) = z^3 - 1$, peut-être généré à partir du point pôle $z = 0$, i.e.

$$\mathcal{J}_{N_p} = \overline{\{N_p^{-k}(0), k \in \mathbb{N}\}}.$$

Nous exploitons ce résultat pour caractériser numériquement l'ensemble \mathcal{J}_{N_p} qui représente aussi les frontières communes des bassins d'attraction des points fixes. Nous montrons par l'intermédiaire du calcul de la dimension fractale, que la complexité de cet ensemble dépend (monotoniquement) d'un paramètre réel. Lorsque ce paramètre tend vers zéro, nous dédui-

sons que l'ensemble de Julia est constitué des trajectoires singulières, solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction continue } z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ telle que} \\ z(0) = z_0, \\ p(z)'(t) = -p(z(t)). \end{array} \right.$$

Et de ce fait, l'aspect fractal de \mathcal{J}_{N_p} est détruit.

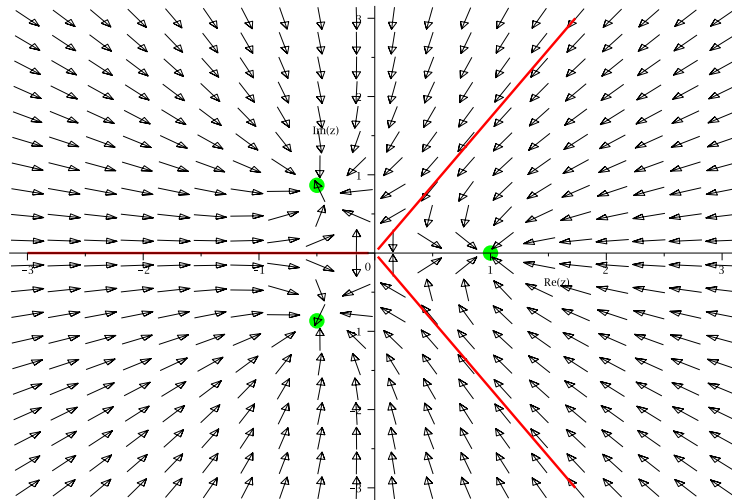


Fig. 2.12: Le champ de vecteurs de (\mathcal{P}) , avec $p(z) = z^3 - 1$. En rouge, les trajectoires \mathcal{G} et en vert, les racines de $p(z)$ (points fixes de (\mathcal{P})).

Chapitre 3

La dynamique de la méthode de Cauchy

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un système dynamique engendré par la méthode de Cauchy [11]. En plus du fait que cette méthode est polynomiale, la méthode de Cauchy dépend intrinsèquement d'un paramètre, contrairement à celle de Newton où l'introduction du paramètre est artificielle.

Définition 3.1. Soit p un polynôme complexe, la méthode de Cauchy est donnée par l'itération suivante

$$z_{k+1} = z_k - \lambda p(z_k) \equiv G_{p,\lambda}(z_k), \quad (3.1)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.1 Singularités, multiplicateurs et étude locale de la dynamique

Puisque $z - \lambda p(z) = z$ si et seulement si $p(z) = 0$, alors, les points fixes de (3.1) sont les racines de $p(z)$ en plus du point ∞ . Et du fait que

$$G'_{p,\lambda}(z) = 1 - \lambda p'(z), \quad (3.2)$$

on peut déduire le résultat suivant

Théorème 3.1. Si α est une racine simple de $p(z)$, alors, il existe $\lambda \neq 0$, dépendant de α , tel que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- 1) $Re(\lambda p'(\alpha)) > 0$,
- 2) α est un point fixe attractif de $G_{p,\lambda}$,
- 3) Pour z_0 assez proche de α ;

$$z_k = G_{p,\lambda}^k(z_0) \rightarrow \alpha.$$

De plus, il existe un réel $c \in]0, 1[$, tel que

$$|z_{k+1} - \alpha| < c|z_k - \alpha|,$$

avec $c = \left| G'_{p,\lambda}(\alpha) \right|$, i.e. la suite converge linéairement.

Démonstration. Voir [16]. \square

Remarque 3.1. Le point fixe ∞ est stable puisque $\frac{1}{G'_{p,\lambda}(\infty)} = 0$.

3.2 Points critiques

Un point critique pour l'itération (3.1) correspond à une solution de l'équation

$$G'_{p,\lambda}(z) = 1 - \lambda p'(z) = 0. \quad (3.3)$$

Si α est un point fixe $G_{p,\lambda}$, alors résoudre l'équation (3.3) par rapport à λ en fixant z à α , donne lieu à des point fixes qui sont en même temps des points critiques (points fixes super-attractifs), l'importance des points critiques découle du théorème suivant qui est lui même une conséquence directe du théorème 1.8.

Théorème 3.2. $G_{p,\lambda}$ admet au plus deux point fixes attractifs.

Démonstration. Puisque $\deg(G'_{p,\lambda}) = \deg(G_{p,\lambda}) - 1$, il suffit d'appliquer le théorème 1.8 pour conclure. \square

Théorème 3.3. Soit p un polynôme avec $\deg(p) > 1$. alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- (a) $\mathcal{J}_{G_{p,\lambda}}$ est connexe ;
- (b) Il n'y a pas de points critiques finis de $G_{p,\lambda}$ dans $\mathcal{A}(\infty)$.

3.3 Applications

Nous allons exploiter les théorèmes 2.1 et 3.3 pour caractériser l'ensemble de Julia de $G_{p,\lambda}$ dans le cas du polynôme cubique $p(z) = z^3 - 1$. La méthode de Cauchy s'écrit sous la forme

$$z_{k+1} = z_k + \lambda(1 - z_k^3) \equiv G_{p,\lambda}(z_k); \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

Les trois solutions de l'équation $p(z) = 0$ sont

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Qui sont les seuls points fixes en plus de ∞ . Le tableau Tab. 3.1, résume la stabilité des points fixes de $G_{p,\lambda}$ en fonction du paramètre λ Où

	attractif	répulsif	indifférent
α_1	$\lambda \in D_1$	$\lambda \in \mathbb{C} - \overline{D_1}$	$\lambda \in \partial\overline{D_1}$
α_2	$\lambda \in D_2$	$\lambda \in \mathbb{C} - \overline{D_2}$	$\lambda \in \partial\overline{D_2}$
α_3	$\lambda \in D_3$	$\lambda \in \mathbb{C} - \overline{D_3}$	$\lambda \in \partial\overline{D_3}$
∞	$\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$	-	-

Tab. 3.1: Stabilité des points fixes $\alpha_{1,2,3}$ et ∞ de G_λ .

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{3} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6} \right| < \frac{1}{3} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \right| < \frac{1}{3} \right\}.$$

Il est clair que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{0\}$ (voir 3.1), ce qui empêche la coexistence des trois bassins d'attraction $\mathcal{A}(\alpha_1)$, $\mathcal{A}(\alpha_2)$, $\mathcal{A}(\alpha_3)$. Au mieux, on peut avoir deux bassins d'attraction coexistants et dans ce cas on a les configurations suivantes :

- $\lambda \in D_1 \cap D_2$ implique $\mathcal{J}_{G_{p,\lambda}} = \partial\mathcal{A}(\alpha_1) = \partial\mathcal{A}(\alpha_2) = \partial\mathcal{A}(\infty)$ (Fig. 3.2(a)).
- $\lambda \in D_1 \cap D_3$ implique $\mathcal{J}_{G_{p,\lambda}} = \partial\mathcal{A}(\alpha_1) = \partial\mathcal{A}(\alpha_3) = \partial\mathcal{A}(\infty)$ (Fig. 3.2(b)).
- $\lambda \in D_2 \cap D_3$ implique $\mathcal{J}_{G_{p,\lambda}} = \partial\mathcal{A}(\alpha_2) = \partial\mathcal{A}(\alpha_3) = \partial\mathcal{A}(\infty)$ (Fig. 3.2(c)).

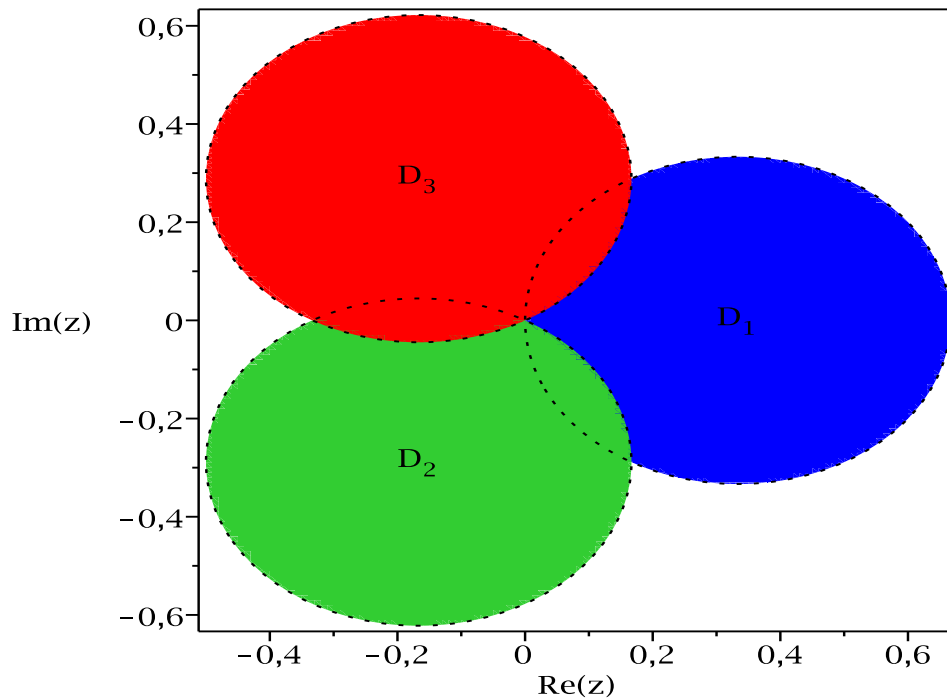


Fig. 3.1: Les trois régions D_1 , D_2 et D_3 du plan paramétrique $(\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda))$ qui représentent respectivement, les domaines de stabilité des points fixes α_1 , α_2 et α_3 .

3.3.1 Points critiques et connexité de l'ensemble de Julia

Si $\lambda \neq 0$, l'application $G_{p,\lambda}$ admet deux points critiques

$$\chi_1(\lambda) = -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\lambda}} \text{ et } \chi_2(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\lambda}}.$$

Le théorème 1.8, permet d'approcher numériquement le plan paramétrique $(\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda))$, en suivant uniquement les orbites des points critiques $\chi_1(\lambda)$ et $\chi_2(\lambda)$, au lieu d'un balayage exhaustif du plan de phase $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$ (voir Fig. 3.3). Ce qui nous permet de trouver $\lambda^* = 0.1 + i0.3$, comme une valeur du plan paramétrique, vérifiant

- $G_{p,\lambda}^k(\chi_1(\lambda^*)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha_3$,
- $G_{p,\lambda}^k(\chi_2(\lambda^*)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$.

Entraînant la non connexité de l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{G_{p,\lambda}}$, d'après le théorème 3.3 (Fig. 3.4). On remarque que le bassin immédiat du point fixe α_3 , possède une infinité de petites copies de lui-même constituées des composantes connexes du bassin d'attraction $\mathcal{A}(\alpha_3)$. Et on dit que dans ce cas $\mathcal{A}(\alpha_3)$ est Cantorien [6].

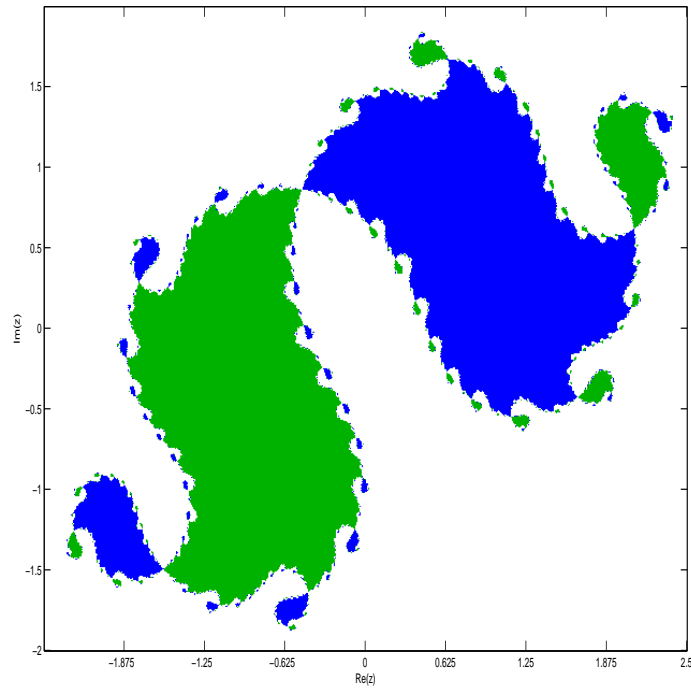
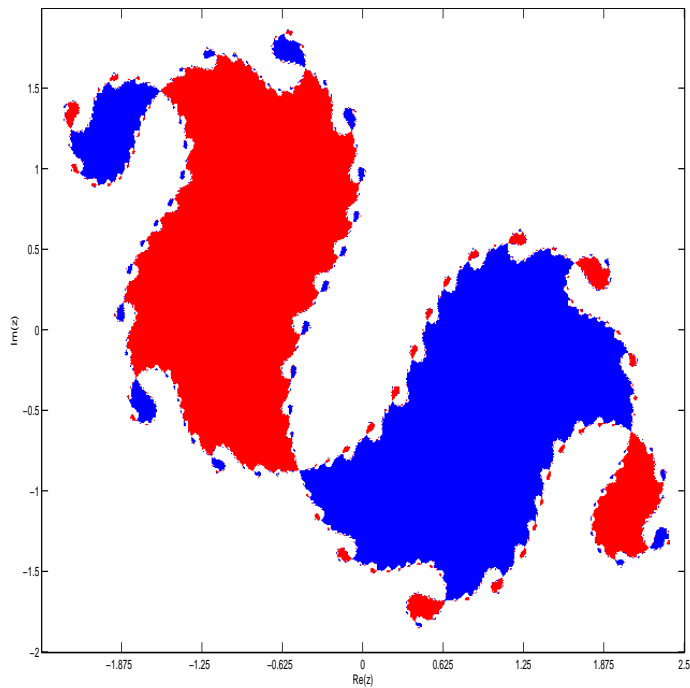
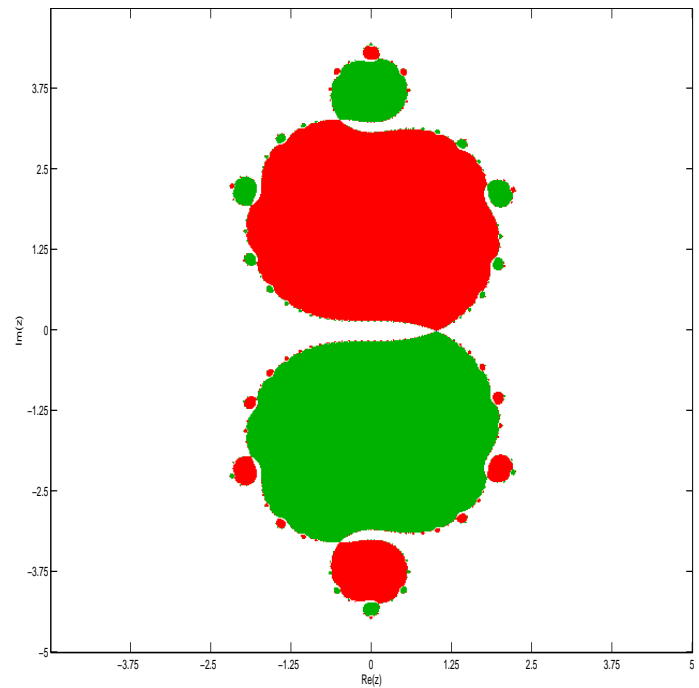
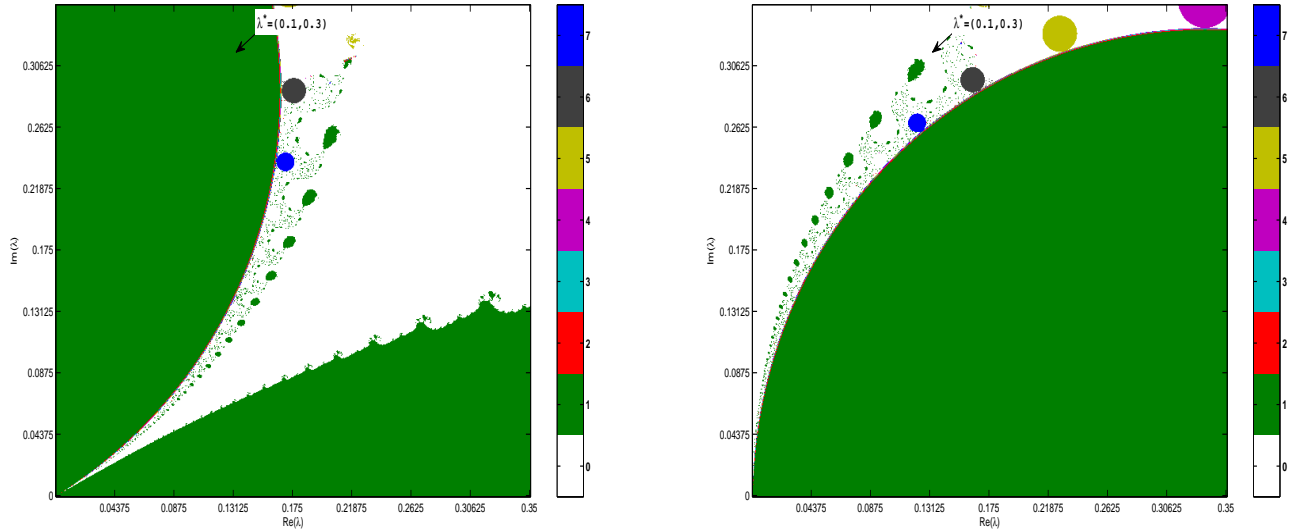
(a) $\lambda = 0.135 - i0.234$ (b) $\lambda = 0.135 + i0.234$ (c) $\lambda = -0.1$

Fig. 3.2: Les bassins d'attraction des points fixes α_1 , α_2 , α_3 et ∞ respectivement en bleue, vert, rouge et blanc pour $G_{p,\lambda}$.



$$(a) \chi_1(\lambda) = -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\lambda}}.$$

$$(b) \chi_2(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\lambda}}.$$

Fig. 3.3: Plans paramétriques $(\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda))$ de la récurrence $G_{p,\lambda}$ suivant les points critiques $\chi_1(\lambda)$ et $\chi_2(\lambda)$. Le dégradé des couleurs indique l'ordre des cycles attractifs existants.

3.4 La Méthode de Cauchy non-holomorphe

Supposons que $p(z) = z^2 - 1$. Afin d'avoir la condition

$$\left| G'_{p,\lambda}(\alpha_j) \right| = |1 - \lambda p'(\alpha_j)| < 1, j = 1, 2 \quad (3.5)$$

avec $\alpha_1 = -1 + i$, $\alpha_2 = 1 + i$, on propose de prendre

$$\lambda \equiv \lambda(z) = b \overline{p(z)}; b \in \mathbb{R}.$$

D'où la récurrence non-holomorphe

$$z_{k+1} = z_k - b p(z_k) \overline{p(z_k)}; b \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

la récurrence équivalente dans \mathbb{R}^2 est donnée par

$$g := \begin{cases} x - 2b(x^2 - y^2 - 1)x - 4bxy^2 \\ y - 4bx^2y + 2b(x^2 - y^2 - 1)y \end{cases} \quad (3.7)$$

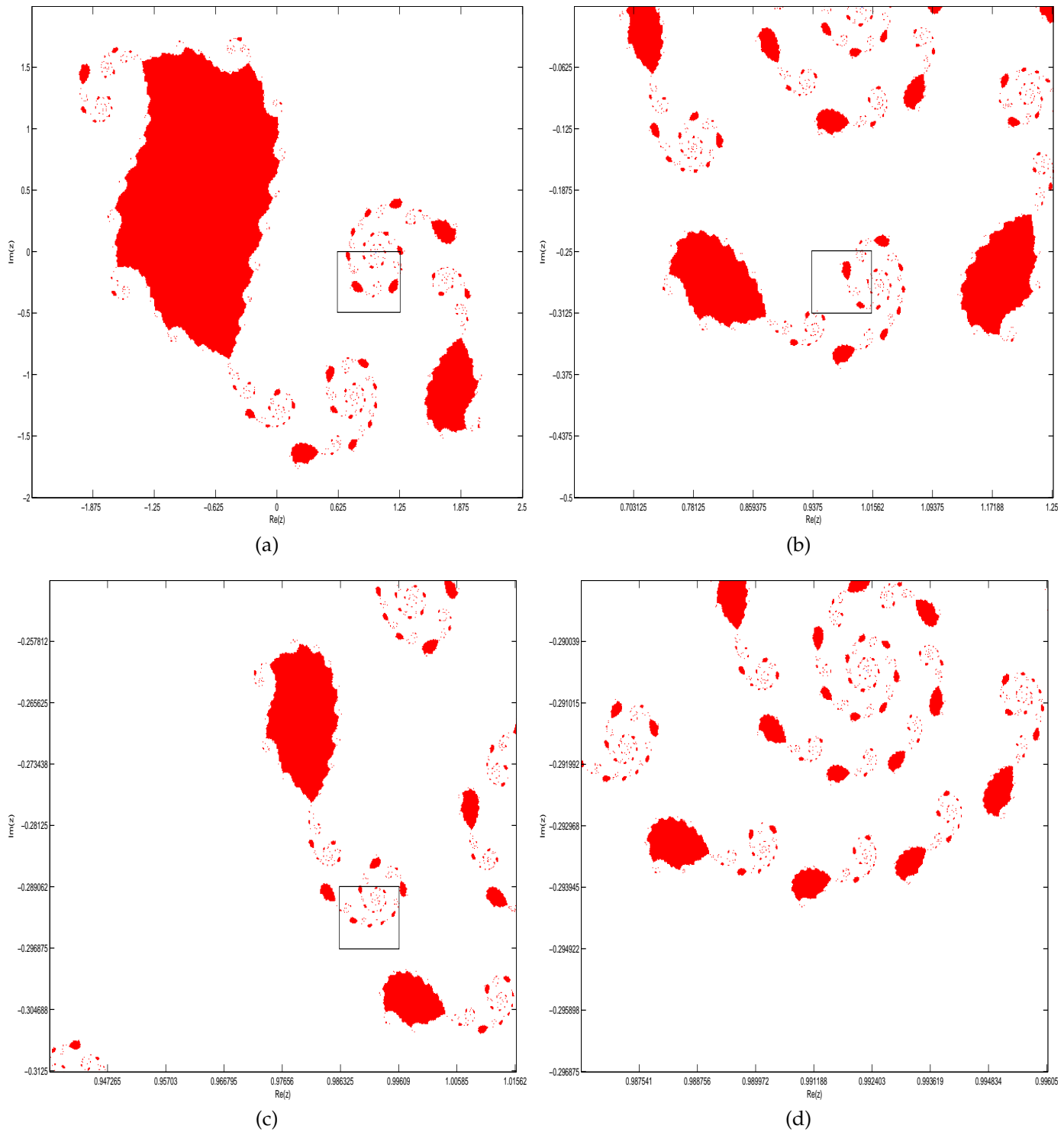


Fig. 3.4: Le bassin d'attraction du points fixes α_3 de G_{p,λ^*} . En (b), (c) et (d), des agrandissements successifs des zones encadrées.

3.4.1 Singularités

Les points fixes de (3.7) autre que le point ∞ , sont

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = (1, 0), \alpha_3 = (0, 0)$$

On remarque que les points $\alpha_{1,2}$ sont aussi les racines du polynôme $p(z)$ et que le point à l'infini est toujours attractif. La matrice Jacobienne de la récurrence (3.7) est donnée par

$$J_g = \begin{pmatrix} 1 - 4bx^2 - 2b(x^2 - y^2 - 1) - 4by^2 & -4byx \\ -4byx & 1 - 4bx^2 - 4by^2 + 2b(x^2 - y^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant calculer les multiplicateurs des points fixes de g et ainsi déterminer leur stabilité (voir Tab. 3.2).

	Multiplicateurs	vecteurs propres	Domaine de stabilité
α_1	$s_1 = 1 - 4a$ $s_2 = 1 - 4a$	$v_1 = (1, 0)$ $v_2 = (0, 1)$	$b \in]0, \frac{1}{2}[$
α_2	$s_1 = 1 - 4a$ $s_2 = 1 - 4a$	$v_1 = (1, 0)$ $v_2 = (0, 1)$	$b \in]0, \frac{1}{2}[$
α_3	$s_1 = 1 + 2a$ $s_2 = 1 - 2a$	$v_1 = (1, 0)$ $v_2 = (0, 1)$	\emptyset
∞	-	-	$b \in \mathbb{R}^*$

Tab. 3.2: Stabilité des points fixes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et ∞ de g .

Il faut noter que le point fixe α_1 est de type noeud pour $b \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ et que pour

- $b \in]-1, 0[$, $|s_1| < 1$ et $|s_2| > 1$ les vecteurs propres associés à s_1 et s_2 sont respectivement $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$.
- $b \in]0, 1[$, $|s_1| > 1$ et $|s_2| < 1$ les vecteurs propres associés à s_1 et s_2 sont respectivement $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$.

Maintenant; si $b \in]0, 1[$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que les images inverses successives du segment $\{(0, y) : y \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$ par l'application g :

$$\Gamma_k = \{g^{-k}(0, y); y \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}_{k=1,2,\dots}$$

forment les frontières des différents bassins d'attraction des points fixes à distances finies (Fig. 3.5-3.6). On peut même calculer explicitement l'équation de la courbe Γ_1 qui est donnée par le système paramétré suivant

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2 - c^2 + 4b^2}}{b} \\ y = -\frac{c}{4b} \end{cases}, c \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad (3.8)$$

La valeur de ε est déterminée dans le paragraphe suivant.

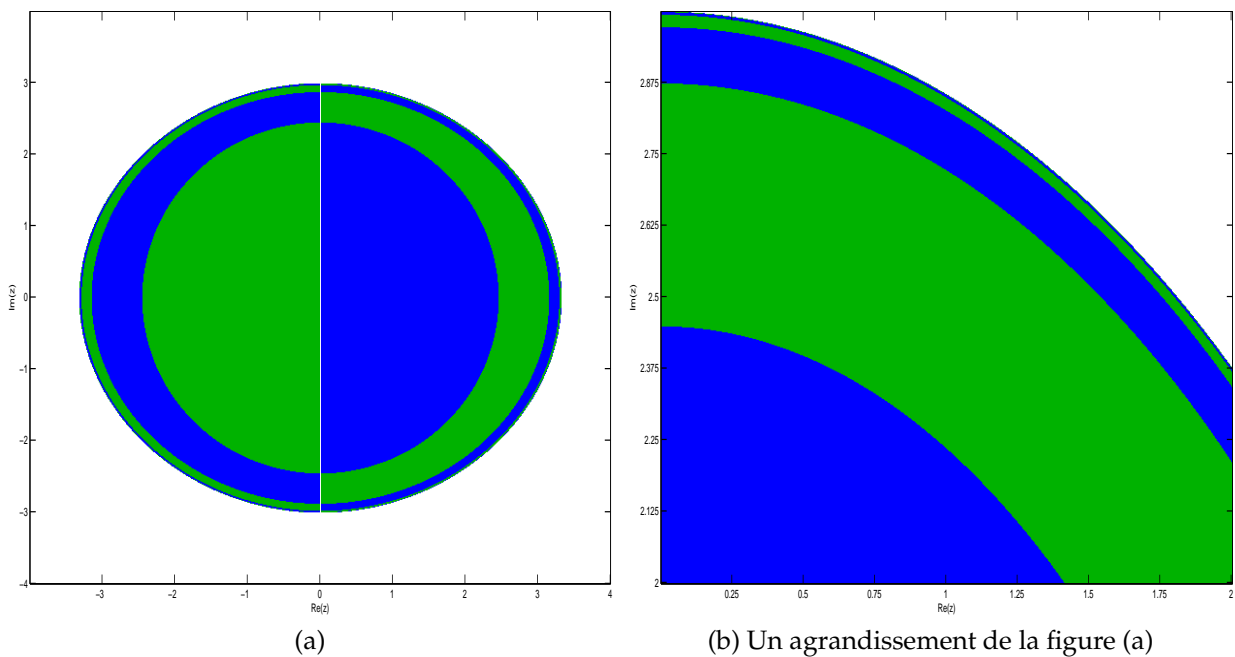


Fig. 3.5: En vert le bassin d'attraction du point fixe α_1 et en bleu le bassin d'attraction du point fixe α_2 ($b = 0.1$).

Remarque 3.2. Il faut noter que la récurrence (3.6) peut être vue comme un schéma de minimisation par le gradient de la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{2} |p(z)|^2, z = x + iy \quad (3.9)$$

On trouve

$$\nabla f(x, y) \equiv p(z)\overline{p'(z)}$$

et dans ce cas, on a

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - b \nabla f(x_k, y_k)^\perp$$

Ce type de dynamique est étudié dans un cadre plus général -espace de Banach- dans [29, 30, 31].

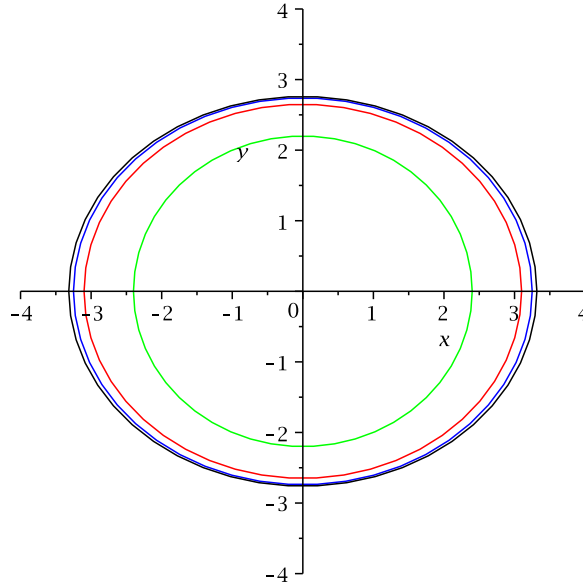


Fig. 3.6: Les courbes Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_4 respectivement en noir, bleue, rouge et vert.

3.4.1.1 Cycles d'ordre deux

Les bassins d'attraction des points fixes à distance finie de (3.7) sont délimités par les cycles d'ordre deux, de ce fait nous pouvons calculer les limites radiales $\{-\varepsilon, \varepsilon\}$ et verticales $\{-\varepsilon', \varepsilon'\}$ de ces bassins d'attraction, en calculant les cycles d'ordre deux de la forme $(x^*, 0)$ et $(0, y^*)$, $x^*, y^* \in \mathbb{R}$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{1-b}{b}} \\ \varepsilon' &= \sqrt{\frac{1+b}{b}} \end{aligned}$$

Proposition 3.1. *Il n'y a pas de cycles d'ordre deux attractifs, pour la récurrence g .*

Démonstration. Une démonstration "très simple" consiste à calculer les cycles d'ordre deux puis étudier la stabilité des singularités (Voir l'annexe A). \square

3.5 Conclusion du chapitre 3

Ce chapitre est consacré principalement à la méthode de Cauchy :

$$z_{k+1} = z_k - \lambda p(z_k); \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

On montre que pour des valeurs bien déterminées du paramètre λ , l'un des points critiques de (3.10) est attiré par le point à l'infini. Ce qui va influencer sur l'aspect topologiques de l'ensemble de Julia et par conséquent, le bassin d'attraction des cycles attractifs (à distance finie) est non-connexe. On remarque aussi que la méthode de Cauchy ne parvient pas à trouver toutes les racines d'un polynôme donné. Nous parvenons à remédier à cet inconvénient par l'introduire d'une mise à l'échelle non-holomorphe (multiplication par une fonction non-holomorphe) :

$$z_{k+1} = z_k - b p(z_k) \overline{p(z_k)} \equiv g(z_k); b \in \mathbb{R}.$$

Pour cette modification, nous montrons essentiellement que si

$$p(z) = z^2 - 1 \text{ et } b \in]0, 1[,$$

alors la frontière des bassins d'attraction des points fixes est donnée par itération inverse d'un segment de droite i.e.

$$\Gamma_k = \{g^{-k}(0, y); y \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}_{k=1,2,\dots},$$

telle que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{1-b}{b}}, \\ \varepsilon' &= \sqrt{\frac{1+b}{b}}. \end{aligned}$$

Chapitre 4

La Méthode de Cauchy Perturbée

4.1 Position du problème

Soit la récurrence non holomorphe, donnée par la méthode de Cauchy perturbée

$$z_{k+1} = z_k - a p(z_k) - b p(z_k) \overline{p(z_k)} \quad (4.1)$$

Où $p(z) = z^2 - 1$, a et b sont des réels positifs. En remplaçant $z_k = x_k + iy_k$ et $\bar{z}_k = x_k - iy_k$ dans (4.1), on obtient la transformation ponctuelle dans \mathbb{R}^2 suivante

$$G : \begin{cases} x_{k+1} = x_k - 2b(x_k^2 - y_k^2 - 1)x_k - 4b x_k y_k^2 - a(x_k^2 - y_k^2 - 1) \\ y_{k+1} = y_k + 2b(x_k^2 - y_k^2 - 1)y_k - 4b x_k^2 y_k - 2a x_k y_k. \end{cases} \quad (4.2)$$

Pour cette récurrence, le calcul analytique des cycles attractifs d'ordre supérieur à 1 est presque impossible et, dans ce cas, on a recours aux techniques de balayage numérique : Pour chaque valeur du plan paramétrique (a, b) , on effectue un balayage du plan de phase (x, y) , à la recherche des cycles attractifs. Cette méthode, bien qu'elle soit efficace pour un grand nombre de récurrences, souffre de quelques insuffisances, telles que la lenteur (due au nombre élevé d'opérations effectuées¹), la possibilité de ne pas détecter certains cycles, "échappant" au balayage (à cause de la résolution limitée du plan de phase). Plus grave encore et comme dans le cas de (4.2), on peut confondre des cycles "semi-stables" avec des

1. Dans la pratique nous avons besoin d'au-moins $400 \times 400 \times 10 \times 10 = 16 \times 10^6$ appel de procédures. Avec une résolution d'au-moins 400×400 points pour le plan paramétrique et 10×10 points pour le plan de phase.

cycles stables. En effet, la figure *Fig. 4.1* représente le balayage du plan paramétrique de la récurrence (4.2) avec la technique décrite précédemment. En prenant le point $(-1.150, 0.2900)$ dans une région du plan paramétrique, où on remarque une abondance de cycles d'ordre deux, on trouve $\alpha = (-1.399765092, 0)$, comme cycle d'ordre deux. Les multiplicateurs de ce cycle sont

$$\mu_1 = -12.61386392, \mu_2 = 0.145388264$$

avec $v_1 = (1, 0)$ comme vecteur propre associé à la valeur propre μ_1 et $v_2 = (0, 1)$, le vecteur propre associé à μ_2 . Puisque $|\mu_2| < 1$, on dit que α est un cycle semi-stable, i.e. α est attractif pour la restriction de la récurrence (4.2) sur la droite

$$\{(-1.399765092, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Le recours à la vérification numérique de la stabilité de chaque cycle détecté, augmentera considérablement le nombre d'opérations nécessaire et rendra la technique du balayage inefficace. La solution proposée est de remplacer le balayage du plan de phase (trop "coûteux") par un test effectué sur quelques points de l'ensemble des points critiques.

Par la suite, on va justifier ce choix.

4.2 Points critiques et bassins d'attraction

4.2.1 Le cas unidimensionnel

Dans [12, 46], il est introduit pour la première fois la notion de dérivée Schwarzienne dans l'étude des récurrences unidimensionnelle de la forme

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

telle que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3 .

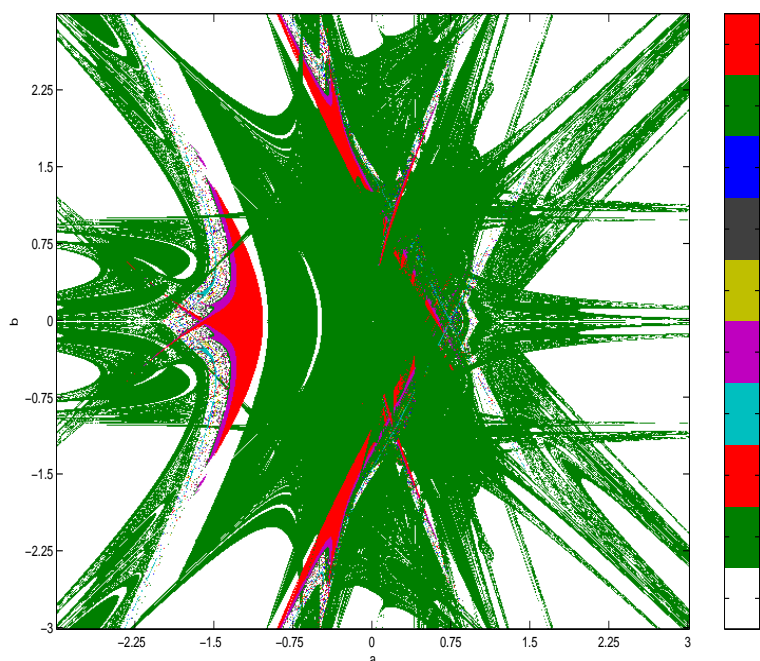


Fig. 4.1: Plan paramétrique de la transformation (4.2), utilisant la méthode du balayage des deux plans (plan paramétrique et plan de phase).

Définition 4.1. La dérivée Schwarzienne de la fonction f en x est donnée par

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Par la suite, on suppose que f admet un nombre fini de point critiques, le résultat principal énoncé dans [46] est :

Théorème 4.1. Si α est un point périodique pour f , $\mathcal{A}^*(\alpha)$ le bassin immédiat de α (qui est dans ce cas un intervalle ouvert) et $S_f(x) < 0$ pour tout x dans $\mathcal{A}^*(\alpha)$, alors $\mathcal{A}^*(\alpha)$ contient au moins un point critique.

Remarque 4.1. La condition sur la dérivée Schwarzienne est suffisante seulement, et dans l'exemple qui suit, nous illustrons ce fait.

Exemple 4.1. Soit la récurrence unidimensionnelle donnée par

$$x_{k+1} = f(x_k) = \frac{1}{10} x_k^5 + \frac{125}{1000} x_k^4 - \frac{1}{2} x_k^3 - x_k^2 - \frac{1}{9} x_k \quad (4.3)$$

Cette récurrence admet les points fixes suivants $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \simeq -2.6973674$ et $\alpha_3 \simeq 2.7650378$, seul α_1 est attractif. Les points critiques de (4.3) sont $c_1 \simeq -1.7443738$ et $c_2 \simeq 1.9145931$ avec $c_{1,2} \in \mathcal{A}^*(\alpha_1) =]\alpha_2, \alpha_3[$ alors que $S_f(x)$ n'est pas toujours négative (voir Fig.4.2).

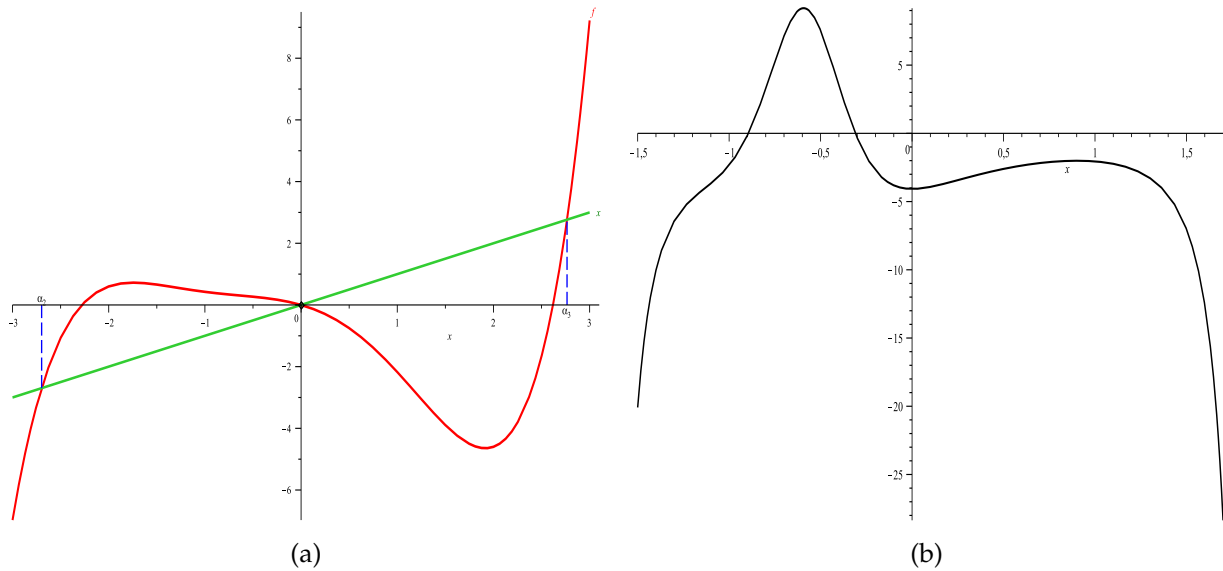


Fig. 4.2: Le graphe de la fonction f en (a) et celui de la dérivée Schwarzienne S_f en (b).

4.3 Le cas bidimensionnel

On cherche à définir une condition qui garantira l'existence des points critiques dans le bassin immédiat d'un cycle attractif pour une transformation bidimensionnelle.

Soit

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

une transformation ponctuelle qui définit la dynamique discrète suivante

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = T(x_k, y_k) = (\phi(x_k, y_k), \psi(x_k, y_k))$$

$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et soit $J_T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$, le Jacobien de T au

point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $D_T = \det(J_T)$, $\nabla D_T = \left(\frac{\partial D}{\partial x}, \frac{\partial D}{\partial y} \right)$ et $H_{D_T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

Définition 4.2. On dit que la transformation T vérifie la condition C1 au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\nabla D_T(x, y) = (0, 0) \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 D_T(x, y) < 0 \end{cases}$$

Où $\lambda_i (i = 1, 2)$ sont les valeurs propres de $H_{D_T}(x, y)$.

Hypothèse 1. Supposons que α est un point périodique attractif pour T , que $\mathcal{A}^*(\alpha)$ est son bassin immédiat, et que T vérifie la condition C1 pour tout point $(x, y) \in \mathcal{A}^*(\alpha)$.

Proposition 4.1 ([43]). Soit $\alpha \in \mathbb{R}^2$ qui satisfait l'hypothèse 1 et notons \mathcal{C}_T l'ensemble des points critiques de T , i.e.

$$\mathcal{C}_T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_T(x, y) = 0 \right\}$$

alors

$$\mathcal{A}^*(\alpha) \cap \mathcal{C}_T \neq \emptyset$$

Lemme 4.1 ([43]). Si $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$. On montre la formule suivante

$$J_{T^n}(x, y) = \prod_{i=0}^{n-1} J_{T^i}(x, y)$$

Proposition 4.2 ([43]). Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux transformations ponctuelles vérifiant la condition C1 au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $T \circ P$ vérifie aussi cette condition au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Corollaire 4.1 ([43]). Soit la transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui vérifie la condition C1 au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors pour tout entier $n \geq 1$, T^n vérifie cette condition au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 4.3. On appelle courbe critique, toute composante connexe de \mathcal{C}_T .

Lemme 4.2 ([43]). Si le nombre de courbes critiques est fini alors le nombre de cycles attractifs l'est aussi.

L'exemple suivant justifie l'utilisation de la condition C1.

Exemple 4.2. Soit la récurrence bi-dimensionnelle définie par la fonction

$$F(x, y) = (-x^4 + x^3 + a x + x y^2, b y), \quad (4.4)$$

avec $a = b = \frac{9}{10}$.

Le système (4.4) admet les points fixes suivants :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (0, 0), \\ \alpha_2 &= (0.8669513176, 0), \\ \alpha_3 &= (0.4126055723, 0), \\ \alpha_4 &= (-0.2795568899, 0). \end{aligned}$$

La figure (Fig. 4.3), indique que le bassin immédiat $\mathcal{A}^*(\alpha_1)$ ne contient pas de points critiques. Ce qui implique (normalement) la non vérification de la condition C1. En effet, la matrice Jacobienne de la fonction F est

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} -4x^3 + 3x^2 + a + y^2 & 2xy \\ 0 & b \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Puisque $|b| < 1$, la quantité $l(x, y) = -4x^3 + 3x^2 + a + y^2$ détermine la stabilité des points fixes et on a :

$$l(\alpha_1) = 0.90, l(\alpha_2) = 0.5483954130, l(\alpha_3) = 1.129756642, l(\alpha_4) = 1.221847946. \quad (4.6)$$

Donc, les points α_1 et α_2 sont stables contrairement aux points α_3 et α_4 . Passons maintenant au calcul du déterminant de F , son gradient et son hessien

$$D_F(x, y) = b l(x, y), \quad (4.7)$$

$$\nabla D_F(x, y) = ((-12x^2 + 6x)b, 2by), \quad (4.8)$$

$$H_{D_F}(x, y) = \begin{pmatrix} (-24x + 6)b & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Les seules solutions du système $\nabla D_F(x, y) = 0$ sont : $\zeta_1 = (0, 0)$, $\zeta_2 = (0.5, 0)$. On remarque que

ζ_1 coïncide avec le point fixe α_1 , donc $\zeta_1 \in \mathcal{A}^*(\alpha_1)$. Mais

$$H_{D_F}(\zeta_1) = \begin{pmatrix} 6b & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

i.e. les valeurs propres de $H_{D_F}(\zeta_1)$ sont $\lambda_1 = 6b > 0$, $\lambda_2 = 2b > 0$ de plus $D_F(\zeta_1) = ab > 0$, ce qui implique que

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0; \\ \lambda_1 D_F(\zeta_1) > 0. \end{cases}$$

La condition C1 n'est donc pas vérifiée en ζ_1 (ce qui est en accord avec la proposition 4.1). Alors que $F^n(\zeta_2) \rightarrow \alpha_2$, ce qui implique que $\zeta_2 \in \mathcal{A}(\alpha_2) \equiv \mathcal{A}^*(\alpha_2)$ de plus, la fonction F vérifie la condition C1 au point ζ_2 et d'après la proposition 4.1, le bassin $\mathcal{A}^*(\alpha_2)$ contient au moins un point critique, ce qui est visible sur la figure (Fig. 4.3) où on voit que la courbe critique traverse le bassin immédiat du point fixe α_2 .

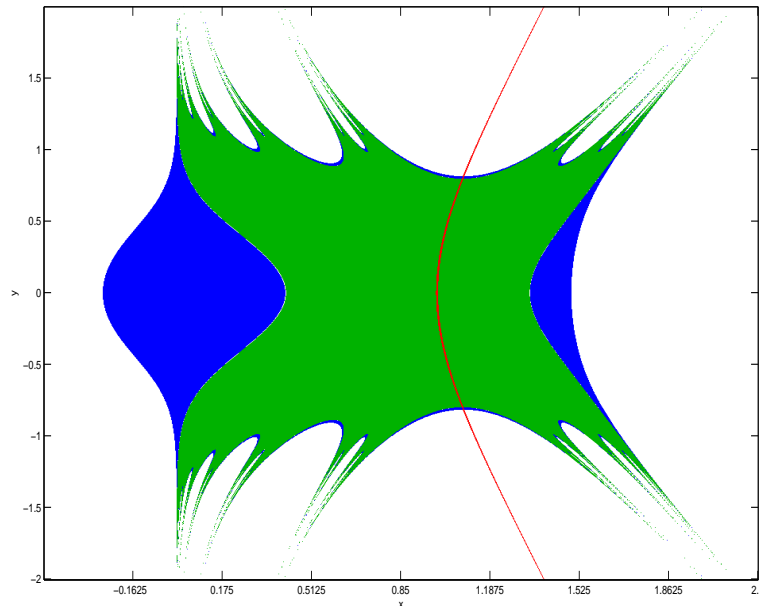


Fig. 4.3: Les bassins d'attraction de la transformation (4.4), avec $a = b = \frac{9}{10}$. La couleur bleue et verte indiquent les bassins d'attraction des points fixes α_1 et α_2 , en blanc le bassin de ∞ . La courbe critique est indiquée en rouge.

4.3.1 Applications

Il est facile de montrer que la récurrence (4.2), vérifie la condition C1, et dans ce cas, on est certain de l'existence d'au-moins un point critique dans le bassin immédiat de chaque cycle attractif. On va donc modifier la technique de balayage du plan paramétrique, de sorte qu'au lieu de faire un balayage du plan de phase, on prendra que en considération que les points critiques. La figure Fig. 4.4 montre une différence significative avec le plan paramétrique

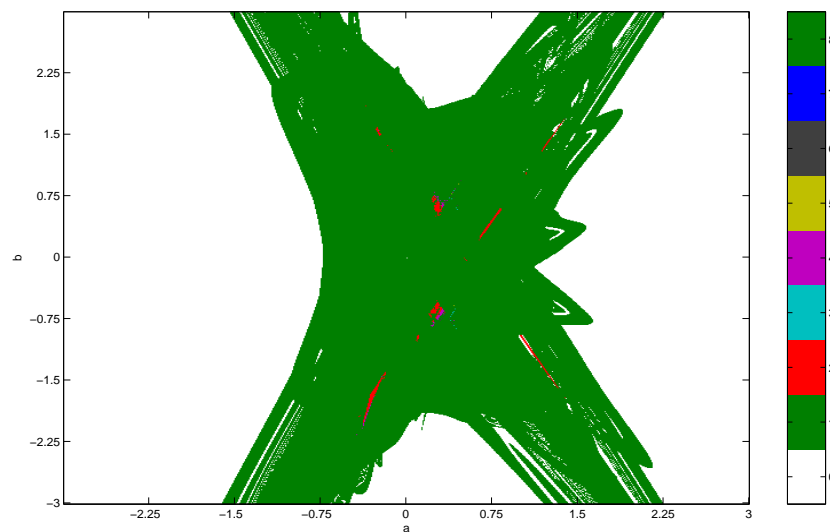


Fig. 4.4: Le plan paramétrique de la transformation (4.2), utilisant la technique de balayage expliquée dans le paragraphe 4.3.1.

donné dans Fig. 4.1, et les calculs effectués à partir d'un point obtenu dans une zone du plan paramétrique indiquent l'existence de cycle attractif d'ordre deux, nous a permis d'identifier un cycle stable d'ordre deux (voir Fig. 4.5).

4.4 Conclusion du chapitre 4

Dans ce chapitre, nous proposons une généralisation d'un résultat concernant les transformations unidimensionnelles donné dans [46], aux cas des transformations bidimensionnelles. En effet, si

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = T(x_k, y_k)$$

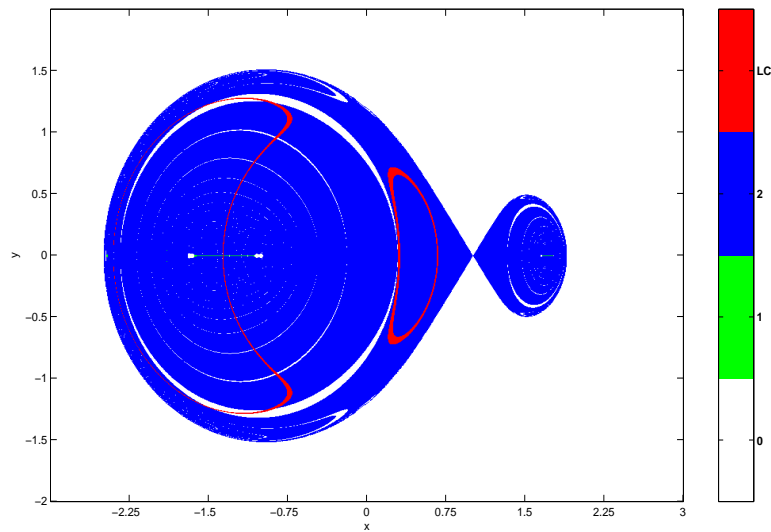


Fig. 4.5: Les bassins d'attraction de la transformation (4.2), avec $a = 0.29$ et $b = 0.64$. La couleur bleue indique le bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 2, en blanc le bassin de ∞ . La courbe critique est de couleur rouge.

est une récurrence dans \mathbb{R}^2 vérifiant l'hypothèse 1 sur le bassin immédiat $\mathcal{A}^*(\alpha)$ d'un point périodique α , alors $\mathcal{A}^*(\alpha)$ contient au moins un point critique. Nous exploitons ce résultat pour améliorer l'efficacité des méthodes de balayage numérique du plan paramétrique. Ce qui va nous permettre par la suite de calculer -avec précision- les différents cycles attractifs d'une récurrence donnée.

Appendices

Annexe A

Calcul des cycles d'ordre deux de la récurrence g

A.1 Cycles d'ordre deux de la transformation g

La résolution de l'équation

$$g^2(x, y) = (x, y)$$

donne lieu à huit solutions α_j , $j = 1, 2, \dots, 8$, telles que

1. $\alpha_1 = (0, -\sqrt{\frac{b+1}{b}})$

2. $\alpha_2 = (0, \sqrt{\frac{b+1}{b}})$

3. $\alpha_3 = (0, -\sqrt{\frac{1-b}{b}})$

4. $\alpha_4 = (0, \sqrt{\frac{1-b}{b}})$

5. $\alpha_5 = (0, -\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2b-1-\sqrt{4b^2-4b-3}}{b}})$

6. $\alpha_6 = (0, \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2b-1-\sqrt{4b^2-4b-3}}{b}})$

7. $\alpha_7 = (0, -\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a-1-\sqrt{4a^2+4a-3}}{a}})$

8. $\alpha_8 = (0, \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2b-1-\sqrt{4b^2+4b-3}}{b}})$

Multiplicateurs

Les multiplicateurs des cycles d'ordre deux de g sont données dans le tableau suivant

	Valeurs propres
α_1	$s_1 = 25 + 40b + 16b^2, s_2 = 1 + 16b^2 + 8b$
α_2	$s_1 = 25 + 40b + 16b^2, s_2 = 1 + 16b^2 + 8b$
α_3	$s_1 = 1 + 16b^2 - 8b, s_2 = 25 - 40b + 16b^2$
α_4	$s_1 = 1 + 16b^2 - 8b, s_2 = 25 - 40b + 16b^2$
α_5	$s_1 = 1 + 4b + 8b^2, s_2 = 7 + 8b - 8b^2$
α_6	$s_1 = 1 + 4b + 8b^2, s_2 = 7 + 8b - 8b^2$
α_7	$s_1 = 1 - 4b + 8b^2, s_2 = 7 - 8b - 8b^2$
α_8	$s_1 = 1 - 4b + 8b^2, s_2 = 7 - 8b - 8b^2$

Tab. A.1: Tableau des cycles d'ordre deux de g .

Annexe B

Programmes en Fortran90 et en C++

B.1 Programme en Fortran90 donnant le bassin d'attraction d'une récurrence complexe

```
!Programme FBassinsC (c) Sahari M.L.09/06/2009
implicit none
double precision pas1,pas2,x0,y0,x1,y1,aa
double complex z,za,zz,z1,z2,z3,lambda
integer(4) j,k,i,nn
integer, parameter::np=600,ngrand=180,l=9
double precision, parameter::eps=1e-2,c=dbl(0),a=dbl(0.1),b=dbl(0.1)
double precision, dimension(2) ::x,xx,xa
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
x0=dbl(-2.5)
x1=dbl(2.5)
y0=dbl(-2.0)
y1=dbl(2.0)
z1=dcmplx(1,0)
z2=dcmplx(-0.5,-0.8660254040)
z3=dcmplx(-0.5,0.8660254040)
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```

open(1,FILE='out.dat')
open(2,FILE='init.dat')
write (2,*) x0,x1,y0,y1,np,a,b
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
pas1=DBLE((x1-x0)/(np))
pas2=DBLE((y1-y0)/(np))
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
do i=0,np
  do j=0,np
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    x(1)=point_suiv(x0,i,pas1)
    x(2)=point_suiv(y0,j,pas2)
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    za=dcmplx(x(1),x(2))
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    Recc:do k=1,ngrand
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    if (cdabs(za)>db1e(1e5)) then
      goto 30
    endif
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    z=rec(za,a,b,1)
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    if(cdabs(z-z1)<eps) then
      write (1,*) i+1,j+1,1
      goto 30
    endif
    if(cdabs(z-z2)<eps) then
      write (1,*) i+1,j+1,2
      goto 30

```

```

endif
if(cdabs(z-z3)<eps) then
    write (1,*) i+1,j+1,3
    goto 30
endif
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    za=z
enddo Recc
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
30 enddo    !! j
enddo !! i
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
contains
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION rec(zz,a,b,l)
    double complex zz,lambda,x,rec
    double precision a,b
    integer(4) i,l
    x=zz
    lambda=dcmplx(a,b)
    do i=1,l
        if (cdabs(x)>db1e(2)) then
            goto 33
        endif
        rec=x-b*(p(x,lambda)*dconjg(dp(x,lambda)))-a*p(x,lambda)
        x=rec
    33 enddo
end function

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION p(z,lambda)
    double complex z,p,lambda
    p=z**2-dcplx(1)
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION dp(z,lambda)
    double complex z,dp,lambda
    dp=dcplx(2)*z
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FUNCTION point_suiv(x,i,pas)
    double precision point_suiv,x,pas
    integer i
    point_suiv=x+(i*pas)
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
end

```

B.2 Programme en Fortran90 donnant le plan paramétrique d'une récurrence complexe

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Programme Plan Param 3.1 (c) Sahari M.L.09/06/2009
implicit none
double precision pas_phs1,pas_phs2,pas_par1,pas_par2,x0,y0,x1,y1,a0,a1,b0,b1,a,b,aa
double complex z,za,zz,lambda
integer(4) j,k,kk,i,i_par,j_par,nn
integer, parameter::np_phs=8,np_par=600,ngrand=280,l=13
double precision, parameter::eps=1e-5,c=dbl(0)
double precision, dimension(2) ::x,xx,xa

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
a0=dblE(-2)
a1=dblE(2)
b0=dblE(-2)
b1=dblE(2)
x0=dblE(-2)
x1=dblE(2)
y0=dblE(-2)
y1=dblE(2)
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

open(1,FILE='out.dat')
open(2,FILE='init.dat')
write (2,*) a0,a1,b0,b1,np_par
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

pas_phs1=DBLE((x1-x0)/(np_phs))
pas_phs2=DBLE((y1-y0)/(np_phs))
pas_par1=DBLE((a1-a0)/(np_par))
pas_par2=DBLE((b1-b0)/(np_par))
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

do i_par=0,np_par
  do j_par=0,np_par
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    a=point_suiv(a0,i_par,pas_par1)
    b=point_suiv(b0,j_par,pas_par2)
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

    do i=0,np_phs
      do j=0,np_phs
        !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
        x(1)=point_suiv(x0,i,pas_phs1)
        x(2)=point_suiv(y0,j,pas_phs2)

```


B.3 Programme en C++ donnant le bassin d'attraction de la méthode de Newton

```

//////////Programme CBassinC 1.3 (c) Sahari M.L.12/01/2010
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

#define PI 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078
#define PI2 (PI*2)
#define SQ2 1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990
#define SQ3 1.732050807568877293527446341505872366942805253810380628055806979451
#define FI 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052
#define LAMBDA 1.9

#define SX 1111
#define SY 1111

#define POLY(z) LAMBDA*z*z*z + (-1)
#define DPOLY(z) 3*z*z

// #define POLY(z) z*z*z*z*z*z*z*z*z + (-1)
// #define DPOLY(z) 9*z*z*z*z*z*z*z*z*z

// #define POLY(z) z*z*z*z*z + (-3i) * z*z*z + (-5-2i) * z*z + (3) * z + (1)
// #define DPOLY(z) 5*z*z*z*z + (-3i) * 3*z*z + (-5-2i) * 2*z + (3) * 1

// #define POLY(z) z*z*z*z*z*z + (2-4i) * z*z*z*z*z + (-1) * z + (2+4i)

```

```

//#define DPOLY(z) 6*z*z*z*z*z + (2-4i) * 5*z*z*z*z + (-1) * 1

//#define POLY(z) z*z*z*z*z + (-1) * z + (-1)
//#define DPOLY(z) 5*z*z*z*z + (-1) * 1

//#define POLY(z) z*z*z*z*z + (-1) - (cos(__imag__ z)+1i*sin(__imag__ z))*
exp(__real__ z)
//#define DPOLY(z) 5*z*z*z*z - (cos(__imag__ z)+1i*sin(__imag__ z))*
exp(__real__ z)

#define RSD 1923879

#define BPL ((SX*3+3)&~3)

void seedr(unsigned int);
unsigned int rnd();
unsigned int rndm(unsigned int);

unsigned char bhdr[54]={
0x42, 0x4D, 0x36, 0x00, 0x30, 0x00, 0x00, 0x00, 0x00, 0x00,
0x36, 0x00, 0x00, 0x00, 0x28, 0x00,
0x00, 0x00, 0x00, 0x04, 0x00, 0x00, 0x00, 0x04, 0x00, 0x00,
0x01, 0x00, 0x18, 0x00, 0x00, 0x00,
0x00, 0x00, 0x00, 0x00, 0x30, 0x00, 0x12, 0x0B, 0x00, 0x00,
0x12, 0x0B, 0x00, 0x00, 0x00, 0x00,0x00, 0x00, 0x00, 0x00, 0x00, 0x00};

unsigned char po[BPL];

double gr[SY][SX][3];

```

```
void drawit();

int main(int a, char **b) {
    FILE *o;
    int x, y, c;
    double t;
    char *p;

    srand(time(0));
    drawit();

    p=bhdr+2; *p++=x=54+BPL*SY; *p++=x>>=8; *p++=x>>=8; *p=x>>=8;
    p=bhdr+18; *p++=x=SX; *p++=x>>=8; *p++=x>>=8; *p++=x>>=8;
    *p++=x=SY; *p++=x>>=8; *p++=x>>=8; *p=x>>=8;

    if(!(o=fopen("newtroot.EPS", "wb"))) {
        fclose(o);
        printf("Couldn't open output file.\n");
        return(0);
    }

    fwrite(bhdr, 54, 1, o);

    for(x=SX*3;x<BPL;++x) po[x]=0;

    for(y=SY-1;~y;--y) {
        for(x=0,p=po;x<SX;++x) for(c=2;~c;--c) *p++=(t=gr[y][x][c])<=0?0:(t>=1?255:t*255);
        fwrite(po, BPL, 1, o);
    }
}
```

```

fclose(o);
return(0);
}

void drawit() {
    int x, y, c, n, bn, dx, dy, dz;
    unsigned int m, p;
    _Complex double z, w;
    double f, s;
    seedr(RSD);
    for(y=0;y<SY;++y) for(x=0;x<SX;++x) {
        z=(x*(10./SX)-5)-(y*(10./SY)-5)*1i;

        for(f=s=1;f>.01&&((__real__((w=(POLY(z)))*~w))>.01;f*=.95,s=-s) z=z-w/(DPOLY(z));

            for(n=0;n<10;++n) z=z-(POLY(z))/(DPOLY(z));

            z=f*(z*z)/(z*~z);

            gr[y][x][0]=.5*f/*+.02*s*f*/+.24*(__real__(z))-(SQ3*.24)*(__imag__(z));
            gr[y][x][1]=.5*f/*+.02*s*f*/+.24*(__real__(z))+(SQ3*.24)*(__imag__(z));
            gr[y][x][2]=.5*f/*+.02*s*f*/-.48*(__real__(z));
        }
    }

    unsigned int rseeda[624];
    int rseedu;

    void seedr(unsigned int s) {

```

```

int n;
rseedu=624; rseeda[0]=s; for(n=1;n<624;++n) rseeda[n]=s*=69069u;
}

#define TEMPBLAH(x,y,z) { v=(rseeda[x]&0x80000000)|(rseeda[y]&0x7fffffff);\
                        rseeda[x]=rseeda[z]^(v>>1)^(0x9908b0df&(0-(v&1)));}

void gennewr() {
    int n;
    unsigned int v;
    for(n=0;n<227;++n) TEMPBLAH(n, n+1, n+397);
    for(;n<623;++n) TEMPBLAH(n, n+1, n-227);
    TEMPBLAH(623, 0, 396);
    rseedu=0;
}

#undef TEMPBLAH

unsigned int rnd() {
    if(rseedu>=624) gennewr();
    unsigned int v=rseeda[rseedu++];
    v^=v>>11;
    v^=(v<<7)&0x9d2c5680;
    v^=(v<<15)&0xefc60000;
    v^=v>>18;
    return(v);
}

unsigned int rndm(unsigned int m) {
    unsigned int v, c=(0u-m)/m;
    while((v=rnd())/m>c);
    return(v%m);
}

```

}

Bibliographie

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*, McGraw-Hill, New York, (1966).
- [2] N. Akroune, Sur une variante de la méthode des boîtes pour la détermination numérique de la dimension fractale d'un sous-ensemble du plan, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 338 (2004), 899-904.
- [3] M. Audin. *Fatou, Julia, Montel, Le grand Prix des Sciences Mathématiques de 1918, et Après...*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).
- [4] A. F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag (1991).
- [5] A. Beardon. *Algebra and Geometry*, Cambridge University Press (2005).
- [6] P. Blanchard. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, *Bull. Amer. Math. Soc.* 11 (1984), 85-141.
- [7] H. Brolin. Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.* 6 (1965), 103-144.
- [8] X. Buff and A. Cheritat. Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive, *Comptes Rendus Mathématiques* (2005) e 341/11, 669-674.
- [9] A. Cayley. Desiderata and suggestions. No. 3. The Newton-Fourier imaginary problem, *Amer. J. Math* 2 (1879), no. 1, 97.
- [10] A. Cayley. The Newton-Fourier imaginary problem, *Amer. Jour. of Math.* 2 (1879), p. 97.
- [11] A. Cauchy. Méthodes générales pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. *Compte rendus Acad. Sc. Paris*, Tome 25 (1847) 536-538.
- [12] W. De Melo and S. van Strien. One-dimensional dynamics : the Schwarzian derivative and beyond, *Bull (New Series) Am. Math. Soc.* 18 (1988).

-
- [13] B. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Westview Press, (2003).
- [14] A. Douady, J. H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes*, Prépublications Mathématiques d'Orsay 84-02, Université de Paris-Sud, 1984.
- [15] A. Douady and J. H. Hubbard. On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 18 (1985) 287-344.
- [16] I. Djellit and M. L. Sahari. Cauchy's Method as Dynamical System, *Proc. of IEEE Workshop on Nonlinear Maps and their Applications (NOMA'07)*, pp. 75-78. INSA Toulouse (2007).
- [17] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge (1986).
- [18] P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 47, 1919, 161-271 ; 48, 1920, 33-94 et 208-304.
- [19] H. Farkas and I. Kra. *Riemann Surfaces*. Springer Graduate Text in Mathematics (1980).
- [20] M.J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of non-linear transformations, *J. Stat. Phys.* 19 (1978), 25-52.
- [21] W. J. Gilbert. The complex dynamics of Newton's method for a double root, *Comp. & math. with app.* (1991), vol. 22, no10, pp. 115-119.
- [22] A. A. Goldestein. Cauchy's method of minimization, *Numer. Math.* Vol. 4, N°1, 146-150 (1962).
- [23] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the Strangeness of Strange Attractors. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 9 (1 ?2) : 189 ?208 (1983).
- [24] F.V. Haeseler, H.-O. Peitgen. Newton's method and complex dynamical systems, *Acta. Appl. Math.* 13, 3-58(1988).
- [25] H. Jongen, P. Jonker and F. Twilt. The continuous, desingularized Newton Method for meromorphic functions, *Acta Appl. Math.* 13 (1988), 81-121.
- [26] G. Julia. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. de Math. pures et appliquées*, ser. 8.1, 1918, 47-245.

-
- [27] L. Kantorovich. Sur la méthode de Newton, Travaux de l'Institut des Mathématiques Steklov, XXVIII, 104-144 (1949).
- [28] J. Milnor. Dynamics in One Complex Variable : Introductory Lectures, I.M.S. SUNY at Stony-Brook (1990).
- [29] J.W. Neuberger. Sobolev gradients and differential equations, Springer Lecture Notes in Mathematics 1670 (1997).
- [30] J. W. Neuberger. Integrated form of continuous Newton's method, Evolution equations, 331-336, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 234, Dekker, New York (2003).
- [31] J. W. Neuberger and R. J. Renka. Sobolev gradients : introduction, applications, problems, to appear in : Contemporary Mathematics (AMS, Northern Arizona).
- [32] S. Lattès. Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré, C. R. Acad. Sci. Paris 166 (1918), 26-28.
- [33] E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow, Journal of the Atmos. Sci. 20 (1963), 448-464.
- [34] B.B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Co. New York (1982).
- [35] H.-O. Peitgen and P. H. Richter. The Beauty of Fractals, Springer-Verlag, Heidelberg (1986).
- [36] H.-O. Peitgen and D. Saupe. The Science of Fractal Images, Springer-Verlag (1988).
- [37] H.-O. Peitgen. M. Prufer, and K. Schmitt. Global aspects of the continuous and discrete Newton method : a casestudy, Acta Appl. Math. 13 (1988), no.1-2,123-202.
- [38] L. Perko. Differential Equations and Dynamical Systems. Springer (1991).
- [39] W. B. Richardson. Steepest descent using smoothed gradients, App. Math. and Com. 112. pp. 212-254 (2000).
- [40] M. L. Sahari and I. Djellit. Fractal Newton basins, Dis. Dyn. in Nat. and Soc. vol. 2006, Article ID 28756, 16 pages (2006).
- [41] M. L. Sahari and I. Djellit. Fractalisation du bassin d'attraction dans l'algorithme de Newton modifié, ESAIM : Proc., Vol.20, pp. 208-216. (2007).

-
- [42] M. L. Sahari and I. Djellit. The complex dynamic of conjugate gradient method, *Inter. Journ. of Comp. Math.*, Volume 86, Issue 3 (2009) , pp. 407 - 422.
- [43] M.L. Sahari, A-K. Taha, D. Fournier-Prunaret and I. Djellit. On some properties of non-holomorphic maps based upon the Cauchy's method, *ECIT (European Conference on Iteration Theory)*, Nant, France 12-17 September, 2010.
- [44] D. Saupe. Discrete versus continuous Newton's method : a case study, *Acta Appl. Math.* 13 (1988), no. 1-2, 5-80.
- [45] C. L. Siegel. Iteration of analytic functions. *Ann. Math.* 43 (1942).
- [46] D. Singer. Stable orbits and bifurcation of maps on the interval, *SIAM J. Appl. Math.* 35 (1978), pp. 260-267.
- [47] S. Smale. The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* 4, 1-36 (1981).
- [48] S. Smale. On the efficiency of algorithms of analysis, *Bull. A.M.S.* 13 87-121 (1985).
- [49] D. Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I, *Ann. Math.* 122 (1985) 401-418.
- [50] T. Ypma. Historical development of the Newton-Raphson method, *SIAM Review*, 37, 531-551 (1995)

Abstract

We investigate two methods of solving complex algebraic equations, Newton's method and the Cauchy's, and two variants of non-holomorphic Cauchy's method. We show that the dynamics of these methods can be described by studying the behavior of a subset of the phase plane.

Résumé

Nous étudions deux méthodes de résolution d'équations algébriques complexes, la méthode de Newton et la méthode de Cauchy ainsi que deux variantes non-holomorphes de la méthode de Cauchy. Nous montrons que la dynamique de ces méthodes peuvent être décrites par l'étude du comportement d'une partie du plan de phase.

ملخص

في هذه الرسالة نقوم بدراسة طريقتين (خوارزميتين) لحل المعادلات الجبرية المركبة، واحدة لنيوتون والأخرى لكوشي، وكذا خيارين غير - هولومورفيين حسب طريقة كوشي. كما نبين أنّ ديناميكية هذه الطرق، يمكن وصفها بدراسة جزء من فضاء المراحل.