وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
OF ANNABA
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR
DE ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option
Fonctions Spéciales et Optimisation
Intitulé :

Sur quelques problèmes du comportement asymptotique des polynômes extrémaux sur le segment

Par
AHCENE BOUCENNA

DIRECTEUR DE THESE :	**R. KHALDI**	Prof.	**U.B.M. ANNABA**

DEVANT LE JURY

PRÉSIDENT :	**A. GUEZANE-LAKOUD**	Prof.	**U.B.M. ANNABA**
EXAMINATEUR :	**S. KELAIAIA**	Prof.	**U.B.M. ANNABA**
EXAMINATEUR :	**F. ELLAGGOUNE**	M. C. A	**UNIV. GUELMA**
EXAMINATEUR :	**K. HAOUAM**	M. C. A	**UNIV. GUELMA**
EXAMINATEUR :	**A. HITTA**	M. C. A	**UNIV. TEBESSA**

Année : 2012

ملخص

في هذه الأطروحة نهتم بدراسة السلوك التقاربي لصنف من كثيرات الحدود المدعوة بالحدية $(0 < p < \infty)$ و التي نرمز لها بـ $T_{n,p}$ مرفقة بقياس بوريلي σ موجب ، منته ذو حامل F يشمل عدد غير منته من النقاط في المستوي المركب $(F = \sup p(\sigma))$.

هدفنا هو دراسة السلوك التقاربي لهذا الصنف من كثيرات الحدود بالنسبة لقياسات σ وحوامل F من الاشكال الاتية:

(1) $F = E$ ، (لفصل الثالث) حيث E هو القطعة المستقيمة $[-1،1]$ ، α مركزة على E ، مستمرة مطلقا بالنسبة لقياس لوبيغ طول القوس dx على E ، تحقق شرط زيغو. الصيغة التقاربية لـ $T_{n,p}$ تعطى بالعلاقة التالية:

و χ_n متقارب نحو الصفر بانتظام على الأجزاء المتراصة من Ω

(3) $\underline{F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{\infty}}$ ، (الفصل الخامس) حيث E هو القطعة المستقيمة $[-1، 1]$ ، $\sigma = \alpha + \gamma$ ، α مركزة على E ، مستمرة مطلقا بالنسبة لقياس لوبيغ طول القوس dx على E ، تحقق شرط زيغو و γ هو قياس متقطع مركز على $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ بالكتل A_k عند النقط z_k .

في هذه الحالة، الصيغة التقاربية لـ $T_{n,p}$ تعطى بالعلاقة التالية:

Table des matières

Abstract

The object of this thesis, is the study of the problem of asymptotic behavior of a class of polynomials so-called extrémal polynomials ($0 < p < \infty$) denoted by $T_{n,p}$ corresponding to a finite positive Borel measure σ on a compact set of the complex plane whose support F ($supp(\sigma) = F$) contains an infinite set of points.

The aim of this work is to establish the asymptotic formula of this class of polynomials for measures σ and supports F of the following form :

$\underline{(\mathbf{1})\ F = E,}$ (chapter 3); where E is the unit segment $E = [-1,\ 1]$, σ concentrated on E and is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure dx on E, and satisfies the Szegö condition.

The asymptotic formula of $\{T_{n,p}\}$, is

$$T_{n,p}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2}\right)^n \frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi(z)}\right)}{D(0)} [1 + \chi_n(z)],$$

where, Φ is the conformal mapping which maps Ω on the exterior of the unit circle G; et D is the Szegö function associates the exterior of the segment

$$D(\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi} \log(\cos\theta\,|\sin\theta|)\frac{\omega + e^{i\theta}}{\omega - e^{i\theta}}d\theta\right\},\ \ (|\omega| > 1).$$

and $\chi_n(z) \to 0$, uniformly in the compact sets of $\Omega = ext(E)$.

$\underline{(\mathbf{2})\ F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{l}}$, (chapter 4); where E is the unit segment $E = [-1,\ 1]$, and the points $z_k \in ext(E)$; $\sigma = \alpha + \gamma_\ell$, α is concentrated on E and is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure dx on E, and satisfies the Szegö condition and γ_ℓ is a discrete measure concentrated on $\{z_k\}_{k=1}^{l}$, with masses $A_k > 0$.

The asymptotic formula of $\{T_{n,p}\}$, is

$$T_{n,p}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2}\right)^n B_\ell(z)\frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi(z)}\right)}{D(0)} [1 + \chi_n(z)],$$

where, $B_\ell(z)$ is the finit Blaschke product defines as

$$B_\ell(z) = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)} - 1} . \frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)} .$$

and $\chi_n(z) \to 0$, uniformly in the compact sets of $\Omega = ext(E)$.

$\underline{(\mathbf{3})\, F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{\infty}}$, (chapter 5); where E is the unit segment $E = [-1,\ 1]$, and the points $z_k \in ext(E)$; $\sigma = \alpha + \gamma$, α is concentrated on E and is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure dx on E, and satisfies the Szegö condition and γ is a discrete measure concentrated on $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, with masses $A_k > 0$,

The asymptotic formula of $\{T_{n,p}\}$, is

$$T_{n,p}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2} \right)^n B_\infty(z) \frac{D\left(\frac{1}{\Phi(z)} \right)}{D(0)} \left[1 + \chi_n(z) \right],$$

where, $B_\infty(z)$ is the infinit Blaschke product defines as

$$B_\infty(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)} - 1} . \frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)} .$$

and $\chi_n(z) \to 0$, uniformly in the compact sets of $\Omega = ext(E)$.

Resumé

L'objectif de cette thèse, est l'étude du problème du comportement asymptotique d'une classe de polynômes dits extrémaux $(0 < p < \infty)$ notés $T_{n,p}$ associés à une mesure σ de Borel positive, finie, avec $supp(\sigma) = F$, tel qu'il contient un nombre infini de points dans le plan complexe.

Le but de ce travail est d'établir la formule asymptotique de cette classe de polynômes pour des mesures σ et des supports F de la forme suivante :

(**1**) $F = E$, (chapitre 3) ; où E est le segment unité $E = [-1,\ 1]$, α est concentrée sur E et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue longueur d'arc dx sur E, vérifiant la condition de Szegö.

La formule asymptotique des polynômes $\{T_{n,p}\}$, s'écrit sous la forme :

$$T_{n,p}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2}\right)^n \frac{D\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right)}{D(0)} [1 + \chi_n(z)],$$

où, Φ est l'application conforme du domaine $\Omega = ext(E)$ vers l'extérieur du cercle unité ; et D est la fonction de Szegő défini par :

$$D(\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi} \log(\cos\theta\,|\sin\theta|)\frac{\omega + e^{i\theta}}{\omega - e^{i\theta}}d\theta\right\},\ (|\omega| > 1).$$

et enfin $\chi_n(z) \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

(**2**) $F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{l}$, (chapitre 4) ; où E est le segment unité $E = [-1,\ 1]$, et les points $z_k \in ext(E)$; $\sigma_\ell = \alpha + \gamma_\ell$; α est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le segment $E = [-1,\ 1]$ et γ_ℓ est une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses $A_k > 0$, c'est à dire $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{\ell} A_k\delta_{z_k}$ où δ_{z_k} est la mesure de Dirac au point z_k.

La formule asymptotique des polynômes extrémaux $\{T_{n,p}(z)\}$ associés à α est :

$$T_{n,p}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2}\right)^n B_\ell(z)\frac{D\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right)}{D(0)} [1 + \chi_n(z)],$$

où, B_ℓ est le produit de Blaschke fini défini par :

$$B_\ell(z) = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)} - 1}.\frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)}.$$

(**3**) $\underline{F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{\infty}}$, (chapitre 5) ; où E est le segment unité $E = [-1,\ 1]$, et les points $z_k \in ext(E)$; $\sigma = \alpha + \gamma$; α est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le segment $E = [-1,\ 1]$ et γ est une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses $A_k > 0$, c'est à dire $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \delta_{z_k}$ où δ_{z_k} est la mesure de Dirac au point z_k.

La formule asymptotique des polynômes extrémaux $\{T_{n,p}(z)\}$ associés à α est :

$$T_{n,p}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2}\right)^n B_\infty(z) \frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi(z)}\right)}{D(0)} [1 + \chi_n(z)],$$

où, B_∞ est le produit de Blaschke infini défini par :

$$B_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)} - 1} . \frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)},$$

et $\chi_n(z) \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

Introduction

Les polynômes orthogonaux sont les systèmes orthogonaux les plus simples et ils ont beaucoup d'applications en physiques et mathématiques. Leur théorie a été développée par Tchebyshev en partant du problème de l'interpolation par la méthode des moindres carrés au moyen des polynômes de degrés donnés.

Ces systèmes de polynômes dits orthogonaux ou orthonormés sont définis comme suit :

$$L_n(z) = z^n + ...;\ \int_E L_n(z)\,\overline{L_m(z)}d\alpha(z) = 0;\ n \neq m, \tag{0.1}$$

ou bien

$$p_n(z) = k_n z^n + ...,\ k_n > 0;\ \int_E p_n(z)\,\overline{p_m(z)}d\alpha(z) = \delta_{nm};\forall\ \ n,\ m = 0,\ 1,\ 2, ... \tag{0.2}$$

où α est une mesure de Borel positive, finie, dont le support F est un sous ensemble infini du plan complexe $\mathbb{C}$.

On voit qu'en explicitant la mesure α et son support F, on retrouve tous les polynômes orthogonaux classiques.

Par exemple si $d\alpha = \rho(x)dx$ et $E = [-1, +1]$, on obtient les polynômes de Tchebyshev, pour $\rho(x) = (1-x^2)^{1/2}$ où $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, ceux de Legendre pour $\rho(x) = 1$, etc..

L'un des problèmes fondamentaux des polynômes orthogonaux $L_n(z)$ connu en analyse complexe est celui de leur comportement asymptotique quand n tend vers l'infini, c'est à dire trouver un équivalent de $L_n(z)$ pour n assez grand.

Le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux classiques est connu à partir du livre de Szegö [55]. Szegö est lui même qui a développé la théorie asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité, et l'intervalle unité pour des poids qui répondent à la condition dite de Szegö.

Durant les trentes dernières années, de nombreux résultats asymptotiques ont été trouvés pour les polynômes orthogonaux qui sont à l'égard de différentes classes de poids, Pour cela On recommande les ouvrages de Nevai ([39], [40], [41]), Smirnov ([47], [48], [49]), Krein ([31]), Korovkine ([30]), Geronimus ([11], [12]), Souetine ([50]), Widom ([60]), Kaliaguine ([19], [20]), Khaldi ([22], [23], [24], [25], [26]).

L'un des outils les plus importants dans l'étude des polynômes orthogonaux est le fait qu'ils minimisent en norme l'ensemble de tout des polynômes normalisés de degré n, dans l'espace de Hilbert $L^2(\sigma)$, c'est à dire ils résolvent le problème extrémal suivant :

$$\|T_{n,2}\|^2_{L^2(\sigma)} = \min_{p_n \in P_{n,1}} \|p_n\|^2_{L^2(\sigma)} = \frac{1}{k_n^2}, \tag{0.3}$$

où k_n est le coefficient dominant du polynôme orthonormé $p_n(z)$ et $P_{n,1}$ désigne l'ensemble des polynômes orthogonaux normalisés de degré n. Par conséquent on voit que la propriété d'extrémalité est complètement équivalente à celle de l'orthogonalité.

La caractérisation des polynômes orthogonaux à partir de la propriété d'extrémalité nous permet de définir une classe plus large de polynômes notés $T_{n,p}(z)$, dit polynômes extrémaux associés à la mesure σ, ils minimisent la norme $L^p(\sigma)$ $(0 < p < \infty)$ dans l'ensemble de tous les polynômes normalisés de degré n. c'est à dire ils résolvent le problème extrémal suivant :

$$\|T_{n,p}\|^p_{L^p(\sigma)} = \min_{p_n \in P_{n,1}} \|p_n\|^p_{L^p(\sigma)}. \tag{0.4}$$

L'étude du comportement asymptotique des polynômes extrémaux est d'un grand intérêt dans la théorie de polynômes orthogonaux généraux et extrémaaux ; il s'agit d'une généralisation du problème du comportement asymptotique des polynômes orthonormés par rapport à une mesure positive dont le support est un sous ensemble infini du plan complexe $\mathbb{C}$. L'étude du comportement asymptotique des polynômes extrémaux contribue de façon significative dans la résolution de problèmes de mathématiques et elle a beaucoup d'applications ; citons particulièrement, les processus stochastiques, les opérateurs de Toeplitz, la théorie aléatoire de la diffusion, l'approximation rationnelle, la théorie spectrale,... .

Jusqu'à présent, la plupart des résultats sur la théorie du comportement asymptotique des polynômes, se sont concentrés sur les polynômes orthogonaux ($p = 2$), pour lesquels la mesure d'orthogonalité est perturbée par un ensemble infini de points masses en dehors du segment (Peherstorfer et Yudiskii, **2001**[43]) ou le cercle unité (Nazarov et al., **2006**[38]).

En ce sens, notre résultat principal est lié à prouver le comportement asymptotique des polynômes extrémaux pour $p \geq 2$, sur le segment plus un ensemble dénombrable de points masses. Ce problème est connu en analyse comme un problème intéressant et difficile.

Les résultats de cette étude sont nouveaux et font l'objet d'une publication internationale[27] , et peuvent être considérés comme une contribution à l'évolution de ce domaine.

Dans cette thèse on donne l'**Asymptotique fort** des polynômes extrémaux associés à une mesure α concentrée sur le segment $E = [-1,\ 1]$ perturbé par un ensemble infini de points de masse en dehors du segment et la mesure α absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx sur E, c'est à dire :

$$d\alpha(x) = \rho(x)dx,\ \ \rho :\ E \to \mathbb{R}_+,\ \int_E \rho(x)dx < +\infty.$$

Le thèse est divisé en cinq chapitres.

On définit dans le chapitre 1, les polynômes extrémaux associés à une mesure donnée et la notion de comportement asymptotique de ces polynômes. On donnera ensuite une synthèse des principaux cas étudiés et qui s'avèrent les plus intéressant pour notre étude depuis le célèbre article de Szegö ([52]) en **1921** jusqu'aux derniers résultats.

Dans le chapitre 2, on introduit les outils fonctionnels de base pour étudier le problème de l'asymptotique fort des polynômes extrémaux $T_n\left(z\right)$, qui sont l'espace de Hardy $H^p(\Omega)$. On donnera la définition de l'espace $H^p(U)$ et ses propriétés fondamentales. On insistera sur l'existence d'une limite non tangentielle pour toute fonction de la classe $H^p(U)$. L'espaces de Hardy associées à l'extérieur du disque unité est également étudié.

On construit dans le paragraphe 2.2 les fonctions dites de Szegö associées aux domaines U et G ; $U = \{z : |z| < 1\}$; $G = \{z : |z| > 1\}$. La construction de base se trouve dans le théorème 2.10 ; les différentes fonctions de Szegö construites nous servent à définir l'espace de Hardy $H^p(\Omega,\ \rho)$, où ρ est la densité de la partie absolument continue de la mesure α.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du comportement asymptotique des polynômes extrémaux associés à une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le sgment $E = [-1,\ 1]$. Plus précisément on établit la formule asymptotique forte des polynômes extrémaux.

La formule asymptotique des polynômes $\{T_{n,p}\}$, s'écrit sous la forme :

$$T_{n,p}\left(z\right) = \left(\frac{\Phi\left(z\right)}{2}\right)^n \frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi\left(z\right)}\right)}{D\left(0\right)} \left[1 + \chi_n\left(z\right)\right], \tag{0.5}$$

où, Φ est l'application conforme du domaine $\Omega = ext(E)$ vers l'extérieur du cercle unité ; et D_G est la fonction de Szegő défini par :

$$D(\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi} \log(\cos\theta\,|\sin\theta|)\frac{\omega + e^{i\theta}}{\omega - e^{i\theta}}d\theta\right\},\ \ (|\omega| > 1). \tag{0.6}$$

et enfin $\chi_n\left(z\right) \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

On détaille dans le chapitre 4, le comportement asymptotique des polynômes extrémaux associés a une mesure α définie comme suit : $\alpha = \beta + \gamma_\ell$; β est un mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le sgment $E = [-1,\ 1]$ et γ est une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses $A_k > 0$, c'est à dire $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{\ell} A_k\delta_{z_k}$ où δ_{z_k} est la mesure de Dirac au point z_k.

La formule asymptotique des polynômes extrémaux $\{T_{n,p}\left(z\right)\}$ associés à α est :

$$T_{n,p}\left(z\right) = \left(\frac{\Phi\left(z\right)}{2}\right)^n B_\ell(z)\frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi\left(z\right)}\right)}{D\left(0\right)} \left[1 + \chi_n\left(z\right)\right], \tag{0.8}$$

où, B_ℓ est le produit de Blaschke fini défini par :

$$B_\ell(z) = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)} - 1} \cdot \frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)}. \tag{0.9}$$

Dans le chapitre 5, on donne la formule asymptotique forte des polynômes extrémaux associés à une mesure du type $\sigma = \alpha + \gamma$, où α est concentrée sur le sgment $E = [-1,\ 1]$, et γ est concentrée sur un nombre infini de points $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Ext(E)$. Le résultat obtenu dans ce chapitre constitue le résultat original de cette thèse et a fait l'objet de la publication ([27]).

Chapitre 1

Notations et définitions

1.1 Système de polynômes extrémaux

Soit $0 < p < \infty$. α une mesure de Borel positive, finie, dont le support noté par $F = supp\,(\alpha)$, est un sous ensemble infini du plan complexe $\mathbb{C}$. On désigne par $L^p\,(\mathbb{C}, \alpha)$ l'espace vectoriel :

$$L^p\,(\mathbb{C}, \alpha) = \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \int\limits_{\mathbb{C}} |f\,(z)|^p\, d\alpha\,(z) < +\infty \right\}, \tag{1.1}$$

$\int\limits_{\mathbb{C}} |f\,(z)|^p\, d\alpha\,(z)$, étant l'intégrale de Lebesgue relativement à la mesure α.

Définition 1. 1

Soit α une mesure de Borel positive, finie, dont le support F contient un nombre infini de points dans le plan complexe. On appelle système de polynômes extrémaux noté$\{L_{n,p}\,(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *associés à la mesure α, le système de polynômes $\{L_{n,p}\,(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :*

1) $L_{n,p}\,(z)$ est un polynôme normalisé de degré n, c'est à dire : $L_{n,p}\,(z) = z^n + ...$

2) Le système $\{L_{n,p}\,(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est extremal dans l'espace $L^p\,(\mathbb{C}, \alpha)$; c'est à dire :

$$\|L_{n,p}\,(z)\|_{L^p(\mathbb{C},\alpha)} = \inf_{Q_n\in P_{n,1}} \|Q_n\|_{L^p(\mathbb{C},\alpha)} \tag{1.2}$$

où $P_{n,1}$ l'ensemble des polynômes normalisés de degré n, et

$$\|f\|_{L_P(\Gamma)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f \ \ (t)|^p \, d \, t \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall \ f \in L^p \left(\mathbb{C}, \alpha\right).$$

1.2 problème du comportement asymptotique des polynômes extrémaux

Définition1. 2

On appelle problème du comportement asymptotique des polynômes extrémaux relativement à la mesure α l'étude du problème suivant :

$$\textit{Etudier : } \lim_{n \to \infty} L_n(z) \, ; \ z \in E \ \textit{ou} \ z \in K; \ K \ \textit{compact de} \ \mathbb{C} \backslash E; \ \textit{avec} \ F = \textit{supp}(\alpha) \, . \tag{1.3}$$

La solution de ce problème dépend en général de α et de son support F.

Il existe trois types de problèmes du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux ou extrémaux :

Asymptotique faible des polynômes orthogonaux ou extrémaux qui consiste à l'étude de l'asymptotique de $|L_n(z)|^{1/n}$. Ce problème est étroitement lié à la distribution des zéros des polynômes orthogonaux ou extrémaux et il dépend de la propriété de régularité de la mesure. L'outil principal dans l'étude de ce cas est la capacité logarithmique. Parmi les applications on peut citer la distribution des zéros et leur comportement asymptotique.

Ratio asymptotique c'est l'asymptotique de $\dfrac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}$. Un grand nombre de travaux a été fait sur ce sujet. Dans le cas des polynômes orthogonaux sur le cercle, Szegö [55] a obtenu des résultats de convergence pour des fonctions poids vérifiant la condition de Szegö, ensuite moyennant la transformation de Joukowski $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ qui transforme le cercle unité au segment $[-1, +1]$, il a déduit la formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment. Le cas général sur le ratio asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité, a été traité par Rakhmanov [44]. La meilleure condition pour établir le ratio asymptotique pour les polynômes orthogonaux est la condition dite de Rakhmanov : $\alpha' > 0$ presque partout sur le support essentiel de la mesure α.

Asymptotique fort pour les polynômes orthogonaux ou extrémaux, qui est le problème du comportement asymptotique uniforme des polynômes $L_n(z)$ à l'extérieur et sur le support de la mesure. Dans le cas classique d'un intervalle ou le cercle unité, la formule forte du comportement asymptotique a été établie par Szegö [55]. La théorie de Szegö a été prolongée et développée par Widom [60], dans le cas où le support de la mesure est un système fini d'arcs et de contours, ensuite par Gontchar [13] et Nikishine [42], dans le cas où le support de la mesure est le segment $[-1, +1]$ plus un nombre fini de points, et d'autres.

1.3 Synthèse des cas étudiés

Nous allons résumer dans cette partie selon la mesure α et son support F, le comportement asymptotique d'une classe assez large de polynômes orthogonaux et extrémaux relativement à la mesure α et qui s'avèrent la plus intéressante pour notre étude.

$\underline{(\mathbf{1})\, F = [-\pi, \pi]\,,\, p = 2}$; α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur$[-\pi, \pi]$, c'est à dire :

$$d\alpha = \rho(\theta)\, d\theta;\ \ \rho \in L^1([-\pi, \pi], d\theta);\ \ \rho \geq 0.$$

Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle avec fonction poids. Ce problème a été étudié profondément par Szegö en **1921** [55]. La formule asymptotique des polynômes orthogonaux $\{L_n(z)\}$ associés à α est :

$$L_n(z) \approx \frac{z^n}{\overline{D}_\rho(\frac{1}{z})};\ \ |z| > 1, \tag{1.4}$$

où D_ρ est une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, construite par Szegö et elle porte son nom et définit par

$$D_\rho(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log(\rho(\theta)) \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta \right\}, (|z| < 1), \tag{1.5}$$

On note qu'on peut introduire dans cette partie tous les polynômes orthogonaux classiques (Legendre, Tchebychev, Jacobi, Hermite, Laguerre).

a) Les polynômes de Legendre correspondent à $F = [-1, \ +1]$ et $\rho(x) = 1$.

b) Ceux de Tchebychev correspondent à $F = [-1, \ +1]$ et $\rho(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ où $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$;

c) Les polynômes de Jacobi correspondent à $F = [-1, \ +1]$ et $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

d) Si $F = [0, \ +\infty[$ et $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$; on obtient les polynômes de Laguerre.

e) En fin pour $F =]-\infty, \ +\infty[$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient les polynômes d'Hermite.

Les comportements asymptotiques des polynômes orthogonaux classiques ont été étudiés bien avant Szegö. Citons : Mehler[36], Heine[15], Darboux[7], Hilb[16], ...

Mais les techniques utilisées diffèrent de celles de Szegö et dépendent de la particularité de chaque classe de polynômes (voir [55] pour plus de détails).

(**2**) $\underline{F = [-1, +1], \quad p = 2}$; α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-1, +1]$ c'est à dire :

$$d\alpha = \rho(x)\, dx; \ \rho \geq 0; \ \rho \in L^1([-1, +1], dx).$$

Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment avec fonction poids. Ce problème a été étudié par Szegö en **1921** [55] . Szegö a obtenu la formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment avec fonction poids, vérifiant la condition :

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\log\rho(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx > -\infty, \tag{1.6}$$

dites de Szegö. Szegö dans ([55]) a établi une relation entre les polynômes orthogonaux sur le cercle et ceux du segment. Cette relation est donnée par la formule suivante :

$$T_{n,p}(x) = \frac{1}{2^n\left(1 + L_{2n}(0)\right)}\left(\frac{L_{2n}(z)}{z^n} + z^n L_{2n}(\frac{1}{z})\right), \tag{1.7}$$

où, $\{L_n(z)\}$ est le système des polynômes orthogonaux associés à α sur le cercle et, $\{T_n(x)\}$ est le système des polynômes orthogonaux associés à la mesure absolument continue α sur le segment.

Utilisant cette relation ; Szegö a déduit la formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment de celle du cercle moyennant la transformation de Joukowski $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ qui transforme le cercle unité au segment $[-1, +1]$.

(**3**) $F = E,\ 0 < p < \infty;$ E est un contour de Jordan rectifiable ; ■ est absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc, c'est à dire :

$$d\alpha(\xi) = \rho(\xi)\left|d\xi\right|,\ \ \rho : E \to \mathbb{R}_+, \quad \rho \in L^1\left(E, \left|d\xi\right|\right).$$

Ce problème a été étudié par Gueronimus en **1952** [11] . Gueronimus a développé le travail de Szegö en considérant des classes de fonctions poids et de contours de plus en plus larges. Il a obtenu l'asymtotique forte de $T_{n,p}\left(z\right)$ et l'asymtotique forte de $m_{n,p}\left(\rho\right)$ à l'extérieur de contour. Geronimus a montré la formule asymptotique suivante :

$$T_{n,p}(z) = [C(E)\Phi\left(z\right)]^n \varphi\left(z\right)[1 + \varepsilon_n(z)], \tag{1.8}$$

où, $C(E)$ est une constante qui dépend de E, Φ est l'application conforme du domaine $\Omega = ext(E)$ vers l'extérieur du cercle unité ; φ est une fonction holomorphe dans Ω, solution d'un problème extrémal, et enfin $\varepsilon_n(z) \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

Mais malheureusement une relation entre les polynômes extrémaux sur le cercle unité et le segment $[-1, +1]$, comme celle donée par Szegö en (1.6) dans le cas des polynômes orthogonaux ou extrémaux reste un probleme ouvert et toujours présent.

(**4**)$\underline{F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell}\ ,\ 0 < p < \infty}$; $E = [-1,\ +1] \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell}$; $\alpha = \beta + \gamma$; $z_k \in$ extérieur $([-1,\ +1])$; β est absolument continue et concentrée sur $[-1,\ +1]$ et γ une mesure discrète concentrée sur les points $z_k \in ext(E)$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k};\ A_k > 0.$$

Ce problème a été étudié par Gontchar en **1975** [13] et il a été appliqué au problème de la convergence des approximants de Padé de fonctions méromorphe ; Plus tard, Nikichine a étudié ce problème explicitement pour l'opérateur de Sturm-Liouville discret [42] et par Kaliaguine [19] dans un cas assez générale.

(**5**)$\underline{F = E;\ 1 < p < \infty}$; $E = [-1,\ +1]$

Ce problème a été étudié par Lubinsky et Saff en **1987**. Lubinsky et Saff ont accomodé le résultat de Szegö [35], dans le sens où ils ont affaibli la condition sur la fonction poids ρ en supposant que ρ ne vérifie que la condition :

$$1/\rho \in L_P\left[-1,\ +1\right],\ \forall p > 1.$$

La formule asymptotique des polynômes extrémaux $\{T_{n,p}(z)\}$ associés à α est :

$$T_{n,p}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2}\right)^n \frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi(z)}\right)}{D(0)} \left[1 + \chi_n(z)\right], \tag{1.9}$$

où, Φ est l'application conforme du domaine $\Omega = ext(E)$ vers l'extérieur du cercle unité ; et D_G est la fonction de Szegő défini par :

$$D_G(\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi} \log(\cos\theta\,|\sin\theta|)\frac{\omega + e^{i\theta}}{\omega - e^{i\theta}}d\theta\right\},\ (|\omega| > 1). \tag{1.10}$$

et enfin $\chi_n(z) \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

(**6**) $\underline{F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{+\infty};\ \alpha = \beta + \gamma,\ p = 2}$, $E = [-1, +1]$, β est non absolument continue et concentrée sur $[-1,+1]$, et γ étant une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses A_k.

Ce problème a été étudié profondément pour la première fois dans sa forme la plus générale en **2001** par F. Peherstorfer et P. Yuditskii [43].

(**7**) $\underline{F = \Gamma \cup \{z_k\}_{k=1}^{+\infty};\ \alpha = \beta + \gamma,\ p = 2}$,

β est non absolument continue et concentrée sur le cercle Γ, et γ étant une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses A_k.c'est-à-dire

$$\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \delta_{z_k};\ A_k > 0,$$

Ce problème a été étudié en **2006** par A. Vol berg, F. Peherstorfer,et P. Yuditskii [38].

(**8**)$\underline{F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell};\ \ E = [-1,1];\ z_k \in ext(E);\ \alpha = \beta + \gamma}$; β est concentrée sur E et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx sur E, c'est à dire :

$$d\alpha(x) = \rho(x)dx,\ \rho : E \to \mathbb{R}_+,\ \int_E \rho(x)dx < +\infty,$$

γ une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses A_k, c'est-à-dire

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k};\ A_k > 0,$$

δ_{z_k} étant la mesure de Dirac au point z_k. Ce cas a été étudié en **2007** pour $p \geq 2$ par Khaldi [26].

La formule asymptotique des polynômes extrémaux $\{T_{n,p}(z)\}$ associés à α est :

$$T_{n,p}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2}\right)^n B_\ell(z) \frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi(z)}\right)}{D(0)} [1 + \chi_n(z)], \tag{1.11}$$

où, $\Phi(z)$ est l'application conforme du domaine $\Omega = ext(E)$ vers l'extérieur du cercle unité ; et D est la fonction de Szegő défini par :

$$D(\omega)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi p}\int_{0}^{2\pi}\log(\cos\theta\left|\sin\theta\right|)\frac{\omega+e^{i\theta}}{\omega-e^{i\theta}}d\theta\right\},\ (|\omega|>1),$$

et B_ℓ est le produit de Blaschke fini défini par :

$$B_\ell(z)=\prod_{k=1}^{\ell}\frac{\Phi(z)-\Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)}-1}.\frac{\left|\Phi(z_k)\right|^2}{\Phi(z_k)}.$$

Et enfin $\chi_n\left(z\right)\to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

(**9**)$\underline{F=E\cup\{z_k\}_{k=1}^{+\infty};\ \ E=[-1,1]\,;\,\sigma=\beta+\gamma;1<p<\infty},$

β est concentrée sur E et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx , c'est à dire :

$$d\alpha(x)=\rho(x)dx,\ \rho:E\to\mathbb{R}_+,\ \int_E\rho(x)dx<+\infty,$$

γ une mesure discrète concentrée sur les points $z_k\in ext(E)$ avec les masses A_k, c'est-à-dire

$$\gamma=\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\delta_{z_k};\ A_k>0,$$

δ_{z_k} étant la mesure de Dirac au point z_k.

Ce cas a été étudié en **2011** pour $p>1$ par Khaldi et Boucenna [27] et la seule exigence de la partie absolument continue de la mesure est la condition de Szegő

$$\int_{-1}^{1}\frac{\log p\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx>-\infty.$$

La formule asymptotique des polynômes extrémaux $\{T_{n,p}\left(z\right)\}$ associés à la mesure σ est :

$$T_{n,p}\left(z\right)=\left(\frac{\Phi\left(z\right)}{2}\right)^n B_\infty(z)\frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi\left(z\right)}\right)}{D\left(0\right)}\left[1+\chi_n\left(z\right)\right]. \tag{1.12}$$

où, B_∞ est le produit de Blaschke infini défini par :

$$B_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)} - 1} . \frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)},$$

et $\chi_n(z) \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

Chapitre 2

Espaces de Hardy et Fonction de Szegö associée au cercle unité

Les espaces H^p ainsi dénommés ont référence à G. H. Hardy [14], ont beaucoup de propriétés intéressantes, en ce qui concerne les problèmes de factorisation, les valeurs frontières et les représentations du type de Cauchy à partir de mesures sur la frontière. Les espaces de Hardy ont été introduits en analyse en 1915 dans le disque unité ouvert, constituent l'outil fonctionnel de base pour étudier les comportements asymptotiques des polynômes . Utilisant les propriétés de la transformation conforme entre le disque unité ouvert et l'intérieur d'un contour de Jordan rectifiable, V. J. Smirnov [47] , [48] , [495] a étudié ces espaces à l'intérieur d'un contour de Jordan rectifiable. En 1951, W. Rudin [46] .a généralisé l'étude de ces espaces dans un ouvert connexe quelconque en se basant sur une caractérisation des espaces de Hardy dans le disque unité ouvert. Cette caractérisation se résume dans le fait qu'une fonction appartient à l'espace de Hardy dans le disque unité ouvert si et seulement si elle admet un majorant harmonique dans ce disque.

On recommande les ouvrages de K. Hoffman [17], de P. Kossis [29] , de S. Zygmund [61] , pour une étude approfondie des espaces de Hardy dans le disque unité ouvert.

2.1 Espaces de Hardy associée au cercle unité

2.1.1 Espace $H^1(U)$

Noyau et integral de piosson

Définition 2. 1

Pour $0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$,on pose

$$P_r(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \tag{2.1}$$

Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, P_r est appelé un noyau de Poisson et $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ est appelée la famille des noyaux de Poisson.

Remarque 2. 1

1. Si $z = re^{i\theta}\,(0 \leq r < 1, \theta \text{ } réel)$, alors

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re}\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right] = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} \tag{2.2}$$

2. le noyau de Poisson est une fonction uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, 2■−périodique, positive et paire.

Théorème 2. 1 [14]

Le noyau de Poisson possède les propriétés suivantes :

(i) $P_r(t) > 0$.

(ii) $P_r(t) = P_r(-t)$.

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, dt = 2\pi\,(0 \leq r \prec 1)$.

$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ étant le cercle unité.

Définition 2. 2

Pour $0 < p < \infty$, $L_P(\Gamma)$ sera la classe de toutes les fonctions f à valeurs complexes, mesurables au sens de Lebesgue, de période 2π, définies sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles

$$\|f\|_{L_P(\Gamma)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f\ (t)|^p\, d\ t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.3}$$

Définition 2. 3

Soit $f\ \in L_1\ (\Gamma)$. On pose

$$F\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r\,(\theta - t)\, f\ (t)\, dt; (0 \leq r < 1, \theta \text{ réel}) \tag{2.4}$$

.

La fonction F ainsi définie dans D est appelée l'intégrale de poisson de f .

Théorème 2. 2 ([**29**], [**46**])

Si $f\ \in L_1\ (\Gamma)$ et si F l'intégrale de poisson de f alors F admet partout sur le cercle unité Γ une limite radiale notée $f^{\ *}\ \left(e^{i\theta}\right)$ et on a

$$\lim_{r\to 1} F\left(re^{i\theta}\right) = f^*\ \left(e^{i\theta}\right). \tag{2.5}$$

Espace $H^1\,(U)$

Définition 2. 4

Soit $f\ \in H\ (D\ )$. On dit que f est une fonction de $H^{\ 1}\,(D\ )$ si et seulement si

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\ \left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta < \infty; (r < 1) \tag{2.6}$$

Théorème 2. 3 ([**29**], [**46**])

Soit $f\ \in H^{\ 1}\,(D\ )$, alors :

1) f possède presque partout sur le cercle Γ une limite radiale $f\ \left(e^{i\theta}\right)$

$$\lim_{r\to 1} f\left(re^{i\theta}\right) = f\ \left(e^{i\theta}\right)$$

2) $f\ \left(e^{i\theta}\right)$ admet la représentation de poisson suivante

$$f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r\left(\theta-t\right)f\ \left(e^{i\theta}\right)dt;\left(0\leq r<1\right)$$

Produit de Blaschke

Théorème 2. 4 [([**29**], [**46**])]

Soit $\{z_k\}$ une suite dans D telle que $z_k\neq 0$ pour laquelle

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-|z_k|\right)<\infty$$

Si k est un entier non négatif, et si l'on pose

$$B\left(z\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-z_k}{1-z\ \overline{z}_k}\frac{|z_k|}{z\ \ _k}\qquad\qquad\left(z\in D\right),\tag{2.7}$$

La fonction B est une fonction holomorphe bornée dans D et ne posséde pas d'autres zéros que les points z_k .

Remarque 2. 2

La fonction B est appelée un produit de Blaschke.

Théorème 2. 5 ([**29**], [**46**])

Pour tout θ, si $B\left(z\right)$ est le produit de Blaschke défini ci-dessus alors $B\left(z\right)$ admet en presque partout sur le cercle Γ une limite radiale $B^{*}\left(e^{i\theta}\right)$ donnée par

$$B^{*}\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{r\to 1}B\left(e^{i\theta}\right),$$

de plus, $\left|B\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1.$

2.1.2 Espace de Hardy dans le disque unité ouvert

Soit $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, le disque unité ouvert. Notons par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans U.

Théorème 2. 6 ([**46**])

Soit $f \in H(U)$, définissons pour $r : 0 \leq r < 1$;

$$M_p(f, r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \ (0 < p < \infty). \tag{2.8}$$

Les fonctions M_p sont croissantes par rapport à la variable r dans $[0,\ 1[$.

Ce théorème nous permet de donner la définition suivante :

Définition 2. 5

Soit $f \in H(U)$ et $0 < p < \infty$. Posons :

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1^-} M_p(f, r) \tag{2.9}$$

où $M_p(f, r)$ est définie dans le théorème 2.6.

On définie la classe $H^p(U)$ comme étant l'ensemble des fonctions $f \in H(U)$ pour lesquelles $\|f\|_p < \infty$.

Remarque 2. 3

Comme les fonctions M_p sont croissantes par rapport à la variable r dans $[0,\ 1[$, et si $f \in H(U)$, alors $\|f\|_p$ existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$ et

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \{M_p(f,\ r)\}. \tag{2.10}$$

Théorème 2. 7 ([**46**])

Pour $1 \leq p < \infty$; *l'espace* $\left(H^p(U), \|.\|_p\right)$ *est un espace de Banach. Et* Pour $0 < p < 1$ l'espace $(H^p(U), \ d_p)$ est un espace de Frechet muni de la distance

$$d\ (f,\ g\ ) = \|f - g\|_p^p.$$

Remarque 2. 4

Si F est une fonction définie sur Γ et à valeurs complexe et si on définit la fonction f par :

$$f(\theta) = F\left(e^{i\theta}\right) \tag{2.11}$$

alors f est définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π.

Réciproquement, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, alors il existe une fonction F définie sur Γ vérifiant (2.11).

On peut ainsi identifier les fonctions définies sur Γ avec les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodiques, de période 2π.

Les propriétés fondamentales de l'espace $H^p(U)$ sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2. 8 Si $p > 0$ et si $f \in H^{\ P}(D\ )$ alors f possède une limite radiale notée $f^{\ *}$ telle que$f^* \in L_P(\Gamma\ )$ qui est donnée par

$$\lim_{r \to 1} f\left(re^{i\theta}\right) = f^*\left(re^{i\theta}\right),$$

presque partout sur le cercle Γet

$$\|f\|_p = \|f^*\|_{Lp(\Gamma)}\ .$$

Preuve

Soit $f \in H^{P}(U)$,On sait d'aprés le théorème de factorisation [], que

$$f(z) = B(z).g(z),$$

où $B(z)$ est le produit de Blashke formé sur les zéros de f et g une fonction de $H^{P}(D)$ n'ayant pas de zéros dans D telle que

$$\|f\|_p = \|g\|_p,$$

et

$$g(z) = [h(z)]^{1/p}$$

alors $h \in H^{1}(D)$ et

$$\|h\|_1 = \lim_{r\to 1}\sup \int_{-\pi}^{\pi} \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left|h\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$$

où $h\left(e^{i\theta}\right)$ est la limite radiale de $h(z)$

On suppose pour la suite que $f \neq 0$ .De plus, on sait que pour tout $\theta, h\left(e^{i\theta}\right) \neq 0$ et ainsi pour tout θ

$$\lim g(z) = \lim [h(z)]^{1/p},\ z \to e^{i\theta}.$$

On appellera cette limite $g\left(e^{i\theta}\right)$.

Alors puisque

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} B(z) = B\left(e^{i\theta}\right),$$

pour tout θ, alors

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} f(z) = B\left(e^{i\theta}\right) g\left(e^{i\theta}\right),$$

on appellera cette limite $f\left(e^{i\theta}\right)$.

Finalement,

si $0 < p < 1$,

$$\|f\|_p = \|g\|_p = \left\|[h]^{1/p}\right\|_1 = \|h\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|h\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta,\ car B\left(e^{i\theta}\right) = 1.$$

si $p \geq 1$, on obtient le même résultat, mais Les intégrales sont élevées à la puissance p.

Théorème 2. 8 []

Soit $f \in H\ \ (D\ )$ alors

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right) - f^*\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = 0$$

où $f\left(e^{i\theta}\right)$ est la limite radiale de $f(z)$

Du théorème découle le corollaire suivant

Corollaire 2. 1

Soit $f \in H\ \ (D\ )$ alors f est respectivement l'intégrale de Poisson et de Cauchy de sa limite radiale $f^*\left(re^{i\theta}\right)$, on a alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, f^*\left(re^{i\theta}\right) dt,$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} dt.$$

2.1.3 Espace de Hardy à l'extérieur du cercle unité

Notons par :

$C_r = \{\omega \in \mathbb{C} : \ |\omega| = r\}$

$G = \{\omega \in \mathbb{C} : \ |\omega| > 1\} \cup \{\infty\}$

$H(G)$: l'ensemble des fonctions holomorphes dans G (∞ y compris)

Définition 2.6

Soit $f \in H(G)$, on dit que $f \in H^p(G)$ s'il existe une constante C positive, indépendante de r, telle que :

$$\int_{C_r} |f(\omega)|^p |d\omega| \leq C; \forall r : \ 1 < r \leq 2.$$

Si $f \in H^p(G)$, on note par :

$$\|f\|^p_{H^p(G)} = \sup_{1<r\leq 2} \int_{C_r} |f(\omega)|^p |d\omega|. \tag{2.12}$$

Remarque 2. 5

La définition de l'espace de Hardy dans le disque unité ouvert est équivalente à celle donnée dans la définition (2.12)

En effet d'après la remarque 1. 2, on a :

$$f \in H^p(U) \Longleftrightarrow \sup_{0\leq r<1} \int_{C_r} |f(z)|^p |dz| < +\infty.$$

Poroposition 2. 1

Soit $f \in H(U)$, définissons g par :

$$\begin{aligned} g(\omega) &= f\left(\frac{1}{\omega}\right), \ \textit{pour } \omega \in G \backslash \{\infty\}, \\ g(\infty) &= f(0); \end{aligned}$$

alors $f \in H^p(U)$ si et seulement si $g \in H^p(G)$.

Notons par :

$$L^p\left(C_r,|dz|\right)=\left\{f:C_r\rightarrow\mathbb{C}:\int\limits_{C_r}|f(z)|^p\,|dz|<\infty\right\};\ r>0,$$

où $|dz|$ est la mesure longueur d'arc.

Ceci étant, les propriétés de l'espace $H^p(G)$ sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2. 9

Soit $f\in H^p(G)$ *alors :*

a) $\lim\limits_{r\rightarrow 1^+} f\left(re^{i\theta}\right)$ *existe en presque tous les points du cercle unité, Cette limite est appelée limite non tangentielle et elle se note* f_1.

b) $f_1\in L^p\left(C_1,|dw|\right)$ *et*

$$\int\limits_{C_1}|f_1(\omega)|^p\,|d\omega|=\|f\|^p_{H^p(G)}=\lim_{r\rightarrow 1^+}\int\limits_{C_r}|f(\omega)|^p\,|d\omega|\,.$$

c) L'espace $H^p(G)$ *est un espace de Banach pour la norme* (2.12).

Pour $0<p<1$ est un espace de Frechet muni de la distance $d\ (f,g\ )=\|f-g\|^p_p$.

d) $f_1$admet une représentation de typeCauchy etPoisson c. a. d :

$$\forall\omega\in G\backslash\left\{\infty\right\},\ \ f(\omega)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{C_1}\frac{f_1(\xi)}{\xi-\omega}\frac{d\xi}{\omega},$$

et

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1}P_r(\theta-t)\,f_1\left(e^{it}\right)dt$$

Preuve

a) Soit $f\in H^p(G)$, alors : $\exists\ C>0$ tel que :

$$\int\limits_{C_r}|f(\omega)|^p\,|d\omega|\leq C;\ \forall r:\ \ 1<r\leq 2.$$

En éffectuant le changement de variables $\omega = \dfrac{1}{\omega'}$, alors : $d\omega = -\dfrac{1}{\omega'^2}d\omega'$, ceci nous donne :

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_r} |f(\omega)|^p |dw| &= \int\limits_{C_{r'}} \left| f\left(\frac{1}{\omega'}\right)\right|^p \frac{1}{|\omega'|^2} |d\omega'| \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^p \frac{1}{r'^2} r' d\theta \\ &= \frac{1}{r'}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^p d\theta;\ \frac{1}{2} \leq r' < 1\end{aligned}$$

donc :

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta \leq r'.C \leq C.$$

Posons :

$$f_1(r'e^{i\theta}) = f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right);$$

alors $f_1 \in H^p(U)$, ce qui implique que $\lim\limits_{r'\to 1^-} f_1\left(r'e^{i\theta}\right)$ existe presque partout pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$;

or

$$\lim_{r'\to 1^-} f_1\left(r'e^{i\theta}\right) = \lim_{r'\to 1^-} f_1\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right) = \lim_{r\to 1^+} f\left(re^{i\theta}\right);$$

ce qui donne le point a). Les points b) et c) sont une conséquence immédiate de a) et du théorème 1. 5.

2.2 Fonction de Szegö associée au disque unité

2.2.1 Fonction de Szegö dans le disque unité ouvert

Les fonctions de Szegö rentrent dans le cadre général de la représentation des fonctions positives. Pour la construction de ces fonctions dans le disque unité ouvert, on recommande $([52], [53], [54], [55])$.

Soient $F \in H^p(U)$ et F^* sa limite non tangentielle. Si l'on pose $f(\theta) = \left|F^*(e^{i\theta})\right|$, alors $f \in L^p(\Gamma)$, et on montre que $\log(f) \in L^1(\Gamma)$.

Réciproquement étant donnée une fonction $f \in L^p(\Gamma)$, f presque partout positive et $\log(f) \in L^1(\Gamma)$, on montre$([47], [48])$ qu'il existe une infinité de fonctions F de la classe $H^p(U)$ telles que $f(\theta) = \left|F^*(e^{i\theta})\right|$ presque partout pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$. On s'intérèsse à une fonction particulière F de la classe décrite auparavant, dite fonction de Szegö, qui est l'objet du théorème suivant :

Théorème 2. 10

Soit $0 < p < \infty$, et f *une fonction non négative intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *et vérifiant la condition de Szegö*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\theta) d\theta > -\infty. \tag{2.13}$$

Alors la fonction définie par :

$$D_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi p}\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\theta))\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}d\theta\right\}, (|z| < 1), \tag{2.14}$$

dite fonction de Szegö associée à U *et à la fonction poids* f, *possède les propriétés suivantes :*

1) $D_f \in H^p(U)$.

2) $D_f(z) \neq 0, \forall z \in U$.

3) $\left|D_f^*(e^{ix})\right|^p = f(x)$ *presque partout sur* $[-\pi, \pi]$.

où D_f^* est la limite non tangentielle de D_f.

4)$D_f(0) > 0$.

Preuve

Construction de D_f

Considérons l'intégrale de Poisson associée à la fonction $\log(f)$ qu'on note par :

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta.$$

La fonction u est harmonique dans le disque unité puisque $\log(f) \in L^1([-\pi,\ \pi],\ d\theta)$ ([46]).

à savoir que $u(r,\ x)$ est harmonique dans le disque unité ouvert U et qu'elle représente la partie réelle d'une certaine fonction holomorphe que l'on notera $h(z)$ et éxigeons que $h(0)$ soit réelle pour avoir l'unicité de h. La fonction cherchée sera donc

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{p}h(z)\right\},$$

on montre facilement que :

$$\operatorname{Re} D_f(z) = \operatorname{Re} g(z);\ (z = re^{ix},\ 0 \le r < 1),$$

alors

$$D_f(z) = g(z).$$

1) Montrons que :

$$\exists c > 0 \textit{ tel que}:\ \forall r:\ 0 \le r < 1;\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_f(re^{ix})\right|^p dx \le c,$$

en effet

$$\begin{aligned}
|D_f(z)| &= \left|\exp\left\{\frac{1}{p}\left(\operatorname{Re} h\left(z\right)+\operatorname{Im} h(z)\right)\right\}\right| \\
&= \exp\left\{\frac{1}{p}\operatorname{Re} h\left(z\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{p}u\left(r,\ x\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Par suit, pour $z = re^{ix},\ 0 \leq r < 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|D_f(re^{ix})\right|^p &= \exp\left\{u\left(r,\ x\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(f\left(\theta\right)\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\ (\textit{inégalité de Jensen}\ [29]).
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_f(re^{ix})\right|^p dx &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right)d\theta = C. \quad \forall r:\ 0 \leq r < 1.
\end{aligned}$$

ce qui donne le point 1).

2) est évident.

3) $D_f \in H^p\left(U\right)$, notons par D_f^* la limite non tangentielle de D_f; et comme :

$$\left|D_f\left(re^{ix}\right)\right|^p=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\}$$

il vient

$$\begin{aligned}\left|D_f^*\left(e^{ix}\right)\right|^p &= \lim_{r\to1^-}\left|D_f\left(re^{ix}\right)\right|^p\\ &= \exp\left\{\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\log\left(f\left(\theta\right)\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\}\\ &= \exp\left\{\log f\left(x\right)\right\},\ p.\ p\ sur\ \left[-\pi,\ \pi\right].\end{aligned}$$

4) $D_f(0)=\exp\left\{\frac{1}{2}h\left(0\right)\right\}>0$. ($h(0)$ est réel par construction).

2.2.2 Fonction de Szegö associée à l'extérieur du cercle unité

Théorème 2. 11

Soit $0<p<\infty$, et f *une fonction non négative intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle* $[-\pi,\ \pi]$ *et vérifiant la condition de Szegö*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log f(t)dt>-\infty. \tag{2.15}$$

Alors il existe une fonction unique notée D_f^e *et appelée fonction de Szegö associée à l'extérieur de* Γ *et à la fonction poids* f, *possédant les propriétés suivantes :*

1) $D_f^e\in H^p\left(G\right)$.

2) $D_f^e\left(w\right)\neq0,\forall w\in G$.

3) $\left|\left(D_f^e\right)^*\left(e^{ix}\right)\right|^p=f\left(x\right)$ *presque partout sur* $\left[-\pi,\ \pi\right]$.

où $\left(D_f^e\right)^*$ *est la limite non tangentielle de* D_f^e.

4) $D_f^e\left(\infty\right)>0$.

Preuve

Considérons la fonction de Szegö D_f introduite dans le théorème 2.10 et construisons la fonction D_f^e de la façon suivante :

$D_f^e(w) = D_f\left(\frac{1}{w}\right)$ pour $w \in G\setminus\{\infty\}$.

$D_f^e(\infty) = D_f(0)$.

Alors les propriétés de D_f et la proposition 2.1 nous donnent les propriétés de D_f^e.

Notons que la forme explicite de D_f^e est exactement la fonction :

$$D_f^e(w) = \exp\left\{\frac{1}{2p\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\theta))\frac{w+e^{-i\theta}}{w-e^{-i\theta}}d\theta\right\} \quad (|w|>1).$$

2.3 Compacité et convergence dans $H(\Omega)$

La convergence sur les sous-ensembles compacts est la convergence qui intervient le plus naturellement dans les opérations de limite des fonctions holomorphes.

Pour définir cette notion, on commence par énoncer une propriété des sous ensembles ouverts du plan complexe, qui permet de construire une métrique sur $H(\Omega)$.

Théorème 2. 12 ([46])

Tout ouvert Ω du plan est la réunion d'une suite $\{K_n\}$, $n = 1, 2, ...$, de compacts tels que :

(a) K_n soit inclu dans l'intérieur de K_{n+1} pour $n = 1, 2, ...$

(b) Tout sous-ensemble compact de Ω soit inclu dans l'un des K_n.

(c) Toute composante de $S^2 - K_n$ contient une composante de $S^2 - \Omega$, pour $n = 1$, 2, ...

S^2 étant la sphère de Riemann.

Ceci étant, soient f et g deux fonctions quelconques de $H(\Omega)$, définissons :

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}, \text{ où } d_n(f,g) = \sup_{z\in K_n}\{|f(z)-g(z)|\}, \qquad (2.16)$$

on montre dans [46] que$(H(\Omega), d)$ est un espace métrique complet et qu'une suite de fonctions de $H(\Omega)$ converge au sens de la métrique d si et seulement si elle converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de Ω. Cette dernière caractérisation de la convergence au sens de la métrique d, nous permet de donner et justifier la définition suivante :

Définition 2. 7

Soient $\{f_n\}$ une suite de $H(\Omega)$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $\{f_n\}$ converge vers f au sens de $H(\Omega)$, si $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur chaque sous-ensemble compact de Ω.

Théorème 2. 13 ([46])

Soit $\{f_n\}$ une suite de $H(\Omega)$. Si $f_n \to f$ au sens de $H(\Omega)$. Alors $f \in H(\Omega)$, et $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ au sens de $H(\Omega)$ pour chaque $k \geq 1$.

2.3.1 Familles normales

Définition 2. 8 ([42])

Supposons $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$, un ouvert connexe non vide Ω du plan complexe. Nous appelons $\mathcal{F}$ une famille normale (où de Montel), si toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensemble compacts de Ω. On n'exige pas que la fonction limite appartient à $\mathcal{F}$.

Le théorème suivant nous donne une propriété très utile de compacité des familles normales.

Théorème 2. 14 ([46])

Supposons que $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ et que $\mathcal{F}$ soit uniformément bornée sur tout compact inclu dans Ω. Alors $\mathcal{F}$ est une famille normale.

Chapitre 3

Comportement asymptotique des polynômes extrémaux sur le segment

Introduction

On étudie dans ce chapitre le problème du comportement asymptotique des polynômes extrémaux, associés à une mesure α concentrée sur le segment $E = [-1,\ 1]$ et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx sur E, c'est à dire :

$$d\alpha(x) = \rho(x)dx,\ \ \rho :\ E \to \mathbb{R}_+,\ \int\limits_E \rho(x)dx < +\infty. \tag{3.1}$$

3.1 Fonction de Szegő et espace de Hardy $H^p(\Omega,\ \rho)$

3.1.1 Fonction de Szegő associée à l'exterieur d'un segment

Soit $E = [-1,\ 1]$, $\Omega = Ext\,(E), G = \{w \in \mathbb{C} :\ \ |w| > 1\}$, et $\Phi : \Omega \to G$ l'application conforme définie par $\Phi\,(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$, $(\Phi\,(\infty) = \infty)$. On désigne par Ψ la fonction inverse de Φ définie par $\Psi\,(\omega) = \dfrac{1}{2}\left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)$, et le capacité logarithmique $\dfrac{1}{C\,(E)} = \lim_{z\to\infty} \dfrac{\Phi\,(z)}{z} = \dfrac{1}{2}$.

Soit $\rho(\xi)$ une fonction non négative et intégrable sur$E$. Désignons par

$$L^p(E, \rho|d\xi|) = \left\{ f : \ E \longrightarrow \mathbb{C} : \ \int_E |f(\xi)|^p \rho(\xi) |d\xi| < +\infty \right\} \tag{3.2}$$

Théorème 3. 1

Soit ρ une fonction non négative intégrable sur E au sens de la mesure de Lebesgue dx sur E et vérifiant la condition de Szegő :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\log p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx > -\infty, \tag{3.3}$$

alors, il existe une fonction notée $D(z)$ dite fonction de Szegő : associée au domaine Ω et la fonction de poids ρ, possédant les proprétés suivantes :

1. $D(z)$ est holomorphe dans Ω.

2. $D(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$.

3. $D(z)$ admet des valeurs frontières sur les deux cotés de E (p. p sur E) et $\left|D_{\pm}(\zeta)\right|^{-p} \left|\Phi'_{\pm}(\zeta)\right| = \rho(\xi)$ (p. p sur E)

4. $D(\infty) > 0$.

Preuve

Considérons la fonction poids $\delta(w)$ définie sur le cercle unité par :

$$\delta(e^{i\theta}) = \begin{cases} \dfrac{\rho(\xi)}{\left|\Phi'_{-}(\zeta)\right|}, \ \xi = \Psi(e^{i\theta}) \text{ pour } \pi \leq \theta \leq 2\pi \text{ p. p} \\ \dfrac{\rho(\xi)}{\left|\Phi'_{+}(\zeta)\right|} \xi = \Psi(e^{i\theta}) \text{ pour } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ p. p} \end{cases}$$

on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\delta\left(e^{i\theta}\right)\right) d\theta = \int_E \left(\log \frac{p(\xi)}{\left|\Phi'(\xi)\right|}\right) \left|\Phi'(\xi)\right| |d\xi|,$$

$$= \int_E (\log p(\xi)) \left|\Phi'(\xi)\right| |d\xi| + \int_E \left(\log \frac{1}{\left|\Phi'(\xi)\right|}\right) \left|\Phi'(\xi)\right| |d\xi|,$$

$$= \int_E (\log p(\xi)) \left|\Phi'(\xi)\right| |d\xi| + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log\left|\Psi'\left(e^{i\theta}\right)\right|\right) d\theta,$$

comme $\log\left|\Psi'\left(e^{i\theta}\right)\right| \in L[-\pi,\pi]$,car $\Psi' \in H^1(G)$ (voir [25]), ceci avec la condition(3. 3), entraînent

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\delta\left(e^{i\theta}\right)\right) d\theta > -\infty \tag{3.4}$$

qui est la condition usuelle de Szegö.

D'autre part

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\delta\left(e^{i\theta}\right)\right) d\theta = \int_E \frac{p(\xi)}{|\Phi'(\xi)|} \left|\Phi'(\xi)\right| |d\xi| = \int_E (p(\xi)) |d\xi| < +\infty$$

,

alors la fonction de Szegő vérifiant les propriétés du théorème est exactement la fonction définie par :

$$D(z) = D_G(\Phi(z)),$$

où, D_G est la fonction de Szegő associée à la fonction poids δ et à l'extérieur du cercle unité défini par :

$$D_G(\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi} \log(\cos\theta\,|\sin\theta|)\frac{\omega + e^{i\theta}}{\omega - e^{i\theta}} d\theta\right\},\ (|\omega| > 1). \tag{3.5}$$

Montrons maintenant qu'elle vérifie les propriétés1), 2), 3) et 4).

En effet,

1) $D(z) = D_\delta^e(\Phi(z)) \neq 0$ car $\Phi(z) \in G$ pour $z \in \Omega$.

2)$\left(\Phi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} / D(z) \in H^p(\Omega) \iff \left(\Phi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} / D_\delta^e(\Phi(z)) \in H^p(\Omega)$

$$\iff \left(\Phi'(\Psi(\omega))\right)^{\frac{1}{p}} \left(\Psi'(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} / D_\delta^e(\Phi(\Psi(\omega))) \in H^p(\Omega)$$

$$\iff 1/D_\delta^e(\omega) \in H^p(G)$$

(puisque $\left(\Phi'(\Psi(\omega))\right)^{\frac{1}{p}} \left(\Psi'(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} = \left((\Phi\circ\Psi)'(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} = 1$ car $\Phi\circ\Psi = Id_E$)

3) $D(\infty) = D_\delta^e(\Phi(\infty)) = D_\delta^e(\infty) > 0$

4) $\left|D_{\pm}(\zeta)\right|^{-p} \left|\Phi'_{\pm}(\zeta)\right| = \left|(D_\delta^e)^*(\Phi(\xi))\right|^{-p} \left|\Phi'(\xi)\right| = \delta\left(e^{i\theta}\right)\left|\Phi'(\xi)\right| = p(\xi)$

Remarque 3. 1

La fonction de Szegő D_G peut être définie par :

$$D_G(\omega) = D_\delta(\frac{1}{\omega}), |\omega| > 1;\ D_G(\infty) = D_\delta(0), \tag{3.6}$$

où D_δ est la fonction de Szegő associée à la fonction poids δ et au disque unité ouvert U

3.1.2 Espace de Hardy $H^p(\Omega,\ \rho)$

Définition 3. 1

Soit $f \in H\ (\Omega)$.

On dit que $f \in H^p\ (\Omega)$ si et seulement si

$$f(\Psi(\omega))/D(\Psi(\omega)) \in H^p(G) \tag{3.7}$$

Théorème 3. 2

Soit $f \in H^p\ (\Omega,\ p)$. Alors :

1. *alors f admet en presque tous les points de E deux valeurs limites notées f_+ et f_-, sur les deux cotés de E, de plus :* f_+ , f_- $\in L^p(E, \rho(\zeta)\,|d(\zeta)|)$

2.

Pour $p \geq 1$ et pour tout $f \in H^p\ (\Omega,\ p)$, posons :

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{H^p(\Omega,\rho)} &= \lim_{R\to 1+}\frac{1}{R}\int\limits_{E_R}\frac{|f(z)|^p}{|D(z)|^p}\left|\Phi^{/}(z)dz\right| \\ &\overset{notation}{=} \oint\limits_{E} |f(x)|^p\,\rho(x)dx,\end{aligned}$$

où

$$E_R = \{z \in \Omega : \ |\Phi(z)| = R\}.$$

dans ce cas l'espace $\left((H^p(\Omega,\ p)),\ \|.\|_{H^p(\Omega,\ p)}\right)$ est un espace de Banach.

Pour $0 < p < 1$, $(H^p(U),\ d_p)$ est un espace de Frechet muni de la distance

$$d\ (f,\ g\ ) = \|f-g\|_p^p.$$

Preuve

1) Soit $f \in H^p(\Omega,\ p)$, posons $F(z) = f'(z)\left(\Phi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}/D(z)$ et soit F^*la limite non tangentielle de F.

Comme, d'un part $\left(\Phi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}/D^*(\xi) \neq 0$ puisque $\left|\Phi'(\xi)\right|.|D^*(\xi)|^{-p} = p(\xi)$, et d'autre part $p(\xi) > 0$, presque partout sur E ($car \int\limits_E (\log p(\xi))\left|\Phi'(\xi)\right||d\xi| > -\infty$),

donc $f'(z) = \dfrac{F(z)\,D(z)}{(\Phi'(z))^{\frac{1}{p}}}$ admet une limite non tangentielle f'^* presque partout sur E c'est-à-dir

Montrons maintenant que $f'^* \in L^P(E,\ p(\xi)\,|d\xi|)$. En effet :

$$\begin{aligned}\int\limits_E \left|\ f'^*(\xi)\right|^p p(\xi)\,|d\xi| &= \int\limits_E \left|\frac{F^*(\xi)\,D^*(\xi)}{(\Phi'(\xi))^{\frac{1}{p}}}\right|^p \left|\Phi'(\xi)\right|.|D^*(\xi)|^{-p}\,|d\xi|, \\ &= \int\limits_E \left|\ F^*(\xi)\right|^p|d\xi| < +\infty;\ F \in H^p(\Omega)\end{aligned}$$

2) Pour $1 \le p < \infty$ et comme $\|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} = \left\|f..\Phi'^{1/p}/D\right\|^p_{H^p(\Omega,\ p)}$ alors si $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans $H^p(\Omega,\ p)$ alors $\left\{f_n..\Phi'^{1/p}/D\right\}$ est une suite de Cauchy dans $H^p(\Omega)$

, donc elle couverge vers une fonstion $g \in H^p(\Omega)$; par suite $f_n \to \dfrac{g.D}{\Phi'^{1/p}} \in H^p(\Omega,\ p)$

Lemme 3. 2

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonction de l'espace $H^p\ (\Omega,\ p)$ .et

1. $f_n \to f$ *uniformément sur les compacts de* Ω.

2. $\|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} \leq M$ (cons tan te) .

Alors $f \in H^p\ (\Omega, p)$ et

$$\|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} \leq \liminf \|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} .$$

Preuve

En utilisant la relation entre les classes $H^p(\Omega)$ et $H^p(G)$ on peut établir les formule suivante

$$\int_E \left| \frac{\varphi(z)}{D'(z)} \right|^p \left|\Phi'(z)\right| . |dz| \leq r \int_E |\ \varphi^*(\xi)|^p\, p(\xi)\, |d\xi| ,$$

et

$$\int_E |\ \varphi^*(\xi)|^p\, p(\xi)\, |d\xi| \leq \liminf \int_E \left| \frac{\varphi(z)}{D'(z)} \right|^p \left|\Phi'(z)\right| . |dz| ,$$

pour toute fonction $\varphi(z) \in H^p\ (\Omega,\ p)$.

Donc on a

$$\begin{aligned} \int_{E_r} \left| \frac{f(z)}{D'(z)} \right|^p \left|\Phi'(z)(z)\right| . |dz| &= \lim_{n\to\infty} \int_{E_r} \left| \frac{f_n(z)}{D'(z)} \right|^p \left|\Phi'(z)\right| . |dz| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int_{E_r} |\ f_n^*(\xi)|^p\, p(\xi)\, |d\xi| \leq rC. \end{aligned}$$

Il result que $f(z)\left(\Phi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \in H^p\ (\Omega)$, et Ceci implique que $f(z) \in H^p\ (\Omega,\ p)$.

Supposons que $C^* = \liminf \|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)}$, on choisit une sous suite(f_{n_k}) telle que

$$\lim \|f_{n_k}\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} = \liminf \|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)}\,,$$

Alors pour tout ε fixe il existe N_0 tel que

$$\forall n_k > N_0, \|f_{n_k}\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} \leq C^* + \varepsilon.$$

La sous suite (f_{n_k}) converge uniformément sur les compacts de Ω vers f; alors

$$\int\limits_{E_r} \left| \frac{f(z)}{D'(z)} \right|^p \left| \Phi'(z)(z) \right| . |dz| = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_r} \left| \frac{f_{n_k}(z)}{D'(z)} \right|^p \left| \Phi'(z) \right| . |dz|\,,$$

d'où

$$\int\limits_{E_r} \left| \frac{f(z)}{D'(z)} \right|^p \left| \Phi'(z)(z) \right| . |dz| \leq r \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_r} \left| f^*_{n_k}(z) \right|^p p(\xi) |d\xi| \leq r(C^* + \varepsilon)\,.$$

On obtient finalement

$$\|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} \leq C^* + \varepsilon$$

Ce qui impliqune

$$\|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} \leq \liminf \|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)}\,.$$

Lemme2. 1 ([23])

Si $f(z) \in H^p\ (\Omega,\ p)$ et $K \subset \Omega, K$ compact, alors il existe une constante C_K telle que :

$$\sup |f(z)| \leq C_K \|f\|^p_{H^p(\Omega,\ p)}$$

Preuve

Pour $1 \leq p \prec \infty$ posons :

$d(K, E) = \min_{\substack{z\in E\\ k\in K}} |z-k|\,; d(K,\ 0) = \min_{z\in K} |z|\,; et\ C_K = \dfrac{\min_{z\in K} |D(z)|\,.l^{1/p}}{2\pi d(K,\ E)\, d(K,\ 0)\, |\Phi'(z)|^{1/p}}$,

où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Le choix de C_K et théorème [] nous donne le résultat cherché.

Pour $0 < p < 1$ on note que la fonction $\left|f'(\Psi(\omega))/D(\Psi(\omega))\right|^p$ est sous harmonique dans G, et si $g(\omega)$ est une fonction harmonique avec la même valeur limite sur E, on a $g(\omega) \succeq f'(\Psi(\omega))/D(\Psi(\omega))$, $z \in K$.

3.2 polynômes extrémaux

Définition 3. 2

Soit α une mesure positive, finie, non discrète définie sur $B(\mathbb{C})$ et $E = [-1,\ 1]$ son support. On appelle polynômes $L_{n,\,P}$ extrémaux noté $L_{\,n\,,\,p}$ et associé à la mesure α la solution du problème extrémal suivant :

$$\|L_{n\,,p}\|_\alpha = \min_{Q_n \in P_{n,1}} \|Q_n\|_\alpha \tag{3.8}$$

3.3 Comportement asymptotique des polynômes extrémaux sur le segment

Notons par :

P_n l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

$P_{n,1}$ l'ensemble des polynômes normalisés de degré n.

Avant d'énoncer le résultat essentiel de cette partie, introduisons quelques lemmes et résultats intermédiaires qui nous seront utiles par la suite.

Désignons par $m_n(\rho)$, $\mu(\rho)$ les valeurs optimales des problèmes extrémaux suivants :

$$m_{n,\,p}(\rho) = \min\left\{\|Q_n\|_\alpha^p : \ Q_n \in P_{n,\,1}\right\}, \tag{3.9}$$

où

$$\|Q_n\|_\alpha^p = \int\limits_E |Q_n(\xi)|^p \, \rho\,(x)\, dx,$$

et

$$\mu(\rho) = \inf \left\{ \|\varphi\|_{H^p(\Omega,\ \rho)}^p :\ \varphi \in H^p(\Omega,\ \rho),\ \varphi(\infty) = 1 \right\}, \tag{3.10}$$

$$\|\varphi\|_{H^p(\Omega,\ \rho)}^p = \oint\limits_E |\varphi(x)|^p \, \rho\,(x)\, dx.$$

Notons par L_n^* et φ^* les solutions optimales des problèmes extrémaux (3.9), (3.10) réspectivement.

Lemme 3. 3

Pour la fonction extrémale φ^* et la valeur optimale $\mu(\rho)$ du problème (3. 10) on a les relations suivantes :

1) $\varphi^*\,(z) = \dfrac{D\left(\dfrac{1}{\Phi\,(z)}\right)}{D\,(0)}$.

2) $\mu\,(\rho) = \dfrac{2\pi}{[D\,(0)]^p}$.

Preuve

Pour toute fonction $\varphi \in H^p(\Omega,\ \rho)$ tel que $\varphi(\infty) = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R}\int_{E_R} \frac{|\varphi(z)|^p}{|D(z)|^p}\,|\Phi'(z)dz| &= \frac{1}{R}\int_{|w|=R} \frac{|\varphi(\Psi(w))|^p}{|D(\Psi(w))|^p}\,|dw| \\
&= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} \frac{\left|\varphi(\Psi(R.e^{i\theta}))\right|^p}{|D(\Psi(R.e^{i\theta}))|^p} R d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left|g(R.e^{i\theta})\right| d\theta,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où

$$g(R.e^{i\theta}) = \left[\frac{\varphi(\Psi(R.e^{i\theta}))}{D(\Psi(R.e^{i\theta}))}\right]^p.$$

Si on définit la fonction g_2 par :

$$g_2(re^{i\theta}) = g(\frac{1}{r.e^{i\theta}}),\ 0 < r < 1 \text{ et } g_2(0) = g(\infty),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left|g(R.e^{i\theta})\right| d\theta &= \int_0^{2\pi} \left|g_2(\frac{1}{R}.e^{i\theta})\right| d\theta \geq \left|\int_0^{2\pi} g_2(\frac{1}{R}.e^{i\theta})d\theta\right| \\ &= 2\pi \left|g_2(0)\right| = 2\pi \left|g(\infty)\right|. \end{aligned} \tag{3.12}$$

On note que dans l'avant dernière égalité, on a utilisé l'intégrale de Cauchy

$$g_2(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g_2(z)}{z-0}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_2(\frac{1}{R}e^{i\theta})d\theta,$$

où

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{R}e^{i\theta};\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

car g_2 est holomorphe dans le disque unité ouvert, puisque g est holomorphe à l'éxterieur du cercle unité.

Les relations (3. 11) et (3. 12) entrainent

$$\frac{1}{R}\int_{E_R} \frac{|\varphi(z)|^p}{|D(z)|^p} |\Phi'(z)dz| \geq 2\pi \left(\frac{\varphi(\infty)}{D(\infty)}\right)^p = \frac{2\pi}{(D(\infty))^p}. \tag{3.13}$$

En passant à la limite quand $R \to 1^+$ dans (3.13), on obtient :

$$\|\varphi\|_{H^p(\Omega,\ \rho)} \geq \frac{2\pi}{(D(\infty))^p},\ \forall\varphi \in H^p(\Omega,\ \rho) \text{ avec } \varphi(\infty) = 1. \tag{3.14}$$

D'autre part, pour la fonction $\varphi^*(z) = D(z)/D(\infty)$, on a : $\varphi^* \in H^p(\Omega, \rho)$, $\varphi^*(\infty) = 1$, et comme de plus elle réalise l'égalité dans (3. 14) , alors en faisant tendre R vers 1^+, on obtient $\|\varphi^*\|_{H^p(\Omega,\ \rho)} = 2\pi/D(\infty)^p$. Ceci avec (3. 14), montre que φ^* est la fonction extrémale du problème (*3. 10*) et on a $\mu(\rho) = \|\varphi^*\|_{H^p(\Omega,\ \rho)} = 2\pi/D(\infty)^p$.

Définition 4. 3

Nous dirons que la mesure absolument continue α *supportée sur le segment* $[-1,\ 1]$ *appartient à la classe* A *(qu'on note* $\alpha \in A$*), si elle veriffie la condition suivante :*

$$\left(\alpha'\right)^{-1} \in L_r\left[-1,\ 1\right],$$

pour tout $r < \infty$.

Le théorème suivant a été démontré par Lubinsky et Saff en 1987.

Théorème 3. 2([35])

Soit $\alpha \in A$ une mesure positive. Associer à la mesure α les fonctions D et les valeurs optimales $m_{n,\ p}\left(\sigma\right)$ et $\mu\left(\sigma\right)$ données par $\left(3.\ 5\right)$, $\left(5.\ 10\right)$ et $\left(5.\ 6\right)$.

Alors le on a l'asymptotique fort des polynômes $T_{n,\ p}$ suivant :

(1) $\lim_{n\to\infty} 2^n m_{n,\ p}\left(\sigma\right) = \left(\mu\left(\sigma\right)\right)^{1/p}$.

(2) $T_{n,p}\left(z\right) = \left(\dfrac{\Phi\left(z\right)}{2}\right)^n \dfrac{D\left(\dfrac{1}{\Phi\left(z\right)}\right)}{D\left(0\right)}\left[1 + \chi_n\left(z\right)\right]$,

avec, $\chi_n\left(z\right) \to 0$ *uniformément sur les sous -ensembles compacts de* Ω.

Chapitre 4

Comportement asymptotique des polynômes extrémaux associés à une mesure concentrée sur sur le segment plus une partie discrète finie

Introduction

Dans ce chapitre on va étudier le comportement asymptotique des polynômes L_P extrémaux relativement à une mesure de type $\sigma = \alpha + \gamma_\ell$, où α est une mesure concentrée le segment $[-1,\ 1]$, et γ_ℓ est une mesure discrète avec les masses A_k aux points $z_k \in Ext$ (E), $k = 1, 2, ..., \ell$.

4.1 Notations et lemmes de base

On reprend les notations et les définitions du chapitre précédent. Soit $E = [-1,\ 1]$, $\Omega = Ext\ (E)$, $G = \{w \in \mathbb{C} : \ |w| > 1\}$, et $\Phi : \Omega \to G$ l'application conforme définie par

$\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$, $(\Phi(\infty) = \infty)$. On désigne par Ψ la fonction inverse de Φ définie par $\Psi(\omega) = \frac{1}{2}\left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)$, et le capacité logarithmique $\dfrac{1}{C(E)} = \lim_{z\to\infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} = \dfrac{1}{2}$. Comme précédement la mesure σ_ℓ est la somme de deux mesures $\sigma_\ell = \alpha + \gamma_\ell$ avec :

$$d\alpha(\xi) = \rho(\xi)\,|d\xi|, \tag{4.1}$$

où ρ est une fonction poids positive intégrable sur E , et

$$\gamma_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k};\ \ A_k > 0,\ \ z_k \in \Omega. \tag{4.2}$$

Rappelons que si la fonction poids ρ satisfait la condition de Szégö suivante :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\log p(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx > -\infty, \tag{4.3}$$

Et on peut construire la fonction (appelée fonction de Szegö) notée D associeé au domaine Ω et à la fonction poids ρ avec les propriétés suivantes :

1. D est holomorphe dans Ω, $D(z) \neq 0$ dans Ω et $D(\infty) > 0$.
2. D admet des valeurs limites sur les deux cotés de E et $\left|D_{\pm}(\zeta)\right|^{-p} \left|\Phi'_{\pm}(\zeta)\right| = \rho(\xi)$ (p. p sur E).

Définition 4. 1

On suppose que $\rho(\xi)$ satisfait la condition de Szégö.

On définit $\mu(\rho)$ et $\mu^*(\rho)$ les valeurs extémaux des problèmes suivants :

$$\mu(\rho) = \inf \left\{ \|\varphi\|^p_{H^p(\Omega,\ p)}, \varphi \in H^p(\Omega,\ p),\ \varphi(\infty) = 1 \right\}, \tag{4.4}$$

$$\mu^*(\rho) = \inf \left\{ \|\varphi\|^p_{H^p(\Omega,\ \rho)} :\ \varphi \in H^p(\Omega,\ \rho),\ \varphi(\infty) = 1,\ \varphi(z_k) = 0,\ k = 1,\ 2, \ldots\ \ell \right\}. \tag{4.5}$$

On note par φ^* et ψ^* les fonctions extrémale des problèmes (4. 4), (4. 5) respectivement.

Lemme 4. 1

Soit le produit de Blaschkel

$$B_\ell(z) = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)} - 1} \cdot \frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)}, \tag{4.6}$$

alors

i) B_ℓ est une fonction analytique dans Ω, $B_\ell(\infty) = 1$, B_ℓ admet une valeur limite sur E et $B_\ell(\xi) = \prod_{k=1}^{\ell} |\Phi(z_k)|$

ii) Si $\varphi \in H^p(\Omega,\ p)$, $\varphi\ (\infty) = 1$ et $\varphi(z) = 0$, $k = 1, 2, \ldots \ell$, alors $f = \varphi / B_\ell \in H^p(\Omega,\ p)$ et $f\ (\infty) = 1$.

Preuve

Ce lemme est preuve dans le cas $p = 2$(voir [], p. 261). La même preuve reste vraie dans le cas général $p > 0$

En effet :

Si on note d'une part par

$$k_1 = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\omega - \ \omega_k}{\omega\overline{\omega_k} - 1} \frac{|\omega|^2}{\omega_k},\ \ \omega_k = \Phi(z_k),\ \ |\omega| \succ 1,$$

alors

$$B_\ell(z) = k_1(\Phi(z_k))$$

et

$$\forall\omega :\ \ k_1(\omega) \,.\, \prod_{k=1}^{\ell} |\omega_k|,$$

où

$$k_2(\omega) = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\omega - \ \omega_k}{\omega\overline{\omega_k} - 1} \frac{|\omega|^2}{\omega_k},$$

k_2 est bornée dans G et $\left|\widetilde{k_2}\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$ presque partout dans G , $\widetilde{k_2}$ est la limite tangentielle de k_2

D'autre part, $B_\ell(z) = 0$, $k = 1, 2, ... \ell$, et $B_\ell(z) \neq 0$ si $z \neq z_k$. Alors les points$\{z_k\}$ sont réguliers pour φ/B_ℓ.

Ainsi φ/B_ℓ admet prolongement analytique dans Ω.

Maintenant montrons que $\varphi/B_\ell \in H^p(\Omega,\ p)$. il suffit pour cela de montrerque

$$\frac{\varphi\ \left(\psi\left(\omega\right)\right)}{B_\ell\ \left(\psi\left(\omega\right)\right).D\ \left(\psi\left(\omega\right)\right)} \in H^p\left(G\right).$$

Ce qui revient à montrer que

$$\frac{\varphi\ \left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right)}{B_\ell\ \left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right).D\ \left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right)} \in H^p\left(D\right),\ \ \left|\acute{\omega}\right| < 1.$$

Or on sait que

$$\varphi\left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right) \in H^p\left(D\right),$$

et si on considdère le produit de Blaschke classique

$$k\left(\acute{\omega}\right) = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\acute{\omega} - \ \omega_k}{\acute{\omega}\overline{\acute{\omega}_k} - 1} \frac{\left|\acute{\omega}\right|^2}{\acute{\omega}_k},\ \ \left|\acute{\omega}\right| < 1$$

où

$$\acute{\omega}_k = \frac{1}{\Phi\left(z_k\right)};\ k = 1,\ 2, ...\ \ell$$

et

$$B_1\left(\acute{\omega}\right) = B_\ell\left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right),$$

alors on a

$$B_1\left(\acute{\omega}\right)=k\left(\acute{\omega}\right).\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1}{\left|\acute{\omega}_k\right|},\ \ \left|\acute{\omega}\right|\prec 1,$$

et finallement

$$B_\ell\left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right).D\left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right)=\left(k\left(\acute{\omega}\right).\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1}{\left|\acute{\omega}_k\right|}\right)D\left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right)$$

et

$$D\left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right).k\left(\acute{\omega}\right)\in H^p\left(D\right).$$

alors

$$D\left(\psi\left(\frac{1}{\acute{\omega}}\right)\right).k\left(\acute{\omega}\right).\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left|\acute{\omega}_k\right|}\in H^p\left(D\right).$$

Lemme 4. 2

Les fonctions extrémales φ^* et ψ^* sont liées par :

$$\psi^*=\varphi^*B, \tag{4.7}$$

et on a

$$\mu^*(\rho)=\mu(\rho).\left(\prod_{k=1}^{\ell}\left|\Phi\left(z_k\right)\right|\right)^p, \tag{4.8}$$

où, B_ℓ est le produit de Blaschke fini défini par :

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\ell}\frac{\Phi(z)-\Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)}-1}.\frac{\left|\Phi(z_k)\right|^2}{\Phi(z_k)}.$$

Preuve

Considérons le produit de Blaschke B_ℓ défini par :

$$B_\ell(z) = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)} - 1} . \frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)},$$

alors

$$B_\ell \in H^p(\Omega,\ \rho),\ B_\ell(\infty) = 1 \text{ et } |B_\ell(\xi)| = \prod_{k=1}^{\ell} |\Phi(z_k)| .$$

Soit maintenant une fonction ψ de $H^p(\Omega, \rho)$ vérifiant :

$$\psi(\infty) = 1 \text{ et } \psi(z_k) = 0,\ k = 1,\ 2, \ldots \ell,$$

alors

$$\frac{\psi}{B_\ell} \in H^p(\Omega,\ \rho) \text{ et } \left[\frac{\psi}{B_\ell}\right](\infty) = 1,$$

donc

$$\int_E \left|\frac{\psi(\xi)}{B_\ell(\xi)}\right|^p \rho(\xi)\, |d\xi| \geq \int_E |\varphi^*(\xi)|^p \rho(\xi)\, |d\xi| ,$$

ou encore

$$\int_E |\psi(\xi)|^p \rho(\xi)\, |d\xi| \geq \left(\prod_{k=1}^{\ell} |\Phi(z_k)|\right)^p \int_E |\varphi^*(\xi)|^p \rho(\xi)\, |d\xi| ,$$

finalement

$$\int_E |\psi(\xi)|^p \rho(\xi)\, |d\xi| \geq \int_E |\varphi^*(\xi).B_\ell(\xi)|^p \rho(\xi)\, |d\xi| . \tag{4.9}$$

Remarquons maintenant que

$$\varphi^* B_\ell \in H^p(\Omega,\ \rho),\ (\varphi^* B_\ell)(\infty) = 1 \text{ et } (\varphi^* B_\ell)(z_k) = 0,\ k = 1,\ 2, \ldots \ell. \tag{4.10}$$

Alors (4.9) et (4. 10) et l'unicité de la solution optimale nous donnent :

$$\psi^* = \varphi^* B_\ell$$

et par suite

$$\begin{aligned}\mu^*(\rho) &= \int\limits_E |\psi^*(\xi)|^p \rho(\xi)\,|d\xi| \\ &= \int\limits_E |\varphi^*(\xi).B_\ell(\xi)|^p \rho(\xi)\,|d\xi| \\ &= \left(\prod_{k=1}^{\ell} |\Phi(z_k)|\right)^p \int\limits_E |\varphi^*(\xi)|^p \rho(\xi)\,|d\xi| \\ &= \left(\prod_{k=1}^{\ell} |\Phi(z_k)|\right)^p \mu(\rho).\end{aligned}$$

Lemme 4. 3 *Soit le polynôme $\omega_\ell(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_\ell)$. Alors on a ;*

$$\mu^*(\rho) = \mu\left(\rho.\frac{|\omega_\ell|^p}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p\ell}}\right), \tag{4.11}$$

où la constante $\mu^*(\rho)$ est la valeur optimale du problème (4. 5) et le *membre droit est la constante extrémale du problème (4. 4) associé à la fonction poids $\rho.\frac{|\omega_\ell|^p}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p\ell}}$.*

Preuve

D'après la définition de $\mu\left(\rho.\frac{|\omega_\ell|^p}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p\ell}}\right)$, il existe φ unique telle que $\varphi \in H^p(\Omega, \rho),\ \varphi(\infty) = 1$, et

$$\mu\left(\rho\frac{|\omega_\ell|^p}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p\ell}}\right) = \int\limits_E |\varphi(\xi)|^p.\frac{|\xi - z_1|^p ... |\xi - z_\ell|^p}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p\ell}}\rho(\xi)\,|d\xi|.$$

Considérons la fonction ψ définie par :

$$\psi = \frac{\varphi.\omega_\ell}{\left[\frac{\Phi}{2}\right]^\ell},$$

alors $\psi \in H^p(\Omega,\, \rho),\ \psi(\infty) = 1$, et $\psi(z_k) = 0,\ k = 1, 2, ... \ell$, donc

$$\int\limits_E |\varphi(\xi)|^p.\frac{|\xi - z_1|^p ... |\xi - z_\ell|^p}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p\ell}}\rho(\xi)\,|d\xi| = \int\limits_E |\psi(\xi)|^p \rho(\xi)\,|d\xi| \geq \mu(\ell),$$

d'où

$$\mu\left(\rho\frac{|\omega_\ell|^p}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p\ell}}\right)\geq\mu^*(\rho). \tag{4.12}$$

Inversement, soit $\psi\in H^p(\Omega,\,\rho)$ tel que $\psi(\infty)=1$ et $\psi\left(z_k\right)=0,\;k=1,\,2,...\,\ell$, et

$$\mu^*(\rho)=\int_E\left|\psi(\xi)\right|^p\rho\left(\xi\right)\left|d\xi\right|.$$

Considérons maintenant la fonction φ définie par

$$\varphi\left(z\right)=\psi\left(z\right).\frac{\left[\dfrac{\Phi\left(z\right)}{2}\right]^\ell}{\omega_\ell\left(z\right)}.$$

Alors φ vérifie

$$\varphi\in H^p(\Omega,\;\rho),\;\varphi(\infty)=1;$$

donc

$$\begin{aligned}
\mu^*(\rho) &= \int_E\left|\psi(\xi)\right|^p\rho\left(\xi\right)\left|d\xi\right| \\
&= \int_E\left|\psi(\xi)\frac{\left[\dfrac{\Phi\left(z\right)}{2}\right]^\ell}{\omega_\ell\left(\xi\right)}\right|^p\frac{\left|\omega_\ell\left(\xi\right)\right|^p}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p\ell}}\rho\left(\xi\right)\left|d\xi\right| \\
&= \int_E\left|\varphi(\xi)\right|^p\frac{\left|\omega_\ell\left(\xi\right)\right|^p}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p\ell}}\rho\left(\xi\right)\left|d\xi\right| \\
&\geq \mu\left(\rho.\frac{|\omega_\ell|^p}{\left(\frac{1}{2}\right)^{p\ell}}\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\mu^*(\rho)\geq\mu\left(\rho\frac{|\omega_\ell|^p}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p\ell}}\right). \tag{4.13}$$

(4. 12) et (4. 13) donnent la relation du lemme 4. 2.

Définition 4. 2

On note par $m_{n,\,p}(\sigma_l)$ *la valeur optimale du problème extrémal suivant :*

$$m_{n,\,p}(\sigma_\ell) = \min_{Q \in P_{n,1}} \|Q_n\|_\sigma^p \tag{4.14}$$

où .

$$\|T_{n,\,p}\|_{\sigma_\ell}^p = \int_E |T_n(\xi)|^p \, \rho\,(\xi)\, |d\xi| + \sum_{k=1}^{\ell} A_k \, |T_{n,\,p}(z_k)|^p$$

Désignant par $T_{n,\,p}(\sigma_\ell)$ les polynômes orthogonaux par rapport à la mesure σ_ℓ qui sont solutions du problème éxtrémal (4. 14)

4.2 Asymptotique des polynômes extrémaux

Définition 4. 3

Nous dirons que la mesure absolument continue α *supportée sur le segment* $[-1,\ 1]$ *appartient à la classe* A *(qu'on note* $\alpha \in A$*), si elle veriffie la condition suivante :*

$$(\alpha')^{-1} \in L_r\,[-1,\ 1]\,,$$

pour tout $r < \infty$.

Théorème 4. 1

Soit la mesure $\sigma_\ell = \alpha + \gamma_\ell$ *telle que la fonction poids* $\rho(\xi)$ *satisfaient la condition de Szegö, alors on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup 2^n m_{n,\,p}\,(\sigma_\ell) \leq \left(\mu^*\,(\rho)\right)^{1/p}. \tag{4.15}$$

Preuve

On pose $\varphi_n^*(z) = \dfrac{T_{n,p}(z)}{\left(\dfrac{\Phi(z)}{2}\right)^n}$, alors cette fonction est de class $H^p(\Omega,\rho)$ et on a

$$2^n m_n(\sigma_\ell) = \|\varphi_n^*\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} + \sum_{k=1}^{\ell} A_k \left|\varphi_n^*(z_k)\right|^p ,$$

La propriété extrémale de φ_n^* implique que

$$\|\varphi_n^*\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} \leq 2^n m_n(\sigma_\ell) \leq \left\|\psi_{n-\ell}^*\right\|^2_{H^p(\Omega,\rho^*)} ,$$

où $\rho^* = \rho\dfrac{|\omega_\ell|^p}{C(E)^{p\ell}}$ et ψ_n^* est la fonction optimale du problème extrémal $m_{n,p}(\rho^*)$.

$$\left\|\psi_{n-\ell}^*\right\|^p_{H^2(\Omega,\rho^*)} \to \mu\left(\rho^*\right),$$

ceci implique (voir lemme 4.3) que

$$\limsup_{n\to\infty} 2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right) \leq \left(\mu\left(\rho^*\right)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mu^*\left(\rho\right)\right)^{\frac{1}{p}} .$$

La preuve est complète.

Théorème 4. 2

Soit la mesure $\sigma_\ell = \alpha + \gamma_\ell$ *telle que* $\alpha \in A$ *et la fonction poids* $\rho(\xi)$ *satisfaient la condition de Szegö, alors on a :*

$$\lim_{n\to\infty} 2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right) = \left(\mu^*\left(\rho\right)\right)^{1/p} . \tag{4.16}$$

Preuve

<u>Première méthode</u>

Pour les fonctions extrémales φ_n^* , la relation (4.16) entraîne :

$$\|\varphi_n^*\|^p_{H^2(\Omega,\rho)} \leq const, \tag{4.17}$$

d'autre part, de la définition de $2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right)$, on a

$$2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right) = \|\varphi_n^*\|_{H^p(\Omega,\rho)}^p + \sum_{k=1}^{\ell} A_k \left|\varphi_n^*(z_k)\right|^p,$$

d'où

$$\|\varphi_n^*\|_{H^p(\Omega,\rho)}^p \leq 2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right). \tag{4.18}$$

posons $M^* = \liminf \|\varphi_n^*\|_{H^p(\Omega,\rho)}^p$ et soit $\left\{\varphi_{n_k}^*\right\}$une sous suite de $\{\varphi_n^*\}$ telle que :

$$M^* = \lim_{n\to\infty} \left\|\varphi_{n_k}^*\right\|_{H^p(\Omega,\rho)}^p.$$

la relation (4.17) et le théorème 2.14 implique que $\{\varphi_n^*\}$ est une famille normale dans Ω; donc on peut toujours en extraire une sous suite uniformément convergente sur les compacts de Ω.Si on extrait cette sous suite de $\left\{\varphi_{n_k}^*\right\}$, on obtient une sous suite de $\{\varphi_n^*\}$, qu'on désigne par le même symbole $\left\{\varphi_{n_k}^*\right\}$ et ayant les propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\varphi_{n_k}^*\right\|_{H^p(\Omega,\rho)}^p = M^*$
2. $\varphi_{n_k}^* \to \phi$ *uniformément sur les compacts de* Ω.

Alors d'aprés le lemme3.2 $\phi \in H^p\ (\Omega, p)$ et

$$\|\phi\|_{H^p(\Omega,\,p)}^p \leq \liminf \left\|\varphi_{n_k}^*\right\|_{H^p(\Omega,\,p)}^p = \liminf \|\varphi_n^*\|_{H^p(\Omega,\,p)}^p \leq \liminf 2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right).$$

Notons encore, que comme les sommes

$$\sum_{k=1}^{\ell} A_k \left|\varphi_n^*(z_k)\right|^p,$$

sont toutes bornées par une constante on a :

$$\lim \varphi_n^*(z_k) = 0,$$

cela veut dire que la fonction $\phi(z)$ a encore les propriétés :

$$\phi(\infty) = 1, \phi(z_k) = 0, k = 1, 2, ...\ell.$$

Nous avons donc

$$\|\phi\|_{H^p(\Omega,\, p)}^p \geq \mu^*(\rho),$$

Ceci avec lethéorème (4. 1) nous donne

$$(\mu^*(\rho))^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n\to\infty} 2^n m_{n,\, p}(\sigma_\ell) \leq \limsup_{n\to\infty} 2^n m_{n,\, p}(\sigma_\ell) \leq (\mu^*(\rho))^{\frac{1}{p}},$$

et par suite :

$$\lim_{n\to\infty} 2^n m_{n,\, p}(\sigma_\ell) = (\mu^*(\rho))^{1/p}.$$

Ceci qui achève la démonstration.

Deuxième méthode

On pose $t_k = \dfrac{1}{\Phi(z_k)}, \xi = \Psi(t)$ *où* $t = e^{i\theta}$,alors $B(\xi) = b(\overline{t})$, avec

$$b_\ell(t) = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{t - t_k}{t\, \overline{t_k} - 1} \frac{\overline{t_k}}{|t_k|^2}, k = 1, 2....\ell.$$

Maintenat soit l'integral

$$I_n = \int_0^\pi \left| \frac{2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{D(t)} - \left(\frac{b_\ell(t)}{D(0)} + \frac{t^{2n} b_\ell(\overline{t})\, D(\overline{t})}{D(0)D(t)} \right) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi},$$

on le transforme comme suit :

$$I_n = \int_0^\pi \left| \frac{2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{D(t)} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^\pi \left| \frac{b_\ell(t)}{D(0)} + \frac{t^{2n} b_\ell(\overline{t})\, D(\overline{t})}{D(0)D(t)} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$-2\,\mathrm{Re} \int_0^\pi \frac{2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{D(t)} \overline{\left(\frac{b_\ell(t)}{D(0)} + \frac{t^{2n} b_\ell(\overline{t})\, D(\overline{t})}{D(0)D(t)} \right)} \frac{d\theta}{2\pi}. \qquad (4.20)$$

$$= I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)}.$$

Evaluation de L'intégrale $I_n^{(1)}$ **:**

Utilisant l'inégalité de HÖlder on a :

$$I_n^{(1)} \leq \left(\int_0^{\pi} \left|\frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)}\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1-\frac{2}{p}}$$

$$\leq \left(\int_0^{\pi} \left|2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)\right|^p \left|D(t)\right|^{-p} \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{-1}^{1} \left|2^n T_{n,\,p}(x\right|^p \rho\left(x\right) dx\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\leq \left[\frac{2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}}\right]^2. \tag{4.21}$$

Evaluation de L'intégrale $I_n^{(2)}$ **:**

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} \quad = \quad & \int_0^{\pi} \left|\frac{b_\ell\left(t\right)}{D(0)}\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{\pi} \left|\frac{b_\ell\left(\bar{t}\right)}{D(0)}\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ & +2\,\mathrm{Re}\int_0^{\pi} \frac{t^{-2n} b_\ell\left(t\right)}{D(0)} \overline{\left(\frac{b_\ell\left(\bar{t}\right) D(\bar{t})}{D(0) D(t)}\right)} \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Quand $n \to \infty$ le dernier terme tend vers 0. Pour la dexième et la trisième terme on a l'estimation suivant :

$$\int_0^{\pi} \left|\frac{b_\ell\left(t\right)}{D(0)}\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{\pi} \left|\frac{b_\ell\left(\bar{t}\right)}{D(0)}\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \left|\frac{b_\ell\left(t\right)}{D(0)}\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{|t_k|^2}}{(D(0))^2} = \left[\frac{[\mu^*(\rho)]}{2\pi}\right]^{\frac{2}{p}}. \tag{4.22}$$

<u>Evaluation de L'intégrale $I_n^{(3)}$</u> **:**

Soit

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} \overline{\left(\frac{t^{2n} b_\ell\,(t)}{D(0)} + \frac{b_\ell\,(\bar{t})\;D(\bar{t})}{D(0)D(t)}\right)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} \overline{\left(\frac{t^{2n} b_\ell\,(t)}{D(0)}\right)} \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} \overline{\left(\frac{b_\ell\,(\bar{t})\;D(\bar{t})}{D(0)D(t)}\right)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} \left(\frac{|b_\ell\,(t)|^2}{D(0)}\right) \frac{dt}{2\pi i t}.$$

On pose :

$$J_{n,l} = \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} \left(\frac{|b_l\,(t)|^2}{D(0)}\right) \frac{dt}{2\pi i t}. \tag{4.23}$$

Utilisant le théorème de résidu on a :

$$J_{n,\ell} = \frac{\prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{|t_k|^2}}{(D(0))^2} + 2^n \sum_{k=1}^{\ell} \frac{t_k^{n-1} T_{n,\,p}(z_k)}{D\,(t_k)\, b_l'\,(t_k)}, \tag{4.24}$$

le dernier terme peut se transfoeme comme suit

$$: \sum_{k=1}^{l} \frac{t_k^{n-1} T_{n,\,p}(z_k)}{D\,(t_k)\, b'\,(t_k)} \le \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\left|\frac{1}{D\,(t_k)\, b'\,(t_k)}\right| \frac{\left|t_k^{n-1}\right|}{A_k^{\frac{1}{p}}}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \left[\sum_{k=1}^{l} |T_{n,\,p}(z_k)|^p\, A_k\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4.25}$$

Ceci avec le theorème (4. 1) nous donne :$J_n \le \left[\frac{[\mu\,(\sigma_\ell)]}{2\pi}\right]^{\frac{2}{p}}. + \delta_n, où\ \delta_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Remplacant (I_1), (I_2) et (I_3) dans (I_n) on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \left[\frac{2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right)}{\left(2\pi\right)^{\frac{1}{p}}} \right] - \left[\frac{\left[\mu^*(\rho)\right]}{2\pi} \right]^{\frac{2}{p}} . - 2\delta_n.$$

Finalement on a

$$\liminf 2^n m_{n,\,p}\left(\sigma_\ell\right) \geq \left[\mu^*(\rho)\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Ceci avec lethéorème (4. 1) achève la démonstration.

Corollaire 4. 1

Sous les hopytheses du théorème 4. 1 on a l'asymptotique fort des polynômes $T_{n,\,p}$ suivant :

$$T_{n,\,p}\left(z\right) = \left(\frac{\Phi\left(z\right)}{2}\right)^n B_\ell(z) \frac{D\left(\frac{1}{\Phi\left(z\right)}\right)}{D\left(0\right)} \left[1 + \chi_n\left(z\right)\right] \tag{4.26}$$

où $\chi_n\left(z\right) \to 0$,*uniformément sur les compacts de* Ω.

Preuve

Soit l'estimation de l'integrale suivante :

$$\int_0^\pi \left| \left[\frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} - \left(\frac{b_\ell\left(t\right)}{D(0)} + \frac{t^{2n} b_\ell\left(\bar{t}\right) D(\bar{t})}{D(0)D(t)} \right) \right] \frac{1}{1 - \omega\bar{t}} \frac{dt}{2\pi i t} \right|^2$$

$$\leq \frac{1}{1 - |\omega|} \int_T \left| \left[\frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} - \left(\frac{b_\ell\left(t\right)}{D(0)} + \frac{t^{2n} b_\ell\left(\bar{t}\right) D(\bar{t})}{D(0)D(t)} \right) \right] \frac{d\theta}{2\pi} \right|^2$$

$$= \frac{1}{1 - |\omega|} I_n.$$

Une conséqence direct de (4. 26) et le théorème1 on a :

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0.$$

Donc

$$\int_T \left| \left[\frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} - \left(\frac{b_\ell\,(t)}{D(0)} + \frac{t^{2n} b_\ell\,(\bar{t})\,D(\bar{t})}{D(0)D(t)} \right) \right] \frac{1}{1-\omega\bar{t}} \frac{dt}{2\pi i t} \right|^2 = \circ\,(1)\,. \tag{4.27}$$

D'autre part

$$\int_T \left| \left[\frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} - \left(\frac{b_\ell\,(t)}{D(0)} + \frac{t^{2n} b_\ell\,(\bar{t})\,D(\bar{t})}{D(0)D(t)} \right) \right] \frac{d\theta}{2\pi} \right|^2$$

$$= \int_T \chi_n\,(\Psi(t))\, \frac{1}{1-\omega\bar{t}} \frac{dt}{2\pi i t} - \int_T \left| \left[\left(\frac{b_\ell\,(t)}{D(0)} + \frac{t^{2n} b_\ell\,(\bar{t})\,D(\bar{t})}{D(0)D(t)} \right) \right] \frac{1}{1-\omega\bar{t}} \frac{dt}{2\pi i t} \right|^2. \tag{4.28}$$

Applicant la formule de Cauchy au premier terme précédent on a

$$\int_T \chi_n\,(\Psi(t))\, \frac{1}{1-\omega\bar{t}} \frac{dt}{2\pi i t} = \chi_n\,(z)\,,\ z = \Psi(w) \in \Omega. \tag{4.29}$$

Comme le dernier terme de (4. 28) tend vers 0 quand $n \to \infty$, et de (4. 27), (4. 28)et (4. 29)On obtient l'assertion du théorème.

Chapitre 5

Comportement asymptotique des polynômes extrémaux associés à une mesure concentrée sur sur le segment plus une partie discrète infinie

Introduction

Khaldi [26] , a étudié le comportement asymptotique des polynômes extrémaux associés à une mesure du type $\sigma_\ell = \alpha + \gamma_\ell$, *où* α est concentée sur le segment E, et est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx , i.e :

$$d\alpha(\xi) = \rho(x)dx,\ \rho(x) :\ E \to \mathbb{R}_+,\ \int\limits_E \rho\,(x)\,dx < +\infty, \tag{5.1}$$

et γ_ℓ est une mesure discrète finie avec les masses A_k aux points $z_k \in Ext\,(E)\,,\ k = 1,$ $2, ..., \ell$.i.e :

$$\gamma_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k}, \ A_k > 0, \tag{5.2}$$

où δ_{z_k}est la mesure de Dirac au point z_k. Dans ce travail on généralise l'étude pour $\sigma = \alpha + \gamma$, où γ est concentée sur une partie discrète infinie, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in Ext\,(E)$; $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \delta_{z_k}$, les masses $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ satisfaient :

$$A_k > 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} A_k < +\infty, \tag{5.3}$$

et α posséde les mêmes propriétés que dans [23].

Soit $E = [-1, \ 1]$. Rappelons que $\Omega = Ext\,(E)$ et $G = \{w \in \mathbb{C} : \ |w| > 1\}$, avec $(\infty \in \Omega, \ \infty \in G)$, et $\dfrac{1}{C(E)} = \lim\limits_{z \to \infty} \left(\dfrac{\Phi\,(z)}{z} \right) > 0$, où $\Phi : \Omega \to G$ est la transformation conforme et Ψ son inverse.

5.1 Notations et lemmes

Avant d'énoncer les lemmes, donnons quelques notations.

Notons par :

P_n l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit $\{T_{n,\,p}\}_{n \in IN}$ *le système de polynômes extrémaux associés à la mesure* σ. *Notons par* $P_{n,\,1}$ *l'ensemble des polynômes de degré* n *dont le coefficient de* z^n *est égal à +1*, dans *ce cas* T_n *vérifie :*

$$\|T_{n,\,p}\|_\sigma^p = \min_{Q \in P_{n,\,1}} \|Q_n\|_\sigma^p \overset{notation}{=} m_{n,\,p}(\sigma), \tag{5.4}$$

où

$$\|T_{n,\,p}\|_\sigma^p = \int\limits_E |T_n(\xi)|^p \, \rho\,(\xi)\, |d\xi| + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, |T_{n,\,p}(z_k)|^p \, .$$

Désignons par $\mu\,(\rho)$, $\mu(\sigma)$ et $m_n(\rho)$ les valeurs optimales des problèmes extrémaux suivants :

$$\mu(\rho) = \inf\left\{\|\varphi\|^p_{H^p(\Omega,\ \rho)} :\ \varphi \in H^p(\Omega,\ \rho),\ \varphi(\infty) = 1\right\} \tag{5.5}$$

$$\mu(\sigma) = \inf\left\{\|\varphi\|^p_{H^2(\Omega,\ \rho)} :\ \varphi \in H^p(\Omega,\ \rho),\ \varphi(\infty) = 1,\ \varphi(z_k) = 0,\ k = 1,\ 2, ...\right\} \tag{5.6}$$

$$m_{n,\ p}(\rho) = \min\left\{\int_E |Q_n(\xi)|^p \rho(\xi)\,|d\xi|,\ Q_n(z) = z^n + ...\right\} \tag{5.7}$$

Notons respectivement par $\varphi^*et\ \psi^*$ les fonctions solutions extrémales des problèmes (5. 5), (5. 6).

Lemme 5. 1

La valeur optimale ainsi que la forme explicite de la fonction extémale φ^*du problème (5. 5) sont :

$$\varphi^*(z) = \frac{D(\frac{1}{\Phi(z)})}{D(0)},$$

et

$$\mu(\rho) = 2/D(0)^p.$$

où D est la foction de Szegö définie en (3.5).

reuve du lemme 5. 2

Ce lemme est prouvé dans le cas d'un contour [19] . La preuve reste vrai dans notre cas.

Lemme 5. 2

Les fonctions extrémales $\varphi^*et\ \ \psi^*$ sont liées par :

$$\psi^* = \frac{1}{B(\infty)}B(z).\varphi^*, \tag{5.8}$$

et on a

$$\mu^*(\rho) = (B(\infty))^{-p}\,\mu(\rho). \tag{5.9}$$

où

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi(z)-\Phi(z_k)}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_k)}-1}.\frac{|\Phi(z_k)|^2}{\Phi(z_k)}, \tag{5.10}$$

est le produit de Blaschke infini.

Preuve du lemme 5. 2

Ce lemme est prouvé dans le cas d'un contour [19] . La preuve reste vrai dans notre cas.

5.2 Résultats essentiels

Définition 5. 1

Nous dirons que la mesure $\sigma=\alpha+\gamma$ appartient à la classe A (qu'on note $\sigma\in A$, si la partie absolument continue αappartient à la classe A et la partie discrète γ de α en plus des relations (5. 1), (5. 2), et (5. 3), elle verifie la condition suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\Phi\left(z_k\right)\right|-1\right)<\infty\right)$$

Théorème 5. 1

Soit la mesure $\sigma=\alpha+\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\delta\left(z-z_k\right)$, *telle que* $\sigma\in A$. *Alors on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\sup 2^n m_{n,\,p}\left(\sigma\right)\leq\left(\mu\left(\rho\right)\right)^{1/p}. \tag{5.11}$$

Preuve

La fonction $\left|\dfrac{1}{D}\right|$ est bornée inférieurement. Sans perde de généralité supposons que $\left|\dfrac{1}{D}\right|\geq 2$.

Soit la fonction$\dfrac{1}{|D_\varepsilon|}$ telle que $\dfrac{1}{|D_\varepsilon|} \geq 1$ et

$$\int_E \left|\frac{1}{D_\varepsilon}\right|^p - \left|\frac{1}{D}\right|^p dm < \varepsilon, \tag{5.12}$$

pour $\varepsilon > 0$. Choisissons η tel que $\left|\dfrac{1}{D_\varepsilon}\right| \leq \dfrac{1}{\eta}$ et désignons par $E_\pm$ et $\widetilde{E}_{\pm}l$ les proximités de ± 1, de la forme

$$E_\pm = \left\{t \in T,\ \ |t \pm 1| \leq \frac{\eta}{2}\right\}, \widetilde{E}_\pm = \{t \in T,\ \ |t \pm 1| < \eta\}.$$

Introduire une fonction $F_{\varepsilon,\,\eta}$ comme suit

$$F_{\varepsilon,\,\eta} = \begin{cases} \dfrac{1}{D_\varepsilon(t)}, & t \in T \ \setminus \widetilde{E}_+ \cup \widetilde{E}_- \\ \qquad |t \pm 1|^2, & t \in E_\pm \end{cases},$$

et pour $t \in \widetilde{E}_+ \cup \widetilde{E}_-$ est tel que

$$|t \pm 1|^2 \leq |F_{\varepsilon,\,\eta}(t)| \leq |D_\varepsilon(t)|.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \log \frac{1}{F_{\varepsilon,\,\eta}(0)} - \log \frac{1}{D_\varepsilon(0)} \leq \int_{\widetilde{E}_+ \cup \widetilde{E}_{--}} \log \left|\frac{D_\varepsilon(t)}{F_{\varepsilon,\,\eta}(t)}\right| dm \\ &\leq \int_{\widetilde{E}_+} \log \frac{1}{|t+1|^2} dm + \int_{\widetilde{E}_-} \log \frac{1}{|t-1|^2} dm = o(1)\,, \eta \to 0. \end{aligned}$$

Compte tenu de $(5.\ 12)$, nous obtenons

$$F_{\varepsilon,\,\eta}(0) = D(0) + O(1),\ \ \eta \to 0,\ \ \varepsilon \to 0. \tag{5.13}$$

Soit le produit de Blashke

$$b(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{t - \ t_k}{t \ \overline{t_k} - 1} \frac{\overline{t_k}}{|t_k|^2}, \ k = 1, \ 2....,$$

avec $t_k = \dfrac{1}{\Phi(z_k)}$, $k = 1,\ 2....,$ alors

$$\sup\left\{\left|b_{\infty}'(t)(t-1)^2\right|, \ t \in T\right\} < \infty.$$

Par conséquence, $(bF_{\varepsilon,\,\eta})' = b'F_{\varepsilon,\,\eta} + bF_{\varepsilon,\,\eta}' \in L^{\infty}$, et la série de Fourier de $bF_{\varepsilon,\,\eta}$converge vers cette fonction uniformément sur T.

Soit

$$BF_{\varepsilon,\,\eta}(t) = Q_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(t)\,t^n + t^{n+1}g_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(t)\,, g_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(t) \in H^{\infty}.$$

Posons

$$2^n p_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(z) = 2^n p_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(\Psi(\xi)) = \frac{\xi^{-n}Q_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(\xi) + \xi^n Q_{n,\,\varepsilon,\,\eta}\left(\dfrac{1}{\xi}\right)}{2^{\frac{1}{p}}},$$

alors on a l'estimation de la normre de $2^n p_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(z)$ pour la partie absolument continue de la mesure suivante :

$$\left\|\frac{2^n p_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(z(t))}{D_{\varepsilon}(t)}\right\|_{L^p} \leq \left\|\frac{t^{-n}F_{\varepsilon,\,\eta}(t)\,b(t) + t^n F_{\varepsilon,\,\eta}\left(\overline{t}\right)b\left(\overline{t}\right)}{2^{\frac{1}{p}}D_{\varepsilon}(t)}\right\|_{L^p} + \left\|\frac{t g_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(t) + \overline{t} g_{n,\,\varepsilon,\,\eta}\left(\overline{t}\right)}{2^{\frac{1}{p}}D_{\varepsilon}(t)}\right\|_{L^p}.$$

Le fait que $\|g_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(t)\|_{L^{\infty}} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow \infty$, et $\left|\dfrac{F_{\varepsilon,\,\eta}(t)}{D_{\varepsilon}(t)}\right| \leq 1$, nous donne

$$\left\|\frac{2^n p_{n,\,\varepsilon,\,\eta}(z(t))}{D_{\varepsilon}(t)}\right\|_{L^p} \leq 1 + O(1).$$

Comme $p_{n,\,\varepsilon,\,\eta}$ est uniformément borné, utilisant (5.11), on a

$$\left\| \frac{2^n p_{n,\ \varepsilon,\ \eta}\left(z\left(t\right)\right)}{D\left(t\right)} \right\|_{L^p} \leq 1 + C\varepsilon + O(1). \tag{5.14}$$

Finalement (5. 14) avec la propriété extrémale de $T_{n,\ p}$, et le fait que

$$p_{n,\ \varepsilon,\ \eta}\left(z\right) = \frac{bF_{\varepsilon,\eta}\left(0\right)}{2^{\frac{1}{p}}} z^n + ...,$$

nous donne

$$2^n m_{n\ ,\ p}\left(\sigma\right) \leq \frac{\left\| 2^n p_{n,\ \varepsilon,\ \eta}\left(\sigma\right) \right\|_{L^p}}{\frac{\left(bF_{\varepsilon,\ \eta}\right)\left(0\right)}{2^{\frac{1}{p}}}} \leq \frac{1 + C\varepsilon + O(1)}{\frac{\left(bF_{\varepsilon,\ \eta}\right)\left(0\right)}{2^{\frac{1}{p}}}}.$$

Lemme1 et (5. 13) donnent

$$\lim_{n\to\infty} 2^n m_{n,\ p}\left(\sigma\right) \leq \frac{2^{\frac{1}{p}}}{b\left(0\right) D\left(0\right)} = \frac{\left(\mu\left(\rho\right)\right)^{1/p}}{B\left(\infty\right)} = \left(\mu\left(\sigma\right)\right)^{1/p}.$$

La preuve est complète.

Théorème 5. 2

Soit la mesure $\sigma = \alpha + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \delta\left(z - z_k\right)$, *telle que* $\alpha \in A$. Associer à la mesure σ les fonctions D et B et les valeurs optimales $m_{n,\ p}\left(\sigma\right)$ et $\mu\left(\sigma\right)$ données par $(3.\ 5)$, $(5.\ 10)$, $(5.\ 4)$ et $(5.\ 6)$. Alors le on a l'asymptotique fort des polynômes $T_{n,\ p}$ suivant : *:*

$$\lim_{n\to\infty} 2^n m_{n,\ p}\left(\sigma\right) = \left(\mu\left(\sigma\right)\right)^{1/p}.$$

Preuve

<u>Première méthode</u>

Pour les fonctions extrémales φ_n^* , la relation (5.11) entraîne :

$$\left\| \varphi_n^* \right\|_{H^2(\Omega,\rho)}^p \leq const, \tag{4.15}$$

d'autre part, de la définition de $2^n m_{n,\ p}\left(\sigma\right)$, on a

$$2^n m_{n,\,p}\left(\sigma\right) = \|\varphi_n^*\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left|\varphi_n^*(z_k)\right|^p,$$

d'où

$$\|\varphi_n^*\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} \leq 2^n m_{n,\,p}\left(\sigma\right). \tag{4.18}$$

posons $M^* = \liminf \|\varphi_n^*\|^p_{H^p(\Omega,\rho)}$ et soit $\left\{\varphi_{n_k}^*\right\}$une sous suite de $\{\varphi_n^*\}$ telle que :

$$M^* = \lim_{n\to\infty} \left\|\varphi_{n_k}^*\right\|^p_{H^p(\Omega,\rho)}.$$

la relation (4.15) et le théorème 2.14 implique que $\{\varphi_n^*\}$ est une famille normale dans Ω; donc on peut toujours en extraire une sous suite uniformément convergente sur les compacts de Ω.Si on extrait cette sous suite de $\left\{\varphi_{n_k}^*\right\}$, on obtient une sous suite de $\{\varphi_n^*\}$, qu'on désigne par le même symbole $\left\{\varphi_{n_k}^*\right\}$ et ayant les propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\varphi_{n_k}^*\right\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} = M^*$
2. $\varphi_{n_k}^* \to \phi$ *uniformément sur les compacts de* Ω.

Alors d'aprés le lemme3.2 $\phi \in H^p\ (\Omega, p)$ et

$$\|\phi\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} \leq \liminf \left\|\varphi_{n_k}^*\right\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} = \liminf \|\varphi_n^*\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} \leq \liminf 2^n m_{n,\,p}\left(\sigma\right).$$

Notons encore, que comme les sommes

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left|\varphi_n^*(z_k)\right|^p,$$

sont toutes bornées par une constante on a :

$$\lim \varphi_n^*(z_k) = 0,$$

cela veut dire que la fonction $\phi\left(z\right)$ a encore les propriétés :

$$\phi(\infty)=1, \phi(z_k)=0, k=1,2,...$$

Nous avons donc

$$\|\phi\|^p_{H^p(\Omega,\ p)} \geq \mu(\rho),$$

Ceci avec lethéorème (4. 1) nous donne

$$(\mu(\rho))^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n\to\infty} 2^n m_{n,\ p}(\sigma) \leq \limsup_{n\to\infty} 2^n m_{n,\ p}(\sigma) \leq (\mu(\rho))^{\frac{1}{p}},$$

et par suite :

$$\lim_{n\to\infty} 2^n m_{n,\ p}(\sigma) = (\mu(\sigma))^{1/p}.$$

Ceci qui achève la démonstration.

Deuxième méthode

On pose $t_k = \dfrac{1}{\Phi(z_k)}$, $\xi = \Psi(t)$ *où* $t = e^{i\theta}$, alors $B(\xi) = b(\bar{t})$, et $B(\infty) = b(0) = \prod_{k=1}^{\infty} \left|\dfrac{1}{\Phi(z_k)^2}\right|$, avec

$$b(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{t - t_k}{t\ \overline{t_k} - 1} \frac{\overline{t_k}}{|t_k|^2},\ k = 1,\ 2.....$$

Maintenat soit l'integral

$$I_n = \int_0^{\pi} \left| \frac{2^{1/p} t^n T_{n,\ p}(\Psi(t)}{m_{n,\ p}(\sigma) D(t)} - \left(b(t) + \frac{t^{2n} b(\bar{t}) D(\bar{t})}{D(t)} \right) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi},$$

on le transforme comme suit :

$$I_n = \int_0^{\pi} \left| \frac{2^{1/p} t^n T_{n,\ p}(\Psi(t)}{m_{n,\ p}(\sigma) D(t)} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{\pi} \left| b(t) + \frac{t^{2n} b(\bar{t}) D(\bar{t})}{D(t)} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$-2\,\mathrm{Re} \int_0^{\pi} \frac{2^{1/p} t^n T_{n,\ p}(\Psi(t)}{m_{n,\ p}(\sigma) D(t)} \overline{\left(b(t) + \frac{t^{2n} b(\bar{t}) D(\bar{t})}{D(t)} \right)} \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{5.15}$$

$$= I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)}.$$

Evaluation de L'intégrale $I_n^{(1)}$:

Utilisant l'inégalité de HÖlder on a :

$$I_n^{(1)} \leq \left(\int_0^{\pi} \left|\frac{2^{1/p} t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{m_{n,\,p}\,(\sigma)\,D(t)}\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1-\frac{2}{p}}$$

$$= \left[\left(\int_0^{\pi} \left|\frac{T_{n,\,p}(\Psi(t)}{m_{n,\,p}\,(\sigma)}\right|^p |D(t)|^{-p} \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^2$$

$$\leq \left[\frac{1}{m_{n,\,p}\,(\sigma)} \left(\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} |T_{n,\,p}(x)|^p \,\rho\,(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^2 \leq 2. \tag{5.16}$$

Evaluation de L'intégrale $I_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} \left|b\,(t) + \frac{t^{2n} b\left(\bar{t}\right) D(\bar{t})}{D(t)}\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{\pi} |b\,(t)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{\pi} \left|b\left(\bar{t}\right)\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} + 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\pi} t^{-2n} b\,(t)\,\overline{\left(\frac{b\left(\bar{t}\right) D(\bar{t})}{D(t)}\right)}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= 2 + 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\pi} t^{-2n} b\,(t)\,\overline{\left(\frac{b\left(\bar{t}\right) D(\bar{t})}{D(t)}\right)}\frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned}$$

Quand $n \to \infty$ le dernier terme tend vers 0. Alors on a

$$I_2 = 2 + \alpha_n,\ \ o\grave{u}\ \alpha_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{5.17}$$

Evaluation de L'intégrale $I_n^{(3)}$:

Soit

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{2^{1/p} t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{m_{n,\, p}\,(\sigma)\, D(t)} \overline{\left(b\,(t) + \frac{t^{2n} b\left(\bar{t}\right) D(\bar{t})}{D(t)} \right)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2^{1/p} t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{m_{n,\, p}\,(\sigma)\, D(t)} \overline{b\,(t)} \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2^{1/p} t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{m_{n,\, p}\,(\sigma)\, D(t)} \overline{\left(\frac{t^{2n} b\left(\bar{t}\right) D(\bar{t})}{D(t)} \right)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \frac{2^{1/p} t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{m_{n,\, p}\,(\sigma)\, D(t)} \overline{b\,(t)} \frac{dt}{2\pi i t}.$$

On pose :

$$\begin{aligned} J_{n,l} &= 2 \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{D(t)} \left(b\,(t) - b_\ell\,(t) + b_\ell\,(t) \right) \frac{dt}{2\pi i t}. \\ &= 2 \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{D(t)} \left(b\,(t) - b_\ell\,(t) \right) \frac{dt}{2\pi i t} + 2 \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{D(t)} b_\ell\,(t) \frac{dt}{2\pi i t} \end{aligned} \tag{5.18}$$

avec

$$b_\ell\,(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{t - \ t_k}{t\ \overline{t_k} - 1} \frac{\overline{t_k}}{|t_k|^2},\ \ k = 1,\ 2....\ \ell,$$

est le produit de Blaschke fini avec les zéros sont $t_k = \dfrac{1}{\Phi\,(z_k)}$, $k = 1,\, 2....\ \ell$.

Appliquons l'inégalité de HÖlder au premier terme de () on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{D(t)} \left(b\,(t) - b_\ell\,(t) \right) \frac{dt}{2\pi i t} \\ \leq\ & \left(\int_0^{\pi} \left| \frac{2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{D(t)} \right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\pi} \left| b\,(t) - b_\ell\,(t) \right|^q \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \\ =\ & \frac{2^{1/p}}{m_{n,\, p}\,(\sigma)} \left(\int_0^{\pi} \left| 2^n t^n T_{n,\, p}(\Psi(t) \right|^p |D(t)|^{-p} \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\pi} \left| b\,(t) - b_\ell\,(t) \right|^q \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \\ =\ & \frac{2^{1/p+1}}{m_{n,\, p}\,(\sigma)} \left(\int_0^{\pi} \left| 2^n t^n T_{n,\, p}(x) \right|^p |D(t)|^{-p} \rho\,(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\pi} \left| b\,(t) - b_\ell\,(t) \right|^q \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq\ & 2^{1/p+1} \left(\int_0^{\pi} \left| b\,(t) - b_\ell\,(t) \right|^q \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Pour le dernier terme de() Utilisant le théorème de résidu on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} b_\ell\,(t)\,\frac{dt}{2\pi i t} &= \int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t) b_\ell\,(t)} \left|b_\ell\,(t)\right|^2 \frac{dt}{2\pi i t} \\
&= \frac{2^{1/p}}{2^n m_{n,\,p}\,(\sigma)\,D(0) b_\ell\,(0)} + \frac{2^{1/p}}{m_{n,\,p}\,(\sigma)} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{t_k^{n-1} T_{n,\,p}(z_k)}{D\,(t_k)\,b_l'\,(t_k)}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

le dernier terme peut se transfoeme comme suit

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m_{n,\,p}\,(\sigma)} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{t_k^{n-1} T_{n,\,p}(z_k)}{D\,(t_k)\,b_\ell'\,(t_k)} \\
\leq\ & \frac{1}{m_{n,\,p}\,(\sigma)} \left[\sum_{k=1}^{l} \left|T_{n,\,p}(z_k)\right|^p A_k\right]^{\frac{1}{p}}, \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\left|\frac{1}{D\,(t_k)\,b_\ell'\,(t_k)}\right| \frac{\left|t_k^{n-1}\right|}{A_k^{\frac{1}{p}}}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \\
\leq\ & , \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\left|\frac{1}{D\,(t_k)\,b_\ell'\,(t_k)}\right| \frac{\left|t_k^{n-1}\right|}{A_k^{\frac{1}{p}}}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} \left(b\,(t) - b_\ell\,(t)\right) \frac{dt}{2\pi i t} = \frac{2^{1/p}}{2^n m_{n,\,p}\,(\sigma)\,D(0) b_\ell\,(0)} + \beta_n.$$

Choisissons premièrement ℓ assez grand,et puis n, nous concluons que

$$\int_0^{\pi} \frac{2^n t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{D(t)} \left(b\,(t) - b_\ell\,(t)\right) \frac{dt}{2\pi i t} = \frac{2^{1/p}}{2^n m_{n,\,p}\,(\sigma)\,D(0) b\,(0)} + O(1). \tag{5.21}$$

Remplacant (I_1), (I_2) et (I_3) dans (I_n) on obtient :

$$0 \leq I_n \leq 2 + 2 + \alpha_n + \frac{2^{1/p}}{2^n m_{n,\,p}\,(\sigma)\,D(0) b\,(0)} + O(1), \tag{5.22}$$

où $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Finalement on a

$$\liminf 2^n m_{n,\, p}\,(\sigma) \geq \frac{2^p}{D(0)b\,(0)} = \frac{[\mu\,(\rho)]^{\frac{1}{p}}}{D(\infty)} = (\mu\,(\sigma))^{1/p}\,.$$

Ceci avec le **Théorème 5. 1** achève la démonstration.

Corollaire 5. 1

Sous les hopytheses du théorème 5. 1 on a l'asymptotique fort des polynômes $T_{n,p}$ suivant :

$$T_{n,\, p}\,(z) = \left(\frac{\Phi\,(z)}{2}\right)^n B(z) \frac{D\left(\dfrac{1}{\Phi\,(z)}\right)}{D\,(0)}\,[1 + \chi_n\,(z)]\,;$$

avec, $\varepsilon_n(z) \to 0$ *uniformément sur les sous -ensembles compacts de* Ω.

Preuve

Soit l'estimation de l'integrale suivante :

$$\int_0^{\pi} \left| \left[\frac{2^{1/p} t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{m_{n,\, p}\,(\sigma)\, D(t)} - \left(b\,(t) + \frac{t^{2n} b\,(\bar{t})\, D(\bar{t})}{D(t)} \right) \right] \frac{1}{1 - \omega \bar{t}} \frac{dt}{2\pi i t} \right|^2$$

$$\leq \frac{1}{1 - |\omega|} \int_T \left| \left[\frac{2^{1/p} t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{m_{n,\, p}\,(\sigma)\, D(t)} - \left(b\,(t) + \frac{t^{2n} b\,(\bar{t})\, D(\bar{t})}{D(t)} \right) \right] \frac{d\theta}{2\pi} \right|^2$$

$$= \frac{1}{1 - |\omega|} I_n. \tag{5.23}$$

Une conséqence direct de (22) et le théorème 5. 2 on a :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Donc

$$\int_0^{\pi} \left| \left[\frac{2^{1/p} t^n T_{n,\, p}(\Psi(t)}{m_{n,\, p}\,(\sigma)\, D(t)} - \left(b\,(t) + \frac{t^{2n} b\,(\bar{t})\, D(\bar{t})}{D(t)} \right) \right] \frac{1}{1 - \omega \bar{t}} \frac{dt}{2\pi i t} \right| = O(1). \tag{5.24}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \left|\left[\frac{2^{1/p}t^n T_{n,\,p}(\Psi(t)}{m_{n,\,p}(\sigma)\,D(t)}-\left(b\,(t)+\frac{t^{2n}b\left(\bar{t}\right)D(\bar{t})}{D(t)}\right)\right]\frac{1}{1-\omega\bar{t}}\frac{dt}{2\pi it}\right|\\ =\quad &\int_T \chi_n\left(\Psi(t)\right)\frac{1}{1-\omega\bar{t}}\frac{dt}{2\pi it}-\int_T\left|\left[\left(\frac{t^{2n}b\left(\bar{t}\right)D(\bar{t})}{D(t)}\right)\right]\frac{1}{1-\omega\bar{t}}\frac{dt}{2\pi it}\right|.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Applicons la formule de Cauchy au premier terme précédent on a

$$\int_T \chi_n\left(\Psi(t)\right)\frac{1}{1-\omega\bar{t}}\frac{dt}{2\pi it}=\chi_n\left(z\right),\ \ z=\Psi(w)\in\Omega.\tag{5.26}$$

Comme le dernier terme de (5. 25) tend vers 0 quand $n\to\infty$, et de (5. 24) et (5. 25) et (5. 26) .On obtient l'assertion du Corollaire.

Bibliographie

[1] **N. I. AKHIEZER,** *Theory of approximation,* F. Ungar, 1956 (translated from the Russian)

[2] **M. BelloHernandez, F. Marcellan and J. Minguez Ceniceros**. *Pseudo uniform convexity in H^P and some extremal problems on Sobolev spaces.* Complex Variables theory and Application, 48 (2003), 429-440.

[3] **M. BelloHernandez, F. Marcellan and J. Minguez Ceniceros ;** *Strong asymptotic behavior for extremal polynomials with respect to varying measures on the unit circle*, Journal of Approximation Theory, 125(2003), 131-144.

[4] **S. N. Bernstein,** *Sur les polynomes orthogonaux relatifs a un segment fini,* J. Math., 9 (1930), pp. 127–177, 10 (1931), pp. 219–286.

[5] **D. Braess,** *Non linear approximation theory,* volume 7 of Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[6] **J. B. Conway,** *Function of one complex variable,* Springer-Verlag, 1978

[7] **G. Darboux,** *"Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série"* Journal. Math. (3) , vol. 4 (1878), pp. 5–56, 377–416.

[8] **P. L Duren,** *Theory of H^P Spaces,* Academic Press, New York, 1970.

[9] **M. FEKETE and J. L. WALSH,** *On the asymptotic behavior of polynomials with extremal properties, and of their zeros*, J. Analyse Math. 4 (1955) 49-87

[10] **G. Freud,** O*rthogonal Polynomials*, Pergamon Press, Oxford and New York, 1966.

[11] **Geronimus. Ya. L,** *Some extremal problems in $L_p(\sigma)$ spaces.* Math. Sbornik. 31 (1952) 3-26 [In Russian].

[12] **Geronimus. Ya. L,** *"Polynomials orthogonal on a circle and interval"*. Pergamon Press New York (1960).

[13] **Gontchar A. A,** *On convergence of Pade approximants for certain class of meomorphic functions*, Mat. Sb. 97 (1975), 4 ; English translation : Math. USSR-sb. 26. n°4 .

[14] **Hardy. G. H,** *On the mean modulus of an analytic function.* Proc. London Mat. Soc. 14 (1915) 269-277.

[15] **E. Heine,** *Handbuch der Kugelfunktionen* (G. Reimer, Berlin, 1878–81).

[16] **E. Hilb,** *"¨Uber die Laplacesche Reihe,"* Math. Zeitchrift, vol. 5 (1919), pp. 17-25 ; vol. 8 (1920), pp. 79-90.

[17] **Hoffman. K,** *"Banach spaces of analytic functions".* Englewood Cliffs. N. J-Prentice-Hall. Inc. (1962).

[18] **B. John . Garnett,** *Bounded analytic functions,* Academic Press, 1981. MR 0628971 .

[19] **V. A. Kaliaguine,** *On asymptotics of L_p extremal polynomials on a complex curve* $(0 < p < \infty)$. Journal of Approximation Theory. 74 (1993) 226-236.

[20] **Kaliaguine, V. A.** *A note on the asymptotics of orthogonal polynomials on a complex arc : the case of a mesure with a discrete part,* J. Approx. Theory, 80, 138-145 (1995).

[21] **M. V. Keldysh,** . Selected Papers, Academic Press, Moscow. 1985. [In Russian]

[22] **R. Khaldi,** *Sur le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle ou sur le segment.* Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Annaba (2001*).*

[23] **R. Khaldi,** *Strong Asymptotics Of Orthogonal Polynomials on the segment* $[-1,\ 1]$ *: the case of measure with infinite discrete Part.* 5^{th}international conference of functio-

nal analysis and approximation theory. Acquafreda di maratea. Potenza Italy, June 16-23, 2004.

[24] **R. Khaldi,** *Strong asymptotics for L_p extremal polynomials off a complex curve,* J. Appl. Math. 2004 (2004), no 5, 371-378.

[25] **R. Khaldi,** *Strong asymptotics for L_p extremal polynomials off a circle.* Demonstratio Mathematica, Vol 38, N°3, 623-632, (2005).

[26] **R. Khaldi,***Szego Asymptotics of Extremal Polynomials on the Segment [-1, +1] : the Case of a Measure with Finite Discrete Part,* GEORGIAN MATHEMATICAL JOURNAL, 2007, VOL 14; NUMB 4, pages 673-680.

[27] **R. Khaldi and A. Boucenna,** *Strong asymptotics of extremal polynomials on the Segment on the presence of denumerable set of mass points*, REVUE D'ANALYSE NUMERIQUE ET DE THEORIE DE L'APPROXIMATION, 2011, Tome 40, No 1, pp. 38–46.

[28] **A. Kolmogorov et S. Fomine,** *"Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle".* Editions Mir. Moscou (1977).

[29] **P. Koossis,** *"Introduction to H^p Spaces".* London Math. Soc. Lecture Notes Series. Vol 40. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980).

[30] **P. P. Korovkin ,** *On polynomials orthogonal on a rectifiable curve with respect to a weight function.* Math. Sbornik. 9 (1941) 469-484 [In Russian].

[31] **M. G, Krein,** *On generalisation of some investigations of G. Szegö. V. Smirnoff and A. Kolmogorov.* C. R. (Doklad) Acad. Sci. URSS. 46 (1945) 91-94.

[32] **X. Li and K. Pan,** *Asymptotics for Lp extremal polynomials on the unit circle.* J. Approx.Theory 67(1991), No. 3, 270–283.

[33] **Li. X and Pan. K,** *Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to measure with discrete part off the unit circle.* Journal of Approximation Theory. 79 (1994) 54-71.

[34] **G. López, and H. Pijeira,** *Zeros location and n-th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory 99 (1999), 30-43.

[35] **D. S. Lubinsky and E. B. Saff,** *Strong asymptotics forLp extremal polynomials (1 $< p < \infty$) associated with weights on [-1 ; 1],* Approximation theory, Tampa (Tampa,

Fla., 1985–1986), 83–104, Lecture Notes in Math., 1287, Springer, Berlin, 1987.

[36] **F. G. Mehler,** *Uber die Verteilung der statischen Elektrizit˜t in einem yon zwei Kugelimlotten begrenzten KSrper.* Ibid. vol. 68 (1868), pp134-150.

[37] **G.V. Milovanovi c, D. S. Mitrinovi c, Th. M. Rassias,** *Topics in polynomials : extremal problems, inequalities, zeros*, World Scientific Pub Co. Pte. Ltd. (1994).

[38] **F. Nazarov, A. Volberg and P. Yuditskii,** *Asymptotics of orthogonal polynomials via the Koosis theorem.* Math Res Lett, 13 5-6 (2006), pp. 975–983.

[39] **P. Nevai,** *Orthogonal polynomials,* Memoirs Amer. Math. Soc., Vol. 18, No. 213, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.

[40] **P. Nevai and Géza Freud,** *Orthogonal polynomials and Christoffel functions : A case study.* J. Approx. Theory 48 (1986), pp. 3–167

[41] **P. Nevai,** *Orthogonal Polynomials, Theory and Practice,* NATO ASI Series 294, Kluwer Academic, Dordrecht (1990)

[42] **E. M. Nikishine,** *Discret Sturm-Liouville operators and some problems of function theory*, Trudy Sem. Petrovsk. 10 (1984), 3-77 ; J Soviet Math. 35 (1986), 26-2744.

[43] **F. Peherstorfer and P. Yuditskii,** *Asymptotics of orthonormal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points.* Proc. Amer. Math. Soc. 129(2001), No. 11, 3213–3220 (electronic).

[44] **E.A. Rakhmanv ,** *On the asymptotics of ratio of orthogonal polynomials I, II ;* Math. USSR sb. 32 (1977), 199-213 and Math. USSR sb. 46(1983), 105-117.

[45] **T. J. RIVLIN,** *Best uniform approximation by polynomials in the complex plane,* in Approximation Theory III, E. W. Cheney, ed., Academic Press, New York,1980

[46] **W. Rudin,** *"Real and complex Analysis"*. McGraw-Hill. New York (1968).

[47] **V. J. Smirnov,** *Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe.* Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad. 2. (1928) 155-179.

[48] **V. J. Smirnov,** *Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent.* Bulletin de l'Académie des Sciences de L' U. R. S. S. (1932) 337-372.

[49] **V. J. Smirnov, and N. A. Lebedev,** *"The Constructive Theory of Functions of a complex Variable". N*auka. Moscow. (1964) [in Russian] ; M. I. T. Press. Cambridge. MA (1968) [Engl. transl].

[50] **P. Souetine,** *Polynômes orthogonaux sur un contour.* Russian Math. Surveys. T. 21 (1966) [En Russe].

[51] **D. Stephen. Fisher**, *Function theory on planar domain :,* a second course in complex analysis, Dover, 1983.

[52] **G. Szegö,** *Uber Orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen Ebene gehoren.* Mathematische zeitchrift. 9 (1921) 218-270.

[53] **G. Szegö,** *Bemerkungen zu einen Satz von J. H. Grace Uber Wurzeln algebraischer Gleighungen.* Math 13(1922), 28-55.

[54] **G. Szegö, and U. Grenander,** *Toeplitz forms and their applications.* Berkley Los Angeles (1958).

[55] **G. Szegö,** *"Orthogonal Polynomials"*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. ed. American Math. Society, Providence, RI. 23 (1975).

[56] **J.P. Thiran, C. Detaille,** *Chebyshev polynomials on circular arcs in the complex plane*, pp. 771-786

in Progress in Approximation Theory (P. Nevai & A. Pinkus, editors), Ac. Press, 1991.

[57] **J. L. Walsh,** *The approximation of harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions,* Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1929), 499-544.

[58] **J. L. Walsh,** *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain,* vol. XX, 3rd ed, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Amer. Math. Society, Providence 6, RI, 1960

[59] **H. Widom,** *Polynomials associated with measures in the complex plane,* J. Math. Mech. 16. (1967), 997-1013

[60] **H. Widom,** *Extremal polynomials associated with a system of curves and arcs in the complex plane*. Adv. Math. 3 (1969) 127-232.

[61] **A. Zygmund,** *Trigonometric series*. 2nd ed. New york. Cambridge University Press (1959).