

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

THESE de DOCTORAT

Spécialité :

Mathématiques Appliquées

Présentée par

Taallah Frekh

Titre :

Etude d'une coque de Naghdi en contact avec un corps rigide

Soutenue le : 05/06/2011

devant le jury composé de :

Nouri Fatma Zohra Directrice de Thèse

Blouza Adel Directeur de Thèse

Khodja Brahim Président de Thèse

Moumeni Abdelkader Examineur de Thèse

Ayadi Abdelhamid Examineur de Thèse

Aissaoui Mohamed Zine Examineur de Thèse

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Fatma-Zohra Nouri et au Dr. Adel Blouza . Leurs conseils précieux ainsi que leurs encouragements amicaux ont été pour moi, durant ces années de travail sous leurs directions, une aide inestimable.....

Je voudrais également remercier très vivement Professeur Christine Bernardi directrice de recherche au Laboratoire d'Analyse Numérique (LJLL) de l'Université Pierre et Marie Curie Paris 6 pour sa disponibilité, son dévouement constant et l'atmosphère de travail agréable dont j'ai bénéficié durant mes stages dans ce laboratoire, dans le cadre d'un accord programme du projet Tassili.

Monsieur le professeur Khodja Brahim m'a fait le grand honneur de présider le jury. Je l'en remercie très vivement.

Mes remerciements s'adressent également aux professeurs Chaoui Kamel, Sissaoui Hocine, Ayadi Abdelhamid, Moumeni Abdelkader et Aissaoui Mohamed Zine qui ont généreusement accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques

et critiques m'ont été très bénéfiques.

Merci à tous les collègues du département de Mathématiques, ainsi ma petite famille.

Introduction générale

Le sujet de ce travail est la modélisation, l'analyse et la simulation de problèmes de contact en mécanique des solides. On commence par introduire les équations modélisant le problème de contact unilatéral avec frottement en élasticité accompagnées d'un historique.

Dans ce qui suit les lettres (par exemple \mathbf{u}, \mathbf{v}) désignent les vecteurs, alors que les lettres capitales (par exemple $\mathbf{V}, \mathbf{K}, \dots$) représentent des ensembles fonctionnels concernant les champs de vecteurs. Comme d'habitude, on note par $(L^2(\cdot))^d$ et par $(H^s(\cdot))^d$, $s \in \mathbb{R}$, $d = 1, 2, 3$ les espaces de Lebesgue et Sobolev en dimension un, deux ou trois (voir [1] pour la définition de $(H^s(\cdot))^d$, $s \in \mathbb{R}$). La norme usuelle de $(H^s(D))^d$ (norme duale si $s < 0$) est notée par $\|\cdot\|_{s,D}$ et on garde la même notation pour $d = 1$, $d = 2$ ou $d = 3$. Pour simplifier, la norme de $(L^2(D))^d$ est notée par $\|\cdot\|_D$ pour $d = 1$, $d = 2$.

0.1 Contact et frottement en mécanique des solides

Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent dans l'industrie, notamment dans les structures mécaniques, ils sont variés, fortement

non linéaires et complexes. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment réagissent les structures lorsqu'elles subissent ces forces. Le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure, sa déformation, son mouvement,..... Les problèmes de contact étant non linéaires, la modélisation des phénomènes de contact pose des difficultés.

L'approximation numérique de problèmes de contact avec frottement se produisant en mécanique des structures est généralement traité avec la méthode des éléments finis (voir [12,13,14]). En effet, elle est facile à implémenter en pratique et elle est aussi précise d'un point de vue théorique. Une étude détaillée de plusieurs méthodes par éléments finis mixtes pour le problème de contact sans ou avec frottement peut être trouvé dans [12]. L'analyse numérique et la convergence ont été étudiées dans [13].

Il existe diverses formulations spécifiques de problèmes de contact fournissant la base pour une méthode d'analyse numérique. On va présenter dans un premier temps le problème du contact avec frottement dans le cadre de l'élasticité linéaire. Après quelques rappels sur le problème d'élasticité, on introduira les conditions de contact puis de frottement sur différentes lois.

0.2 Problème de l'élasticité linéarisée

Nous nous limitons au cas d'un solide élastique frottant sur une surface rigide

plane immobile pour simplifier la présentation. L'introduction de géométries plus complexes fait apparaître des problèmes délicats dans la détermination de la surface de contact.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine polygonal borné représentant la configuration de référence d'un corps élastique. Les ensembles Γ_D , Γ_N et Γ_C forment une partition disjointe de la frontière régulière $\partial\Omega$. Le corps est soumis à des forces volumiques, par exemple son poids. Le champ de déplacement est connu sur la partie de mesure non nulle Γ_D . On peut par exemple supposer que le solide est encastré sur Γ_D . La partie Γ_N est soumise à une condition de Neumann. La partie restante Γ_C est la "zone de contact" avec ou sans frottement entre le corps et une fondation rigide plane.

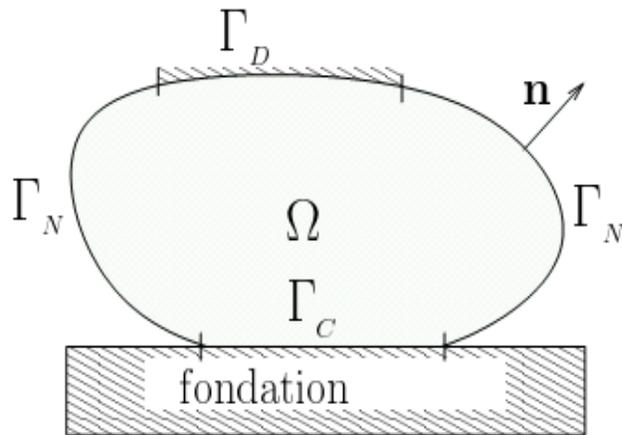


FIG. 1 – Description de Ω

La loi de comportement de l'élasticité linéaire reliant le tenseur des contraintes $\sigma(u)$ et le tenseur des déformations linéarisées $\varepsilon(u) = (\nabla u + {}^t \nabla u) / 2$ est :

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u) \quad (1)$$

Notons par $u = (u_i)_{1 \leq i \leq 2}$ le vecteur déplacement, a_{ijhk} les composantes du tenseur de Hooke A du quatrième ordre et par $\sigma = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq 2}$ le tenseur de contraintes tel que :

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijhk} \frac{\partial u_h}{\partial x_k}, \quad i, j, h, k \in \{1, 2\} \quad (2)$$

où on adopte la convention de sommation des indices répétés. Les fonctions $a_{ijhk} \in L^\infty(\Omega)$ représentent les propriétés élastiques du matériau. On suppose que A est symétrique : $a_{ijhk} = a_{jihk} = a_{hki j}$.

Un résultat important est l'inégalité de Korn :

Théorème 0.2.1

Soit Ω un domaine régulier borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 . Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $v \in (H^1(\Omega))^n$, on a :

$$\|v\|_{1,\Omega} = C \left(\int_{\Omega} (\varepsilon(v) : \varepsilon(v)) d\Omega + \|v\|_{\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

et : désigne le produit scalaire dans l'espace des tenseurs symétriques du second ordre.

Lorsque Γ_D est de mesure nulle, des difficultés supplémentaires apparaissent (voir [33]). On supposera par la suite que Γ_D a une mesure superficielle non nulle. On a alors le résultat suivant qui découle de l'inégalité de Korn.

Lemme 0.2.2

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 . Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$\int_{\Omega} (\varepsilon(v) : \varepsilon(v)) d\Omega \geq C \|v\|_{V_0}^2 \quad (4)$$

pour tout v dans $V_0 = \{v \in (H^1(\Omega))^n \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$.

Ainsi la condition d'ellipticité de A a lieu : $\exists \alpha > 0$ tel que : $a_{ijhk} \xi_{ij} \xi_{hk} \geq \alpha |\xi|^2$, $\forall \xi_{ij} = \xi_{ji}$

Pour simplifier, le corps est encastré sur Γ_D . Pour un problème d'élasticité sans contact ni frottement, le déplacement $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ du corps satisfait aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma(u) + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u) = A\varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (5)$$

où $f = (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ représente la densité des forces volumiques (poids), $g = (g_1, g_2) \in (L^2(\Gamma_N))^2$ désigne les forces surfaciques imposées sur Γ_N , $n = (n_1, n_2)$

est la normale unitaire sortante de Ω sur $\partial\Omega$, $\sigma : \Omega \longrightarrow S_2$ où S_2 désigne l'espace des tenseurs symétriques du second ordre, le tenseur linéarisé des déformations $\varepsilon(u)$ et div représente l'opérateur divergence des fonctions à valeurs vectorielles. La première équation correspond à l'équation d'équilibre à laquelle on ajoute la relation de comportement et les conditions de Dirichlet et Neumann.

A fin d'introduire les équations sur la zone de contact, on choisit pour vecteur unitaire tangentiel $t = (-n_2, n_1)$. Sur Γ_C , on décompose le déplacement et le vecteur de contraintes en composantes normale et tangentielle comme suit :

$$u = u_n n + u_t t \quad \text{et} \quad \sigma(u) = \sigma_n(u) n + \sigma_t(u) t \quad (6)$$

pour donner un sens à la décomposition précédente, on suppose que Γ_C est de régularité C^1 . On suppose aussi qu'il n'y a pas de distance initiale entre le solide et la fondation rigide sur Γ_C .

Les relations d'interaction dans la direction normale sont associées au problème de contact unilatéral et celles dans la direction tangentielle au problème de frottement. Pour étudier l'interaction dans la direction normale, on s'intéresse d'abord au cas du contact unilatéral sans frottement.

0.3 Conditions de contact

La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact est assez récente. C'est en 1933 que Signorini pose le problème général de l'équilibre d'un

corps élastique en contact sans frottement sur une fondation rigide. Les conditions de contact unilatéral ont été formulées par Signorini [87] en 1959. Il s'ensuit le travail de Fichera [56] en 1972 où le problème de Signorini a été résolu en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Le problème de contact unilatéral sans frottement montre la non-linéarité sur le bord correspondant à la non-pénétration des matériaux sur la zone de contact ce qui mène à une inégalité variationnelle du premier ordre. Fichera donne la preuve de l'existence et de la régularité d'une solution faible et discute le problème de l'unicité. Dans [14], une synthèse concernant le cas d'un solide déformable en contact avec un socle rigide est présentée. Duvaut et Lions [54] présentent la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact accompagnée des résultats d'existence et d'unicité. Ciarlet et Necas (1984, 1987) ont aussi traité le cas sans frottement. la condition de contact unilatéral est exprimée par la relation de complémentarité suivante :

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n(u) \leq 0, \quad \sigma_n(u) u_n = 0 \quad (7)$$

Cette condition exprime qu'en cas de contact c'est le corps qui se déforme et qu'il ne peut y avoir d'interpénétration entre le solide et la fondation. De plus, la réaction du support sur le solide est dirigée vers l'intérieur du solide. Si le point est en contact alors $u_n = 0$ et $\sigma_n(u) < 0$ et si le point quitte la fondation $\sigma_n(u) = 0$ et $u_n < 0$.

L'absence des forces tangentielles de frottement est donnée par :

$$\sigma_t(u) = 0. \tag{8}$$

Cette façon de voir le contact implique que la force de contact tangentielle est nulle dans la zone de contact. On est dans le cas d'un glissement parfait. Néanmoins cette force tangentielle est non nulle dans la plupart des contacts réels. On introduit alors des lois complémentaires, les lois de frottement qui relient la composante tangentielle aux autres variables du système.

0.4 Conditions de frottement

Les premiers travaux sur le frottement ont été réalisés par Léonard de Vinci au début du XVI^{ème} siècle. Il donne ainsi la première valeur (0.25) du coefficient de proportionnalité entre la force de frottement et le poids du corps. La compréhension des mécanismes entrant en jeu est restée très lacunaire et il faut attendre deux siècles pour qu'Amontons (1699) et Coulomb (1785) reprennent et développent les études de Léonard de Vinci en énonçant les premières lois de frottement. Historiquement, G. Amontons proposa une loi de proportionnalité entre les composantes normale et tangentielle des contraintes. Coulomb confirme les lois d'Amontons à partir d'expériences. On n'abordera pas ici les lois de frottement dynamique développées par Euler grâce à des expériences de solides glissant sur un plan incliné. Les travaux de Bowden et Tabor [42] font une synthèse et améliorent les résultats obtenus sur

l'analyse du frottement.

Plusieurs lois de frottement existent. Nous allons énoncer quelques lois associés aux phénomènes de contact et de frottement dans le cadre d'un contact entre un corps déformable et une fondation rigide. En considérant le frottement additionné au problème de contact, des non-linéarités supplémentaires doivent être prises en compte. Énonçons tout d'abord la plus simple.

0.5 Frottement de Tresca

La plus simple (en apparence) est la loi de Tresca. Dans [54], le frottement a été rajouté aux problèmes de contact et le problème a été écrit sous forme d'un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique dans le cas d'un frottement de Tresca. Les conditions de frottement de Tresca [13] sont :

$$si \quad u_t = 0, \quad |\sigma_t(u)| \leq \mathbf{s}, \quad (9)$$

$$si \quad u_t \neq 0, \quad \sigma_t(u) = -\mathbf{s} \frac{u_t}{|u_t|} \quad (10)$$

où $\mathbf{s} \in L^\infty(\Gamma_C)$, $\mathbf{s} \geq 0$ désigne le seuil de glissement fixe qui est supposé connu et qui ne dépend pas de la contrainte normale. Le fait que la contrainte normale n'apparaisse pas dans la limite de glissement limite l'utilisation de cette loi. Le problème est plutôt réservé aux applications où la contrainte tangentielle est connue sur le bord de frottement. Le problème de contact avec le frottement de Tresca admet une unique solution.

0.6 Frottement de Coulomb

Pour décrire la dépendance du seuil \mathbf{s} à l'intensité des efforts normaux, on utilise une loi de Tresca dont le seuil \mathbf{s} est proportionnel à l'effort normal. Il s'agit de la loi de Coulomb. La loi a été développée au départ sur des modèles avec des solides rigides puis ensuite sur des corps déformables avec notamment les travaux de Duvaut-Lions [46] sur les inégalités variationnelles. En notant μ le coefficient de frottement qui dépend des matériaux en présence ($\mu \geq 0$), la condition de frottement de Coulomb est :

$$\text{si } u_t = 0, \quad |\sigma_t(u)| \leq -\sigma_n(u) \mu, \quad (11)$$

$$\text{si } u_t \neq 0, \quad \sigma_t(u) = \sigma_n(u) \mu \frac{u_t}{|u_t|} \quad (12)$$

Cette condition représente deux situations physiques qui sont l'adhérence quand $u_t = 0$ et le glissement quand $u_t \neq 0$. En effet, quand le multiple du module de la composante normale est atteint, le corps peut glisser dans la direction de la composante tangentielle. Le coefficient de frottement est le rapport maximal entre force tangentielle et force normale au point de contact. Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur force de contact a la forme d'un cône dont l'ouverture dépend du coefficient de frottement : il s'agit du cône de Coulomb. L'enveloppe de ce cône est la surface de seuil de glissement.

Il existe plusieurs lois dérivées intégrant un coefficient de frottement μ variable (par exemple par rapport au déplacement tangentiel).

Remarque 0.6.1

Quand $\mu = 0$, on obtient $\sigma_t(u) = 0$ sur Γ_C . Il s'agit du cas sans frottement.

0.7 Frottement avec déflexion ou compliance normale

Ces lois ont été initiées par J.-T. Oden et J.-A.-C. Martins [73] et [74] en 1985.

Ils proposent une loi de frottement qui inclue une non-proportionnalité entre la force normale et la force tangentielle de frottement et prend en compte l'écrasement normal entre le corps et la fondation en se basant sur les études expérimentales de [43].

Dans cette sous-section, On considère un corps élastique qui occupe une région Ω de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$). Le corps est fixé sur une partie Γ_D du bord $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_C$, peut entrer en contact avec la fondation réactive sur la partie Γ_C et est soumis à des forces volumiques $f \in (L^2(\Omega))^n$. Sur la surface de contact on utilise une condition de compliance normale. Le problème de contact et frottement avec compliance normale en élasto-statique est de trouver le champ de déplacement u satisfaisant les équations auxquelles on ajoute la relation de comportement :

$$\operatorname{div} \sigma(u) + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (13)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (14)$$

Alors les conditions de compliance normale avec frottement sur Γ_C sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_n(u) = -c_N (u_n)_+^{m_N} \\ \text{si } u = 0, \quad |\sigma_t(u)| \leq c_T (u_n)_+^{m_T} \\ \text{si } u \neq 0, \quad \sigma_t(u) = c_T (u_n)_+^{m_T} \frac{u_t}{|u_t|} \end{array} \right. \quad (15)$$

où $(\cdot)_+$ désigne la partie positive. Ainsi $(u_n)_+$ représente la pénétration du corps dans la fondation. les constantes $m_N \geq 1$, $m_T \geq 1$ ainsi que les coefficients de compliance positifs c_N et c_T dans $L^\infty(\Gamma_C)$ désignent des paramètres d'interface caractérisant le comportement vis à vis du contact entre le corps et la fondation rigide. Les équations aux dérivées partielles associées [40] présentent de nombreuses difficultés mathématiques qui demeurent irrésolues.

Remarque 0.7.1

Le cas $m_N = m_T$ correspond au modèle de frottement de Coulomb où le coefficient de frottement vaut $\frac{c_T}{c_N}$.

Table des matières

1	Description de la géométrie d'une coque mince	23
1.1	Définition de la surface moyenne	23
1.2	Définition géométrique de la coque non déformée	30
2	Le modèle linéaire de Naghdi	31
2.1	Définition d'une coque déformée	31
2.2	Déplacement d'un point de la coque	33
2.3	Tenseur de déformation de la coque	35
2.4	Tenseur de contraintes de la coque	37
2.5	Energie de déformation de la coque	38
2.6	Energie potentielle des charges extérieures	40
2.7	Formulation variationnelle	40
2.8	Existence et unicité d'une solution pour le modèle de Naghdi	47

3	Problème de contact d'une coque de Naghdi avec un corps rigide	53
3.1	Formulation du problème de contact	53
3.2	Formulation variationnelle du problème de contact	58
3.3	Existence et unicité de la solution du problème de contact	59
4	Approximation	68
4.1	Approximation du modèle de Naghdi par la méthode des éléments finis	68
4.2	Discrétisation du problème réduit	72
4.3	Simulations numériques	77

Conclusion et Perspectives

Bibliographie

Introduction

Une coque est un milieu continu tridimensionnel pour lequel une dimension, l'épaisseur, est relativement petite par rapport aux deux autres. Les coques et leurs assemblages font partie d'une grande variété de structures élastiques du plus grand intérêt pour l'ingénierie contemporaine : carrosseries, coques de navires, fuselages, ailes d'avions, tours de refroidissement, etc.

La modélisation mathématique et l'analyse numérique de problèmes de corps élastiques "tridimensionnels" sont maintenant bien maîtrisées. Néanmoins, dans le cas de structures minces comme les coques, les méthodes numériques bien adaptées au cas tridimensionnels échouent, en raison du paramètre épaisseur relativement petit. Il est alors naturel de songer à remplacer les modèles tridimensionnels par des modèles bidimensionnels posés sur la surface moyenne de la coque, pour des raisons de coût de calcul. Les pionniers de ce type d'approche sont Kirchhoff [1876] et Love[1934]. La dérivation des modèles de coques est un sujet ancien qui à été largement développé dans les années cinquante en Union Soviétique et aux Etats-Unis dans les années soixante et soixante-dix. Ce sujet a connu un vif regain d'intérêt en France à la suite des travaux de Sanchez-Palencia [1989] .

Sous l'action de charges suffisamment petites, la coque se déforme suivant les lois

habituelles de l'élasticité tridimensionnelle.

On connaît deux familles différentes de modèles linéaires pour les coques minces élastiques. La première famille s'inscrit dans l'approche de Kirchhoff-Love. Elle fait appel aux hypothèses dites de Kirchhoff-Love, à savoir les normales à la surface moyenne de référence sont transformées en des normales à la surface moyenne déformée et que la distance entre un point et la surface moyenne reste constante au cours de la déformation de la coque. En tenant compte de ces hypothèses, Koiter [1970] a proposé un modèle bidimensionnel pour les coques minces linéairement élastiques où l'inconnue du problème est le champ de déplacements des points de la surface moyenne de la coque.

Une seconde famille connue de théories de coques est basée sur l'approche de surface de E. et F. Cosserat [1909]; elle a été, entre autres, développée par Naghdi [1963, 1972] qui a présenté un modèle prenant en compte les effets de cisaillement transverse, tout en respectant l'hypothèse de contrainte plane et celle de la conservation de la distance entre un point et la surface moyenne au cours de la déformation. Sous ces hypothèses et par la détermination du déplacement des points de la surface moyenne ainsi que celle de la rotation du vecteur normal unitaire à cette surface, le modèle de Naghdi permet d'avoir une approximation du champ de déplacement à travers l'épaisseur de la coque.

L'analyse mathématique du modèle de Naghdi a été faite pour la première fois

par Coutris [1978] puis amélioré par Ciarlet et Miara [1994].

Dans les travaux qui font l'objet de cette thèse, nous proposons un modèle décrivant le contact d'une coque modélisée par les équations de Naghdi avec un corps rigide. Nous prouvons que le système d'inéquations variationnelles qui en résulte est bien posé.

Cette thèse comporte une introduction générale et quatre chapitres :

Dans le chapitre 1, nous rappelons les principaux résultats concernant la description géométrique d'une coque mince et nous renvoyons pour plus de détails à Bernadou et Boisserie [1982], Green et Zerna [1968], Koiter [1966], Naghdi [1963, 1972].

Dans le chapitre 2, nous présentons le modèle linéaire de Naghdi qui prend en compte les effets de cisaillement transverse, tout en respectant l'hypothèse de contrainte plane et celle de la conservation de la distance entre un point et la surface moyenne au cours de la déformation. Sous ces hypothèses et par la détermination du déplacement des points de la surface moyenne ainsi que celle de la rotation du vecteur normal unitaire à cette surface, le modèle de Naghdi permet d'avoir une approximation du champ de déplacement, à travers l'épaisseur de la coque.

Le chapitre 3 est dédié à la description d'un modèle décrivant le contact d'une coque décrite par les équations de Naghdi avec un corps rigide. Nous prouvons que le système d'inéquations variationnelles qui en résulte est bien posé.

Le chapitre 4 est consacré à l'approximation du modèle de contact par la méthode des éléments finis, et en utilisant le code FreeFem++ pour les tests numériques. Nous présentons aussi des simulations numériques pour illustrer la pertinence de notre méthode.

Chapitre 1

Description de la géométrie d'une coque mince

Nous définissons tout d'abord la surface moyenne de la coque puis nous introduisons son épaisseur.

1.1 Définition de la surface moyenne

Soit \mathbb{R}^3 l'espace euclidien habituel rapporté à un repère orthonormé fixé $(0, e_1, e_2, e_3)$, et soit Ω un sous-ensemble ouvert borné du plan \mathbb{R}^2 dont la frontière est notée Γ . Alors, la surface moyenne \bar{S} de la coque est l'image dans \mathbb{R}^3 de l'ensemble $\bar{\Omega}$ (Ω est appelé domaine de référence) par l'application φ :

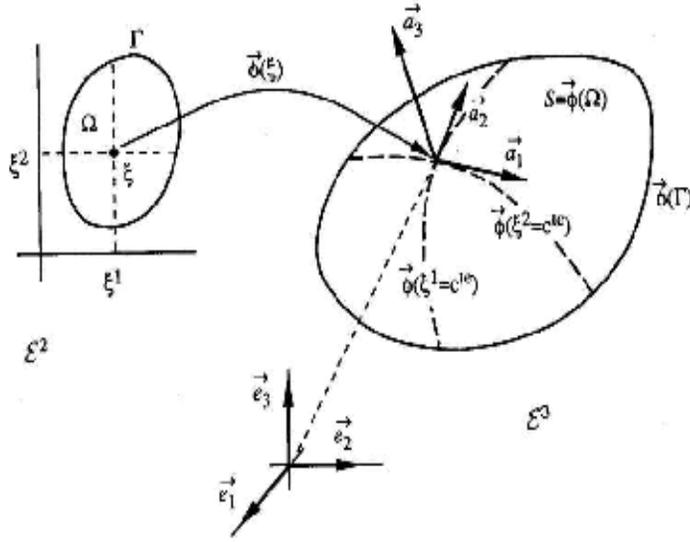


Figure 1.1.1 - Définition de la surface moyenne S .

$$\varphi : (x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \varphi(x_1, x_2) \in \overline{S} \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

φ est une application injective, qui est au moins de classe \mathbb{C}^1 sur $\overline{\Omega}$ et admet des dérivées secondes au sens faible. Nous notons $\partial S = \varphi(\Gamma)$, de telle sorte que $\overline{S} = S \cup \partial S$, et nous supposons que φ et Γ sont suffisamment régulières. En particulier, nous supposons que tous les points de la surface moyenne $\overline{S} = \varphi(\overline{\Omega})$ sont réguliers de telle sorte que les vecteurs

$$a_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.2)$$

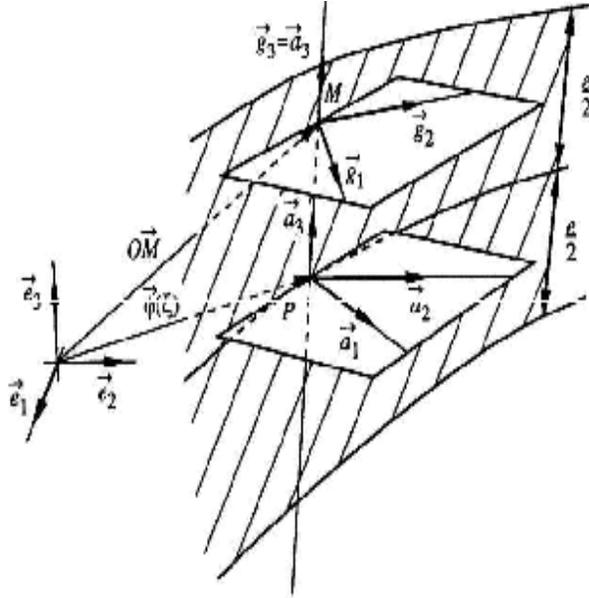


Figure 1.1.2 - Les différentes bases locales dans l'épaisseur de la coque.

sont linéairement indépendants pour tous les points $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Ces deux vecteurs définissent le plan tangent à la surface \bar{S} en tout point $\varphi(x)$. Le vecteur normal unitaire au plan tangent en $\varphi(x)$ est donné par :

$$a_3(x) = \frac{a_1(x) \times a_2(x)}{|a_1(x) \times a_2(x)|}. \quad (1.3)$$

On désigne par $|\cdot|$ la norme euclidienne dans l'espace \mathbb{R}^3 équipé du produit scalaire habituel $(u, v) \rightarrow u \cdot v$ et $u \times v$ leur produit vectoriel. Alors, le point $\varphi(x)$ et les trois vecteurs $a_i(x)$ définissent une base locale pour la surface moyenne *i.e.*, la base covariante au point $\varphi(x)$.

Nous désignons par $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ les première et seconde formes fondamentales de la

surface moyenne S ; autrement dit,

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = a_{\alpha} \cdot a_{\beta} = \varphi_{,\alpha} \cdot \varphi_{,\beta}, \quad (1.4)$$

et

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -a_{\alpha} \cdot a_{3,\beta} = a_3 \cdot a_{\alpha,\beta} = a_3 \cdot a_{\beta,\alpha}. \quad (1.5)$$

Dans toute la suite, nous utilisons des lettres grecques, α, β, \dots , pour les indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$, des lettres latines, i, j, \dots , pour les indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et nous adoptons la convention de sommation sur les indices et exposants répétés. Aux vecteurs a_{α} , nous associons deux vecteurs a^{β} du plan tangent définis par

$$a_{\alpha} \cdot a^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \text{en particulier, } a^3(x) = a_3(x). \quad (1.6)$$

Ces vecteurs appartiennent à l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)^3$ et sont reliés aux vecteurs a_{α} par les relations

$$a_{\alpha} = a_{\alpha\beta} a^{\beta}, \quad a^{\alpha} = a^{\alpha\beta} a_{\beta} \quad \text{et} \quad a^{\alpha\beta} = a^{\alpha} a^{\beta} = a^{\beta\alpha} \quad (1.7)$$

où la matrice $(a^{\alpha\beta})$ est l'inverse de la matrice $(a_{\alpha\beta})$. Cette matrice est bien définie car tous les points de la surface moyenne S sont supposés réguliers. L'ensemble (a^1, a^2, a^3) définit la base contravariante attachée au point $\varphi(x)$.

Nous supposons dans la suite que $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Nous rappelons que l'injection $W^{2,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est continue. Pour un tenseur donné, les tenseurs métriques $(a_{\alpha\beta})$ et $(a^{\alpha\beta})$ nous permettent d'associer les composantes covariantes, contravariantes et mixtes d'un tenseur donné.

Par exemple, aux composantes covariantes $b_{\alpha\beta}$ de la seconde forme fondamentale, nous pouvons associer les composantes mixtes et contravariantes correspondantes

$$b_{\alpha}^{\beta}(x) = a^{\beta\rho}(x) b_{\rho\alpha}(x), \quad (1.8)$$

et la troisième forme fondamentale par ses composantes covariantes

$$c_{\alpha\beta}(x) = b_{\alpha}^{\rho}(x) b_{\rho\beta}(x). \quad (1.9)$$

Etant donné que les bases (a_1, a_2, a_3) et (a^1, a^2, a^3) ne sont en général ni normées, ni orthogonales, il est commode d'introduire les symboles de Cristoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}$ pour calculer les dérivées de ces vecteurs de base. Cette remarque a un sens pour introduire la base contravariante (duale de la covariante), les symboles de Cristoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}$ représentent les composantes de $\partial_{\beta}a^{\alpha}$ dans le plan tangent.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\rho} = a^{\rho} \cdot \partial_{\beta}a_{\alpha} = -\partial_{\beta}a^{\rho} \cdot a_{\alpha} \quad (1.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\beta a_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\rho a_\rho + b_{\alpha\beta} a_3 \\ \partial_\beta a^\alpha = -\Gamma_\rho^\alpha a^\rho + b_\beta^\alpha a_3 \\ \partial_\beta a_3 = \partial_\beta a^3 = -b_{\beta\rho} a^\rho = -b_\beta^\rho a_\rho \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Soit un déplacement de la surface moyenne de la coque, dans la carte φ une application régulière de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^3 donnée par $u(x) = u_i(x)a^i(x)$. On définit les dérivées covariantes des composantes tangentielles du déplacement

$$u_\alpha |_\beta = \partial_\beta u_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho u_\rho \quad (1.12)$$

Soient $T_{\alpha\beta}$ et $T^{\alpha\beta}$ les composantes covariantes et contravariantes d'un champ de tenseurs de surface ; alors les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\alpha\beta} |_\rho = \partial_\rho T_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho T_{\rho\beta} - \Gamma_{\beta\rho}^\sigma T_{\alpha\sigma} \\ T_{|\rho}^{\alpha\beta} = \partial_\rho T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha T^{\sigma\beta} + \Gamma_{\sigma\rho}^\beta T^{\alpha\sigma} \end{array} \right. \quad (1.13)$$

sont les dérivées covariantes des composantes de ce champ de tenseurs

Si de plus, $T_{\alpha\beta}$ sont les composantes covariantes d'un tenseur de surface symétrique ses composantes mixtes $T_\alpha^\beta = a^{\beta\rho} T_{\alpha\rho}$, et leurs dérivées covariantes sont données par

$$T_{\alpha|\rho}^\beta = \partial_\rho T_\alpha^\beta + \Gamma_{\rho\sigma}^\beta T_\alpha^\sigma - \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma T_\sigma^\beta. \quad (1.14)$$

Soit $u = u_i a^i = u^i a_i$ un champ de vecteurs défini sur la surface S ; alors ses dérivées partielles sont données par

$$\begin{cases} \partial_\alpha u = (u_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta}u_3) a^\beta + (\partial_\alpha u_3 + b_\alpha^\beta u_\beta) a_3 \\ = (u^\beta |_\alpha - b_\alpha^\beta u_3) a_\beta + (\partial_\alpha u_3 + b_{\alpha\beta}u^\beta) a^3 \end{cases} \quad (1.15)$$

Le tenseur de déformation linéarisé ou de changement de métrique, $\gamma(u) = \gamma_{\alpha\beta}(u)a^\alpha \otimes a^\beta$, de la surface S est défini par ses composantes covariantes

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3. \quad (1.16)$$

De même, on définit le tenseur de changement de courbure linéarisé, $\chi(u) = \chi_{\alpha\beta}(u)a^\alpha \otimes a^\beta$, par ses composantes covariantes

$$\chi_{\alpha\beta}(u) = u_{3|\alpha\beta} + b_\beta^\rho u_{\rho|\alpha} + b_\alpha^\rho u_{\rho|\beta} + b_{\beta|\alpha}^\rho u_\rho - c_{\alpha\beta}u_3. \quad (1.17)$$

Notons que par hypothèse, le déterminant

$$a(x) = \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = |a_1 \times a_2|^2, \quad (1.18)$$

est strictement positif sur $\bar{\Omega}$. Il existe alors une constante δ telle que

$$a(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.19)$$

L'élément d'aire dS est donnée par :

$$dS = \sqrt{a} dx. \quad (1.20)$$

1.2 Définition géométrique de la coque non déformée

Aux deux coordonnées curvilignes x_1, x_2 qui permettent de définir la surface moyenne, nous ajoutons une troisième coordonnée z , qui est mesurée le long de la normale a_3 à la surface \bar{S} au point $\varphi(x_1, x_2)$. L'épaisseur e de la coque est définie au moyen de l'application

$$e : (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}. \quad (1.21)$$

Définition

Une coque non déformée ou de référence, de surface moyenne S et d'épaisseur e est un ensemble de \mathbb{R}^3 donné par :

$$\bar{C} = \left\{ \Phi(x, z) = \varphi(x) + za_3(x), x \in \bar{\Omega}, \text{ et } -\frac{1}{2}e(x) \leq z \leq \frac{1}{2}e(x) \right\}. \quad (1.22)$$

La coque est dite mince si $e(x)$ est relativement petite devant le plus petit rayon de courbure de la surface moyenne et les dimensions extérieures.

Chapitre 2

Le modèle linéaire de Naghdi

2.1 Définition d'une coque déformée

Dans la suite nous adoptons les définitions, les notations et les préliminaires géométriques introduites dans le chapitre 1. Soit C une coque de surface moyenne S et d'épaisseur e définie par (1.22) du chapitre précédent. Nous supposons que la coque est

- i) encastrée sur la partie $\partial S_0 = \varphi(\Gamma_0) \times [-\frac{1}{2}e, \frac{1}{2}e]$ de sa frontière, où $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ est supposée de mesure strictement positive *i.e.*, $mes(\Gamma_0) > 0$.
- ii) chargée par une distribution de forces dont la résultante est f sur la surface moyenne.
- iii) chargée sur la partie complémentaire $\partial S_1 = \varphi(\Gamma_1) =$

$\partial S - \partial S_0$ de sa frontière par une distribution de forces dont la résultante est N sur Γ_1 et dont le moment résultant est M .

Sous l'action de ces charges la coque se déforme. Le modèle de Naghdi prend en compte des effets de cisaillements transverse. Cela implique que la normale à la surface se déforme c'est -à- dire qu'il y a rotation, le vecteur normal a_3 est transformé en un vecteur a_3^* qui n'est pas a priori orthogonal à la surface déformée et en négligeant les effets de pincement et considérant les contraintes approximativement planes, la coque déformée C^* est décrite par les points :

$$\overline{C^*} = \left\{ \Phi^*(x, z) = \varphi^*(x) + za_3^*(x) \text{ , } x \in \overline{\Omega}, \text{ et } -\frac{1}{2}e(x) \leq z \leq \frac{1}{2}e(x) \right\} \quad (2.1)$$

où la distance entre un point de la coque et la surface moyenne reste constante au cours de la déformation.

Soit $\varphi^*(x)$ la carte définissant la surface moyenne déformée

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) + u(x) \quad \text{et} \quad a_3^*(x) = a_3(x) + r \quad (2.2)$$

r est le tourbillon transverse infinitésimal.

Il sagit d' un champ de vecteurs qui mesure les variations linéairisées du vecteur normal a_3 de la surface laquelle est soumise à un champ de déplacements.

Les composantes r_α sont les composantes covariantes du champ de rotation de la normale $a_3(x)$,

avec $r = a_3^*(x) - a_3(x)$, $r = r_\alpha a^\alpha$ et $r \cdot a_3 = 0$ (n'a pas de composante normale)

2.2 Déplacement d'un point de la coque

En tenant compte des effets de cisaillements transverse et sous les hypothèses précédentes, le déplacement d'un point de la coque $U(x, z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 U(x, z) &= \Phi^*(x, z) - \Phi(x, z) \\
 &= \varphi^*(x) + z a_3^*(x) - (\varphi(x) + z a_3(x)) \\
 &= \varphi(x) + u(x) + z(a_3(x) + r_\alpha a^\alpha) - (\varphi(x) + z a_3(x)) \\
 &= u(x) + z r_\alpha a^\alpha.
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que :

$$U(x, z) = u(x) + z r(x) \quad (2.3)$$

où $u(x)$ est le déplacement du point $\varphi(x)$ de S et r est le vecteur rotation de la normale a_3 .

Remarque 2.2.1

Avec ces hypothèses, le déplacement $u(x)$ et la rotation $r(x)$ de la normale au point $\varphi(x)$ de la surface moyenne permettent d'approcher le déplacement du point $\Phi(x, z)$ de la coque par :

$$U(x, z) = u(x) + zr(x). \quad (2.4)$$

Le modèle de Naghdi décrit ci-dessus a comme inconnues principales le déplacement $u(x)$ des points de la surface S ainsi que la rotation $r(x)$ de la normale.

On rappelle les définitions des tenseurs linéarisés de déformation, de déformation de cisaillement transverse et de changement de courbure de la surface moyenne de la coque dans le cadre fonctionnel introduit dans l'approche classique de Bernadou, Ciarlet et Miara [1994].

Supposons que la carte φ soit $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$. Soit u un déplacement de la surface moyenne et r une rotation de la normale a_3 *i.e.*, des fonctions régulières de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^3 données en composantes covariantes par

$$u(x) = u_i(x) a^i(x) \quad \text{et} \quad r = r_\alpha(x) a^\alpha(x) \quad \text{où} \quad u_i = u \cdot a_i \quad \text{et} \quad r_\alpha = r \cdot a_\alpha. \quad (2.5)$$

Dans l'approche classique, le déplacement et la rotation sont respectivement identifiés avec le triplet (u_i) , $i = 1, 2, 3$ et le couple (r_α) , $\alpha = 1, 2$ de leurs composantes covariantes. Les dérivées covariantes des composantes de r et des composantes tangentielles de u sont définies par

$$u_\alpha |_\beta = \partial_\beta u_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho u_\rho \quad \text{et} \quad r_\alpha |_\beta = \partial_\beta r_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho r_\rho \quad (2.6)$$

On définit le tenseur de déformation linéarisé par $\gamma(u) = \gamma_{\alpha\beta}(u) a^\alpha \otimes a^\beta$ avec

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_\alpha | \beta + u_\beta | \alpha) - b_{\alpha\beta} u_3. \quad (2.7)$$

Le tenseur de changement de courbure par $\chi(u, r) = \chi_{\alpha\beta}(u, r) a^\alpha \otimes a^\beta$ avec

$$\chi_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2} (r_\alpha | \beta + r_\beta | \alpha) - \frac{1}{2} b_\alpha^\rho (u_\rho | \beta - b_{\rho\beta} u_3) - \frac{1}{2} b_\beta^\sigma (u_\sigma | \alpha - b_{\sigma\alpha} u_3). \quad (2.8)$$

et le tenseur de déformation de cisaillement transverse par $\delta(u, r) = \delta_{\alpha 3}(u, r) a^\alpha \otimes a^3$ avec

$$\delta_{\alpha 3}(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_3 + b_\alpha^\rho u_\rho + r_\alpha). \quad (2.9)$$

2.3 Tenseur de déformation de la coque

Pour un milieu continu, le tenseur de déformation a pour expression

$$\varepsilon(U) = \varepsilon_{ij} g^i \otimes g^j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - g_{ij}), \quad (2.10)$$

où g_{ij} et g_{ij}^* désignent respectivement les tenseurs métriques du milieu continu dans les configurations de référence et déformée, pour une même paramétrisation (x, z) .

La base covariante déformée en un point de la coque est définie par

$$\begin{cases} g_{\alpha}^* = \partial_{\alpha}\varphi^* = a_{\alpha}^* + z\partial_{\alpha}a_3^*, \\ g_3^* = \partial_3\varphi^* = a_3^* \end{cases} \quad (2.11)$$

Une approximation des composantes covariantes du tenseur métrique de la coque déformée est donnée par :

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta}^* + z(a_{\alpha}^* \cdot \partial_{\beta}a_3^* + a_{\beta}^* \cdot \partial_{\alpha}a_3^*), \\ g_{\alpha 3}^* = (a_{\alpha}^* + z\partial_{\alpha}a_3^*) \cdot a_3^*, \\ g_{33}^* = a_3^* \cdot a_3^* \end{cases} \quad (2.12)$$

Nous rappelons que $a_{\alpha}^* = a_{\alpha} + \partial_{\alpha}u$ et que $\partial_{\alpha}a_3^* = \partial_{\alpha}a_3 + \partial_{\alpha}(r_{\beta}a^{\beta})$.

Une approximation des composantes covariantes, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ et $\varepsilon_{\alpha 3}$, du tenseur de déformation de la coque est alors donnée par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) = \gamma_{\alpha\beta}(u) + z\chi_{\alpha\beta}(u, r) \\ \varepsilon_{\alpha 3}(U) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}u_3 + b_{\alpha}^{\rho}u_{\rho} + r_{\alpha}) \\ \varepsilon_{33}(U) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

2.4 Tenseur de contraintes de la coque

On considère une coque homogène, élastique et isotrope satisfaisant la loi de comportement de Hooke :

$$\sigma(U) = \lambda \text{tr} \varepsilon(U) Id + 2\mu \varepsilon(U). \quad (2.14)$$

On rappelle que le tenseur de contraintes $\sigma(U)$ s'écrit sous la forme

$$\sigma(U) = \sigma^{ij} g_i \otimes g_j \text{ avec } \sigma^{ij} = \sigma(U) : g^i \otimes g^j = E^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.15)$$

où E^{ijkl} est le tenseur d'élasticité qui a pour expression :

$$E^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}). \quad (2.16)$$

Il convient de rappeler aussi que $g^{\alpha 3} = g^{3\alpha} = 0$ et $g^{33} = 1$. Par conséquent nous avons

$$E^{3\alpha\beta\rho} = E^{333\beta} = 0, \quad (2.17)$$

et

$$E^{33\alpha\beta} = \lambda g^{\alpha\beta}, \quad E^{3\alpha 3\beta} = \mu g^{\alpha\beta} \text{ et } E^{3333} = \lambda + 2\mu. \quad (2.18)$$

Enfin, pour obtenir le modèle bidimensionnel de Naghdi nous nous placerons aussi sous l'hypothèse de Kirchhoff-Love, *i.e.*, les contraintes sont approximativement planes c'est-à-dire $\sigma^{33}(U) = 0$.

2.5 Energie de déformation de la coque

L'énergie de déformation de la coque associée au champ de déplacement U est donnée par :

$$W(U) = \frac{1}{2} \int_C (E^{\alpha\beta\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) \varepsilon_{\rho\sigma}(U) + E^{\alpha\beta 33} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) \varepsilon_{33}(U) + 2E^{\alpha 3\beta 3} \varepsilon_{\alpha 3}(U) \varepsilon_{\beta 3}(U)) dC. \quad (2.19)$$

On obtient alors

$$W(U) = \frac{1}{2} \int_C (E^{\alpha\beta\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) \varepsilon_{\rho\sigma}(U) - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) \varepsilon_{33}(U) + 4\mu g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha 3}(U) \varepsilon_{\beta 3}(U)) dC. \quad (2.20)$$

Il vient donc

$$W(U) = \frac{1}{2} \int_C (E^{\alpha\beta\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta}(U) \varepsilon_{\rho\sigma}(U) + 4\mu g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha 3}(U) \varepsilon_{\beta 3}(U)) dC, \quad (2.21)$$

où

$$E^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} + \mu (g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} + g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho}). \quad (2.22)$$

Déterminons les composantes covariantes, $g^{\alpha\rho}$, de la métrique de la coque. Supposons que

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2zb_{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

En remarquant que

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \quad \text{et} \quad g^{12} = -\frac{g_{21}}{g} \quad (2.24)$$

On déduit une approximation de $g^{\alpha\beta}$, donnée par

$$g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + 2zb^{\alpha\beta} + \dots \quad (2.25)$$

où $b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\rho} a^{\beta\sigma} b_{\rho\sigma}$ sont les composantes contravariantes de la deuxième forme fondamentales de la surface S . Si on néglige le terme en z , alors une intégration sur l'épaisseur conduit à l'approximation suivante :

$$W(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (ea^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(u) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(u, r)) + 4\mu ea^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(u, r)) \sqrt{a} dx \quad (2.26)$$

où

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\sigma} + \mu (a^{\alpha\rho} a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma} a^{\beta\rho}). \quad (2.27)$$

A cette approximation, nous associons les formes bilinéaires suivantes :

$$a((u, r), (v, s)) = \int_{\Omega} (ea^{\alpha\beta\rho\sigma} (\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(u) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(u, r)) \sqrt{a} dx \quad (2.28)$$

et

$$b((u, r), (v, s)) = \int_{\Omega} 4\mu ea^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(u, r) \sqrt{a} dx \quad (2.29)$$

2.6 Energie potentielle des charges extérieures

L'énergie potentielle des charges extérieures associée à un champ de déplacements

$V = v + zr$ des particules de la coque peut être approchée par

$$l(v, s) = \int_{\Omega} f.v \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_1} (N.v + M.s) d\Gamma. \quad (2.30)$$

2.7 Formulation variationnelle

2.7.1 Formulation classique en composantes locales

Les inconnues sont les composantes covariantes : $u_i = u.a_i$ et $r_\alpha = r.a_\alpha$ avec $i = 1, 2, 3$ et $\alpha = 1, 2$

Posons

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{\mu \in H^1(\Omega), \mu = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \quad (2.31)$$

$$V(\Omega) = \{(v_i, s_\alpha) \in [H_{\Gamma_0}^1(\Omega)]^5, \text{ dans } \Omega\}. \quad (2.32)$$

La formulation faible du problème de Naghdi est alors la suivante :

Trouver $(u, r) = ((u_i), (r_\alpha)) \in V(\Omega)$ tel que :

$$a((u, r), (v, s)) = L(v, s), \quad \forall (v, s) \in V(\Omega). \quad (2.33)$$

avec

$$a((u, r), (v, s)) = \int_{\Omega} e a^{\alpha\beta\rho\sigma} \left(\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(v, s) \right) \sqrt{a} dx \quad (2.34)$$

$$+ \int_{\Omega} 2e \frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(v, s) \sqrt{a} dx. \quad (2.35)$$

$$L(v, s) = \int_{\Omega} f.v \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_1} (N.v + M.s) l d\tau. \quad (2.36)$$

avec f, N et M représentent la densité résultante des forces, les tractions et les moments de forces appliquées sur la partie complémentaire de la frontière $\partial S_1 = \partial S - \partial S_0$ et dont le moment résultant respectivement.

Pour simplifier, nous supposons que la coque est réalisée dans un matériau élastique, homogène et isotrope

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\rho}a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma}a^{\beta\rho}) + \frac{E\nu}{1-\nu^2}a^{\alpha\beta}a^{\rho\sigma}, \quad (2.37)$$

est le tenseur d'élasticité, E et ν sont les constantes de module de Young $E > 0$ et le coefficient de Poisson $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ du matériau et chaque composante de $a^{\alpha\beta\rho\sigma} \in L^\infty(\Omega)$ qui vérifie les symétries usuelles et uniformément strictement positif.

L'élément d'aire ds est donnée par : $ds = \sqrt{a}dx$

Les tenseurs γ, χ et δ sont respectivement les tenseurs de changement de la métrique, le tenseur de changement de courbure et le tenseur de déformation des cisaillements transverses donnés par leurs composantes covariantes :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha), \quad (2.38)$$

$$\chi_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta a_3 + \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha a_3 + \partial_\alpha r \cdot a_\beta + \partial_\beta r \cdot a_\alpha), \quad (2.39)$$

$$\delta_{\alpha 3}(u, r) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot a_3 + r \cdot a_\alpha). \quad (2.40)$$

Introduisons les nouvelles expressions des tenseurs de déformation et de changement de courbure. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.7.2

Soient $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et $r \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tels que $r \cdot a_3 = 0$ et $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Alors les expressions

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha), \quad (2.41)$$

définissent des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui coïncident avec les composantes du tenseur de déformation quand u et φ sont dans $C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Les expressions

$$\chi_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta a_3 + \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha a_3 + \partial_\alpha r \cdot a_\beta + \partial_\beta r \cdot a_\alpha) \quad (2.42)$$

définissent des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui coïncident avec les composantes covariantes du tenseur de changement de courbure quand u , r et φ sont dans $C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Les expressions

$$\delta_{\alpha 3}(u, r) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \cdot a_3 + r \cdot a_\alpha) \quad (2.43)$$

définissent des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui coïncident avec les composantes du tenseur de cisaillement quand u , r et φ sont dans $C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Remarque 2.7.3

Ce lemme donne des expressions pour les tenseurs des déformations et de changement de courbure plus simple, et on peut aussi les présenter sous forme intrinsèque à savoir :

$$\chi = \chi_{\alpha\beta}(u, r) a^\alpha \otimes a^\beta = \frac{1}{2} (\nabla u^t \nabla a_3 + \nabla a_3^t \nabla u) + \nabla r^t \nabla \varphi + \nabla \varphi^t \nabla r.$$

et

$$\delta = \delta_{\alpha 3}(u, r) a^\alpha \otimes a^3 = \frac{1}{2} (\nabla \varphi \cdot r + \nabla u \cdot a_3).$$

Pour la démonstration du lemme 2.7.2, voir A. Blouza [30]

Lemme 2.7.4

Soient $u, r \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Si u^n, r^n et φ^n appartiennent à $C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et sont tels que $u^n \rightarrow u$ fort dans $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $r^n \rightarrow r$ fort dans $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et $\varphi^n \rightarrow \varphi$ fort dans $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et $\varphi^n \rightarrow \varphi$ faible dans $W^{2,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, alors $\gamma_{\alpha\beta}(u^n) \rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(u)$ fort dans $L^2(\Omega)$, $\chi_{\alpha\beta}(u^n, r^n) \rightarrow \chi_{\alpha\beta}(u, r)$ faible dans $L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\delta_{\alpha 3}(u^n, r^n) \rightarrow \delta_{\alpha 3}(u, r)$ fort dans $L^2(\Omega)$.

Pour la démonstration du lemme 2.7.4, voir A. Blouza [30]

2.7.5 Formulation en composantes cartésiennes

On considère une coque de surface moyenne S . La carte φ est supposée dans $W^{2,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Le but de ce paragraphe est d'introduire un nouveau cadre fonctionnel

pour le modèle de Naghdi et de prouver que la nouvelle approche constitue une extension naturelle de l'approche classique de P.G. Ciarlet [17]. (on rappelle que $W^{2,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ avec injection continue).

Introduisons l'espace

$$V = \left\{ (v, s) \in [H_{\Gamma_0}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)]^2, s \cdot a_3 = 0 \text{ dans } \Gamma_0 \right\}, \quad (2.44)$$

muni de la norme

$$\|(v, s)\| = \left(\|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|s\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.45)$$

Avant de passer au résultat d'existence et d'unicité, nous proposons une nouvelle version du lemme du mouvement rigide pour une coque de Naghdi. Ce résultat est une étape cruciale de la démonstration du théorème d'existence et d'unicité pour le modèle de Naghdi.

Lemme du mouvement rigide 2.7.6

Soient $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et $r \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que $r \cdot a_3 = 0$ respectivement un déplacement et une rotation de la normale a_3 de la surface moyenne. Soit $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

i) Si on suppose que $\gamma_{\alpha\beta}(u) = 0$, alors il existe un unique $\psi \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$

tel que

$$\partial_\alpha u = \psi \wedge \partial_\alpha \varphi. \quad (2.46)$$

ii) Si $\delta_{\alpha 3}(u, r) = 0$ alors $\partial_\alpha u \cdot a_3 = -r \cdot a_\alpha$ appartient à $H^1(\Omega)$.

De plus $r \cdot a_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta} \psi \cdot a^\beta$

iii) Si de plus, $\chi_{\alpha\beta}(u, r) = 0$, alors ψ s'identifie à un vecteur de \mathbb{R}^3

et l'on a

$$u(x) = c + \psi \wedge \varphi(x), \quad (2.47)$$

où c est un vecteur constant de \mathbb{R}^3 et

$$r(x) = -(\varepsilon_{\alpha\beta}(x) \psi \cdot a^\beta(x)) a^\alpha(x). \quad (2.48)$$

Pour la démonstration, voir A. Blouza [30].

2.8 Existence et unicité d'une solution pour le modèle de Naghdi

Dans ce paragraphe, nous proposons un théorème d'existence et d'unicité de la solution du modèle linéaire de Naghdi pour des coques dont les surfaces moyennes sont de classe $W^{2,\infty}$ seulement.

Nous considérons une coque de surface moyenne S , d'épaisseur e et de module de Young $E > 0$ et le coefficient de Poisson $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$.

Nous supposons que le bord $\partial\Omega$ est divisé en deux parties, une partie Γ_0 de mesure strictement positive sur laquelle la coque est encastrée et d'une partie complémentaire Γ_1 sur laquelle la coque est soumise à des tractions et moments appliqués.

Théorème 2.8.1

Soient $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ la résultante de densité de force, $N \in L^2(\Gamma_1)$, $M \in L^2(\Gamma_1)$ et e l'épaisseur de la coque. Alors il existe une solution unique du problème variationnel : trouver $(u, r) \in V$ tel que

$$a((u, r), (v, s)) = L(v, s), \forall (v, s) \in V \quad (2.49)$$

où

$$a((u, r), (v, s)) = \int_{\Omega} e a^{\alpha\beta\rho\sigma} \left(\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(v, s) \right) \sqrt{a} dx \quad (2.50)$$

$$+ \int_{\Omega} 2e \frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(v, s) \sqrt{a} dx \quad (2.51)$$

$$L(v, s) = \int_{\Omega} f \cdot v \sqrt{a} dx + \int_{\gamma_1} (N \cdot v + M \cdot s) l d\tau \quad (2.52)$$

où $a^{\alpha\beta\rho\sigma}$ le tenseur d'élasticité satisfait la symétrie usuelle et est uniformément strictement positif.

Pour montrer ce théorème c'est-à-dire l'existence et l'unicité de la solution on utilise le lemme de Lax-Milgram ainsi que le lemme du mouvement rigide.

Pour établir la V -ellipticité de la forme bilinéaire est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.8.2

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$a((v, s), (v, s)) \geq C \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\alpha, \beta} \|\chi_{\alpha\beta}(v, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\alpha} \|\delta_{\alpha 3}(v, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

pour tout $(v, s) \in [H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)]^2$

Lemme 2.8.3

La forme bilinéaire du problème (2.51) est V -elliptique.

Pour la démonstration de ces lemmes, voir A. Blouza [30]. Il est clair que la forme linéaire du problème (2.51) est continue sur l'espace V . D'autre part, La forme bilinéaire associée est V -elliptique grâce au lemme précédent. Le théorème découle alors du lemme de Lax-Milgram.

2.8.4 Formulation mixte du modèle de Naghdi

Dans la formulation, le vecteur de rotation est tangent à la surface moyenne.

Une telle contrainte vectorielle ne peut être implementée dans la discrétisation conforme, ce qui n'a pas lieu dans la formulation classique, c'est-à-dire, $r_3 = 0$,

en coordonnées cartésiennes $r_i^c a_{3,i} = 0$ dans Ω .

Par conséquent, on introduit la version pénalisée du modèle de Naghdi destinée à approcher la contrainte tangentielle de r .

L'existence et l'unicité de la solution du modèle pénalisé sont établies ainsi que la convergence de la solution du problème original de Naghdi quand le paramètre de pénalisation tend vers 0.

Remarque 2.8.5

La fonction vectorielle $r \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ se décompose dans la base cartésienne :

$$r = r_1^c e_1 + r_2^c e_2 + r_3^c e_3. \quad (2.54)$$

On introduit l'espace des fonctions relaxées (sans aucune contrainte orthogonale sur r) définit par :

$$V = \left\{ (v, s) \in (H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))^2, v = s = 0 \text{ sur } \gamma_0 \right\} \quad (2.55)$$

muni de la norme H^1

Théorème 2.8.6

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p \leq 1$. Soit $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, alors il existe une solution unique du problème trouver $(u, r) \in V$ tel que

$$a((u_p, r_p); (v, s)) + \frac{1}{p} b(r_p, s) = L(v, s) \quad (2.56)$$

où

$$b(\lambda, s) = \int_{\Omega} \partial_{\alpha}(\lambda \cdot a_3) \partial_{\alpha}(s \cdot a_3) \sqrt{a} dx \quad (2.57)$$

Lemme 2.8.7

La forme bilinéaire $a((u_p, r_p); (v, s))$ est V -elliptique, uniformément en p .

Remarque 2.8.8

Il faut noter que cette formulation permet d'approcher la contrainte $r \cdot a_3 = 0$ quand le paramètre de pénalisation tend vers zéro.

2.8.9 Formulation mixte stabilisée

Le problème mixte de Naghdi consiste à trouver : $(u, r) \in V$ et un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} a((u, r); (v, s)) + \eta \tilde{a}((u, r); (v, s)) + b((v, s), \lambda) = L(v, s), & \forall (v, s) \in V \\ b((r, u), \mu) = 0, & \forall \mu \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \end{cases} \quad (2.58)$$

avec

$$\tilde{a}((u, r); (v, s)) = \int_{\Omega} \partial_{\alpha}(r.a_3) \partial_{\alpha}(s.a_3) \sqrt{a} dx \quad (2.59)$$

et

$$b((v, s), \lambda) = \int_{\Omega} \partial_{\alpha}(s.a_3) \partial_{\alpha} \lambda dx \quad (2.60)$$

Remarques

i) Ce problème est bien posé (voir Blouza, Le Dret et Hecht [36]). L'inconnue primale est bien l'unique solution de $a((u, v); (v, s)) = L(v, s)$, $\forall (v, s) \in V$.

ii) On rappelle que r n'a pas de composante covariante suivant a_3 , *i.e.*,

$$r.a_3 = 0.$$

Le multiplicateur de Lagrange λ assure ce caractère tangentiel de r .

iii) Le paramètre de pénalisation η est introduit pour stabiliser le système.

iv) Cette formulation en composantes cartésiennes permet de considérer des coques générales où la surface moyenne peut admettre des courbures discontinues puisque φ est $W^{2,\infty}$ seulement. On rappelle que dans l'approche

classique, la carte est au moins de classe C^3 . Nous rappelons ensuite la définition des espaces de Sobolev $W^{m,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$ où ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout réel p vérifiant $1 \leq p \leq \infty$. Cet espace est défini par :

$$W^{m,p}(\omega; \mathbb{R}^3) = \{v \in L^p(\omega; \mathbb{R}^3); \partial_\alpha v \in L^p(\omega; \mathbb{R}^3) \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\} \quad (2.61)$$

où $\partial_\alpha v$ désignent les dérivées partielles au sens des distributions.

Chapitre 3

Problème de contact d'une coque de Naghdi avec un corps rigide

3.1 Formulation du problème de contact

On considère une coque de Naghdi occupant un domaine Ω ouvert borné de frontière suffisamment régulière $\Gamma = \partial\Omega$.

La coque est soumise à

- une densité de force résultante f définie dans Ω .
- une densité de forces Appliquées N et dont le moment résultant M définies sur Γ_1 .
- des conditions aux limites homogènes sur Γ_0 .

- un contact unilatéral avec un obstacle rigide d'équation $x_3 = 0$ sur la zone de contact Ω_c

La coque de référence, de surface moyenne S et d'épaisseur e est un ensemble de \mathbb{R}^3 donné par :

$$\bar{C} = \left\{ \Phi(x, z) = \varphi(x) + za_3(x), x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} \text{ et } -\frac{1}{2}e(x) \leq z \leq \frac{1}{2}e(x) \right\}. \quad (3.1)$$

La coque déformée est décrite par les points :

$$\bar{C}^* = \{ \Phi^*(x, z) = \varphi^*(x) + za_3^*(x) \} \quad (3.2)$$

avec, $\left\{ \begin{array}{l} \varphi^*(x) = \varphi(x) + u(x) \text{ où } u(x) \text{ est le déplacement du point de } \varphi(x) \\ \text{de la surface moyenne.} \\ a_3^*(x) = a_3(x) + r(x) \text{ où } r(x) \text{ est le vecteur rotation de la normale } a_3(x) \end{array} \right.$

Dans la zone de contact le déplacement d'un point de la coque $U(x, z)$ vérifie :

$$(\varphi(x) + u(x) + z(a_3(x) + r(x))) \cdot e_3 \geq 0, \text{ dans } \Omega_c. \quad (3.3)$$

avec $z = -\frac{e}{2}$, ou encore

$$\left(\varphi(x) + u(x) - \frac{e}{2}(a_3 + r) \right) \cdot e_3 \geq 0, \text{ dans } \Omega. \quad (3.4)$$

De façon équivalente, on a :

$$\left(u(x) - \frac{\epsilon}{2}r(x)\right) \cdot e_3 \geq \left(-\varphi(x) + \frac{\epsilon}{2}a_3(x)\right) \cdot e_3, \text{ dans } \Omega. \quad (3.5)$$

Si l'on pose

$$\varphi(x) = \left(-\varphi(x) + \frac{\epsilon}{2}a_3(x)\right) \cdot e_3, \quad (3.6)$$

alors (3.5) est équivalente à

$$\left(u(x) - \frac{\epsilon}{2}r(x)\right) \cdot e_3 \geq \varphi(x). \quad (3.7)$$

On désigne par η la réaction de l'obstacle sur la coque.

Les relations de contact unilatéral (sans frottement) sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u(x) - \frac{\epsilon}{2}r(x)) \cdot e_3 - \varphi(x) \geq 0, \text{ dans } \Omega, \\ \eta \geq 0, \text{ dans } \Omega, \\ ((u(x) - \frac{\epsilon}{2}r(x)) \cdot e_3 - \varphi(x)) \eta = 0, \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Nous utilisons l'espace $H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ des fonctions dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ égales à zéros sur Γ_0 et on note $H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ l'espace dual. Introduisons le sous-espace convexe

fermé K qui sera l'ensemble des déplacements admissibles, c'est-à-dire compatibles avec les liaisons (conditions aux limites et les conditions unilatérales) :

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)^2 = \{(v, s) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)^2, v = s = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \quad (3.8)$$

$$K = \left\{ (v, s) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2, \left(v - \frac{e}{2}s\right) \cdot e_3 \geq \varphi, \text{ dans } \Omega \right\} \quad (3.9)$$

et finalement l'ensemble convexe K^* des distributions χ dans $H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^3)^2$

$$K^* = \{\chi \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^3), \langle \chi, (v, s) \rangle \geq 0, \forall (v, s) \in K\} \quad (3.10)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)^2$

Nous considérons le problème variationnel suivant : pour tout $P \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$,

Trouver $((u, r), \lambda, \eta) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2 \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ tels que

$$(P_e) \left\{ \begin{array}{l} a((u, r), (v, s)) + b((v, s), \lambda) - c(\eta, (v, s)) = L(v, s), \forall (v, s) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2 \\ b((u, r), \mu) = 0, \forall \mu \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \\ \langle (u, r), \chi - \eta \rangle \geq \langle \varphi \sqrt{a}, \chi - \eta \rangle, \forall \chi \in K^* \end{array} \right. \quad (3.11)$$

avec

$$a((u, r), (v, s)) = \int_{\Omega} e a^{\alpha\beta\rho\sigma} \left(\gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(u, r) \chi_{\rho\sigma}(v, s) \right) \sqrt{a} dx \quad (3.12)$$

$$+ \int_{\Omega} 2e \frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(u, r) \delta_{\beta 3}(v, s) \sqrt{a} dx \quad (3.13)$$

$$b((v, s), \lambda) = \int_{\Omega} \partial_{\alpha}(s a_3) \partial_{\alpha} \lambda dx. \quad (3.14)$$

$$c(\eta, (v, s)) = \int_{\Omega_c} \left(v - \frac{e}{2} s \right) e_3 \cdot \eta \cdot \sqrt{a} dx \quad (3.15)$$

$$L(v, s) = \int_{\Omega} f \cdot v \sqrt{a} dx + \int_{\gamma_1} (N \cdot v + M \cdot s) l d\tau \quad (3.16)$$

et le problème réduit (l'inéquation variationnelle)

Trouver $((u, r), \lambda) \in K \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ tel que

$$(P_I) \left\{ \begin{array}{l} a((u, r); (v, s) - (u, r)) + b((v, s) - (u, r); \lambda) \geq L((v, s) - (u, r)), \quad \forall (v, s) \in K \\ b((u, r), \mu) = 0, \quad \forall \mu \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

3.2 Formulation variationnelle du problème de contact

Trouver $((u, r), \lambda, \eta) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2 \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times K^*$ tels que

$$(P_e) \left\{ \begin{array}{l} a((u, r), (v, s)) + b((v, s), \lambda) - c(\eta, (v, s)) = l(v, s) \quad , \quad \forall (v, s) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2 \\ b((v, s), \mu) = 0, \quad \forall \mu \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \\ \langle u, r \rangle, \chi - \eta \rangle \geq \langle \varphi \sqrt{a}, \chi - \eta \rangle \quad , \quad \forall \chi \in K^* \end{array} \right. \quad (3.18)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \{(v, s) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2\} \\ K = \{(v, s) \in V, (v - \frac{\epsilon}{2}s) \cdot e_3 \geq \varphi, \text{ dans } \Omega\} \\ K^* = \{\chi \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^3)\}, \langle \chi, (v, s) \rangle \geq 0, \forall (v, s) \in K \end{array} \right.$$

Trouver $((u, r), \lambda) \in K \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ tels que

$$(P_I) \left\{ \begin{array}{l} a((u, r); (v, s) - (u, r)) + b((v, s) - (u, r); \lambda) \geq L((v, s) - (u, r)), \quad \forall (v, s) \in K \\ b((u, r), \mu) = 0, \quad \forall \mu \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.19)$$

3.3 Existence et unicité de la solution du problème de contact

Théorème 3.3.1

Soit $((u, r), \lambda, \eta)$ la solution du problème (P_e) , alors $((u, r), \lambda)$ est une solution du problème (P_I)

Preuve

1) Soit $((u, r), \lambda, \eta)$ solution du problème (P_e) et que $(u, r) \in K$ pour tout $(v, s) \in K$ et d'après la définition de K^* on a

$$\langle \eta, (v, s) \rangle \geq 0 \quad (3.20)$$

ou encore

$$-\langle \eta, (v, s) \rangle \leq 0. \quad (3.21)$$

D'après la troisième ligne du problème (P_e) , on a

$$\langle \chi - \eta, (u, r) \rangle \geq 0, \quad \forall \chi \in K^*. \quad (3.22)$$

On choisit $\chi = 0$

$$-\langle \eta, (u, r) \rangle \geq 0 \quad (3.23)$$

équivalente à

$$\langle \eta, (u, r) \rangle \leq 0 \quad (3.24)$$

En remplaçant (v, s) par $(v, s) - (u, r)$ dans la première ligne du problème (P_e) ,

on obtient

$$a((u, r), (v, s) - (u, r)) + b((v, s) - (u, r), \lambda) - c(\eta, (v, s) - (u, r)) = l((v, s) - (u, r)) \quad (3.25)$$

avec

$$-c(\eta, (v, s) - (u, r)) = -\langle \eta, (v, s) - (u, r) \rangle = -\langle \eta, (v, s) \rangle + \langle \eta, (u, r) \rangle \leq 0 \quad (3.26)$$

cela implique

$$a((u, r), (v, s) - (u, r)) + b((v, s) - (u, r), \lambda) \geq L((v, s) - (u, r)), \forall (v, s) \in K \quad (3.27)$$

2) Soit $((u, r), \lambda)$ solution du problème (P_I) alors $((u, r), \lambda, \eta)$ est solution de (P_e) :

$$a((u, r), (v, s) - (u, r)) + b((v, s) - (u, r), \lambda) - L((v, s) - (u, r)) \geq 0, \forall (v, s) \in K \quad (3.28)$$

En utilisant la formule de Green

$$a((u, r), (v, s) - (u, r)) + b((v, s) - (u, r), \lambda) - \langle \eta, (v, s) - (u, r) \rangle - l((v, s) - (u, r)) \geq 0 \quad (3.29)$$

On choisit $(v, s) = (u, r) \pm \varphi$ où $\varphi \in D(\Omega, \mathbb{R}^3)$, φ est à support compact donc les intégrales de contour sont nulles, en effet

$$a((u, r), \varphi) + b(\varphi, \lambda) = L(\varphi), \forall \varphi \quad (3.30)$$

L'intégrale sur la zone de contact :

$$\langle \eta, (v, s) - (u, r) \rangle \geq 0, \forall (v, s) \in K \quad (3.31)$$

$$\text{On choisit } \begin{cases} (v, s) = (0, 0) \\ \text{implique } \langle \eta, (u, r) \rangle = 0 \\ (v, s) = 2(u, r) \end{cases}$$

et d'après la définition de K^*

$$\langle \chi - \eta, (u, r) \rangle = \langle \chi, (u, r) \rangle - \langle \eta, (u, r) \rangle = \langle \chi, (u, r) \rangle \geq 0 \quad (3.32)$$

Théorème 3.3.2

Pour tout $P \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, le problème (P_e) admet une seule solution $((u, r), \lambda, \eta) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2 \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times K^*$.

Preuve

1) L'existence de la solution $((u, r), \lambda)$ du problème (P_I) est une conséquence directe du théorème Lions-Stampacchia [72].

Soit

$$L(v, s) = a((u, r), (v, s)) + b((v, s), \lambda) - l(v, s) \quad (3.33)$$

Dans le problème (P_I) :

a) On choisit $(v, s) = (0, 0)$, on a

$$-a((u, r), (u, r)) - b((u, r), \lambda) \geq -l(u, r) \quad (3.34)$$

b) On choisit $(v, s) = 2(u, r)$, on a

$$a((u, r), (u, r)) + b((u, r), \lambda) \geq l(u, r) \quad (3.35)$$

cela implique

$$L(u, r) = 0 \quad (3.36)$$

Le noyau de la forme $\langle \eta, (v, s) \rangle$ est caractérisé par :

$$K = \left\{ (v, s) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2, (v - \frac{e}{2}s) \cdot e_3 - \varphi = 0, \text{ dans } \Omega \right\} \quad (3.37)$$

Soit $(v, s) \in V$, alors (v, s) et $-(v, s)$ sont dans K .

D'après le problème (P_I) et $L(u, r) = 0$ on a,

$$a((u, r), (v, s)) - a(u, r), (u, r) + b((v, s), \lambda) - b((u, r), \lambda) - l(v, s) + l(u, r) \geq 0. \quad (3.38)$$

On a

$$a((u, r), (v, s)) + b((v, s), \lambda) - l((v, s) - (a(u, r), (u, r) + b(u, r), \lambda) - l(u, r)) \geq 0 \quad (3.39)$$

équivalente à

$$a((u, r), (v, s)) + b((v, s), \lambda) - l(v, s) \geq 0. \quad (3.40)$$

Cela implique que

$$L(v, s) \geq 0 \tag{3.41}$$

On remplace (v, s) par $-(v, s)$ dans $L(u, r)$

$$a((u, r), -(v, s)) + b(-(v, s), \lambda) - l(-(v, s)) \geq 0. \tag{3.42}$$

On a

$$-a((u, r), (v, s)) - b((v, s), \lambda) + l(v, s) \geq 0. \tag{3.43}$$

On obtient

$$a((u, r), (v, s)) + b((v, s), \lambda) - l(v, s) \leq 0 \tag{3.44}$$

et finalement

$$L(v, s) = 0. \tag{3.45}$$

L est à support compact dans V et d'après la condition inf-sup

$$\sup \frac{\langle \eta, (v, s) \rangle}{\|(v, s)\|} \geq \beta \|\eta\|_{H^{-1}}, \tag{3.46}$$

alors il existe $\eta \in H^{-1}(\Omega)$ tel que

$$\forall (v, s) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2, \quad \langle \eta, (v, s) \rangle = L(v, s) \quad (3.47)$$

donc $((u, r), \lambda, \eta)$ vérifie la première ligne du problème (P_e)

D'après la définition de K^* et $L(u, r) = 0$ on a

$$\forall \chi \in K, \quad \langle \chi - \eta, (u, r) \rangle = \langle \chi, (u, r) \rangle - \langle \eta, (u, r) \rangle = \langle \chi, (u, r) \rangle \geq 0 \quad (3.48)$$

Il en découle le résultat de l'existence.

2) Soient (U_1, λ_1) et (U_2, λ_2) deux solutions du problème (P_I)

avec $U_1 = (u_1, r_1)$ et $U_2 = (u_2, r_2)$

$$a(U, V - U) + b(V - U, \lambda) \geq l(V - U), \forall V \in K \quad (3.49)$$

$$a(U_1, V - U_1) + b(V - U_1, \lambda_1) \geq l(V - U_1), \forall V \in K \quad (3.50)$$

$$a(U_2, V - U_2) + b(V - U_2, \lambda_2) \geq l(V - U_2), \forall V \in K \quad (3.51)$$

$$b(U_1, \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad (3.52)$$

$$b(U_2, \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad (3.53)$$

$$b(U_1 - U_2, \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad (3.54)$$

On choisit $V = U_2$ dans (3.47) et dans (3.48) on obtient

$$a(U_1, U_2 - U_1) + b(U_2 - U_1, \lambda_1) \geq l(U_2 - U_1) \quad (3.55)$$

$$a(U_2, U_1 - U_2) + b(U_1 - U_2, \lambda_2) \geq l(U_1 - U_2) \quad (3.56)$$

$$\text{équivalente à } \left\{ \begin{array}{l} a(U_1, U_1 - U_2) + b(U_1 - U_2, \lambda_1) \leq l(U_1 - U_2) \\ -a(U_2, U_1 - U_2) - b(U_1 - U_2, \lambda_2) \leq -l(U_1 - U_2) \end{array} \right.$$

$$a(U_1 - U_2, U_1 - U_2) + b(U_1 - U_2, \lambda_1 - \lambda_2) \leq 0 \quad (3.57)$$

On obtient

$$a(U_1 - U_2, U_1 - U_2) \leq 0 \quad (3.58)$$

et finalement

$$\alpha \|U_1 - U_2\|^2 \leq 0 \text{ équivale à } U_1 = U_2 \quad (3.59)$$

$\lambda_1 = \lambda_2$ par la condition inf-sup de $b(\chi, (v, s))$

D'après la première ligne du problème (P_e) on a

$$\forall (v, s) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))^2, \langle \eta_1, (v, s) \rangle = \langle \eta_2, (v, s) \rangle$$

équivalente à $\eta_1 = \eta_2$

Chapitre 4

Approximation

4.1 Approximation du modèle de Naghdi par la méthode des éléments finis

On suppose que Ω est un polygône. Soit une triangulation $(\tau_h)_h$ une famille des triangles régulière et $\bar{\Omega} = \bigcup_{k \in \tau_h} \tau_k$, tel que $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$ ou un sommet commun ou un coté commun avec $i \neq j$. Pour la résolution numérique, on considère le problème dans l'espace discret donné par :

$$V_h = \left\{ (v_h, s_h) \in (C(\Omega, \mathbb{R}^3))^2, (v_h, s_h) \in (P_1(k))^2, v_h = s_h = 0, \partial\Omega \right\} \quad (4.1)$$

L'espace V_h est un sous espace de V de dimension finie avec une base $\{\Omega_i\}$, $i = 1$ a N_h , on peut écrire

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} \beta_i \Omega_i \quad (4.2)$$

$$s_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \Omega_i \quad (4.3)$$

On construit le sous espace convexe fermé K_h tel que K_h est réduit sur un nombre fini de contrainte sur β_i et α_i

$$K_h = \left\{ (v_h, s_h) \in V_h, (v_h - \frac{e}{2}s_h) \cdot e_3 \geq \varphi_h \text{ sur tous les noeuds de chaque triangle } k \right\} \quad (4.4)$$

alors $K_h \subset K$ et $K_h \subset V_h$

On remarque que le problème (P_I) est équivalent au problème suivant :

Trouver $((u_h, r_h), \lambda_h) \in K_h \times M_h$

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} a((u_h, r_h); (v_h, s_h) - (u_h, r_h)) + b((v_h, s_h) - (u_h, r_h); \lambda_h) \geq l((v_h, s_h) - (u_h, r_h)) , \forall (v_h, s_h) \in K_h \\ b((u_h, r_h), \mu_h) = 0, \forall \mu_h \in M_h \end{array} \right. \quad (4.5)$$

où

$$M_h = \{\mu_h = r_h \cdot a_3, \mu_h \in P_0(k), \forall r_h \in V_h\} \quad (4.6)$$

est l'espace du multiplicateur de Lagrange

On pose $U = (u, r)$ et $V = (v, s)$

Théorème 4.1.1

Soient (U, λ) et (U_h, λ_h) solutions des problèmes (P_I) et (P_h) . On note par (V, V')

l'application définie pour $U \in V$ par $a(U, V) = (AU, V)$

alors

$$\|U - U_h\|_V \leq \left[\frac{M^2}{\alpha^2} \|U - V_h\|_V^2 + \frac{1}{\alpha} \|f - AU\|_{V'} [\|U - V_h\|_V + \|U_h - V\|_V] \right]^{\frac{1}{2}}, \forall V \in K \text{ et } \forall V_h \in K_h \quad (4.7)$$

avec f est la résultante des forces volumiques

Preuve

On a

$$a(U, U - V) + b(U - V, \lambda) \leq (f, U - V), \forall V \in K \quad (4.8)$$

$$a(U_h, U_h - V_h) + b(U_h - V_h, \lambda_h) \leq (f, U_h - V_h), \forall V_h \in K_h \quad (4.9)$$

Par addition de (4.7) et (4.8), on obtient

$$a(U, U) + a(U_h, U_h) \leq (f, U - V) + (f, U_h - V_h) + a(U, V) + a(U_h, V_h), \quad (4.10)$$

soustraction de chaque terme de l'inégalité $a(U, U_h) + a(U_h, U)$

on obtient

$$a(U - U_h, U - U_h) \leq (f, U - V_h) + (f, U_h - V) - a(U, U_h - V) - a(U_h, U - V_h) \quad (4.11)$$

$$a(U - U_h, U - U_h) \leq (f, U - V_h) + (f, U_h - V) - a(U, U_h - V) - a(U, U - V_h) + a(U - U_h, U - V_h) \quad (4.12)$$

(4.10) est équivalente à

$$a(U - U_h, U - U_h) \leq (f - AU, U - V_h) + (f - AU, U_h - V) + a(U - U_h, U - V_h) \quad (4.13)$$

par la continuité et la coercivité de $a(U, V)$

$$\alpha \|U - U_h\|_V^2 \leq \|f - AU\|_{V'} \|U - V_h\|_V + \|f - AU\|_{V'} \|U_h - V\|_V + M \|U - U_h\|_V \|U - V_h\|_V \quad (4.14)$$

On a

$$\alpha \|U - U_h\|_V^2 \leq \|f - AU\|_{V'} \|U - V_h\|_V + \|f - AU\|_{V'} \|U_h - V\|_V + \frac{M^2}{\alpha} \|U - V_h\|_V^2 \quad (4.15)$$

puisque

$$M \|U - U_h\| \|U - V_h\| \leq \frac{M^2}{\alpha} \|U - V_h\|^2 \quad (4.16)$$

et finalement obobtient

$$\|U - U_h\|_V \leq \left[\frac{M^2}{\alpha^2} \|U - V_h\|_V^2 + \frac{1}{\alpha} \|f - AU\|_{V'} [\|U - V_h\|_V + \|U_h - V\|_V] \right]^{\frac{1}{2}}, \forall V \in K \text{ et } \forall V_h \in K_h \quad (4.17)$$

4.2 Discrétisation du problème réduit

Nous proposons à discrétiser le problème suivant :

On pose $U = (u, r)$ et $V = (v, s)$

$$(P) \begin{cases} a(U, V - U) + b(V - U, \psi) \geq L(V - U) \quad , \quad \forall V \in \mathbb{N}_\varphi(\Omega) \\ b(U, \chi) = 0 \quad , \quad \forall \chi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \end{cases} \quad (4.18)$$

avec

$$\mathbb{N}_\varphi(\Omega) = \left\{ (v, s) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)^2, \left(v - \frac{e}{2}s\right) e_3 \geq \varphi, \text{ dans } \Omega \right\} \quad (4.19)$$

On suppose que Ω est un polygône. Soit une triangulation $(\tau_h)_h$ une famille des triangles régulière et $\bar{\Omega} = \bigcup_{k \in \tau_h} \tau_h$, tel que $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$ ou un sommet commun ou un coté commun avec $i \neq j$.

L'espace discret est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_h = \left\{ (v_h, s_h) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)^2, \forall k \in \tau_h, v_h|_k \in P_1(k) \text{ et } s_h|_k \in P_1(k) \right\} \\ K_{\Gamma_0 h} = K_h \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)^2 \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

$P_1(k)$ l'espace des fonctions affines sur k

On définit l'approximation de φ_h par l'interpolation de Lagrange

Le convexe :

$$\mathbb{N}_{\varphi_h}(\Omega) = \left\{ (v_h, s_h) \in K_{\Gamma_0 h}, \left(v_h - \frac{e}{2}s_h\right) e_3 \geq \varphi_h, \text{ dans } \Omega \right\} \quad (4.21)$$

sur tous les noeuds de chaque triangle k

$$H_{\Gamma_0 h}^1(\Omega) = \left\{ \mu_h \in H^1(\Omega), \forall k \in \tau_h, \mu_h|_k \in P_0(k), \mu_h = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\} \quad (4.22)$$

espace du multiplicateur de Lagrange

Le problème discret réduit par la méthode de Galerkin

trouver $(U_h, \psi_h) \in \mathbb{N}_{\varphi_h} \times H_{\Gamma_{0h}}^1$ tel que :

$$(P_h) \begin{cases} a(U_h, V_h - U_h) + b(V_h - U_h, \psi_h) \geq L(V_h - U_h) \quad , \quad \forall V \in \mathbb{N}_{\varphi_h}(\Omega) \\ b(U_h, \chi_h) = 0, \quad \forall \chi_h \in H_{\Gamma_{0h}}^1(\Omega) \end{cases} \quad (4.23)$$

Proposition 4.2.1

Pour $(f, N, M) \in L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Gamma_1)^3 \times L^2(\Gamma_1)^3$, le problème (P_h) admet une solution unique dans $\mathbb{N}_{\varphi_h}(\Omega)$

Démonstration

φ_h est affine sur chaque élément k de τ_h et $\varphi_h = (-\varphi_h + \frac{\varepsilon}{2}a_3) e_3 \leq 0$ presque par tout dans Ω (car $\varphi_h \geq 0$ et l'épaisseur e est relativement petit), donc le convexe fermé n'est pas vide. Comme le problème :

$$\begin{cases} a(U, V) + b(V, \psi) - c(V, \lambda) = L(V) \quad , \quad \forall V \in H_{\gamma_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)^2 \\ b(U, \chi) = 0 \quad , \quad \forall \chi \in H_{\gamma_0}^1(\Omega) \\ c(U, \mu - \lambda) \geq \langle \varphi \sqrt{a}, \mu - \lambda \rangle \quad , \quad \forall \mu \in (H_{\Gamma_{0+}}^1(\Omega))' \end{cases} \quad (4.24)$$

est bien posé (voir l'article) et l'application du théorème de Lions-Stampacchia.

Théorème 4.2.2

Soient (U, ψ) et (U_h, ψ_h) solutions des problèmes (P) et (P_h) alors

$$\|U - U_h\|_{\mathbb{N}_\varphi} \leq \left[\frac{c}{\alpha} \begin{pmatrix} \|V - U_h\|_{\mathbb{N}_\varphi} + \|V_h - U_h\|_{\mathbb{N}_\varphi} + \\ \|U - V\|_{\mathbb{N}_\varphi} + \|U_h - V_h\|_{\mathbb{N}_\varphi} \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}, \forall V \in \mathbb{N}_\varphi, \forall V_h \in \mathbb{N}_{\varphi h} \quad (4.25)$$

Démonstration

On a $((P) \times (-))$ et $(P_h) \times (-)$

$$\begin{cases} a(U, U - V) + b(U - V, \psi) \leq L(U - V), \quad () \\ a(U_h, U_h - V_h) + b(U_h - V_h, \psi_h) \leq L(U_h - V_h), \quad () \end{cases} \quad (4.26)$$

Par addition des deux inégalités on obtient

$$a(U, U) + a(U_h, U_h) \leq a(U, V) + a(U_h, V_h) - b(U - V, \psi) \quad (4.27)$$

$$-b(U_h - V_h, \psi_h) + L(U - V) + L(U_h - V_h) \quad (4.28)$$

Par soustraction de $a(U, U_h) + a(U_h, U)$ on obtient

$$a(U - U_h, U - U_h) \leq a(U, V - U_h) + a(U_h, V_h - U) - b(U - V, \psi)$$

$$-b(U_h - V_h, \psi_h) + L(U - V) + L(U_h - V_h)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
a(U - U_h, U - U_h) + b(U - V, \psi) + b(U_h - V_h, \psi_h) &\leq a(U, V - U_h) + a(U_h, V_h - U) \\
&+L(U - V) + L(U_h - V_h)
\end{aligned}$$

Par soustraction de $b(U, \psi_h) + b(U_h, \psi)$ on obtient

$$\begin{aligned}
a(U - U_h, U - U_h) + b(U - U_h, \psi - \psi_h) - b(V, \psi) - b(V_h, \psi_h) &\leq \\
&a(U, V - U_h) + a(U_h, V_h - U) \\
&-b(U, \psi_h) - b(U_h, \psi) \\
&+L(U - V) + L(U_h - V_h)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
a(U - U_h, U - U_h) + b(U - U_h, \psi - \psi_h) &\leq a(U, V - U_h) + a(U_h, V_h - U) \\
&+b(V, \psi) + b(V_h, \psi_h) \\
&-b(U, \psi_h) - b(U_h, \psi) + L(U - V) + L(U_h - V_h)
\end{aligned}$$

équivalente à

$$\begin{aligned}
a(U - U_h, U - U_h) + b(U - U_h, \psi - \psi_h) &\leq a(U, V - U_h) + a(U_h, V_h - U) \\
&+ b(V - U_h, \psi) + b(V_h - U, \psi_h) \\
&+ L(U - V) + L(U_h - V_h)
\end{aligned}$$

et finalement on obtient

$$\begin{aligned}
a(U - U_h, U - U_h) + b(U - U_h, \psi - \psi_h) &\leq L(V - U_h) + L(V_h - U) \\
&+ L(U - V) + L(U_h - V_h)
\end{aligned}$$

Suivant la coecivité de $a(.,.)$ et la continuité de $L(.)$ et le terme $b(.,.)$ qui tend vers zéro, on a

$$\|U - U_h\|_{\mathbb{N}_\varphi} \leq \left[\frac{c}{\alpha} \left(\begin{array}{l} \|V - U_h\|_{\mathbb{N}_\varphi} + \|V_h - U\|_{\mathbb{N}_\varphi} + \\ \|U - V\|_{\mathbb{N}_\varphi} + \|U_h - V_h\|_{\mathbb{N}_\varphi} \end{array} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

4.3 Simulations numériques

Pour la mise en oeuvre numérique, en utilisant le code pédagogique d'éléments finis : FreeFem++. Ce logiciel a été créé et développé en C++ par les professeurs

Frédéric Hecht et **Olivier Pironneau** sont des chercheurs au laboratoire de Jacques-Louis Lions (LJLL) de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI.

Ce code a été écrit à l'attention des chercheurs pour se familiariser avec la résolution des équations aux dérivées partielles et pour traiter des exemples académiques. Dans sa forme actuelle, le code se présente sous forme de menu que l'on obtient en ligne en tapant `//www.FreeFem.org/ff++`.

L'exemple à traiter, il s'agit d'un parabolode hyperbolique sous pression uniforme en contact initial avec un obstacle rigide.

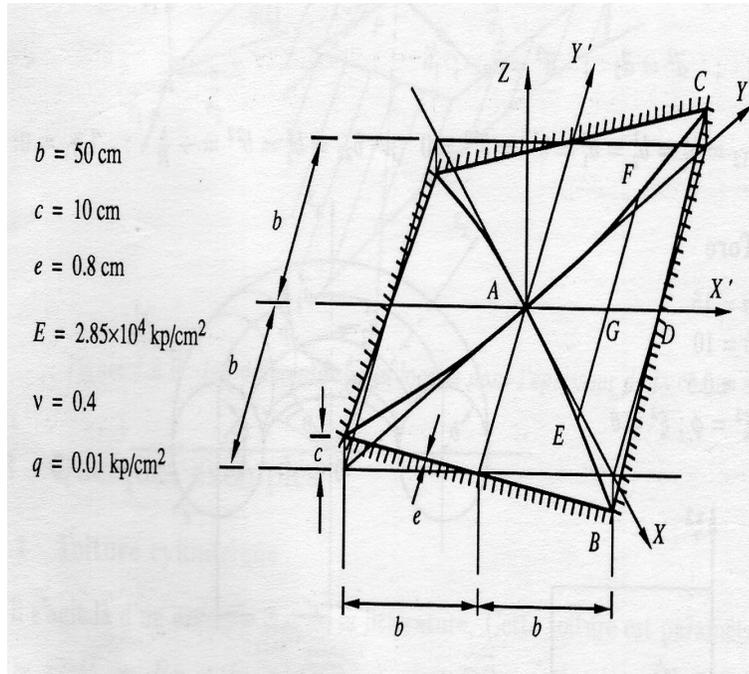


Figure 4.3.1 - Paraboloïde hyperbolique

Ce paraboloïde hyperbolique peut être paramétré comme suit :

$$\varphi(x, y) = \left(x, y, \frac{c}{2b^2} (y^2 - x^2) \right) \quad (4.30)$$

D'où l'on déduit les caractéristiques géométriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_1 = \left(1, 0, -\frac{c}{b^2}x\right) \quad , \quad a_2 = \left(0, 1, \frac{c}{b^2}y\right) \quad , \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{b^4+c^2(x^2+y^2)}} (cx, -cy, b^2) \\
a_{11} = 1 + \frac{c^2}{b^4}x^2 \quad , \quad a_{12} = -\frac{c^2}{b^4}xy \quad , \quad a_{22} = 1 + \frac{c^2}{b^4}y^2 \quad , \quad a = 1 + \frac{c^2}{b^4}(x^2 + y^2) \\
a^{11} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{c^2}{b^4}y^2\right) \quad , \quad a^{12} = \frac{c^2}{ab^4}xy \quad , \quad a^{22} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{c^2}{b^4}x^2\right) \\
a^1 = \frac{1}{ab^4} (b^4 + c^2y^2, c^2xy, -b^2cx) \quad , \quad a^2 = \frac{1}{ab^4} (c^2xy, b^4 + c^2x^2, b^2cy) \\
b_{11} = -ct \quad , \quad b_{12} = 0 \quad , \quad b_{22} = ct \quad , \quad \text{avec } t = (b^2\sqrt{a})^{-1} \\
b_1^1 = -ct^3(b^4 + c^2y^2) \quad , \quad b_2^1 = -b_1^2 = c^3t^3xy \quad , \quad b_2^2 = ct^3(b^4 + c^2x^2) \\
b^{11} = -ct^5[(b^4 + c^2y^2)^2 - c^4x^2y^2] \quad , \quad b^{12} = c^5t^5xy(x^2 - y^2) \\
b^{22} = ct^5[(b^4 + c^2x^2)^2 - c^4x^2y^2]
\end{array} \right.$$

Conclusion et Perspectives

Au cours de notre travail, nous avons proposé un modèle décrivant le contact d'une coque modélisée par les équations de Naghdi en coordonnées cartésiennes avec un corps rigide. Nous avons alors présenté dans le chapitre 3 les preuves d'existence et d'unicité de solution du modèle de contact et on a prouvé que le système d'inéquations variationnelles qui en résulte est bien posé.

Nous suggérons, cependant, quelques problèmes ouverts :

- L'étude de ce modèle de contact avec une coque de Koiter.
- L'étude de ce modèle de contact avec frottement pour les modèles de Naghdi et de Koiter.

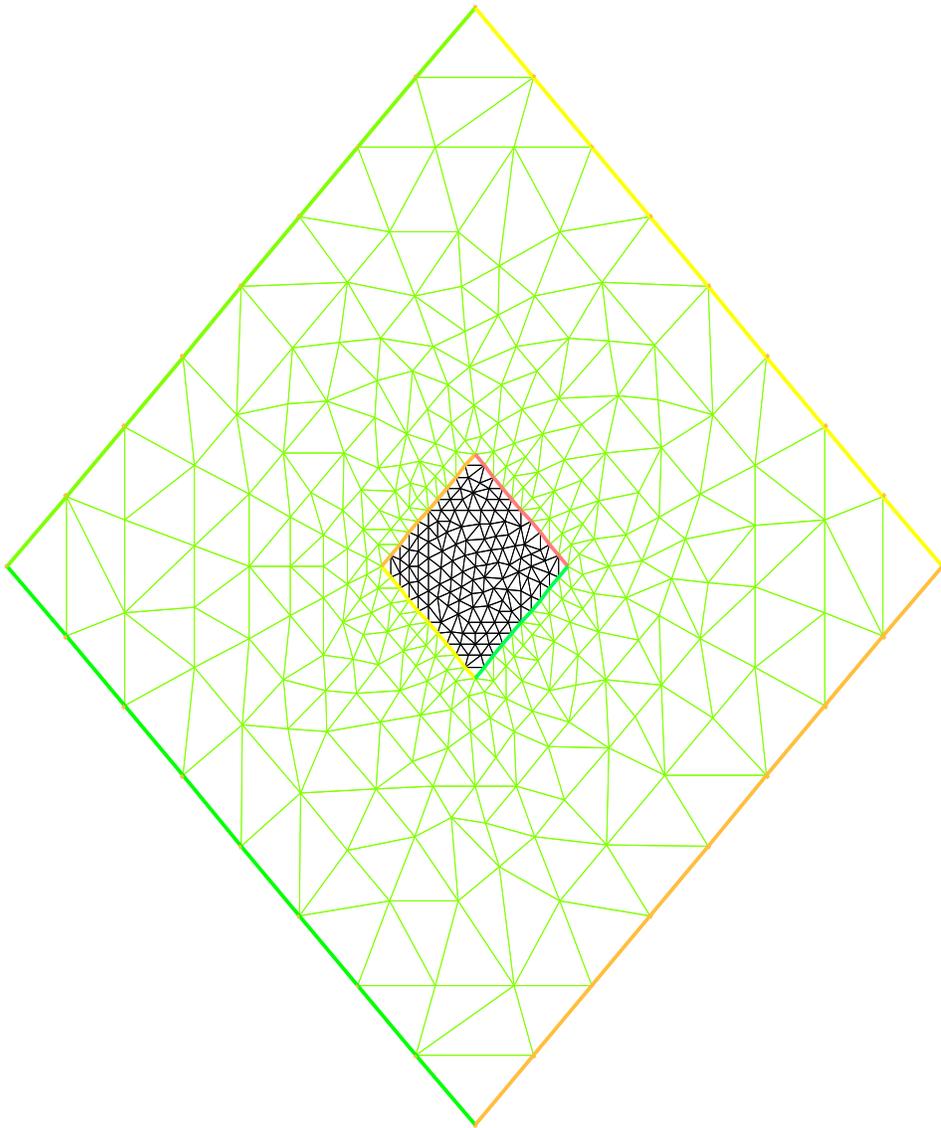


Figure 4.3.2 - Maillage de la carte (nombre de triangles = 750, nombre de noeuds = 392)

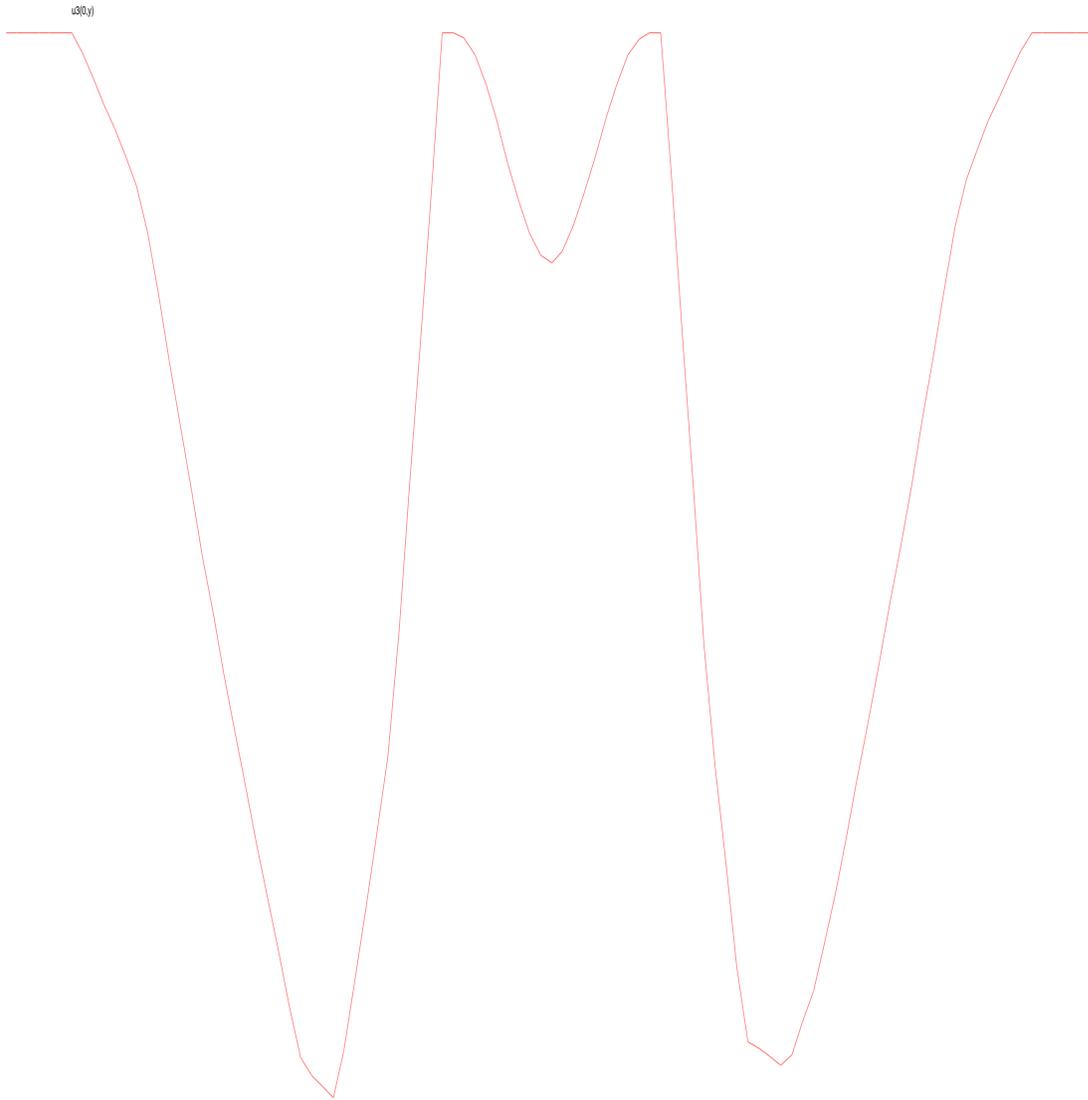


Figure 4.3.3 - Graphe du déplacement de $u_3(0,y)$ et y dans $[-b, b]$

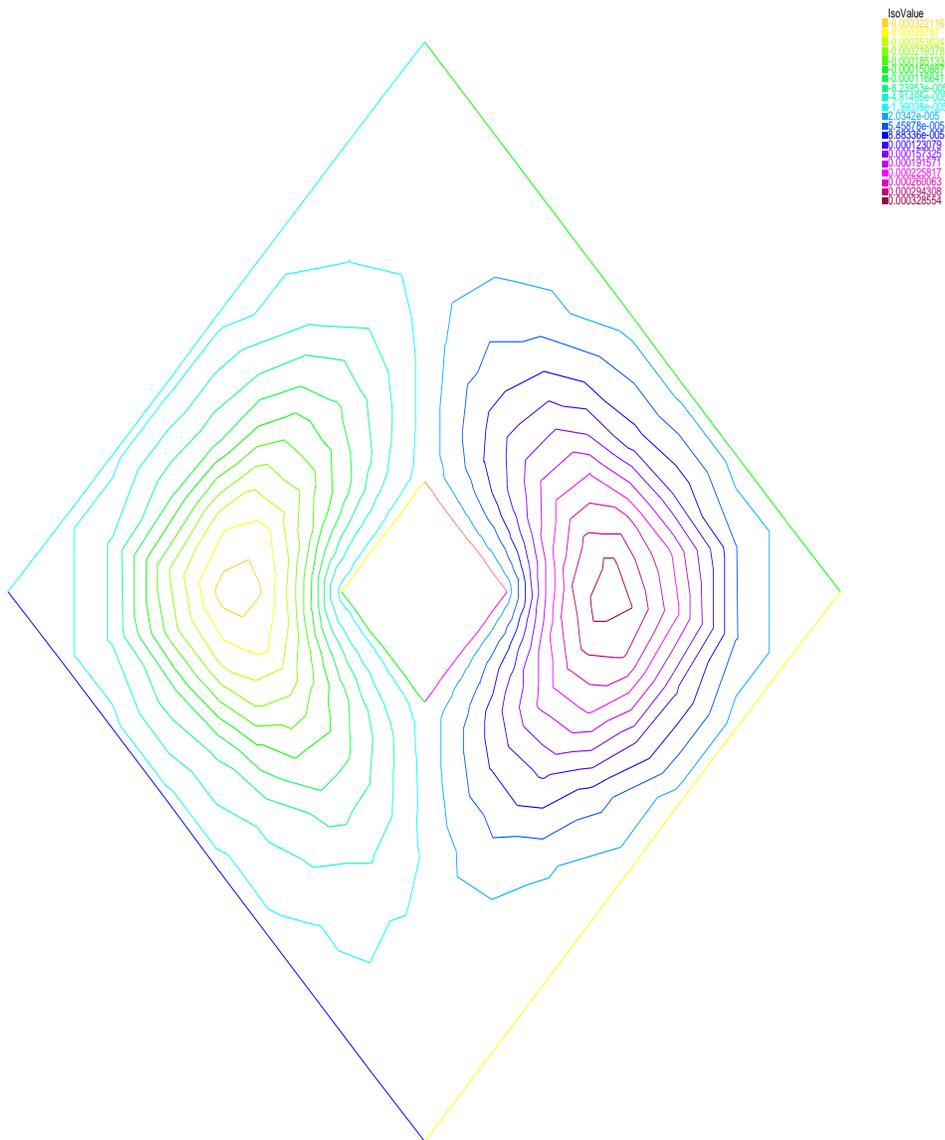


Figure 4.3.4 - Déplacement du composante cartésienne u_1

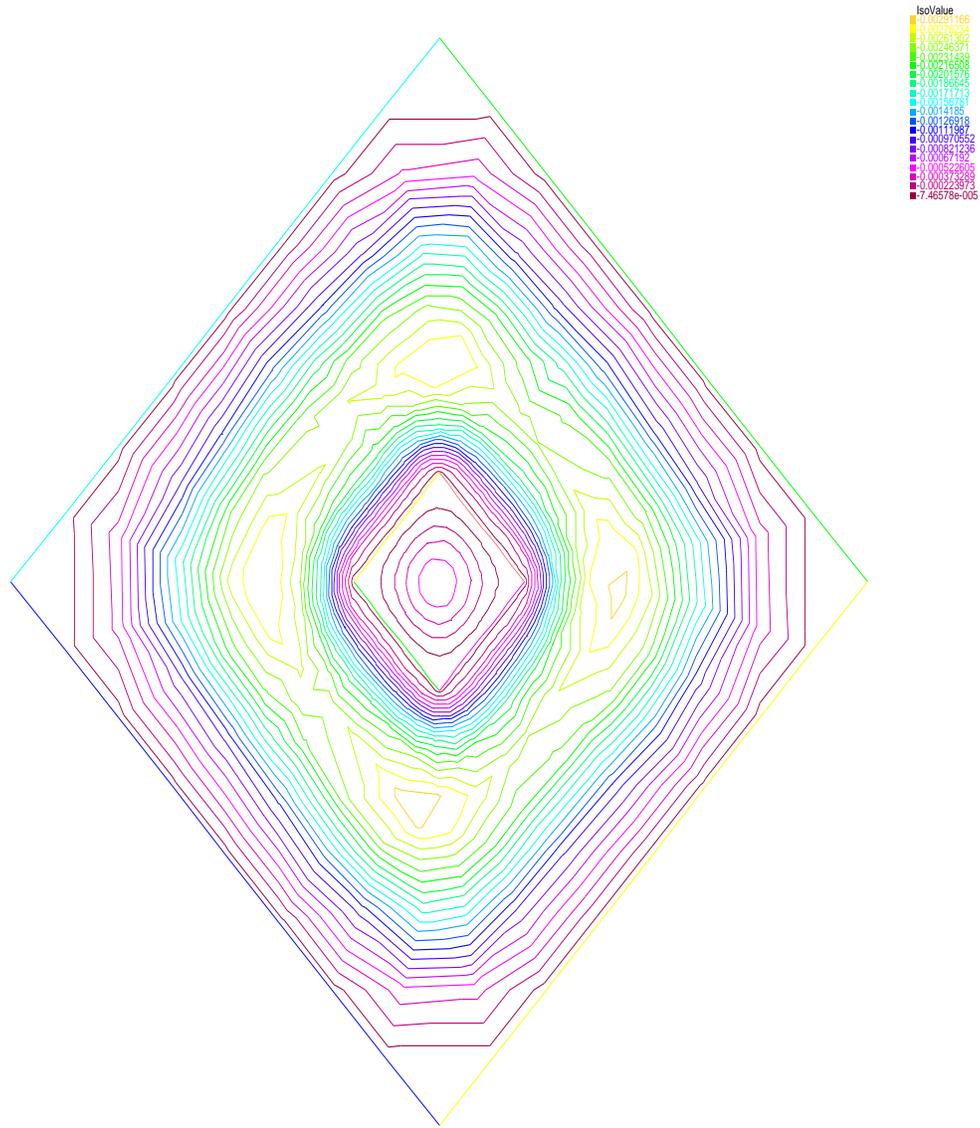
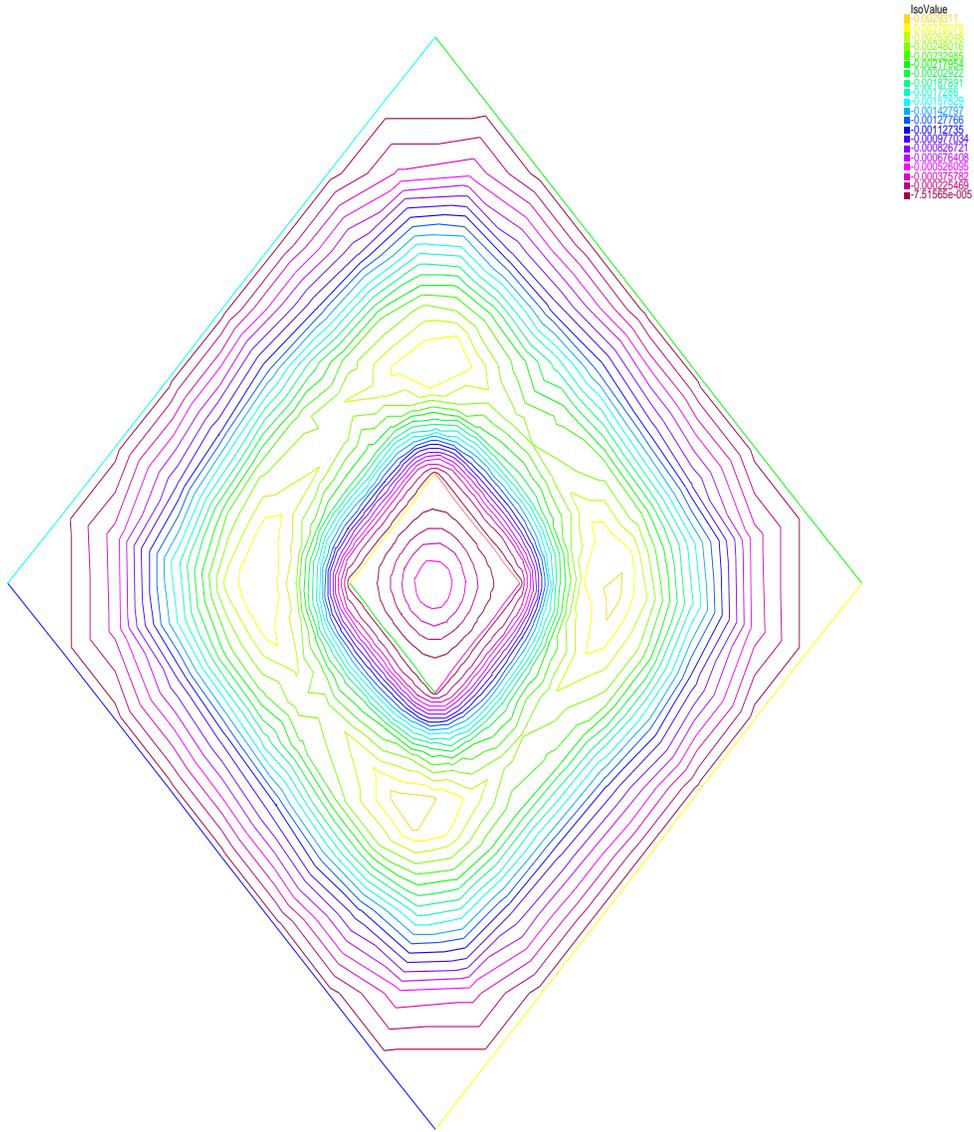


Figure 4.3.6 - Déplacement du composante normale cartésienne $u_3 = u \cdot e_3$



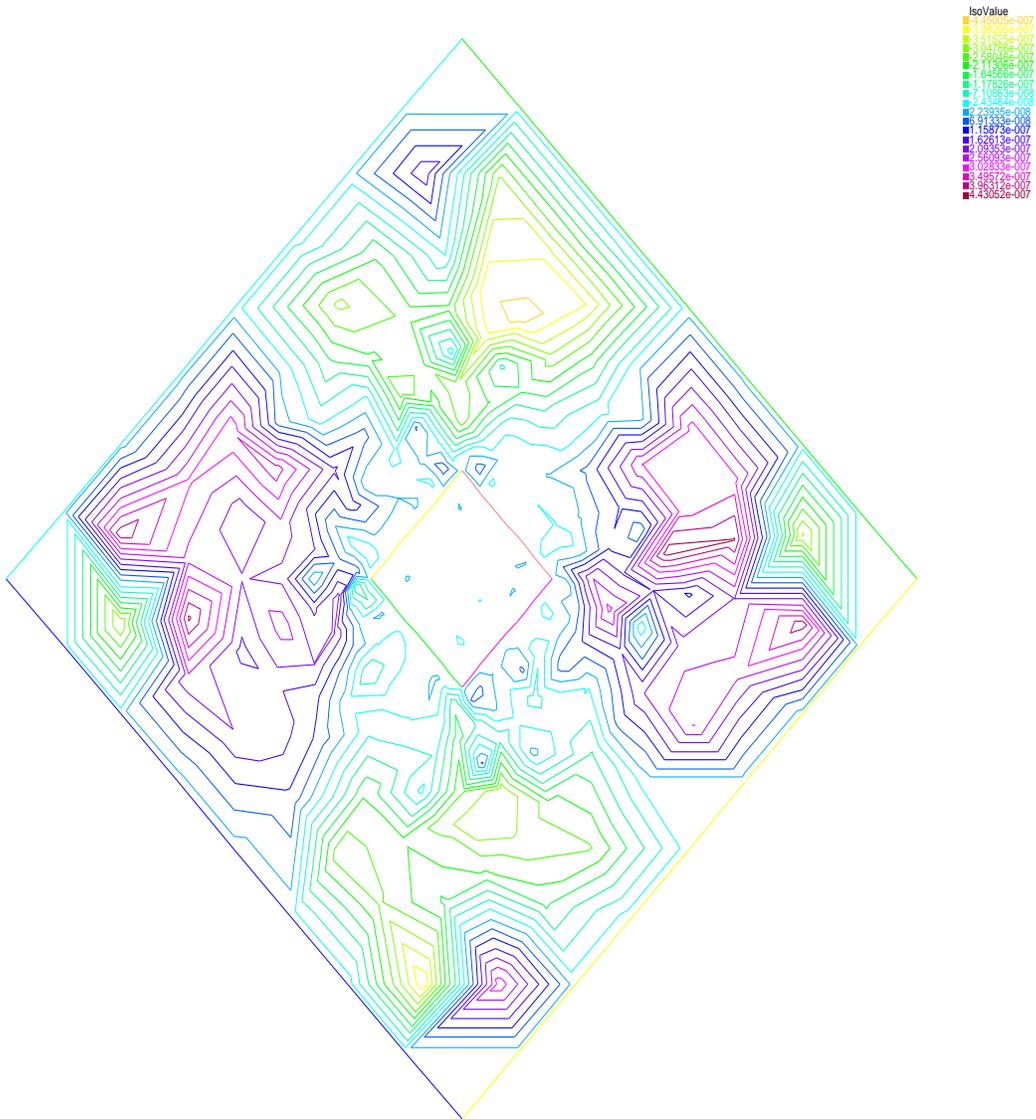
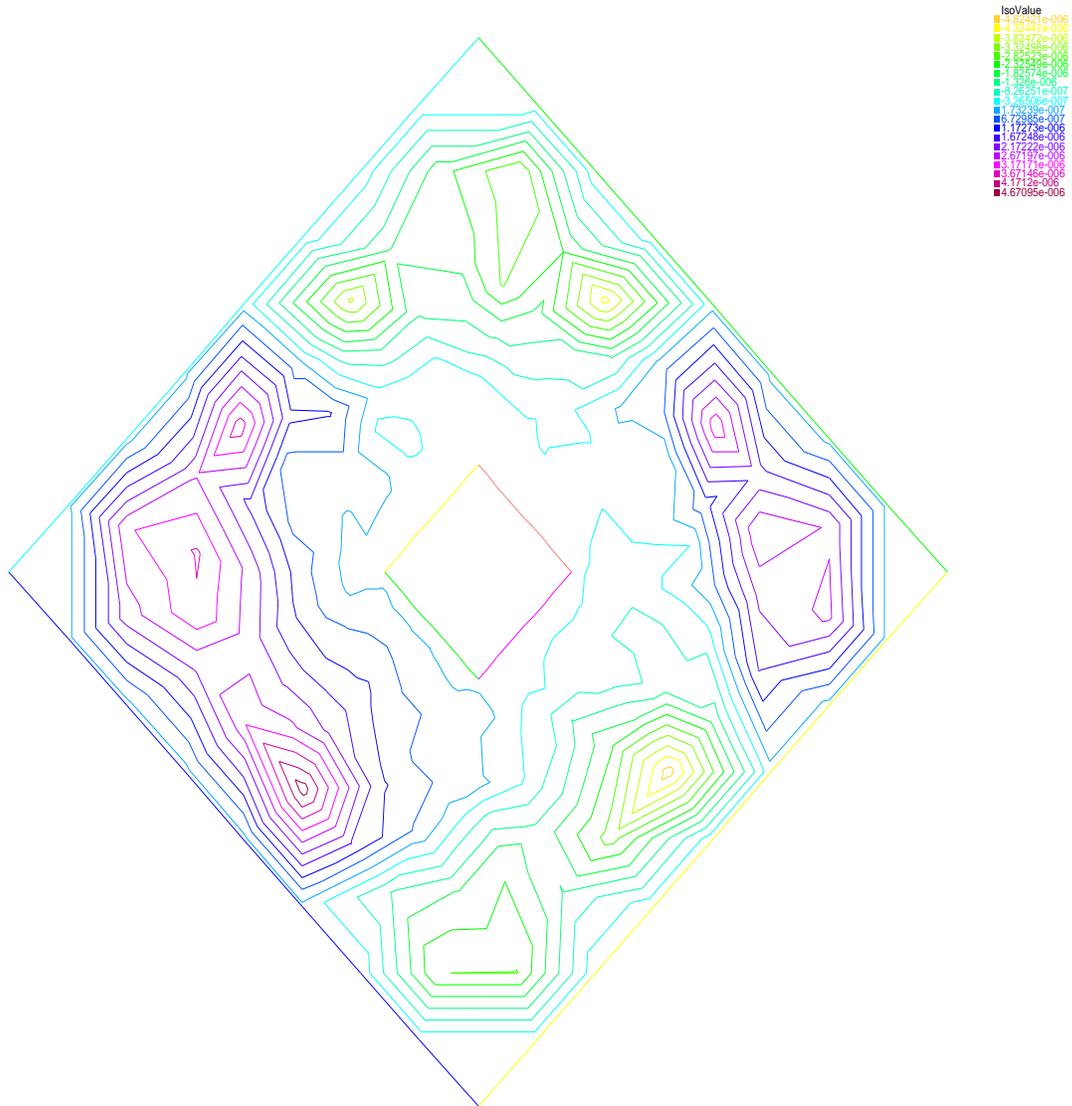


Figure 4.3.8 - Rotation normale



Bibliographie

- [1] R.-A. Adams, Sobolev spaces Academic Press, 1975.
- [2] M. Ainsworth, J.T. Oden, A posteriori error estimation in finite element analysis, Chichester, Wiley, (2000)
- [3] M. Ainsworth, J.T. Oden, C.Y. Lee, Local a posteriori error estimators for variational inequalities, Numer. Methods for Partial Differential Equations 9 (1993), pp. 23-33.
- [4] P. Alart, A. Curnier, Generalisation of Newton type methods to contact problems with friction, J. Mecan. Theor. Appl., 7 (1988), pp. 67-82.
- [5] A.-H. Antes H., Panagiotopoulos P.D., 1992, The boundary integral approach to static and dynamic contact problems-equality and inequality methods, International Series of Numerical Mathematic, 108, Birkhuser Verlag, Basel.
- [6] J.F. Archard, 1957, Elastic deformation and the laws of friction, Proc. Roy. Soc. London, A, 243, pp. 190-205.

- [7] D. N. Arnold et F. Brezzi, Locking-free finite element methods for shells, *Math. Comp.*, 66 (1997), pp. 1-14.
- [8] R.E. Bank, D.J Rose, Some error estimate for the box method. *SIAM J. Numer. Anal.* 24, 1987, 777-787.
- [9] C. Bardos, Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 3, 1970, 185–233.
- [10] Bay N., Wanheim T., 1976, Real area of contact and friction stress at high pressure sliding contac, *Wear*, 38, pp. 201-204.
- [11] Bay N., Wanheim T., Avitzur B., 1987, Models for friction stress in metal forming, *NARMC XV*, pp. 372-379.
- [12] Z. Belhachmi, F. Ben Belgacem, 2003, Quadratic finite element approximation of the Signorini problem, *Math. Comp.*, 72(2003), pp. 83-104.
- [13] Z. Belhachmi, J. M. Sac-Epée et J. Sokolowski, Mixed finite element methods for smooth domain formulation of crack problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(2005), PP. 1295-1320.
- [14] Z. Belhachmi, F. Hecht et S. Tahir, 2008, Adaptive finite element for a fictitious domain formulation of some variational inequalities, *Preprint LMAM*, 2008.

- [15] F. Ben Belgacem, Y. Renard, Hybrid finite element methods for the Signorini problem, *Math. Comp.*, 72(2003), pp. 1117-1145.
- [16] F. Ben Belgacem, C. Bernardi, A. Blouza, F. Taallah, On the Obstacle Problem for a Naghdi Shell, *J Elast* (2011) 103, pp. 1-13
- [17] F. Ben Belgacem, C. Bernardi, A. Blouza, M. Vohralik, A finite element discretization of the contact between two membranes, *Math. Model. Numer. Anal.* 43, 2009, 33-52.
- [18] F. Ben Belgacem, C. Bernardi, A. Blouza, M. Vohralik, On the unilateral contact between membranes, Part 1 : Finite element discretization and mixed reformulation, *Mathematical Modelling of Naturel Phenomena* 4, 2009, 21-43.
- [19] M. Bernadou, P.G. Ciarlet, Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coque de W.T. Koiter, in *Computing Meyhods in Applied Sciences and Engineering*, R. Glowinski and J.-L. Lions eds., *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol. 134, Springer, Berlin, 1976, 89-136.
- [20] M. Bernadou, *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*, Masson, 1994.
- [21] M. Bernadou et P.G. Ciarlet, B. Miara, Existence theorems for two-dimensional linear shell theories. *J. Elasticity* 34 (1994), no. 2, 111–138.

- [22] M. Bernadou et P.G. Ciarlet, Existence theorems for two-dimensional linear shell theories, *J.Elasticity*, 34, 1994, pp.111-13
- [23] C. Bernardi, F. Ben Belgacem, A. Blouza, et M. Vohralik, A finite element discretization of the contact between two membranes, *M2AN*, 43, p.p. 33-52, 2008.
- [24] C. Bernardi, F. Ben Belgacem, A. Blouza, et M. Vohralik, On the Unilateral Contact Between Membranes Part 1 : Finite Element Discretization and Mixed Reformulation, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena, Modelling and numerical methods in contact mechanics*, Vol. 4, No. 1, pp. 21-43, 2009.
- [25] C. Bernardi, F. Ben Belgacem, A. Blouza, et M. Vohralik, On the Unilateral Contact Between Membranes Part 2 : A posteriori analysis and numerical experiments, *soumis*, 2009.
- [26] C. Bernardi et A. Blouza, Spectral discretization of a Naghdi shell model. *SIAM J. Numer. Anal.* 45, no. 6, 2653-2670, 2007.
- [27] C. Bernardi, A. Blouza, F. Hecht, H. Le Dret, A posteriori analysis of finite element discretization of a Naghdi shell model, *submitted*
- [28] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti, *Discrétisation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, Collection "Mathématiques et Applications" 45, 2004, Springer-Verlag.

- [29] C. Bernardi, A. Blouza, F. Hecht et H. Le Dret, A posteriori analysis of finite element discretizations of a Naghdi shell model, prépublication R08048 du LJLL. Soumis.
- [30] A. Blouza, Étude de quelques problèmes de coques en élasticité, Thèse de l'Université Paris 6, Juin 1996.
- [31] A. Blouza, L. El Alaoui et S. Mani, A posteriori analysis of a Koiter's shell model in cartesian coordinates, Proceedings of 4th Tam–Tam, Kenitra, 2009.
- [32] A. Blouza, Existence et unicité pour le modèle de Naghdi pour une coque peu régulière, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 324,1997, 839-844.
- [33] A. Blouza et H. Le Dret, Naghdi's shell model : Existence, uniqueness and continuous dependence on the midsurface, Journal of Elasticity 64, 2001, 199-216.
- [34] A. Blouza et H. Le Dret, Sur le lemme du mouvement rigide, C.R. Acad.Sci.Paris, 319, Série I, 1994, pp. 1015-1020
- [35] A. Blouza et H. Le Dret, Existence et unicité pour le modèle de Naghdi pour une coque peu régulière, C.R. Acad. Sci. Paris, 319, Série I, 1994b, pp. 1127-1132.
- [36] A. Blouza, F. Hecht, and H Le Dret, Two Finite Element Approximations of Naghdi's Shell Model in Cartesian Coordinates. SIAM J. Numer.Anal. Vol.44, N. 2, 2006, pp. 636-654.

- [37] A. Blouza, L. El Alaoui et S. Mani, A posteriori analysis of penalized and mixed formulations of a Koiter shell model. Soumis.
- [38] A. Blouza, F. Brezzi et C. Lovadina, 1999, Sur la classification des coques linéairement élastiques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, série I, pp. 831-836.
- [39] , H. Blum, F. Suttmeier, 2000, An adaptive finite element discretization for a simplified Signorini problem, *Calcolo*, 37(2000), pp. 65-77.
- [40] , V. Bostan, W. Han, 2006, A posteriori error analysis for finite element solutions of a frictional contact problem, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(2006), pp. 1252-1274.
- [41] Bouchitté G., Lidouh A., Suquet P., 1991, Homogénéisation de frontière pour la modélisation du contact entre un corps déformable non linéaire et un corps rigide, *CRAS, Série I*, t. 313, pp. 967-972.
- [42] F.-P. Bowden et D. Tabor, The area of contact between stationary and between moving surfaces, *Proc. Soc. London*, A169(1966), pp. 1521-1544.
- [43] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection "Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise", 1983.
- [44] H. Brezis, G. Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, 96, 153-180.

- [45] F. Brezzi, W.W. Hager, P.A. Raviart, Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. II. Mixed methods, *Numer. Math.* 31,1978, 1-16.
- [46] Z. Chen, R.H. Nochetto, 2000, Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems, *Numer. Math.* 84, 527-548.
- [47] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Volume III : Theory of Shells*, North-Holland, 2000.
- [48] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, (1978).
- [49] Cocu M., Pratt E., Raous M.,1995, Existence d'une solution du problème quasi statique de contact unilatéral avec frottement non local, *C.R. Acad. Sci. Paris* 320, Serie I, 1413-1417.
- [50] Cocu M., Pratt E., Raous M., 1996, Formulation and approximation of quasi-static frictional contact, *Int. J. Engng. Sci.*, vol 34, 7, 783-798.
- [51] Cocu M., Rocca R., 2000, Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion., *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34(5), 981-1001.
- [52] E. Cosserat et F. Cosserat, 1909, *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris.

- [53] G. Duvaut, 1980, Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, C. R. Acad. Sci. Paris 290, Serie A, 263-265.
- [54] G. Duvaut et J.-L. Lions, les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, 1972.
- [55] R.S Falk, Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities. Math. Comput., 28 (1974), 963-971.
- [56] G. Fichera, Existence theorems in elasticity-boundary value problem of elasticity with unilateral constraints, Encyclopedia of Physics, 2(1972), pp. 347-427.
- [57] V. Girault, P.A. Raviart, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag (1986).
- [58] Glowinsky R., Lions J.L., Trémolieres R., 1976, Analyse numérique des inéquations variationnelles, Dunod, Paris.
- [59] Grégo L., 1995, Méthodes multiniveaux pour des problèmes de contact unilatéral avec frottement, Thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille
- [60] P. Grisvard, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman, (1985).
- [61] W. Han et M. Sofonea, Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity, Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society and International Press, 30(2002)

- [62] J. Haslinger, I. Hlavaček, J. Nečas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, in Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV, P.G. Ciarlet & J.L. Lions eds. North-Holland, Amsterdam (1996), pp. 313-485.
- [63] Jean M., Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement, in Delamare, ED., 1993.
- [64] P. Hild and S. Nicaise, Residual a posteriori error estimators for contact problems in elasticity. ESAIM : M2AN 41 (2007), pp 897-923.
- [65] Johnson K.L., 1987, Contact Mechanics, Cambridge University Press, U.K.
- [66] N. Kikuchi, J. T. Oden. Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Studies in Applied and Numerical Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988.
- [67] A. Klarbring, A. Mikelie et M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, Internat. J. Engrg. Sci., 26(1988), pp. 811-832.
- [68] A. Klarbring, A. Mikelie et M. Shillor, On friction problems with normal compliance, Nonlinear Anal., 13(1989), pp. 49-60.
- [69] Lascaux P., Theodor R., 1987, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Masson, Paris.
- [70] Latil J.C., Raous M., 1990, Module Gyptis Version 1.0 : Contact unilatéral avec frottement en mécanique des structures- Inéquations variationnelles, Publication

LMA, 132, CNRS.

- [71] T. Laursen, Computational contact and impact mechanics, Springer, 2002.
- [72] J.L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure and Appl. Math., 20 (1967), 493-519.
- [73] J.-A.-C. Martins et J.-T. Oden, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 52(1985), pp. 527-634.
- [74] J.-A.-C. Martins et J.-T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, Nonlinear Anal., 11(1987), pp. 407-428.
- [75] J.-A.-C. Martins et E.-B. Pires, Free boundary problems : theory and applications, Longman Scientific et Technical J.-M. Chadam et H. Rasmussen Editors, 1(1990), pp. 323-328.
- [76] Moreau J., 1988, Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, CISM Courses an Lectures, 302, Springer-Verlag, 1-82.
- [77] Raous M., Chabrand P., Lebon F., 1988, Numerical methods for solving unilateral contact problems with friction, dans [Raous, éditeur, 1988].
- [78] Raous M., Moreau J., Jean M., 1995, Contact Mechanics, Plenum Publisher, New York.

- [79] Raous M., 1999, Quasistatic Signorini problem with Coulomb friction and coupling to adhesion, in P. Wriggers-P. Panagiotopoulos, New developments in contact problems, CISM Courses and Lectures, n 384, Springer Verlag, Wien-New York, pp. 101-178.
- [80] Raous M., Boyer R., Grego L., 1993, Convergence et efficacité de méthodes multigrilles pour un problème de contact avec frottement, Actes du Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 11-14 mai 1993.
- [81] Raous M., 2000, Constitutive models and numerical methods for frictional contact, Section 8.6 in J. Lemaitre (Ed.), Handbook of Materials Behavior - Non linear models and Properties, Academic Press, pp. 777-786.
- [82] Raous M., Chabrand P., Dubois F., 1996, Programmation mathématique pour le contact avec frottement et comparaison avec d'autres méthodes, Actes du Colloque National de Calcul des Structures, 12-19 mai 1996.
- [83] G. Raugel, Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un polygone, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 286 (1978) A791-A784.
- [84] P.R. Raviard, J.M Thomas, A mixed finite element method for second order elliptic problems. In : Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics, 606, Springer, 1977, pp. 292-315.

- [85] Rocca R., 1999, Existence of a solution for a quasistatic problem of unilateral contact with local friction., C. R. Acad. Sci. Paris 328 (12), 1253-1258.
- [86] M. Shillor, M. Sofonea et J.-J. Telega, Models and analysis of quasistatic contact. Variational methods, Springer, 2004.
- [87] A. Signorini, Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata, Rend. de Matematica, 18(1959), pp. 95-139.
- [88] L. Slimane, A Bendali, P. Laborde, Mixed formulations for a class of variational inequalities, Modél. Math. Anal. Numér. , 38 (2004), 177-201.
- [89] F. Taallah, F.Z. Nouri, A Study of Naghdi's Shell with a Unilateral Contact of a Rigid Obstacle, Journal of Mathematics and Statistics 6 (3), pp. 333-341, 2010.
- [90] D.-M. Tolstor, significance of the normal degree of freedom and natural vibrations in contact with friction, Wear, 10(1967), pp. 199-213.
- [91] M. Vohralik. A posteriori error estimation in the conforming finite element method based on its local conservativity and using local minimization. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 346 (2008), pp. 687-690.
- [92] B.I. Wohlmuth, An a posteriori error estimator for two body contact problems on non-matching meshes. J. Sci. Computing, 33 (2007), pp. 25-45.