

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR ANNABA
BADJI MOKHTAR ANNABA UNIVERSITY



Faculté des sciences de l'Ingénieur.
Département d'Electronique

Année : 2009.

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de magister

Simplification d'un Modèle ASM1.

Option: Surveillance des Systèmes à Capteurs Intelligents.

Par

BOUZENAD Khaled

DIRECTEUR DE MEMOIRE : K. MANSOURI M. Conférences U. Annaba.

DEVANT LE JURY

PRESIDENT : N. DOGHMANE Professeur
U. Annaba.

EXAMINATEURS : M-F. HARKAT M. Conférences U. Annaba.
M. KADDACHE M. Conférences U. Annaba.
M. BENOURET M. Conférences

U. Annaba.

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur MANSOURI Khaled, Maître de conférence à l'université d'Annaba, Monsieur HARKAT Mohamed Faouzi Maître de conférence à l'université d'Annaba et Monsieur DOGHMANE Noureddine professeur à l'université d'Annaba, de m'avoir encadré durant ce travail. Qu'ils trouvent ici toute mes reconnaissances pour la confiance qu'ils ont su m'accorder, ainsi pour avoir contribué de manière essentielle aux résultats de ce travail, par leur clarté à l'heure de structurer le travail, leurs conseils, leur professionnalisme, leurs compétences techniques qui ont été très importantes pour la réalisation du travail et très formateurs pour moi.

Je tiens à remercier fortement tous les enseignants de l'option : surveillance des systèmes à capteurs intelligents, de m'avoir aidé durant tout le parcours de post-graduation. J'adresse de sincères remerciements à tous les notables membres du jury pour l'honneur de leur présence indispensable et d'accepter l'évaluation objective de ce modeste travail.

Que soient remerciées aussi toutes les personnes qui, par la confiance qu'ils m'ont octroyée, les connaissances qu'ils ont toujours su partager avec moi, leur soutien morale, ainsi que leur support quotidien, ont rendu possible ce travail. Qu'ils retrouvent dans ces quelques lignes toutes mes grâces et mes reconnaissances.

À mes chers parents.

À tous les membres de ma famille.

À tous mes amis.

À tous ceux qui m'aiment.

ملخص: نقترح من خلال هذا البحث مقارنة متعددة النماذج للأنظمة غير الخطية، والتي تتضمن تمثيل هاته الأخيرة بنظام متعدد النماذج الخطية حول نقطة، أو عدة نقاط عمل في مجال معين، حيث تسمح لنا هذه الدراسة بتحديد عدد النماذج الخطية المقترحة ومجال صلاحيتها، كما بإمكان المعادلات التفاضلية الجزئية أن تبسط وأن تجعل معادلات ذات صفة خطية حول نقطة عمل معينة بطريقة تسمح لنا بالحصول على نظام متعدد النماذج مطابق لحركية النظام غير الخطي المعتبر. كمثال للمحاكاة نقترح آلية لتصفية مياه الصرف الممثلة بالنموذج *ASMI* العديد من النماذج المبسطة تم اقتراحها نظرياً بهدف الحصول على نموذج قابل للاستعمال على أرض الواقع من بينها النموذج مقترح من طرف [4]. نهدف من خلال هذه الدراسة إجراء مقارنة متعددة النماذج الخطية للنموذج *ASMI*.

Résumé: Dans ce travail, (i) nous proposons une approche de multi-modélisation des systèmes non linéaires, assurant une représentation linéaire autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement sur une plage de fonctionnement. Elle permet la détermination du nombre de modèles et de leur plage de validité. La résolution des équations aux dérivées partielles modélisant fidèlement la dynamique des systèmes non linéaires. Les équations aux dérivées partielles peuvent être simplifiées et linéarisées autour d'un point de fonctionnement de façon à obtenir un modèle assez fidèle de la dynamique du système non linéaire considéré. (ii) Nous présentons un modèle simplifié (de référence) issu du modèle biologique du modèle *ASMI* d'une station d'épuration à boues activées. Étant donné sa structure complexe, de nombreux modèles réduits sont proposés dans la littérature afin d'obtenir un modèle plus exploitable en situation réelle. Le modèle réduit obtenu est un modèle non linéaire présenté par [4]. Notre objectif consiste à appliquer l'approche de multi-modélisation sur le modèle *ASMI* réduit de la station d'épuration à boues activées.

Abstract: In this subject, (i) we propose an approach of multi-modeling of nonlinear systems, providing a linear representation around one or several operating points on an interval of operation. It allows to determination the number of models and their range of validity. The resolution of partial differential equations accurately, modeling the dynamics of nonlinear systems. The partial differential equations can be simplified and linearized around an operating point in order to obtain a fairly accurate model of the dynamics of nonlinear system under consideration. (ii) We present a simplified model (benchmark) from the biological model *ASMI* model of an activated sludge for process for wastewater treatment. Given its complex structure, many reduced models are proposed in the literature to obtain a more usable model in real situations. The reduced obtained model is a nonlinear model presented by [4]. Our goal is to implement the approach of multi-modeling on the *ASMI* model reduced of the sewage treatment plant activated sludge.

Table des matières

| | |
|------------------------------------|-------------------|
| Introduction générale | 3 |
|------------------------------------|-------------------|

Chapitre1 : Rappels Et Généralités

| | |
|--|-------------------|
| 1.1. Introduction | 4 |
| 1.2. Modèle d'état ou représentation interne | 5 |
| 1.2.1 Exemple introductif..... | 7 |
| 1.3. Modèle de transfert ou représentation externe | 9 |

[Chapitre2](#) : Linéarisation Autour d'un ou Plusieurs Points de Fonctionnements

| | |
|---|--------------------|
| 2.1 Introduction | 11 |
| 2.2 Linéarisation..... | 11 |
| 2.2.1 Linéarisation du modèle d'état | 12 |
| 2.2.2 Point d'équilibre et ensemble d'équilibre | 12 |
| 2.3 Linéarisation autour d'un point d'équilibre | 12 |

[Chapitre3](#): Représentation multi-modèles

| | |
|---|--------------------|
| 3.1. Introduction | 18 |
| 3.2. Représentation multi-modèle | 19 |
| 3.3. Recherche d'une structure multi-modèle par linéarisation | 20 |
| 3.3.1 Obtention d'une représentation multi-modèle globale à partir de modèles locaux..... | 25 |
| 3.4. Optimisation paramétrique | 29 |
| 3.4.1. Algorithme du gradient | 30 |
| 3.4.1. Algorithme de Newton | 31 |
| 3.4.1. Algorithme de gausse-Newton | 31 |

| | |
|--|----|
| 3.4.1. Algorithme de marquardt levenberg | 31 |
|--|----|

| |
|---|
| <i>Chpitre4 : Application de L'Approche Multi-modèles sur le Modèle ASM1 d'une Station d'Épuration</i> |
|---|

| | |
|---|----|
| 4.1 Introduction | 38 |
| 4.2 Épuration des eaux usées..... | 39 |
| 4.2.1 Définition | 39 |
| 4.2.2 Les grandes étapes du traitement | 40 |
| 4.3. Modélisation des stations d'épuration..... | 41 |
| 4.3.1 Modèle de référence | 43 |
| 4.3.2 Modèle réduit | 50 |
| 4.3.2.1 Simplification du modèle de référence..... | 51 |
| 4.3.2.2 Expression du modèle réduit | 53 |
| 4.4. Utilisation en ligne du modèle réduit | 55 |
| 4.4.1 Conditions de fonctionnement aérobies | 55 |
| 4.4.2 Conditions de fonctionnement anoxiques | 55 |
| 4.4.3 Conditions de fonctionnement anaérobies | 56 |
| 4.5. Application de l'approche multimodèle sur le modèle ASM1 réduit | 58 |
| 4.5.1.1. Conditions de fonctionnement anoxie..... | 58 |
| 4.5.2.1.1. Application de l'approche de multi-modélisation sur le sous modèle Conditions de Fonctionnement anoxies..... | 58 |
| 4.5.2.1.2 Résultats et simulation | 61 |
| 4.5.1.2. Conditions de fonctionnement anaérobie..... | 64 |
| 4.5.2.2.1 Application de l'approche multi-modèle sur le sous modèle conditions de fonctionnement anaérobies..... | 64 |
| 4.5.2.2.2 Résultats et simulation | 66 |
| 4.5.2.3. Perspectives | 68 |

| | |
|---|-----------|
| <i>Conclusion générale</i> | 69 |
|---|-----------|

Liste des figures

| | |
|---|----|
| 1.1 — Bras de robot..... | 7 |
| 2.1 Variation de $g(x)$ pour une variation δx de la variable autour de x | 13 |
| 3.1. — Principe de l’approche multimodèle..... | 19 |
| 3.2 - Gain statique. | 33 |
| 3.3 - les fonctions d’activation et de pondération..... | 34 |
| 3.4 - l’évolution des variables d’états $x_n(t)$ du modèle non linéaire et ceux du multi-modèle estimés..... | 35 |
| 3.5 – l’évolution des variables d’états $x_n(u)$ du modèle non linéaire et ceux du multi modèle estimés..... | 35 |
| 3.6 – l’évolution des variables d’états $x_n(u)$ du modèle non linéaire et ceux du multi-modèle estimés lorsqu’il s’agit d’une commande créneau..... | 36 |
| 4.1. Procédé de traitement à boues activées en bassin unique..... | 40 |
| 4.2. L’évolution des variables d’états des concentrations anoxies X_{DCO} , S_{NH} , S_{NO} et S_{ND} du modèle ASM1 réduit (non-linéaire). Et ceux du multi-modèle estimées (linéarisé) (pour $M=2$)..... | 59 |
| 4.3. L’évolution des fonctions d’activations et de pondérations (pour $M=2$)..... | 59 |
| 4.4. L’évolution des variables d’états des concentrations anoxies X_{DCO} , S_{NH} et S_{ND} du modèle ASM1 réduit (non-linéaire). Et ceux du multi-modèle estimées (linéarisé) (pour $M=3$)..... | 59 |
| 4.5. L’évolution des fonctions d’activations et de pondérations(pour $M=3$)..... | 59 |

| | |
|---|----|
| 4.6. L'évolution des variables d'états des concentrations anoxies X_{DCO} , S_{NH} , S_{NO} et S_{ND} du modèle ASM1 réduit (non-linéaire). Et ceux du multi-modèle estimées (linéarisé) (pour $M=2$)..... | 64 |
| 4.7. L'évolution des fonctions d'activations et de pondérations (pour $M=2$)..... | 64 |
| 4.8. L'évolution des variables d'états des concentrations anoxies X_{DCO} , S_{NH} et S_{ND} du modèle ASM1 réduit (non-linéaire). Et ceux du multi-modèle estimées (linéarisé) (pour $M=3$)..... | 65 |
| 4.9. L'évolution des fonctions d'activations et de pondérations(pour $M=3$)..... | 65 |

Liste Des Tableau

| | |
|---|----|
| 4.1. Variables d'état du modèle de dégradation biologique..... | 44 |
| 4.2. Modèle ASM1 modifié (source [11])..... | 48 |
| 4.3. Paramètres stœchiométriques et cinétiques du modèle de dégradation (source [4])..... | 49 |
| 4.4. Valeurs des paramètres spécifiques..... | 54 |

Notations

Notations relatives au procédé de traitement des eaux

Paramètre Définition Unité

| | | |
|-------------|---|----------------------|
| S_I | Concentration de matière organique soluble inerte | $[mg.l^{-1}]$. |
| S_S | Concentration de substrat facilement biodégradable | $[mg.l^{-1}]$. |
| S_O | Concentration en oxygène | $[mg.l^{-1}]$. |
| S_O^{sat} | Concentration de saturation de l'oxygène | $[mg.l^{-1}]$. |
| S_{NO} | Concentration d'azote sous forme de nitrite et de nitrate | $[mg.l^{-1}]$. |
| S_{NH} | Concentration d'azote sous forme d'ammoniaque | $[mg.l^{-1}]$ |
| S_{ND} | Concentration d'azote organique soluble et biodégradable | $[mg.l^{-1}]$ |
| S_{ALK} | Alcalinité | Unité molaire |
| X_I | Concentration de la matière organique particulaire inerte | $[mg.l^{-1}]$ |
| X_S | Concentration du substrat lentement biodégradable | $[mg.l^{-1}]$ |
| $X_{B,H}$ | Concentration de la biomasse hétérotrophe active | $[mg.l^{-1}]$ |
| $X_{B,A}$ | Concentration de la biomasse autotrophe active | $[mg.l^{-1}]$ |
| X_{ND} | Concentration d'azote organique particulaire biodégradable | $[mg.l^{-1}]$ |
| X_P | Concentration en produit particulaire résultant du décès de la biomasse | $[mg.l^{-1}]$ |
| b_A | Coefficient de mortalité des autotrophes | $[d^{-1}]$ |
| b_H | Coefficient de mortalité des hétérotrophes | $[d^{-1}]$ |
| f_{rXI} | Fraction de DCO inerte issue du décès de la biomasse | [-] |
| i_{NBM} | Masse d'azote dans la biomasse | $[g_N g_{COD}^{-1}]$ |
| i_{NXI} | Masse d'azote dans la matière organique particulaire inerte | $[g_N g_{COD}^{-1}]$ |
| k_{La} | Coefficient de transfert d'oxygène | $[d^{-1}]$ |
| $K_{(.)}$ | Coefficient de demi-saturation : | |
| $K_{NH:A}$ | de l'ammoniac pour la biomasse autotrophe | $[g_{OH}m^{-3}]$ |
| K_{NO} | du nitrate pour la biomasse hétérotrophe | $[g_{ON}m^{-3}]$ |
| $K_{O:A}$ | de l'oxygène pour la biomasse autotrophe | $[g_{O_2}m^{-3}]$ |
| $K_{O:H}$ | de l'oxygène pour la biomasse hétérotrophe | $[g_{O_2}m^{-3}]$ |
| K_S | pour les hétérotrophes | $[g_{COD}m^{-3}]$ |

| | |
|----------------|--|
| K_X | pour l'hydrolyse du substrat lentement biodégradable [$g_{DCO}g^{-1}_{DCO}$] |
| Y_A | Coefficient de rendement des autotrophes [-] |
| Y_H | Coefficient de rendement des hétérotrophes [-] |
| μ_A | Taux de croissance maximal des autotrophes [-] |
| μ_H | Taux de croissance maximal des hétérotrophes [-] |
| η_{NO_3g} | Facteur de correction pour μ_H sous condition anoxie [m^3] |
| η_{NO_3h} | Facteur de correction pour l'hydrolyse sous condition anoxie [m^3d^{-1}] |
| V_O | Volume de l'aérateur [m^3] |
| D_{in} | Débit d'entrée [m^3d^{-1}] |

Acronymes

| | |
|------|--|
| ASM | Modèle de boues activées (<i>Activated Sludge Model</i>), |
| DCO | Demande Chimique en Oxygène, |
| IAWQ | Association internationale pour la qualité de l'eau (<i>International Association on Water Quality</i>), |
| IWA | Association internationale de l'eau (<i>International Water Association</i>), |
| LTI | Linéaire Temps Invariant (<i>Linear Time Invariant</i>), |
| ODE | Système d'équations différentielles (<i>Ordinary Differential Equations</i>), |
| SISO | Mono entrée Mono sortie (<i>Single Input Single Output</i>). |

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale.

Un système est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. La **modélisation** regroupe un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier. **La modélisation** théorique requiert une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Les systèmes physiques sont souvent complexes et difficilement exploitables, notamment pour **la commande et le diagnostic des systèmes**.

Le grand problème de l'automaticien est de représenter ces systèmes physiques avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable.

En automatique, pour décrire le comportement d'un système, une hypothèse communément faite est **la linéarité du système**, car les techniques d'analyse des modèles linéaires, dits LTI, ont été largement développées dans la littérature. Cependant, l'hypothèse de linéarité n'est vérifiée que dans une plage de fonctionnement restreinte autour **d'un point d'équilibre** du système. Alors, les performances du modèle se dégradent dès qu'on s'en éloigne et la recherche d'un modèle plus adapté et notamment **non linéaire** devient nécessaire.

La structure mathématique qui puisse remédier à l'inconvénient cité ci-dessus, tout en gardant la simplicité mathématique des modèles LTI, est l'approche globale, dite multi-modèle; c'est une représentation polytopique convexe pouvant être obtenue soit directement à partir d'un modèle mathématique **non linéaire** par transformation directe d'un modèle affine [Moré 00] **ou par linéarisation autour de différents points de fonctionnement** [Murr 00c], soit à partir de données sur les entrées et les sorties d'un système physique [Gass 00b].

Modéliser un processus n'est pas une fin en soi ; ce qui est demandé au processus est la réalisation d'une mission particulière de production. Pour que cette production soit garantie en quantité et qualité, il faut que toute anomalie de fonctionnement soit rapidement détectée puis prise en compte dans la stratégie de conduite du système considéré. Cette anomalie peut avoir comme l'origine des défauts de système, capteur, d'organes de commande (actionneur), des bruits, ...La non-détection à temps d'une anomalie peut entraîner des accidents provoquant des dangers humains et des dégâts matériels considérables.

La détection de défaut est une opération délicate puisqu'il faut, dans un contexte soumis aux aléas de fonctionnement du système et aux perturbations de l'environnement, décider d'une façon binaire et avec certitude s'il y a défaut ou non. Les acteurs de l'aéronautique et du nucléaire ont fait largement usage de la redondance analytique.

Celle-ci repose sur la disponibilité d'un modèle de connaissance ou de représentation. Elle consiste à utiliser des informations supplémentaires issues de modèles générant des grandeurs homogènes à celles provenant des capteurs. Elle a pour conséquence d'augmenter la sûreté d'un système de détection en comparant un capteur matériel par un capteur informationnel (analytique). Son champ d'application ne se limite pas aux pannes de capteurs mais peut être étendu aux pannes d'actionneurs ou du système lui même. Parmi les techniques permettant de générer des redondances analytiques nous avons retenu celles qui sont basées sur la connaissance de modèles permettant la conception d'observateur d'état et en particulier les multi observateurs dédiés **aux systèmes non linéaires représentés sous forme multi-modèle**.

Ce manuscrit s'organise de la façon suivante :

Le premier chapitre consiste essentiellement à faire un rappel théorique sur les systèmes dynamiques linéaires invariants en temps, nous étudions la représentation d'état qui permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état des systèmes linéaires. Nous tâcherons d'aborder les systèmes en temps

continu comme les systèmes en temps discret, et parmi eux, tant ceux qui sont naturellement en temps discret que ceux qui résultent de l'échantillonnage de systèmes en temps continu. Pour introduire les notions des systèmes non linéaire nous présentons un exemple classique de système non linéaire qu'est un pendule (il n'y a pas d'entrées, le pendule est livré à lui-même) permettant d'envisager le principe de base de la modélisation.

Nous consacrons *Le deuxième chapitre* à l'étude de l'aspect mathématique de la linéarisation des fonctions non linéaire, à fin d'introduire la dynamique de systèmes réels qui étant non-linéaire, et leurs évolutions autour d'un point de fonctionnement, ceci nous conduira à souligner le caractère approximatif des modèles obtenus.

Ce chapitre a été consacré à la présentation de l'approche multi-modèle. Nous allons montrer, à travers un exemple académique, la qualité de l'approximation d'un système dynamique non linéaire par un multi-modèle. Dans ce chapitre on s'intéressera au choix de la structure du multi-modèle et à l'optimisation paramétrique qui consiste à estimer les paramètres des fonctions d'activation et ceux des modèles locaux.

Le quatrième chapitre est dédié à la modélisation des procédés de traitement à boues activées. Notre objectif est d'appliquer l'approche étudié au troisième chapitre sur le modèle réduit de la station d'épuration à boues activées. Nous démontrons la validité et l'applicabilité de l'approche présentée dans le troisième chapitre. Après une brève présentation des grandes étapes du fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées, nous présentons un modèle simplifié (de référence) issu du modèle biologique du modèle ASM 1. Étant donné sa structure complexe, de nombreux modèles réduits sont proposés dans la littérature afin d'obtenir un modèle plus exploitable en situation réelle. Le modèle réduit obtenu est un modèle non linéaire présenté par [5].

Chapitre1 : Rappels Et Généralités.

| | |
|--|-----------------|
| <i>1.1. Introduction</i> | <i>4</i> |
| <i>1.2. Modèle d'état ou représentation interne</i> | <i>5</i> |
| <i><u>1.2.1 Exemple introductif</u></i> | <i><u>7</u></i> |
| <i><u>1.3. Modèle de transfert ou représentation externe</u></i> | <i><u>9</u></i> |

1.1. Introduction.

La synthèse d'une loi de commande et/ou d'un module de **diagnostic** nécessite de disposer d'un modèle du système. D'une manière générale, un modèle est une représentation abstraite permettant d'agréger l'ensemble des connaissances que l'on a du système. Les modèles considérés dans la suite sont des représentations mathématiques, permettant de calculer l'évolution des sorties du système, lorsque l'on connaît l'évolution de ses entrées et les conditions initiales de cette évolution.

La recherche d'un modèle mathématique du système étudié peut être abordée suivant deux approches distinctes. La première suppose qu'il est possible d'obtenir une description complète du système à l'aide d'un ensemble d'équations issues de l'application des lois de la physique. Le modèle ainsi obtenu est dit de *connaissance* ou *modèle boîte blanche*. La seconde approche suppose que les mécanismes internes régissant le fonctionnement du système sont complètement inconnus. L'attitude consiste alors à rechercher un ensemble de relations rendant compte simplement du comportement entrées/sorties du système étudié. Ces relations sont paramétrées au moyen d'un algorithme d'identification permettant l'adéquation modèle/système. Ce type de modèle est dit de *représentation* ou *modèle boîte noire*. Dans la pratique courante, il n'existe pas de modèle qui soit *purement de connaissance ou de représentation*. Les modèles généralement obtenus, combinent ces deux approches. On parle alors de modèles *boîte grise*. La construction d'un modèle boîte grise repose donc sur l'utilisation systématique des connaissances a priori sur le processus et des données expérimentales.

Dans ce chapitre, nous faisons un rappel théorique sur les systèmes dynamiques linéaires invariants en temps, nous étudions la représentation d'état qui permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état des systèmes linéaires. Nous tâcherons d'aborder les systèmes en temps continu comme les systèmes en temps discret, et parmi eux, tant ceux qui sont naturellement en temps discret que ceux qui résultent de l'échantillonnage de systèmes en temps continu. Pour introduire les notions des systèmes non linéaire nous présentons un exemple classique de système non linéaire qu'est un pendule (il n'y a pas d'entrées, le pendule est livré à lui-même) permettant d'envisager le principe de base de la modélisation.

1.2. Modèle d'état ou représentation interne.

Une large classe de systèmes a la propriété de pouvoir être décrite par un nombre fini de grandeurs appelées variables d'état. Ces variables permettent de déterminer les évolutions futures du système à partir des états initiaux et des grandeurs externes d'entrée. Une représentation d'état ou modèle d'état est un ensemble fini d'équations différentielles du premier ordre reliant des grandeurs scalaires, divisées en variables internes (ou variables d'état) et en variables externes comprenant les grandeurs d'entrée et de sortie. De façon plus précise, le comportement dynamique d'un système de degré n peut être décrit à l'aide de n variables indépendantes notées $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ appelées variables d'état, avec $t \in \mathbb{R}$ dans le cas continu. Les évolutions des variables d'état à partir d'un instant initial t_0 ne dépendent que des valeurs initiales $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ et des grandeurs de commande appliquées à partir de l'instant t_0 . En d'autres termes, l'état du système à un instant t quelconque ne dépend que de l'état initial (ce sont les conditions initiales) à un instant t_0 quelconque et des entrées appliquées sur l'intervalle de temps t_0 à t . Les variables d'état, aussi appelées variables internes du système représentent l'information minimale nécessaire à la prédiction du comportement futur du système. Les variables d'état correspondent aux sorties des éléments de stockage d'énergie potentielle et cinétique, ce sont les sorties des intégrateurs du schéma de simulation analogique.

D'une manière générale, un système dynamique multivariable à temps continu de degré n peut être représenté par un système de n équations différentielles du premier ordre et p équations algébriques de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = \frac{\partial x_1}{\partial t} = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n(t) = \frac{\partial x_n}{\partial t} = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ y_1(k) = h_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p(k) = h_p(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Dans la relation (1.1), x_1 à x_n sont les variables d'état, u_1 à u_m sont les variables d'entrée (i.e. les perturbations et les commandes) et y_1 à y_p , sont les grandeurs de sortie. Les

fonctions f_1, \dots, f_n et h_1, \dots, h_p , sont des fonctions scalaires généralement continues et dérivables. L'évolution des variables d'état du système est régie par le système d'équations différentielles (I.1) généralement **non linéaire**. Ce modèle d'état est dit **non stationnaire**, si les fonctions f_1, \dots, f_n dépendent explicitement du temps t , dans le cas contraire on parle de modèles d'état stationnaires. Dans la suite, nous écrivons le modèle d'état (I.1) sous la forme plus condensée suivante ¹:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \text{ Avec : } \begin{cases} x^T(t) = [x_1(t) \dots \dots x_n(t)] \\ u^T(t) = [u_1(t) \dots \dots u_m(t)] \\ y^T(t) = [y_1(t) \dots \dots y_p(t)] \\ f^T(x(t), u(t)) = [f_1(x(t), u(t)) \dots \dots f_1(x(t), u(t))] \\ h^T(x(t), u(t)) = [h_1(x(t), u(t)) \dots \dots h_1(x(t), u(t))] \end{cases} \quad (I.2)$$

Où $x(t) \in R^n$ désigne le vecteur d'état de dimension n , $u(t) \in R^m$, est le vecteur des entrées, de dimension m , permettant de modifier l'état du système, $y(t) \in R^p$ est le vecteur de sortie de dimension p . Les champs de vecteurs $f(x(t), u(t))$ et $h(x(t), u(t))$ sont respectivement, les fonctions d'évolution et de sortie de $R^n * R^m$ dans R^n et R^p respectivement. Un cas particulier, d'une grande importance pratique, est celui des systèmes **linéaires**. Un système est dit **linéaire** s'il vérifie le principe de superposition ² On a dans ce cas:

$$\begin{cases} f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t) \\ h(x(t), u(t)) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (I.3)$$

1. Notons que cette représentation permet la prise en compte de l'influence des perturbations $d(t)$. En effet, on peut toujours poser: $U^T(t) = [d(t) \ a(t)]$, où $u_c(t)$ représente le vecteur de commande.

2. Considérons k vecteurs d'entrée $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$, et soit $y_i(t)$ la réponse du système l'entrée $u_i(t)$ ($i=1, \dots, k$). Le système considéré vérifie le principe de superposition, si toute entrée $u(t)$, combinaison linéaire des $u_i(t)$: $u(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i(t), \forall \alpha_i \in R$ provoque la sortie $y(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i(t)$.

Où $A \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état ou d'évolution, $B \in R^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C \in R^{p \times n}$ est la matrice de sortie ou d'observation et $D \in R^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe des entrées sur les sorties. La matrice D est généralement nulle, car, pour un système réel, les sorties ne peuvent en général pas réagir instantanément aux variations des entrées.

1.2.1 Exemple introductif. Considérons le système de la figure 1.1, il s'agit d'un bras de robot, supposé rigide, tournant dans le plan P , autour de l'axe z qui lui est perpendiculaire. Cet axe est muni d'un moteur permettant d'appliquer un couple u variable au gré de l'utilisateur, u est la variable de commande du système. La position du bras, par rapport à la verticale, est repérée par l'angle θ . L'application du principe fondamental de la dynamique aux corps en rotation conduit à l'équation différentielle suivante: $J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) = u(t)$.

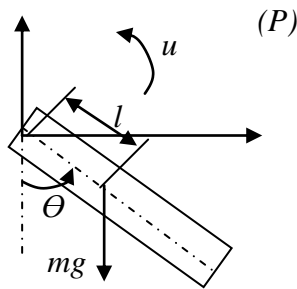


Fig. 1.1 — Bras de robot

En posant $w(t) = \dot{\theta}(t)$, on obtient un système de deux équations différentielles du premier ordre:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega} = \frac{1}{j}u(t) - \frac{b}{j}\omega(t) - \frac{mgl}{j}\sin \theta(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Où m est la masse du bras, J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, l la distance du centre de gravité à l'axe, b le coefficient de frottement visqueux et g l'accélération due à la pesanteur. La position angulaire θ et la vitesse angulaire ω sont les variables d'état

du système, qui sont aussi les sorties.

Il peut être utile, à des fins par exemple de simulation numérique, de discrétiser le modèle (1.1), on obtient alors une représentation d'état discrète constituée de n équations récurrentes du premier ordre et p équations algébriques de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k+1) = f_n(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ y_1(k) = h_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p(k) = h_p(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Où $x_1(k)$ à $x_n(k)$, $u_1(k)$ à $u_m(k)$ et $y_1(k)$ à $y_n(k)$ sont respectivement, les variables d'état, de commande et de sortie en des instants discrets $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions f_1, \dots, f_n et h_1, \dots, h_n sont des fonctions scalaires supposées généralement continues dérivables.

Ce modèle d'état est **dit non stationnaire** si les fonctions f_1, \dots, f_n dépendent explicitement du temps discret k , dans le cas contraire on parle de modèles d'état stationnaires. Comme dans le cas continu et avec des notations analogues, le modèle d'état discret (1.5) peut s'écrire sous la forme plus condensée suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k), u(k)) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

De façon générale, le modèle (1.6) permet la représentation des systèmes dont l'évolution des variables d'état et/ou l'observation des variables de sortie ne peut se faire qu'à des instants particuliers. C'est le cas notamment, des systèmes échantillonnés et des systèmes logiques séquentiels.

Dans le cas d'un système **linéaire** discret, les fonctions f et h s'écrivent:

$$\begin{cases} f(x(k), u(k)) = Fx(k) + Gu(k) \\ h(x(k), u(k)) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (1.7)$$

Où $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'évolution, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la matrice de sortie et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe des entrées sur les sorties.

Exemple 1.2.1 On peut discrétiser le système (1.4) à l'aide de l'approximation d'Euler:

$$\dot{x}(kTe) = \frac{x((k+1)Te) - x(kTe)}{Te}$$

Où Te est le pas temporel de discrétisation et k un entier. Dans un but de simplification des notations, on écrira par exemple $x(k)$ au lieu de $x(kTe)$. La représentation d'état discrète résultant de l'approximation d'Euler s'écrit alors;

$$\begin{cases} \theta(k+1) = \theta(k) + Te\omega(k) \\ \omega(k+1) = \frac{Te}{j}u(k) + (1 - \frac{bTe}{j})\omega(k) - \frac{mgITe}{j}\sin\theta(k) \end{cases}$$

1.3. Modèle de transfert ou représentation externe.

Une représentation très utilisée dans le cadre de l'étude des systèmes **linéaires** est la représentation par fonction de transfert et sa généralisation au cas multivariable par matrice de transfert. Dans le cas mono variable (une entrée et une sortie), la fonction de transfert représente la transformée de Laplace³ de la réponse impulsionnelle du système, calculée pour des conditions initiales nulles. La généralisation de cette définition au cas multivariable conduit à la notion de matrice de transfert. La matrice de transfert $G(s)$ d'un système multivariable est obtenue en prenant la transformée de Laplace de la représentation d'état linéaire du système étudié. Sachant que pour des conditions initiales nulles:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s), \text{ on a:}$$

$$\mathcal{L} \left[\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \right] = \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

En éliminant l'état entre ces deux équations on obtient une relation entre les sorties du système et ses entrées, d'où la dénomination de représentation externe:

$$Y(s) = G(s)U(s), \text{ avec: } G(s) = C (sI - A)^{-1}B + D \quad (1.8)$$

Où I est la matrice unité. La matrice de transfert $G(s)$ représente la transformées de Laplace des réponses impulsionnelles du système vis-à-vis de chacune des entrées.

Dans le cas des systèmes **linéaires** discrets, on définit de la même façon la matrice de transfert discrète $G(z)$ en prenant la transformée en z de la représentation d'état discrète système étudié. Sachant que pour des conditions initiales nulles:

$\mathcal{Z}[\dot{x}(t)] = sX(s)$, on a:

$$\mathcal{Z} \left[\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \right] = \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

En éliminant l'état entre ces deux équations on obtient la représentation externe suivante:

$$Y(z) = G(z)U(z), \text{ avec: } G(z) = C (zI - F)^{-1}G + D \quad (1.9)$$

Nous aurons l'occasion au chapitre II de revenir de façon plus détaillée sur les modèles état et transfert.

3- La transformation $\int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ de la place d'un signal continu $x(t)$ s'écrit :

$$X(s) = \mathcal{L} [x(t)] =$$

Où s est la variable complexe de la place $s=a+jb$.

Chapitre2 : Linéarisation Autour d'un ou Plusieurs Points de Fonctionnements.

| | |
|---|---------------------------|
| <u>2.1</u> <i>Introduction</i> | <u>11</u> |
| <u>2.2</u> <i>Linéarisation</i> | <u>11</u> |
| <u>2.2.1</u> <i>Linéarisation du modèle d'état</i> | <u>12</u> |
| <u>2.2.2</u> <i>Point d'équilibre et ensemble d'équilibre</i> | <u>12</u> |
| <u>2.3</u> <i>Linéarisation autour d'un point d'équilibre</i> | <u>12</u> |

2.1. Introduction.

La modélisation représente l'indispensable étape préliminaire à la conduite de processus industriels. Cette étape fondamentale est nécessaire que ce soit pour l'élaboration d'une loi de commande ou bien pour le développement d'une procédure de diagnostic. La modélisation d'un processus vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter d'une manière rigoureuse le comportement de ce processus dans un domaine de fonctionnement donné.

En fonction des connaissances a priori sur le processus à étudier, on peut envisager différents types de modèles en vue de représenter son comportement. Dans ce travail, on se limitera à l'étude de la modélisation par l'approche multi-modèle. L'approche multi-modèle a connu un intérêt certain depuis la publication des travaux de Johansen et Foss [Joha 92]. L'idée de l'approche multi-modèle est d'appréhender le comportement **non linéaire** d'un système par un ensemble de modèles locaux (linéaires ou affines) caractérisant le fonctionnement du système dans différentes zones de fonctionnement.

Dans ce chapitre on étudiera l'aspect mathématique de la linéarisation des fonctions non linéaire, à fin d'introduire la dynamique de systèmes réels qui étant non-linéaire, et leurs évolutions autour d'un point de fonctionnement, ceci nous conduira à souligner le caractère approximatif des modèles obtenus, cette méconnaissance des perturbations et des modèles constitue une question fondatrice de l'Automatique.

2.2. Linéarisation.

Considérons un processus décrit par les équations non linéaires :

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0.$$

$$g(y(t), x(t), u(t)) = 0.$$

Où $u(t)$, $y(t)$ et $x(t)$ représentent respectivement les variables d'entrée, de sortie et les variables internes du processus. Linéariser ce système consiste à en chercher un modèle qui localement vérifie la propriété de linéarité :

$$\text{Si : } \quad u_1(t) \text{ donne } y_1(t) \text{ et } u_2(t) \text{ donne } y_2(t)$$

$$\text{Alors si : } \lambda u_1(t) + \mu u_2(t) \text{ donne } \lambda y_1(t) + \mu y_2(t).$$

Pour y parvenir, nous allons considérer le système autour d'un équilibre, qui peut être constant ou pas. Dans le premier cas il s'agira d'un point de fonctionnement et dans le deuxième, nous envisagerons une trajectoire. Mais ce qui est important, c'est que nous allons considérer des variations autour de cet équilibre. Le modèle linéaire obtenu ne sera donc pas entre les variables initiales mais entre les écarts de ces variables.

2.2.1 Linéarisation du modèle d'état.

Un système industriel est très souvent destiné à fonctionner en mode de régulation, c'est à dire que l'on souhaite maintenir les sorties le plus près possible du point de fonctionnement désiré. Malgré les différentes perturbations tendant à l'en écarter. Dans ces conditions, l'utilisation d'une représentation d'état **non linéaire** globale, à des fins de commande ou de diagnostic n'est pas justifiée. On peut se contenter d'une représentation d'état **linéaire locale**, valable uniquement **au voisinage du point de fonctionnement désiré** pour le système.

2.2.2 Point d'équilibre et ensemble d'équilibre.

Un système physique, représenté par Les équations $\dot{x} = f(x,u)$, est dit dans un état **stationnaire** si son état n'évolue pas au cours du temps. Dans ces conditions, la dérivée temporelle du vecteur d'état est nulle ($\dot{x}(t) = 0$). On appelle points d'équilibre les états stationnaires du système, ils sont donc solution de $f(x_0, u_0) = 0$ où l'indice zéro est mis pour indiquer qu'il s'agit des grandeurs à l'équilibre. On appelle ensemble d'équilibre E du système, l'ensemble de ses points d'équilibre, soit:

$$E = \{(x_0, u_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid f(x_0, u_0) = 0\} \quad (2.10)$$

Exemple 2.1. Les points d'équilibres du système représenté par les équations:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{mgl}{J} \sin \theta(t) + \frac{1}{J} u(t) \end{cases}$$

Sont tels que : $\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ u_0 = mgl \sin \theta_0 \end{cases}$

2.3. Linéarisation autour d'un point d'équilibre.

Considérons une fonction $g(x)$ continue mono variable de R dans R . On souhaite décrire le comportement de cette fonction au voisinage d'un point x_0 à l'aide d'une relation linéaire de la forme $a \delta x + b$, où δx représente de petites variations de la variable x autour de x_0 : $x = x_0 + \delta x$ et a et b sont des constantes à déterminer.

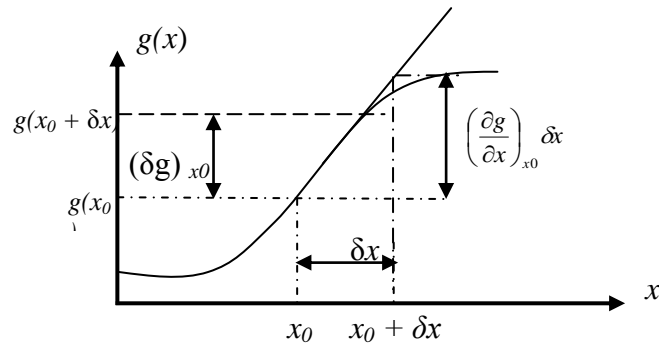


Fig. 2.1 Variation de $g(x)$ pour une variation δx de la variable autour de x .

On peut voir sur la Fig.2 qui si l'accroissement δx est suffisamment petit alors on peut écrire que:

$$g(x_0 + \delta x) \approx g(x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0} \delta x \quad (2.11)$$

Notons que la variation réelle de la fonction g en x , due à une variation δx de la variable autour de x , notée $(\delta g)_{x_0} = g(x_0 + \delta x) - g(x_0)$ sur la figure, a été approchée par la quantité $(dg/dx)_{x_0} \delta x$, où $(dg/dx)_{x_0}$, représente la pente de la droite tangente à la fonction g en x_0 . La relation (1.1) correspond au premier terme du développement en série de Taylor de la fonction g . Ceci peut être généralisé au cas des fonctions multidimensionnelles:

$g(x) = [g_1(x) \ g_2(x) \ \dots \ g_n(x)]^T$ avec $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, on a alors :

$$g(x_0 + \delta x) \approx g(x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0} \delta x \quad (2.12)$$

Où $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0}$ est le jacobien de la fonction g évalué en $x_0 = [x_1^0 \quad x_2^0 \dots x_n^0]^T$:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_{x_0} & \dots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right)_{x_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\right)_{x_0} & \dots & \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\right)_{x_0} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Utilisons maintenant le résultat (2.10) pour linéariser un système différentiel (1.2) autour du point de fonctionnement, ou point d'équilibre $(x_0, u_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_m^0)$. On considère à cet effet de petites variations δx de l'état, autour de x_0 : $x = x_0 + \delta x$ et de petites variations δu de la commande, autour de u_0 : $u = u_0 + \delta u$.

On a par conséquent:
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 + \delta \dot{x} = f(x_0 + \delta x, u_0 + \delta u) \\ y = h(x_0 + \delta x, u_0 + \delta u) \end{cases} \quad (2.14)$$

Or x_0 est un vecteur constant, il dépend du point d'équilibre autour duquel s'effectue la linéarisation, on a donc $\dot{x}_0 = 0$. En réalisant un développement en série de Taylor, au premier ordre, des fonctions f et h , on a:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = f(x_0, u_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 \delta u \\ y = h(x_0, u_0) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)_0 \delta u \\ \delta x = x - x_0, \delta u = u - u_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Où l'indice zéro indique que les dérivées partielles doivent être évaluées à l'équilibre (x_0, u_0) . D'après la définition d'un point d'équilibre on a: $f(x_0, u_0) = 0$, d'autre part $h(x_0, u_0)$ représente le vecteur de sortie à l'équilibre, nous le noterons y_0 . Le modèle linéarisé s'écrit alors:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_0 \delta u \\ \delta y = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)_0 \delta u \\ \delta x = x - x_0, \delta u = u - u_0, \delta y = y - y_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Posons :

$$\begin{aligned} A(x_0, u_0) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_0 \end{bmatrix}, B(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m} \right)_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m} \right)_0 \end{bmatrix} \\ C(x_0, u_0) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_n} \right)_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial h_p}{\partial x_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial h_p}{\partial x_n} \right)_0 \end{bmatrix}, D(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_m} \right)_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial h_p}{\partial u_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial h_p}{\partial u_m} \right)_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

La matrice $A(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est le jacobien de f par rapport à x évalué en (x_0, u_0) . La matrice $B(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est le jacobien de f par rapport à u évalué en (x_0, u_0) . La matrice $C(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est le jacobien de h par rapport à x évalué à l'équilibre (x_0, u_0) . La matrice $D(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ est le jacobien de h par rapport à u évalué en (x_0, u_0) .

Le système linéarisé autour d'un point d'équilibre (x_0, u_0) s'écrit, sous forme matricielle:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A(x_0, u_0) \delta x(t) + B(x_0, u_0) \delta u(t) \\ \delta y(t) = C(x_0, u_0) \delta x(t) + D(x_0, u_0) \delta u(t) \end{cases} \quad (2.18)$$

On obtient donc de la sorte une description linéaire du système dynamique non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre, il est à noter que le modèle linéarisé ainsi obtenu dépend du point d'équilibre autour duquel a été effectué la linéarisation.

Exemple 2.2. On souhaite linéariser le modèle (1.4) autour de l'équilibre $\theta_0 = \pi/4$.

On a:

$$\begin{cases} f(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{1}{j}u(t) - \frac{b}{j}\omega(t) - \frac{mgl}{j}\sin\theta(t) \\ \omega \end{bmatrix} \\ x = [\theta \quad \omega]^T \end{cases}$$

D'où:

$$A(\theta_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{j}\cos\theta_0 & -\frac{b}{j} \end{bmatrix}, B(\theta_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ j \end{bmatrix}$$

La représentation d'état linéaire est alors la suivante:

$$\delta \dot{x} = \begin{bmatrix} \delta \dot{\theta} \\ \delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl\sqrt{2}}{2j} & -\frac{b}{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ j \end{bmatrix} \delta u \quad (2.19)$$

Tel que :

. Les points d'équilibre du système représenté par les équations (1.4) sont

$$\text{Tels que : } \begin{cases} \omega_0 = 0 \\ u_0 = mgl \sin \theta_0 \end{cases}$$

La fonction de transfert entre l'entrée δx et la position angulaire $\delta\theta$ du système (1.17), s'écrit:

$$G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{mgk\sqrt{2}}{2j} & s + \frac{b}{j} \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{j} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{mgk\sqrt{2}}{2j} & s + \frac{b}{j} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s + \frac{b}{j}) + \frac{mgk\sqrt{2}}{2j}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{j} & 1 \\ -\frac{mgk\sqrt{2}}{2j} & s \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où finalement: } C(s) = \frac{\frac{1}{j}}{s^2 + \frac{b}{j}s + \frac{mgk\sqrt{2}}{2j}}$$

Chapitre3: Représentation multi-modèles.

| | |
|---|----|
| 3.1. Introduction..... | 18 |
| 3.2. Représentation multi-modèle..... | 19 |
| 3.3. Recherche d'une structure multi-modèle par linéarisation..... | 20 |
| 3.3.1 Obtention d'une représentation multi-modèle globale à partir de modèles locaux..... | 25 |
| 3.4. Optimisation paramétrique..... | 29 |
| 3.4.1. Algorithme du gradient..... | 30 |
| 3.4.1. Algorithme de Newton..... | 31 |
| 3.4.1. Algorithme de gauss-Newton..... | 31 |
| 3.4.1. Algorithme de marquardt levenberg..... | 31 |

3.1. Introduction.

La motivation de l'approche multi-modèle découle du fait qu'il est souvent difficile de concevoir un modèle qui tient compte de toute la complexité du système étudié. Au départ, certains auteurs ont essayé de représenter des systèmes non linéaires avec des modèles linéaires par morceaux construits à partir d'un arbre de décision. Il en résulte une approximation discontinue du système due aux commutations entre les différents modèles linéaires. Malheureusement ces discontinuités peuvent être indésirables dans la majorité des applications industrielles. Pour remédier à ce problème, il est préférable d'assurer un passage progressif d'un modèle à un autre. On substitue aux fonctions de commutation à front raide des fonctions à pente douce, ce qui crée un chevauchement entre les zones de validité des modèles. Dans ce cas, les fonctions de commutation deviennent des fonctions à dérivées continues dont la pente détermine la vitesse de passage d'un modèle à un autre.

En 1985, Takagi et Surgeon ont proposé un modèle flou d'un système constitué d'un ensemble de règles "si prémisse alors conséquence", telle que la conséquence d'une règle est un modèle affine. Le modèle global s'obtient par l'agrégation des modèles locaux. Quelques années après, Jacob et al [Jaco 91] ont présenté l'approche multi-experts qui est la combinaison de différents experts par l'entremise de fonctions d'activation, tel qu'un expert est un modèle décrivant le comportement local d'un système. L'ensemble de toutes ces techniques conduit à un modèle global d'un système qui est une combinaison de modèles localement valables.

Les raisons qui nous ont conduits à choisir comme méthode de modélisation l'approche multimodèle sont multiples ; la structure multimodèle permet de simplifier et d'étudier aisément :

- la stabilité d'un système non linéaire, grâce à l'outil numérique LMI qui permet de trouver des solutions aux équations de Lyapunov.
- la synthèse des correcteurs (constitué par exemple d'un retour d'état pour chaque modèle local) et la synthèse des multi observateurs. L'identification d'une structure multimodèle concerne la recherche d'une structure optimale et l'estimation des paramètres.

Ce chapitre a été consacré à la présentation de l'approche multi-modèle. Nous allons montrer, à travers un exemple académique, la qualité de l'approximation d'un système dynamique non linéaire par un multi-modèle. Dans ce chapitre, on s'intéressera au choix de la structure du multi-modèle et à l'optimisation paramétrique qui consiste à estimer les paramètres des fonctions d'activation et ceux des modèles locaux.

3.2. Représentation multi-modèle.

Tout modèle a un domaine de validité limité. Cette limitation provient soit des hypothèses simplificatrices formulées lors de l'élaboration d'un modèle de connaissance, soit des conditions expérimentales d'obtention des données nécessaires à l'identification des paramètres d'un modèle. Il peut aussi s'agir d'un choix délibéré d'adopter une structure de représentation simple, linéaire le plus souvent, valable seulement au voisinage d'un point de fonctionnement.

Afin d'obtenir une représentation du système valable dans un large domaine de fonctionnement (modèle global), il peut être intéressant de combiner judicieusement un ensemble de modèles simples, valables localement (modèles locaux). On définit alors un multimodèle comme étant la combinaison d'un nombre fini de modèles simples. Sur le plan conceptuel, cette approche consiste à représenter un système, aussi compliqué soit-il, par une combinaison de N modèles simples. Plus la réalité considérée sera compliquée, plus la représentation qu'on en tire sera complexe, et plus il faudra multiplier les modèles simples. Finalement, cette approche consiste à représenter un système réel compliqué par un modèle complexe résultant de l'assemblage d'un nombre fini de modèles simples.

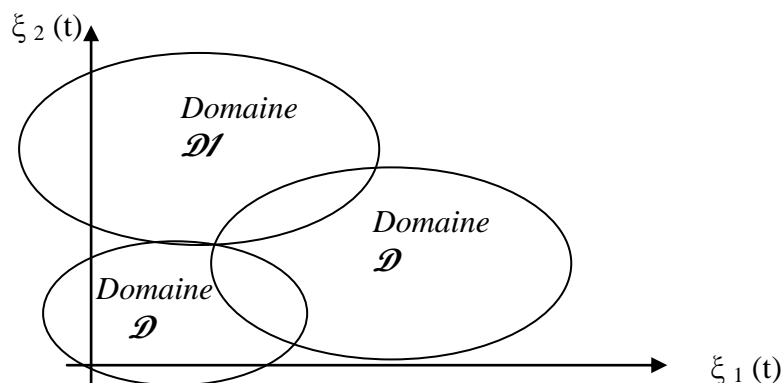


Fig. 3.1. — Principe de l'approche multimodèle.

La figure 3.1 illustre ce principe dans un cas à deux dimensions. L'ensemble des points de fonctionnement du système, de coordonnées $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, a été décomposé en trois domaines de fonctionnements notés \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 . Le domaine global de fonctionnement est alors défini par la réunion des domaines locaux: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$. Sur chacun des domaines locaux, ou sous domaines, peut être construit un modèle local. Ces différents modèles locaux pourront alors être combinés au moyen d'une technique d'interpolation pour obtenir une représentation globale, ou multimodèle, valable sur le domaine de fonctionnement global \mathcal{D} .

Cette approche multimodèle est d'une grande importance pratique, car, l'obtention directe d'un modèle global est très difficile en raison du grand nombre de types de comportements dont il doit alors rendre compte. Au contraire, l'obtention de modèles locaux, linéaires par exemple, va permettre de rendre compte d'un type de comportement particulier, lié au domaine de fonctionnement considéré. La combinaison de ces modèles locaux va ainsi permettre de rendre compte de la diversité des comportements observés sur le système. Un autre aspect important est que cette approche multimodèle permet de combiner des représentations n'ayant pas forcément la même structure. Il est tout à fait possible de combiner des modèles mathématiques avec, par exemple, des systèmes à base de règles et des réseaux de neurones. Ce qui ouvre des perspectives tout à fait intéressantes dans le cadre de la modélisation, de la commande et du diagnostic des systèmes dynamiques. Enfin, l'approche multimodèle offre la possibilité d'étendre aux systèmes non linéaires les techniques de commande et de diagnostic des systèmes linéaires, ceci à condition d'utiliser une modélisation locale linéaire.

3.3. Recherche d'une structure multimodèle par linéarisation.

Soit un système supposé correctement décrit par le modèle hypothétique suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

On fait l'hypothèse que ce modèle global permet de représenter parfaitement le comportement du système quel que soit le point de fonctionnement considéré. Les fonctions d'évolution et de sortie ($f(x, u)$ et $h(x, u)$) sont inconnues. L'objectif va être de trouver une représentation multimodèle permettant de décrire le comportement du système sur large domaine de fonctionnement, noté \mathcal{D} dans la suite.

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ le domaine de fonctionnement global souhaité pour le procédé et soit $\xi(t) = (x(t), u(t))$ le point de fonctionnement du système à l'instant t : $\xi \in \mathcal{D}$. Ce domaine \mathcal{D} peut être subdivisé en N domaines locaux de fonctionnement, notés \mathcal{D}_i tels $\mathcal{D} = \cup_i \mathcal{D}_i$. Sur chacun des domaines locaux de fonctionnement, peut être défini un

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(x(t), u(t)) \\ y(t) = h_i(x(t), u(t)) \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

Permettant de décrire correctement le comportement du système sur tout le domaine de fonctionnement \mathcal{D} . C'est-à-dire tel que:

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}_i \cdot \begin{cases} f_i \approx f \\ h_i \approx h \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

Ou encore, de façon plus précise:

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}_i \cdot \begin{cases} \|f - f_i\|_2 < M_f \\ \|h - h_i\|_2 < M_h \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

Où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne¹ usuelle du vecteur considéré et f et h sont la fonction d'évolution et de sortie du modèle global (3.1), les quantités scalaires M_f et M_h représentent, respectivement, la borne supérieure de la norme de l'erreur sur f et de la norme de l'erreur sur h . Ces bornes traduisent la précision avec laquelle les modèles permettent de décrire le comportement du système sur les domaines \mathcal{D} .

1. Soit $x \in \mathbf{C}^n$: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^* x}$ où x^* désigne le vecteur transposé conjugué du vecteur x . Dans le cas où $x \in \mathbf{R}^n$, on a: $\|x\| = \sqrt{x^T x}$.

On dispose donc d'une famille de N modèles locaux permettant de représenter valablement le comportement du système sur chacun des domaines locaux \mathcal{D}_i si $\xi \in \mathcal{D}_i$ alors le modèle n° i décrit correctement le système. Ceci peut être formalisé de la façon suivante. Soit $\mu_i(\xi) > 0$ une fonction permettant d'indiquer la validité du modèle local n° i sur le domaine \mathcal{D}_i :

$$\mu_i(\xi) : \mathcal{D} \rightarrow [0,1] \quad (3.5)$$

$\mu_i(\xi) \approx 1$ pour $\xi \in \mathcal{D}_i$ et tendant rapidement vers zéro en dehors de \mathcal{D}_i . On peut à cet effet adopter les fonctions gaussienne, triangulaire ou trapézoïdale suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Gaussienne: } \mu_i(\zeta) = \prod_{j=1}^{\dim(\zeta)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_j - m_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \\ \text{Triangulaire: } \mu_i(\zeta) = \prod_{j=1}^{\dim(\zeta)} \max\left(\min\left(\frac{\zeta_j - a_i^j}{b_i^j - a_i^j}, \frac{c_i^j - \zeta_j}{c_i^j - b_i^j}\right), 0\right) \\ \text{Trapézoïde: } \mu_i(\zeta) = \prod_{j=1}^{\dim(\zeta)} \max\left(\min\left(\frac{\zeta_j - a_i^j}{b_i^j - a_i^j}, 1, \frac{d_i^j - \zeta_j}{d_i^j - c_i^j}\right), 0\right) \end{array} \right. \quad (3.6)$$

avec: $\zeta^T = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\dim(\zeta)}]$

Ceci n'est pas limitatif, l'essentiel est d'avoir une fonction très voisine de 1 sur le domaine considéré et tendant rapidement vers zéro en dehors de ce domaine.

L'utilisation de cette fonction de validité permet d'écrire (3.3) sous la forme suivante;

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}, \begin{cases} (f - f_i)\mu_i(\zeta) \approx 0 \\ (h - h_i)\mu_i(\zeta) \approx 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

Il reste maintenant à combiner les modèles locaux afin d'obtenir une représentation du système valable sur le domaine de fonctionnement global \mathcal{D} . Il se pose donc le problème de l'obtention du multimodèle, dont la forme générale est la suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \hat{f}(x(t), u(t)) \\ y(t) = \hat{h}(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.8)$$

Ce multimodèle doit être tel que:

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}, \begin{cases} \hat{f} \approx f \\ \hat{h} \approx h \end{cases}$$

Or, d'après (3.3), on peut aussi écrire, de façon équivalente:

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}, \begin{cases} \hat{f} = f \\ \hat{h} = h \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Soit aussi, d'après (3.6):

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}, \begin{cases} \left(\hat{f} - f_i \right) \mu_i(\zeta) = 0 \\ \left(\hat{h} - h_i \right) \mu_i(\zeta) = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}, \begin{cases} \sum_{i=1}^N \left(\hat{f} - f_i \right) \mu_i(\zeta) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left(\hat{h} - h_i \right) \mu_i(\zeta) = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.11)$$

Ce qui conduit à :

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}, \begin{cases} \hat{f} \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta) - \sum_{i=1}^N f_i \mu_i(\zeta) = 0 \\ \hat{h} \sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta) - \sum_{i=1}^N h_i \mu_i(\zeta) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

D'où les expressions de \hat{f} et \hat{h} :

$$\left. \begin{cases} \hat{f} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \mu_i(\zeta)}{\sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta)} \\ \hat{h} = \frac{\sum_{i=1}^N h_i \mu_i(\zeta)}{\sum_{i=1}^N \mu_i(\zeta)} \end{cases} \right\} \quad (3.13)$$

Les fonctions d'évolution et de sortie du multi-modèle peuvent aussi s'écrire sous la forme suivante:

$$\left. \begin{cases} \hat{f} = \sum_{i=1}^N f_i \omega_i(\zeta) \\ \hat{h} = \sum_{i=1}^N h_i \omega_i(\zeta) \\ \omega_i(\zeta) = \frac{\mu_i(\zeta)}{\sum_{j=1}^N \mu_j(\zeta)} \end{cases} \right\} \quad (3.14)$$

Où $\omega_i(\zeta)$ est la fonction d'interpolation. Notons que $\sum_{i=1}^N \omega_i(\zeta) = 1$, On montrerait facilement

que le modèle ainsi obtenu est optimal au sens de la minimisation du critère suivant:

$$\left. \begin{cases} J(\hat{f}) = \int_{\zeta \in D} \sum_{i=1}^N \left\| \hat{f} - f_i \right\|^2 \mu_i(\zeta) d\zeta \\ J(\hat{h}) = \int_{\zeta \in D} \sum_{i=1}^N \left\| \hat{h} - h_i \right\|^2 \mu_i(\zeta) d\zeta \end{cases} \right\} \quad (3.15)$$

\hat{f} :la fonction du multimodèle.

f_i :la fonction du modèle locale.

3.3.1. Obtention d'une représentation multi-modèle globale à partir de modèles locaux.

Les multi-modèles représentent les systèmes non linéaires sous forme d'une interpolation entre des modèles linéaires locaux. Chaque modèle local est un système dynamique LTI valide autour d'un point de fonctionnement. Selon l'information dont on dispose, trois méthodes distinctes peuvent être utilisées pour l'obtention d'un multi-modèle. Si l'on ne dispose que des mesures des entrées et sorties du système, on procède par identification [Gass 00a] et [Gass 00b] en cherchant ou en imposant la structure du multimodale. Si, en revanche, on dispose d'un modèle non linéaire explicite que l'on souhaite "simplifier" ou rendre plus manipulable on pourra procéder par linéarisation autour de différents points de fonctionnement (dans ce cas, il s'agit de modèles locaux affines dû à la présence de la constante provenant de la linéarisation) [Joha 92] ou par transformation polytopique convexe.

Illustrons la seconde approche en considérant le système statique non linéaire (3.1), pour lequel nous cherchons à déterminer une représentation multi-modèle permettant de décrire le comportement de ce système.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.1)$$

Supposons qu'on dispose d'un ensemble de M modèles locaux $f_i(x(t))$ descriptifs du comportement du système dans différentes zones de fonctionnement. Ces modèles peuvent être construits par exemple à partir de connaissances physiques sur le fonctionnement du système dans ces zones. La validité locale de chaque modèle f_i est indiquée par une fonction de validité $w_i(x(t))$ pour $i \in \{1, \dots, M\}$. Le modèle global s'obtient de la manière suivante :

$$\dot{x}_m(t) = \frac{\sum_{i=1}^N w_i(\xi(t)) f_i(x(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(\xi(t))} \quad (3.16)$$

Posons :

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(\xi(t))} \quad (3.17)$$

En combinant les équations (3.16) et (3.17), on obtient l'expression générale d'une structure multimodèle [Joha 93] :

$$\dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\xi(t)) f_i(x(t), u(t)) \quad (3.18)$$

La fonction d'activation $\mu_i(x(t))$ détermine le degré d'activation du i ème modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global (multimodale).

Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions sont généralement de forme triangulaire, sigmoïdale ou Gaussienne, et doivent satisfaire les propriétés suivantes (convexité) :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Et $\xi(t)$ est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et éventuellement de la commande $u(t)$. Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux (N) dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation.

Recherche des modèles locaux par linéarisation :

On dispose de la forme analytique du modèle non linéaire du processus physique qu'on linéarise autour d'un point de fonctionnement judicieusement choisis. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k), u(k)) \\ y(k) = G(x(k), u(k)) \end{cases} \quad (3.20)$$

Où (F, G) sont des fonctions non linéaires continues $x(k) \in R^n$ est le vecteur d'état et $u(k) \in R^m$ est le vecteur, par la suite, nous représenterons le système non linéaire (3.20) par un multi-modèle, composé de plusieurs modèles locaux linéaires, tel que chaque modèle locale est obtenu en linéarisant le système non linéaire autour d'un point de fonctionnement

arbitraire $(x_i, u_i) \in R^n \times R^m$. dans ce cas, on définit les modèles locaux comme le premier terme du développement en série de Taylor du système(3.20). Ceci correspond à approcher une fonction non linéaire par son plan tangent au point (x_i, u_i) . On suppose que les différents modèles locaux sont issus d'une linéarisation autour d'un M point de fonctionnement $(x_i, u_i) \in \{1, \dots, M\}$. La formulation multi-modèle est la suivantes :

$$\begin{cases} x_m(k+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(A_i x_m(k) + B_i u(k) + D_i) \\ y_m(k) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(C_i x_m(k) + E_i u(k) + N_i) \end{cases} \quad (3.21)$$

Avec :

$$A_i = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad B_i = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad D_i = F(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i$$

$$C_i = \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad E_i = \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad N_i = G(x_i, u_i) - C_i x_i - E_i u_i$$

Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux (M) dépend de précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation.

Exemple 1.2.1. On considère le modèle d'un bras de robot dont le modèle est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{mgl}{J} \sin \theta(t) + \frac{1}{J} u(t) \end{cases}$$

Dont on se propose d'asservir la position angulaire θ . Le domaine de fonctionnement souhaité est défini par : $\theta \in [0, \pi]$ On choisi à cet effet de construire un multimodèle de trois modèles Linéaires locaux correspondant aux points de fonctionnement $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \pi$

Les points d'équilibres de ce système sont tels que $\omega_e = 0$ et $u_e = mgl \sin \theta_e$, les matrices d'évolution et de commande du modèle linéarisé tangent s'écrivent:

$$A(\theta_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{j} \cos \theta_e & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{j} \end{bmatrix}, u_e(\theta_e) = mgl \sin \theta_e$$

Les trois modèles linéaires locaux calculés pour les points d'équilibre ou de fonctionnement $\theta_e = 0, \theta_e = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_e = \pi$,

Sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{j} & 0 \end{bmatrix} \\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, u_e(0) = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} A(\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, u_e(\frac{\pi}{2}) = mgl \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} A(\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{j} & 0 \end{bmatrix} \\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, u_e(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

L'application numérique correspondant à $m = 1kg, g = 10m/s^2, l = 0.5m$ et $J = 0.05kgm^2$ s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & 20 \end{bmatrix}, u_e(0) = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} A(\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & 20 \end{bmatrix}, u_e(\frac{\pi}{2}) = 5 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} A(\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} \\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & 20 \end{bmatrix}, u_e(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

D'où le multimodèle :

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} &= \omega_0(\theta) \left(A(0) \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + Bu(t) \right) + \omega_{\frac{\pi}{2}}(\theta) \left(A\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} \theta(t) - \frac{\pi}{2} \\ \omega(t) \end{bmatrix} + Bu(t) - 5 \right) + \omega_{\pi}(\theta) \left(A(\pi) \begin{bmatrix} \theta(t) - \pi \\ \omega(t) \end{bmatrix} + Bu(t) \right) \\ \omega_0(\theta) &= \frac{\mu_0(\theta)}{\mu_0(\theta) + \mu_{\frac{\pi}{2}}(\theta) + \mu_{\pi}(\theta)}, \omega_{\frac{\pi}{2}}(\theta) = \frac{\mu_{\frac{\pi}{2}}(\theta)}{\mu_0(\theta) + \mu_{\frac{\pi}{2}}(\theta) + \mu_{\pi}(\theta)}, \omega_{\pi}(\theta) = \frac{\mu_{\pi}(\theta)}{\mu_0(\theta) + \mu_{\frac{\pi}{2}}(\theta) + \mu_{\pi}(\theta)} \\ \mu_0(\theta) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{0.45}\right)^2\right], \mu_{\frac{\pi}{2}}(\theta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \pi/2}{0.4}\right)^2\right], \mu_{\pi}(\theta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \pi}{0.45}\right)^2\right] \end{aligned} \right.$$

Avec : $p(0,0,0)$, $p(\pi/2, 0, 100)$ et $p(\pi, 0, 0)$ tel que $p_i(\theta_e, \omega_e$ et $u_e)$.

3.4. Optimisation paramétrique.

Lorsque le modèle du système est non linéaire par rapport aux paramètres, il n'existe pas de solution analytique afin d'estimer ces paramètres. On recourt à des techniques itératives d'optimisation non linéaire. Dans cette section, on s'intéresse à l'optimisation paramétrique d'une structure multimodèle.

L'optimisation paramétrique consiste à estimer les paramètres des fonctions d'activation et ceux des modèles locaux, ces paramètres doivent être optimisés au moyen d'une procédure itérative en raison des non-linéarités du modèle global (multimodèle) par rapport à ses paramètres.

Plusieurs méthodes d'optimisation peuvent être utilisées, selon les informations disponibles a priori. Si la connaissance a priori sur les paramètres des fonctions d'activation et ceux des modèles locaux ne sont pas disponibles. Alors, ces paramètres doivent être optimisés au moyen d'une procédure itérative en raison des non-linéarités du modèle global (multimodèle) par rapport à ses paramètres.

Les méthodes d'identification de l'ensemble de tous les paramètres sont généralement basées sur la minimisation d'une fonctionnelle de l'écart entre la sortie estimée du multi-modèle $ym(t)$ et la sortie mesurée du système $y(t)$. Le critère le plus utilisé est le critère qui représente l'écart quadratique entre les deux sorties indiquées.

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t, \theta)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_m(t) - y(t))^2 \quad (3.22)$$

Où N est l'horizon d'observation et θ est le vecteur de paramètres des modèles locaux et ceux des fonctions d'activation.

Les méthodes de minimisation du critère $J(\theta)$ s'appuient, le plus souvent, sur un développement limité du critère $J(\theta)$ autour d'une valeur particulière du vecteur de paramètres θ et d'une procédure itérative de modification progressive de la solution. Si l'on note k l'indice d'itération de la méthode de recherche et $\theta(k)$ la valeur de la solution à l'itération k , la mise à jour de l'estimation s'effectue de la manière suivante :

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \eta D(k) \quad (3.23)$$

Où η représente un facteur d'ajustement permettant de régler la vitesse de convergence vers la solution. $D(k)$ est la direction de recherche dans l'espace paramétrique. Selon la façon dont $D(k)$ est calculée.

Parmi les méthodes d'optimisation itératives du type Quasi-Newton, la méthode **de marquardt et la méthode Broyden-Fletcher-Goldfar-Shanno (BFGS)**, mais la méthode de Marquardt levenberg est considéré comme l'une des méthodes de résolution les plus efficaces, elle ne nécessite pas de calculs longs ni d'espace mémoire important.

On distingue différentes méthodes d'optimisation dont les principales sont rappelées ci-dessus.

3.4.1 Algorithme du gradient.

Cette méthode est basée sur un développement du critère $J(\theta)$ (2.6) au premier ordre. La direction de recherche à l'itération k est spécifiée par le gradient $G(\theta(k))$ du critère de la manière suivante :

$$D(k) = G(\theta(k)) = \left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta(k)} = \sum_{t=1}^N \left. \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta} \varepsilon(t, \theta) \right|_{\theta=\theta(k)} \quad (2.8)$$

η dépend de la vitesse de convergence du critère. Généralement, il est calculé par une méthode heuristique qui consiste à augmenter η si le critère décroît et à le réduire dans le cas où contraire [47].

3.4.2 Algorithme de Newton.

Cette fois, l'algorithme est basé sur le développement au deuxième ordre. La direction et le pas de recherche sont spécifiés simultanément par l'équation :

$$D(k) = H^{-1}(k)G(\theta(k)) \quad (2.9)$$

où $H(k)$ est la matrice hessienne du critère défini par :

$$H(k) = \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta^T} + \sum_{t=1}^N \frac{\partial^2 \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta^2} \varepsilon(t, \theta) \Bigg|_{\theta=\theta(k)} \quad (2.10)$$

Dans ce cas, le pas de recherche $\eta = 1$. L'inconvénient principal de cet algorithme réside dans le calcul de l'inversion du hessien à chaque itération.

3.4.3 Algorithme de Gauss-Newton

Afin de simplifier la méthode de Newton, On utilise une expression approchée du hessien en négligeant les termes du deuxième ordre, on obtient :

$$H_a = \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta^T} \quad (2.11)$$

Le hessien étant défini positif, cet algorithme garantit la convergence vers un minimum. Cet algorithme est sensible au choix initial du vecteur des paramètres θ et lorsque la dimension de l'espace des paramètres est très importante, l'algorithme risque de converger vers des minimas locaux.

3.4.4 L'algorithme de marquardt levenberg.

Parmi les méthodes d'optimisation itératives du type Quasi-Newton, la méthode de marquardt et la méthode Broyden-Fletcher-Goldfar-Shanno (BFGS), mais la méthode de

marquardt est considéré comme l'une des méthodes de résolution les plus efficaces, elle ne nécessite pas de calculs longs ni d'espace mémoire important.

Si l'on note n l'indice d'itération de l'algorithme de Marquardt et θ^n la valeur de la solution à l'itération n , la mise à jour de l'estimation s'effectue de la manière suivante :

$$\theta^{n+1} = \theta^n - [G(\theta^n)^T G(\theta^n) + \mu_n D^2(\theta^n)]^{-1} G(\theta^n)^T \varepsilon(t, \theta^n) \quad (2.12)$$

Où :

$G(\theta^n)$: représente la matrice Jacobienne

$D^2(\theta^n)$: est la matrice diagonale contenant les éléments de la diagonale de $G^T G$. Pour remédier au cas où les éléments de la diagonale soient nuls, on prend :

$$D^2(i, i) = G^T G(i, i) + 1$$

μ_n : est un paramètre qu'on appelle paramètre de Marquardt et qui est choisi de telle façon que :

$$J(\theta^{n+1}) < J(\theta^n)$$

Il apparaît dans l'équation (2.12) que lorsque :

μ_n à des valeurs importantes, alors un D^2 devient importante devant $G^T G \Rightarrow$

$$\theta^{n+1} = \theta^n - [\mu_n D^2(\theta^n)]^{-1} G(\theta^n)^T \varepsilon(t, \theta^n) \quad (2.13)$$

On tend alors vers une résolution par la méthode de descente.

μ_n est très petit, $\mu_n D^2$ devient très petit devant $G^T G$. On tend alors vers une résolution par la méthode de Gauss Newton.

Dans le cas général on a n paramètres à identifier :

$$\theta = [\theta_{(1)} \ \theta_{(2)} \ \theta_{(3)} \ \dots \ \theta_{(n)}]$$

Donc :

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1(t, \theta)}{\partial \theta_{(1)}} & \frac{\partial \varepsilon_1(t, \theta)}{\partial \theta_{(2)}} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_1(t, \theta)}{\partial \theta_{(n)}} \\ \frac{\partial \varepsilon_2(t, \theta)}{\partial \theta_{(1)}} & \frac{\partial \varepsilon_2(t, \theta)}{\partial \theta_{(2)}} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_2(t, \theta)}{\partial \theta_{(n)}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial \varepsilon_m(t, \theta)}{\partial \theta_{(1)}} & \frac{\partial \varepsilon_m(t, \theta)}{\partial \theta_{(2)}} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_m(t, \theta)}{\partial \theta_{(n)}} \end{bmatrix}$$

- **Exemple de simulation:**

Considérons un système dynamique non linéaire à entrées inconnues modélisé par les équations d'états de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) * u(t) \\ \dot{x}_2 = -x_1(t) * x_2(t) + 0.2 * u(t) \end{cases} \quad (I)$$

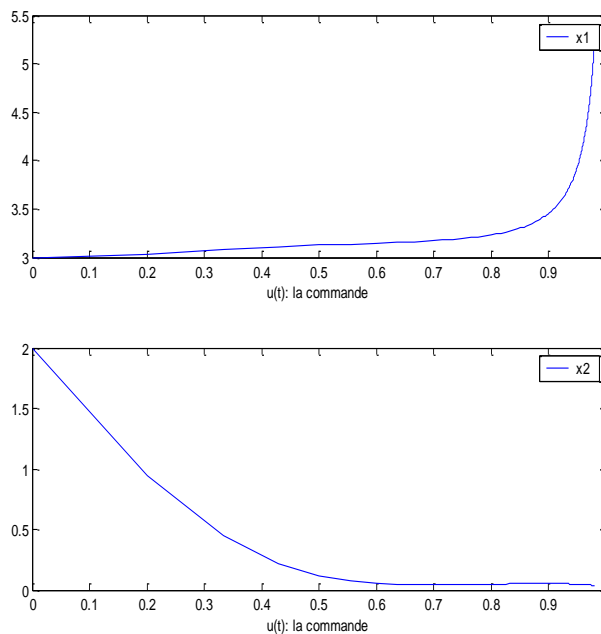


Fig.3.2 - Gain statique.

Cet exemple illustre la mise en œuvre de l'approximation d'un modèle non linéaire par plusieurs modèles locaux interpolés par des fonctions d'activation.

Pour cela, nous considérons un multimodèle composé de M modèles locaux couplés et de M fonctions d'activation de forme gaussiennes.

Résultat et simulations :

Avec:

$P_i (x_1^0, x_2^0, u^0)$ Les points d'équilibre initiaux du système représenté par les équations (I) sont :

$$P_1 = [2.9651, 0.0429, 0.3], P_2 = [4.3981, 0.0677, 0.5] \text{ et } P_3 = [3.062, 0.0657, 0.8]$$

Pour $M=3$ nous avons obtenus les résultats suivants :

Les trois points de fonctionnement et les écarts types σ obtenus après optimisation en utilisant l'algorithme de Marquardt sont:

$$P_1 = (3.0184, 0.2542, 0.1288)$$

$$P_2 = (4.3750, 0.0736, 0.5483)$$

$$P_3 = (3.3416, 0.0416, 0.8234)$$

$$\sigma_1 = 0.1085, \sigma_2 = 0.0163, \sigma_3 = 0.0599.$$

Les matrices d'évolution et de commande calculés pour les points d'équilibre fonctionnement du modèle linéairasé tangent s'écrivent:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1288 \\ -0.2542 & -3.0184 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0.2542 \\ 0.2000 \end{bmatrix}, \text{ et } D_1 = \begin{bmatrix} -0.0327 \\ 0.7672 \end{bmatrix}.$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5483 \\ -0.0736 & -4.3750 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0.0736 \\ 0.2000 \end{bmatrix} \text{ et } D_2 = \begin{bmatrix} -0.0404 \\ 0.3222 \end{bmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.8234 \\ -0.0416 & -3.3416 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 0.0416 \\ 0.2000 \end{bmatrix} \text{ et } D_3 = \begin{bmatrix} -0.0342 \\ 0.1390 \end{bmatrix}.$$

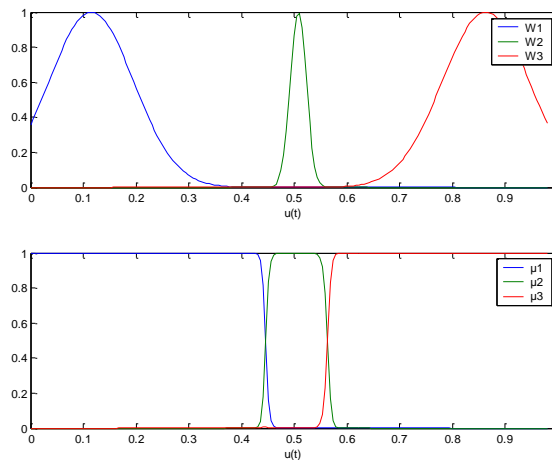


Fig.3.3 - les fonctions d'activation et de pondération.

Comme le montre la figure 4, les fonctions d'activation μ_1, μ_2 et μ_3 ont été paramétrées de manière à couvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement souhaité pour le système. On peut constater qu'au voisinage de l'un des trois points d'équilibre utilisé pour la construction du multi-modèle, la fonction de validité correspondante est voisine de un, les autres étant proche de zéro.

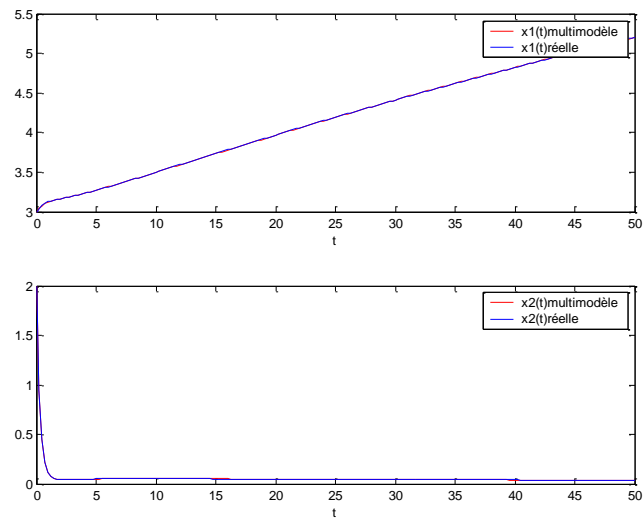


Fig. 3.4 - l'évolution des variables d'états $x_n(t)$ du modèle non linéaire et ceux du multi-modèle estimés.

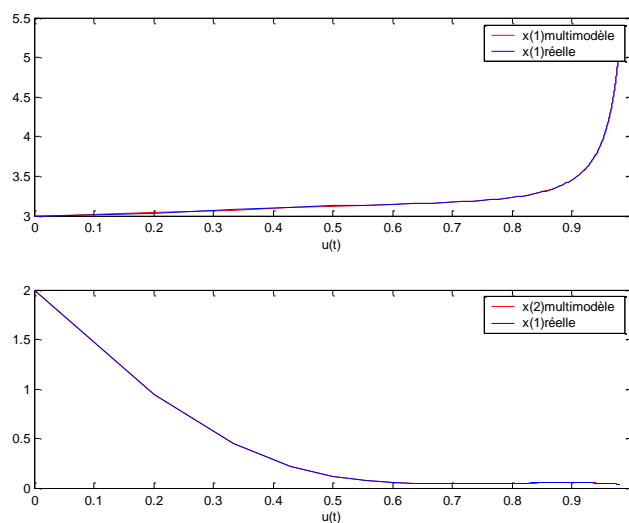


Fig.3.5 – l'évolution des variables d'états $x_n(u)$ du modèle non linéaire et ceux du multi-modèle estimés.

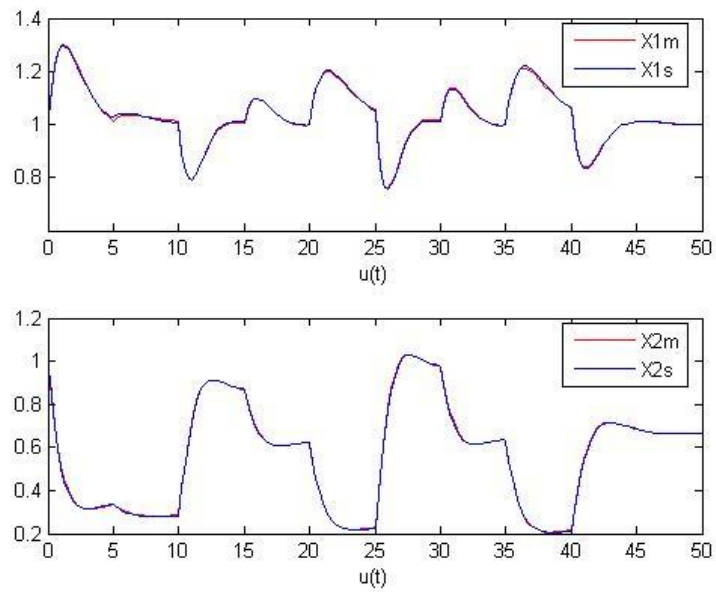


Fig.3.6 – l'évolution des variables d'états $x_n(u)$ du modèle non linéaire et ceux du multi-modèle estimés lorsqu'il s'agit d'une commande créneau.

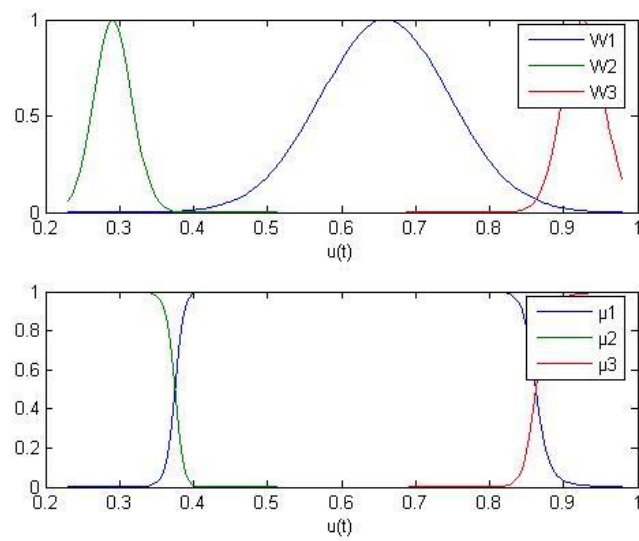


Fig. 8-. les fonctions d'activation et de pondération

$$A1 = \begin{bmatrix} -0.6590 & 1.0000 \\ -0.6448 & -0.9788 \end{bmatrix}; B1 = \begin{bmatrix} -0.9788 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, D1 = \begin{bmatrix} 0.6450 \\ 0.6312 \end{bmatrix}.$$

$$A2 = \begin{bmatrix} -0.2910 & 1.0000 \\ -0.3189 & -1.1462 \end{bmatrix}; B2 = \begin{bmatrix} -1.1462 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \text{ et } D2 = \begin{bmatrix} 0.3335 \\ 0.3655 \end{bmatrix}.$$

$$A3 = \begin{bmatrix} -0.9264 & 1.0000 \\ -0.9527 & -0.8878 \end{bmatrix}; B3 = \begin{bmatrix} -0.8878 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \text{ et } D3 = \begin{bmatrix} 0.8224 \\ 0.8458 \end{bmatrix}$$

Chpître4 : Application de L'Approche Multi-modèles sur le Modèle ASM1 d'une Station d'Épuration.

| | |
|--|-----------|
| <i>4.1 Introduction.....</i> | <i>38</i> |
| <i>4.2 Épuration des eaux usées.....</i> | <i>39</i> |
| <i>4.2.1 Définition.....</i> | <i>39</i> |
| <i>4.2.2 Les grandes étapes du traitement.....</i> | <i>40</i> |
| <i>4.3. Modélisation des stations d'épuration.....</i> | <i>41</i> |
| <i>4.3.1 Modèle de référence.....</i> | <i>43</i> |
| <i>4.3.2 Modèle réduit.....</i> | <i>50</i> |
| <i>4.3.2.1 Simplification du modèle de référence.....</i> | <i>51</i> |
| <i>4.3.2.2 Expression du modèle réduit.....</i> | <i>53</i> |
| <i>4.4. Utilisation en ligne du modèle réduit.....</i> | <i>55</i> |
| <i>4.4.1 Conditions de fonctionnement aérobies.....</i> | <i>55</i> |
| <i>4.4.2 Conditions de fonctionnement anoxiques.....</i> | <i>55</i> |
| <i>4.4.3 Conditions de fonctionnement anaérobies.....</i> | <i>56</i> |
| <i>4.5. Application de l'approche multimodèle sur le modèle ASM1 réduit.....</i> | <i>58</i> |
| <i>4.5.1.1. Conditions de fonctionnement anoxie.....</i> | <i>58</i> |
| <i>4.5.2.1.1. Application de l'approche de multi-modélisation sur le sous modèle Conditions de Fonctionnement anoxies.....</i> | <i>58</i> |
| <i>4.5.2.1.2 Résultats et simulation.....</i> | <i>61</i> |
| <i>4.5.1.2. Conditions de fonctionnement anaérobie.....</i> | <i>64</i> |
| <i>4.5.2.2.1 Application de l'approche multi-modèle sur le sous modèle conditions de fonctionnement anaérobies.....</i> | <i>64</i> |
| <i>4.5.2.2.2 Résultats et simulation.....</i> | <i>66</i> |
| <i>4.5.2.3. Perspectives.....</i> | <i>68</i> |

4.1 Introduction.

L'utilisation de la simulation dynamique, basée sur des phénomènes physiques rigoureux, est devenue courante en Génie des Procédés. Ces modèles rigoureux permettent de mieux appréhender le comportement dynamique de nombreux systèmes, notamment dans des conditions extrêmes de fonctionnement, et sont particulièrement utiles pour la conduite des procédés. En traitement des eaux, l'adoption par l'Union Européenne de normes de rejets de plus en plus sévères vis-à-vis des rejets des stations d'épuration implique une fiabilisation et un meilleur contrôle de celles-ci. L'utilisation de modèles mathématiques prend alors tout son intérêt pour aider à l'élaboration de stratégies performantes, et éventuellement à la commande en temps réel des unités de traitement. De nombreuses études portant sur la modélisation du procédé à boues activées ont été effectuées au cours des deux dernières décennies. Elles culminent dans la publication par l'IAWQ1 des modèles ASM1 (Activated Sludge Process Model No.1) [11], ASM2 [12], ASM2d [13] et ASM3 [9]. L'utilisation largement répandue de ces modèles dans de multiples domaines d'application a permis d'éprouver leurs capacités de prédiction, mais les nombreux paramètres et variables d'état qu'ils contiennent les rendent cependant inadéquats pour la commande en ligne du procédé.

Ce chapitre est dédié à la modélisation des procédés de traitement à boues activées. Notre objectif est d'appliquer l'approche étudiée au troisième chapitre sur le modèle réduit de la station d'épuration à boues activées. Nous démontrons la validité et l'applicabilité de l'approche présentée dans le troisième chapitre. Dans ce but, nous mènerons plusieurs simulations à l'aide des données recueillies à partir d'un modèle de référence défini par le benchmark 624 (www.ensic.inpl-nancy.fr/COSTWWTP/Benchmark) [2]. Le benchmark a été développé dans le cadre d'un projet européen COST Action 624 - Optimal Management of Wastewater Systems.

Après une brève présentation des grandes étapes du fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées, nous présentons un modèle simplifié (de référence) issu du modèle biologique le plus couramment employé, le modèle ASM1. Étant donné sa structure complexe, de nombreux modèles réduits sont proposés dans la littérature ([5], [14], [21], [6], [20] et [19]) afin d'obtenir un modèle plus exploitable en situation réelle. Les différentes techniques de réduction de ce modèle sont donc exposées. Le modèle réduit obtenu est un modèle non linéaire présenté par [5]. Notre objectif est d'adapter ce modèle à la station

d'épuration de Blesbrück au Luxembourg, en utilisant les capteurs en ligne existant sur la station. Étant donné que les concentrations incidentes X^{in}_{DCO} , S^{in}_{NO} , S^{in}_{NH} et S^{in}_{ND} , ne sont généralement pas mesurées, nous sommes contraints de les considérer comme des entrées inconnues. Pour l'estimation des variables d'état et des entrées inconnues, nous appliquons les deux estimateurs présentés dans la section 3.2 et 3.3 du chapitre précédent. Pour valider nos résultats, nous disposons de plusieurs jeux de données. En effet, nous avons trois jeux de données issus du benchmark, mentionné ci-dessus qui représente un temps sec, un temps pluvieux et un temps orageux.

Cette application résulte d'un travail de collaboration avec l'équipe « *Modélisation et simulation* » du Laboratoire des Technologies Industrielles (LTI), Centre de Recherche Henri Tudor (CRPHT), Esch sur Alzette, Luxembourg.

4.2 Épuration des eaux usées.

4.2.1 Définition.

- Ammoniaque : composé gazeux d'azote et d'hydrogène, très soluble dans l'eau.
- Milieu anoxique : milieu dans lequel l'oxygène n'est pas présent sous forme libre dissoute.
- Milieu aérobie : milieu dans lequel l'oxygène libre est présent en quantité suffisante et joue un certain rôle.
- Biomasse hétérotrophe : représente les organismes qui ne peuvent tirer de l'énergie, pour l'entretien de la vie, que de la décomposition des matières organiques, et qui ne peuvent utiliser les composés minéraux comme seule source d'énergie ou pour effectuer la synthèse de matières organiques.
- Biomasse autotrophe : représente les organismes qui peuvent utiliser le carbone minéral comme source principale de carbone et qui peuvent tirer de l'énergie pour l'entretien de la vie, de l'oxydation d'éléments minéraux (chimiotrophe) ou de l'énergie lumineuse (phototrophe).
- Demande chimique en oxygène (D.C.O) : quantité d'oxygène nécessaire à une dégradation purement chimique des débris et résidus contenus dans une eau polluée sans intervention de micro-organismes.
- Hydrolyse : fractionnement de grosses molécules en plus petites molécules.
- Nitrification : oxydation de l'azote ammoniacal en nitrates sous l'action de bactéries.
- Substrat : matière pouvant être consommée par les micro-organismes.

4.2.2 Les grandes étapes du traitement

Le procédé de traitement est dit « à boues activées » car l'ensemble des conditions favorables à une activité maximale des bactéries est mis en œuvre :

- un apport en oxygène suffisant,
- un apport en nutriments si l'effluent ne contient pas tous les composés nécessaires au développement des bactéries,
- une agitation permanente afin de favoriser le contact entre bactéries et pollution,
- une concentration élevée en bactérie pour augmenter l'efficacité du traitement.

La chaîne de traitement est composée d'un bioréacteur, d'un clarificateur et d'une boucle de recyclage des boues (figure 4.1).

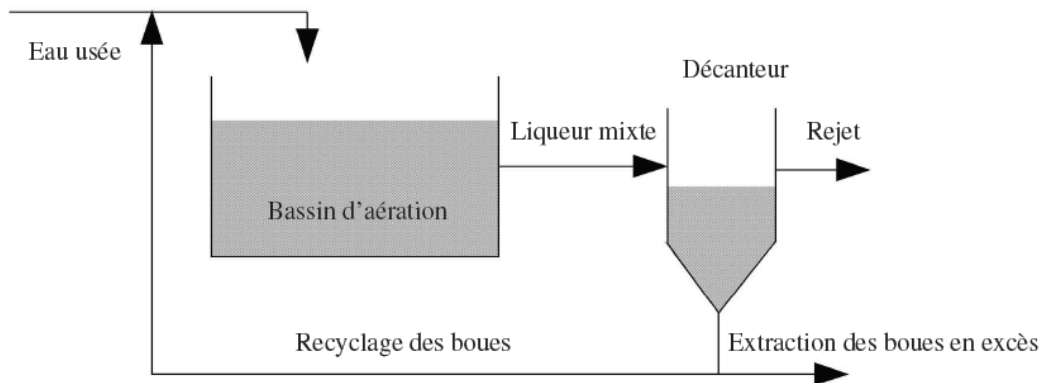


FIGURE 4.1: Procédé de traitement à boues activées en bassin unique

L'eau est le véhicule de transport et de dissémination idéale de nombreux agents polluants. Les contraintes d'assainissement, de plus en plus strictes, exigent le traitement d'un nombre plus important de polluants (matières organiques, minérales, pathogènes et toxiques). Étant donné la grande diversité de ces déchets, l'épuration d'un affluent résiduaire comporte plusieurs étapes, chacune spécifique aux caractéristiques particulières des éléments à traiter. Globalement, une filière de traitement est constituée de différents modules où les eaux brutes sont soumises à une combinaison ou à une succession de différents processus de purification avant leur rejet :

Le pré-traitement :

Le pré-traitement a pour objectif l'extraction des matières les plus grossières (brindilles, feuilles, tissus,...) et des éléments susceptibles de gêner les étapes ultérieures du traitement. Il comprend :

- *le dégrillage* : qui a pour fonction d'éliminer les gros déchets ;

- *le dessablage* : pour prévenir les dépôts dans les canalisations, protéger les organes mécaniques (pompes) contre l'abrasion et éviter de perturber les autres étapes de traitement. Les sables, recueillis généralement par raclage en fond de bassin, sont recyclés ;
- *le dégraissage-déshuilage* : sert à éviter l'encrassement de la station par des corps gras. Effectuée dans le même bassin que l'étape de dessablage, la récupération des graisses et huiles se fait en surface. Les composés collectés sont alors incinérés (cas du traitement d'un effluent urbain) ou recyclés pour la fabrication de savons ou détergents (cas de certains effluents industriels) en fonction de leur qualité.

Le traitement primaire :

Le traitement s'effectue par voie physico-chimique avec pour but d'extraire le maximum de matières en suspension et de matières organiques facilement décantables.

Trois voies de traitement sont possibles :

- la décantation (processus physique) : le principe de séparation solide-liquide est la pesanteur, les matières en suspension ou colloïdales tendent à se séparer du liquide par sédimentation ;
- la flottation (processus physique) : par opposition à la décantation, la flottation est un procédé de séparation solide-liquide ou liquide-liquide qui s'applique à des particules dont la masse volumique réelle ou apparente (flottation assistée) est inférieure à celle du liquide qui les contient ;
- la décantation associée à l'utilisation d'un coagulant- flocculant (voie physico-chimique) : le principe est ici de favoriser l'agrégation des molécules en suspension grâce aux techniques de coagulation et de floculation de façon à augmenter la sédimentation grâce à l'obtention de floccs plus gros.

4.3. Modélisation des stations d'épuration.

Le traitement secondaire : Le traitement secondaire a pour objectif principal l'élimination des composés solubles d'origine organique. Parallèlement, la floculation de la biomasse permet de piéger les matières en suspension restant à l'issue du traitement primaire. Le principe de ce traitement est de mettre en contact la matière organique contenue dans les eaux usées avec une population bactérienne. Celle-ci assimile alors la matière organique pour son propre développement. Ces dispositifs permettent d'intensifier et de localiser sur des surfaces réduites les phénomènes de transformation et de dégradation des matières organiques tels qu'ils se produisent en milieu naturel. Ils sont la reconstitution d'un écosystème simplifié

et sélectionné faisant intervenir une microfaune de bactéries, de protozoaires et de métazoaires.

Les traitements tertiaires : La législation sur les seuils de rejet en milieu naturel se durcissant régulièrement, de nombreuses études sont menées afin de proposer des traitements tertiaires permettant d'éliminer les composés restant après le traitement secondaire. Cette étape joue un rôle d'affinage dans le but soit, d'une réutilisation des eaux épurées à des fins agricoles ou industrielles, soit d'une protection plus poussée du milieu récepteur destiné à un usage bien spécifique. Ce traitement peut être de nature :

- *biologique* pour l'élimination de l'azote (nitrification-dénitrification) et du phosphore (déphosphatation).
- *physico-chimique* pour la précipitation du phosphore (coagulation-décantation) ou l'élimination des dernières matières en suspension (filtration sur lits de sable ou charbon actif).
- *chimique* pour la désinfection et l'élimination des risques de contamination bactériologique (chlore ou ozone).

Le traitement des boues : Les techniques actuelles d'épuration des eaux usées domestiques ou industrielles, ainsi que les seuils de rejet de plus en plus exigeants et les quantités à traiter de plus en plus grandes, entraînent, au cours des différentes phases de traitement, une importante production de boue. Les boues contiennent en général 95% à 98 % d'eau. Les traitements imposés aux boues s'effectuent classiquement en différentes étapes : épaissement, digestion anaérobie, déshydratation, séchage et valorisation. La valorisation est soit agricole (épandage direct ou compostage), soit énergétique (incinération, digestion anaérobie).

Les nombreuses études entreprises depuis le début des années 1970 pour modéliser le procédé de traitement d'épuration à boues activées se sont soldées par l'élaboration de modèles dynamiques pertinents. En 1976, Marias et Ekama [17] ont développé un modèle pour la phase aérobie en régime permanent pour l'élimination des composants azotés et carbonés. Ce modèle exprimait déjà les taux de croissance de micro-organismes par l'équation cinétique de Monod ([17]). Des années plus tard, un modèle boues activées incorporant au processus de nitrification et dénitrification fut présenté [10]. En 1983, l'IAWQ créait un groupe de recherche international qui aboutissait au développement d'un modèle général, et qui y intégrerait des concepts tels que les processus d'oxydation du carbone, de nitrification et de dénitrification nommé ASM 1 ([11]). Des nouveaux apports sont toujours proposés dans la littérature scientifique plus récente ASM2 [12], ASM2d [13] et ASM3 [9]. La complexité des

modèles du procédé des boues activées et le nombre important des paramètres mis en jeu associés aux données ayant souvent des variations dynamiques insuffisantes, peut aboutir à une perte d'identifiabilité théorique et pratique. Diverses méthodes permettant de tester l'identifiabilité des modèles sous forme d'état sont présentées dans l'ouvrage édité par Walter [23]. Des études de l'identifiabilité structurelle et l'identifiabilité pratiques de quatre modèles cinétiques du procédé des boues activées sont développées par Dochain *et al.* Dans respectivement [7] et [22] en considérant le taux de consommation d'oxygène dissous comme mesure disponible. Une autre étude de l'identifiabilité structurelle du modèle ASM 1 à partir des mesures d'ammoniaque, de nitrate et de d'oxygène dissout est présentée dans la thèse de Julien [15]. Dans [4], une étude de l'identifiabilité du modèle réduit est démontrée, sous des conditions d'aérobiose et d'anoxie, à partir des mesures en ligne des concentrations en oxygène dissous, ammoniaque et nitrate. La description d'un modèle de référence d'une station d'épuration à boues activées basée sur le modèle ASM 1 et un modèle réduit présenté par [4] font l'objet de cette section.

4.3.1 Modèle de référence.

Le modèle ASM 1 [11] est le fruit du travail d'une équipe créée par l'association IAWQ en 1983. Cette équipe est formée pour encourager le développement et pour faciliter l'application des modèles mathématiques pour la conception et la gestion des stations d'épurations. L'un des principaux objectifs de cette équipe consistait à élaborer un modèle simple et apte à reproduire de façon réaliste les processus de dégradation biologiques dans les bassins à boues activées. Après la publication du modèle ASM 1, de nombreuses applications de ce modèle ont permis d'éprouver ses capacités de prédiction dans différents conditions opératoires [24].

Le modèle ASM 1 décrit les mécanismes biologiques de dégradation des matières organiques, de nitrification et de dénitrification et il est essentiellement utilisé comme modèle de simulation. Il constitue un modèle général capable de représenter de façon précise le comportement du procédé lors du traitement d'un effluent chargé en matières azotées et carbonées. Dans cette manuscrit, deux simplifications classiques sont apportées au modèle original ([15], [24]) :

- L'alcalinité S_{ALK} est omise puisqu'elle n'intervient pas dans les dynamiques des autres variables du modèle ;
- les composés particuliers internes XI et XP ne sont pas distingués. Nous allons présenter dans ce paragraphe un modèle simplifié, issu du modèle ASM 1, comprenant 11 variables

d'état (Tab. 4.1). Notons que la lettre X est proposée pour les composés particuliers et la lettre S pour les composés solubles. Nous pouvons classer ces variables d'état en quatre groupes :

- *Les substrats* : le substrat rapidement biodégradable (S_S) et le substrat lentement biodégradable X_S .
- *Les biomasses* : la biomasse hétérotrophe $X_{B,H}$ responsable de l'oxydation des matières organiques et de la dénitrification, et la biomasse autotrophe $X_{B,A}$, responsable de la nitrification. La croissance des biomasses est décrite par la loi Monod.
- *Les composés azotés* : sont distingués en fonction de leurs degrés d'oxydation et repartis en 3 catégories :
 - les formes organiques (solubles S_{ND} et particulières X_{ND}),
 - les formes ammoniacales (S_{NH})
 - les formes oxydées (S_{NO} (nitrates-nitrites)).
- *L'oxygène dissous* S_O .

Nous constatons que certaines variables d'état correspondent à des espèces chimiques existantes (S_{NH} , S_{NO} , S_O), alors que d'autres sont au contraire plus conceptuelles et ne peuvent pas être directement mesurées ($X_{B,H}$, $X_{B,A}$).

| Composé | Symbole | Unité |
|--|-----------|-----------------|
| 1. Matière organique soluble inerte | S_I | $[gDCO.m^{-3}]$ |
| 2. Substrat facilement biodégradable | S_S | $[gDCO.m^{-3}]$ |
| 3. Matière organique particulière inerte | X_I | $[gDCO.m^{-3}]$ |
| 4. Substrat lentement biodégradable | X_S | $[gDCO.m^{-3}]$ |
| 5. biomasse active hétérotrophe | $X_{B,H}$ | $[gDCO.m^{-3}]$ |
| 6. biomasse active autotrophe | $X_{B,A}$ | $[gDCO.m^{-3}]$ |
| 7. Azote sous forme de nitrites et de nitrates | S_{NO} | $[gN.m^{-3}]$ |
| 8. Azote sous forme d'ammoniaque | S_{NH} | $[gN.m^{-3}]$ |
| 9. Azote organique soluble biodégradable | S_{ND} | $[gN.m^{-3}]$ |
| 10. Azote organique particulière biodégradable | X_{ND} | $[gN.m^{-3}]$ |
| 11. Oxygène dissous | S_O | $[gO_2.m^{-3}]$ |

Table 4.1: Variables d'état du modèle de dégradation biologique.

Les variables d'état du modèle ASM1 sont liées par 8 processus de dégradation. Une brève description de chacun de ces processus est donnée dans les points suivants.

- *Croissance aérobie des micro-organismes hétérotrophes* : une fraction de substrat facilement biodégradable est utilisée pour la croissance de la biomasse et à l'élimination du substrat. Il est ainsi naturellement limité par l'épuisement du substrat S_S , mais également par le manque d'oxygène dissous et d'ammoniaque.
- *Croissance anoxie des micro-organismes hétérotrophes* : en l'absence d'oxygène, les organismes hétérotrophes vont utiliser le nitrate comme récepteur terminal d'électrons, avec le substrat S_S , pour produire la biomasse et de l'azote gazeux (dénitrification). Un changement de l'alcalinité est associé à la réaction. L'ammoniaque sert de source d'azote pour la synthèse des micro-organismes.
- *Croissance aérobie des micro-organismes autotrophes* : l'ammoniaque est oxydé en nitrate (nitrification) ce qui donne comme résultat une production de biomasse autotrophe et une augmentation de la demande d'oxygène. Il est aussi utilisé comme source d'énergie pour la synthèse. L'effet sur la quantité de biomasse produite est très faible. Par contre, l'alcalinité comme la consommation d'oxygène sont fortement affectées.
- *Mortalité des micro-organismes hétérotrophes et autotrophes* : ces processus sont modélisés selon l'hypothèse de mortalité- régénération ([8]). Les micro-organismes meurent à un taux déterminé, et cette biomasse devient une combinaison des produits particuliers et de substrat lentement biodégradable. L'azote organique associé à X_s est disponible comme azote organique particulière. La DCO n'est pas modifiée. Les taux de mortalité sont supposés invariants en condition d'aérobie et d'anoxie.
- *Ammonification de l'azote organique soluble* : l'azote organique biodégradable est transformé en ammonium par l'action de la biomasse hétérotrophe active. L'alcalinité est aussi modifiée.
- *Hydrolyse des matières organique* : le substrat lentement biodégradable correspondant aux substances polluantes est décomposé par un mécanisme extracellulaire, en produisant du substrat facilement biodégradable utilisable par la biomasse. Ce processus a lieu en aérobie et en anoxie. Le taux d'hydrolyse en anoxie est réduit par un facteur η_h (<0) par rapport aux conditions d'aérobie. Il est lié à la biomasse hétérotrophe par une fonction du premier ordre et sature quand la concentration de substrat absorbé devient grande par rapport à la biomasse.
- *Hydrolyse de l'azote organique* : l'azote organique particulière biodégradable est décomposé en azote organique soluble à un certain taux défini par la réaction d'hydrolyse précédemment écrite.

Dans un souci de clarté et dans la mesure du possible, les mêmes notations seront utilisées pour la suite de cette section. En particulier :

- x désigne l'état du système,
- Q est relatif aux différents débits,
- les exposants (où indice selon le cas) $^{in, rec, purg}$ et dec sont utilisés pour désigner les grandeurs respectivement associées à l'influent, au recyclage des boues, à l'extraction et au clarificateur.

Le tableau 4.2 permet une lecture facile des cinétiques modélisées : pour chaque composant soluble (S) ou particulaire (X) qui apparaît dans le haut du tableau, les processus p_j intervenant sont signalés dans la colonne correspondante à travers les paramètres stœchiométriques. Les processus sont définis à droite du tableau, alors que les paramètres stœchiométriques sont définis dans le coin inférieur gauche. Le terme de cinétique pour chaque composant i du modèle est obtenu en additionnant les produits des coefficients stœchiométriques $v_{i,j}$ par la cinétique du processus p_j . Alors, le taux de conversion R_j de chaque composé est donné par la relation suivante :

$$R_j = \sum_{j=1}^8 v_{i,j}, i = 1, \dots, 11 \quad (4.1)$$

Le modèle cinétique résultant comporte 20 paramètres cinétiques et stœchiométriques, qui sont présentés dans le tableau 4.3.1. Les valeurs par défaut définies par [11] et dans le benchmark y sont reportées et des gammes de variations sont également données pour certains paramètres. Les équations de bilan de matière s'écrivent :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{Q_{rec}}{V^r} .x_i^{rec} + \frac{Q_{in}}{V^r} .x_i^{in} - \frac{Q_{in} + Q_{rec}}{V^r} .x_i + R_i \quad (4.2)$$

où V^r représente le volume réactionnel et x^i , x^{rec}_i et x^{in}_i , les concentrations du composé i dans le bassin d'aération, dans le recyclage et dans l'influent respectivement, c'est-à-dire :

$$xi = [S_I ; S_S ; X_I ; X_S ; X_{B,H} ; X_{B,A} ; S_{NO} ; S_{NH} ; S_{ND} ; X_{ND} ; S_O]^T$$

Le bilan relatif à la concentration en oxygène dissous compte un terme supplémentaire $kLa(S^o_{sat} - S_o)$ correspondant à l'apport d'air extérieur dans le bassin d'aération, c'est-à-dire au fonctionnement des aérateurs du bassin d'aération.

Remarque 4.1. Les phénomènes biologiques présents au sein des phases anoxiques et aérobies sont simulés sous un modèle unique. Ceci est possible grâce à l'utilisation de fonctions de commutation :

– les cinétiques ayant lieu uniquement en phase anoxique comporteront le terme $\frac{K_{O,H}}{S_O + K_{O,H}}$ inhibant la réaction en phase aérobie.

– les cinétiques ayant lieu uniquement en phase aérobie comporteront le terme $\frac{S_O}{S_O + K_{O,H}}$ ou

le terme $\frac{S_O}{S_O + K_{O,A}}$ inhibant la réaction en phase anoxique.

Modèle ASM1 modifié (Source : [4]).

| Concentrations j | | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | Cinétique de la réaction |
|------------------|---|-------|------------------|--------------|------------------|-----------|-----------|--------------------------|----------------------------|----------|---------------------------------------|-----------------------|---|
| i | Réaction ρ_i | S_I | S_S | X_I | X_S | $X_{B,H}$ | $X_{B,A}$ | S_{NO} | S_{NH} | S_{ND} | X_{ND} | S_O | |
| 1. | Croissance aérobie des hétérotrophes | | $-\frac{1}{Y_H}$ | | | 1 | | | $-i_{NBM}$ | | | $-\frac{1-Y_H}{Y_H}$ | $\rho_1 = \mu_H \frac{S_S}{K_{S+S}} \frac{S_{NH}}{K_{NH,H+S_{NH}}} \frac{S_O}{K_{O,H+S_O}} X_{B,H}$ |
| 2. | Croissance anoxie des hétérotrophes | | $-\frac{1}{Y_H}$ | | | 1 | | $-\frac{1-Y_H}{2.86Y_H}$ | $-i_{NBM}$ | | | | $\rho_2 = \mu_H \frac{S_S}{K_{S+S}} \frac{S_{NH}}{K_{NH,H+S_{NH}}} \frac{S_{NO}}{K_{O,H+S_O}} \eta_{NO,g} X_{B,H}$ $\times \frac{K_{O,H}}{K_{O,H+S_O}} \frac{S_{NO}}{K_{NO+S_{NO}}} \eta_{NO,g} X_{B,H}$ |
| 3. | Croissance aérobie des autotrophes | | | | | | 1 | $\frac{1}{Y_A}$ | $-\frac{1}{Y_A} - i_{NBM}$ | | | $-4.57 \frac{1}{Y_A}$ | $\rho_3 = \mu_A \frac{S_{NH}}{K_{NH,A+S_{NH}}} \frac{S_O}{K_{O,A+S_O}} X_{B,A}$ |
| 4. | Mortalité des hétérotrophes | | | $f_{r_{XI}}$ | $1 - f_{r_{XI}}$ | -1 | | | | | $i_{NBM} - f_{r_{XI}} \times i_{NXI}$ | | $\rho_4 = b_H X_{B,H}$ |
| 5. | Mortalité des autotrophes | | | $f_{r_{XI}}$ | $1 - f_{r_{XI}}$ | | -1 | | | | $i_{NBM} - f_{r_{XI}} \times i_{NXI}$ | | $\rho_5 = b_A X_{B,A}$ |
| 6. | Ammonification de l'azote organique soluble | | | | | | | | 1 | -1 | | | $\rho_6 = k_a S_{ND} X_{B,H}$ |
| 7. | Hydrolyse de la matière organique absorbée | | 1 | | -1 | | | | | | | | $\rho_7 = k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X+X_S/X_{B,H}} \left(\frac{S_O}{K_{O,H+S_O}} + \eta_{NO,h} \frac{S_{NO}}{K_{NO+S_{NO}}} \right) X_{B,H}$ |
| 8. | Hydrolyse de l'azote organique absorbé | | | | | | | | | 1 | -1 | | $\rho_8 = k_h \frac{X_{ND}/X_{B,H}}{K_X+X_S/X_{B,H}} \left(\frac{S_O}{K_{O,H+S_O}} + \eta_{NO,h} \frac{S_{NO}}{K_{NO+S_{NO}}} \right) X_{B,H}$ |

| Paramètre | Symbole | Valeur du benchmark | Valeurs par défaut 20°C | Valeurs par défaut 10°C | Gamme de variation |
|---|---------------|---------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------|
| <i>Paramètres stoechiométriques</i> | | | | | |
| Rendement de conversion des hétérotrophes | Y_H | 0.67 | 0.67 | 0.67 | 0.38 - 0.75 |
| Rendement de conversion des autotrophes | Y_A | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.07 - 0.28 |
| Fraction de DCO inerte issue du décès de la biomasse | f_{XI} | 0.08 | 0.08 | 0.08 | - |
| Proportion d'azote dans la biomasse | i_{NBM} | 0.08 | 0.086 | 0.086 | - |
| Proportion d'azote dans les produits de la biomasse | i_{NXI} | 0.06 | 0.06 | 0.06 | - |
| <i>Paramètres cinétiques</i> | | | | | |
| Taux de croissance spécifique maximal des hétérotrophes | μ_H | 4.0 | 6.0 | 3.0 | 0.60 - 13.2 |
| Taux de mortalité des hétérotrophes | b_H | 0.30 | 0.62 | 0.20 | 0.05 - 1.6 |
| Constante d'affinité en substrat des hétérotrophes | K_S | 10 | 20 | 20 | 5 - 225 |
| Constante d'affinité en ammoniac des hétérotrophes | $K_{NH,H}$ | 0.05 [82] | | | - |
| Constante d'affinité en oxygène des hétérotrophes | $K_{O,H}$ | 0.20 | 0.20 | 0.20 | 0.01 - 0.20 |
| Constante d'affinité en nitrates des hétérotrophes dénitrifiants | K_{NO} | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.01 - 0.50 |
| Taux de croissance maximal des autotrophes | μ_A | 0.5 | 0.80 | 0.30 | 0.20 - 1.0 |
| Taux de mortalité des autotrophes | b_A | 0.05 | 0.20 | 0.10 | 0.05 - 0.3 |
| Constante d'affinité en ammoniac des autotrophes | K_{NHA} | 1.0 | 1.0 | 1.0 | - |
| Constante d'affinité en oxygène des autotrophes | K_{OA} | 0.40 | 0.40 | 0.40 | 0.40 - 2.0 |
| Facteur de correction pour la croissance anoxie des hétérotrophes | $\eta_{NO,g}$ | 0.8 | 0.80 | 0.80 | 0.6 - 1.0 |
| Taux d'ammonification | κ_a | 0.05 | 0.08 | 0.04 | - |
| Taux maximal spécifique d'hydrolyse | κ_h | 3.0 | 3.0 | 1.0 | - |
| Constante d'affinité en substrat particulière pour l'hydrolyse | K_X | 0.1 | 0.03 | 0.01 | 5 - 225 |
| Facteur de correction pour l'hydrolyse en présence de | $\eta_{NO,h}$ | 0.8 | 0.4 | 0.4 | - |

Paramètres stoechiométriques et cinétiques du modèle de

4.3.2 Modèle réduit.

La plupart des outils mathématiques disponibles pour la conception et la résolution des problèmes d'estimation, de diagnostic et de contrôle ont besoin de modèles relativement simples des processus. Pour les procédés à boues activées, les possibilités de contrôle dans le cas pratique sont très limitées du fait de leur grande complexité. Le modèle ASM 1, proposé par l'association IAWQ, comporte treize équations d'état non linéaires et plus de vingt paramètres.

La simplification de ce modèle, appelé modèle de référence présenté dans 4.3.1, ayant onze équations d'état avec vingt paramètres, est presque aussi complexe que le modèle standard et quasiment intraitable pour des fins d'estimation et de commande en ligne. Il faut donc faire appel à des modèles plus simples.

L'utilisation de modèles simplifiés de fonctionnement est fréquente en traitement des eaux par boue activée pour l'observation de l'état, l'estimation en ligne des paramètres ou encore la commande des procédés (par ex. [24], [15], [25], [21], [26], [4]). La plupart de ces travaux sont basés sur les modèles ASM 1 et ASM 2. Dans [21], un algorithme est proposé pour l'élimination des variables d'état, basé sur l'étude de leurs dynamiques dans le temps : les dynamiques n'appartenant pas à l'échelle de temps d'intérêt sont négligées. Dans cette voie, les variables moyennement rapides sont considérées comme irréductibles, les variables rapides atteignent rapidement leur régime permanent, les variables lentes évoluent d'une façon suffisamment lente pour être considérées comme constantes. Dans ce cas la concentration de l'oxygène est supposée constante ou nulle suivant la phase. Les travaux de Julien [15] sont basés sur la commande du procédé par l'ajout d'une source de carbone externe. Toutefois, il a pu être vérifié que le modèle simplifié élaboré par cet auteur n'est pas adapté au cas de la commande des séquences d'aération du réacteur. Plus récemment, [59] et [87] ont proposé d'utiliser un modèle linéaire (basé sur le modèle ASM 1) dans un schéma de commande en boucle fermée du système d'aération. Ce type de modèles, bien qu'attractif pour sa simplicité, ne bénéficie cependant que d'un horizon de prédiction très limité, en raison notamment de la forte non linéarité du procédé. Dans cette thèse, nous allons utiliser le modèle présenté dans [4]. Ce modèle, basé sur le modèle ASM 1, est élaboré pour le procédé à boue activée en aération séquentielle, en vue de la commande optimale du système d'aération. Les simplifications considérées sont de deux types : 1) les dynamiques lentes du système sont identifiées au moyen d'une méthode d'homotopie, puis éliminées du modèle ; 2) des simplifications plus heuristiques, consistant à prendre en compte un composé organique

unique et à éliminer la concentration des composés organiques azotés, sont ensuite appliquées. Elles conduisent à un modèle simplifié de 5 variables. Il est également vérifié que le modèle proposé est observable et identifiable, sous certaines conditions, à partir des mesures en ligne des concentrations en oxygène dissous, ammoniacque et nitrate. Le modèle réduit de [4] est choisi, parmi les autres modèles réduits, car il présente toutes les propriétés requises pour une future utilisation au sein de schémas de commande en boucle fermée, en vue de la commande prédictive des stations d'épuration à boue activée.

4.3.2.1 Simplification du modèle de référence

Les hypothèses de simplifications utilisées sont inspirées de la thèse de Chachuat [4]. Notons que l'objectif de ce paragraphe est de rappeler les différentes étapes de simplification effectuées pour obtenir le modèle réduit.

Simplification des dynamiques lentes : elle se base sur la séparation des dynamiques lentes et des dynamiques rapides en utilisant la théorie des perturbations singulières. Nous pouvons vérifier facilement que les dynamiques des composés organiques inertes (S_I) et des biomasses hétérotrophe (X_{BH}) et autotrophe (X_{BA}) sont nettement plus lentes que celles des autres composés du système, et ceci tout au long du cycle de fonctionnement. Étant donné que les dynamiques de ces composés ont des constantes de temps de l'ordre de plusieurs jours, il apparaît donc légitime de considérer que les concentrations S_I , X_{BH} et X_{BA} sont constantes durant quelques heures. En les appliquant et en éliminant en plus la concentration en composés organiques solubles inertes S_I (dont la dynamique est découplée de celle des autres composés), le nombre de variables d'état est ainsi réduit de 11 à 7.

Simplification des composés organiques : le modèle ASM 1 établit une distinction entre les composés biodégradables solubles S_S , supposés directement assimilables par les microorganismes, et particuliers X_S , qui doivent être préalablement hydrolysés en composés solubles pour pouvoir être assimilés. Ces composés jouent un rôle important dans le processus de dégradation de l'azote (processus de dénitrification notamment), et doivent par conséquent faire l'objet d'une attention particulière. La description de ces composés est ici simplifiée par le biais d'une variable d'état unique $X_{DCO} = S_S + X_S$, dont la dynamique s'écrit sous la forme :

$$\dot{X}_{DCO} = D^{in}(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO}) - \frac{1}{Y_H}(\rho_1 + \rho_2) + \theta_2 \quad (4.3)$$

Où $D^{in} = \frac{Q_{in}}{V_O}$ et X_{DCO}^{in} désignent respectivement le taux de dilution et la concentration des composés organiques relatifs à l'influent. Les cinétiques de croissance aérobie ρ_1 et anoxie ρ_2 de la biomasse hétérotrophe s'écrivent alors, en fonction de variables d'états, sous la forme :

$$\rho_1 = \theta_1 \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{DCO}} \frac{S_O}{S_O + K_{O,H}}, \quad (4.4)$$

$$\rho_2 = \theta_1 \eta_{NO_3} \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{DCO}} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{S_{NO} + K_{NO}} \quad (4.5)$$

Où les paramètres spécifiques ρ_1 et K_{DCO} sont définis par :

$$\theta_1 = \mu_H X_{B,H},$$

$$K_{DCO} = K_S \frac{X_{DCO}}{S_S} = \frac{K_S}{f_{SS}}.$$

Le paramètre ρ_1 ne dépend que des variables lentes du modèles ASM 1, donc ce paramètre évolue lentement. Les variations du paramètre K_{DCO} conservent une valeur moyenne relativement stable.

La prise en compte d'un composé organique unique permet ainsi d'éliminer une variable d'état supplémentaire et présente également l'avantage d'éviter la description du mécanisme d'hydrolyse des composés particuliers en composés solubles.

Simplification des composés azotés : le modèle ASM1 distingue quatre fractions azotées S_{NO} , S_{NH} , S_{ND} et X_{ND} . Dans la mesure où les concentrations en azote ammoniacal S_{NH} et en nitrate/nitrites S_{NO} constituent l'essentiel des rejets d'azote total et sont mesurables en ligne, il est difficilement concevable que ces composés n'apparaissent pas dans l'expression du modèle réduit. En revanche, les deux fractions d'azote organique soluble S_{ND} et particulaire X_{ND} , dont le rôle est de décrire la formation interne de S_{NH} par les processus d'hydrolyse et d'ammonification, ne constituent qu'une faible partie des rejets d'azote. La simplification consiste à découpler les dynamiques des deux composés azotés organiques, en simplifiant la description du mécanisme d'hydrolyse. En remarquant que

$i_{NBM} \ll \frac{1}{Y_H}$ et $Y_A \ll 4.57$, les cinétiques d'ammonification ρ_6 et de nitrification

$\frac{1}{Y_H} \rho_3$ s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{1}{Y_A} \rho_3 = \theta_3 \frac{S_{NH}}{S_{NH} + K_{NH,A}} \frac{S_O}{S_O + K_{O,A}}$$

$$\rho_6 = \theta_4 S_{ND}$$

Avec :

$$\theta_3 = \frac{\mu_A}{Y_A} X_{BA},$$

$$\theta_4 = Ka X_{BH}$$

Et les dynamiques des composés S_{ND} et X_{ND} sont découplées en simplifiant le processus ρ_8 d'hydrolyse de l'azote organique particulaire :

$$\rho_8 = \theta_5 \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{ND}} \left(\frac{S_O}{S_O + K_{O,H}} + \eta_{NO,h} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{S_{NO} + K_{NO}} \right) \quad (4.6)$$

Avec :

$$\theta_5 = K_h \frac{X_{ND}}{X_S} X_{B,H}$$

$$K_{ND} = K_X \frac{X_{DCO}}{X_S} X_{B,H}$$

4.3.2.2 Expression du modèle réduit.

L'application de l'ensemble des simplifications précédentes permet d'exprimer le modèle réduit sous la forme suivante :

$$\dot{X}_{DCO} = D^{in} \left(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) - \frac{1}{Y_H} (\rho_1 + \rho_2) \quad (4.7a)$$

$$\dot{S}_{NO} = D^{in} (S_{NO}^{in} - S_{NO}) - \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \rho_2 + \frac{1}{Y_A} \rho_3 \quad (4.7b)$$

$$\dot{S}_{NH} = D^{in} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) - i_{NBH} (\rho_1 + \rho_2) - \frac{1}{Y_A} \rho_3 + \rho_6 \quad (4.7c)$$

$$\dot{S}_{ND} = D^{in} (S_{ND}^{in} - S_{ND}) - \rho_6 + \rho_8 \quad (4.7d)$$

$$\dot{S}_O = D^{in} S_O - \frac{1 - Y_H}{Y_H} \rho_1 - 4.57 \frac{1}{Y_A} \rho_3 + k_L a (S_O^{sat} - S_O) \quad (4.7e)$$

Où

$$\rho_1 = \theta_1 \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{DCO}} \frac{S_O}{S_O + K_{O,H}}, \rho_2 = \theta_1 \eta_{NOg} \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{DCO}} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{S_{NO} + K_{NO}}$$

$$\theta_2 = (1 - fr_{XI}) + (\rho_4 + \rho_5), \frac{1}{Y_A} \rho_3 = \theta_3 \frac{S_{NH}}{S_{NH} + K_{NH,A}} \frac{S_O}{S_O + K_{O,A}}$$

$$\rho_4 = b_H X_{B,H}, \rho_5 = b_A X_{B,A}, \rho_6 = \theta_4 S_{ND}$$

$$\rho_8 = \theta_5 \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{ND}} \left(\frac{S_O}{S_O + K_{O,H}} + \eta_{NO,h} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{S_{NO} + K_{NO}} \right)$$

Et

$$\theta_1 = \mu_H X_{B,H}, \theta_3 = \frac{\mu_A}{Y_A} X_{BA}, \theta_4 = Ka X_{BH}, \theta_5 = K_h \frac{X_{ND}}{X_S} X_{B,H}$$

$$K_{DCO} = K_S \frac{X_{DCO}}{S_S} = \frac{K_S}{f_{SS}}, K_{ND} = K_X \frac{X_{DCO}}{X_S} X_{B,H}, D^{in} = \frac{Q_{in}}{V_O}$$

Ce modèle réduit comporte cinq variables d'état (X_{DCO} , S_{NO} , S_{NH} , S_{ND} et S_O), 16 paramètres ainsi que le débit Q_{in} et les concentrations X_{DCO}^{in} , S_{NO}^{in} , S_{NH}^{in} et S_{ND}^{in} incidentes. Les paramètres stœchiométriques et cinétiques sont identiques à ceux définis dans le modèle ASM1 (Tab. 4.3.1). En revanche, les paramètres supplémentaires $\theta_i (i = 1; \dots; 5)$, K_{DCO} et K_{ND} sont issus de simplifications. Les valeurs de ces paramètres spécifiques sont données dans le Tableau 4.4.

On peut noter que les paramètres θ_1 et θ_2 peuvent être interprétés comme les taux maximaux de dégradation des composés organiques et de l'azote ammoniacal [4]. Nous précisons que la concentration de S_{NO}^{in} , dans le modèle réduit 4.7a-4.7e, est supposée non nulle contrairement à ce qui a été proposée dans [4].

Table 4.4: Valeurs des paramètres spécifiques

| Paramètre | Valeur |
|------------|-----------------------------|
| θ_1 | 9956 |
| θ_2 | 693 |
| θ_3 | 283 |
| θ_4 | 124 |
| θ_5 | 480 |
| K_{DCO} | 220 |
| K_{ND} | 258 |
| X_{BA} | 136 $g_{DCO} \cdot m^{-3}$ |
| X_{BH} | 2489 $g_{DCO} \cdot m^{-3}$ |
| X_{ND} | 6 $g_N \cdot m^{-3}$ |

4.4 Utilisation en ligne du modèle réduit.

Un des problèmes fondamentaux qui se pose pour la commande des stations d'épuration concerne le manque de capteurs disponibles. Néanmoins, en plus des sondes à oxygène dissous S_0 aujourd'hui largement répandues, de nouveaux capteurs sont disponibles pour la mesure des concentrations en nitrate S_{NO} et en ammoniacque S_{NH} (WACHEUX *et al.*, 1993, 1996 ; LYNGGAARDJENSEN *et al.*, 1996). Ces capteurs ne nécessitent plus de prise d'échantillons, sont robustes et ont des temps de réponse adaptés (typiquement de l'ordre de 5 à 10 mm). En revanche, les concentrations des composés organiques biodégradables X_{DCO} et des composés azotés organiques solubles S_{ND} ne sont pas mesurables en ligne.

Face à cette mesure partielle de l'état du système, il devient nécessaire d'étudier l'observabilité et l'identifiabilité structurelle des paramètres du modèle réduit. L'étude de l'observabilité (NIJMEIJER et VAN DER SHAFT, 1991) permet de déterminer quelles sont les mesures dont il faut disposer pour reconstituer l'état du modèle réduit. D'autre part, l'étude de l'identifiabilité structurelle des paramètres (LLUNG et GLAD, 1994 ; WALTER et PRONZATO, 1996) permet de déterminer les paramètres et/ou combinaisons de paramètres, qui sont identifiables pour un ensemble donné de mesures (les paramètres considérés ici sont ceux qui ont été préalablement sélectionnés par la procédure d'identification hors-ligne, i.e. $\theta_1, \theta_3, \theta_5, X_{DCO}^{in}$ et S_{NH}^{in}). Ces deux études ont été menées dans l'environnement de calcul symbolique MAPLE sur la base de l'algorithme proposé par SEDOGLAVIC (2001), en prenant le soin de distinguer les conditions de fonctionnement aérobies, anoxiques et anaérobies.

4.4.1. Conditions de fonctionnement aérobies.

En présence d'oxygène dissous dans le bioréacteur, le modèle dynamique du procédé correspond au modèle réduit (4.7), avec $\delta = 1$. L'étude de l'observabilité montre que la seule mesure de concentration en oxygène dissous permet d'observer le système. De plus, les paramètres $\theta_1, \theta_3, \theta_5, X_{DCO}^{in}$ et S_{NH}^{in} sont structurellement identifiables.

4.4.2. Conditions de fonctionnement anoxiques.

Sous des conditions d'anoxie, l'absence d'oxygène dissous dans le bio- réacteur permet de simplifier le modèle réduit (4.7) sous la forme suivante (4.8) page suivante.

On montre alors que la seule mesure de la concentration en ammoniacque permet d'observer le système, et que les paramètres θ_1 , θ_5 , X_{DCO}^{in} et S_{NH}^{in} sont par ailleurs structurellement identifiables lorsque les concentrations en ammoniacque et en nitrate sont mesurées en ligne (le paramètre θ_3 n'apparaissant plus dans l'expression du modèle).

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{DCO} &= D^{in} \left(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) - \frac{\theta_1}{Y_H} \eta_{NO,g} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} + \theta_2 \\
 \dot{S}_{NO} &= D^{in} S_{NO} - \theta_1 \eta_{NO,g} \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \\
 \dot{S}_{NH} &= D^{in} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \theta_1 i_{NBH} \eta_{NO,g} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} + \theta_4 S_{ND} \\
 \dot{S}_{ND} &= D^{in} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \theta_4 S_{ND} + \theta_5 \eta_{NO,h} \frac{X_{DCO}}{K_{ND} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

— les concentrations de l'influent, sont prises égales aux valeurs journalières moyennes mesurées hors-ligne : $X_{DCO}^{in} \approx 275 \text{ mg.L}^{-1}$, $S_{NH}^{in} \approx 22 \text{ mg.L}^{-1}$ et $S_{ND}^{in} = 1 \text{ mg.L}^{-1}$

4.4.3. Conditions de fonctionnement anaérobies.

Sous des conditions d'anaérobie pour terminer, l'absence d'oxygène dissous et de nitrate permet à nouveau de simplifier le système dynamique (4.8) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{DCO} &= D^{in} \left(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) + \theta_2 \\
 \dot{S}_{NH} &= D^{in} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) + \theta_4 S_{ND} \\
 \dot{S}_{ND} &= D^{in} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \theta_4 S_{ND}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

La mesure de la concentration en ammoniacque permet d'observer la concentration des composés azotés organiques solubles S_{ND} et le paramètre S_{NH}^{in} est structurellement identifiable. En revanche, la dynamique des composés organiques X_{DCO} devient indépendante des autres dynamiques du système, et leur concentration n'est alors plus observable. De plus, la concentration de X_{DCO} n'étant plus observable, les paramètres, θ_1 , θ_5 , X_{DCO}^{in} ne sont pas structurellement identifiables.

Il est important de noter que ce comportement n'est pas spécifique au modèle réduit (4.7), mais qu'il résulte du fait que les processus de dégradation en conditions d'anaérobie ne

sont pas décrits dans le modèle ASM 1. Il convient de préciser, d'autre part, que cette non observabilité n'est pas problématique en pratique dans la mesure où ces conditions de fonctionnement anaérobies sont généralement de courtes durées pour le procédé à boues activées par rapport aux phases de fonctionnement aérobies et anoxies. Remarquons pour terminer, que la mesure du potentiel redox pourrait permettre d'apporter une solution à la non observabilité des composés organiques. Cette mesure n'est cependant pas prise en compte dans ce travail étant donné qu'il n'existe pas de méthodes simples permettant de calculer le potentiel redox en fonction des variables d'état classiques du modèle ASM1 (HÉDUIT et THÉVENOT, 1992 RYCKAERT, 1998).

Au terme de cette analyse, il apparaît donc que le modèle réduit proposé est apte, de par ses propriétés de prédictibilité, d'observabilité et d'identifiabilité, à être utilisé dans un schéma de commande en boucle fermée.

4.5. Application de l'approche de multi-modélisation sur le modèle ASM1 réduit.

Nous allons identifier les points de fonctionnement $P_i = (x_{1i}, x_{2i}, u_i)$ et les paramètres des fonctions d'activation σ_i simultanément, à partir de la minimisation du critère $J(\theta)$ définit comme suit : $J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M [(x_{1s}(t) - x_{1m}(t))^2 + (x_{2s}(t) - x_{2m}(t))^2]$

θ : représente le vecteur des paramètres à identifier.

$\theta = [P_1 P_2 \dots P_N \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N]$ tel que $P_i = (x_{1i}, x_{2i} \dots x_{pi}, u_i)$, Sont les points de fonctionnement

Nous minimisons ce critère par l'algorithme de Marquardt, qui nécessite des paramètres initiaux, le choix de ces paramètres est une étape très importante parce qu'elle conduit l'algorithme, soit à une convergence, soit à une divergence. Pour résoudre ce problème (divergence), et garantir la convergence de l'algorithme (Marquardt), on applique la méthode de classification k-moyens pour obtenir des points de fonctionnement initiaux.

4.5.2. 1. Conditions de Fonctionnement anoxies, (système 4.8).

Soit le modèle sous les conditions de fonctionnement anoxies (48), représenté par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{DCO} &= D^{in}(X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO}) - \frac{\theta_1}{Y_H} \eta_{NO,g} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} + \theta_2 \\
 \dot{S}_{NO} &= D^{in} S_{NO} - \theta_1 \eta_{NO,g} \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \\
 \dot{S}_{NH} &= D^{in}(S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \theta_1 i_{NBH} \eta_{NO,g} \frac{X_{DCO}}{K_{DCO} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} + \theta_4 S_{ND} \\
 \dot{S}_{ND} &= D^{in}(S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \theta_4 S_{ND} + \theta_5 \eta_{NO,h} \frac{X_{DCO}}{K_{ND} + X_{DCO}} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.5.2.1.1. Application de l'approche de multi-modélisation sur le sous modèle Conditions de Fonctionnement anoxies, (système 4.8) :

Courbes obtenus grâce à un simulateur:

-Pour L= 2 modèles locaux (2 points de fonctionnement).

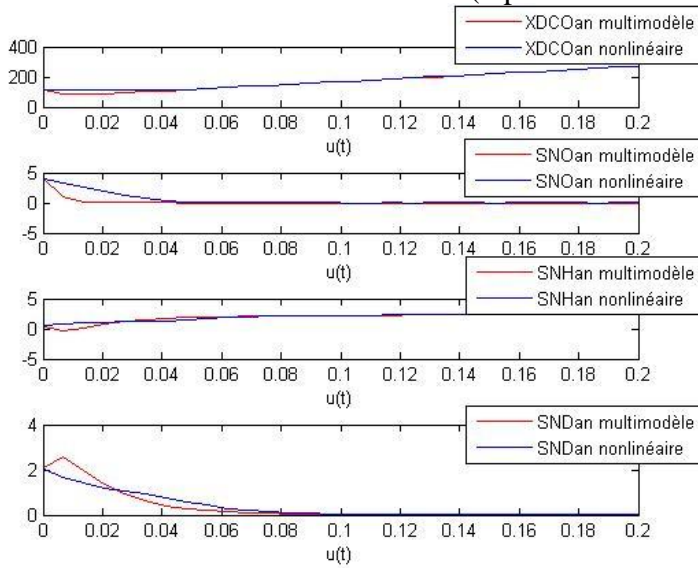


Fig.4.2. l'évolution des variables d'états des concentrations X_{DCO} , S_{NH} , S_{NO} et S_{ND} du modèle ASMI réduit et ceux du multi-modèle.

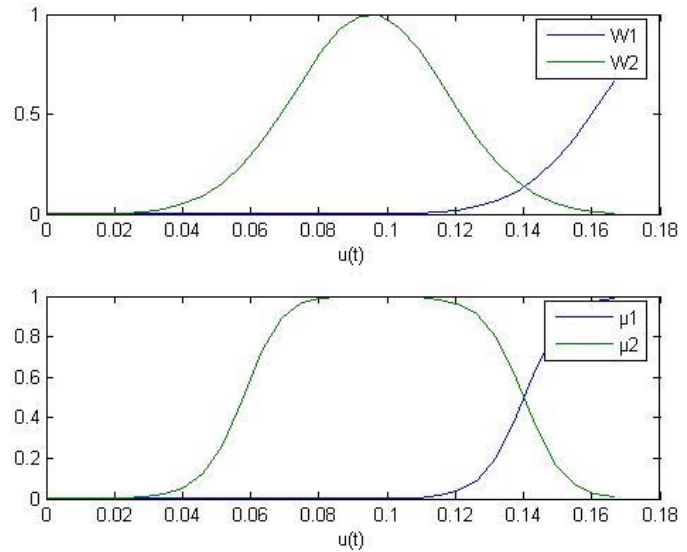


Fig4.3. -l'évolution des fonctions d'activations et de pondérations.

- Pour L= 3 modèles locaux (3 points de fonctionnement).

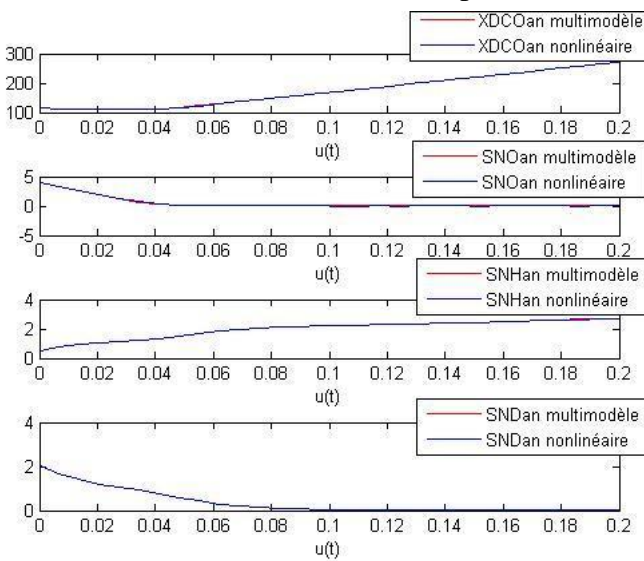


Fig.4.4. l'évolution des variables d'états des concentrations X_{DCO} , S_{NH} , S_{NO} et S_{ND} du modèle ASMI réduit (non linéaire) et ceux du multi-modèle (linéarisé).

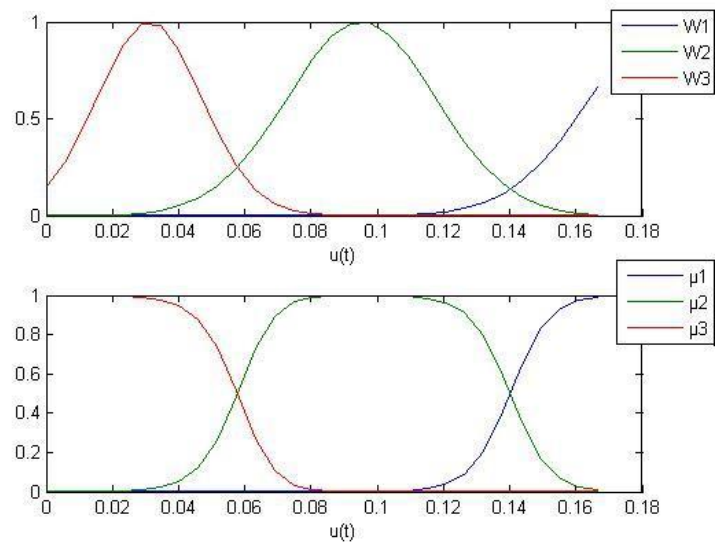


Fig4.5. -l'évolution des fonctions d'activations et de pondérations.

En appliquant l'approche multi-modèle représentée par la formule (4.10) étudiée au chapitre 3 sur le sous-modèle (4.8) ;

$$\begin{cases} x_m(k+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(A_i x_m(k) + B_i u(k) + D_i) \\ y_m(k) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(C_i x_m(k) + E_i u(k) + N_i) \end{cases} \quad (4.10)$$

Où :

$$x_m = [X_{DCO}, S_{NH}, S_{NO} \text{ et } S_{ND}]$$

$$\begin{aligned} A_i &= \left. \frac{\partial F(x,u)}{\partial x} \right|_{P \left\{ \begin{smallmatrix} x=(x_1, \dots, x_i) \\ u=(u_1, \dots, u_i) \end{smallmatrix} \right.}, & B_i &= \left. \frac{\partial F(x,u)}{\partial u} \right|_{P \left\{ \begin{smallmatrix} x=(x_1, \dots, x_i) \\ u=(u_1, \dots, u_i) \end{smallmatrix} \right.}, & D_i &= F(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \\ C_i &= \left. \frac{\partial G(x,u)}{\partial x} \right|_{P \left\{ \begin{smallmatrix} x=(x_1, \dots, x_i) \\ u=(u_1, \dots, u_i) \end{smallmatrix} \right.}, & E_i &= \left. \frac{\partial G(x,u)}{\partial u} \right|_{P \left\{ \begin{smallmatrix} x=(x_1, \dots, x_i) \\ u=(u_1, \dots, u_i) \end{smallmatrix} \right.}, & N_i &= G(x_i, u_i) - C_i x_i - E_i u_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

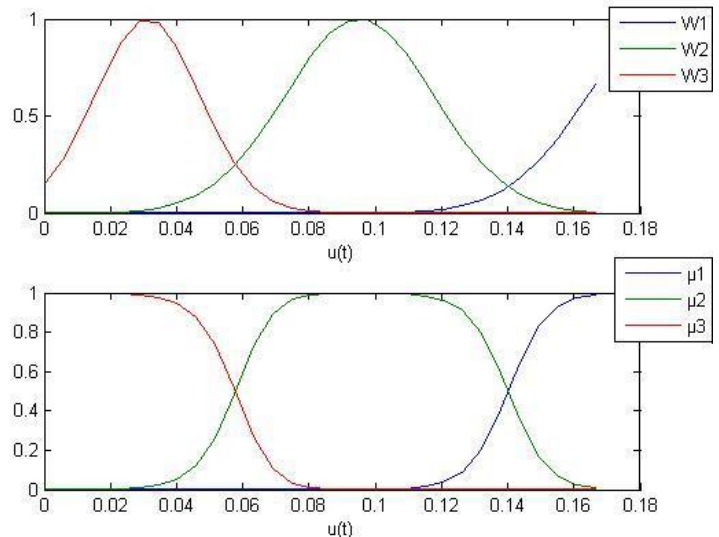
Et :

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(\xi(t))}, \quad (4.12)$$

$$w_i(\zeta) = \prod_{j=1}^{\dim(\zeta)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_j - m_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \quad (4.13)$$

Sachant que $w_i(\zeta)$, Sont les fonctions d'activation qui sont généralement de forme triangulaire, sigmoïdale ou Gaussienne, et doivent satisfaire les propriétés suivantes (convexité) :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases} \quad \text{exemple} \rightarrow$$



Les fonctions d'activation μ_1, μ_2 et μ_3 ont été paramétrées de manière à couvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement souhaité pour le système. On peut constater qu'au voisinage de l'un des trois points d'équilibre utilisé pour la construction du multi-modèle, la fonction de validité correspondante est voisine de un, les autres étant proche de zéro *c-à-d* que les autres modèles linéaires locaux sont multipliés par zéro (se sont désactivés).

4.5.2.1.2 Résultat et simulation.

Estimation d'état : Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multi-modèle découplé constitué de $L = 3$ sous-modèles (3 points de fonctionnements). Nous présenterons les résultats de notre étude sur la modélisation et l'identification des paramètres du modèle réduit établi, estimés grâce à un simulateur nous trouverons :

- a- Les valeurs numériques des matrices A_i, B_i et D_i calculé par les formules (4.11) sont les suivantes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -8.1231-47.2750 & 0 & 0 \\ -0.6873 & -4.0120 & 0 & 0 \\ -0.4174 & -2.4296 & -0.0118 & 60.0000 \\ 0.3421 & 1.9908 & -0.0118 & -60.0000 \end{bmatrix}, A_2 = 1.0e+003* \begin{bmatrix} 0.0000 & -3.0070 & 0 & 0 \\ 0.0000 & -0.2546 & 0 & 0 \\ 0.0000 & -0.1545 & -0.0002 & 0.0600 \\ -0.0000 & 0.1266 & -0.0002 & -0.0600 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.0018-72.9247 & 0 & 0 \\ 0.0004 & -6.2539 & 0 & 0 \\ 0.0003 & -3.7478 & -0.0833 & 60.0000 \\ -0.0002 & 3.0709 & -0.0833 & -60.0000 \end{bmatrix}, B_1 = [270.7267 \ -3.3780 \ 12.0024 \ 12.0024]^T,$$

$$B_2 = [270.4191 \ 0.0019 \ 22.8657 \ 22.8657]^T, B_3 = [274.9227 \ 0.0001 \ 19.0565 \ 19.0565]^T,$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 788.9281 \\ -17.8242 \\ -10.7319 \\ 9.0088 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 996.9806 \\ -0.3319 \\ -0.3713 \\ -0.0049 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 999.9966 \\ -0.0008 \\ 0.2448 \\ 0.2457 \end{bmatrix},$$

- b- Les fonctions d'activation :

Les fonctions d'activation calculées par la formule (4.13) estimées par apport à la commande qu'est le flux d'entrée (m_i^j : représente la commande).

$$w_i(\zeta) = \prod_{j=1}^{\dim(\zeta)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_j - m_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \quad (4.12)$$

Après avoir eu les valeurs $w_i(\zeta)$ on les remplace dans :

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(\xi(t))} \quad (4.13)$$

Tandis que :

a- Les trois points obtenus après l'optimisation sont :

$$p1 (106.8317 \quad 3.3780 \quad 9.9976 \quad 1.5120 \quad 0.0118).$$

$$p2 (114.5219 \quad -0.0019 \quad -0.8657 \quad -2.2778 \quad 0.1962).$$

$$p3 (1.9331 \quad -0.0001 \quad 2.9435 \quad 0.1508 \quad 0.0833).$$

b- Et les dispersions des fonctions d'activation, obtenues après optimisation, sont :

$$\sigma_1 = 0.0145, \quad \sigma_2 = 0.0261, \quad \sigma_3 = 0.0245.$$

Finalement en remplaçant les matrices $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3$ et les valeurs des $\mu_i(\xi(t))$ calculées par les formule (4.13) dans la formule générale du multi-modèle (4.10), nous trouverons le multi-modèle de cette forme:

$$\begin{cases} x_m(k+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(A_i x_m(k) + B_i u(k) + D_i) \\ y_m(k) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(C_i x_m(k) + E_i u(k) + N_i) \end{cases} \quad (4.10)$$

Notons que les valeurs initiales :

➤ des dispersions des fonctions d'activation sont choisies arbitrairement.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_N = 0.0138.$$

➤ des points de fonctionnement $P_i (X_{DCO}, S_{NO}, S_{NH}, S_{ND} \text{ et } D^{in})$ initiaux trouvés en utilisant la méthode de k-moyens, qui vont être remplacer dans (4.11), sont :

$$P1 (107.2246 \quad 2.8395 \quad 9.8920 \quad 1.5158 \quad 0.0108)$$

$$P2 = (114.5746 \quad 0.0043 \quad 0.8490 \quad -2.3041 \quad 0.1881)$$

$$P3 = (1.7673 \quad -0.0001 \quad 2.9399 \quad 0.1612 \quad 0.0806)$$

Interprétation :

Notons que M est le nombre des modèles locaux

La figure 4.2 en bleu illustre l'approximation des variables d'état du modèle non linéaire des concentrations X_{DCO} , S_{NH} , S_{NO} et S_{ND} du modèle (4.8) [page -58-] et en rouge ceux du modèle linéarisé à base de l'approche multi-modèle (avec $M = 2$ modèles linéaire locaux), La figure 4.4 montre la même approximation avec un modèle linéarisé (multi-modèle avec $M = 3$ modèles linéaire locaux). Alors que les figures 4.3 pour $M=2$ et 4.5 pour $M=3$, montrent les fonctions d'activations (Les fonctions d'activation μ_1, μ_2 et μ_3 ont été paramétrées de manière à couvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement souhaité pour le système. On peut constater qu'au voisinage de l'un des trois points d'équilibre utilisé pour la construction du multi-modèle, la fonction de validité correspondante est voisine de un, les autres étant proche de zéro *c-à-d* que les autres modèles linéaires locaux sont multipliés par zéro « se sont désactivés ».)

Nous constatons que pour $M=3$ modèles linéaires locaux, l'approximation correspond parfaitement à nos objectifs, les courbes estimée X_{DCO} , S_{NH} , S_{NO} , et S_{ND} (linéarisées de la forme : $x_m(k+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(A_i x_m(k) + B_i u(k) + D_i)$ suivent parfaitement les courbes non linéaires du modèle ASMI réduit de la forme (4.8).

On obtient donc de la sorte une description linéaire du système dynamique non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre, il est à noter que le modèle linéarisé ainsi obtenu dépend du point d'équilibre autour duquel a été effectué la linéarisation.

4.5.2.2 Conditions de fonctionnement anaérobie, (système 4.9) .

$$\begin{aligned} \dot{X}_{DCO} &= D^{in} \left(X_{DCO}^{in} - \frac{Ks}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) + \theta_2 \\ \dot{S}_{NH} &= D^{in} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) + \theta_4 S_{ND} \\ \dot{S}_{ND} &= D^{in} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \theta_4 S_{ND} \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.5.2.2.1 Application de l'approche multi-modèle sur le sous modèle conditions de fonctionnement anaérobies, (système 4.9)

Courbes obtenus grâce à un simulateur:

- Pour L= 2 modèles locaux (2 points de fonctionnement).

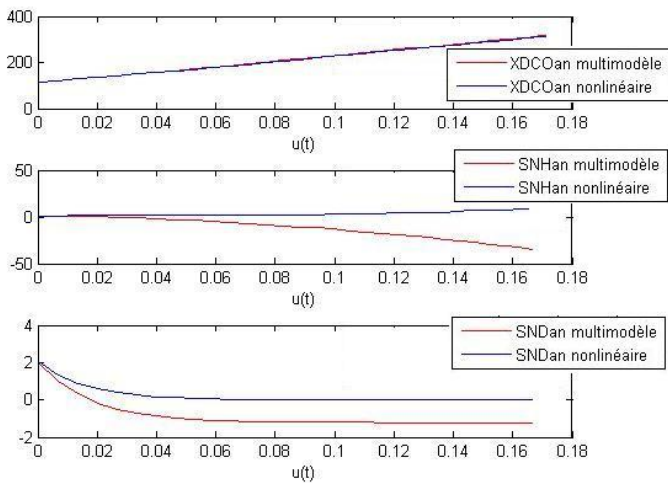


Fig.4.6. l'évolution des variables d'états des concentrations X_{DCO} , S_{NH} et S_{ND} du modèle ASM1 réduit (non linéaire) et ceux du multi-modèle (linéarisé).

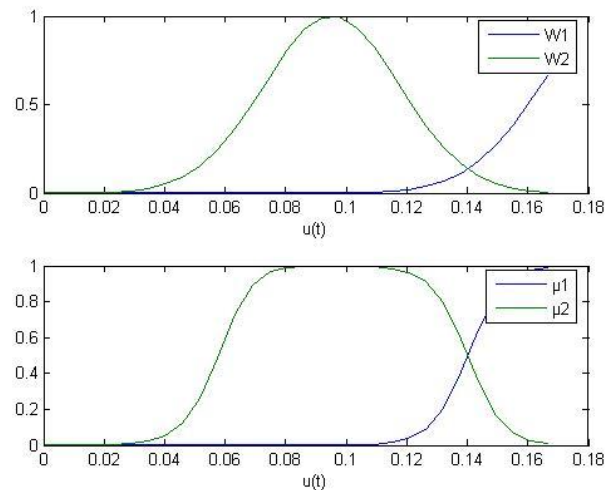


Fig4.7. -l'évolution des fonctions d'activations et de pondération.

- Pour L= 3 modèles locaux (3 points de fonctionnement).

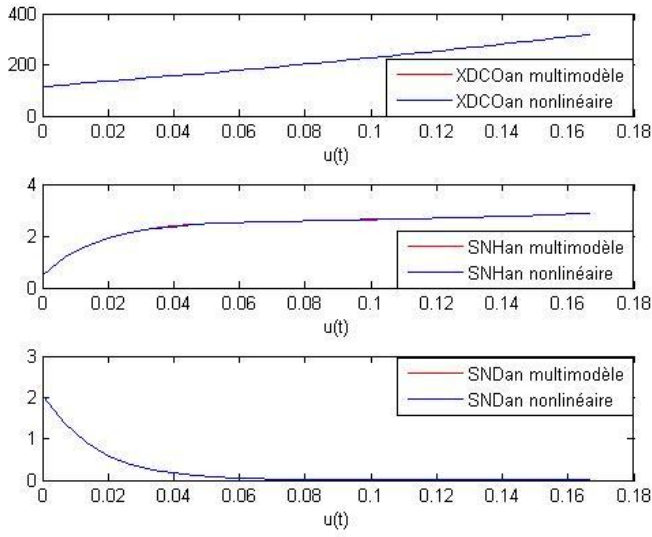


Fig.4.8. l'évolution des variables d'états des concentrations X_{DCO} , S_{NH} et S_{ND} du modèle ASM1 réduit (non linéaire) et ceux du multi-modèle (linéarisé).

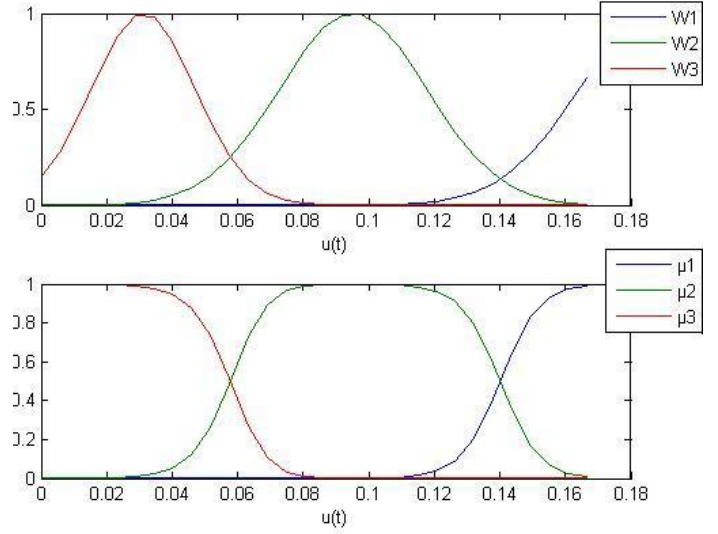


Fig4.9. l'évolution des fonctions d'activations et de pondération.

En appliquant l'approche multi-modèle étudiée au chapitre 3 sur le sous modèle (4.9) ;

$$\begin{cases} x_m(k+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(A_i x_m(k) + B_i u(k) + D_i) \\ y_m(k) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(C_i x_m(k) + E_i u(k) + N_i) \end{cases} \quad (4.10)$$

Où :

$$x_m = [X_{DCO}, S_{NH}, \text{ et } S_{ND}]$$

$$\begin{aligned} A_i &= \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{P \left\{ \begin{smallmatrix} x=(x_1, \dots, x_i) \\ u=(u_1, \dots, u_i) \end{smallmatrix} \right.}, & B_i &= \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{P \left\{ \begin{smallmatrix} x=(x_1, \dots, x_i) \\ u=(u_1, \dots, u_i) \end{smallmatrix} \right.}, & D_i &= F(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \\ C_i &= \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial x} \right|_{P \left\{ \begin{smallmatrix} x=(x_1, \dots, x_i) \\ u=(u_1, \dots, u_i) \end{smallmatrix} \right.}, & E_i &= \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial u} \right|_{P \left\{ \begin{smallmatrix} x=(x_1, \dots, x_i) \\ u=(u_1, \dots, u_i) \end{smallmatrix} \right.}, & N_i &= G(x_i, u_i) - C_i x_i - E_i u_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

Et :

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(\xi(t))}, \quad (4.12)$$

$$w_i(\zeta) = \prod_{j=1}^{\dim(\zeta)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_j - m_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \quad (4.13)$$

Tel que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases}$$

4.5.2.2.2 Résultat et simulation.

Estimation d'état : Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multi-modèle découplé constitué de $L = 3$ sous-modèles (3 points de fonctionnements). Nous présenterons les résultats de notre étude sur la modélisation et l'identification des paramètres du modèle réduit établi, estimés grâce à un simulateur nous trouverons :

- a- Les valeurs numériques des matrices A_i , B_i et D_i calculé par les formules (4.11) concernant le sous modèle (4.9):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0076 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1889 & 60.0000 \\ 0 & 0 & -60.1889 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.0038 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0952 & 60.0000 \\ 0 & 0 & -60.0952 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.0012 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0312 & 60.0000 \\ 0 & 0 & -60.0312 \end{bmatrix}, B_1 = [269.0171 \ 20.2346 \ 2.3660]^T, B_2 = [266.0731 \ 19.5988 \ 5.4019]^T,$$

$$B_3 = [263.3723 \ 4.2767 \ 10.9444]^T,$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1001.1 \\ 1000.8 \\ 1000.4 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.3000 \\ 0.2000 \\ 0.6000 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} -0.3000 \\ -0.4000 \\ -0.3000 \end{bmatrix},$$

- b- Les fonctions d'activation :

Les fonctions d'activation calculées par la formule (4.13) par rapport à la commande qu'est le flux d'entrée c'est-à-dire, m_i^j : représente la commande.

$$w_i(\zeta) = \prod_{j=1}^{\dim(\zeta)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_j - m_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right) \quad (4.12)$$

Après avoir eu les valeurs $w_i(\zeta)$ on les remplace dans :

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(\xi(t))} \quad (4.13)$$

Tandis que :

a- Les trois points obtenus après l'optimisation sont :

$$P1 = (149.5721 \quad 1.7654 \quad -1.3660 \quad 0.1889).$$

$$P2 = (223.1713 \quad 2.4012 \quad -4.4019 \quad 0.0952).$$

$$P3 = (290.6917 \quad 17.7233 \quad -9.9444 \quad 0.0312).$$

b- Les dispersions des fonctions d'activation, obtenues après optimisation, sont :

$$\sigma 1 = 0.0173, \quad \sigma 2 = 0.0159; \quad \sigma 3 = 0.0112.$$

Finalement en remplaçant les matrices $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3$ et les valeurs des $\mu_i(\xi(t))$ calculées par les formule (4.13) dans la formule générale du multi-modèle (4.10), nous trouverons le multi-modèle de cette forme:

$$\begin{cases} x_m(k+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(A_i x_m(k) + B_i u(k) + D_i) \\ y_m(k) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(C_i x_m(k) + E_i u(k) + N_i) \end{cases}$$

Notons que les valeurs initiales :

➤ des dispersions des fonctions d'activation sont choisies arbitrairement.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_N = 0.0138.$$

➤ -Les points de fonctionnement initiaux trouvés en utilisant la méthode de k-moyens qui vont être remplacer dans (4.11), sont :

$$P1 = (290.6917, \quad 17.726, \quad -9.9272 \text{ et } 0.188).$$

$$P2 = (223.1712, \quad 2.3624, \quad -4.3979 \text{ et } 0.121).$$

$$P3 = (290.6917, \quad 17.726, \quad -9.9272 \text{ et } 0.024).$$

Interprétation :

Les figures 4.6 et 4.8 illustrent l'approximation des variables d'état du modèle non linéaire des concentrations X_{DCO} , S_{NH} et S_{ND} du modèle (4.9) et ceux du modèle linéarisé (multi-modèle avec $M = 2$ et $M=3$ respectivement).

Les figures 4.7 pour $M=2$ et 4.9 pour $M= 3$, montrent les fonctions d'activations, et Comme le montre les figures 4.5 et 4.9, les fonctions d'activations ont été paramétrées de manière à découvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement souhaité pour le système. On peut constater qu'au voisinage de l'un des trois points d'équilibre utilisé pour la construction du multi-modèle, la fonction de validité correspondante est voisine de un, et les autres étant proche de zéro.

Nous constatons que pour $M=3$ modèles linéaires locaux, l'approximation correspond parfaitement à nos objectifs, les courbes estimées X_{DCO} , S_{NH} , et S_{ND} (linéarisées de la forme : $x_m(k+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\zeta(k))(A_i x_m(k) + B_i u(k) + D_i)$ suivent parfaitement les courbes non linéaires du modèle ASMI réduit de la forme (4.9).

On obtient donc de la sorte une description linéaire du système dynamique non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre, il est à noter que le modèle linéarisé ainsi obtenu dépend du point d'équilibre autour duquel a été effectuée la linéarisation.

4.5.2.3 Perspectives.

Les perspectives de ce projet seraient d'obtenir le comportement multi-modèle, à partir de M modèles linéaires. Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux (M) dépend de la précision de modélisation souhaitée, du choix de la structure des fonctions d'activation et surtout de la complexité du système non linéaire.

Dans ce mémoire, nous avons présenté les résultats de notre étude sur la l'approche multi-modèles appliquée sur le modèle ASMI réduit et l'identification des paramètres du multi-modèle, assurant une représentation linéaire autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement qui doivent être **judicieusement choisis**. Cette approche permet la détermination du nombre de modèles et de leur plage de validité. **La résolution des équations aux dérivées partielles modélisant fidèlement la dynamique des systèmes non linéaires. Alors lorsqu'il s'agit d'un modèle ASMI (non réduit) la résolution de leur équations aux dérivées est quasiment difficile, et parfois nous donne un nombre infinis de points de fonctionnement (ou de solutions de $f(x_0, u_0)$ des équations aux dérivées).** Et celle-ci est une contrainte.

Conclusion

Suite aux études dans ce mémoire, les extensions et les perspectives suivantes nous semblent être des pistes de recherche à conclure :

L'approche multi-modèles s'articule autour de l'estimation des paramètres du multi-modèle, qui sont les coordonnées de points de fonctionnements autour d'eux se fait la linéarisation, les écarts types et le calcul des matrices A_i , B_i et D_i grâce à un simulateur.

L'approche de multi modélisation des systèmes non linéaires, assurant une représentation linéaire autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement qui doivent être judicieusement choisis. Elle permet la détermination du nombre de modèles et de leur plage de validité. La résolution des équations aux dérivées partielles modélisant fidèlement la dynamique des systèmes non linéaires.

Pour avoir le multi-modèle à plus long terme, les perspectives de ce projet seraient d'obtenir le comportement multi-modèle, à partir de M modèles linéaires locaux. Notons que dans ce cas, le nombre des modèles locaux (M) dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation.

L'élaboration d'un modèle de fonctionnement simplifié est nécessaire en vue de la commande des stations d'épurations à boues activées. Issu du modèle, ASM 1 de l'IAWQ, le modèle proposé intègre deux types de simplifications : i) des simplifications très rigoureuses, basées sur la théorie des perturbations singulières, afin d'éliminer les variables d'état dont les dynamiques sont lentes ; ii) des simplifications de nature plus heuristique qui permettent de réduire davantage la dimension du système. Afin de proposer une autre simplification du système d'aération des précédés de traitement des eaux usées en se basant sur les résultats obtenus dans notre étude sur l'approche de multi-modélisation, qui est obtenue **par linéarisation autour de différents points de fonctionnement**, tout en gardant la simplicité mathématique des modèles LTI,

On peut conclure que l'approche multimodèle est une technique utile dans l'approximation des modèles non linéaires par des modèles locaux. Et offre la possibilité d'étendre les techniques d'estimation d'états et de diagnostic des systèmes linéaires aux systèmes non linéaires.

Bibliographies.

[More 00] J. Moreno, Unknown input observers for SISO nonlinear systems, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 790-801, 2000.

[Gass 00b] K. Gasso, Identification des systèmes dynamiques non linéaires : approche multimodèle, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre-les-Nancy, 2000.

[Murr 00c] R. Murray-Smith, Multiple model approaches to modelling and control, Taylor and Francis, 1997.

[1] Toscano, Rosario Commande Et Diagnostic Des Systèmes Dynamiques - Modélisation, Analyse, Commande Par Pid Et Par Retour D'état, 2005.

[2] Abdelkader AKHENAK. Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic. Thèse, l'Institut National Polytechnique de Lorraine 2004.

[3] Boulaïd BOULKROUNE. Estimation de l'état des systèmes non linéaires à temps discret. Application à une station d'épuration. Thèse, l'université Henri Poincaré Nancy 1. 2008

[4] B. Chachuat. *Méthodologie d'optimisation dynamique et de commande optimale des petites stations d'épuration à boues activées*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2001.

[5] B. Chachuat, N. Roche, and M. A. Latifi. Reduction of the ASM 1 model for optimal control of small-size activated sludge treatment plants. *Revue des Sciences de l'Eau*, 16(1) :5–26, 2003.

[6] C. Gómez-Quintero, I. Queinnec, and J. P. Babary. A reduced nonlinear model of an activated sludge process. In *Int. Symp. on Advanced Control on Chemical Processes*, pages 1037–1042, Pisa, Italy, 2000.

- [7] D. Dochain, P.A. Vanrolleghem, and M. Van Daele. Structural identifiability of biokinetic models of activated sludge respiration. *Water Research*, 29 :2571–2578, 1995.
- [8] P.L. Dold, G.A. Ekama, and G.V.R. Marais. A general model for the activated sludge process. *Progress in Water Technology*, 12 :47–77, 1980.
- [9] Henze M. Mino T. Gujer, W. and M. C. M. Van Loosdrecht. Activated sludge model no.3. *Water Science and Technology*, 39 :183–193, 1999.
- [10] A.C. Van Haadal, G.A. Ekama, and G.V.R Marais. The activated sludge process : Part 3-single sludge denitrification. *Water Research*, 15 :1135–1152, 1981.
- [11] M. Henze, C. P. L. Grady, W. Jr., Gujer, G. V. R. Marais, and T. Matsuo. Activated sludge model no.1. In *IAWQ Scientific and Technical Report No.1*, London, UK, 1987.
- [12] M. Henze, W. Gujer, T. Mino, T. Matsuo, M. C. M. Wentzel, and G. V. R. Marais. Activated sludge model no.2. In *IAWQ Scientific and Technical Report No.3*, London, UK, 1995.
- [13] M. Henze, W. Gujer, T. Mino, T. Matsuo, M. C. Wetzal, G. V. R. Marais, and M. C. M. van Loosdrecht. Activated sludge process model no. 2d. *Water Science and Technology*, 39(1) :165–182, 1999.
- [14] U. Jeppsson and G. Olsson. Reduced order models for online parameter identification of the activated sludge process. *Water Science and Technology*, 28 :173–183, 1993.
- [15] S. Julien. *Modélisation et estimation pour le contrôle d'un procédé boues activées éliminant l'azote des eaux résiduaires urbaines*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France., 1997.
- [17] G.V.R Marais and G.A. Ekama. The activated sludge process : Part 1-steady state behaviour. *Water SA*, 2 :163–200, 1976.

- [18] J. Monod. The growth of bacterial cultures. *Annual Review of Microbiology*, 3 :371–394, 1942.
- [19] M. Mulas, S. Tronci, and R. Baratti. Development of a 4-measurable states activated sludge process model deduced from the asm1. In *8th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, pages 213–218, Cancun, Mexico, 2007.
- [20] I. Y. Smets, J. V. Haegebaert, R. Carrette, and J. F. Van Impe. Linearization of the activated sludge model asm1 for fast and reliable predictions. *Water Res*, 37(8) :1831–1851, 2003.
- [21] M. A. Steens, P. A. Lant, and R. B. Newell. A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatment model. *Water Science and Technology*, 31(3) :590–606, 1997.
- [22] P.A. Vanrolleghem, M. Van Daele, and D. Dochain. Practical identifiability of a biokinetic model of activated sludge respiration. *Water Research*, 29 :2561–2570, 1995.
- [23] E. Walter. *Identifiability of parametric models*. Pergamon Press, Inc., Elmsford, NY, USA, 1987.
- [24] K. V. Ling and K. V. Lim. Receding Horizon Recursive State Estimation. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44(9) :1750–1753, 1999.
- [25] C. F. Lindberg. *Control and estimation strategies applied to the activated sludge process*. PhD thesis, Uppsala University, Uppsala, Sweden, 1997.
- [26] S. Weijers. *Modelling, identification and control of activated sludge plants for nitrogen removal*. PhD thesis, Technical University of Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands, 2000.