وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Année 2009

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques

Etude de l'existence et de l'absence de solutions d'une classe d'équations et de systèmes elliptiques non linéaires dans des domaines de R^N

Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par

Abdelkrim MOUSSAOUI

DIRECTEUR DE THESE : **B. KHODJA** PROFESSEUR U. B. M. ANNABA

DEVANT LE JURY

PRESIDENT :	**A. BOUKHEMIS**	PROFESSEUR	U. B. M. ANNABA
EXAMINATEURS :	**A. BENTRAD**	PROFESSEUR	U. REIMS
	S. MAZOUZI	PROFESSEUR	U. B. M. ANNABA
	L. NISSE	M. C.	U. B. M. ANNABA

Remerciements

Je dois beaucoup plus que de simples remerciements à Monsieur B. KHODJA pour avoir accepté de diriger cette thèse et avoir toujours prodigué avec bienveillance ses conseils et ses encouragements, me faisant ainsi bénéficier de son savoir et de son expérience.

Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma haute gratitude et le témoignage de mon respectueux attachement.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur A. BOUKHEMIS pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je suis très honoré que Messieurs : A. BENTRAD, S. MAZOUZI et L. NISSE aient accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont également à Madame S. TAS et Messieurs Djamal NEDJADI et Youcef NEDJADI pour les encouragements qu'ils ont manifestés à mon égard ainsi que pour leur aide si précieuse.

Merci à toute ma famille, amis et collègues, qui de prés ou de loin, m'ont soutenu et encouragé.

A mes parents et à ma femme…

Résumé

Nous étudions dans cette thèse, différents problèmes d'équations aux dérivées partielles dont la majeure partie concerne des systèmes de type elliptique, mais nous montrons l'absence de solutions non triviales pour une classe de systèmes de type hyperbolique. Elle est constituée de chapitres pouvant être lus indépendamment les uns des autres.

Il nous a semblé utile d'entamer ce mémoire par un chapitre consacré aux rappels sur les espaces fonctionnels (espaces L^{p}, espaces de Sobolev), sur le degré topologique (de Brouwer et de Leray-Schauder) ainsi que les principaux outils dont nous faisons un usage fréquent dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à une classe de systèmes elliptiques singuliers qui modélisent entre autre des phénomènes biologiques tels que l'embryogenèse. Il s'agit du modèle proposé par Gierer et Meinhardt pour lequel nous montrons l'existence d'une unique solution dans l'espace RN. L'approche utilisée est basée essentiellement sur le théorème du point fixe de Schauder.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'une classe de systèmes elliptique semi-linéaires où les non linéarités vérifient une condition de non résonance à l'infini. Nous obtenons le résultat d'existence de solutions via la méthode topologique.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous abordons la question de non existence de solutions non triviales dans un domaine cylindrique non borné, non seulement pour une classe de systèmes elliptiques, mais aussi pour une classe de systèmes hyperboliques. Notre démonstration est basée sur des identités intégrales de type Pohozaev.

Mots-clés: Systèmes elliptiques, Systèmes de Gierer-Meinhardt, Degré topologique de Leray-Schauder, Point fixe de Schauder, Pohozaev identités, Homotopie.

Abstract

In this work, we are concerned essentially with systems of elliptic type, but we also address the non-existence of non-trivial solutions for a class of systems of hyperbolic type.

It seemed useful to start this memory with a chapter devoted to the reminders on functional spaces (L^{p} spaces, Sobolev spaces), the topological degree as well as the main tools we use frequently in the other chapters.

In the second chapter, we are interested in a class of singular Gierer-Meinhardt of elliptic equations for which we study the existence of a unique solution in the space $\mathbb{R}^{N}$. Our approach is mainly based on the Schauder's fixed point theorem.

In the third chapter, we are interested in studying a class of semi-elliptic systems where the non-linearities verify some condition of non resonance at the infinity. We obtain the existence results via the topological method.

In the fourth and last chapter, we study the non-existence of non-trivial solutions in unbounded cylindrical domain, not only for a class of elliptic systems but also for a class of hyperbolic systems. Our approach is based on Pohozaev-type identities.

Keywords: Elliptic systems, Gierer-Meinhardt system, Leray-Schauder topological degree, Schauder fixed point, Pohozaev identities, Homotopy.

Table des matières

Introduction

Un organisme pleinement développé est un arrangement complexe de plusieurs structures différentes, formées à partir d'une seule cellule fécondée. Dans les premiers temps de sa croissance, un organisme se développe par division cellulaire seulement, formant une sphère de cellules identiques, mais après cette première étape, de plus en plus de structures très variées apparaîssent. Cette variété résulte d'un processus connu sous le nom de différenciation cellulaire, qui est un concept biologique décrivant les mécanismes par lesquels les cellules se spécialisent en un « type » cellulaire. Ce processus implique de nombreux phénomènes tels que la division cellulaire, le mouvement de cellules et l'activation de gènes. Quels que soient les mécanismes exacts de la différenciation, le point qu'on voudrait aborder dans ce travail est le fait que la manière dont les cellules se développent dépend de leur position dans les tissus. En effet, les morphogènes, qui sont des protéines, produisent des gradients de concentration qui ont pour rôle de donner une information de position et d'induire différents types cellulaires selon celle-ci.

La différenciation des structures évolue nécessairement d'un état stable où les morphogènes sont distribués d'une façon homogène dans le tissu. Par conséquent, la question fondamentale qu'on pourrait se poser est la suivante : Comment les modèles de concentration spatiale émergent d'un état initial uniforme ? En particulier, comment l'embryon dans un état de symétrie (appelé blastula) et a priori stable, peut-il conduire à un organisme caractérisé par aussi peu de symétrie sphérique que possible ?

En 1952, Alan Turing a répondu à cette question dans son célèbre article "The chemical basis of morphogenesis" [40], qui représente un des fondements des équations de réaction-diffusion comme un modèle (biologique) pour la formation de Structures. Turing a montré que la brisure de symétrie résulte d'un faible écart de concentration en morphogènes qui va s'amplifier par des phénomènes de diffusion et de réactions chimiques pour conduire à un état d'équilibre asymétrique. En d'autres termes, il a montré que dans de bonnes conditions, la diffusion ne fait pas obstacle, mais en fait, stimule la formation de structures : un système, dans un état uniforme, est stable en l'absence de diffusion et peut être déstabilisé si une diffusion est introduite. La condition essentielle pour cette diffusion axée sur l'instabilité est que les deux composantes diffusent à un taux (très) différent.

Malheureusement, l'analyse de Turing a été limitée aux taux de réaction linéaire, ce qui rend les réactions biochimiques irréalisables. Le mécanisme de Turing a été étendu aux systèmes de réaction-diffusion non linéaires en 1972 par Alfred Gierer et Hans Meinhardt [21], qui ont montré que la condition essentielle pour la formation des structures dans les systèmes de réaction-diffusion est fondée sur la faible portée de l'activateur et la longue portée de l'inhibiteur. En outre, le modèle introduit dans [21] prend en compte, d'une part, les concentrations de l'activateur et de l'inhibiteur et d'autre part, les densités de leurs sources.

Le modèle proposé par Gierer et Meinhardt est le suivant :

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u - \alpha u + c\rho \frac{u^2}{v} + \rho_0 \rho, \\ v_t = d_v \Delta v - \beta v + c' \rho u^2, \end{cases}$$

où u est la concentration de l'activateur, v est la concentration de l'inhibiteur et $\rho = \rho(x)$ est la densité de la source. Les taux de diffusion d_u et d_v satisfont la condition $d_v >> d_u$. Les termes αu et βv sont des termes de la dégradation qui correspondent à la disparition de l'inhibiteur et de l'activateur en raison de l'interaction avec les tissus environnant. La réaction autocatalytique est donnée par $c\rho\frac{u^2}{v}$. L'activateur stimule la production de l'inhibiteur par le biais de $c'\rho u^2$. Le terme $\rho_0\rho$ fournit la concentration de base à l'activateur, nécessaire pour entamer la formation de structures.

Ce phénomène spontané d'échange d'information fut mis à profit par les biologistes, tels Meinhardt et Gierer pour expliquer la structure périodique des feuilles des végétaux. Ils considéraient le bourgeon terminal comme étant une structure auto-organisée contenant les deux types de substances X et Y en concentrations bien définies. Lorsqu'une excroissance apparaît sur une branche et qu'un certain seuil de concentration des substances est atteint, la croissance de l'ancienne branche est inhibée au profit de la nouvelle. Ce type de réaction chimique auto-organisée et temporaire peut également expliquer la forme des zébrures sur le pelage des zèbres, les motifs observés sur des poissons, des coccinelles et quantité d'autres phénomènes biologiques.

Le modèle général proposé par Gierer-Meinhardt [21, 28] peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u - \alpha u + c\rho \frac{u^k}{v^q} + \rho_0 \rho \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ v_t = d_v \Delta v - \beta v + c'\rho' \frac{u^r}{v^s} \qquad \text{ dans } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{0.1}$$

avec des conditions aux limites de Neumann. Ici Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$; u, v représentent les concentrations de l'activateur et de l'inhibiteur avec des sources de distribution respectives ρ et ρ'. Les exposants k, q, r et s sont positifs et vérifient la relation

$$qr > (k-1)(s+1) > 0.$$

Une description complète de toute la dynamique du système (0.1) est donnée dans le document récent de Ni, Suzuki et Takagi [33], où il est montré que la dynamique du système (0.1) présente différents comportements intéressants tels que des solutions périodiques, des solutions globales oscillantes et non bornées, et des solutions explosant en temps fini.

L'étude du cas stationnaire du système (0.1) avec des conditions aux limites de Neumann a fait l'objet de plusieurs travaux, voir [34, 35, 36, 41, 42, 43] ainsi que leurs références. Ces problèmes sont difficiles à traiter à cause de la perte de la structure variationnelle et des estimations a priori sur les solutions. Dans ce cas, il est plus aisé de considérer le "shadow system" associé à (0.1) . Plus précisément, en divisant la deuxième équation par d_v et en faisant tendre d_v vers ∞, on réduit le système stationnaire de (0.1) à une seule équation. Il a été montré que les solutions non constantes de cette dernière présentent des pics à l'intérieur ou sur le bord de Ω. Quant à l'étude de l'instabilité des solutions, toujours dans le cas stationnaire, on mentionne les travaux de Miyamoto [29] et Yanagida [44].

Le système

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u + \frac{u^k}{v^q} + \rho(x) = 0 \text{ in } \Omega, \\ \Delta v - \beta v + \frac{u^r}{v^s} = 0 \qquad\qquad \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet a été discuté dans [7, 8, 26] et récemment, dans [20], l'étude de (0.2) a été étendu à une large classe de non linéarités.

Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2)$, il a été montré dans [13, 14] qu'il existe des états fondamentaux (ground state solutions) de (0.2) où l'activateur présente un ou plusieurs pics.

L'étude du système (0.2) avec $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, $\rho = 0$, $k = 0$ et $\alpha, \beta \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est l'objet du chapitre 2. Plus précisément, nous considérons le problème elliptique singulier suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = h_1(x) \frac{1}{v^q} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \beta(x) v = h_2(x) \frac{u^r}{v^s} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ u(x), v(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow \infty, \\ u, v > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{0.3}$$

où les fonctions $h_1, h_2 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et les exposants vérifient $q, r > 0$ et $s \in \left]0, 1\right[$ tels que $r - s \leq 1$. Nous montrons l'existence d'une solution non triviale du problème (0.3) via le théorème du point fixe de Schauder.

Dans le chapitre 3, nous abordons la question de l'existence de solutions pour une classe de systèmes elliptiques de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v) \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v = g(x, u, v) \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

soumis à des conditions aux limites de Dirichlet. Cette question a fait récemment l'objet de plusieurs travaux où de différentes situations sur les structures des non linéarités f et g ont été étudiées ; voir par exemple [2],[5],[11],[16],[17] et [18], ainsi que leurs références. L'étude de ces problèmes est motivée par ses diverses applications, notamment dans les équations de réaction-diffusion (où le cas stationnaire est un système elliptique) et les fluides newtoniens (voir [10]).

Dans ce chapitre, nous nous interessons au système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v) + h_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v = g(x, u, v) + h_2(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.4}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ de frontière régulière $\partial\Omega$ et les non linéarités vérifient la condition suivante :

$$\begin{cases} \lim\limits_{s,|t|\longrightarrow+\infty} \frac{f(x,s,t)}{s} = \lim\limits_{|s|,t\longrightarrow+\infty} \frac{g(x,s,t)}{t} = \lambda_+, \text{ uniformément sur } \Omega, \\ \lim\limits_{-s,|t|\longrightarrow+\infty} \frac{f(x,s,t)}{s} = \lim\limits_{|s|,-t\longrightarrow+\infty} \frac{g(x,s,t)}{t} = \lambda_-, \text{ uniformément sur } \Omega, \end{cases} \tag{0.5}$$

avec $\lambda_+, \lambda_- \notin \{0\} \cup \sigma(-\Delta)$, $\sigma(-\Delta)$ est le spectre de $-\Delta$. Il est bien connu (voir [39]) qu'il existe des courbes decroissantes dans $\mathbb{R}^2$ qui passent par le point (λ_j, λ_j) (λ_j valeur propre de $-\Delta$) et qui ont été étudiées dans le carré $\Lambda =]\lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}[\times]\lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}[$. Ces courbes constituent une partie du spectre de Fucik. Nous montrons l'existence de solutions dans les deux cas suivant : (i) $\lambda_+ = \lambda_- \neq \lambda_j$ pour tout j et (ii) (λ_+, λ_-) et (λ_-, λ_+) sont dans Λ et sont au-dessus des courbes ou (λ_+, λ_-) et (λ_-, λ_+) sont dans Λ et sont au-dessous des courbes. Notre approche fait appel au degré topologique de Leray-Schauder.

Quant au dernier chapitre, nous abordons la question de l'absence de solutions non triviales pour le système semi-linéaire de type gradient

$$\lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + f_k(x, u_1, ..., u_m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i), \quad k = 1, ..., m, \tag{0.6}$$

soumis à des conditions aux limites de Dirichlet, Neumann ou de Robin. Plusieurs travaux ont abordé cette question pour des problèmes elliptiques à la fois dans des domaines bornés et non bornés de $\mathbb{R}^N$ (voir [15],[22],[27]-[37] ainsi que leurs références). En particulier, Amster, P. De Napoli et M. C. Mariani. [4] ont montré la non solvabilité du système elliptique de type Gradient

$$\begin{cases} -\Delta u_i = g_i(u) & \text{dans } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \ i = 1, ..., n, \end{cases}$$

où Ω est un domaine étoilé par rapport à l'origine (starshaped domain). Des résultats similaires ont été montré dans le cas de systèmes elliptiques de type Hamiltonien, associés a des opérateurs de Grushin, par N. M. Chuong et T. D. Ke [9], dans un domaine k-étoilé par rapport à l'origine (k-starshaped domain) et par Khodja [25] dans un domaine non borné $\mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}$.

Dans le cas scalaire et quand Ω est un domaine non borné, Haraux et Khodja [22] ont établi, sous les hypothèses

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ 2F(u) - uf(u) \leq 0, u \neq 0 \end{cases}$$

$\left(F(u) = \int_0^u f(s)ds\right)$, que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0, \text{ dans } \Omega, \\ \left(u \text{ ou } \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

n'admet que la solution triviale dans $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, avec $\Omega = J \times \omega$, $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non borné et ω un domaine dans $\mathbb{R}^N$. Le cas de conditions au bord de Robin a été étudié par Khodja [24] et le résultat de la non existence a été prouvé pour l'équation

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f(x,y,u) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où $\Omega = \mathbb{R} \times]\alpha_1, \beta_1[\times]\alpha_2, \beta_2[$. L'intérêt de ce travail consiste à compléter et étendre les résultats obtenus dans les travaux précités. Il est à noter que dans ces derniers, des identités intégrales de type Pohozaev ont été adaptées pour chaque problème traité et appliquées pour montrer l'absence de solutions non triviales. Plus explicitement, en appliquant des identités de type Pohozaev, nous prouvons que la fonction

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k(t,x)|^2\right) dx$$

est convexe dans $\mathbb{R}$, ce qui implique que l'unique solution du problème (0.6) avec des conditions aux limites de Dirichlet, Neumann ou de Robin est la solution trivilale.

- Le chapitre 2 est un article co-écrit avec B. Khodja et S. Tas, publié dans Nonlinear Analysis TMA [31].

- Le chapitre 3 est un article co-écrit avec B. Khodja, publié au Journal of Partial Differential Equations [30].

- Le chapitre 4 est un article co-écrit avec B. Khodja, publié à Electronic Journal of Differential Equations [23].

Chapitre 1

Notations et Rappels

Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations utilisées tout au long de ce mémoire. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte. Nous rappelons également divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnes de références à la bibliographie et seront utilisés dans le texte de manière plus ou moins transparente.

1.1 Notations générales

Ici sont présentées les notations utilisées dans cette thèse. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux passages correspondants dans le texte. Les différents lemmes, propositions, remarques et théorèmes sont, dans ce mémoire, numérotés dans chaque chapitre de manière séquentielle. Les formules, quant à elles, sont numérotées dans chaque chapitre par section et ce également de manière séquentielle.

Notations

$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle d'un champ de vecteurs
$\frac{\partial}{\partial n}$	Dérivée normale exterieure d'un champ scalaire.
$\triangle$	Laplacien d'un champ de vecteurs.
∇	Gradient d'un champ de vecteurs.
$p.p.$	Presque partout.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$supp$	Support d'un champ scalaire ou de vecteurs.
$s^{\pm}$	$\max(\pm s, 0)$ de sorte que $s = s^{+} - s^{-}, s \in \mathbb{R}$.
$\varphi^{\perp}$	L'orthogonale de φ dans l'espace L^2.
$\mathcal{C}^m\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace des fonctions m fois continument differentiables.
$\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\underset{m\in\mathbb{N}}{\cap} \mathcal{C}^m\left(\mathbb{R}^N\right)$.
$C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}^N$.
$L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace de Lebegue equipé de la norme $\left\|\cdot\right\|_p$.
$L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace des fonctions de $L^p(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \mathbb{R}^N$.

$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\left\|\cdot\right\|_{m,p}$.
$W^{m,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace des fonctions de $W^{m,p}\left(\Omega'\right)$, $\forall\Omega'\subset\overline{\Omega'}\subset\mathbb{R}^N$.
$H^m\left(\mathbb{R}^N\right)$	$W^{m,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$
U	Espace de Banach $H^1_0\left(\Omega\right)\times H^1_0\left(\Omega\right)$ muni de la norme $\left\|(u,v)\right\|^2_U=\left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)}+\left\|v\right\|^2_{H^1(\Omega)}$.
V	$L^2\left(\Omega\right)\times L^2\left(\Omega\right)$.
$D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace de Sobolev défini comme la complétion de $C^\infty_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ par rapport à la norme $\left\|\varphi\right\|^2_1=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\varphi\right|^2dx$.

Si $x\in\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\alpha_i,\beta_i\right)$, $l=1,2,...,n$ et $\tau\in\left\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,...,\alpha_n,\beta_n\right\}$, on écrit :

$x^\tau_l=\left(x_1,...,x_{l-1},\tau,x_{l+1},...,x_n\right)$.

$dx^*_l=dx_1...dx_{l-1}dx_{l+1}...dx_n$.

$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}...\int\limits_{\alpha_{i-1}}^{\beta_{i-1}}\int\limits_{\alpha_{i+1}}^{\beta_{i+1}}...\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}f_k(x,r_1,...,r_m)dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_n=\int\limits_{\mathcal{D}^*_i}f_k(x,r_1,...,r_m)dx^*_i$,

pour tout $k=1,...,m$.

1.2 Les espaces L^p

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. On désigne par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

et on définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ est mesurable et il existe } c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c \ \ p.p. \text{ sur } \Omega \}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \min \{ M \geq 0 : |f| \leq M \quad p.p. \text{ sur } \Omega \}.$$

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, g(x) \ dx.$$

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intègrables sur Ω et on écrit

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : u \in L^1(K) \ \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega \right\}$$

Remarque 1.1 *(i) $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$*

(ii) L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p \right)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.

Lemme 1.2 *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$ *tels que*

$$\|f_n - f\|_p \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors, il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que :*

i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p sur* Ω.

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *pour tout* k *et p.p. sur* Ω *avec* $h \in L^p(\Omega)$.

Lemme 1.3 *Soit* $(p, q, r) \in [1, \infty]$ *tels que* $q < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. *Si* $g \in L^q(\Omega)$ *et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite bornée de* $L^p(\Omega)$ *qui converge presque partout sur* Ω *vers* f, *alors* $f_n g \longrightarrow fg$ *dans* $L^r(\Omega)$.

Remarque 1.4 *Ce résultat reste vrai si on remplace* Ω *par un quelconque autre espace mesuré* $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

1.3 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On définit la fonctionnelle $\|.\|_{m,p}$, où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$, comme suit :

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p},$$

$$\|u\|_\infty = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

pour toute fonction u qui donne un sens à cette écriture.

On désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables $u \in L^p(\Omega)$ telles que la dérivée au sens faible $D^\alpha u$ $(0 \leq |\alpha| \leq \infty)$ appartient à $L^p(\Omega)$ et l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On associe à l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ et on a alors la proposition suivante :

Proposition 1.5 *i) $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

ii) Pour $p < +\infty, W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.

iii) Pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

Pour $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, définit comme suit :

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m, \ D^\alpha f \in L^2(\Omega) \right\}.$$

$H^m(\Omega)$ est un Banach muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2};$$

c'est un espace de Hilbert.

Théorème 1.6 (Traces des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$) *Soit un ouvert borné lipschitzien de frontière Γ et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors, il existe une unique application linéaire continue*

$$\begin{array}{cccc} \gamma_0 : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Gamma) \\ & u & \longmapsto & u_{/\Gamma} \end{array}$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$. On dit alors que $\gamma_0(u)$ est la trace de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sur Γ.

Théorème 1.7 (voir *[1]*) *Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne (où si $\Omega = \mathbb{R}^N$) on a :*

i) Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.

ii) Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.

iii) Pour tout $q \in]N, +\infty[$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Si l'on supprime l'hypothèse "à frontière lipschitzienne", alors le dernier théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ *par* $W_0^{1,p}(\Omega)$. *Dans ce cas, et si* $N > 1$, (iii) *est même valable pour tout* $q \in [1, +\infty[$.

Théorème 1.8 (*[1]*) *Soit* Ω *un ouvert borné à frontière lipschitzienne :*

1) Si $1 \leq p < \infty$ *alors l'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *est compacte.*

2) Si $1 < p < \infty$ *alors la trace* $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ *est compacte.*

Remarque 1.9 *La propriété (2) du théorème précédent est fausse si* $p = 1$, *puisque*

$$\gamma : W^{1,1}(\Omega) \longrightarrow L^1(\partial\Omega)$$

est surjective.

1.4 Régularité, principe du maximum

Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction dans $L^2(\Omega)$. On dit que u est une solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

si u vérifie

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx. \end{cases} \tag{1.1}$$

Régularité

Théorème 1.10 (régularité jusqu'au bord) *Si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *à frontière* $\mathcal{C}^2$ *et* $f \in L^2(\Omega)$ *alors la solution* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de* (1.1) *appartient à* $H^2(\Omega)$. *Il existe de plus* *une constante $C > 0$, ne dépendant que de Ω, telle que*

$$\forall f \in L^2(\Omega), \quad \|u\|_{2,2} \leq C \|f\|_2 .$$

Remarque 1.11 *On a le même résultat avec $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{R}_+^N$ à la place de Ω.*

Théorème 1.12 (régularité intérieure) *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$ alors la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1.1) appartient à $H_{loc}^2(\Omega)$.*

Théorème 1.13 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème (1.1).*

i) Si $f \in H_{loc}^m(\Omega)$ alors $u \in H_{loc}^{m+2}(\Omega)$.

ii) Si Ω est à frontière $\mathcal{C}^\infty$ et $f \in H^m(\Omega)$ alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

Principe du maximum

Théorème 1.14 *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème (1.1) alors :*

$$f \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega \implies u \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega.$$

1.5 Le degré topologique

1.5.1 Le degré topologique de Brouwer

Si $\mathcal{A} = \left\{(f, \Omega, y),\ \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ f \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right),\ y \notin f(\partial\Omega)\right\}$, alors il existe une unique application $d : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant :

i) **Normalisation :** si $y \in \Omega$, alors $d(Id, \Omega, y) = 1$,

$ii)$ **Additivité** : si $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que $y \notin f(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y),$$

$iii)$ **Invariance par homotopie** : si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ vérifie $\forall t \in [0,1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, alors $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.

1.5.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

Si E est un espace de Banach et

$$\mathcal{A} = \left\{(Id - f, \Omega, y),\ \Omega \text{ ouvert borné de } E,\ f : \overline{\Omega} \longrightarrow E \text{ compacte, } y \notin (Id - f)(\partial\Omega)\right\},$$

alors, il existe une unique application $d : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant :

$i)$ Si $y \in \Omega$, alors $d(Id, \Omega, y) = 1$,

$ii)$ Si $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que $y \notin (Id - f)(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y),$$

$iii)$ Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow E$ vérifie $\forall t \in [0,1]$, $y(t) \notin (Id - h(t, \cdot))(\partial\Omega)$, alors $d(Id - h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.

Remarque 1.15 *La propriété essentielle du degré est :*

Si $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ *et* $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$, *alors il existe* $x \in \Omega$ *tel que* $x - f(x) = y$.

Applications

Théorème 1.16 (Leray-Schauder) *Soient X un espace de Banach et $F : X \longrightarrow X$ une application complètement continue. Si pour toute solution x de $x = tF(x)$, $t \in [0,1]$, on a*

$$\|x\| < M, \text{ avec } M > 0,$$

alors F admet un point fixe.

Théorème 1.17 (point fixe de Schauder) *Soit Ω un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application compacte alors f admet au moins un point fixe. De plus, le résultat reste vraie si Ω est seulement* ***homéomorphe*** *à un convexe, fermé borné.*

1.6 Quelques définitions et résultats supplimentaires

Définition 1.18 *Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$.*

Y est dit relativement compact dans X si $\overline{Y}$ est compact($\overline{Y}$ désigne la ferméture de Y).

Y est dit pré-compact dans X si pour tout $\varepsilon > 0$, Y peut être recouvert par un nombre fini d'ensemble de diamètre infèrieur ou égal à ε contenu dans X ou ce qui revient au même de dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x_i)_{i=1}^n \subset X \text{ tel que } \forall y \in Y, \exists x_j \in (x_i)_{i=1}^n \text{ vérifiant } d(x_j, y) < \varepsilon.$$

Définition 1.19 *X et Y désignent deux espaces normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur.*

T est compact, s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compact de Y,

ou bien, de toute suite (x_n) *de la boule unité, on peut extraire une sous-suite* (x_{n_k}) *telle que* $(T(x_{n_k}))$ *converge dans* Y.

Définition 1.20 *Sous les hypothéses de la définition précédente,* T *est dit complètement continu s'il est continu et si l'image de tout borné de* X *est relativement compact.*

Remarque 1.21 *Il est clair que toute application compacte est complètement continue. La réciproque est vraie que lorsque* X *est borné.*

Définition 1.22 *On dit que le système*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) \quad dans\ \Omega \\ -\Delta v = g(x,u,v) \quad dans\ \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

est variationnel si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) Il existe une fonction differentiable $F(x,u,v)$ *pour* $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *telle que*

$$\tfrac{\partial F(x,u,v)}{\partial u} = f(x,u,v) \ \ et \ \tfrac{\partial F(x,u,v)}{\partial v} = g(x,u,v).$$

Dans ce cas, on dit que le système (1.2) *est de type Gradient.*

(ii) Il existe une fonction differentiable $H(x,u,v)$ *pour* $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *telle que*

$$\tfrac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = g(x,u,v) \ \ et \ \tfrac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = f(x,u,v).$$

Dans ce cas, on dit que le système (1.2) *est de type Hamiltonien.*

Théorème 1.23 (Lax-Milgram) *Soient* L *une forme linéaire continue sur* H *et* a *une forme bilinéaire continue et coercive Alors, il existe une et une seule fonction* $u \in H$ *telle que*

$$a(u,v) = L(v) \ \ quelque\ soit\ v \in H.$$

La proposition qui suit est un résultat d'analyse fonctionnelle (voir [38]), qui sera trés utile par la suite, dans le chapitre 3.

Proposition 1.24 *Soit* $F \subset H^1(\Omega)$ *un espace vectoriel. Si* $(v_n) \subset F$ *et* $v_n \rightharpoonup v$ *faiblement dans* $H^1(\Omega)$, *alors* $v \in F$.

Chapitre 2

Résultat d'existence et d'unicité pour le système d'équations elliptiques de Gierer-Meinhardt dans $\mathbb{R}^N$

Le modèle général proposé par Gierer-Meinhardt [21, 28] peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u - \alpha u + c\rho \frac{u^k}{v^q} + \rho_0 \rho \text{ dans } \Omega \times (0,T)\,, \\ v_t = d_v \Delta v - \beta v + c'\rho' \frac{u^r}{v^s} \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T)\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, α, β, c, c' et ρ_0 sont des constantes positives et les exposants k, q, r et s sont positifs vérifiant la relation

$$qr > (k-1)(s+1) > 0.$$

L'intérêt de ce travail réside dans l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du système (2.1) dans le cas stationnaire avec $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, $\rho = 0$, $k = 0$ et $\alpha, \beta \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Plus précisément, il s'agit de traiter le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = h_1(x) \frac{1}{v^q} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \beta(x) v = h_2(x) \frac{u^r}{v^s} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ u(x), v(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow \infty, \\ u, v > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.2}$$

où les fonctions $h_1, h_2 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et les paramètres α, β sont non négatifs et vérifient la condition suivante :

$$\alpha(x) \geq \alpha_0,\ \beta(x) \geq \beta_0 \text{ pour } |x| \geq \mathcal{R} \text{ et pour } a_0,\ \beta_0,\ \mathcal{R} > 0. \tag{2.3}$$

Les fonctions h_1 et h_2, supposées son nulles et non négatives, sont dans $L^2 \cap L^{\theta_i}$ avec $\theta_1 = \frac{2}{1+q}$ et $\theta_2 = \frac{2}{1+s}$ et les exposants vérifient $q, r > 0$ et $s \in]0,1[$ tels que $r - s \leq 1$.

Remarque 2.1 *Noter que le choix des exposants est crucial ; l'approche utilisée dans ce travail ne s'applique pas pour d"autres exposants.*

2.1 Théorème d'existence

Le résultat principal d'existence est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.2 *Sous l'hypothèse* (2.3), *le système* (2.2) *admet une solution*

$$u, v \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap W_{loc}^{2,p}\left(\mathbb{R}^N\right), 1 < p < \infty,$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) u^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) v^2 dx < \infty. \tag{2.4}$$

Pour montrer ce résultat, nous allons appliquer au problème (2.2) un raisonnement similaire à celui utilisé par Alves, Goncales et Maia dans [3] pour montrer l'existence de solutions du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x) u = h(x) u^{-\gamma} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où γ est un nombre positif. Plus explicitement, cela consiste à régulariser, en premier lieu, le système (2.2) en l'écrivant sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = h_1(x) \frac{1}{(v+\varepsilon)^q} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \beta(x) v = h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ u(x), v(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow \infty, \\ u, v > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.5}$$

où la fonction χ_ε est définie par :

$$\chi_\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } \varphi(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } \varphi(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases} \tag{2.6}$$

avec $\varphi \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\varphi \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Et en deuxième lieu, montrer en appliquant le théorème du point fixe de Schauder, que le système régularisé (2.5) admet une solution $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in W_{loc}^{2,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $1 < p < \infty$ et, en faisant tendre ε vers 0, on arrive à la solution de (2.2).

2.1.1 Etude du système régularisé

On a le résultat suivant.

Théorème 2.3 *Sous la condition* (2.3), *le système* (2.5) *admet une solution*

$$u_\varepsilon, v_\varepsilon \in W^{2,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right), 1 < p < \infty,$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\, u_\varepsilon^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\, v_\varepsilon^2 dx < \infty.$$

Dans tout ce qui suit, on notera par E^α et E^β les espaces

$$E^\alpha = \left\{ \varphi \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) : \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\, \varphi^2 dx < \infty \right\}$$

et

$$E^\beta = \left\{ \varphi \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) : \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\, \varphi^2 dx < \infty \right\},$$

respectivement, qui sont des espaces de Hilbert munit des produits scalaires

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\varphi \nabla\psi + \alpha(x)\, \varphi\psi \right) dx$$

et

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\beta = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\varphi \nabla\psi + \beta(x)\, \varphi\psi \right) dx,$$

respectivement. On définit la norme de E^α (resp. E^β) par $\|\varphi\|^2_{E^\alpha} = \langle \varphi, \varphi \rangle_\alpha$ (resp. $\|\varphi\|^2_{E^\beta} = \langle \varphi, \varphi \rangle_\beta$) et on muni l'espace $E^\alpha \times E^\beta$ de la norme

$$\|(\varphi, \psi)\| = \|\varphi\|_{E^\alpha} + \|\psi\|_{E^\beta}.$$

On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u+\alpha\left(x\right)u=f\left(x\right) \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v+\beta\left(x\right)v=g\left(x\right) \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.7}$$

où f et g sont des fonctions dans $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. Le théorème de Lax-Milgram montre que (2.7) admet une solution unique (u,v) dans $E^\alpha\times E^\beta$ et on a

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla u\nabla\varphi+\alpha\left(x\right)u\varphi\right)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}f\left(x\right)\varphi dx,\ \ \varphi\in E^\alpha, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla v\nabla\psi+\beta\left(x\right)v\psi\right)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}g\left(x\right)\psi dx,\ \ \psi\in E^\beta. \end{cases} \tag{2.8}$$

Soit S un opérateur linéaire associé à (2.7), défini par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}:L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\times L^2\left(\mathbb{R}^N\right) & \longrightarrow & E^\alpha\times E^\beta \\ (f,g) & \longmapsto & \mathcal{S}\left(f,g\right)=\left(u,v\right), \end{array}$$

où (u,v) est la solution du système (2.7). $\mathcal{S}$ est bien défini et satisfait la propriété donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.4 $\mathcal{S}\left(f,g\right)\geq 0$ *quand* $f,g\geq 0$.

Preuve. On écrit u, v sous la forme u^+-u^- et v^+-v^- où u^+, v^+ (resp. u^-, v^-) sont les parties positives (resp. négatives) de u et v, et on pose $\varphi=-u^-$ et $\psi=-v^-$ dans (2.8). ■

Soit $(u,v)\in\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ avec $u,v\geq 0$. En utilisant (2.6) et pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$\begin{cases} 0\leq h_1\left(x\right)\frac{1}{(v+\varepsilon)^q}\leq\frac{h_1(x)}{\varepsilon^q}, \\ 0\leq h_2\left(x\right)\frac{\left(\chi_\varepsilon(u)\right)^r}{(v+\varepsilon)^s}\leq\frac{h_2(x)}{\varepsilon^{r+s}} \end{cases} \tag{2.9}$$

et

$$\frac{h_1\left(x\right)}{\varepsilon^q},\frac{h_2\left(x\right)}{\varepsilon^{r+s}}\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Ainsi, l'opérateur

$$\mathcal{T}(u,v)=\mathcal{S}\left[h_1(x)\frac{1}{(v+\varepsilon)^q},h_2(x)\frac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s}\right]=(\varphi,\psi)$$

est bien défini et continu dans $\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$. Il est évident que le point fixe de l'opérateur $\mathcal{T}$ est une solution de (2.5), alors résoudre le problème régularisé (2.5) revient à résoudre l'équation

$$(u,v)-\mathcal{T}(u,v)=0,\ \ (u,v)\in\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2.$$

On pose

$$\omega=(\omega_1,\omega_2)=\mathcal{T}\left(\frac{1}{\varepsilon},0\right)=\mathcal{S}\left[\frac{h_1(x)}{\varepsilon^q},\frac{h_2(x)}{\varepsilon^{r+s}}\right]$$

et on considère l'ensemble

$$\mathcal{K}=\left\{(u,v)\in\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2:0\le u\le\omega_1,\,0\le v\le\omega_2\right\}.$$

Lemme 2.5 *L'ensemble $\mathcal{K}\subset\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ est fermé, convexe et borné. En plus, $\mathcal{T}(\mathcal{K})\subset\mathcal{K}$ et $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{K})}$ est un sous ensemble compact de $\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$.*

Preuve. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{K}$ est fermé, convexe et borné. Montrons que $\mathcal{T}(\mathcal{K})\subset\mathcal{K}$.

Soit (u,v) dans $\mathcal{K}$; on a

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\left(\tfrac{1}{\varepsilon},0\right)-\mathcal{T}(u,v)&=\mathcal{S}\left[\tfrac{h_1(x)}{\varepsilon^q},\tfrac{h_2(x)}{\varepsilon^{r+s}}\right]-\mathcal{S}\left[h_1(x)\tfrac{1}{(v+\varepsilon)^q},h_2(x)\tfrac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s}\right]\\&=\mathcal{S}\left[h_1(x)\left(\tfrac{1}{\varepsilon^q}-\tfrac{1}{(v+\varepsilon)^q}\right),h_2(x)\left(\tfrac{1}{\varepsilon^{r+s}}-\tfrac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s}\right)\right]\\&\ge 0,\end{aligned}$$

donc $\mathcal{T}(u,v)\le\omega$, ce qui montre que $\mathcal{T}(\mathcal{K})\subset\mathcal{K}$.

Montrons maintenant que $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{K})}\subset\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ est compact. Soit (φ_n,ψ_n) une suite dans

$\mathcal{T}(\mathcal{K})$. Alors, il existe (u_n, v_n) dans $\mathcal{K}$ telle que $(\varphi_n, \psi_n) = \mathcal{T}(u_n, v_n)$. D'après (2.9), les termes

$$h_1(x)\,\frac{1}{(v_n+\varepsilon)^q} \text{ et } h_2(x)\,\frac{(\chi_\varepsilon(u_n))^r}{(v_n+\varepsilon)^s}$$

sont bornés dans $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$, ce qui montre que

$$T(u_n, v_n) = \mathcal{S}\left[h_1(x)\,\frac{1}{(v_n+\varepsilon)^q}, h_2(x)\,\frac{(\chi_\varepsilon(u_n))^r}{(v_n+\varepsilon)^s}\right]$$

est borné dans $E^\alpha \times E^\beta$. Donc, en passant aux sous-suites,

$$(\varphi_n, \psi_n) = \mathcal{T}(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v), \text{ pour un certain } (u, v) \in E^\alpha \times E^\beta$$

et

$$(\varphi_n, \psi_n) \longrightarrow (u, v) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

D'autre part, puisque

$$0 \leq \varphi_n \leq \omega_1 \text{ et } 0 \leq \psi_n \leq \omega_2,$$

d'après le théorème de convergence dominée, on obtient

$$(\varphi_n, \psi_n) \longrightarrow (u, v) \text{ dans } \left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2,$$

ce qui montre que $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{K})}$ est compact dans $\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$. $\blacksquare$

Preuve du théorème 2.3. D'après le lemme 2.5 et le théorème du point fixe de Schauder, il existe $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{K}$ satisfaisant

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \mathcal{S}\left[h_1(x)\,\frac{1}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^q},\ h_2(x)\,\frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^s}\right],$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_\varepsilon \nabla \varphi + \alpha(x) u_\varepsilon \varphi) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \frac{1}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^q} \varphi dx, \ \varphi \in E^\alpha, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_\varepsilon \nabla \psi + \beta(x) v_\varepsilon \psi) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^s} \psi dx, \ \psi \in E^\beta, \\ u_\varepsilon, v_\varepsilon \geq 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N, \ \ (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in E^\alpha \times E^\beta. \end{cases}$$

De (2.9), on a

$$h_1(x) \frac{1}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^q}, \ h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^s} \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et d'après le théorème de régularité, on obtient

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \left(W^{2,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2, 1 < p < \infty.$$

Si on note par $\mathcal{B}$ la boule dans $\mathbb{R}^N$, alors

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \alpha(x) u_\varepsilon = h_1(x) \frac{1}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^q} \text{ p.p. dans } \mathcal{B}, \\ -\Delta v_\varepsilon + \beta(x) v_\varepsilon = h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^s} \text{ p.p. dans } \mathcal{B}. \end{cases}$$

Le principe du maximum implique que u_ε, $v_\varepsilon > 0$ dans $\mathcal{B}$ et on a

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \alpha(x) u_\varepsilon = h_1(x) \frac{1}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^q} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_\varepsilon + \beta(x) v_\varepsilon = h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^s} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ u_\varepsilon, v_\varepsilon > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.3. ■

Le résultat suivant assure que la famille $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ est décroissante pour ε croissant.

Lemme 2.6 *Si* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, *alors*

$$u_{\varepsilon_2} \leq u_{\varepsilon_1} \ \textit{et} \ v_{\varepsilon_2} \leq v_{\varepsilon_1} \ \textit{dans} \ \mathbb{R}^N.$$

Preuve. Montrons que $v_{\varepsilon_2} \leq v_{\varepsilon_1}$ in $\mathbb{R}^N$. Par contradiction, on pose

$$\max_{x \in \mathbb{R}^N} \left(v_{\varepsilon_2}(x) - v_{\varepsilon_1}(x)\right) = m > 0.$$

Soit

$$\left(v_{\varepsilon_2}(x_0) - v_{\varepsilon_1}(x_0)\right) = m.$$

Alors, on a

$$v_{\varepsilon_2}(x_0) > v_{\varepsilon_1}(x_0) > 0,\ \nabla v_{\varepsilon_2}(x_0) = \nabla v_{\varepsilon_1}(x_0) \text{ et } \Delta\left(v_{\varepsilon_2} - v_{\varepsilon_1}\right)(x_0) \leq 0.$$

On pose

$$w_2 = v_{\varepsilon_2} - v_{\varepsilon_1}$$

donc

$$0 \leq -\Delta w_2(x_0) + \beta(x_0) w_2(x_0) = h_2(x_0) \left[\frac{\left(\chi_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(x_0))\right)^r}{\left(v_{\varepsilon_2}(x_0) + \varepsilon_2\right)^s} - \frac{\left(\chi_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(x_0))\right)^r}{\left(v_{\varepsilon_1}(x_0) + \varepsilon_1\right)^s} \right],$$

ce qui implique que

$$\frac{\left(\chi_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(x_0))\right)^r}{\left(v_{\varepsilon_2}(x_0) + \varepsilon_2\right)^s} \geq \frac{\left(\chi_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(x_0))\right)^r}{\left(v_{\varepsilon_1}(x_0) + \varepsilon_1\right)^s},$$

et donc

$$\chi_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(x_0)) > \chi_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(x_0)).$$

Maintenant, si on pose

$$w_1 = \chi_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}) - \chi_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1})$$

alors

$$-\Delta w_1(x_0) + \alpha(x_0) w_1(x_0) = h_1(x_0) \left[\frac{1}{\left(v_{\varepsilon_2}(x_0) + \varepsilon_2\right)^q} - \frac{1}{\left(v_{\varepsilon_1}(x_0) + \varepsilon_1\right)^q} \right] \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$-\Delta w_1(x_0) + \alpha(x_0) w_1(x_0) \leq 0.$$

Donc

$$-\Delta w_1(x_0) \leq 0$$

et l'application du principe du maximum donne

$$\chi_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2}(x_0)) < \chi_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1}(x_0)),$$

ce qui est absurde. Par conséquent, $v_{\varepsilon_2} \leq v_{\varepsilon_1}$. Un argument similaire peut être utilisé pour montrer que $u_{\varepsilon_2} \leq u_{\varepsilon_1}$. ■

2.1.2 Preuve du résultat principal

On considère une suite décroissante $\varepsilon_n > 0$ qui converge vers 0 et on pose $(u_n, v_n) = (u_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n})$. On a

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{E^\alpha}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + \alpha(x)|u_n|^2\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \tfrac{1}{(v_n+\varepsilon_n)^q} u_n dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) v_n^{-q} u_n dx \\
&\leq C_1 |h_1|_{\theta_1} \|v_n\|_{E^\beta}^{-q} \|u_n\|_{E^\alpha}
\end{aligned}$$

et sous les mêmes hypopthèses, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\tfrac{1}{\varepsilon_n} v_n\right\|_{E^\beta}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla \tfrac{v_n}{\varepsilon_n}\right|^2 + \beta(x)\left|\tfrac{v_n}{\varepsilon_n}\right|^2\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{\left(\chi_{\varepsilon_n}(u_n)\right)^r}{\left(\frac{v_n}{\varepsilon_n}+\varepsilon_n\right)^s} \tfrac{v_n}{\varepsilon_n} dx \\
&\leq \varepsilon_n^{s-r-1} \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) v_n^{1-s} dx \\
&\leq C_2 \varepsilon_n^{s-r-1} |h_2|_{\theta_2} \|v_n\|_{E^\beta}^{1-s},
\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives. Alors on a

$$\|u_n\|_{E^\alpha} \leq C_1 |h_1|_{\theta_1} \|v_n\|_{E^\beta}^{-q}$$

et

$$\|v_n\|_{E^\beta}^{s+1} \leq C_2 \varepsilon_0^{1-(r-s)} |h_2|_{\theta_2},$$

ce qui montre que u_n et v_n sont bornés dans $E^\alpha \times E^\beta$. Il existe alors des sous-suites, qu'on note encore u_n et v_n, telles que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \text{ dans } E^\alpha \times E^\beta$$

et

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

D'autre part, d'après le lemme 2.6,

$$0 < u_1 < u_n \text{ et } 0 < v_1 < v_n \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

alors, si on considère deux fonctions à support compact (φ, ψ) dans $E^\alpha \times E^\beta$, on peut trouver une boule $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ telle que

$$supp\,(\varphi)\,,\ supp\,(\psi) \subset \mathcal{B}$$

et

$$\begin{cases} \left| h_1(x) \frac{1}{(v_n+\varepsilon_n)^q}\ \varphi \right| \leq |h_1(x)|\ \ |\varphi| \frac{1}{v_n^q} \leq H_1(x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ \left| h_2(x) \frac{(\chi_{\varepsilon_n}(u_n))^r}{(v_n+\varepsilon_n)^s}\ \psi \right| \leq |h_2(x)|\ \ |\psi| \frac{u_n^r}{v_n^s}\ \leq H_2(x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où $H_1(x)$ et $H_2(x)$ sont des fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. En appliquant le théorème de convergence dominée au problème suivant

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla \varphi + \alpha(x)\, u_n \varphi)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \frac{1}{(v_n+\varepsilon_n)^q} \varphi dx, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n \nabla \psi + \beta(x)\, v_n \psi)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{(\chi_{\varepsilon_n}(u_n))^r}{(v_n+\varepsilon_n)^s} \psi dx, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha(x) u\varphi) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \frac{1}{v^q} \varphi dx, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \psi + \beta(x) v\psi) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{u^r}{v^s} \psi dx, \\ u \geq u_1 > 0, \; v \geq v_1 > 0 \; p.p. \text{ dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Le théorème de régularité implique que

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha(x) u\varphi) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \frac{1}{v^q} \varphi dx, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \psi + \beta(x) v\psi) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{u^r}{v^s} \psi dx, \\ u, v \in W^{2,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right), \; 1 < p < \infty, \\ u > 0, \; v > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

ce qui prouve l'existence de solutions du problème (2.2).

2.2 Unicité

Théorème 2.7 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème* 2.2, *le système* (2.2) *admet une solution unique.*

Dans la démonstration du théorème précédent, on aura besoin de la fonction $\chi \in C_0^\infty$ définie par

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 \text{ si } |x| \leq 1, \\ \chi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 2 \\ \text{et } 0 \leq \chi(x) \leq 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Pour $(\varphi, \psi) \in E^\alpha \times E^\beta$, on pose

$$\varphi_k(x) = \chi\left(\tfrac{x}{k}\right) \varphi(x), \; x \in \mathbb{R}^N$$

et

$$\psi_k(x) = \chi\left(\frac{x}{k}\right)\psi(x), \ x \in \mathbb{R}^N,$$

où k est un entier naturel superieur ou égal à 1. Il s'ensuit que $(\varphi_k(x), \psi_k(x)) \in E^\alpha \times E^\beta$, $supp(\varphi_k)$ et $supp(\psi_k)$ sont compacts et on a le résultat suivant.

Lemme 2.8 (voir [3])

$$(\varphi_k, \psi_k) \longrightarrow (\varphi, \psi) \ \ dans\ E^\alpha \times E^\beta. \tag{2.11}$$

Nous montrons maintenant le théorème 2.7.

Preuve du théorème 2.7. Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux solutions de (2.2). On pose

$$\omega_1^k = u_1^k - u_2^k \text{ et } \omega_2^k = v_1^k - v_2^k,$$

alors

$$\begin{aligned}\left\langle u_1 - u_2, \omega_1^k\right\rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla(u_1 - u_2)\nabla\omega_1^k + \alpha(x)(u_1 - u_2)\omega_1^k\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x)\left(\frac{1}{v_1^q} - \frac{1}{v_2^q}\right)\omega_1^k dx\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left\langle v_1 - v_2, \omega_2^k\right\rangle_\beta &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla(v_1 - v_2)\nabla\omega_2^k + \beta(x)(v_1 - v_2)\omega_2^k\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x)\left(\frac{u_1^r}{v_1^s} - \frac{u_2^r}{v_2^s}\right)\omega_2^k dx.\end{aligned}$$

On suppose, par contradiction, que $u_1 \neq u_2$ et $v_1 \neq v_2$.

De (2.11) on a

$$\left\langle u_1 - u_2, \omega_1^k\right\rangle_\alpha \longrightarrow \|u_1 - u_2\|_{E_\alpha}^2$$

et

$$\left\langle v_1 - v_2, \omega_2^k\right\rangle_\beta \longrightarrow \|v_1 - v_2\|_{E_\beta}^2.$$

Par conséquent,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} h_1(x)\left(\frac{1}{v_1^q}-\frac{1}{v_2^q}\right)\omega_1^k dx>0 \tag{2.12}$$

et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} h_2(x)\left(\frac{u_1^r}{v_1^s}-\frac{u_2^r}{v_2^s}\right)\omega_2^k dx>0, \tag{2.13}$$

pour k assez grand. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} h_1(x)\left(\frac{1}{v_1^q}-\frac{1}{v_2^q}\right)\omega_1^k dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_1(x)\left(\frac{1}{v_1^q}-\frac{1}{v_2^q}\right)\left(u_1^k-u_2^k\right)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi\left(\tfrac{x}{k}\right) h_1(x)\left(\frac{1}{v_1^q}-\frac{1}{v_2^q}\right)\left(u_1-u_2\right)dx \\ &\leq \int_{\Omega_k}\frac{h_1(x)}{v_1^q}u_1+\int_{\Omega_k}\frac{h_1(x)}{v_2^q}u_2 dx\end{aligned} \tag{2.14}$$

et

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} h_2(x)\left(\frac{u_1^r}{v_1^s}-\frac{u_2^r}{v_2^s}\right)\omega_2^k &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_2(x)\left(\frac{u_1^r}{v_1^s}-\frac{u_2^r}{v_2^s}\right)\left(v_1^k-v_2^k\right)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \chi\left(\tfrac{x}{k}\right) h_2(x)\left(\frac{u_1^r}{v_1^s}-\frac{u_2^r}{v_2^s}\right)\left(v_1-v_2\right)dx \\ &\leq \int_{\Omega_k} h_2(x)\,u_1^r v_1^{1-s}+\int_{\Omega_k} h_2(x)\,u_2^r v_2^{1-s}dx,\end{aligned} \tag{2.15}$$

avec $\Omega_k=\mathcal{B}_{2k}\backslash\mathcal{B}_k$. Il est clair que pour $k\longrightarrow\infty$, la limite des termes de droite des intégrales (2.14) et (2.15) s'annule et on obtient

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} h_1(x)\left(\frac{1}{v_1^q}-\frac{1}{v_2^q}\right)\omega_1^k dx\leq 0 \tag{2.16}$$

et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} h_2(x)\left(\frac{u_1^r}{v_1^s}-\frac{u_2^r}{v_2^s}\right)\omega_2^k dx\leq 0. \tag{2.17}$$

Par conséquent, (2.12), (2.13), (2.16) et (2.17) sont logiquement contradictoires et donc $(u_1,v_1)=(u_2,v_2)$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.7. ■

Chapitre 3

Résulats d'existence pour une classe de systèmes elliptiques semi-linéaires

3.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre, nous nous interessons à l'étude de l'existence de solutions non triviales pour la classe de systèmes elliptiques suivante

$$\begin{cases} -\Delta u = f\left(x,u,v\right) + h_1\left(x\right) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v = g\left(x,u,v\right) + h_2\left(x\right) & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ de frontière régulière $\partial\Omega$ et $h = (h_1, h_2)$ est une fonction non nulle dans $\left(L^2(\Omega)\right)^2$. On assume que les fonctions

$$f, g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont continues et satisfont la condition suivante :

$$\begin{cases} |f(x,s,t)| \leq C_1 (1 + |s| + |t|), \ \forall s,t \in \mathbb{R}, \ \text{p.p. dans } \Omega, \\ \\ |g(x,s,t)| \leq C_2 (1 + |s| + |t|), \ \forall s,t \in \mathbb{R}, \ \text{p.p. dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

avec C_1, C_2 des constantes réelles et positives. Le problème (3.1) est supposé non variationnel donc, il n'y a pas de possibilité d'utiliser la méthode variationnelle car le système (3.1) n'est pas une équation de Euler-Lagrange pour une certaine fonctionnelle. Par conséquent, nous ferons appel à la méthode topologique où la grande difficulté réside dans l'obtention d'une estimation a priori des solutions éventuelles.

Le cas scalaire correspondant a été considéré dans [19] et l'existence de solutions a été montré pour le problème $Au = g(\cdot, u) + h$, où A est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte dans $L^2(\Omega)$, $g(\cdot,\cdot)$ applique $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est telle que l'intervalle fermé de bornes $g_{\pm} = \lim\limits_{s \longrightarrow \pm\infty} \frac{g(x,s)}{s}$ contient au plus une valeur propre simple de A et $h \in L^2(\Omega)$ est donné. L'objectif de ce travail est d'étendre ce résultat au système (3.1). Plus précisément, sous les conditions suivantes sur les fonctions f et g :

$$\begin{cases} \lim\limits_{s,|t| \longrightarrow +\infty} \frac{f(x,s,t)}{s} = \lim\limits_{|s|,t \longrightarrow +\infty} \frac{g(x,s,t)}{t} = \lambda_+, \ \text{uniformément sur } \Omega, \\ \lim\limits_{-s,|t| \longrightarrow +\infty} \frac{f(x,s,t)}{s} = \lim\limits_{|s|,-t \longrightarrow +\infty} \frac{g(x,s,t)}{t} = \lambda_-, \ \text{uniformément sur } \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\lambda_+, \lambda_- \notin \{0\} \cup \sigma(-\Delta)$, $\sigma(-\Delta)$ est le spectre de $-\Delta$, on montre en appliquant le degré topologique de Leray-Schauder, l'existence de solutions quand $\lambda_+ = \lambda_-$ et dans le cas plus général, quand l'intervalle fermé de bornes λ_+, λ_- contient au plus une valeur propre simple de l'opérateur $-\Delta$.

Notre premier résultat concerne le cas où $\lambda_+ = \lambda_-$ et il est formulé par le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses* (3.2) *et* (3.3) *avec* $\lambda_+ = \lambda_-$*, le problème* (3.1) *admet au moins une solution.*

Dans le cas où $\lambda_+ \neq \lambda_-$, nous adaptons au système (3.1) le raisonnement utlisé par T. Galouët et O. Kavian dans [19] pour montrer, moyennant des conditions sur la fonction h, l'existence de solutions du problème (3.1).

Soit λ une valeur propre simple de A et soit $\overline{\lambda}$ (resp. $\underline{\lambda}$) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre supérieur (resp. inférieur) à λ.

Remarque 3.2 *Si* λ *est la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de* A *alors on pose* $\overline{\lambda} = +\infty$ *(resp.* $\underline{\lambda} = -\infty$*).*

Pour $u \in D(A)$, on définit la fonction $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ sur le carré $\Lambda = \left]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right[\times \left]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right[$, qui vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} Au = \alpha u^+ - \beta u^- + \mathcal{C}(\alpha,\beta)\varphi \\ \int_\Omega u\varphi = 1, \end{cases}$$

où φ est la fonction propre normalisée correspondant à λ (i.e. $A\varphi = \lambda\varphi$, $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$).

Remarque 3.3 *D'aprés la proposition* 3.6 *(voir la page suivante), la fonction* $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ *est bien définie.*

Il a été montré dans [19] que la fonction $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ est continue sur Λ et qu'elle est strictement décroissante par rapport à chacune des variables. En plus, la courbe $\Gamma = \{(\alpha,\beta) \in \Lambda : \mathcal{C}(\alpha,\beta) = 0\}$ est continue, passe par le point (λ,λ) et l'ensemble $\Lambda - \Gamma$ a exactement deux composantes connexes Λ_+ (où $\mathcal{C}(\cdot,\cdot) > 0$) et Λ_- (où $\mathcal{C}(\cdot,\cdot) < 0$). On note par Λ_σ la partie symétrique de $\Lambda - \Gamma$, i.e.

$$\Lambda_\sigma = \{(\alpha,\beta) \in \Lambda; (\alpha,\beta) \in \Lambda_+ \text{ et } (\beta,\alpha) \in \Lambda_+ \text{ ou } (\alpha,\beta) \in \Lambda_- \text{ et } (\beta,\alpha) \in \Lambda_-\}$$

et on pose

$$\mathcal{C}_+ = \mathcal{C}(\lambda_+,\lambda_-) \text{ et } \mathcal{C}_- = \mathcal{C}(\lambda_-,\lambda_+).$$

Nous sommes maintenant prêt à énoncer notre deuxième résultat principal, donné par les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses* (3.2) *et* (3.3) *et si* $\mathcal{C}_+\mathcal{C}_- > 0$ *alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution..*

La condition $C_+C_- > 0$ traduit le fait que le couple (λ_+,λ_-) appartient à Λ_σ. Les autres cas sont donnés par le théorème ci-aprés.

Théorème 3.5 *Sous les hypothèses* (3.2) *et* (3.3), *on a :*

i) Si $C_+ > 0$ *et* $C_- < 0$ *alors pour tout* $h_0 \in \left(\varphi^\perp\right)^2$, *il existe* $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ *tel que si* $h = h_0 + t\varphi$ *(*$t \in \mathbb{R}$*) on a :*

$$t > \gamma_2 \Longrightarrow (3.1) \text{ admet au moins deux solutions.}$$

(Résultat analogue si $C_+ < 0$ *et* $C_- > 0$, *en changeant le sens de toutes les inégalités).*

ii) Si $C_+ < 0$ *et* $C_- = 0$ *(resp.* $C_+ = 0$ *et* $C_- > 0$*) alors pour tout* $h_0 \in \left(\varphi^\perp\right)^2$, *il existe*

$\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tel que si $h = h_0 + t\varphi$ ($t \in \mathbb{R}$) on a

$$t < \gamma_1 \Longrightarrow (3.1) \text{ admet au moins une solutions.}$$

(Résultat analogue si $C_+ > 0$ et $C_- = 0$ (resp. $C_+ = 0$ et $C_- < 0$), en changeant le sens de toutes les inégalités).

Rappelons que l'opérateur A, donné par

$$\begin{cases} Au = -\Delta u, \\ D(A) = \left\{u \in H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)\right\}, \end{cases}$$

définit un opérateur inverse compact dans $L^2(\Omega)$, et son spectre est formé par le suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $|\lambda_k| \longrightarrow +\infty$ et λ_1, la premiere valeur propre, est positive. Dans tout ce qui suit, on notera par λ une valeur propre simple de A, φ est la fonction propre normalisée correspondant à λ et $\mathcal{P}$ designera la projection orthogonale de V sur $\left(\varphi^{\perp}\right)^2$.

Nous rappelons la proposition suivante, énnoncée par T. Gallouët and O. Kavian (voir [19]).

Proposition 3.6 *Pour tout $\alpha, \beta \in \left]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right[$, il existe un couple unique $(\mathcal{C}, u) \in \mathbb{R} \times D(A)$ tel que*

$$\begin{cases} Au = \alpha u^+ - \beta u^- + \mathcal{C}(\alpha, \beta)\varphi, \\ \int_\Omega u\varphi = 1. \end{cases}$$

Le résultat suivant est donné dans un cadre général**.**

Proposition 3.7 *Soit $q(x, s) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction mesurable en $x \in \Omega$ et continue en $s \in \mathbb{R}$, vérifiant :*

i) Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\underline{\lambda} < \alpha \leq \tfrac{q(x,s)-q(x,t)}{s-t} \leq \beta < \overline{\lambda}, \ \forall s,t \in \mathbb{R}, \ \textit{p.p. dans } \Omega$$

ii)

$$\lim_{s \longrightarrow \pm\infty} \tfrac{q(x,s)}{s} = l_{\pm} \ \textit{p.p. dans } \Omega.$$

iii) $q(x,0) = 0$ *p.p. dans* Ω.

Alors

$$\forall s \in \mathbb{R}, \ \forall q_0 \in \varphi^{\perp}, \ \exists ! v \in D(A) \cap \varphi^{\perp}$$

tel que

$$Av = \mathcal{P}q(\cdot, v + s\varphi) + q_0.$$

La preuve de la proposition précédente est aussi donnée dans [19].

3.2 Estimations a priori des solutions

3.2.1 Le cas $\lambda_+ = \lambda_-$

Grâce à l'unicité de la solution du problème (3.4), l'opérateur suivant est bien défini :

$$\mathcal{T}: \ V \ \longrightarrow \ U$$

$$(\varphi, \chi) \longmapsto T(\varphi, \chi) = (u, v),$$

où (u,v) est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, \varphi, \chi) + h_1(x), \ \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v = g(x, \varphi, \chi) + h_2(x), \ \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 \qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

On peut remarquer que (3.1) est équivalent au problème

$$\mathcal{T}(u,v) = (u,v)\,, \quad (u,v) \in U.$$

En d'autres termes, le point fixe de l'opérateur $\mathcal{T}$ est une solution de (3.1). Donc

$$\mathcal{T}(u,v) = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x,u,v) + h_1(x) \\ g(x,u,v) + h_2(x) \end{pmatrix}.$$

Il est évident que $\mathcal{T}$ est un opérateur compact et continu.

On note par $\lambda_{\pm} = \lambda_- = \lambda_+$ et on définit l'homotopie

$$H(t,u,v) = \begin{pmatrix} H_1(t,u,v) \\ H_2(t,u,v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\left[f(x,u,v) + h_1(x)\right] + (1-t)\left[\lambda_{\pm} u + h_1(x)\right] \\ t\left[g(x,u,v) + h_2(x)\right] + (1-t)\left[\lambda_{\pm} v + h_2(x)\right] \end{pmatrix}, \ t \in [0,1]\,.$$

$H : [0,1] \times U \to V$ est une homotopie compacte et en plus, le système (3.1) est équivalent au problème suivant :

$$(u,v) \in U, \ \ (u,v) - H(1,u,v) = 0. \tag{3.5}$$

Nous montrons maintenant que le résultat suivant est vérifié.

Lemme 3.8 *Il existe $R_1 > 0$ tel que*

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1]\,, \ \forall (u,v) \in U, \\ (u,v) - H(t,u,v) = 0 \Longrightarrow \|(u,v)\|_U < R_1. \end{cases}$$

Preuve. Supposons, par contradiction, qu'il existe $(t,u,v) \in [0,1] \times U$ tel que

$$(u,v) - H(t,u,v) = 0 \text{ et } \ \|(u,v)\|_U \geq R_1.$$

En d'autres termes, on peut trouver une suite $(t_n, u_n, v_n) \in [0,1] \times U$ telle que

$$(u_n, v_n) - H(t_n, u_n, v_n) = 0 \text{ et } \|(u_n, v_n)\|_U \geq n. \tag{3.6}$$

Posons

$$w_n = (w_{1,n}, w_{2,n}) = \left(\frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}, \frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \right).$$

Alors, avec le choix de w_n, on a

$$w_n = (w_{1,n}, w_{2,n}) \in (D(A))^2 \text{ et } \|w_n\|_U = 1. \tag{3.7}$$

En effet, il est facile de voir que $\|w_n\|_U = 1$. Montrons que $w_n \in (D(A))^2$.

On a

$$\begin{aligned} Aw_{1,n} &= -\Delta w_{1,n} \\ &= \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} (t_n f(x, u_n, v_n) + (1 - t_n) \lambda_\pm u_n + h_1(x)) \end{aligned} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{aligned} Aw_{2,n} &= -\Delta w_{2,n} \\ &= \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} (t_n g(x, u_n, v_n) + (1 - t_n) \lambda_\pm v_n + h_2(x)). \end{aligned} \tag{3.9}$$

D'après (3.2) et sachant que $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x, u_n, v_n)|^2 &\leq 4C_1^2 \int_\Omega \left(1 + |u_n|^2 + |v_n|^2\right) \\ &\leq \widetilde{C}_1 \left(1 + \|u_n\|_{H^1}^2 + \|v_n\|_{H^1}^2\right) \\ &\leq \widetilde{C}_1 \left(1 + \|(u_n, v_n)\|_U^2\right), \end{aligned}$$

pour une certaine constante $\widetilde{C}_1 > 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|f(x,u_n,v_n)|^2}{\|(u_n,v_n)\|_U^2} &\leq \widetilde{C}_1 \left(1 + \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U^2}\right) \\ &\leq \widetilde{C}_1 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \\ &\leq 2\widetilde{C}_1, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\frac{f(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U}$ est borné dans $L^2(\Omega)$. Un raisonnement similaire montre que la fonction $\frac{g(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U}$ est aussi bornée dans $L^2(\Omega)$. En plus, de (3.6) on a

$$\begin{cases} \frac{\|h_1\|_{L^2(\Omega)}}{\|(u_n,v_n)\|_U} \leq \frac{\|h_1\|_{L^2(\Omega)}}{n} \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)}, \\ \frac{\|h_2\|_{L^2(\Omega)}}{\|(u_n,v_n)\|_U} \leq \frac{\|h_2\|_{L^2(\Omega)}}{n} \leq \|h_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Donc les termes à droite des formules (3.8) et (3.9) sont bornés dans $L^2(\Omega)$, pour tout n; alors

$$-\Delta w_{1,n}, -\Delta w_{2,n} \in L^2(\Omega)$$

et par conséquent,

$$w_{1,n}, w_{2,n} \in D(A).$$

Puisque l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, on peut extraire une sous-suite de $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$, encore notée $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$, qui converge dans $[0,1] \times V$.

Soit (t, w_1, w_2) la limite de $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$ dans $[0,1] \times V$. D'après l'hypothèse (3.3), on a

$$\begin{cases} \frac{f(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} = \frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \frac{f(x,u_n,v_n)}{u_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm w_1 \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \frac{g(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} = \frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \frac{g(x,u_n,v_n)}{v_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm w_2 \text{ p.p. dans } \Omega \end{cases}$$

et comme les suites $w_{1,n}$ et $w_{2,n}$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{|f(x,u_n,v_n)|}{\|(u_n,v_n)\|_U} \leq C_1(1 + |w_{1,n}| + |w_{2,n}|) \leq C_1' \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \frac{|g(x,u_n,v_n)|}{\|(u_n,v_n)\|_U} \leq C_2(1 + |w_{1,n}| + |w_{2,n}|) \leq C_2' \text{ p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

où C_1' et C_2' sont des constantes réelles et positives.

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\begin{cases} \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} f(x,u_n,v_n) = \frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \frac{f(x,u_n,v_n)}{u_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm w_1 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} g(x,u_n,v_n) = \frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \frac{g(x,u_n,v_n)}{v_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm w_2 \text{ dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

et par conséquent,

$$\begin{cases} w_n \longrightarrow w, \ V \\ \\ Aw_n \longrightarrow \lambda_\pm w, \ V. \end{cases}$$

D'autre part, comme l'opérateur A est fermé alors

$$w \in (D(A))^2 \text{ et } Aw = \lambda_\pm w.$$

Finalement, la formule (3.7) associée à la proposition 1.24, implique que $w \neq 0$, c'est-à-dire, $\lambda_\pm$ est une valeur propre de A, ce qui est absurde. ■

3.2.2 Le cas $\lambda_+ \neq \lambda_-$

On suppose $\lambda_+ > \lambda_-$. En utilisant un raisonnement similaire à celui de la sous-section précédente, on définit l'homotopie

$$\widetilde{H}(t,u,v) = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_1(t,u,v) \\ \\ \widetilde{H}_2(t,u,v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\left[f(x,u,v) + h_1(x)\right] + (1-t)\left[\lambda_- u + h_1(x)\right] \\ \\ t\left[g(x,u,v) + h_2(x)\right] + (1-t)\left[\lambda_- v + h_2(x)\right] \end{pmatrix}, \ t \in [0,1].$$

Remarque 3.9 *Si $\lambda_+ < \lambda_-$, l'homotopie $\widetilde{H}$ est définie de la même manière mais en prenant λ_+ au lieu de λ_-.*

Il est évident que $\widetilde{H}$ est compact et que le système (3.1) est équivalent au problème

$$(u,v) \in U, \ \ (u,v) - \widetilde{H}(1,u,v) = 0.$$

Maintenant, nous allons chercher des estimations a priori des solutions.

Lemme 3.10 *Si* $\mathcal{C}_+\mathcal{C}_- > 0$ *alors il existe* $R_2 > 0$ *tel que*

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1]\,,\ \forall\,(u,v) \in U, \\ \\ (u,v) - \widetilde{H}\,(t,u,v) = 0 \Longrightarrow \|(u,v)\|_U < R_2. \end{cases} \tag{3.10}$$

Preuve. Supposons que $\mathcal{C}_+ > 0$ et $\mathcal{C}_- > 0$. Comme dans la démonstration du lemme précèdent, on suppose que (3.10) n'est pas vrai. Donc, on peut trouver une suite $(t_n, u_n, v_n) \in [0,1] \times U$ telle que

$$(u_n, v_n) - \widetilde{H}\,(t_n, u_n, v_n) = 0 \text{ et } \|(u_n, v_n)\|_U \geq n.$$

On pose

$$w_n = (w_{1,n}, w_{2,n}) = \left(\tfrac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}, \tfrac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\right).$$

Alors $\|w_n\|_U = 1$ et on a :

$$Aw_{1,n} = \tfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}\left[t_n f\,(x, u_n, v_n) + (1 - t_n)\,\lambda_- u_n + h_1\,(x)\right] \tag{3.11}$$

et

$$Aw_{2,n} = \tfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}\left[t_n g\,(x, u_n, v_n) + (1 - t_n)\,\lambda_- v_n + h_2\,(x)\right]. \tag{3.12}$$

On a montré précédemment que les membres à droite de (3.11) et (3.12) sont bornés dans $L^2\,(\Omega)$ pour tout n; alors

$$-\Delta w_{1,n}, -\Delta w_{2,n} \in L^2\,(\Omega)\,,$$

c'est-à-dire,

$$w_{1,n}, w_{2,n} \in D\,(A)\,.$$

L'injection $H_0^1\,(\Omega) \hookrightarrow L^2\,(\Omega)$ est compacte donc, on peut extraire une sous suite de $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$, encore notée par $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$, qui converge dans $[0,1] \times V$.

Soit (t, w_1, w_2) la limite de $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$ dans $[0,1] \times V$. En combinant (3.3) avec (3.2) et en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\begin{cases} \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} f(x, u_n, v_n) = \frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \frac{f(x,u_n,v_n)}{u_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \lambda_+ w_1^+ - \lambda_- w_1^- \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} g(x, u_n, v_n) = \frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \frac{g(x,u_n,v_n)}{v_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \lambda_+ w_2^+ - \lambda_- w_2^- \text{ dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} w_n \longrightarrow w,\ V \\ Aw_n \longrightarrow (t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-) w^+ - \lambda_- w^-,\ V. \end{cases}$$

Comme l'opérateur A est fermé alors

$$w \in (D(A))^2 \text{ et } Aw = (t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-) w^+ - \lambda_- w^-,$$

ce qui contredit les hypothèses.

En effet, si $\int_\Omega w\varphi = 0$ alors en projetant sur $\varphi^\perp$ on a

$$Aw = \mathcal{P}[(t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-) w^+ - \lambda_- w^-]$$

et d'après la proposition 3.7, on obtient $w = 0$, contradiction avec le fait que $\|w\|_U = 1$.

Si $\int_\Omega w\varphi = \theta > 0$ alors $\mu = \frac{w}{\theta}$ vérifie

$$\begin{cases} A\mu = (t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-) \mu^+ - \lambda_- \mu^-, \\ \int_\Omega \mu\varphi = 1 \end{cases}$$

et d'après la proposition 3.6,

$$\mathcal{C}((t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-), \lambda_-) = 0.$$

Or comme la fonction $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ est décroissance par rapport à chacune des variables, on a

$$\mathcal{C}(t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-, \lambda_-) \geq \mathcal{C}(\lambda_+, \lambda_-) = \mathcal{C}_+ > 0,$$

absurde.

Enfin, si $\int_\Omega w\varphi = \theta < 0$ alors $\mu = \frac{w}{\theta}$ vérifie

$$\begin{cases} A\mu = \lambda_- \mu^+ - (t\lambda_+ + (1-t)\,\lambda_-)\,\mu^-, \\ \int_\Omega \mu\varphi = 1 \end{cases}$$

et d'après la proposition 3.6

$$\mathcal{C}\,(\lambda_-, t\lambda_+ + (1-t)\,\lambda_-) = 0,$$

contradiction avec le fait que

$$\mathcal{C}\,(\lambda_-, t\lambda_+ + (1-t)\,\lambda_-) \geq \mathcal{C}\,(\lambda_-, \lambda_+) = \mathcal{C}_- > 0.$$

Un argument similaire peut être utilisé dans le cas où $\mathcal{C}_+ < 0$ et $\mathcal{C}_- < 0$. ■

Proposition 3.11 *On suppose $C_+ > 0$ (resp. $C_- < 0$) et $h_0 \in \left(\varphi^\perp\right)^2$ tel que pour tout $h \in \left(L^2\,(\Omega)\right)^2$, $\mathcal{P}h = h_0$. Alors il existe $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ tel que si $\int_\Omega h\varphi > \gamma_2$ et pour tout $t \in [0,1]$, (3.1) n'admet pas de solution (u,v) avec $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi = 0$.*

(En changeant le sens des inégalités, on obtient un résultat similaire si $C_+ < 0$ (resp. $C_- > 0$)).

Preuve. Supposons que la proposition est fausse. Alors il existe $h_n = (h_{1,n}, h_{2,n}) \in \left(L^2\,(\Omega)\right)^2, Ph_n = h_0 = (h_{1,0}, h_{2,0})$ et $\int_\Omega h_n\varphi > n$ et il existe $t_n \in [0,1]$, $(u_n, v_n) \in U$ tels que

$$\begin{cases} Au_n = t_n f\,(x, u_n, v_n) + (1-t_n)\,\lambda_- u_n + h_{1,n}\,(x)\,, \\ Av_n = t_n g\,(x, u_n, v_n) + (1-t_n)\,\lambda_- v_n + h_{2,n}\,(x)\,, \end{cases} \tag{3.13}$$

avec

$$\int_\Omega u_n\varphi = \int_\Omega v_n\varphi = 0.$$

En multipliant les équations de (3.13) par φ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\begin{cases} t_n \int_\Omega f(x, u_n, v_n)\varphi + h_{1,n}(x)\varphi = 0, \\ t_n \int_\Omega g(x, u_n, v_n)\varphi + h_{2,n}(x)\varphi = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -t_n \int_\Omega f(x, u_n, v_n)\varphi \geq n, \\ -t_n \int_\Omega g(x, u_n, v_n)\varphi \geq n. \end{cases}$$

D'aprés (3.2), on a

$$\begin{cases} \|f(x, u_n, v_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C' \|(u_n, v_n)\|_U, \\ \|g(x, u_n, v_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C'' \|(u_n, v_n)\|_U, \end{cases} \tag{3.14}$$

pour certaines constantes positives C' et C''. Donc

$$\|(u_n, v_n)\|_U \geq \max(C', C'') \tfrac{n}{t_n}$$

et on déduit que

$$\|(u_n, v_n)\|_U \longrightarrow +\infty \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On pose

$$w_n = (w_{1,n}, w_{2,n}) = \left(\tfrac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}, \tfrac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \right),$$

alors

$$\begin{cases} Aw_{1,n} = \tfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} \left[t_n f(x, u_n, v_n) + (1 - t_n)\lambda_- u_n + h_{1,n}(x) \right], \\ Aw_{2,n} = \tfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} \left[t_n g(x, u_n, v_n) + (1 - t_n)\lambda_- v_n + h_{2,n}(x) \right]. \end{cases}$$

Comme $(u_n, v_n) \in \left(\varphi^\perp\right)^2$, on a $(w_{1,n}, w_{2,n}) \in \left(\varphi^\perp\right)^2$ et dans ce cas

$$\begin{cases} Aw_{1,n} = \tfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} \left[t_n \mathcal{P} f(x, u_n, v_n) + (1 - t_n)\lambda_- u_n + h_{1,0}(x) \right], \\ Aw_{2,n} = \tfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} \left[t_n \mathcal{P} g(x, u_n, v_n) + (1 - t_n)\lambda_- v_n + h_{2,0}(x) \right]. \end{cases}$$

Le même raisonnement que celui utilisé dans la démonstration du Lemme 3.10 montre que

$$\begin{cases} w_n \longrightarrow w \text{ dans } V, \\ \text{et } Aw_n \longrightarrow t\mathcal{P}\left[\lambda_+ w^+ - \lambda_- w^-\right] + (1-t)\,\lambda_- w \text{ dans } V. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$w \in (D(A))^2 \text{ et } Aw = \mathcal{P}\left[(t\lambda_+ + (1-t)\,\lambda_-)\,w^+ - \lambda_- w^-\right],$$

et d'après la proposition 3.7, on déduit que $w = 0$, ce qui contredit $\|w\|_U = 1$. ■

Maintenant, on a le résultat suivant.

Lemme 3.12 *Si $C_+ > 0$ (resp. $C_- < 0$) alors pour tout $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$, il existe $R_3 > 0$ tel que pour tout $(t,u,v) \in [0,1] \times U$, si $(u,v) - \widetilde{H}(t,u,v) = 0$ avec $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi > 0$ (resp. $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi < 0$) alors*

$$\|(u,v)\|_U < R_3. \tag{3.15}$$

Preuve. Supposons que $C_+ > 0$ (un argument similaire peut être appliqué pour le cas $C_- < 0$). On suppose, par contradiction, que (3.15) n'est pas vrai. Donc on peut trouver une suite $(t_n, u_n, v_n) \in [0,1] \times U$ telle que

$$(u_n, v_n) - \widetilde{H}(t_n, u_n, v_n) = 0 \text{ avec } \int_\Omega u_n\varphi, \int_\Omega v_n\varphi > 0 \text{ et } \|(u_n, v_n)\|_U \geq n.$$

On pose

$$w_n = (w_{1,n}, w_{2,n}) = \left(\tfrac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}, \tfrac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\right).$$

On a montré précédemment que

$$\begin{cases} w_n \longrightarrow w \text{ dans } V, \\ Aw_n \longrightarrow (t\lambda_+ + (1-t)\,\lambda_-)\,w^+ - \lambda_- w^- \text{ dans } V \end{cases}$$

et comme l'opérateur A est fermé alors

$$w \in (D(A))^2, Aw = (t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-)w^+ - \lambda_- w^- \text{ et } w_n \longrightarrow w \text{ dans } (D(A))^2.$$

Donc

$$\|w\|_U = 1 \text{ et } \int_\Omega w\varphi \geq 0$$

et la contradiction est obtenue en appliquant un argument similaire à celui utilisé dans la dernière partie de la démonstration du lemme 3.10, ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.13 *Un raisonnement analogue peut être appliqué pour trouver une estimation a priori des solutions dans le cas où $C_+ < 0$ (resp. $C_- > 0$).*

3.3 Démonstration des résultats principaux

Preuve des théorèmes 3.1 **et** 3.4

Dans ce paragraphe, nous donnons la démonstration des théorèmes 3.1 et 3.4 simultanément. Soit

$$B(0,R) = \{(u,v) \in U : \|(u,v)\|_U < R\}$$

une boule de centre 0 et de rayon $R = \max(R_1, R_2)$, alors les degrés topologiques

$$\deg(H(t,\cdot,\cdot), B(0,R), 0) \text{ et } \deg\left(\widetilde{H}(t,\cdot,\cdot), B(0,R), 0\right)$$

sont constants pour tout $t \in [0,1]$. Donc, pour $t = 0$, on a

$$H(0,u,v) = \begin{pmatrix} H_1(0,u,v) \\ H_2(0,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\pm u + h_1 \\ \lambda_\pm v + h_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{H}(0,u,v) = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_1(0,u,v) \\ \\ \widetilde{H}_2(0,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- u + h_1 \\ \\ \lambda_- v + h_2 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, pour $t = 0$, le problème linéaire

$$\begin{cases} Au = \lambda_- u + h & \text{dans } \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution isolée unique et donc

$$\begin{aligned} \deg(H(0,u,v), B(0,R), 0) &= \deg\left(\widetilde{H}(0,u,v), B(0,R), 0\right) \\ &= \deg\left(Id - \lambda_\pm A^{-1}, B(0,R), A^{-1}h\right) \\ &= \deg\left(Id - \lambda_- A^{-1}, B(0,R), A^{-1}h\right) \\ &= \pm 1. \end{aligned}$$

D'après la propriété d'invariance homotopique (voir §1.5.2), on obtient

$$\begin{aligned} \deg(H(1,\cdot,\cdot), B(0,R), 0) &= \deg\left(\widetilde{H}(1,\cdot,\cdot), B(0,R), 0\right) \\ &= \deg(H(0,\cdot,\cdot), B(0,R), 0) \\ &= \deg\left(\widetilde{H}(0,\cdot,\cdot), B(0,R), 0\right) \\ &= \pm 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, le problème (2.2) admet au moins une solution non triviale, ce qui achève la preuve des deux théorèmes.

Preuve du théorème 3.5

Le théorème 3.5 est une conséquence directe des propositions données ci-aprés.

Proposition 3.14 *Supposons que $C_+ > 0$ (resp. $C_- < 0$). Pour tout $h_0 \in \left(\varphi^\perp\right)^2$, il existe $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ tel que si $Ph = h_0$ et $\int_\Omega h\varphi > \gamma_2$, alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution (u,v) satisfaisant $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi > 0$ (resp. $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi < 0$).*

Preuve. Soit $C_+ > 0$ et définissons l'ensemble

$$\mathcal{K} = \left\{(u,v) \in U; \int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi > 0 \text{ et } \|(u,v)\|_U < R_3\right\}.$$

Noter que les constantes R_3 et γ_2 sont données respectivement par le lemme 3.12 et la proposition 3.11.

Le degré topologique $\deg\left(\widetilde{H}(t,\cdot,\cdot),\mathcal{K},0\right)$ est constant pour tout $t \in [0,1]$ et en particulier

$$\deg\left(\widetilde{H}(1,\cdot,\cdot),\mathcal{K},0\right) = \deg\left(\widetilde{H}(0,\cdot,\cdot),\mathcal{K},0\right) = \pm 1.$$

En effet, $\widetilde{H}(0,\cdot,\cdot)$ correspond au problème

$$\begin{cases} Au = \lambda_- u + h_1 \quad \text{dans } \Omega, \\ Av = \lambda_- v + h_2 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

avec $\lambda_- < \lambda$ et la solution (u_*, v_*) de (3.16) satisfait

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda-\lambda_-}\int_\Omega u_*\varphi = \int_\Omega h_1\varphi > 0, \\ \frac{1}{\lambda-\lambda_-}\int_\Omega v_*\varphi = \int_\Omega h_2\varphi > 0, \end{cases}$$

ce qui implique que $(u_*, v_*) \in \mathcal{K}$. Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution (u,v) avec $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi > 0$. Un argument similaire peut être appliqué dans le cas où $C_- < 0$. ■

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on obtient les mêmes résultats quand $C_+ < 0$ ou $C_- > 0$.

Proposition 3.15 *Supposons que $C_+ < 0$ (resp. $C_- > 0$). Pour tout $h_0 \in \left(\varphi^\perp\right)^2$, il existe $\gamma_2' \in \mathbb{R}$ tel que si $Ph = h_0$ et $\int_\Omega h\varphi < \gamma_2'$, alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution (u,v) satisfaisant $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi > 0$ (resp. $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi < 0$).*

Preuve. La démonstration est similaire à celle de la proposition précédente. ■

Remarque 3.16 *Comme il a été mentionné plus haut, la démonstration du théorème* 3.5 *n'est en fait qu'une conséquence directe des propositions* 3.14 *et* 3.15*. En effet, par exemple pour* $h_0 \in \left(\varphi^{\perp}\right)^2$ *donné,* $h \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$ *et* $Ph = h_0$*, on sait d'aprés la proposition* 3.14 *que si* $C_+ > 0$ *et* $C_- < 0$*, il existe* $\gamma_2 \geq 0$ *tel que* $\int_\Omega h\varphi > \gamma_2$*, alors le problème* (3.1) *admet deux solutions* (u_1, v_1) *et* (u_2, v_2) *satisfaisant*

$$\begin{cases} \int_\Omega u_1\varphi, \int_\Omega v_1\varphi > 0, \\ \int_\Omega u_2\varphi, \int_\Omega v_2\varphi < 0. \end{cases}$$

Les autres cas peuvent être traité de la même manière.

Remarque 3.17 *Quand l'intervalle* $[\lambda_-, \lambda_+]$ *(ou* $[\lambda_+, \lambda_-]$*) ne contient pas des valeurs propres de* A*, par exemple* $\lambda < \lambda_-, \lambda_+ < \overline{\lambda}$*, alors on a*

$$\begin{cases} \mathcal{C}(\lambda_+, \lambda_-) < \mathcal{C}(\lambda, \lambda) = 0, \\ \mathcal{C}(\lambda_-, \lambda_+) < \mathcal{C}(\lambda, \lambda) = 0 \end{cases}$$

et le théorème 3.4 *montre que* (3.1) *admet au moins une solution.*

Chapitre 4

Absence de solutions non triviales pour des systèmes semi-linéaires en domaines non bornés

4.1 Formulation du problème

On considère le problème

$$\begin{cases} \lambda\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i\left(x\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) + f_1\left(x,u_1,...,u_m\right) = 0 \text{ in } \Omega, \\ \lambda\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i\left(x\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right) + f_2\left(x,u_1,...,u_m\right) = 0 \text{ in } \Omega, \\ \dots \\ \lambda\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i\left(x\right)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) + f_m\left(x,u_1,...,u_m\right) = 0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)$ et u_k $(k = 1, ..., m)$ sont dans $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfaisant

$$u_k(t,s) = 0, \;\; (t,s) \in \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D} \text{ (condition aux limites de Dirichlet)} \tag{4.2}$$

ou

$$\tfrac{\partial u_k(t,s)}{\partial n} = 0, \;\; (t,s) \in \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D} \text{ (condition aux limites de Neumann)} \tag{4.3}$$

ou

$$\left(u_k + \varepsilon \tfrac{\partial u_k}{\partial n}\right)(t,s) = 0, \;\; (t,s) \in \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D} \text{ (condition aux limites deRobin),} \tag{4.4}$$

avec ε un nombre réel positif. L'espace $\mathbb{R} \times \partial\mathcal{D}$ est la frontière de Ω et on a :

$$\partial\Omega = \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D} = \Gamma_{\alpha_1} \cup \Gamma_{\beta_1} \cup \Gamma_{\alpha_2} \cup \Gamma_{\beta_2} ... \cup \Gamma_{\alpha_n} \cup \Gamma_{\beta_n},$$

où

$$\Gamma_{\mu_s} = \{(t, x_1, ..., x_{s-1}, \mu_s, x_{s+1}, ... x_n), \; t \in \mathbb{R}, \; 1 \leq s \leq n\}.$$

On notera par $(t, x_1, ..., x_n)$ le point générique de Ω et par $n(t,s)$ la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point (t,s) ; $n(t,s) = (0, n_1(t,s), n_2(t,s), ..., n_n(t,s))$.

Nous montrons la non solvabilité du système semi-linéaire de type Gradient (4.1) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet, Neumann ou Robin. Plus précisément, en appliquant des identités de type Pohozaev, nous prouvons que la fonction

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k(t,x)|^2 \right) dx$$

est convexe dans $\mathbb{R}$, ce qui implique, d'aprés le Principe du Maximum, que toute solution $(u_1, ..., u_m)$ des problèmes $(4.1) - (4.2)$, $(4.1) - (4.3)$ et $(4.1) - (4.4)$ est triviale.

Hypothèses

♣ λ est un paramètre réel.

♣ Les fonctions $f_k : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = 1, ..., m)$ sont continues, localement Lipschitziennes et vérifient

$$f_k(x, 0, ..., 0) = 0 \text{ dans } \mathcal{D},$$

de sorte que $(u_1, ..., u_m) = 0$ soit une solution du système (4.1).

♣ Les fonctions $p_i : \overline{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ sont continues et satisfont

$$p_i(x) > 0 \text{ ou } < 0 \text{ dans } \mathcal{D}.$$

♣ Le système (4.1) est supposé de type Gradient, c'est-à-dire, il existe une fonction differentiable $H(x, u_1, ..., u_m)$ telle que

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = f_k \text{ et } H(x, 0, ..., 0) = 0 \text{ pour } x \in \mathcal{D}.$$

4.2 Identités Intégrales

L'identité de type Pohozaev, énoncée dans le théorème suivant, nous sera trés utile par la suite, dans les démontrations des résultats principaux (voir la section suivante).

Théorème 4.1 *Soit* $u_1, ..., u_m$ *dans* $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, *une solution du problème* $(4.1) - (4.4)$. *Alors, pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^2 \right) + H(x, u_1, ..., u_m) \right] dx$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^* = 0. \tag{4.5}$$

Preuve. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $\mathcal{K}$ définie par

$$\mathcal{K}(t) = \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^2 \right) + H(x, u_1, ..., u_m) \right] dx.$$

Les hypothèses sur u_k, f_k $(k = 1, ..., m)$ et p_i $(i = 1, ..., n)$ impliquent que $\mathcal{K}$ est absolument continue et donc différentiable sur $\mathbb{R}$; on a

$$\frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \left[\lambda \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial t} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial x_i} \right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial t} f_k(x, u_1, ..., u_m) \right] dx. \tag{4.6}$$

L'application du théorème de Fubini et une intégration par partie donnent

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial x_i} \right) (t, x)\, dx = - \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_k}{\partial t} \right] (t, x)\, dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) - p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^*.$$

En remplaçant dans (4.6), on trouve

$$\frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathcal{D}} \left[\lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + f_k(x, u_1, ..., u_m) \right] (t, x) \frac{\partial u_k}{\partial t} dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) - p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^*.$$

Ecrivons l'expression $u_k + \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Pour $k = 1, ..., m$

$$u_k + \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(u_k - \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial x}\right)\left(t, x_i^{\alpha_i}\right) = 0, \\ \left(u_k + \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial x}\right)\left(t, x_i^{\beta_i}\right) = 0, \\ t \in \mathbb{R}, \alpha_i < x_i < \beta_i, i = 1, ...n. \end{cases}$$

Alors, pour $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) \right.$$
$$\left. - p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^*$$
$$= \frac{-1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) \right.$$
$$\left. + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^*$$
$$= \frac{-1}{2\varepsilon} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) \right. \right.$$
$$\left. \left. + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^* \right).$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{K}(t) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) \right. \right.$$
$$\left. \left. + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^* \right) = 0.$$

En intégrant par rapport à la variable t, on obtient

$$\mathcal{K}(t) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) \right.$$
$$\left. + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^* = const$$

et du fait que $(u_1(t,x), ..., u_m(t,x)) \in \left(H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^m$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{K}(t) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) \right. \right.$$
$$\left. \left. + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^* \right) dt < \infty.$$

Par conséquent, la constante ne peut être que égale à 0, ce qui achève la preuve du théorème 4.1. ■

Dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, on a l'identité intègrale donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.2 *Soit* $u_1, ..., u_m$ *dans* $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, *une solution des problèmes* $(4.1) - (4.2)$ *ou* $(4.1) - (4.3)$. *Alors, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^2 \right) + H(x, u_1, ..., u_m) \right] dx = 0. \tag{4.7}$$

Preuve. Pour montrer (4.7), il suffit de vérifier que l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right) \right] dx_i^*$$

s'annule si

$$u_1(t,s) = u_2(t,s) = ... = u_m(t,s) = 0, \ \ (t,s) \in \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D} \tag{4.2}$$

ou

$$\frac{\partial u_1(t,s)}{\partial n} = \frac{\partial u_2(t,s)}{\partial n} = ... = \frac{\partial u_m(t,s)}{\partial n} = 0, \ \ (t,s) \in \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D}. \tag{4.3}$$

En effet, supposons que (4.2) est vérifié. Alors, il est bien connu que

$$\nabla u_k = \tfrac{\partial u_k}{\partial n} \cdot n, \text{ pour } k = 1, ..., m,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial t}(t,s) \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1}(t,s) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(t,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_1 \frac{\partial u_k}{\partial n}(t,s) \\ . \\ . \\ . \\ n_n \frac{\partial u_k}{\partial n}(t,s) \end{bmatrix}, \ \ (t,s) \in \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D}, \ k = 1, ..., m.$$

Par conséquent, pour $k = 1, ..., m$,

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}\left(t, x_i^{\alpha_i}\right) = \frac{\partial u_k}{\partial t}\left(t, x_i^{\beta_i}\right) = 0, \ i = 1, ..., n.$$

Maintenant, dans le cas de condition aux limites de Neumann (4.3), on a, pour $k = 1, ..., m$,

$$0 = \frac{\partial u_k}{\partial n}(t, s) = \langle \nabla u_k, n \rangle \text{ sur } \Gamma_{\alpha_1} \cup \Gamma_{\beta_1} \cup \Gamma_{\alpha_2} \cup \Gamma_{\beta_2} ... \cup \Gamma_{\alpha_n} \cup \Gamma_{\beta_n},$$

autrement dit,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t, x_i^{\alpha_i}) = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\left(t, x_i^{\beta_i}\right) = 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n,\ k = 1, ..., m.$$

Finalement, dans les deux cas, on obtient

$$\frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} = 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et on conclut comme dans la preuve du Théorème 4.1. ■

4.3 Théorèmes de non existence

Avant d'énoncer les résultats principaux de cette section, on peut remarquer que le paramètre λ joue, en fait, un rôle important car il permet au système (4.1) d'être traité de deux manières différentes, selon que sa valeur soit positive ou négative. En effet, si λ est positif (resp. négatif), le système (4.1) est un problème hyperbolique (resp. elliptique).

4.3.1 Le cas hyperbolique

En utilisant l'identité (4.5), on obtient le résultat ci-après :

Théorème 4.3 *Soient $\lambda > 0$ et $u_1, ..., u_m \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. On suppose que $p_i(x) > 0$ dans $\mathcal{D}$ $(i = 1, ..., n)$ et f_k $(k = 1, ..., m)$ satisfaisant*

$$H(x, u_1, ..., u_m) \geq 0.$$

Alors, les problèmes $(4.1)-(4.2)$, $(4.1)-(4.3)$ *et* $(4.1)-(4.4)$ *n'ont pas de solutions non triviales.*

Preuve. *En appliquant la formule* (4.5) *(resp.* (4.7)*), on obtient immédiatement*

$$\tfrac{\partial u_k}{\partial t}(t,x)=\tfrac{\partial u_k}{\partial x_i}(t,x)=0 \text{ dans } \Omega,\ i=1,...,n,\ k=1,...,m,$$

ce qui implique que $u_1,...,u_m$ *sont des constantes. Or pour tout* $k=1,...,m$,

$$\textstyle\int_\Omega |u_k(t,x)|^2\,dxdt\leq 0,$$

alors ces constantes sont forcément nulles. ■

Le théorème qui suit donne un résultat de non existence quand les fonctions f_k $(k=1,...,m)$ satisfont un autre type de non linéarité.

Théorème 4.4 *Soient* $\lambda>0$ *et* $u_1,...,u_m:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ *une solution du problème* $(4.1)-(4.4)$. *On suppose que* $u_1,...,u_m\in H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ *et* f_k $(k=1,...,m)$ *vérifient la condition suivante*

$$2H(x,u_1,...,u_m)-\sum_{k=1}^m u_kf_k(x,u_1,...,u_m)\geq 0. \tag{4.8}$$

Alors, le problème $(4.1)-(4.4)$ *n'admet que la solution triviale.*

Remarque 4.5 *Comme* $u_1,...,u_m$ *sont bornés dans* Ω, *alors d'après le Principe du Maximum, la fonction* $\mathcal{E}(t)$ *convexe dans* $\mathbb{R}$ *implique que la solution du problème* $(4.1)-(4.4)$ *est identiquement égale à zéro.*

Preuve du théorème 4.4**.** Il est aisé de montrer que

$$\left(u_k\frac{\partial^2u_k}{\partial t^2}\right)(t,x)=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(u_k^2\right)}{\partial t^2}-\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x),\ k=1,...,m.$$

En multipliant la k-éme équation de (4.1) par $\frac{u_k}{2}$ et en intégrant sur $\mathcal{D}$, on obtient

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \frac{u_k}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_i\left(x\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \frac{u_k}{2} + f_k\left(x, u_1, ..., u_m\right) \frac{u_k}{2}\right](t, x)\, dx$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{\lambda}{4} \frac{\partial^2 \left(u_k^2\right)}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{2} \left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right](t, x)\, dx \tag{4.9}$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} \left[- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_i\left(x\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \frac{u_k}{2} + f\left(x, u_1, ..., u_m\right) \frac{u_k}{2}\right](t, x)\, dx.$$

Transformons

$$\int_{\mathcal{D}} \left(- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_i\left(x\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \frac{u_k}{2}\right)(t, x)\, dx$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} \left|\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \left(t, x_i^{\beta_i}\right) - p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \left(t, x_i^{\alpha_i}\right)\right] dx_i^*.$$

La substitution de cette formule dans (4.9) donne

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \frac{u_k}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_i\left(x\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \frac{u_k}{2} + f\left(x, u_1, ..., u_m\right) \frac{u_k}{2}\right](t,x)\, dx$$

$$\begin{aligned} = & \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\lambda}{4} \frac{\partial^2 \left(u_k^2\right)}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{2} \left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\, dx \\ & + \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} \left|\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{u_k}{2} f\left(x, u_1, ..., u_m\right)\right)(t,x)\, dx \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(t, x_i^{\beta_i}\right) - p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(t, x_i^{\alpha_i}\right)\right] dx_i^* \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} = & \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\lambda}{4} \frac{\partial^2 \left(u_k^2\right)}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{2} \left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\, dx \\ & + \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} \left|\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{u_k}{2} f\left(x, u_1, ..., u_m\right)\right)(t,x)\, dx \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left|u_k\left(t, x_i^{\beta_i}\right)\right|^2 + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left|u_k\left(t, x_i^{\alpha_i}\right)\right|^2\right] dx_i^*. \end{aligned}$$

En additionnant ces identitées pour $k = 1, ..., m$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{4} \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2\left(u_k^2\right)}{\partial t^2}\right)(t,x)\, dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\, dx \\ & + \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^2\right)(t,x)\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k=1}^{m} u_k f_k\left(x, u_1, ..., u_m\right)\right)(t,x)\, dx \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \left|u_k\right|^2\right)\left(t, x_i^{\beta_i}\right)\right. \\ & \qquad \left. + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \left|u_k\right|^2\right)\left(t, x_i^{\alpha_i}\right)\right] dx_i^* = 0, \end{aligned}$$

et la combinaison avec (4.5) donne

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4} \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k=1}^{m} u_k^2\right)(t,x)\, dx\right) = & \lambda \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\, dx \\ & + \int_{\mathcal{D}} \left[H\left(x, u_1, ..., u_m\right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} u_k f_k\left(x, u_1, ..., u_m\right)\right)(t,x,y)\right] dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Les hypothèses (4.8) et $\lambda > 0$ permettent de conclure que

$$\frac{\lambda}{4}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}u_k^2\right)(t,x)\,dx\right) \geq \lambda\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\,dx \geq 0, \text{ pour tout } t\in\mathbb{R}.$$

■

Théorème 4.6 *Soient $\lambda > 0$ et f_k $(k = 1, ..., m)$ telles qu'elle sont décrites dans le Théorème 4.4. On suppose que $u_1, ..., u_m \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une solution de $(4.1) - (4.2)$ ou $(4.1) - (4.3)$. Alors les problèmes $(4.1) - (4.2)$ et $(4.1) - (4.3)$ n'ont que la solution nulle.*

Preuve. En utilisant des arguments analogues à ceux du Théorème 4.4, on obtient

$$\frac{\lambda}{4}\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2(u_k^2)}{\partial t^2}\right)(t,x)\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\,dx$$

$$+\int_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i(x)}{2}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^2\right)(t,x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}u_k f_k(x,u_1,...,u_m)\right)(t,x)\,dx$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{D}_i^*}\left[p_i\left(x_i^{\beta_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\right)\left(t,x_i^{\beta_i}\right) + p_i\left(x_i^{\alpha_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\right)\left(t,x_i^{\alpha_i}\right)\right]dx_i^* = 0.$$

Si

$$u_1(t,s) = ... = u_m(t,s) = 0, \quad (t,s)\in\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D}$$

ou

$$\frac{\partial u_1(t,s)}{\partial n} = ... = \frac{\partial u_m(t,s)}{\partial n} = 0, \quad (t,s)\in\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D},$$

cette formule est réduite à

$$\frac{\lambda}{4}\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2\left(u_k^2\right)}{\partial t^2}\right)(t,x)\,dx-\frac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\,dx$$

$$+\int_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i(x)}{2}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^2\right)(t,x)\,dx+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}u_kf_k\left(x,u_1,...,u_m\right)\right)(t,x)\,dx=0.$$

Maintenant, on peut utiliser (4.7) pour écrire cette identité sous la forme suivante

$$\frac{\lambda}{4}\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2\left(u_k^2\right)}{\partial t^2}\right)(t,x)\,dx=\lambda\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\,dx$$
$$+\int_{\mathcal{D}}\left[H\left(x,u_1,...,u_m\right)-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{m}u_kf_k\left(x,u_1,...,u_m\right)\right)(t,x,y)\right]dx \tag{4.12}$$

et la conclusion est similaire à celle du Théorème 4.4. ■

4.3.2 Le cas elliptique

Nous allons montrer que le résultat dual est aussi vérifié pour $\lambda<0$.

Théorème 4.7 *Soient* $(u_1,...,u_m)\in\left(H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\right)^m$ *une solution de* $(4.1)-(4.4)$, $\lambda<0$ *et* f_k $(k=1,...,m)$ *satisfaisant*

$$2H\left(x,u_1,...,u_m\right)-\sum_{k=1}^{m}u_kf_k\left(x,u_1,...,u_m\right)\leq 0. \tag{4.13}$$

Alors le problème $(4.1)-(4.4)$ *n'admet que la solution triviale.*

Preuve. La formule (4.11) combinée avec l'hypothèse (4.13) donnent

$$\frac{\lambda}{4}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}u_k^2\right)(t,x)\,dx\right)\leq\lambda\int_{\mathcal{D}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|^2\right)(t,x)\,dx,\ \text{pour tout } t\in\mathbb{R}$$

et le résultat en découle du fait que $\lambda<0$. ■

Théorème 4.8 *Soient $\lambda < 0$ et f_k $(k = 1, ..., m)$ telles qu'elle sont décrites dans le Théorème 4.7. On suppose que*

$$u_1, ..., u_m \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

est une solution de $(4.1) - (4.2)$ ou $(4.1) - (4.3)$. Alors les problèmes $(4.1) - (4.2)$ et $(4.1) - (4.3)$ n'admettent que la solution nulle.

Preuve. Le résultat dérive de (4.12) et (4.13) avec $\lambda < 0$. ■

4.4 Exemples

Dans ce paragraphe, nous illustrons nos résultats théoriques obtenus par quelques exemples.

Example 4.9 *Soient $\theta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, les exposants $\alpha_s > 0$, $s = 1, ..., m$ et*

$$p_i(x) > 0 \text{ ou } < 0 \text{ dans } \mathcal{D},\ i = 1, ..., n.$$

Alors le système (4.1) avec

$$f_k(x, u_1, ..., u_m) = \theta(x) \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{m} \frac{1}{\alpha_s + 1} |u_s|^{\alpha_s + 1} \right] |u_k|^{\alpha_k - 1} u_k,\ k = 1, ..., m$$

sous des conditions aux limites de Dirichlet, de Neumann ou de Robin, n'a pas de solutions non triviales.

En effet, si

$$\lambda > 0 \text{ et } p_i, \theta > 0 \text{ dans } \mathcal{D}, (i = 1, ..., n),$$

on a

$$H(x,u_1,...,u_m)=\theta(x)\left[\prod_{s=1}^{m}\frac{1}{\alpha_s+1}|u_s|^{\alpha_s+1}\right]$$

et le Théorème 4.3 *nous donne le résultat désiré.*

Maintenant, si $\lambda>0$ *(resp.*$\lambda<0$*),* $\theta(x)\leq 0$ *(resp.* $\theta(x)\geq 0$*) dans* $\mathcal{D}$ *et*

$$p_i(x)>0 \text{ ou } <0 \text{ dans } \mathcal{D},\ i=1,...,n.$$

on a

$$\begin{aligned}2H(x,u_1,...,u_{k_0})&-\sum_{k=1}^{m}u_kf_k(x,u_1,...,u_m)\\&=\theta(x)\frac{2-\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k+1)}{\prod_{k=1}^{m}(\alpha_k+1)}\prod_{k=1}^{m}|u_k|^{\alpha_k+1}\leq 0\quad (\text{resp.} \geq 0)\end{aligned}$$

et la conclusion vient en utilisant le Théorème 4.4 *ou le Théorème* 4.5 *(resp. le Théorème* 4.7 *ou le Théorème* 4.8*) suivant que le système soit soumis à des conditions aux limites de Robin, Neumann ou Dirichlet.*

Example 4.10 *On considère le système* (4.1) *avec* $m=2$ *et*

$$\begin{cases} f_1(x,u_1,u_2)=\rho(x)\,u_2\left(|u_1|^{\alpha-1}u_1+\frac{1}{\beta+1}|u_2|^{\beta-1}u_2\right),\\ f_2(x,u_1,u_2)=\rho(x)\,u_1\left(\frac{1}{\alpha+1}|u_1|^{\alpha-1}u_1+|u_2|^{\beta-1}u_2\right),\end{cases}$$

où la fonction continue $\rho(x)$ *est positive (resp. négative) et* α,β *sont des nombre réels positifs. Alors ce problème n'a pas de solutions non triviales.*

En effet, il suffit de remarquer que

$$H(x,u_1,u_2)=\rho(x)\left(u_2\frac{|u_1|^{\alpha+1}}{\alpha+1}+u_1\frac{|u_2|^{\beta+1}}{\beta+1}\right)$$

et des calculs simples donnent

$$\begin{aligned}&2H(x,u_1,u_2)-u_1f_1(x,u_1,u_2)-u_2f_2(x,u_1,u_2)\\&\quad=\rho(x)\left[\left(\tfrac{1}{\alpha+1}-1\right)|u_1|^{\alpha+1}u_2+\left(\tfrac{1}{\beta+1}-1\right)|u_2|^{\beta+1}u_1\right]\leq 0\ (\text{resp.} \geq 0).\end{aligned}$$

La conclusion est la même que celle de l'exemple précédent.

L'exemple suivant concerne le cas scalaire ($m = 1$).

Example 4.11 *Soient*

$$\theta_1, \theta_2 : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R},$$

deux fonctions continues et non négatives, $p, q \geq 1$ *et*

$$f(x,u) = \delta u + \theta_1(x)\,|u|^{p-1}\,u + \theta_2(x)\,|u|^{q-1}\,u,$$

où δ *est une constante réelle. Alors le problème suivant*

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u}{\partial y_i}) + f(x,u) = 0 \ \text{dans } \Omega, \\ u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.14}$$

n'a pas de solutions non triviales.

Des calculs simples donnent

$$\begin{aligned} &2H(x,u) - uf(x,u) \\ &\quad = \theta_1(x)\,(\tfrac{2}{p+1} - 1)\,|u|^{p+1} + \theta_2(x)\,(\tfrac{2}{q+1} - 1)\,|u|^{q+1} \leq 0, \end{aligned}$$

et une application du Théorème 4.7 *donne le résultat désiré.*

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev spaces, *Academic Press, New York / San Francisco / London*, 1975.

[2] C. O. Alves and D. G. de Figueiredo, Nonvariational elliptic systems, *Disc. and cont. dynamical syst.* Volume 8, Number 2, April 2002, 289-302.

[3] C. O Alves, J. V. Goncales and L. A. Maia, Singular nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, *Abstract and Applied Analysis* **03** (1998), 411-423.

[4] P. Amster, P. De Napoli and M. C. Mariani, Existence of solutions for elliptic systems with critical Sobolev exponent, *Elect. Journal of Diff. Eqts* **49** (2002), 1-13.

[5] L. Boccardo and D. G. de Figueiredo, Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations, *Nonlinear differ. equ. appl.* 9 (2002), 309-323.

[6] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications, *Masson, Paris*, 1983.

[7] Y. S. Choi and P. J. McKenna, A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* **17** (2000), 503-522.

[8] Y. S. Choi and P. J. McKenna, A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations : the classical case, *Nonlinear Anal.* **55** (2003), 521-541.

[9] N. M. Chuong and T. D. Ke, Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system, *Elect. Journal of Diff. Eqts* **93** (2004), 1-15.

[10] F. Cîstea, D. Montreanu and V. Radulescu, Weak solutions of quasilinear problems with nonlinear boundary condition, Nonlinear Anal, 43 (2001), 623-636.

[11] Ph. Clément, D. G. de Figueiredo and E. Mitidieri, Positive solutions of semilinear elliptic systems, *comm. Partial Differential Equations* 17 (1992), 923-940.

[12] K. Deimling, Nonlinear functional analysis, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg,* 1985.

[13] M. Del Pino, M. Kowalczyk and X. Chen, The Gierer-Meinhardt system : the breaking of homoclinics and multi-bump ground states, *Commun. Contemp. Math.* **3** (2001), 419-439.

[14] M. Del Pino, M. Kowalczyk and J. Wei, Multi-bump ground states of the Gierer-Meinhardt system in $\mathbb{R}^2$, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* **20** (2003), 53-85.

[15] M. J. Esteban and P. L. Lions, Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Proceeding of Royal Society of Edinburgh,* Section A **93** (1982-1983).

[16] D. G. de Figueiredo, Semilinear elliptic systems, *Lectures at the international School on Nonlinear differential Equations*, *Trieste-Italy*, October 2006.

[17] D. G. de Figueiredo, B. Ruf, Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth, *Med. J. Math.* Vol.1 (2004), 417-431.

[18] D. G. de Figueiredo, J. Yang, A priori bounds for positive solutions of a non-variational elliptic systems, *Comm.PDE*, Vol. 23, no. 11&12 (2001), 2305-2322.

[19] T. Gallouët, O. Kavian, Résultat d'existence et de non-existence pour certains problèmes demi-linéaires à l'infini, *Ann. fac. Sci. Toulouse,* Vol. 3, No. 3&4 (1981), 201-246.

[20] M. Ghergu and V. Radulescu, On a class of Gierer-Meinhardt systems arising in morphogenesis, *C. R.Acad.Sci. Paris*, *Ser.I* **344** (2007).

[21] A. Gierer and H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, *Kybernetik* **12** (1972), 30-39.

[22] A. Haraux and B. Khodja, Caractère trivial de la solution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires dans des ouverts cylindriques de $\mathbb{R}^N$, *Portugaliae Mathematica* **42** (1982), 209-219.

[23] B. Khodja and A. Moussaoui, Nonexistence results for semilinear systems in unbounded domains, *Electronic J. Diff. Eqts.* **02** (2009), 1-11.

[24] B. Khodja, A nonexistence result for a nonlinear PDE with Robin condition, *International Journal of Math. and math. Sciences* (2006), 1-12.

[25] B. Khodja, Nonexistence of solutions for semilinear equations and systems in cylindrical domains, *Comm. on Applied Nonlinear Analysis* **7** (2000), 19-30.

[26] E. H. Kim, A class of singular Gierer-Meinhardt systems of elliptic boundary value problems, *Nonlinear Anal.* **59** (2004), 305-318.

[27] J. S. McGough, Nonexistence and uniqueness in semilinear elliptic systems, *Diff. Eqts and Dynamical Syst.* **4 (**1996), 157-176.

[28] H. Meinhardt and A. Gierer, Generation and regeneration of sequence of structures during morphogenesis, *J. Theoret. Biol.* **85** (1980), 429-450.

[29] Y. Miyamoto, An instability criterion for activator-inhibitor systems in a two-dimensional ball, *J. Differential Equations* **229** (2006), 494-508.

[30] A. Moussaoui and B. Khodja, Existence results for a class of semilinear elliptic systems, *J. Partial Diff. Eqts.* **22** (2009), 111-126.637-644.

[31] A. Moussaoui, B. Khodja and S. Tas, A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Anal.* **71** (2009), 708-716.

[32] Y. Naito, Nonexistence results of positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, *Journal Math. Society Japan* **52** (2000),

[33] W.-M. Ni, K. Suzuki and I. Takagi, The dynamics of a kynetics activato-inhibitor system, *J. Differential Equations* **229** (2006), 426-46

[34] W. M. Ni and I. Takagi, On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), 819-851.

[35] W. M. Ni and I. Takagi, Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, *Duke Math. J.* **70** (1993), 247-281.

[36] W. M. Ni and J. Wei, On positive solutions concentrating on spheres for the Gierer-Meinhardt system, *J. Differential Equations* **221** (2006), 158-189.

[37] S. I. Pohozaev, Eingenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda u = 0$, *Soviet Mathematics Doklady* **6** (1965), 1408-1411.

[38] A. Ponce, Calculus of variations ans optimization, *Lectures at the International School on Nonlinear Differential Equations*, *Trieste-Italy*, October 2006.

[39] M. Schechter, The Fucik spectrum, *Indiana Univ. Math. J.*, **43** (1994), 1139-1157.

[40] A. M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, *Phil. Trans. Roy. Soc. B* **2377** (1952), 37-72.

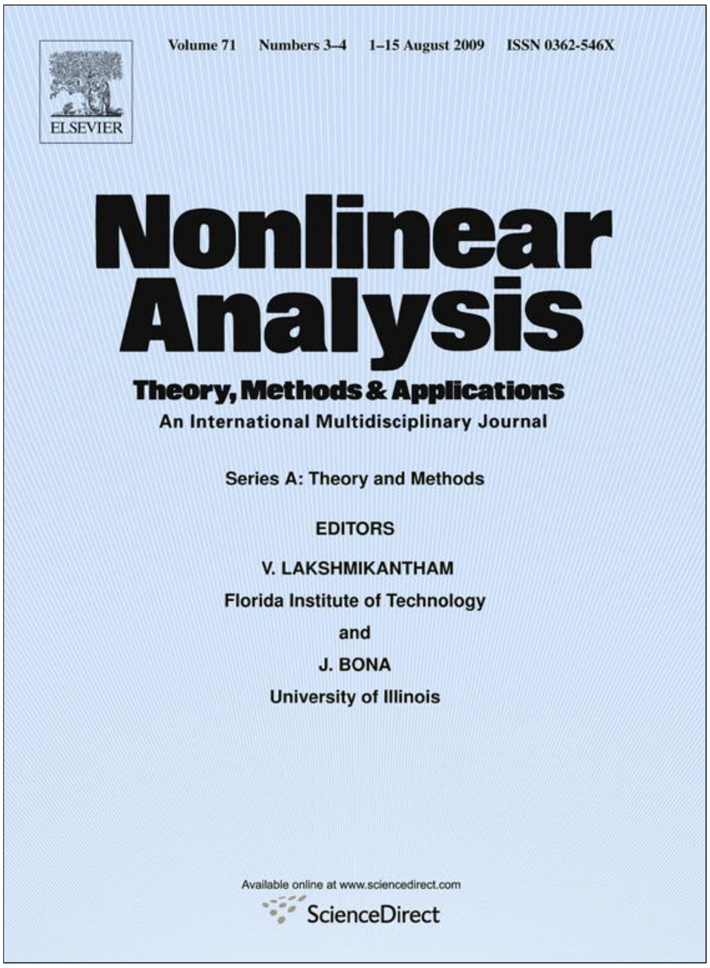
[41] J. Wei, On the interior spike layer solutions for some singular perturbation problems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh section A* **128** (1998), 849-874.

[42] J. Wei and M. Winter, Existence and stability analysis of asymmetric for the Gierer-Meinhardt system, *J. Math. Pures Appl.* **83** (2004), 433-476.

[43] J. Wei and M. Winter, Spikes for the Gierer-Meinhardt system in two dimensions : the strong coupling case, *J. Differential Equations* **178** (2004), 478-518.

[44] E. Yanagida, Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure, *J. Differential Equations* **179** (2002), 311-335.

Articles publiés


Volume 71 Numbers 3–4 1–15 August 2009 ISSN 0362-546X
ELSEVIER
Nonlinear Analysis
Theory, Methods & Applications
An International Multidisciplinary Journal
Series A: Theory and Methods
EDITORS
V. LAKSHMIKANTHAM
Florida Institute of Technology
and
J. BONA
University of Illinois
Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect

Nonlinear Analysis 71 (2009) 708–716

Contents lists available at ScienceDirect

Nonlinear Analysis

journal homepage: www.elsevier.com/locate/na

A singular Gierer–Meinhardt system of elliptic equations in $\mathbb{R}^N$

Abdelkrim Moussaoui [a,*], Brahim Khodja [b], Saadia Tas [a]

[a] Department of Mathematics, A. Mira Bejaia University, 06000 Bejaia, Algeria

[b] Department of Mathematics, Badji Mokhtar Annaba University, B.P.12, 23000 Annaba, Algeria

ARTICLE INFO

Article history:
Received 18 June 2008
Accepted 31 October 2008

MSC:
primary 35J55
secondary 35J65

Keywords:
Gierer–Meinhardt
Elliptic system
Singular
Schauder fixed point

ABSTRACT

In this paper, we study the existence and uniqueness of solution of the singular Gierer–Meinhardt system

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x)\, u = h_1(x)\, \dfrac{1}{v^q} \\ -\Delta v + \beta(x)\, v = h_2(x)\, \dfrac{u^r}{v^s} \\ u(x),\, v(x) \longrightarrow 0 \text{ as } |x| \longrightarrow \infty \\ u,\, v > 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$, where α, β, h_1, h_2 are given, not necessarily continuous functions, $s \in \,]0, 1[$ and $q, r > 0$ such that $r - s \leq 1$. We establish the existence of the solution using Schauder's fixed point theorem.

1. Introduction

The nonlinear Gierer–Meinhardt systems have received considerable attention in the last decade. They arise in the study of biological pattern formation by auto and cross catalysis in biochemical processes. Gierer–Meinhardt equations model the interaction between activators and inhibitors. If the activators, $u(x, t)$, have a source distribution $\rho(x)$ and the inhibitors, $v(x, t)$, have a source distribution $\rho'(x)$, and assuming that both act proportionally to some powers of u and v in the source term, the general model proposed by Gierer–Meinhardt [7,9] may be written as

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u - \alpha u + c\rho \dfrac{u^k}{v^q} + \rho_0 \rho & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ v_t = d_2 \Delta v - \beta v + c'\rho' \dfrac{u^r}{v^s} & \text{in } \Omega \times [0, T], \end{cases} \tag{1.1}$$

under Neumann boundary conditions. Here Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, d_1, d_2 are diffusion coefficients with $d_1 \ll d_2$ and α, β, c, c' and ρ_0 are positive constants. The exponents $k, q, r, s \geq 0$ satisfy the relation $qr > (k-1)(s+1)$.

The study of the steady-states of (1.1) under Neumann boundary conditions has been thoroughly investigated in [10–15] and the references therein.

The system

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u + \dfrac{u^k}{v^q} + \rho(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ \Delta v - \beta v + \dfrac{u^r}{v^s} = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

* Corresponding author.
E-mail addresses: remdz@yahoo.fr (A. Moussaoui), bmkhodja@yahoo.fr (B. Khodja), tas_saadia@yahoo.fr (S. Tas).

0362-546X/$ – see front matter © 2008 Elsevier Ltd. All rights reserved.
doi:10.1016/j.na.2008.10.103

with Dirichlet boundary conditions was discussed in [2,3,8]. More recently, in [6], the study of (1.2) was extended to a wide class of nonlinearities.

The case $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2)$ was treated in [4,5] where it was shown that there are ground state solutions of (1.2) under Dirichlet boundary conditions with single or multiple bumps in the activator which, after a rescaling of u, present a universal-like profile.

In this paper, we are interested in examining the existence and uniqueness of solutions of the stationary elliptic system (1.2) where $\Omega = \mathbb{R}^N (N \geq 3)$, $\rho(x) = 0$, the exponent $k = 0$ while the nonnegative parameters α and β are both in $L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ and satisfy

$$\alpha(x) \geq \alpha_0, \qquad \beta(x) \geq \beta_0 \quad \text{for } |x| \geq \mathcal{R} \text{ for some } a_0, \beta_0, \mathcal{R} > 0. \tag{1.3}$$

In other words, we are concerned with the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = h_1(x) \dfrac{1}{v^q} \text{ in } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + \beta(x) v = h_2(x) \dfrac{u^r}{v^s} \quad \text{in } \mathbb{R}^N \\ u(x), \qquad v(x) \longrightarrow 0 \quad \text{as } |x| \longrightarrow \infty \\ u, v > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.4}$$

where $h_i \in L^2 \cap L^{\theta_i}, h_i \neq 0, i = 1, 2$ and $\theta_1 = \frac{2}{1+q}, \theta_2 = \frac{2}{1+s}$. We assume throughout this paper that the exponents $q, r > 0, s \in]0, 1[$ such that $r - s \leq 1$ and h_1, h_2 are nonnegative $L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ functions. Note that the ground states of the Gierer–Meinhardt system, for the asymptotic cases considered in the literature, are more delicate in nature than those considered here.

Our main result is formulated in the following theorem.

Theorem 1. *Under condition (1.3), system (1.4) has a unique solution*

$$u, v \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap W^{2,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right), \quad 1 < p < \infty,$$

with

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) u^2 \mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) v^2 \mathrm{d}x < \infty. \tag{1.5}$$

To prove this result, we shall apply to (1.4) the reasoning used by Alves et al. in [1] to demonstrate the uniqueness of the solution to the problem

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x) u = h(x) u^{-\gamma} \quad \text{in } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where γ is a positive number.

For $\varphi \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right), \varphi \geq 0$ and for $\varepsilon > 0$, let

$$\chi_\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{if } \varphi(x) \leq \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{if } \varphi(x) \geq \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} \tag{1.6}$$

and consider the regularized problem

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = h_1(x) \dfrac{1}{(v+\varepsilon)^q} \quad \text{in } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + \beta(x) v = h_2(x) \dfrac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s} \quad \text{in } \mathbb{R}^N \\ u(x), \qquad v(x) \longrightarrow 0 \quad \text{as } |x| \longrightarrow \infty \\ u, v > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.7}$$

Our demonstration strategy will be to show – by applying Schauder's fixed point theorem – that the regularized system (1.7) has a solution $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in W^{2,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right), 1 < p < \infty$, and then derive a solution of (1.4) by taking the limit $\varepsilon \longrightarrow 0$. It should be noted that the choice of the exponents q, r and s is crucial; the approach used here does not work for other sets of powers.

Theorem 2. *Under condition (1.3), system (1.7) has a solution*

$$u_\varepsilon, v_\varepsilon \in W^{2,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right), \quad 1 < p < \infty,$$

with

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) u_\varepsilon^2 \mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) v_\varepsilon^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

2. Preliminaries

Let us introduce the Sobolev space $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ defined as the completion of $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ with respect to the gradient norm $\|\varphi\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 \, dx$ and consider the linear system

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + \beta(x) v = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.1}$$

where f and g are in $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. Define the spaces

$$E^\alpha = \left\{ \varphi \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) : \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)\varphi^2 dx < \infty \right\}$$

and

$$E^\beta = \left\{ \varphi \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) : \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)\varphi^2 dx < \infty \right\},$$

which are Hilbert spaces endowed with the inner products

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\varphi\nabla\psi + \alpha(x)\varphi\psi\right) dx$$

and

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\beta = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\varphi\nabla\psi + \beta(x)\varphi\psi\right) dx,$$

respectively. The norm of E^α (resp. E^β) is defined by $\|\varphi\|_{E^\alpha}^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle_\alpha$ (resp. $\|\varphi\|_{E^\beta}^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle_\beta$) while the space $E^\alpha \times E^\beta$ has the norm

$$\|(\varphi, \psi)\| = \|\varphi\|_{E^\alpha} + \|\psi\|_{E^\beta},$$

which, under condition (1.3), is an equivalent norm in $\left(W^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$.

The Lax–Milgram theorem shows that the system of equations (2.1) has a unique weak solution (u, v) in $E^\alpha \times E^\beta$, that is

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u\nabla\varphi + \alpha(x) u\varphi\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi dx, & \varphi \in E^\alpha \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla v\nabla\psi + \beta(x) v\psi\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\psi dx, & \psi \in E^\beta. \end{cases} \tag{2.2}$$

The linear operator $\mathcal{S}$ associated with (2.1) satisfies

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} : L^2\left(\mathbb{R}^N\right) \times L^2\left(\mathbb{R}^N\right) & \longrightarrow & E^\alpha \times E^\beta \\ (f, g) & \longmapsto & \mathcal{S}(f, g) = (u, v), \end{array}$$

where (u, v) is the solution of system (2.1). $\mathcal{S}$ is well defined and has the property given in the next proposition.

Proposition 1. $\mathcal{S}(f, g) \geq 0$ *whenever* $f, g \geq 0$.

Proof. Splitting u, v into $u^+ - u^-$ and $v^+ - v^-$ where u^+, v^+ (resp. u^-, v^-) are the positive (resp. negative) parts of u and v, then setting $\varphi = -u^-$ and $\psi = -v^-$ into (2.2) yields the assertion. □

3. Existence result for a regularized system

Let $(u, v) \in \left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ with $u, v \geq 0$. Then from (1.6) and for all $\varepsilon > 0$, we have

$$\begin{cases} 0 \leq h_1(x) \dfrac{1}{(v+\varepsilon)^q} \leq \dfrac{h_1(x)}{\varepsilon^q} \\ 0 \leq h_2(x) \dfrac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s} \leq \dfrac{h_2(x)}{\varepsilon^{r+s}} \end{cases} \tag{3.1}$$

and

$$\frac{h_1(x)}{\varepsilon^q}, \frac{h_2(x)}{\varepsilon^{r+s}} \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Define the operator $\mathcal{T}$ by

$$\mathcal{T}(u, v) = \mathcal{S}\left[h_1(x)\frac{1}{(v+\varepsilon)^q}, h_2(x)\frac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s}\right] = (\varphi, \psi).$$

$\mathcal{T}$ is well defined and continuous in $\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$. Since a fixed point of $\mathcal{T}$ is a solution of (1.7), solving the regularized problem (1.7) is equivalent to solving the equation

$$(u, v) - \mathcal{T}(u, v) = 0, \qquad (u, v) \in \left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2.$$

Let us now take

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) = \mathcal{T}\left(\frac{1}{\varepsilon}, 0\right) = \mathcal{S}\left[\frac{h_1(x)}{\varepsilon^q}, \frac{h_2(x)}{\varepsilon^{r+s}}\right]$$

and consider the set

$$\mathcal{K} = \left\{(u, v) \in \left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2 : 0 \le u \le \omega_1, \quad 0 \le v \le \omega_2\right\}.$$

Lemma 1. *The set $\mathcal{K} \subset \left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ is closed, convex and bounded. Moreover $\mathcal{T}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ and $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{K})}$ is a compact subset of $\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$.*

Proof. It is easy to show that $\mathcal{K}$ is convex, closed and bounded. Let us prove that $\mathcal{T}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.
Take u, v in $\mathcal{K}$, then

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\left(\frac{1}{\varepsilon}, 0\right) - \mathcal{T}(u, v) &= \mathcal{S}\left[\frac{h_1(x)}{\varepsilon^q}, \frac{h_2(x)}{\varepsilon^{r+s}}\right] - \mathcal{S}\left[h_1(x)\frac{1}{(v+\varepsilon)^q}, h_2(x)\frac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s}\right] \\
&= \mathcal{S}\left[h_1(x)\left(\frac{1}{\varepsilon^q} - \frac{1}{(v+\varepsilon)^q}\right), h_2(x)\left(\frac{1}{\varepsilon^{r+s}} - \frac{(\chi_\varepsilon(u))^r}{(v+\varepsilon)^s}\right)\right] \\
&\ge 0,
\end{aligned}$$

that is, $\mathcal{T}(u, v) \le \omega$ and hence $\mathcal{T}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.
In order to show that $\overline{T(\mathcal{K})} \subset \left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$ is compact, let (φ_n, ψ_n) be a sequence in $\mathcal{T}(\mathcal{K})$ then there exists (u_n, v_n) in $\mathcal{K}$ such that $(\varphi_n, \psi_n) = \mathcal{T}(u_n, v_n)$. By (3.1),

$$h_1(x)\frac{1}{(v_n+\varepsilon)^q} \quad \text{and} \quad h_2(x)\frac{(\chi_\varepsilon(u_n))^r}{(v_n+\varepsilon)^s}$$

are bounded in $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$, so that

$$T(u_n, v_n) = \mathcal{S}\left[h_1(x)\frac{1}{(v_n+\varepsilon)^q}, h_2(x)\frac{(\chi_\varepsilon(u_n))^r}{(v_n+\varepsilon)^s}\right]$$

is bounded in $E^\alpha \times E^\beta$. Thus, passing to subsequences,

$$(\varphi_n, \psi_n) = \mathcal{T}(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \quad \text{for some } (u, v) \in E^\alpha \times E^\beta$$

and

$$(\varphi_n, \psi_n) \longrightarrow (u, v) \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

On the other hand, since

$$0 \le \varphi_n \le \omega_1 \quad \text{and} \quad 0 \le \psi_n \le \omega_2,$$

it follows, from the dominated convergence theorem, that

$$(\varphi_n, \psi_n) \longrightarrow (u, v) \quad \text{in } \left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2,$$

showing that $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{K})}$ is compact in $\left(L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2$. This completes the proof. $\square$

Proof of Theorem 2. Using Lemma 1 and Schauder's fixed point theorem, there exists $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{K}$ satisfying

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \mathcal{S}\left[h_1(x)\frac{1}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^q}, h_2(x)\frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon+\varepsilon)^s}\right],$$

that is

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_\varepsilon \nabla \varphi + \alpha(x) u_\varepsilon \varphi)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \frac{1}{(v_\varepsilon + \varepsilon)^q} \varphi \mathrm{d}x, & \varphi \in E^\alpha \\ \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_\varepsilon \nabla \psi + \beta(x) v_\varepsilon \psi)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon + \varepsilon)^s} \psi \mathrm{d}x, & \psi \in E^\beta \\ u_\varepsilon, v_\varepsilon \geq 0 \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N, \quad (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in E^\alpha \times E^\beta. \end{cases}$$

From (3.1) we have

$$h_1(x) \frac{1}{(v_\varepsilon + \varepsilon)^q}, h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon + \varepsilon)^s} \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

and the elliptic regularity theory gives

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \left(W^{2,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2, \quad 1 < p < \infty.$$

Let $\mathcal{B}$ denote the ball in $\mathbb{R}^N$, then

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \alpha(x) u_\varepsilon = h_1(x) \frac{1}{(v_\varepsilon + \varepsilon)^q} & \text{a.e. in } \mathcal{B} \\ -\Delta v_\varepsilon + \beta(x) v_\varepsilon = h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon + \varepsilon)^s} & \text{a.e. in } \mathcal{B}. \end{cases}$$

The maximum principle entails that $u_\varepsilon, v_\varepsilon > 0$ in $\mathcal{B}$, in which case

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \alpha(x) u_\varepsilon = h_1(x) \frac{1}{(v_\varepsilon + \varepsilon)^q} & \text{a.e. in } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v_\varepsilon + \beta(x) v_\varepsilon = h_2(x) \frac{(\chi_\varepsilon(u_\varepsilon))^r}{(v_\varepsilon + \varepsilon)^s} & \text{a.e. in } \mathbb{R}^N \\ u_\varepsilon, v_\varepsilon > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

This ends the proof of Theorem 2. □

The next result states that the family $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ increases when ε decreases.

Lemma 2. *If* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, *then*

$$u_{\varepsilon_2} \leq u_{\varepsilon_1} \quad \textit{and} \quad v_{\varepsilon_2} \leq v_{\varepsilon_1} \quad \textit{in } \mathbb{R}^N.$$

Proof. Let us show that $v_{\varepsilon_2} \leq v_{\varepsilon_1}$ in $\mathbb{R}^N$. To prove it by contradiction, we proceed with the proposition that

$$\max_{x \in \mathbb{R}^N} \left(v_{\varepsilon_2}(x) - v_{\varepsilon_1}(x)\right) = m > 0.$$

Assume that

$$\left(v_{\varepsilon_2}(x_0) - v_{\varepsilon_1}(x_0)\right) = m.$$

This implies that

$$v_{\varepsilon_2}(x_0) > v_{\varepsilon_1}(x_0) > 0, \qquad \nabla v_{\varepsilon_2}(x_0) = \nabla v_{\varepsilon_1}(x_0) \quad \text{and} \quad \Delta\left(v_{\varepsilon_2} - v_{\varepsilon_1}\right)(x_0) \leq 0.$$

Choosing

$$w_2 = v_{\varepsilon_2} - v_{\varepsilon_1}$$

yields

$$0 \leq -\Delta w_2(x_0) + \beta(x_0) w_2(x_0) = h_2(x_0) \left[\frac{\left(\chi_{\varepsilon_2}\left(u_{\varepsilon_2}(x_0)\right)\right)^r}{\left(v_{\varepsilon_2}(x_0) + \varepsilon_2\right)^s} - \frac{\left(\chi_{\varepsilon_1}\left(u_{\varepsilon_1}(x_0)\right)\right)^r}{\left(v_{\varepsilon_1}(x_0) + \varepsilon_1\right)^s} \right],$$

which means that

$$\frac{\left(\chi_{\varepsilon_2}\left(u_{\varepsilon_2}(x_0)\right)\right)^r}{\left(v_{\varepsilon_2}(x_0) + \varepsilon_2\right)^s} \geq \frac{\left(\chi_{\varepsilon_1}\left(u_{\varepsilon_1}(x_0)\right)\right)^r}{\left(v_{\varepsilon_1}(x_0) + \varepsilon_1\right)^s},$$

in which case

$$\chi_{\varepsilon_2}\left(u_{\varepsilon_2}(x_0)\right) > \chi_{\varepsilon_1}\left(u_{\varepsilon_1}(x_0)\right).$$

Now if

$$w_1 = \chi_{\varepsilon_2}\left(u_{\varepsilon_2}\right) - \chi_{\varepsilon_1}\left(u_{\varepsilon_1}\right),$$

then

$$-\Delta w_1(x_0) + \alpha(x_0) w_1(x_0) = h_1(x_0)\left[\frac{1}{\left(v_{\varepsilon_2}(x_0)+\varepsilon_2\right)^q} - \frac{1}{\left(v_{\varepsilon_1}(x_0)+\varepsilon_1\right)^q}\right] \le 0,$$

that is to say

$$-\Delta w_1(x_0) + \alpha(x_0) w_1(x_0) \le 0.$$

Hence

$$-\Delta w_1(x_0) \le 0$$

and, by the maximum principle, it follows that

$$\chi_{\varepsilon_2}\left(u_{\varepsilon_2}(x_0)\right) < \chi_{\varepsilon_1}\left(u_{\varepsilon_1}(x_0)\right),$$

which is a contradiction and therefore $v_{\varepsilon_2} \le v_{\varepsilon_1}$. A similar argument can be made to obtain $u_{\varepsilon_2} \le u_{\varepsilon_1}$. This completes the proof. □

4. Proof of the main result

Consider a decreasing sequence $\varepsilon_n > 0$ which converges to 0 and set $(u_n, v_n) = \left(u_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}\right)$. We get

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2_{E^\alpha} &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^2 + \alpha(x)|u_n|^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x)\frac{1}{(v_n+\varepsilon_n)^q} u_n \mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) v_n^{-q} u_n \mathrm{d}x \\
&\le C_1 |h_1|_{\theta_1} \|v_n\|^{-q}_{E^\beta} \|u_n\|_{E^\alpha}
\end{aligned}$$

and under the same assumption we also obtain

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{\varepsilon_n} v_n\right\|^2_{E^\beta} &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla\frac{v_n}{\varepsilon_n}\right|^2 + \beta(x)\left|\frac{v_n}{\varepsilon_n}\right|^2\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x)\frac{\left(\chi_{\varepsilon_n}(u_n)\right)^r}{\left(\frac{v_n}{\varepsilon_n}+\varepsilon_n\right)^s}\frac{v_n}{\varepsilon_n}\mathrm{d}x \\
&\le \varepsilon_n^{s-r-1}\int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) v_n^{1-s}\mathrm{d}x \\
&\le C_2\varepsilon_n^{s-r-1}|h_2|_{\theta_2}\|v_n\|^{1-s}_{E^\beta},
\end{aligned}$$

for some positive constants C_1 and C_2. One can then write

$$\|u_n\|_{E^\alpha} \le C_1 |h_1|_{\theta_1}\|v_n\|^{-q}_{E^\beta}$$

and

$$\|v_n\|^{s+1}_{E^\beta} \le C_2\varepsilon_0^{1-(r-s)}|h_2|_{\theta_2},$$

showing that u_n, v_n are bounded in $E^\alpha \times E^\beta$. Hence there exist subsequences (still denoted by u_n and v_n) such that

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \quad \text{in } E^\alpha \times E^\beta$$

and

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N.$$

On the other hand, since by Lemma 2

$$0 < u_1 < u_n \quad \text{and} \quad 0 < v_1 < v_n \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

if two functions (φ, ψ) in $E^{\alpha} \times E^{\beta}$ with a compact support are considered, then one can find some ball $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ such that

$$\operatorname{supp}(\varphi), \operatorname{supp}(\psi) \subset \mathcal{B}$$

and

$$\begin{cases} \left| h_1(x) \dfrac{1}{(v_n + \varepsilon_n)^q} \varphi \right| \le |h_1(x)| |\varphi| \dfrac{1}{v_n^q} \le H_1(x) \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N \\ \left| h_2(x) \dfrac{\left(\chi_{\varepsilon_n}(u_n)\right)^r}{(v_n + \varepsilon_n)^s} \psi \right| \le |h_2(x)| |\psi| \dfrac{u_n^r}{v_n^s} \le H_2(x) \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where $H_1(x), H_2(x)$ are some functions in $L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Then applying the dominated convergence theorem to

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla \varphi + \alpha(x) u_n \varphi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \frac{1}{(v_n + \varepsilon_n)^q} \varphi dx \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n \nabla \psi + \beta(x) v_n \psi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{\left(\chi_{\varepsilon_n}(u_n)\right)^r}{(v_n + \varepsilon_n)^s} \psi dx \end{cases}$$

we obtain

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha(x) u \varphi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \frac{1}{v^q} \varphi dx \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \psi + \beta(x) v \psi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{u^r}{v^s} \psi dx \\ u \ge u_1 > 0, v \ge v_1 > 0 \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

The regularity theory entails that

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + \alpha(x) u \varphi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \frac{1}{v^q} \varphi dx \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \psi + \beta(x) v \psi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) \frac{u^r}{v^s} \psi dx \\ u, v \in W^{2,p}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right), \quad 1 < p < \infty \\ u > 0, v > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

which proves the existence of a solution to system (1.4).

Now, let us show that this solution is unique. For this purpose, assume that (u_1, v_1), (u_2, v_2) are two solutions of (1.4) and let $\chi \in C_0^{\infty}$ be the function such that

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 \quad \text{if } |x| \le 1, \\ \chi(x) = 0 \quad \text{if } |x| \ge 2 \\ \text{and } 0 \le \chi(x) \le 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

For $(\varphi, \psi) \in E^{\alpha} \times E^{\beta}$, we define

$$\varphi_k(x) = \chi\left(\frac{x}{k}\right) \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

and

$$\psi_k(x) = \chi\left(\frac{x}{k}\right) \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where the integer $k \ge 1$. It follows, see [1], that $(\varphi_k(x), \psi_k(x)) \in E^{\alpha} \times E^{\beta}$, $\operatorname{supp}(\varphi_k)$ and $\operatorname{supp}(\psi_k)$ are compact and

$$(\varphi_k, \psi_k) \longrightarrow (\varphi, \psi) \quad \text{in } E^{\alpha} \times E^{\beta}. \tag{4.2}$$

Setting

$$\omega_1^k = u_1^k - u_2^k \quad \text{and} \quad \omega_2^k = v_1^k - v_2^k$$

yields

$$\begin{aligned} \left\langle u_1 - u_2, \omega_1^k \right\rangle_{\alpha} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla(u_1 - u_2) \nabla \omega_1^k + \alpha(x)(u_1 - u_2) \omega_1^k \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) \left(\frac{1}{v_1^q} - \frac{1}{v_2^q} \right) \omega_1^k dx \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left\langle v_1 - v_2, \omega_2^k \right\rangle_\beta &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla (v_1 - v_2) \nabla \omega_2^k + \beta (x) (v_1 - v_2) \omega_2^k \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h_2 (x) \left(\frac{u_1^r}{v_1^s} - \frac{u_2^r}{v_2^s} \right) \omega_2^k \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

To make a proof by contradiction, we assume that $u_1 \neq u_2$ and $v_1 \neq v_2$.
From (4.2)

$$\left\langle u_1 - u_2, \omega_1^k \right\rangle_\alpha \longrightarrow \|u_1 - u_2\|_{E_\alpha}^2$$

and

$$\left\langle v_1 - v_2, \omega_2^k \right\rangle_\beta \longrightarrow \|v_1 - v_2\|_{E_\beta}^2 .$$

Consequently

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_1 (x) \left(\frac{1}{v_1^q} - \frac{1}{v_2^q} \right) \omega_1^k \mathrm{d}x > 0 \tag{4.3}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_2 (x) \left(\frac{u_1^r}{v_1^s} - \frac{u_2^r}{v_2^s} \right) \omega_2^k \mathrm{d}x > 0, \tag{4.4}$$

for large values of k. On the other hand,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h_1 (x) \left(\frac{1}{v_1^q} - \frac{1}{v_2^q} \right) \omega_1^k \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} h_1 (x) \left(\frac{1}{v_1^q} - \frac{1}{v_2^q} \right) \left(u_1^k - u_2^k \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi \left(\frac{x}{k} \right) h_1 (x) \left(\frac{1}{v_1^q} - \frac{1}{v_2^q} \right) (u_1 - u_2) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\Omega_k} \frac{h_1 (x)}{v_1^q} u_1 + \int_{\Omega_k} \frac{h_1 (x)}{v_2^q} u_2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.5}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h_2 (x) \left(\frac{u_1^r}{v_1^s} - \frac{u_2^r}{v_2^s} \right) \omega_2^k &= \int_{\mathbb{R}^N} h_2 (x) \left(\frac{u_1^r}{v_1^s} - \frac{u_2^r}{v_2^s} \right) \left(v_1^k - v_2^k \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi \left(\frac{x}{k} \right) h_2 (x) \left(\frac{u_1^r}{v_1^s} - \frac{u_2^r}{v_2^s} \right) (v_1 - v_2) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\Omega_k} h_2 (x) u_1^r v_1^{1-s} + \int_{\Omega_k} h_2 (x) u_2^r v_2^{1-s} \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.6}$$

where $\Omega_k = \mathcal{B}_{2k} \setminus \mathcal{B}_k$. Clearly, at the $k \longrightarrow \infty$, limit, the integrals on the right-hand sides of (4.5) and (4.6) vanish and we get

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_1 (x) \left(\frac{1}{v_1^q} - \frac{1}{v_2^q} \right) \omega_1^k \mathrm{d}x \leq 0 \tag{4.7}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_2 (x) \left(\frac{u_1^r}{v_1^s} - \frac{u_2^r}{v_2^s} \right) \omega_2^k \mathrm{d}x \leq 0. \tag{4.8}$$

The inequalities (4.3), (4.4), (4.7) and (4.8) are logically contradictory, hence $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$, which ends the proof of Theorem 1.

Acknowledgement

The authors would like to express their gratitude to Prof. C. O. Alves for his valuable suggestions and comments.

References

[1] C.O Alves, J.V. Goncales, L.A. Maia, Singular nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Abstr. Appl. Anal. 03 (1998) 411–423.
[2] Y.S. Choi, P.J. McKenna, A singular Gierer–Meinhardt system of elliptic equations, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire 17 (2000) 503–522.
[3] Y.S. Choi, P.J. McKenna, A singular Gierer–Meinhardt system of elliptic equations: The classical case, Nonlinear Anal. 55 (2003) 521–541.
[4] M. Del Pino, M. Kowalczyk, X. Chen, The Gierer–Meinhardt system: The breaking of homoclinics and multi-bump ground states, Commun. Contemp. Math. 3 (2001) 419–439.
[5] M. Del Pino, M. Kowalczyk, J. Wei, Multi-bump ground states of the Gierer–Meinhardt system in $\mathbb{R}^2$, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire 20 (2003) 53–85.
[6] M. Ghergu, V. Radulescu, On a class of Gierer–Meinhardt systems arising in morphogenesis, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 344 (2007).
[7] A. Gierer, H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, Kybernetik 12 (1972) 30–39.
[8] E.H. Kim, A class of singular Gierer–Meinhardt systems of elliptic boundary value problems, Nonlinear Anal. 59 (2004) 305–318.
[9] H. Meinhardt, A. Gierer, Generation and regeneration of sequence of structures during morphogenesis, J. Theoret. Biol. 85 (1980) 429–450.
[10] W.M. Ni, I. Takagi, On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, Comm. Pure Appl. Math 44 (1991) 819–851.
[11] W.M. Ni, I. Takagi, Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, Duke Math. J. 70 (1993) 247–281.
[12] W.M. Ni, J. Wei, On positive solutions concentrating on spheres for the Gierer–Meinhardt system, J. Differential Equations 221 (2006) 158–189.
[13] J. Wei, On the interior spike layer solutions for some singular perturbation problems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 128 (1998) 849–874.
[14] J. Wei, M. Winter, Spikes for the Gierer–Meinhardt system in two dimensions: The strong coupling case, J. Differential Equations 178 (2004) 478–518.
[15] J. Wei, M. Winter, Existence and stability analysis of asymmetric for the Gierer–Meinhardt system, J. Math. Pures Appl. 83 (2004) 433–476.

JOURNAL OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
Vol. **22**, No. 2, pp. 111-126

J. Partial Diff. Eq.
May 2009

Existence Results for a Class of Semilinear Elliptic Systems

MOUSSAOUI Abdelkrim[1,*] and KHODJA Brahim[2]

[1] *A. Mira Bejaia University, Bejaia 06000, Algeria.*
[2] *Badji-Mokhtar Annaba University, P.O.12, Annaba 23000, Algeria.*

Received 21 June 2008; Accepted 6 February 2009

Abstract. In this paper, we study the existence of nontrivial solutions for the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) + h_1(x) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = g(x,u,v) + h_2(x) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is bounded domain in $\mathbb{R}^N$ and $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$. The existence result is obtained by using the Leray-Schauder degree under the following condition on the nonlinearities f and g:

$$\begin{cases} \lim\limits_{s,|t| \to +\infty} \dfrac{f(x,s,t)}{s} = \lim\limits_{|s|,t \to +\infty} \dfrac{g(x,s,t)}{t} = \lambda_+, & \text{uniformly on } \Omega, \\ \lim\limits_{-s,|t| \to +\infty} \dfrac{f(x,s,t)}{s} = \lim\limits_{|s|,-t \to +\infty} \dfrac{g(x,s,t)}{t} = \lambda_-, & \text{uniformly on } \Omega, \end{cases}$$

where $\lambda_+, \lambda_- \notin \{0\} \cup \sigma(-\Delta)$, $\sigma(-\Delta)$ denote the spectrum of $-\Delta$. The cases (i) where $\lambda_+ = \lambda_-$ and (ii) where $\lambda_+ \neq \lambda_-$ such that the closed interval with endpoints λ_+, λ_- contains at most one simple eigenvalue of $-\Delta$ are considered.

AMS Subject Classifications: Primary 35J55, 15A15; Secondary 05A15, 15A18

Chinese Library Classifications: O175.25, O175.29

Key Words: Elliptic systems; homotopy; topological degree.

*Corresponding author. *Email addresses:* `remdz@yahoo.fr` (A. Moussaoui), `bmkhodja@yahoo.fr` (B. Khodja)

1 Introduction and main results

The question of the existence of solutions of semilinear elliptic systems of the form

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = g(x,u,v) & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

subject to zero Dirichlet boundary conditions, has been the object of intensive research recently and different situations on the structure of the nonlinearities f and g are studied; see for example [1–6] and references therein.

The study of this type of problem is motivated by its various applications, for example, in reaction-diffusion equations (where the steady state equations are elliptic systems), in newtonian fluids and in the study of torsional creep (see [7]).

In this work, we are concerned with the existence of nontrivial solutions for the following class of elliptic systems

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) + h_1(x) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = g(x,u,v) + h_2(x) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ with smooth boundary $\partial\Omega$ and $h = (h_1, h_2)$ is $\left(L^2(\Omega)\right)^2$ nonnull function. We assume that

$$f, g:\ \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

are continuous functions satisfying the condition below:

$$\begin{cases} |f(x,s,t)| \leq C_1(1+|s|+|t|), & \forall s,t \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega, \\ |g(x,s,t)| \leq C_2(1+|s|+|t|), & \forall s,t \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

where C_1, C_2 are positive constants. Problem (1.2) is supposed to be nonvariational, that is, the conditions defined below are not satisfied by the nonlinearities f and g.

Definition 1.1. *We say that the system* (1.2) *is variational if either one of the following conditions holds:*

1. *There is a real-valued differentiable function $F(x,u,v)$ for $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ such that*

$$\frac{\partial F(x,u,v)}{\partial u} = f(x,u,v), \quad \frac{\partial F(x,u,v)}{\partial v} = g(x,u,v).$$

In this case, the system is said to be of Gradient type.

2. *There is a real-valued differentiable function $H(x,u,v)$ for $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ such that*

$$\frac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = g(x,u,v), \quad \frac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = f(x,u,v).$$

In this case, the system is said to be of Hamiltonian type.

Hence, there is apparently no possibility of using variational methods because the system (1.2) is not the Euler-Lagrange equations of some functional; instead, one has to use topological methods where the main difficulty lies in the need of obtaining a priori bounds for the eventual solutions.

The corresponding scalar case was considered in [8] and it has shown the existence of solutions to the problem $Au = g(\cdot,u)+h$, where A is a self-adjoint operator with compact resolvent in $L^2(\Omega)$, $g(\cdot,\cdot)$ maps $\Omega\times\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$ and is such that the closed interval with endpoints

$$g_{\pm} = \lim_{s\to\pm\infty} \frac{g(x,s)}{s}$$

contains at most one simple eigenvalue of A and $h\in L^2(\Omega)$ is given.

The purpose of the present paper is to extend this results to the system (1.2). More precisely, under the following conditions on the functions f and g:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{s,|t|\to+\infty} \frac{f(x,s,t)}{s} = \lim_{|s|,t\to+\infty} \frac{g(x,s,t)}{t} = \lambda_+, & \text{uniformly on } \Omega, \\ \displaystyle\lim_{-s,|t|\to+\infty} \frac{f(x,s,t)}{s} = \lim_{|s|,-t\to+\infty} \frac{g(x,s,t)}{t} = \lambda_-, & \text{uniformly on } \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

where $\lambda_+,\lambda_- \notin \{0\}\cup\sigma(-\Delta)$, $\sigma(-\Delta)$ denote the spectrum of $-\Delta$, we establish the existence results when $\lambda_+ = \lambda_-$ and, in the more general case, when the closed interval with endpoints λ_+,λ_- contains at most one simple eigenvalue of $-\Delta$, by using the Leray-Schauder degree.

Let λ be a simple eigenvalue of $-\Delta$ subject to the Dirichlet boundary condition and let $\overline{\lambda}$ (resp. $\underline{\lambda}$) be the greatest (resp. the smallest) eigenvalue superior (resp. inferior) to λ.

Remark 1.1. If λ is the greatest (resp. the smallest) eigenvalue of $-\Delta$, then we take $\overline{\lambda}=+\infty$ (resp. $\underline{\lambda}=-\infty$).

It is known, see [9], that there are decreasing curves in $\mathbb{R}^2$ passing through (λ,λ) and the curves has been well studied in the square $\Lambda =]\underline{\lambda},\overline{\lambda}[\times]\underline{\lambda},\overline{\lambda}[$. These curves are part of the so-called Fucik spectrum. In this paper, we obtain the existence of solutions mainly in the two cases: (i) $\lambda_+ = \lambda_- \neq \lambda$ and (ii) both (λ_+,λ_-) and (λ_-,λ_+) are in Λ and are above the curves or both (λ_+,λ_-) and (λ_-,λ_+) are in Λ and are below the curves. Our first main result is formulated in the following theorem.

Theorem 1.1. *Assume* (1.3) *and* (1.4) *with* $\lambda_+ = \lambda_-$. *Then there exists a solution to the problem* (1.2).

When $\lambda_+ \neq \lambda_-$, we adapt to the system (1.2) the reasoning applied by Galouët and Kavian in [8] and we prove, based on some conditions on the function h, the existence of solutions to the problem (1.2).

For $u \in D(A)$, we define the real function $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ on the square Λ verifying the following problem

$$\begin{cases} Au = \alpha u^+ - \beta u^- + \mathcal{C}(\alpha,\beta)\varphi, \\ \int_\Omega u\varphi = 1, \end{cases}$$

where φ is the normalized eigenfunction corresponding to λ, namely,

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Here, for $s \in \mathbb{R}$, we denote by $s^{\pm} = \max(\pm s, 0)$ so that $s = s^+ - s^-$.

Remark 1.2. From Proposition 2.1, which will appear later, the function $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ is well defined.

It was shown in [8] that $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ is continuous on Λ and strictly decreasing with respect to each variable. Moreover, the curve $\Gamma = \{(\alpha,\beta) \in \Lambda : \mathcal{C}(\alpha,\beta) = 0\}$ is continuous, crosses (λ,λ) and $\Lambda - \Gamma$ has exactly two connected components Λ_+ (where $\mathcal{C}(\cdot,\cdot) > 0$) and Λ_- (where $\mathcal{C}(\cdot,\cdot) < 0$). Let denote by Λ_σ the symmetrical components of $\Lambda - \Gamma$, i.e.

$$\Lambda_\sigma = \Big\{ (\alpha,\beta) \in \Lambda; (\alpha,\beta) \in \Lambda_+ \text{ and } (\beta,\alpha) \in \Lambda_+ \text{ or } (\alpha,\beta) \in \Lambda_- \text{ and } (\beta,\alpha) \in \Lambda_- \Big\}$$

and let

$$\mathcal{C}_+ = \mathcal{C}(\lambda_+,\lambda_-) \text{ and } \mathcal{C}_- = \mathcal{C}(\lambda_-,\lambda_+).$$

We are now ready to state our second main result given by the following two theorems.

Theorem 1.2. *Assume* (1.3) *and* (1.4). *If $\mathcal{C}_+\mathcal{C}_- > 0$, then there exists a solution to the problem* (1.2).

The condition $C_+C_- > 0$ is equivalent to say that the couple (λ_+,λ_-) belongs to Λ_σ. The other cases are given by the next theorem.

Theorem 1.3. *Assume* (1.3) *and* (1.4).

1. *If $C_+ > 0$ and $C_- < 0$, then for all $h_0 \in (\varphi^\perp)^2$, there exists $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ such that if $h = h_0 + t\varphi$ $(t \in \mathbb{R})$, we get*

$$t > \gamma_2 \Longrightarrow (1.2) \text{ possesses at least two solutions.}$$

(By changing the sense of the inequalities, we can get a similar result for the case that $C_+ < 0$ and $C_- > 0$).

2. *If $C_+ < 0$ and $C_- = 0$ (resp. $C_+ = 0$ and $C_- > 0$), then for all $h_0 \in (\varphi^\perp)^2$, there exists $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ such that if $h = h_0 + t\varphi$ $(t \in \mathbb{R})$, we get*

$$t < \gamma_1 \Longrightarrow (1.2) \text{ possesses at least one solution.}$$

(By changing the sense of the inequalities, we get a similar result for the case that $C_+ > 0$ and $C_- = 0$ (resp. $C_+ = 0$ and $C_- < 0$)).

This paper is organized as follows. In the next section, we give some notations and preliminaries; Section 3 gives a priori bounds for the solutions of (1.2) and the proof of the main results is given in Section 4.

2 Preliminaries

Let us consider the space

$$U = H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$$

which is a Banach space endowed with the norm denoted by $\|\cdot\|_U$

$$\|(u,v)\|_U^2 = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

and let us take $V = L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$. In the sequel, $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ and $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ will denote the usual norms on $L^2(\Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$ respectively. Recall that the operator A, given by

$$\begin{cases} Au = -\Delta u, \\ D(A) = \{u\in H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}, \end{cases}$$

defines an inverse compact operator on $L^2(\Omega)$ and his spectrum is formed by the sequence $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ such that $|\lambda_k| \to +\infty$ and λ_1 the first eigenvalue is positive. Throughout this paper, we denote by λ a simple eigenvalue of A, φ is the normalized eigenfunction corresponding to λ and $\mathcal{P}$ designates the orthogonal projection of V on $\left(\varphi^{\perp}\right)^2$ ($\varphi^{\perp}$ is the orthogonal of φ in $L^2(\Omega)$).

We recall the following proposition proved by Gallouët and Kavian (see [8]).

Proposition 2.1. *For all $\alpha,\beta\in(\underline{\lambda},\overline{\lambda})$, there exists a unique $\mathcal{C}(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$ and a unique $u\in D(A)$ such that*

$$\begin{cases} Au = \alpha u^+ - \beta u^- + \mathcal{C}(\alpha,\beta)\varphi, \\ \displaystyle\int_\Omega u\varphi = 1. \end{cases}$$

The next result is given in a general framework.

Proposition 2.2. *Assume that $q(x,s):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, measurable on $x\in\Omega$ and continuous on $s\in\mathbb{R}$, satisfies*

1. *There exist $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ such that*

$$\underline{\lambda} < \alpha \le \frac{q(x,s)-q(x,t)}{s-t} \le \beta < \overline{\lambda}, \quad \forall s,t\in\mathbb{R},\ a.e.\ in\ \Omega;$$

2. *There exist $l_\pm\in\mathbb{R}$ such that*

$$\lim_{s\to\pm\infty}\frac{q(x,s)}{s} = l_\pm \quad a.e.\ in\ \Omega;$$

3. *$q(x,0)=0$ a.e. in Ω. Then for any $s\in\mathbb{R}$, $q_0\in\varphi^{\perp}$, there exists an unique $!v\in D(A)\cap\varphi^{\perp}$ such that*

$$Av = \mathcal{P}q(\cdot,v+s\varphi)+q_0.$$

The proof of the above proposition can be found also in [8]. The next proposition is a result of functional analysis (see [10]) which will be useful in the proof of the first main result.

Proposition 2.3. *Let $F\subset H^1(\Omega)$ be a vector space. Assume that F is closed with respect to the H^1-norm. Then, F is closed with respect to weak convergence. In other words, if $(v_n)\subset F$ and $v_n\rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\Omega)$, then $v\in F$.*

3 A priori bounds for the solutions of (1.2)

3.1 When $\lambda_+=\lambda_-$

Due to the uniqueness of solution of problem (1.2), the following operator is well defined $T: V\rightarrow U$,

$$(\varphi,\chi)\longmapsto T(\varphi,\chi)=(u,v),$$

where (u,v) is the solution of the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,\varphi,\chi)+h_1(x) & \text{in } \Omega,\\ -\Delta v=g(x,\varphi,\chi)+h_2(x) & \text{in } \Omega,\\ u=v=0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

We observe that problem (1.2) is equivalent to the problem

$$T(u,v)=(u,v),\quad (u,v)\in U.$$

In other words, a fixed point of the operator T is a solution for problem (1.2). Thus

$$T(u,v)=\begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0\\ 0 & (-\Delta)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x,u,v)+h_1(x)\\ g(x,u,v)+h_2(x)\end{pmatrix}.$$

Clearly T is compact and continuous operator. Denote $\lambda_\pm=\lambda_-=\lambda_+$ and define the following homotopy

$$\begin{aligned} H(t,u,v)=\begin{pmatrix} H_1(t,u,v)\\ H_2(t,u,v)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0\\ 0 & (-\Delta)^{-1}\end{pmatrix}\\ &\quad\times\begin{pmatrix} t[f(x,u,v)+h_1(x)]+(1-t)[\lambda_\pm u+h_1(x)]\\ t[g(x,u,v)+h_2(x)]+(1-t)[\lambda_\pm v+h_2(x)]\end{pmatrix},\quad t\in[0,1]. \end{aligned}$$

It is clear that $H: [0,1]\times U\rightarrow V$ is a compact homotopy and moreover the system (1.2) is equivalent to the following problem:

$$(u,v)\in U,\quad (u,v)-H(1,u,v)=0. \tag{3.2}$$

We shall prove that the following result holds true.

Lemma 3.1. *There exists $R_1 > 0$ such that*

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], \ \forall (u,v) \in U, \\ (u,v) - H(t,u,v) = 0 \Longrightarrow \|(u,v)\|_U < R_1. \end{cases}$$

Proof. In order to prove this lemma, assume, by contradiction, that there exists $(t,u,v) \in [0,1] \times U$ such that

$$(u,v) - H(t,u,v) = 0 \ \text{ and } \ \|(u,v)\|_U \geq R_1.$$

In other words, we can find a sequence $(t_n,u_n,v_n) \in [0,1] \times U$ such that

$$(u_n,v_n) - H(t_n,u_n,v_n) = 0 \ \text{ and } \ \|(u_n,v_n)\|_U \geq n. \tag{3.3}$$

Take

$$w_n = (w_{1,n}, w_{2,n}) = \left(\frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}, \frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \right).$$

Then it follows with choice of w_n that

$$w_n = (w_{1,n}, w_{2,n}) \in (D(A))^2 \ \text{ and } \ \|w_n\|_U = 1. \tag{3.4}$$

Indeed, it is easy to see that $\|w_n\|_U = 1$. Let us show that $w_n \in (D(A))^2$. We have

$$\begin{aligned} Aw_{1,n} &= -\Delta w_{1,n} \\ &= \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} \Big(t_n f(x,u_n,v_n) + (1-t_n)\lambda_\pm u_n + h_1(x) \Big), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} Aw_{2,n} &= -\Delta w_{2,n} \\ &= \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} \Big(t_n g(x,u_n,v_n) + (1-t_n)\lambda_\pm v_n + h_2(x) \Big). \end{aligned} \tag{3.6}$$

From (1.3) and noticing that $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, we obtain the following estimate

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x,u_n,v_n)|^2 &\leq 4C_1^2 \int_\Omega \Big(1 + |u_n|^2 + |v_n|^2 \Big) \\ &\leq \widetilde{C}_1 \Big(1 + \|u_n\|_{H_0^1}^2 + \|v_n\|_{H_0^1}^2 \Big) \\ &\leq \widetilde{C}_1 \Big(1 + \|(u_n,v_n)\|_U^2 \Big) \end{aligned}$$

for some $\widetilde{C}_1 > 0$. Therefore

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|f(x,u_n,v_n)|^2}{\|(u_n,v_n)\|_U^2} &\leq \widetilde{C}_1 \left(1 + \frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U^2} \right) \\ &\leq \widetilde{C}_1 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \leq 2\widetilde{C}_1, \end{aligned}$$

that is, the function in the integrand above is bounded in $L^2(\Omega)$. Similarly, we obtain that the function $g(x,u_n,v_n)/\|(u_n,v_n)\|_U$ is bounded in $L^2(\Omega)$. Moreover, by (3.3) we have

$$\begin{cases} \dfrac{\|h_1\|_{L^2(\Omega)}}{\|(u_n,v_n)\|_U} \le \dfrac{\|h_1\|_{L^2(\Omega)}}{n} \le \|h_1\|_{L^2(\Omega)}, \\ \dfrac{\|h_2\|_{L^2(\Omega)}}{\|(u_n,v_n)\|_U} \le \dfrac{\|h_2\|_{L^2(\Omega)}}{n} \le \|h_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Then the right hand side of (3.5) and (3.6) is bounded in $L^2(\Omega)$ for all n; thus

$$-\Delta w_{1,n}, -\Delta w_{2,n} \in L^2(\Omega)$$

and we get $w_{1,n}, w_{2,n} \in D(A)$. Since the embedding $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ is compact, we can extract a subsequence $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$, still denoted by $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$, which converges in $[0,1] \times V$.

Let (t, w_1, w_2) be the limit of $(t_n, w_{1,n}, w_{2,n})$ in $[0,1] \times V$. From the hypothesis (1.4), it follows that

$$\begin{cases} \dfrac{f(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} = \dfrac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \dfrac{f(x,u_n,v_n)}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm w_1 \quad \text{a.e. in } \Omega, \\ \dfrac{g(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} = \dfrac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \dfrac{g(x,u_n,v_n)}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm w_2 \quad \text{a.e. in } \Omega, \end{cases}$$

and since the sequences $w_{1,n}, w_{2,n}$ are bounded in $L^2(\Omega)$, we get

$$\begin{cases} \dfrac{|f(x,u_n,v_n)|}{\|(u_n,v_n)\|_U} \le C_1(1+|w_{1,n}|+|w_{2,n}|) \le C_1' \quad \text{a.e. in } \Omega, \\ \dfrac{|g(x,u_n,v_n)|}{\|(u_n,v_n)\|_U} \le C_2(1+|w_{1,n}|+|w_{2,n}|) \le C_2' \quad \text{a.e. in } \Omega, \end{cases}$$

where C_1', C_2' are real positive constants. Then, thanks to Lebesgue's convergence theorem, we deduce that

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} f(x,u_n,v_n) = \dfrac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \dfrac{f(x,u_n,v_n)}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm w_1 \quad \text{in } L^2(\Omega), \\ \dfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U} g(x,u_n,v_n) = \dfrac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U} \dfrac{g(x,u_n,v_n)}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_\pm w_2 \quad \text{in } L^2(\Omega) \end{cases}$$

and consequently

$$\begin{cases} w_n \longrightarrow w \text{ in } V, \\ Aw_n \longrightarrow \lambda_\pm w \text{ in } V. \end{cases}$$

On the other hand, since the operator A is closed,

$$w \in (D(A))^2 \quad \text{and} \quad Aw = \lambda_\pm w.$$

Finally (3.4) together with Proposition 2.3 implies that $w \neq 0$, that is, $\lambda_\pm$ is an eigenvalue of A which is a contradiction. The proof of Lemma 3.1 is then complete. $\square$

3.2 When $\lambda_+ \neq \lambda_-$

Let us take $\lambda_+ > \lambda_-$. Using a similar reasoning as in the last subsection, we define the homotopy

$$\widetilde{H}(t,u,v) = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_1(t,u,v) \\ \widetilde{H}_2(t,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t[f(x,u,v)+h_1(x)]+(1-t)[\lambda_- u+h_1(x)] \\ t[g(x,u,v)+h_2(x)]+(1-t)[\lambda_- v+h_2(x)] \end{pmatrix}, \quad t\in[0,1].$$

Remark 3.1. If $\lambda_+ < \lambda_-$, then the homotopy $\widetilde{H}$ is defined in a similar manner taking λ_+ instead of λ_-.

It is clear that $\widetilde{H}$ is compact and the system (1.2) is equivalent to the following problem

$$(u,v)\in U, \quad (u,v)-\widetilde{H}(1,u,v)=0.$$

We next establish the a priori estimates on solutions.

Lemma 3.2. *If $\mathcal{C}_+\mathcal{C}_- > 0$, then there exists $R_2 > 0$ such that*

$$\begin{cases} \forall t\in[0,1], \ \forall (u,v)\in U, \\ (u,v)-\widetilde{H}(t,u,v)=0 \Longrightarrow \|(u,v)\|_U < R_2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Proof. Suppose that $\mathcal{C}_+ > 0$ and $\mathcal{C}_- > 0$. As in the proof of the previous lemma, we argue by contradiction and we suppose that (3.7) is not true. Then we can find a sequence $(t_n,u_n,v_n)\in[0,1]\times U$ such that

$$(u_n,v_n)-\widetilde{H}(t_n,u_n,v_n)=0 \ \text{ and } \ \|(u_n,v_n)\|_U \geq n.$$

Taking

$$w_n=(w_{1,n},w_{2,n})=\left(\frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U},\frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\right),$$

we then have $\|w_n\|_U=1$ and

$$Aw_{1,n}=\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}\Big(t_n f(x,u_n,v_n)+(1-t_n)\lambda_- u_n+h_1(x)\Big), \tag{3.8}$$

$$Aw_{2,n}=\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}\Big(t_n g(x,u_n,v_n)+(1-t_n)\lambda_- v_n+h_2(x)\Big). \tag{3.9}$$

It was shown previously that the right hand side of (3.8) and (3.9) is bounded in $L^2(\Omega)$ for all n; thus

$$-\Delta w_{1,n}, -\Delta w_{2,n} \in L^2(\Omega),$$

that is, $w_{1,n},w_{2,n}\in D(A)$. As $H_0^1(\Omega)$ is compactly embedded in $L^2(\Omega)$, we can extract a subsequence $(t_n,w_{1,n},w_{2,n})$, still denoted by $(t_n,w_{1,n},w_{2,n})$, which converges in $[0,1]\times V$.

Let (t,w_1,w_2) be the limit of $(t_n,w_{1,n},w_{2,n})$ in $[0,1]\times V$. Then, by (1.4) together with (1.3) and by Lebesgue's convergence theorem, we deduce that

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}f(x,u_n,v_n)=\dfrac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\dfrac{f(x,u_n,v_n)}{u_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda_+w_1^+-\lambda_-w_1^- \quad \text{in } L^2(\Omega),\\ \dfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}g(x,u_n,v_n)=\dfrac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\dfrac{g(x,u_n,v_n)}{v_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda_+w_2^+-\lambda_-w_2^- \quad \text{in } L^2(\Omega).\end{cases}$$

Consequently,

$$\begin{cases} w_n\longrightarrow w \text{ in } V,\\ Aw_n\longrightarrow (t\lambda_++(1-t)\lambda_-)w^+-\lambda_-w^- \text{ in } V.\end{cases}$$

Since the operator A is closed,

$$w\in (D(A))^2 \quad\text{and}\quad Aw=(t\lambda_++(1-t)\lambda_-)w^+-\lambda_-w^-,$$

which is a contradiction.

Indeed, if $\int_\Omega w\varphi=0$, then projecting on $\varphi^\perp$ we have

$$Aw=\mathcal{P}\left[(t\lambda_++(1-t)\lambda_-)w^+-\lambda_-w^-\right]$$

and from Proposition 2.2, we obtain $w=0$, a contradiction with fact that $\|w\|_U=1$. If $\int_\Omega w\varphi=\theta>0$, then $\mu=w/\theta$ verifies

$$\begin{cases} A\mu=(t\lambda_++(1-t)\lambda_-)\mu^+-\lambda_-\mu^-,\\ \displaystyle\int_\Omega \mu\varphi=1\end{cases}$$

and from Proposition 2.1,

$$\mathcal{C}((t\lambda_++(1-t)\lambda_-),\lambda_-)=0.$$

However, according to the fact that the function $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ is strictly decreasing with respect to each variable, we have

$$\mathcal{C}(t\lambda_++(1-t)\lambda_-,\lambda_-)\geq \mathcal{C}(\lambda_+,\lambda_-)=\mathcal{C}_+>0,$$

a contradiction. Finally, if $\int_\Omega w\varphi=\theta<0$, then $\mu=w/\theta$ verifies

$$\begin{cases} A\mu=\lambda_-\mu^+-(t\lambda_++(1-t)\lambda_-)\mu^-,\\ \displaystyle\int_\Omega \mu\varphi=1\end{cases}$$

and from Proposition 2.1

$$\mathcal{C}(\lambda_-,t\lambda_++(1-t)\lambda_-)=0,$$

a contradiction with the fact that

$$\mathcal{C}(\lambda_-,t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-) \geq \mathcal{C}(\lambda_-,\lambda_+) = \mathcal{C}_- > 0.$$

A similar argument can be made when $\mathcal{C}_+ < 0$ and $\mathcal{C}_- < 0$. This completes the proof of Lemma 3.2. □

To proceed further, we need the following result.

Proposition 3.1. *Let* $C_+ > 0$ *(resp.* $C_- < 0$*) and* $h_0 \in (\varphi^\perp)^2$ *such that for all* $h \in (L^2(\Omega))^2$, $Ph = h_0$*. Then there exists* $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ *such that if* $\int_\Omega h\varphi > \gamma_2$ *and for all* $t \in [0,1]$*, then* (1.2) *has no solution* (u,v) *with*

$$\int_\Omega u\varphi = \int_\Omega v\varphi = 0.$$

(By changing the sense of the inequalities, we get a similar result for the case that $C_+ < 0$ *(resp.* $C_- > 0$*)).*

Proof. Suppose that the assertion is not true. Then there exists $h_n = (h_{1,n},h_{2,n}) \in (L^2(\Omega))^2$, $Ph_n = h_0 = (h_{1,0},h_{2,0})$ and $\int_\Omega h_n\varphi > n$ and there exists $t_n \in [0,1]$, $(u_n,v_n) \in U$ such that

$$\begin{cases} Au_n = t_n f(x,u_n,v_n) + (1-t_n)\lambda_- u_n + h_{1,n}(x), \\ Av_n = t_n g(x,u_n,v_n) + (1-t_n)\lambda_- v_n + h_{2,n}(x), \end{cases} \tag{3.10}$$

with

$$\int_\Omega u_n\varphi = \int_\Omega v_n\varphi = 0.$$

Multiplying the equations of (3.10) by φ and integrating the resulting expressions, we obtain

$$\begin{cases} t_n \int_\Omega f(x,u_n,v_n)\varphi + h_{1,n}(x)\varphi = 0, \\ t_n \int_\Omega g(x,u_n,v_n)\varphi + h_{2,n}(x)\varphi = 0, \end{cases}$$

which gives

$$\begin{cases} -t_n \int_\Omega f(x,u_n,v_n)\varphi \geq n, \\ -t_n \int_\Omega g(x,u_n,v_n)\varphi \geq n. \end{cases}$$

From (1.3) we have

$$\begin{cases} \|f(x,u_n,v_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C'\|(u_n,v_n)\|_U, \\ \|g(x,u_n,v_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C''\|(u_n,v_n)\|_U, \end{cases} \tag{3.11}$$

for some positive constants C' and C''. Hence

$$\|(u_n,v_n)\|_U \geq \max(C',C'')\frac{n}{t_n}$$

and we deduce that

$$\|(u_n,v_n)\|_U \to +\infty \text{ as } n\to+\infty.$$

Let us take

$$w_n=(w_{1,n},w_{2,n})=\left(\frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U},\frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\right).$$

Then

$$\begin{cases} Aw_{1,n}=\dfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}\Big(t_nf(x,u_n,v_n)+(1-t_n)\lambda_-u_n+h_{1,n}(x)\Big),\\ Aw_{2,n}=\dfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}\Big(t_ng(x,u_n,v_n)+(1-t_n)\lambda_-v_n+h_{2,n}(x)\Big).\end{cases}$$

Since $(u_n,v_n)\in(\varphi^\perp)^2$, we get $(w_{1,n},w_{2,n})\in(\varphi^\perp)^2$ and it follows that

$$\begin{cases} Aw_{1,n}=\dfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}\Big(t_n\mathcal{P}f(x,u_n,v_n)+(1-t_n)\lambda_-u_n+h_{1,0}(x)\Big),\\ Aw_{2,n}=\dfrac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U}\Big(t_n\mathcal{P}g(x,u_n,v_n)+(1-t_n)\lambda_-v_n+h_{2,0}(x)\Big).\end{cases}$$

The same argument employed in the proof of Lemma 3.2 shows that

$$\begin{cases} w_n\longrightarrow w \text{ in } V; \text{ and}\\ Aw_n\longrightarrow t\mathcal{P}[\lambda_+w^+-\lambda_-w^-]+(1-t)\lambda_-w \text{ in } V.\end{cases}$$

Hence

$$w\in(D(A))^2 \text{ and } Aw=\mathcal{P}\left[(t\lambda_++(1-t)\lambda_-)w^+-\lambda_-w^-\right],$$

and by Proposition 2.2, it follows that $w=0$, contradicting $\|w\|_U=1$. This concludes the proof of Proposition 3.1. □

Now we have the following:

Lemma 3.3. *If $C_+>0$ (resp. $C_-<0$), then for all $h_1,h_2\in L^2(\Omega)$, there exists $R_3>0$ such that for all $(t,u,v)\in[0,1]\times U$, if $(u,v)-\widetilde{H}(t,u,v)=0$ with $\int_\Omega u\varphi,\int_\Omega v\varphi>0$ (resp. $\int_\Omega u\varphi,\int_\Omega v\varphi<0$), then*

$$\|(u,v)\|_U<R_3. \tag{3.12}$$

Proof. Suppose that $C_+>0$ (a similar argument works for the case $C_-<0$). We argue by contradiction. To this end, we suppose that (3.12) is not true. Then we can find a sequence $(t_n,u_n,v_n)\in[0,1]\times U$ such that

$$(u_n,v_n)-\widetilde{H}(t_n,u_n,v_n)=0 \text{ with } \int_\Omega u_n\varphi,\int_\Omega v_n\varphi>0 \text{ and } \|(u_n,v_n)\|_U\geq n.$$

Take

$$w_n=(w_{1,n},w_{2,n})=\left(\frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U},\frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\right).$$

It was shown previously that

$$\begin{cases} w_n \longrightarrow w \text{ in } V, \\ Aw_n \longrightarrow (t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-)w^+ - \lambda_- w^- \text{ in } V \end{cases}$$

and since the operator A is closed, we have

$$w \in (D(A))^2, \quad Aw = (t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-)w^+ - \lambda_- w^- \text{ and } w_n \longrightarrow w \text{ in } (D(A))^2.$$

Thus

$$\|w\|_U = 1 \text{ and } \int_\Omega w\varphi \geq 0;$$

and a contradiction is obtained by the similar arguments used in the last part of the proof of Lemma 3.2. This concludes the proof. $\square$

Remark 3.2. A quite similar argument can be carried out to prove an a priori bounds of solutions when $C_+ < 0$ (resp. $C_- > 0$).

4 Proof of the main results

4.1 Proof of Theorems 1.1 and 1.2

In this subsection we prove simultaneously Theorems 1.1 and 1.2. Let

$$B(0,R) = \{(u,v) \in U : \|(u,v)\|_U < R\}$$

be the open ball around 0 in U with radius $R = \max(R_1, R_2)$. Then a topological degree

$$\deg(H(t,\cdot,\cdot), B(0,R), 0) \text{ and } \deg\left(\widetilde{H}(t,\cdot,\cdot), B(0,R), 0\right)$$

is constant for all $t \in [0,1]$. Hence for $t = 0$, we have

$$H(0,u,v) = \begin{pmatrix} H_1(0,u,v) \\ H_2(0,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\pm u + h_1 \\ \lambda_\pm v + h_2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{H}(0,u,v) = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_1(0,u,v) \\ \widetilde{H}_2(0,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- u + h_1 \\ \lambda_- v + h_2 \end{pmatrix}.$$

On the other hand, for $t = 0$, the linear problem

$$\begin{cases} Au = \lambda_- u + h & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

has a unique isolate solution. Then

$$\begin{aligned}\deg(H(0,u,v),B(0,R),0)&=\deg\left(\widetilde{H}(0,u,v),B(0,R),0\right)\\&=\deg\left(Id-\lambda_{\pm}A^{-1},B(0,R),A^{-1}h\right)\\&=\deg\left(Id-\lambda_{-}A^{-1},B(0,R),A^{-1}h\right)=\pm 1.\end{aligned}$$

By the homotopy invariance property (see [11]), we get

$$\begin{aligned}\deg(H(1,\cdot,\cdot),B(0,R),0)&=\deg\left(\widetilde{H}(1,\cdot,\cdot),B(0,R),0\right)\\&=\deg(H(0,\cdot,\cdot),B(0,R),0)\\&=\deg\left(\widetilde{H}(0,\cdot,\cdot),B(0,R),0\right)=\pm 1.\end{aligned}$$

Consequently, the problem (1.2) has at least one nontrivial solution which completes the proof of the theorems.

4.2 Proof of Theorem 1.3

The proof of Theorem 1.3 is derived from the propositions given below.

Proposition 4.1. *Suppose that $C_+>0$ (resp. $C_-<0$). For all $h_0\in\left(\varphi^{\perp}\right)^2$, there exists $\gamma_2\in\mathbb{R}$ such that if $Ph=h_0$ and $\int_\Omega h\varphi>\gamma_2$, then the problem* (1.2) *has at least one solution (u,v) satisfying $\int_\Omega u\varphi,\int_\Omega v\varphi>0$ (resp. $\int_\Omega u\varphi,\int_\Omega v\varphi<0$).*

Proof. Let $C_+>0$ and define

$$\mathcal{K}=\left\{(u,v)\in U;\int_\Omega u\varphi,\int_\Omega v\varphi>0 \text{ and } \|(u,v)\|_U<R_3\right\}.$$

Note that the constants R_3 and γ_2 are given by Lemma 3.3 and Proposition 3.1, respectively. The topological degree $\deg\left(\widetilde{H}(t,\cdot,\cdot),\mathcal{K},0\right)$ is constant for all $t\in[0,1]$ and in particular

$$\deg\left(\widetilde{H}(1,\cdot,\cdot),\mathcal{K},0\right)=\deg\left(\widetilde{H}(0,\cdot,\cdot),\mathcal{K},0\right)=\pm 1.$$

Indeed, $\widetilde{H}(0,\cdot,\cdot)$ corresponds to the following problem

$$\begin{cases}Au=\lambda_-u+h_1 & \text{in } \Omega,\\ Av=\lambda_-v+h_2 & \text{in } \Omega,\\ u=v=0 & \text{on } \partial\Omega,\end{cases}\tag{4.1}$$

where $\lambda_- < \lambda$ and the solution (u_*,v_*) of (4.1) satisfies

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda-\lambda_-}\displaystyle\int_\Omega u_*\varphi = \int_\Omega h_1\varphi > 0, \\ \dfrac{1}{\lambda-\lambda_-}\displaystyle\int_\Omega v_*\varphi = \int_\Omega h_2\varphi > 0, \end{cases}$$

which implies that $(u_*,v_*)\in\mathcal{K}$. Thus, the problem (1.2) has at least one solution (u,v) with $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi > 0$. A similar argument works for the case $C_- < 0$. The proof is therefore complete. □

Using an argument similar to that given above, we obtain the same results when $C_+ < 0$ or $C_- > 0$.

Proposition 4.2. *Suppose that* $C_+ < 0$ *(resp.* $C_- > 0$*). For all* $h_0 \in (\varphi^\perp)^2$*, there exists* $\gamma_2' \in \mathbb{R}$ *such that if* $Ph = h_0$ *and* $\int_\Omega h\varphi < \gamma_2'$*, then the problem* (1.2) *has at least one solution* (u,v) *satisfying* $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi > 0$ *(resp.* $\int_\Omega u\varphi, \int_\Omega v\varphi < 0$*).*

Proof. The proof is similar to that of the previous proposition and is omitted. □

Remark 4.1. As we have mentioned it above, the demonstration of Theorem 1.3 is only a direct consequence from Propositions 4.1 and 4.2. In fact, for example, for $h_0 \in (\varphi^\perp)^2$ given, $h \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$ and $Ph = h_0$,, we know, from Proposition 4.1, that if $C_+ > 0$ and $C_- < 0$, there exists $\gamma_2 \geq 0$ such that $\int_\Omega h\varphi > \gamma_2$, then the problem (1.2) has two solutions (u_1,v_1) and (u_2,v_2) satisfying

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega u_1\varphi, \int_\Omega v_1\varphi > 0, \\ \displaystyle\int_\Omega u_2\varphi, \int_\Omega v_2\varphi < 0. \end{cases}$$

The other cases can be treated in the same manner.

Remark 4.2. When the interval $[\lambda_-,\lambda_+]$ (or $[\lambda_+,\lambda_-]$) does not contain eigenvalues of A, for example suppose $\lambda < \lambda_-, \lambda_+ < \overline{\lambda}$, then we have

$$\begin{cases} \mathcal{C}(\lambda_+,\lambda_-) < \mathcal{C}(\lambda,\lambda) = 0, \\ \mathcal{C}(\lambda_-,\lambda_+) < \mathcal{C}(\lambda,\lambda) = 0 \end{cases}$$

and Theorem 1.2 shows that (1.2) admits at least one solution.

Acknowledgments

The authors would like to express their gratitude to Prof. J. de Figueiredo for his valuable suggestions and comments.

References

[1] Alves C. O. and de Figueiredo D. G., Nonvariational elliptic systems. *Disc. Cont. Dynamical Syst.*, 2002, **8**(2): 289-302.

[2] Boccardo L. and de Figueiredo D. G., Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations. *Nonlinear Diff. Eqn. Appl.*, 2002, **9**: 309-323.

[3] Clément Ph., de Figueiredo D. G. and Mitidieri E., Positive solutions of semilinear elliptic systems. *Commun. Part. Diff. Eqns.*, 1992, **17**: 923-940.

[4] de Figueiredo D. G., Semilinear elliptic systems. Lectures at the International School on Nonlinear Differential Equations, Trieste-Italy, October 2006.

[5] de Figueiredo D. G. and Ruf B., Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth. *Med. J. Math.*, 2004, **1**: 417-431.

[6] de Figueiredo D. G. and Yang J., A priori bounds for positive solutions of a non-variational elliptic systems. *Commun. PDE*, 2001, **23**(11&12): 2305-2322.

[7] Cîstea F., Montreanu D. and Radulescu V., Weak solutions of quasilinear problems with nonlinear boundary condition. *Nonlinear Anal.*, 2001, **43**: 623-636.

[8] Gallouët T. and Kavian O., Résultat d'existence et de non-existence pour certains problèmes demi-linéaires à l'infini. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 1981, **3**(3&4): 201-246.

[9] Schechter M., The Fucik spectrum. *Indiana Univ. Math. J.*, 1994, **43**: 1139-1157.

[10] Ponce A., Calculus of variations ans optimization. Lectures at the International School on Nonlinear Differential Equations, Trieste-Italy, October 2006.

[11] Deimling K., Nonlinear Functional Analysis, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.

Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2009(2009), No. 02, pp. 1–11.
ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu
ftp ejde.math.txstate.edu (login: ftp)

NONEXISTENCE RESULTS FOR SEMILINEAR SYSTEMS IN UNBOUNDED DOMAINS

BRAHIM KHODJA, ABDELKRIM MOUSSAOUI

Abstract. This paper concerns the non-existence of nontrivial solutions for the semi-linear system of gradient type

$$\lambda\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i})+f_k(x,u_1,\dots,u_m)=0\quad\text{in }\Omega,\ k=1,\dots,m$$

with Dirichlet, Neumann or Robin boundary conditions. The functions $f_k:\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ $(k=1,\dots,m)$ are locally Lipschitz continuous and satisfy

$$2H(x,u_1,\dots,u_m)-\sum_{k=1}^{m}u_kf_k(x,u_1,\dots,u_m)\geq 0\quad(\text{resp. }\leq 0)$$

for $\lambda>0$ (resp. $\lambda<0$). We establish the non-existence of nontrivial solutions using Pohozaev-type identities. Here $u_1,\dots,u_m$ are in $H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, $\Omega=\mathbb{R}\times\mathcal{D}$ with $\mathcal{D}=\prod_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i)$ and $H\in\mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{D}}\times\mathbb{R}^m)$ such that $\frac{\partial H}{\partial u_k}=f_k$, $k=1,\dots,m$.

1. Introduction

In this paper we study the semi-linear system

$$\begin{aligned}
\lambda\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i})+f_1(x,u_1,\dots,u_m)=0\quad\text{in }\Omega,\\
\lambda\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_i})+f_2(x,u_1,\dots,u_m)=0\quad\text{in }\Omega,\\
\dots\\
\lambda\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u_m}{\partial x_i})+f_m(x,u_1,\dots,u_m)=0\quad\text{in }\Omega,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

under Dirichlet, Neumann or Robin boundary conditions. Here $\Omega=\mathbb{R}\times\mathcal{D}$ where $\mathcal{D}=\prod_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i)$, λ is a real parameter, $f_k:\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ $(k=1,\dots,m)$ are locally Lipschitz continuous functions such that

$$f_k(x,0,\dots,0)=0\quad\text{in }\mathcal{D},$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35J45, 35J55.
Key words and phrases. Semi linear systems; Pohozaev identity; trivial solution; Robin boundary condition.

Submitted April 10, 2008. Published January 2, 2009.

so that $(u_1,\dots,u_m)=0$ is a solution of (1.1) and $p_i:\overline{\mathcal{D}}\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,n)$ are continuous functions satisfying

$$p_i(x)>0 \text{ or } p_i(x)<0 \quad \text{in } \mathcal{D}.$$

We assume that system (1.1) is of the gradient type; that is, there is a real-valued differentiable function $H(x,u_1,\dots,u_m)$ such that

$$\frac{\partial H}{\partial u_k}=f_k,\quad H(x,0,\dots,0)=0 \quad \text{for } x\in\mathcal{D}.$$

For $k=1,\dots,m$, u_k are in $H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ and satisfy

$$u_k(t,s)=0,\quad (t,s)\in\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D} \tag{1.2}$$

(Dirichlet boundary condition), or

$$\frac{\partial u_k(t,s)}{\partial n}=0,\quad (t,s)\in\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D} \tag{1.3}$$

(Neumann boundary condition), or

$$(u_k+\varepsilon\frac{\partial u_k}{\partial n})(t,s)=0,\quad (t,s)\in\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D} \tag{1.4}$$

(Robin boundary condition), where ε is a positive real number. Throughout this paper we denote the boundary of Ω by

$$\partial\Omega=\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D}=\Gamma_{\alpha_1}\cup\Gamma_{\beta_1}\cup\Gamma_{\alpha_2}\cup\Gamma_{\beta_2}\dots\cup\Gamma_{\alpha_n}\cup\Gamma_{\beta_n},$$

where

$$\Gamma_{\mu_s}=\{(t,x_1,\dots,x_{s-1},\mu_s,x_{s+1},\dots x_n),\ t\in\mathbb{R},\quad 1\le s\le n\},$$

$(t,x)=(t,x_1,\dots,x_n)$, and

$$n(t,s)=(0,n_1(t,s),n_2(t,s),\dots,n_n(t,s))$$

is the outward normal to $\partial\Omega$ at the point (t,s). If $x\in\prod_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i)$, $l=1,2,\dots,n$ and $\tau\in\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\dots,\alpha_n,\beta_n\}$ one writes

$$x_l^\tau=(x_1,\dots,x_{l-1},\tau,x_{l+1},\dots,x_n),\quad dx_l^*=dx_1\dots dx_{l-1}dx_{l+1}\dots dx_n$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\dots\int_{\alpha_{i-1}}^{\beta_{i-1}}\int_{\alpha_{i+1}}^{\beta_{i+1}}\dots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f_k(x,r_1,\dots,r_m)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n\\&=\int_{\mathcal{D}_i^*}f_k(x,r_1,\dots,r_m)dx_i^*\quad \text{for all } k=1,\dots,m.\end{aligned}$$

The question of non-existence of nontrivial solutions for elliptic problems has been studied extensively in both bounded and unbounded domain (see [3],[4],[7]-[9] and their references). In particular, Amster et al. in [1] showed the non-solvability of the gradient elliptic system

$$\begin{gathered}-\Delta u_i=g_i(u)\quad \text{in } \Omega,\\ u_i=0\quad \text{on } \partial\Omega,\ i=1,\dots,n,\end{gathered}$$

where Ω is a starshaped domain. A similar result was given for Hamiltonian systems by N. M. Chuong and T. D. Ke [2] in k-starshaped domain and by Khodja [6] in unbounded domain $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$.

In the scalar case, when Ω is an unbounded domain, Haraux and Khodja [4] established that under assumptions

$$f(0)=0,$$
$$2F(u)-uf(u)\le 0,\quad u\neq 0$$

($F(u)=\int_0^u f(s)ds$), the problem

$$-\Delta u+f(u)=0\quad\text{in }\Omega,$$
$$(u\text{ or }\frac{\partial u}{\partial n})=0\quad\text{on }\partial\Omega,$$

has only a trivial solution in $H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, where $\Omega=J\times\omega$, $J\subset\mathbb{R}$ is an unbounded interval and ω a domain in $\mathbb{R}^N$. The case of Robin boundary conditions was treated by Khodja [5] and it was shown nonexistence results for the equation

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\big(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\big)-\frac{\partial}{\partial y}\big(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\big)+f(x,y,u)=0\quad\text{in }\Omega,$$

where $\Omega=\mathbb{R}\times]\alpha_1,\beta_1[\times]\alpha_2,\beta_2[$. In the above works, the integral identity of Pohozaev was adapted for each problem treated and applied to obtain the non-existence results. The present study extends and complements these works. We shall prove the non-solvability results to the class of semi-linear system of gradient type (1.1) under Dirichlet, Neumann or Robin boundary conditions. By using a Pohozaev-type identity, our demonstration strategy will be to show that the function

$$\mathcal{E}(t)=\int_{\mathcal{D}}\big(\sum_{k=1}^m|u_k(t,x)|^2\big)dx$$

is convex in $\mathbb{R}$, and then, from the Maximum Principle, we obtain that any solution $(u_1,\dots,u_m)$ to the problems (1.1)-(1.2), (1.1)-(1.3) and (1.1)-(1.4) is trivial. We draw the attention of the reader to the use of the Pohozaev-type identity which, to the best of our knowledge, was not explored before in connection with gradient systems in an unbounded cylindrical-type domain.

This paper is organized as follows. In the next section, we give a Pohozaev-type identity adapted to the systems with Dirichlet, Neumann and Robin boundary conditions; section 3 gives our main results and some examples will be illustrated in section 4.

2. Integral identities

The proof of our main results which will appear in the next section use the following type of Pohozaev identity, adapted for systems.

Theorem 2.1. *Let $u_1,\dots,u_m$ in $H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ be a solution of problem (1.1)–(1.4). Then for each $t\in\mathbb{R}$ and $\varepsilon>0$, we have*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{D}}\Big[\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^m|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2+\sum_{i=1}^n\frac{p_i(x)}{2}\Big(\sum_{k=1}^m|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}|^2\Big)+H(x,u_1,\dots,u_m)\Big]dx\\&+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})\big(\sum_{k=1}^m|u_k|^2\big)(t,x_i^{\beta_i})+p_i(x_i^{\alpha_i})\big(\sum_{k=1}^m|u_k|^2\big)(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^*=0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Proof. For $t \in \mathbb{R}$ we consider a function

$$\mathcal{K}(t) = \int_{\mathcal{D}} \big[\frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{m} |\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} (\sum_{k=1}^{m} |\frac{\partial u_k}{\partial x_i}|^2) + H(x, u_1, \dots, u_m)\big] dx.$$

The hypothesis on u_k, f_k $(k = 1, \dots, m)$ and p_i $(i = 1, \dots, n)$ implies that $\mathcal{K}$ is absolutely continuous and thus differentiable almost everywhere on $\mathbb{R}$; we have

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \big[\lambda \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial t} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial x_i} \Big) \\ + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial t} f_k(x, u_1, \dots, u_m)\big] dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Fubini's theorem and an integration by part give

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial x_i} \Big)(t, x) dx \\ &= - \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \big[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) \frac{\partial u_k}{\partial t} \big](t, x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \big[p_i(x_i^{\beta_i}) (\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t})(t, x_i^{\beta_i}) - p_i(x_i^{\alpha_i}) \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \Big)(t, x_i^{\alpha_i}) \big] dx_i^*. \end{aligned}$$

Replacing in (2.2) we find

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathcal{D}} \Big[\lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) + f_k(x, u_1, \dots, u_m) \Big](t, x) \frac{\partial u_k}{\partial t} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \Big[p_i(x_i^{\beta_i}) (\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t})(t, x_i^{\beta_i}) - p_i(x_i^{\alpha_i}) \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \Big)(t, x_i^{\alpha_i}) \Big] dx_i^*. \end{aligned}$$

Let us consider on $\partial\Omega$ the expression $u_k + \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0$. For $k = 1, \dots, m$

$$u_k + \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (u_k - \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial x})(t, x_i^{\alpha_i}) = 0, \\ (u_k + \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial x})(t, x_i^{\beta_i}) = 0, \\ t \in \mathbb{R}, \alpha_i < x_i < \beta_i, i = 1, \dots n. \end{cases}$$

Then for $\varepsilon > 0$, one can write

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \Big[p_i(x_i^{\beta_i}) \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \Big)(t, x_i^{\beta_i}) - p_i(x_i^{\alpha_i}) (\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial t} \Big)(t, x_i^{\alpha_i}) \Big] dx_i^* \\ &= \frac{-1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \Big[p_i(x_i^{\beta_i}) (\sum_{k=1}^{m} u_k \frac{\partial u_k}{\partial t})(t, x_i^{\beta_i}) + p_i(x_i^{\alpha_i}) \Big(\sum_{k=1}^{m} u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \Big)(t, x_i^{\alpha_i}) \Big] dx_i^* \\ &= \frac{-1}{2\varepsilon} \frac{d}{dt} (\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_i^*} \Big[p_i(x_i^{\beta_i}) (\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2)(t, x_i^{\beta_i}) + p_i(x_i^{\alpha_i}) (\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2)(t, x_i^{\alpha_i}) \Big] dx_i^*). \end{aligned}$$

Therefore,

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{K}(t)+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2)(t,x_i^{\beta_i})$$
$$+p_i(x_i^{\alpha_i})(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2)(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^*\Big)=0.$$

Integrating with respect to t, we obtain

$$\mathcal{K}(t)+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\beta_i})$$
$$+p_i(x_i^{\alpha_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^*=\text{const}$$

and since $(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x))\in(H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega))^m$, one must get

$$\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}(t)+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2)(t,x_i^{\beta_i})$$
$$+p_i(x_i^{\alpha_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^*)dt<\infty.$$

It follows that the constant must be 0, which is the desired result. $\square$

For the Dirichlet or Neumann boundary conditions, we have the integral identity given in the following theorem.

Theorem 2.2. *Let $u_1,\dots,u_m$ in $H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ be a solution of problems* (1.1)-(1.2) *or* (1.1)-(1.3)*. Then for each $t\in\mathbb{R}$, we have*

$$\int_{\mathcal{D}}\Big[\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i(x)}{2}\Big(\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}|^2\Big)+H(x,u_1,\dots,u_m)\Big]dx=0. \tag{2.3}$$

Proof. To prove (2.3) it suffices to check that the expression

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\beta_i})+p_i(x_i^{\alpha_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^*$$

vanishes if

$$u_1(t,s)=u_2(t,s)=\dots=u_m(t,s)=0,\ (t,s)\in\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D} \tag{2.4}$$

or

$$\frac{\partial u_1(t,s)}{\partial n}=\frac{\partial u_2(t,s)}{\partial n}=\dots=\frac{\partial u_m(t,s)}{\partial n}=0,\ (t,s)\in\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D}. \tag{2.5}$$

Indeed, suppose that (2.4) holds then it is known that

$$\nabla u_k=\frac{\partial u_k}{\partial n}\cdot n,\quad k=1,\dots,m;$$

i.e.,

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial t}(t,s)\\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1}(t,s)\\ \dots\\ \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(t,s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ n_1\frac{\partial u_k}{\partial n}(t,s)\\ \dots\\ n_n\frac{\partial u_k}{\partial n}(t,s)\end{bmatrix},\quad (t,s)\in\mathbb{R}\times\partial\mathcal{D},\quad k=1,\dots,m.$$

Consequently, for $k = 1, \dots, m$,

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}(t, x_i^{\alpha_i}) = \frac{\partial u_k}{\partial t}(t, x_i^{\beta_i}) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Now if the boundary condition is (2.5), then for $k = 1, \dots, m$, one can write

$$0 = \frac{\partial u_k}{\partial n}(t, s) = \langle \nabla u_k, n \rangle \text{ on } \Gamma_{\alpha_1} \cup \Gamma_{\beta_1} \cup \Gamma_{\alpha_2} \cup \Gamma_{\beta_2} \dots \cup \Gamma_{\alpha_n} \cup \Gamma_{\beta_n};$$

i.e.,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t, x_i^{\alpha_i}) = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t, x_i^{\beta_i}) = 0, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, m.$$

In both cases $\frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$ which completes the proof. □

3. Main results

Before giving our main results, we note that the parameter λ plays, in fact, an important part as it allows (1.1) to be dealt with in two manners based on whether its value is positive or negative. Indeed, if λ is positive (resp. negative), the system (1.1) is a hyperbolic (resp. elliptic) problem.

3.1. Semi-linear hyperbolic problems.

Using identity (2.1) we obtain the following first result.

Theorem 3.1. *Let $\lambda > 0$ and $u_1, \dots, u_m \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Assume $p_i(x) > 0$ in $\mathcal{D}$ $(i = 1, \dots, n)$ and f_k $(k = 1, \dots, m)$ satisfying*

$$H(x, u_1, \dots, u_m) \geq 0.$$

Then problems (1.1)-(1.2), (1.1))-(1.3) and (1.1)-(1.4) have no nontrivial solutions.

Proof. Applying formula (2.1) (resp. (2.3)) we immediately obtain

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t, x) = 0 \quad \text{in } \Omega, \ i = 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, m.$$

Thus $u_1, \dots, u_m$ are constant and since for $k = 1, \dots, m$,

$$\int_\Omega |u_k(t, x)|^2 dx dt \leq 0,$$

these constants are necessarily zero. □

The next theorem gives a non-existence result if the functions f_k $(k = 1, \dots, m)$ satisfy another type of non-linearity.

Theorem 3.2. *Let $\lambda > 0$ and $u_1, \dots, u_m : \Omega \to \mathbb{R}$ be a solution of problem (1.1)-(1.4). Suppose that $u_1, \dots, u_m \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ and f_k $(k = 1, \dots, m)$ verify the following condition*

$$2H(x, u_1, \dots, u_m) - \sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x, u_1, \dots, u_m) \geq 0. \tag{3.1}$$

Then problem (1.1)-(1.4) has no nontrivial solutions.

Remark 3.3. Since $u_1, \dots, u_m$ are bounded in Ω, from the Maximum Principle, the function $\mathcal{E}(t)$ is convex in $\mathbb{R}$ which implies that the solution to the problem (1.1)-(1.4) is identically equal to zero.

Proof of Theorem 3.2. It is easy to see that almost everywhere in Ω

$$(u_k\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2})(t,x)=\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2(u_k^2)}{\partial t^2}-|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2\Big)(t,x),\quad k=1,\dots,m.$$

Let us multiply the k-th equation of (1.1) by $u_k/2$ and integrate over $\mathcal{D}$ we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{D}}\Big[\lambda\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\frac{u_k}{2}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i})\frac{u_k}{2}+f_k(x,u_1,\dots,u_m)\frac{u_k}{2}\Big](t,x)dx\\
&=\int_{\mathcal{D}}\big[\frac{\lambda}{4}\frac{\partial^2(u_k^2)}{\partial t^2}-\frac{\lambda}{2}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2\big](t,x)dx\\
&\quad+\int_{\mathcal{D}}\Big[-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i})\frac{u_k}{2}+f(x,u_1,\dots,u_m)\frac{u_k}{2}\Big](t,x)dx.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Let us transform

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{D}}\Big(-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i})\frac{u_k}{2}\Big)(t,x)dx\\
&=\int_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^n\frac{p_i(x)}{2}|\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_i}|^2dx\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i})(t,x_i^{\beta_i})-p_i(x_i^{\alpha_i})(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i})(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^*.
\end{aligned}$$

The substitution of this formula in (3.2) gives

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{D}}\Big[\lambda\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\frac{u_k}{2}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i})\frac{u_k}{2}+f(x,u_1,\dots,u_m)\frac{u_k}{2}\Big](t,x)dx\\
&=\int_{\mathcal{D}}\Big(\frac{\lambda}{4}\frac{\partial^2(u_k^2)}{\partial t^2}-\frac{\lambda}{2}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2\Big)(t,x)dx\\
&\quad+\int_{\mathcal{D}}\sum_{i}^n\frac{p_i(x)}{2}|\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_i}|^2dx+\int_{\mathcal{D}}(\frac{u_k}{2}f(x,u_1,\dots,u_m))(t,x)dx\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i})(t,x_i^{\beta_i})-p_i(x_i^{\alpha_i})(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i})(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^*\\
&=\int_{\mathcal{D}}(\frac{\lambda}{4}\frac{\partial^2(u_k^2)}{\partial t^2}-\frac{\lambda}{2}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2)(t,x)dx\\
&\quad+\int_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^n\frac{p_i(x)}{2}|\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x_i}|^2dx+\int_{\mathcal{D}}(\frac{u_k}{2}f(x,u_1,\dots,u_m))(t,x)dx\\
&\quad+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})|u_k(t,x_i^{\beta_i})|^2+p_i(x_i^{\alpha_i})|u_k(t,x_i^{\alpha_i})|^2\Big]dx_i^*.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

Adding these identities for $k = 1, \dots, k_0$, we get

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{4}\int_{\mathcal{D}}\Big(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2(u_k^2)}{\partial t^2}\Big)(t,x)dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{D}}\Big(\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2\Big)(t,x)dx \\
&\quad + \int_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i(x)}{2}(\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}|^2)(t,x)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}(\sum_{k=1}^{m}u_k f_k(x,u_1,\dots,u_m))(t,x)dx \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\beta_i}) + p_i(x_i^{\alpha_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^* = 0,
\end{aligned}$$

which combined with (2.1) yields

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{4}\frac{d^2}{dt^2}\Big(\int_{\mathcal{D}}(\sum_{k=1}^{m}u_k^2)(t,x)dx\Big) &= \lambda\int_{\mathcal{D}}(\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2)(t,x)dx + \int_{\mathcal{D}}\Big[H(x,u_1,\dots,u_m) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{m}u_k f_k(x,u_1,\dots,u_m))(t,x,y)\Big]dx.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

The assumptions (3.1) and $\lambda > 0$ enable us to assert that

$$\frac{\lambda}{4}\frac{d^2}{dt^2}\Big(\int_{\mathcal{D}}(\sum_{k=1}^{m}u_k^2)(t,x)dx\Big) \ge \lambda\int_{\mathcal{D}}\Big(\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2\Big)(t,x)dx \ge 0,$$

for all $t \in \mathbb{R}$. This completes the proof. □

Theorem 3.4. *Let $\lambda > 0$ and f_k be as described in Theorem 3.2. Assume that $u_1, \dots, u_m \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ is a solution of (1.1)-(1.2) or (1.1)-(1.3). Then problems (1.1))-(1.2) and (1.1)-(1.3) have no nontrivial solutions.*

Proof. By a similar arguments as in the proof of Theorem 3.2 we obtain

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{4}\int_{\mathcal{D}}\Big(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2(u_k^2)}{\partial t^2}\Big)(t,x)dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{D}}\Big(\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2\Big)(t,x)dx \\
&+ \int_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i(x)}{2}\Big(\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}|^2\Big)(t,x)dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\Big(\sum_{k=1}^{m}u_k f_k(x,u_1,\dots,u_m)\Big)(t,x)dx \\
&+ \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{D}_i^*}\Big[p_i(x_i^{\beta_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\beta_i}) + p_i(x_i^{\alpha_i})\big(\sum_{k=1}^{m}|u_k|^2\big)(t,x_i^{\alpha_i})\Big]dx_i^* = 0.
\end{aligned}$$

If

$$u_1(t,s) = \dots = u_m(t,s) = 0, \quad (t,s) \in \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D}$$

or

$$\frac{\partial u_1(t,s)}{\partial n} = \dots = \frac{\partial u_m(t,s)}{\partial n} = 0,\ (t,s) \in \mathbb{R} \times \partial\mathcal{D},$$

this formula reduces to

$$\frac{\lambda}{4}\int_{\mathcal{D}}\Big(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2(u_k^2)}{\partial t^2}\Big)(t,x)dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{D}}\Big(\sum_{k=1}^{m}|\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2\Big)(t,x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x)}{2} \Big(\sum_{k=1}^{m} |\frac{\partial u_k}{\partial x_i}|^2 \Big)(t,x) dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \Big(\sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x, u_1, \dots, u_m) \Big)(t,x) dx = 0.
\end{aligned}
$$

We can now employ (2.3) to transform this identity into the form

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{4} \int_{\mathcal{D}} \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 (u_k^2)}{\partial t^2} \Big)(t,x) dx \\
&= \lambda \int_{\mathcal{D}} \Big(\sum_{k=1}^{m} |\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2 \Big)(t,x) dx \\
&\quad + \int_{\mathcal{D}} \Big[H(x, u_1, \dots, u_m) - \frac{1}{2} \Big(\sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x, u_1, \dots, u_m) \Big)(t,x,y) \Big] dx\,.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

This completes the proof. □

3.2. **Semi-linear elliptic problems.** We shall prove that a dual result holds for $\lambda < 0$.

Theorem 3.5. *Let $(u_1, \dots, u_m) \in (H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^m$ be a solution of* (1.1)*)-*(1.4)*, $\lambda < 0$ and f_k $(k = 1, \dots, m)$ satisfying*

$$
2H(x, u_1, \dots, u_m) - \sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x, u_1, \dots, u_m) \le 0. \tag{3.6}
$$

Then problem (1.1)-(1.4) *has no nontrivial solutions.*

Proof. Formula (3.4) combined with the assumption (3.6) yields

$$
\frac{\lambda}{4} \frac{d^2}{dt^2} \Big(\int_{\mathcal{D}} (\sum_{k=1}^{m} u_k^2)(t,x) dx \Big) \le \lambda \int_{\mathcal{D}} \Big(\sum_{k=1}^{m} |\frac{\partial u_k}{\partial t}|^2 \Big)(t,x) dx, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}
$$

and $\lambda < 0$ gives the desired result. □

Theorem 3.6. *Let $\lambda < 0$ and f_k $(k = 1, \dots, m)$ be as described in Theorem 3.5. We assume that*

$$
u_1, \dots, u_m \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)
$$

is a solution of (1.1)-(1.2) *or 1.1-*(1.3)*. Then problems* (1.1)-(1.2) *and* (1.1)-(1.3) *have no nontrivial solutions.*

This theorem follows from (3.5) and (3.6) with $\lambda < 0$.

4. Examples

In this section, we illustrate our theoretical results by giving some examples.

Example 1. Let $\theta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ be a continuous function, the exponents $\alpha_s > 0$, $s = 1, \dots, m$ and

$$p_i(x) > 0 \quad \text{or} \quad p_i(x) < 0 \text{ in } \mathcal{D}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Then system (1.1) with

$$f_k(x, u_1, \dots, u_m) = \theta(x)\Big[\prod_{s=1,\, s\neq k}^{m} \frac{1}{\alpha_s + 1}|u_s|^{\alpha_s+1}\Big]|u_k|^{\alpha_k-1}u_k, \quad k = 1, \dots, m$$

subject to Dirichlet, Neumann or Robin boundary conditions, does not have non-trivial solutions. Indeed, when $\lambda > 0$ and $p_i, \theta > 0$ in $\mathcal{D}$, $(i = 1, \dots, n)$, we have

$$H(x, u_1, \dots, u_m) = \theta(x)\Big[\prod_{s=1}^{m} \frac{1}{\alpha_s + 1}|u_s|^{\alpha_s+1}\Big]$$

and Theorem 3.1 gives the desired result.

When $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), $\theta(x) \le 0$ (resp. $\theta(x) \ge 0$) in $\mathcal{D}$ and $p_i(x) > 0$ or $p_i(x) < 0$ in $\mathcal{D}$, $i = 1, \dots, n$, we have

$$\begin{aligned} &2H(x, u_1, \dots, u_{k_0}) - \sum_{k=1}^{m} u_k f_k(x, u_1, \dots, u_m) \\ &= \theta(x)\frac{2 - \sum_{k=1}^{m}(\alpha_k + 1)}{\prod_{k=1}^{m}(\alpha_k + 1)} \prod_{k=1}^{m} |u_k|^{\alpha_k+1} \le 0 \quad (\text{resp. } \ge 0)\,. \end{aligned}$$

We conclude by using Theorem 3.2 or Theorem 3.4 (resp. Theorem 3.5 or Theorem 3.6) as the system is subject to Robin, Neumann or Dirichlet boundary conditions.

Example 2. Let us consider the system (1.1) with $m = 2$ and

$$\begin{aligned} f_1(x, u_1, u_2) &= \rho(x)u_2(|u_1|^{\alpha-1}u_1 + \frac{1}{\beta + 1}|u_2|^{\beta-1}u_2), \\ f_2(x, u_1, u_2) &= \rho(x)u_1(\frac{1}{\alpha + 1}|u_1|^{\alpha-1}u_1 + |u_2|^{\beta-1}u_2), \end{aligned}$$

where the continuous function $\rho(x)$ is positive (resp. negative) and α, β are positive real number. Then this problem does not have nontrivial solutions.
It suffices to remark that

$$H(x, u_1, u_2) = \rho(x)(u_2\frac{|u_1|^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + u_1\frac{|u_2|^{\beta+1}}{\beta + 1})$$

and a simple computation gives

$$\begin{aligned} &2H(x, u_1, u_2) - u_1 f_1(x, u_1, u_2) - u_2 f_2(x, u_1, u_2) \\ &= \rho(x)\Big[(\frac{1}{\alpha + 1} - 1)|u_1|^{\alpha+1}u_2 + (\frac{1}{\beta + 1} - 1)|u_2|^{\beta+1}u_1\Big] \le 0 \quad (\text{resp. } \ge 0). \end{aligned}$$

The conclusion is the same as in the previous example.

4.1. **Example3.** For the scalar case ($m = 1$), let $\theta_1, \theta_2 : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ be two nonnegative continuous functions, $p, q \geq 1$ and

$$f(x,u) = \delta u + \theta_1(x)|u|^{p-1}u + \theta_2(x)|u|^{q-1}u,$$

where δ is a real constant. Then the problem

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(p_i(x)\frac{\partial u}{\partial y_i}) + f(x,u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$u + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

does not have nontrivial solutions. A simple computation gives

$$2H(x,u) - uf(x,u) = \theta_1(x)(\frac{2}{p+1} - 1)|u|^{p+1} + \theta_2(x)(\frac{2}{q+1} - 1)|u|^{q+1} \leq 0,$$

and an application of Theorem 3.5 gives the desired result.

References

[1] P. Amster, P. De Napoli and M. C. Mariani; Existence of solutions for elliptic systems with critical Sobolev exponent, *Elect. Journal of Diff. Eqts* **2002**, no. 49 (2002), 1-13.

[2] N. M. Chuong and T. D. Ke; Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system, *Elect. Journal of Diff. Eqts* **2004**, no. 93 (2004), 1-15.

[3] M. J. Esteban and P. L. Lions; Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Proceeding of Royal Society of Edinburgh,* Section A **93** (1982-1983).

[4] A. Haraux and B. Khodja; Caractère trivial de la solution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires dans des ouverts cylindriques de $\mathbb{R}^N$, *Portugaliae Mathematica* **42** (1982), 209-219.

[5] B. Khodja; A nonexistence result for a nonlinear PDE with Robin condition, *International Journal of Math. and math. Sciences* (2006), 1-12.

[6] B. Khodja; Nonexistence of solutions for semilinear equations and systems in cylindrical domains, *Comm. on Applied Nonlinear Analysis* **7** (2000), 19-30.

[7] J. S. McGough; Nonexistence and uniqueness in semilinear elliptic systems, *Diff. Eqts and Dynamical Syst.* **4** (1996), 157-176.

[8] Y. Naito; Nonexistence results of positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, *Journal Math. Society Japan* **52** (2000), 637-644.

[9] S. I. Pohozaev; Eingenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda u = 0$, *Soviet Mathematics Doklady*, **6**(1965), 1408-1411.

Brahim Khodja
Department of mathematics, Badji Mokhtar University, B.P. 12 Annaba, Algeria
E-mail address: `bmkhodja@yahoo.fr`

Abdelkrim Moussaoui
Department of mathematics, Bejaia University, Targa Ouzemour Bejaia, Algeria
E-mail address: `remdz@yahoo.fr`