

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR - ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté: Sciences
Département: Physique

Année : 2006

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT
D'ETAT

Intitulée

**Étude de la diffraction des ondes
électromagnétiques par des surfaces rugueuses**

Option : Matière et Rayonnement

Par : AFIFI Saddek

DIRECTEUR DE THESE: DIAF Madjid Professeur Univ. Annaba

DEVANT Le JURY

PRESIDENT : BELKHIR Hafid Professeur Univ. Annaba

EXAMINATEURS:

GHERS Mokhtar Professeur Univ. Annaba

GUERGOURI Kamel Professeur Univ. Constantine

MEDDOUR Athmane Professeur Univ. Guelma

Abstract:

The scattering of electromagnetic wave by rough structures determinist or random, metal or dielectric are studied by a differential method. The formalism used primarily based on the Maxwell's equations in covariant form within the framework of a non-orthogonal coordinates system adapted to the geometry of the problem. The solutions of the problem are written in Fourier's integral form.

For the direct problem two methods are proposed:

- The first, regards the deformation as a disturbing function and the solutions are found by a perturbation method.
- The second one, the treatment is more rigorous. The problem is brought back to the resolution of a linear integro-differential system with constant coefficients. Thereafter one is led in the search of eigenvalues and eigenvectors of a matrix characteristic at the same time of the medium and form of diffracting surface.

For the inverse problem, the reconstruction of the profile of the metal surface from the simulated diffraction intensity values, is found using an iterative algorithm.

Key words: electromagnetic wave, diffraction, rough surfaces, direct problem, perturbation method, rigorous method, inverse problem.

Résumé :

La diffraction d'une onde électromagnétique par des surfaces rugueuses déterministe ou aléatoire, métallique ou diélectrique est étudiée par une méthode différentielle. Le formalisme utilisé repose essentiellement sur la forme covariante des équations de Maxwell écrites dans un système de coordonnées non orthogonales adapté à la géométrie du problème. Les solutions du problème sont écrites sous forme d'intégrale de Fourier.

Pour le problème direct, deux méthodes sont proposées :

- Dans la première, on considère la déformation comme une fonction perturbatrice et les solutions sont trouvées par une méthode de perturbations.
- Dans la seconde, le traitement est plus rigoureux. Le problème est ramené à la résolution d'un système intégral-différentiel linéaire à coefficients constants. Par la suite, on est conduit à la recherche de valeurs et de vecteurs propres d'une matrice caractéristique à la fois du milieu et de la forme de la surface diffractante.

Pour le problème inverse, la reconstruction du profil de la surface métallique pour les valeurs de l'intensité de diffraction simulées est faite à partir d'un algorithme basé sur une méthode itérative.

Mots clés : onde électromagnétique, diffraction, surfaces rugueuses, problème direct, méthode des perturbations, méthode rigoureuse, problème inverse.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur Madjid DIAF, qui m'a accueilli au sein de son équipe et dirigé ce travail. Je le remercie également pour la confiance qu'il m'a témoignée, l'aide, les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je tiens tout spécialement à lui exprimer ici ma profonde reconnaissance.

Je remercie Monsieur le Professeur BELKHIR Hafid, pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer en tant que président du jury.

Je remercie Monsieur le Professeur GHERS Mokhtar d'avoir examiné ce travail. Je lui suis reconnaissant d'avoir accepté de participer à mon jury.

Je remercie également Monsieur GUERGOURI Kamel, Professeur au département de Physique à l'Université de Constantine, d'avoir examiné ce travail et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer à mon jury.

Que Monsieur MEDDOUR Athmane, Professeur au département de Physique à l'Université de Guelma trouve ici ma profonde gratitude pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail et de participer à mon jury.

Mes remerciements vont également à tous les membres de l'équipe MIL (Matériaux et Instrumentation Laser) pour leur sympathie et leur collaboration.

Je ne saurai terminer sans adresser une pensée particulière à tous les membres de ma famille pour le soutien qu'ils m'ont apporté. Merci enfin à mes amis.

Liste des Tableaux

<i>Tableau II.1. Les conditions aux limites.</i>	33
<i>Tableau II.2. L'énergie totale diffractée.</i>	44
<i>Tableau II.3. Valeur moyenne de l'intensité totale diffractée.</i>	48
<i>Angle d'incidence $\theta_0=30^\circ$, $LT=30$, $NE=500$.</i>	
<i>Métal : Aluminium $\nu=1,2099-j6,4299$.</i>	
<i>Argent $\nu=0,06699-j4,040$.</i>	
<i>Or $\nu=0,1619-j3,2103$.</i>	
<i>Tableau III.1. Les conditions aux limites.</i>	53
<i>Tableau III.2. Les différents types d'onde pour chaque milieu suivant les valeurs de β.</i>	57
<i>Tableau IV.1. Les conditions aux limites.</i>	75

Liste des figures

Figure I.1. Système de coordonnées de translation.	22
Figure II.1. Profil de la surface rugueuse.	29
Figure II.2. L'intensité de diffraction, (a) Mode TE , (b) Mode TM . Déformation sinusoïdale (Hauteur $h=0,1\lambda$; Période $d=1\mu\text{m}$). Longueur d'onde $\lambda=0,633\mu\text{m}$; Incidence $\theta_0=60^\circ$; Métal: Aluminium .	45
Figure II.3: Profil de la surface aléatoire. (a) $lT=1$, (b) $lT=10$, (c) $lT=30$, (d) $lT=100$.	46
Figure II.4. Valeur moyenne de l'intensité diffractée. Angle d'incidence $\theta_0=30^\circ$, métal: Argent , Polarisation TE , Nbre d'échantillons $NE=500$. (a) $lT=1$, (b) $lT=10$, (c) $lT=30$, (d) $lT=100$.	47
Figure III.1. Profil du guide diélectrique déformé.	51
Figure III.2. Les graphes de dispersion d'un guide diélectrique lisse déposé sur un substrat métallique infiniment conducteur. (—) mode TE ; (.....) mode TM ; n indice de l'harmonique.	64
Figure III.3. Pertes totales en dB, (a) Mode TE , (b) Mode TM . Déformation sinusoïdale ($h/l=0,1$; $l/u_0=5$), $\nu=2,6$.	67
Figure III.4. Diagramme de rayonnement exprimant l'énergie rayonnée en fonction de la direction θ ($\theta_0=30^\circ$).	68
Figure IV.1. Profil de la surface diffractante.	71
Figure IV.2. Organigramme général.	80
Figure IV.3. Densité relative d'énergie de diffraction. Déformation Gaussienne ($h=0,1\mu\text{m}$, $d=3\mu\text{m}$) Angle d'incidence $\theta_0=30^\circ$; $\lambda=0,59\mu\text{m}$; $\nu=0,99-i6,46$.	81
Figure IV.4. Densité relative d'énergie de diffraction (a) Mode TE ; (b) Mode TM . Déformation sinusoïdale ($h=0,2\mu\text{m}$; $d=0,6\mu\text{m}$) ; Angle d'incidence $\theta_0=30^\circ$, $\lambda=0,59\mu\text{m}$; $\nu=0,99-i6,46$.	82
Figure V.1 Organigramme du problème inverse.	91
Figure V.2. Reconstruction du profil d'un réseau fini. Déformation sinusoïdale ($h=0,05\lambda$; $l=2\lambda$). (a) $d=1\lambda$; (b) $d=0,5\lambda$; (c) $d=0,33\lambda$. $\lambda=0,633\mu\text{m}$; Métal: Aluminium . (—) vrai profil, (- · -) estimation, (.....) profil reconstruit.	95
Figure V.3. Reconstruction du profil de la surface aléatoire. (a) $lT=1$, (b) $lT=10$, (c) $lT=30$, (d) $lT=100$. (—) vrai profil, (- · -) estimation, (.....) profil reconstruit.	97

SOMMAIRE

INTRODUCTION	3
PREMIÈRE PARTIE : PRÉSENTATION DU FORMALISME	8
CHAPITRE I: LES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN COORDONNÉES CURVILIGNES	
I.1. Introduction	10
I.2. Forme classique des équations de Maxwell	11
I.3. Les équations de Maxwell sous forme tensorielle covariante	12
I.4. Les équations de Maxwell sous forme covariante tridimensionnelle	15
I.5. Les équations de propagations	17
I.6. Théorème de Poynting en coordonnées curvilignes	21
I.7. Définition d'un nouveau système de coordonnées	21
DEUXIÈME PARTIE : MÉTHODE DE PERTURBATIONS	26
CHAPITRE II: LA DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNETIQUE PAR UNE SURFACE MÉTALLIQUE RUGUEUSE DE CONDUCTIVITÉ FINIE	
II.1. Introduction	28
II.2. Formulation du problème	28
II.3. Méthode de perturbations	32
II.4. Résolution	32
II.5. Bilan énergétique	35
II.6. Résolution au premier ordre de perturbations	37
II.7. Applications Numériques	42
II.8. Conclusion	48
CHAPITRE III: ÉTUDE DES PERTES PAR RAYONNEMENT DANS UN GUIDE DÉFORMÉ APÉRIODIQUEMENT	
III.1. Introduction	50
III.2. Position du problème	50
III.3. Résolution	52
III.4. Résultats numériques	63

TROISIÈME PARTIE : MÉTHODE RIGOUREUSE	68
CHAPITRE IV: ÉTUDE DE LA DIFFRACTION PAR UNE MÉTHODE RIGOUREUSE	
IV.1. Position du problème	70
IV.2. Mise en équation du problème	71
IV.3. Résolution	73
IV.4. Calcul des densités d'énergie	76
IV.5. Applications numériques	78
IV.6. Conclusion	83
QUATRIÈME PARTIE : ÉTUDE DU PROBLÈME INVERSE DE LA DIFFRACTION	84
CHAPITRE V: PROBLÈME INVERSE ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES	
V.1. Introduction	86
V.2. Principe de la méthode employée	87
V.3. Mise en équations du problème	92
V.4. Applications	94
CONCLUSION	98
ANNEXES	101
A. Rappel sur les tenseurs	102
B. Caractérisation de la surface	106
BIBLIOGRAPHIE	109

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Les problèmes de la diffraction et la transmission des ondes électromagnétiques à travers des structures déformées sont devenus au cours de ces dernières années un important thème de recherche en électromagnétisme grâce à son large domaine d'application en optique, acoustique, propagation et télécommunication. En effet l'étude de l'interaction d'une onde électromagnétique avec les couches minces utilisées en optique, la surface d'une mer agitée, les irrégularités de la terre ..., permet une bonne connaissance des effets de ces déformations sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Suivant la manière dont on pose le problème, celui-ci se présente soit sous forme direct, soit sous forme inverse.

Dans le premier cas, qui trouve une large application dans le domaine de la diffraction, et de la propagation et en radiocommunication, on cherche à caractériser l'onde diffractée connaissant la forme du profil diffractant.

Dans le second cas, le problème réside dans la recherche des caractéristiques topographiques de la surface à partir de la connaissance de l'énergie diffractée.

Diverses techniques sont employées actuellement avec leurs problèmes :

- Le stylet à pointe de diamant qu'on déplace sur le profil de la surface et dont le mouvement est amplifié et mesuré par un dispositif électronique. L'inconvénient est le risque de détérioration de la surface et le manque de fiabilité des résultats consécutifs à l'usure de la pointe utilisée.
- La microscopie électronique qui donne de bons résultats mais nécessite un appareillage coûteux.

La tendance actuelle est d'élargir l'usage des méthodes optiques basées sur l'étude du diagramme de diffraction engendré par la surface à caractériser lorsqu'elle est éclairée par un faisceau lumineux. Les travaux concernant la résolution du problème inverse montrent que ce problème, encore plus difficile que le problème direct, nécessite la résolution préalable de ce dernier. Le problème direct n'étant pas parfaitement résolu dans un domaine suffisamment

études ont été faites par l'équipe du laboratoire LASMEA de Clermont Ferrant [19-27] traitent la diffraction par des réseaux ou des surfaces bipériodiques.

L'étude que nous présentons ici rentre dans le cadre des travaux commencés depuis quelques années, dans le laboratoire d'électromagnétisme de l'université Blaise Pascal Clermont Ferrand (France), en vue de résoudre le problème général de la diffraction dans les différents domaines de l'électromagnétisme. Ce travail est consacré à la résolution du problème de la diffraction et de la propagation d'une onde électromagnétique par des surfaces métalliques rugueuses. Deux méthodes sont proposées : la première, purement analytique mais nécessitant certaines approximations, est une méthode de perturbation qui permet d'aboutir à des résultats analytiques simples facilement exploitables. La seconde, appelée " méthode différentielle rigoureuse ", est plutôt numérique et permet de résoudre le problème en dehors de ces approximations tout en restant limité par les contraintes numériques. Ces méthodes, qui consistent à résoudre les équations de Maxwell dans chaque milieu et à raccorder les solutions au niveau des surfaces de séparation, sont basées sur l'utilisation d'un formalisme différentiel qui permet de traiter simultanément les deux cas de polarisation **TE** (transverse électrique) et **TM** (transverse magnétique) et dont l'application au cas des réseaux a donné des résultats très satisfaisants [19-27]. Ce formalisme repose essentiellement sur la forme covariante des équations de Maxwell et sur l'utilisation d'un système de coordonnées non orthogonales convenablement choisi pour simplifier l'écriture des conditions aux limites qui est l'une des étapes les plus difficiles dans ce genre de problème.

Dans la première partie, nous commençons par présenter, brièvement, le formalisme des équations de Maxwell sous forme covariante [30]. Afin d'écrire simplement les conditions aux limites, la surface diffractante doit coïncider avec l'une des surfaces de coordonnées (Chapitre I). Ceci nous a conduit à définir un nouveau système de coordonnées qui répond à cette exigence. Les équations de Maxwell et les différentes grandeurs auxquelles on fait appel dans la résolution du problème de diffraction sont écrites dans le nouveau système de coordonnées.

Dans la seconde partie, lorsque la hauteur de déformation est relativement faible devant la longueur d'onde, une méthode de perturbations est utilisée pour résoudre analytiquement le problème de la diffraction par des surfaces rugueuses métalliques de conductivité finie (Chapitre II) et le problème des pertes par rayonnement d'un guide

diélectrique déposé sur un substrat métallique (Chapitre III). Cette méthode permet de trouver les expressions analytiques des intensités de diffractions dans le premier cas et les coefficients de pertes dans le deuxième cas.

Dans la troisième partie, une méthode différentielle " rigoureuse " permet de surmonter les limitations en hauteur imposées par la méthode précédente et d'étudier numériquement, le cas où la surface diffractante présente une conductivité finie et donc absorbe une partie de l'énergie incidente (Chapitre IV). La résolution des équations de Maxwell est faite dans les deux milieux et la méthode reste applicable pour des hauteurs assez élevées sans aucune approximation préalable sur la conductivité du métal. Cette méthode est basée sur l'utilisation des méthodes algébriques (calcul de valeurs et vecteurs propres et inversion de matrices).

Dans la quatrième partie et dernière, nous étudions le problème inverse de la diffraction d'une onde électromagnétique par une surface métallique rugueuse (Chapitre V). C'est-à-dire, on détermine la déformation de la forme de la surface dans le cas d'une surface déterministe à partir du diagramme de diffraction ou les paramètres statistiques de la surface (largeur et hauteur moyenne des rugosités par exemple) à partir des paramètres statistiques du diagramme de diffraction.

PREMIÈRE PARTIE :
PRÉSENTATION DU FORMALISME

CHAPITRE I

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN COORDONNÉES CURVILIGNES

- I.1. Introduction
- I.2. Forme classique des équations de Maxwell
- I.3. Les équations de Maxwell sous forme tensorielle covariante
- I.4. Les équations de Maxwell sous forme covariante tridimensionnelle
- I.5. Les équations de propagations
- I.6. Théorème de Poynting en coordonnées curvilignes
- I.7. Définition d'un nouveau système de coordonnées

Chapitre I

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN COORDONNÉES CURVILIGNES

I.1. INTRODUCTION

En électromagnétisme, l'écriture des conditions aux limites reste l'une des étapes les plus importantes et aucun problème ne peut y échapper. Le choix du système de coordonnées adéquat dépend essentiellement des surfaces limitant les domaines dans lesquels les équations de Maxwell doivent être résolues. Dans le cas où ces limites ont des formes géométriques simples, l'utilisation des systèmes de coordonnées classiques (cartésien, cylindrique ou sphérique) permet de franchir cette étape sans trop de difficultés. Mais, en présence de surfaces limites complexes, l'écriture de la continuité de certaines composantes de champ devient analytiquement impossible avec de tels systèmes, ce qui nécessite l'utilisation de méthodes numériques.

Afin de contourner cette difficulté, plusieurs méthodes ont été proposées. Parmi celles-ci, et pour des raisons de simplicité, nous employons, depuis quelques années, au laboratoire d'électromagnétisme la méthode qui consiste à utiliser les équations de Maxwell sous forme covariante et un système de coordonnées non orthogonales adapté à la géométrie du problème.

Dans cette première partie nous présentons, brièvement, le formalisme utilisé en mettant en évidence les équations permettant de résoudre le problème de diffraction et de propagation. Pour plus de détail le lecteur peut se reporter aux références [2, 14, 30].

I.2. FORME CLASSIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

La résolution d'un problème d'électromagnétisme revient à trouver les solutions des équations de Maxwell écrites au moyen de cinq champs vectoriels et un champ scalaire :

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ Champ électrique (volts/m)

$\vec{B}(\vec{r}, t)$ Induction (ou densité du flux) magnétique (Weber/m²)

$\vec{H}(\vec{r}, t)$ Champ (ou excitation) magnétique (Ampère/m)

$\vec{D}(\vec{r}, t)$ Excitation (ou déplacement) électrique (Coulombs/m²)

$\vec{J}(\vec{r}, t)$ densité de courant électrique (Ampère/m²)

$\rho(\vec{r}, t)$ densité de charge électrique (Ampère/m³)

En coordonnées curvilignes ces équations prennent la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{I.1a})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t), \quad (\text{I.1b})$$

$$\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (\text{I.1c})$$

$$\text{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t). \quad (\text{I.1d})$$

Il est habituel d'ajouter une autre équation qui n'est pas indépendante des précédentes et exprimant la conservation de courant :

$$\text{div} \vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (\text{I.1e})$$

Nous supposons que toutes les grandeurs complexes dépendent du temps par le facteur $\exp(i\omega t)$, où ω représente la pulsation. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \quad (\text{I.2})$$

- **Les relations du milieu**

Pour résoudre les équations de Maxwell (I.1), il faut faire des hypothèses sur les propriétés électromagnétiques du milieu dans lequel existent les champs. Ces hypothèses se traduisent sous forme des relations du milieu qui, dans le cas le plus simple d'un milieu homogène, isotrope, diélectrique et magnétique parfait, s'écrivent :

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t), \quad (\text{I.3a})$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu(\vec{r},t)\vec{H}(\vec{r},t). \quad (\text{I.3b})$$

et pour un milieu conducteur, il faut ajouter la relation suivante :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \sigma(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t), \quad (\text{I.3c})$$

Les grandeurs ε , μ et σ sont de simples scalaires, ε désigne la permittivité, μ la perméabilité et σ la conductivité. Dans le cas le plus général, ces équations sont tensorielles et dépendent des coordonnées d'espace et de temps.

I.3. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME TENSORIELLE COVARIANTE

Minkowsky a généralisé les équations de Maxwell classiques à l'espace-temps en associant aux champs, des tenseurs électromagnétiques selon le processus suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{array} \right\} \rightarrow F_{\lambda\nu} = -F_{\nu\lambda} \quad (\text{I.4a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{D}(\vec{r},t) \\ \vec{H}(\vec{r},t) \end{array} \right\} \rightarrow G^{\lambda\nu} = -G^{\nu\lambda} \quad (\text{I.4b})$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{J}(\vec{r},t) \\ \rho(\vec{r},t) \end{array} \right\} \rightarrow C^\lambda \quad (\text{I.4c})$$

Avec : $\lambda, \nu \in \{0,1,2,3\}$.

$F_{\lambda\nu}$ est un tenseur antisymétrique deux fois covariant, $G^{\lambda\nu}$ un pseudo tenseur antisymétrique de poids +1 deux fois contravariant, C^λ est un pseudo vecteur contravariant de poids +1 (cf. ANNEXE A).

E.J. Post [30] a repris les équations de Minkowsky et les a écrites dans le système MKS rationalisé.

Equations de Maxwell-Minkowsky:

$$\left. \begin{array}{l} \partial_k F_{\lambda\nu} = 0 \\ \partial_\nu G^{\lambda\nu} = C^\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_k F_{\lambda\nu} + \partial_\nu F_{k\lambda} + \partial_\lambda F_{\nu k} = 0 \\ \partial_\nu G^{\lambda\nu} = C^\lambda \end{array} \right. \quad (\text{I.5})$$

$$\text{Où : } \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Pour un milieu au repos dans un système cartésien de coordonnées, on peut, entre les tenseurs F , G , et C , et les vecteurs du champ électromagnétique faire les identifications

suivantes: $x^0 = t$; $x^1 = x$; $x^2 = y$; $x^3 = z$.

$$\begin{bmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & G^{01} & G^{02} & G^{03} \\ G^{10} & 0 & G^{12} & G^{13} \\ G^{20} & G^{21} & 0 & G^{23} \\ G^{30} & G^{31} & G^{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C^0 \\ C^1 \\ C^2 \\ C^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

Si l'on sépare la variable temps des variables d'espace, les équations affines de Maxwell-Minkowsky (I.5) se réduisent aux équations habituelles (I.1).

Nous admettons que ce sont les équations de Maxwell-Minkowsky (I.5) qui constituent le postulat fondamental de l'électromagnétisme.

Les équations de Maxwell-Minkowsky (I.5) sont invariantes, c'est à dire conservent leur forme analytique pour tous les systèmes de coordonnées à quatre dimensions, si l'on fait les deux hypothèses suivantes :

1. Tous les systèmes de coordonnées peuvent être obtenus de manière holonome à partir d'un système dans lequel les équations sont supposées valables.
2. Les composantes de $F_{\lambda\nu}$, $G^{\lambda\nu}$ et C^λ se transforment dans un changement de coordonnées selon les lois tensorielles.

Ces deux hypothèses ont la signification analytique suivante :

Soit (x^λ) et $(x^{\lambda'})$ deux systèmes de coordonnées espace-temps. La transformation est holonome si :

$$\partial_{\nu'} A_{\lambda'}^{\lambda'} = \partial_{\lambda'} A_{\nu'}^{\lambda'}, \text{ soit } \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\nu'}} \quad (\text{I.6a})$$

$$\partial_{\nu'} A_{\lambda'}^{\lambda} = \partial_{\lambda'} A_{\nu'}^{\lambda}, \text{ soit } \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\nu'}} \quad (\text{I.6b})$$

Les composantes des champs sont covariantes si :

$$F_{\lambda'\nu'} = A_{\lambda'\nu'}^{\lambda\nu} F_{\lambda\nu} \quad (\text{I.7a})$$

$$G^{\lambda'\nu'} = |\Delta|^{-1} A_{\lambda'\nu'}^{\lambda\nu} G^{\lambda\nu} \quad (\text{I.7b})$$

$$C^{\lambda'} = |\Delta|^{-1} A_{\lambda'}^{\lambda} C^{\lambda} \quad (\text{I.7c})$$

Avec : $A_{\lambda'\nu'}^{\lambda\nu} = A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\nu'}^{\nu}$ et $|\Delta| = \det(A_{\lambda'}^{\lambda})$.

Ces conditions étant remplies, le système précédent est invariant :

$$\partial_k F_{\lambda\nu} = \partial_k F_{\lambda'\nu'} \quad (\text{I.8a})$$

$$\partial_{\nu'} G^{\lambda\nu} = \partial_{\nu'} G^{\lambda'\nu'} \quad (\text{I.8b})$$

• Relations de milieu

L'influence du milieu dans lequel existent les champs sur les ondes électromagnétiques se traduit par la relation de milieu :

$$G^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} \chi^{\lambda\nu\sigma k} F_{\sigma k} \quad (\text{I.9})$$

Le tenseur du milieu $\chi^{\lambda\nu\sigma k}$ est un pseudo-tenseur de poids +1, d'ordre quatre, quatre fois contravariant. Il dépend à la fois des propriétés électromagnétiques du milieu et des propriétés géométriques du système de coordonnées utilisé.

I.4. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME COVARIANTE TRIDIMENSIONNELLE

La forme quadridimensionnelle précédente étant utilisée en relativité, on est amené, dans les cas non relativistes, de passer à l'espace tridimensionnel. Puisque tout tenseur antisymétrique d'ordre deux de l'espace à quatre dimensions possède le même nombre de composantes non nulles que deux vecteurs de l'espace à trois dimensions (six composantes), nous associons des vecteurs tridimensionnels aux tenseurs électromagnétiques :

$$B^i = \frac{1}{2} \xi^{ijk} F_{jk} \quad (\text{I.10a})$$

$$H_i = \frac{1}{2} \xi^{ijk} G^{jk} \quad (\text{I.10b})$$

$$\rho = C^0 \quad (\text{I.10c})$$

$$J_i = C^i \quad (\text{I.10d})$$

Avec : i, j et $k \in \{1, 2, 3\}$. L'indice zéro est relatif à la variable temps: $x^0 = t$.

Le pseudo-tenseur ξ est l'indicateur de Levi-Civita défini par :

$$\left. \begin{array}{l} \xi^{ijk} \\ (\text{poids } +1) \\ \xi_{ijk} \\ (\text{poids } -1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si deux indices sont égaux} \\ +1 \text{ si les indices sont obtenus au moyen d'un} \\ \text{nombre pair de permutations à partir de } (1,2,3) \\ -1 \text{ pour un nombre impair de permutations} \end{array} \right.$$

Avec ces grandeurs, les équations de Maxwell-Minkowsky s'écrivent :

$$\xi^{ijk} \partial_j E_k = -\frac{\partial B^i}{\partial t} \quad (\text{I.11a})$$

$$\partial_i B^i = 0 \quad (\text{I.11b})$$

$$\xi^{ijk} \partial_j H_k = \frac{\partial D^i}{\partial t} + J^i \quad (\text{I.11c})$$

$$\partial_i D^i = \rho \quad (\text{I.11d})$$

Ecrite sous cette forme, ces équations sont covariantes dans toute transformation de coordonnées n'affectant pas la variable temps, les relations de passage s'écrivant alors :

$$\begin{aligned} E_{i'} &= A_i^{i'} E_i, \quad B^{i'} = |\Delta|^{-1} A_i^{i'} B^i \\ H_{i'} &= A_i^{i'} H_i, \quad D^{i'} = |\Delta|^{-1} A_i^{i'} D^i \\ A_i^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad A_i^{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad i, i' = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Où : $A_i^{i'}$ et A_i^j représentent les matrices de changement de base.

- **Les relations du milieu**

Pour un milieu au repos par rapport au système de coordonnées, certaines composantes du tenseur $\chi^{\lambda\nu jk}$ du milieu sont nulles :

$$\chi^{0ijk} = 0, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

A partir de $\chi^{\lambda\nu\sigma k}$ nous définissons deux nouveaux tenseurs ε^{ij} et χ_{ij} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ij} &= \chi^{0i0j} \\ \chi_{ij} &= \xi_{ikl} \xi_{jmn} \chi^{klmn} \end{aligned}$$

Avec: $\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{ji}$ et $\chi_{ij} = \chi_{ji}$, $\forall i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, 3\}$.

La relation du milieu s'écrit, en utilisant les tenseurs ε^{ij} et χ_{ij} de la manière suivante :

$$D^i = \sum_j \varepsilon^{ij} E_j \quad (\text{I.12a})$$

$$H_i = \sum_j \chi_{ij} B^j \quad (\text{I.12b})$$

Pour un milieu homogène, isotrope, diélectrique et magnétique parfait, la permittivité ε et la perméabilité μ qui interviennent en formalisme classique, sont de simples scalaires. Dans ce cas les tenseurs du milieu ε^{ij} et χ_{ij} s'écrivent de la façon suivante :

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon \sqrt{g} g^{ij} \quad (\text{I.13a})$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{\mu} \frac{g_{ij}}{\sqrt{g}} \quad (\text{I.13b})$$

Avec : $g = |g_{ij}| = |(g^{ij})^{-1}|$ et $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Où : g_{ij} est le tenseur métrique du système de coordonnées.

I.5. LES ÉQUATIONS DE PROPAGATION

Pour un milieu isotrope, diélectrique et magnétique parfait dont l'espace vide de matière est un cas particulier, la permittivité ε et la perméabilité μ qui interviennent dans les relations de milieu en formalisme classique, sont de simples scalaires :

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{I.14a})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}, t) \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (\text{I.14b})$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{0}. \quad (\text{I.14c})$$

Les différents formalismes coïncident en coordonnées cartésiennes, les relations du milieu s'écrivent :

$$D^i = \varepsilon \delta^{ij} E_j \quad (\text{I.15a})$$

$$B^i = \mu \delta^{ij} H_j \quad (\text{I.15b})$$

$$E_i = \frac{\delta_{ij}}{\varepsilon} D^j \quad (\text{I.15c})$$

$$H_i = \frac{\delta_{ij}}{\mu} B^j \quad (\text{I.15d})$$

$$\delta^{ij} : \text{étant le symbole de kronocker} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Le système étant cartésien : $g_{ij} = \delta_{ij}$ et $g^{ij} = \delta^{ij}$. Les différents tenseurs de milieu sont alors :

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon \delta^{ij} = \varepsilon g^{ij} \quad (\text{I.16a})$$

$$\mu^{ij} = \mu \delta^{ij} = \mu g^{ij} \quad (\text{I.16b})$$

Pour un système curviligne quelconque :

$$\varepsilon^{i'j'} = |\Delta|^{-1} A_{ij}^{i'j'} \varepsilon^{ij} = \varepsilon |\Delta|^{-1} A_{ij}^{i'j'} g^{ij} = \varepsilon |\Delta|^{-1} g^{i'j'}$$

De plus, il est possible de montrer que pour une telle transformation on a :

$$|\Delta|^{-1} = \sqrt{|g'|}; \text{ avec } g' = \det(g_{i'j'}) = [\det(g^{i'j'})]^{-1},$$

$$\text{Donc : } \varepsilon^{i'j'} = \varepsilon \sqrt{|g'|} g^{i'j'}$$

Finalement, en coordonnées curvilignes (x^i), pour un milieu isotrope, diélectrique et magnétique parfait, les différentes tenseurs du milieu s'écrivent à partir du tenseur métrique et des constantes ε et μ :

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon \sqrt{g} g^{ij} \quad (\text{I.17a})$$

$$\mu^{ij} = \mu \sqrt{g} g^{ij} \quad (\text{I.17b})$$

En reportant ces valeurs dans les équations précédentes, on obtient les équations de propagation des champs harmoniques ($\partial/\partial t = i\omega$) :

$$\xi^{ijk} \xi^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m E_n - k^2 \sqrt{g} g^{ij} E_j = 0 \quad (\text{I.18a})$$

$$\xi^{ijk} \xi^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m H_n - k^2 \sqrt{g} g^{ij} H_j = 0 \quad (\text{I.18b})$$

Ces équations sont valables si ε et μ ne dépendent pas des coordonnées avec $c^2 = 1/\mu\varepsilon$ et $k^2 = \omega^2/c^2$ (c la vitesse de la lumière). Chacune de ces relations forme un système de trois équations correspondant aux trois valeurs possibles de l'indice i .

Pour $i=1$, il vient :

$$\begin{aligned} & \partial_2 \frac{g_{31}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) + \partial_2 \frac{g_{32}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) + \partial_2 \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) + \\ & + \partial_3 \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_2 - \partial_2 E_3) + \partial_3 \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_3 - \partial_3 E_1) + \partial_3 \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_2) - \\ & - k^2 \sqrt{g} g^{11} E_1 - k^2 \sqrt{g} g^{12} E_2 - k^2 \sqrt{g} g^{13} E_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.19a})$$

Pour $i=2$, il vient :

$$\begin{aligned} & \partial_3 \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) + \partial_3 \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) + \partial_3 \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) + \\ & + \partial_1 \frac{g_{32}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_3 - \partial_3 E_1) + \partial_1 \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_2) + \partial_1 \frac{g_{31}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_2 - \partial_2 E_3) - \\ & - k^2 \sqrt{g} g^{22} E_2 - k^2 \sqrt{g} g^{23} E_3 - k^2 \sqrt{g} g^{21} E_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.19b})$$

Pour $i=3$, il vient :

$$\begin{aligned} & \partial_1 \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) + \partial_1 \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) + \partial_1 \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) + \\ & + \partial_2 \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_2) + \partial_2 \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_2 - \partial_2 E_3) + \partial_2 \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_3 - \partial_3 E_1) - \\ & - k^2 \sqrt{g} g^{33} E_3 - k^2 \sqrt{g} g^{31} E_1 - k^2 \sqrt{g} g^{32} E_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.19c})$$

On obtient les mêmes équations pour H .

Pour un milieu isotrope de conductivité finie σ , on peut ajouter aux relations de milieu, la relation suivante :

$$\sigma^{ij} = \sigma \sqrt{g} g^{ij} \quad (\text{I.20})$$

Le système d'équation (I.4.5) s'écrit alors :

$$\xi^{ijk} \xi^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m E_n - k^2 \sqrt{g} g^{ij} E_j = 0 \quad (\text{I.21a})$$

$$\xi^{ijk} \xi^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m H_n - k^2 \sqrt{g} g^{ij} H_j = 0 \quad (\text{I.21b})$$

Avec : $k^2 = \omega^2 / c^2$, (c la vitesse de la lumière).

Pour un milieu conducteur homogène isotrope, les équations de propagation des E_i et H_i sont donc identiques. On peut les grouper dans le système suivant :

$$\left\{ \xi^{ijk} \xi^{lmn} \partial_j \frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m \right\}_{H_n}^{E_n} - \left\{ k^2 \sqrt{g} g^{ij} \right\}_{H_j}^{E_j} = 0 \quad (\text{I.22})$$

Dans l'équation (I.11a), on reporte les relations (I.12b) et (I.13b), on obtient la relation :

$$\xi^{ijk} \partial_j E_k = -ik \sqrt{g} g^{ij} Z H_j \quad (\text{I.23a})$$

De même, dans l'équation (I.11c), on reporte les relations (I.12a) et (I.13a), on obtient la relation :

$$\xi^{ijk} \partial_j Z H_k = ik \sqrt{g} g^{ij} E_j \quad (\text{I.23b})$$

Avec: $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$ et $Z = \sqrt{\mu / \varepsilon}$ caractéristiques du milieu considéré.

Remarque :

Lorsque le milieu est un métal de conductivité σ et de permittivité relative ε_r , la méthode des amplitudes complexes permet de conserver le système (I.23) à condition d'introduire la permittivité complexe ainsi définie :

$$\varepsilon = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \quad (\text{I.24})$$

I.6. THÉORÈME DE POYNTING EN COORDONNÉES CURVILIGNES

Définissons le vecteur de Poynting comme un pseudo vecteur contravariant dont les composantes N^i sont données par la relation :

$$N^i = \xi^{ijk} E_j H_k \quad (\text{I.25})$$

L'introduction des équations de Maxwell dans la divergence de ce vecteur permet d'écrire la relation traduisant le théorème de Poynting sous la forme :

$$\partial_i N^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E_i D^i + H_i B^i) \quad (\text{I.26})$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers toute partie S d'une surface de coordonnées prend une forme simple:

$$\phi(N) = \int_S N^i dx^j dx^k \quad (\text{I.27})$$

Avec : $i \neq j \neq k$.

Remarque :

Les équations de Maxwell sous forme covariante sont valables pour tout système continu de coordonnées (orthogonales ou non) de l'espace à trois dimensions. Leur forme analytique est indépendante du système de coordonnées (ce sont des équations affines), contrairement au cas classique où les composantes du rotationnel, par exemple, en dépendent dans $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$. Par contre les relations des milieux dépendent du système de coordonnées. Ce sont des relations métriques.

I.7. DÉFINITION D'UN NOUVEAU SYSTÈME DE COORDONNÉES

Pour pouvoir résoudre les équations, vectorielles ou tensorielles, de la physique des milieux continus et en particulier les équations de l'électromagnétisme, il faut préalablement se donner un système de coordonnées afin de pouvoir projeter ces équations. Le choix de ce système est conditionné par la géométrie du problème à étudier. Les systèmes les plus

fréquemment utilisés sont les systèmes orthogonaux (cartésien, cylindrique, sphérique, etc. ...) parce qu'ils sont associés à des problèmes présentant un aspect géométrique simple. Dans les cas plus compliqués, certains articles de calcul permettent de conserver ces systèmes mais l'utilisation de systèmes non orthogonaux paraît inévitable pour traiter les problèmes les plus généraux.

Dans le cadre de la physique non relativiste, l'espace considéré est l'espace euclidien à trois dimensions pour lequel il est toujours possible d'employer un système cartésien, à partir duquel peuvent être définis tous les systèmes curvilignes. Mais il est également possible, et pratiquement plus rapide, de prendre pour référence un système orthogonal classique mettant primitivement en évidence les symétries du système cherché.

I.7.1. Système de coordonnées de translation

Dans notre cas, un système de coordonnées non orthogonales est le mieux adapté pour résoudre le problème de la diffraction. Il s'obtient à partir du système cartésien (x, y, z) par la transformation de type additif suivante :

$$x' = x; \quad u = y - a(x, z); \quad z' = z.$$

Où $a(x, z)$ est une fonction au moins deux fois dérivable. Elle définit la rugosité de la surface diffractante dans le cas de l'étude du problème de la diffraction d'une onde électromagnétique.

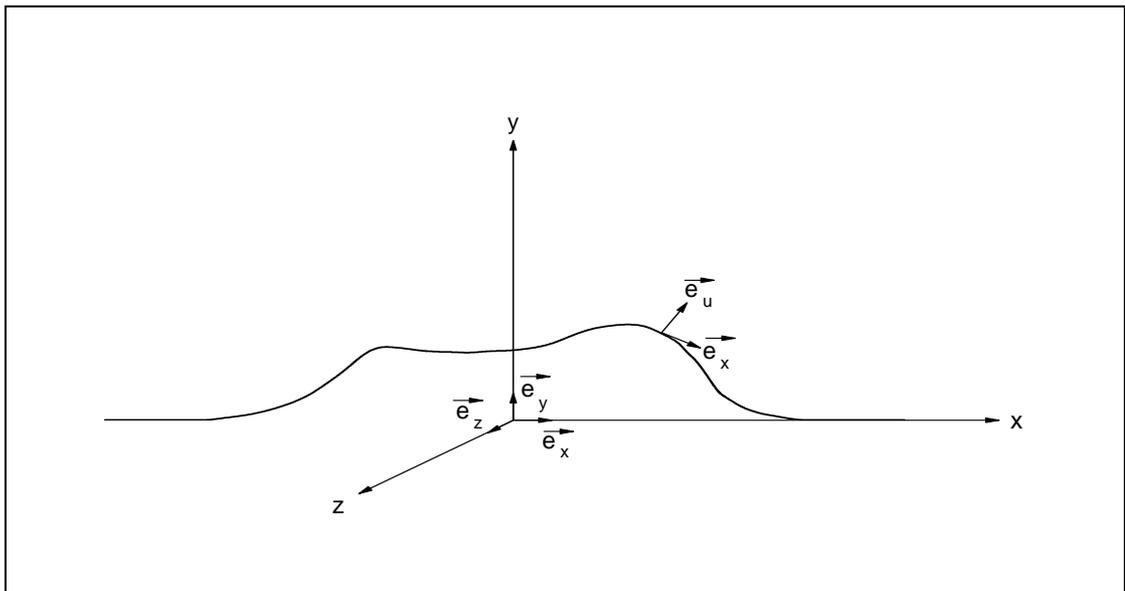


Figure I.1. Système de coordonnées de translation.

I.7.2. Equations de propagation des champs dans le nouveau système de coordonnées

L'écriture des équations de propagation des champs en coordonnées de translation nécessite le calcul préalable des éléments du tenseur métrique à partir de ceux de la matrice de changement de base. Celle-ci est donnée par:

$$(A_i^{i'}) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) = \begin{bmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial a}{\partial x} & 1 & -\frac{\partial a}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.28})$$

$$(A_i^{i'}) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x} & 1 & \frac{\partial a}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

Le calcul du tenseur métrique se fait à partir des matrices de changement de base ci-dessus et de la relation :

$$g_{i'j'} = \sum_{i,j} A_i^{j'} g_{ij} = \sum_i \sum_j A_i^j g_{ij} \quad (\text{I.30})$$

Avec : $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$; $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base orthonormée, ce qui donne : $g_{ij} = \delta_{ij}$.

$$(g_{i'j'}) = \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial x} & 1 & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial a}{\partial z} & 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.31})$$

On a : $(g_{i'j'})(g^{i'j'}) = [I]$; $(g^{i'j'}) = (g_{i'j'})^{-1}$. D'où :

$$(g^{i'j'}) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\partial a}{\partial x} & 0 \\ -\frac{\partial a}{\partial x} & 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2 & -\frac{\partial a}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\partial a}{\partial z} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.32})$$

Soit : $g = \det(g_{i'j'}) = 1$.

Après avoir reporté les éléments du tenseur métrique dans les équations de propagation avec ($E_1 = E_x$; $E_2 = E_u$; $E_3 = E_z$), pour les problèmes à deux dimensions ($\partial/\partial z = 0$; $a = a(x)$), on obtient le système suivant:

$$\frac{\partial^2 E_u}{\partial x \partial u} + k^2 \dot{a} E_u = \frac{\partial^2 E_x}{\partial u^2} + k^2 E_x \quad (\text{I.33a})$$

$$\frac{\partial^2 E_u}{\partial x^2} + k^2 (1 + \dot{a}^2) E_u = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial u} + k^2 \dot{a} E_x \quad (\text{I.33b})$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k^2 (1 + \dot{a}^2) \frac{\partial^2 E_z}{\partial u^2} - 2\dot{a} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial u} - \ddot{a} \frac{\partial E_z}{\partial u} + k^2 E_z = 0 \quad (\text{I.33c})$$

$$\text{Avec: } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \dot{a} = \frac{da(x)}{dx} \quad ; \quad \ddot{a} = \frac{d^2 a(x)}{dx^2} \quad ; \quad F = F(x, u) \quad ; \quad G = G(x, u) \dots$$

La dernière équation du système (I.33) est indépendante des deux autres. Ceci montre qu'il existe deux types de polarisations indépendantes:

- Polarisation électrique (mode **TE**): $E_x = E_u = 0$; $E = E_z$, le champ électrique est parallèle à la structure diffractante.
- Polarisation magnétique (mode **TM**): $H_x = H_u = 0$; $H = H_z$, le champ magnétique est parallèle à la structure diffractante.

POLARISATION TE: On représente les composantes E et H du champ électromagnétique par deux grandeurs F et G suivant la relation:

$$\begin{cases} E_z = F \\ H_x = \frac{G}{Z} \end{cases}$$

Où Z est l'impédance du milieu: $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

Le système d'équations permettant de trouver les fonctions inconnues F et G , et par la suite E_z et H_x , est formé d'une part de l'équation de propagation (I.33c):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k^2 (1 + \dot{a}^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\dot{a} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} - \ddot{a} \frac{\partial F}{\partial u} + k^2 F = 0 \quad (\text{I.34})$$

D'autre part, d'une équation obtenue à partir de la relation (I.11), en remplaçant les termes du tenseur métrique par leurs valeurs, on obtient les deux équations:

$$\partial_2 E_3 = -i \omega \mu H_1 + i \omega \mu \dot{a} H_2 \quad (\text{I.35a})$$

$$-\partial_1 E_3 = -i \omega \mu \dot{a} H_1 - i \omega \mu (1 + \dot{a}^2) H_2 \quad (\text{I.35b})$$

Une combinaison linéaire de ces deux équations donne la seconde équation recherchée:

$$KG = i(1 + \dot{a}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{a} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (\text{I.36})$$

POLARISATION TM: Dans ce cas on pose:

$$\begin{cases} H_z = \frac{F}{Z} \\ E_x = -G \end{cases}$$

On reprend les mêmes étapes du mode **TE**, on aboutit aux mêmes équations (I.34) et (I.35). D'où pour les deux types de polarisation, on est amené à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k^2(1 + \dot{a}^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\dot{a} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} - \ddot{a} \frac{\partial F}{\partial u} + k^2 F = 0 \\ kG = i(1 + \dot{a}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{a} \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

$$\text{Avec: En mode } \mathbf{TE} : \begin{cases} F = E_z \\ G = ZH_x \end{cases} \quad \text{et en mode } \mathbf{TM} : \begin{cases} F = ZH_z \\ G = -E_x \end{cases}$$

Le système (I.37) peut être résolu par rapport à ses dérivées premières en u . Pour cela, on tire de la première équation du système (I.37) la valeur de $\partial F / \partial u$ que l'on reporte dans la deuxième équation, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = -i \frac{1}{1 + \dot{a}^2} KG + \frac{\dot{a}}{1 + \dot{a}^2} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial kG}{\partial u} = -i \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1 + \dot{a}^2} \frac{\partial F}{\partial x} - ik^2 F + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\dot{a}}{1 + \dot{a}^2} kG \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

DEUXIÈME PARTIE :
MÉTHODE DE PERTURBATIONS

CHAPITRE II

LA DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNETIQUE PAR UNE SURFACE MÉTALLIQUE RUGUEUSE DE CONDUCTIVITÉ FINIE

- II.1. Introduction
- II.2. Formulation du problème
- II.3. Méthode de perturbations
- II.4. Résolution
- II.5. Bilan énergétique
- II.6. Résolution au premier ordre de perturbations
- II.7. Applications Numériques
- II.8. Conclusion

Chapitre II

DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNETIQUE PAR UNE SURFACE MÉTALLIQUE RUGUEUSE DE CONDUCTIVITÉ FINIE

II.1. INTRODUCTION

L'intérêt considérable apporté au problème de la diffraction par des surfaces rugueuses a conduit, au cours des dernières années, à un développement des travaux consacrés à ce sujet. Pour un métal infiniment conducteur, des méthodes rigoureuses ont donné des solutions particulières [5, 14, 16].

Dans le cas des réseaux où les surfaces sont périodiques, le problème a pu être résolu avec succès en utilisant des méthodes intégrales ou différentielles. Lorsque la surface n'est plus périodique, le problème devient encore plus difficile puisque les directions de diffraction, qui étaient discrètes dans le cas des réseaux, deviennent continues pour les surfaces aperiodiques. Nous nous intéressons, dans ce chapitre à la résolution du problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par une surface rugueuse déterministe ou aléatoire. Nous proposons une méthode analytique simple dite méthode de perturbations, permettant d'obtenir des solutions approchées valables lorsque la hauteur de la déformation est relativement faible devant la longueur d'onde.

Cette méthode qui permet de trouver les expressions analytiques des intensités de diffraction, consiste à rechercher les fonctions inconnues (correspondant au champ électrique et magnétique) sous forme de séries entières d'un paramètre τ ($0 < \tau < 1$) que l'on prend égal à h/λ (h étant la hauteur moyenne des rugosités, λ la longueur d'onde).

II.2. FORMULATION DU PROBLÈME

II.2.1. Définition du problème

On dispose d'une surface S (*Figure II.1*), dont la génératrice parallèle à l'axe oz , s'appuie sur la courbe $y = a(x)$:

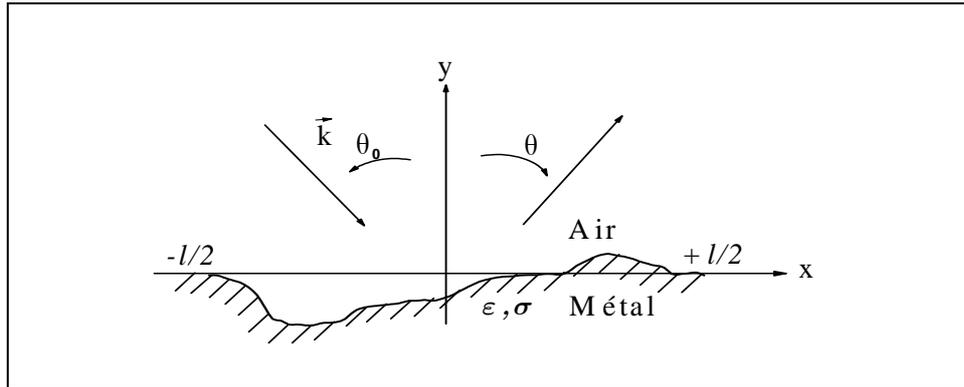


Figure II.1. Profil de la surface rugueuse.

La condition imposée par le nouveau système de coordonnées sur la fonction $a(x)$, définissant l'allure du profil, c'est qu'elle soit au moins dérivable deux fois. Nous admettons cette condition pour les deux types de surfaces étudiées.

- surfaces rugueuses déterministes.
- surfaces rugueuses aléatoires.

Une surface rugueuse déterministe est une surface dont le profil est connue explicitement, par exemple par son équation $y = a(x)$.

Une surface rugueuse aléatoire est une surface dont le profil n'est pas connu explicitement mais elle est définie par ses caractéristiques statistiques (hauteur moyenne des rugosités, fonction de corrélation, etc...) (cf. ANNEXE B).

La surface métallique caractérisée par son indice complexe ν est éclairée par une onde plane de longueur d'onde λ où le vecteur d'onde \vec{k} ($|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$), situé dans le plan xoy , fait l'angle d'incidence θ_0 avec l'axe oy et θ étant l'angle de diffraction (*figure II.1*).

On a montré au paragraphe [I.7.2] que le problème de diffraction se ramène à l'étude de deux cas fondamentaux de polarisation notés **TE** (transverse électrique) et **TM** (transverse magnétique), selon que le champ incident électrique ou magnétique soit parallèle à oz .

Le champ électrique total, pour le cas **TE** ou le champ magnétique total pour le cas **TM**, reste parallèle à l'axe oz . Il en est de même du champ électrique ou magnétique diffracté.

On désignera alors par F l'amplitude complexe du champ électrique dans le cas **TE**, ou du champ magnétique dans le cas **TM** (en adoptant une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$).

La partie incidente F^i du champ total F pour une onde plane s'exprime par:

$$F^i = \exp(-i(\beta_0 x - \chi_0 y)) \quad (\text{II.1})$$

Avec: $\beta_0 = k \sin \theta_0$ et $\chi_0 = k \cos \theta_0$

Dans l'air, le champ diffracté F^d est défini par :

$$F^d(x, y) = F(x, y) - F^i(x, y) \quad (\text{II.2})$$

Quel que soit le problème de diffraction envisagé, trois conditions doivent être vérifiées.

- Les équations de Maxwell dans chaque milieu,
- La condition de rayonnement à l'infini,
- La condition aux limites sur la surface de séparation des deux milieux.

A partir de ces trois conditions, on montre que, pour tout $y > y_M$ où y_M est la valeur maximale de $a(x)$, le champ diffracté F^d est la somme d'ondes planes se propageant vers les $y > y_M$:

$$F^d(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\beta) \exp(-i(\beta x + \chi y)) d\beta \quad (\text{II.3})$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} \chi = \sqrt{k^2 - \beta^2} & \text{si } |\beta| \leq k \\ \chi = i\sqrt{\beta^2 - k^2} & \text{si } |\beta| > k \end{cases}$$

$R(\beta)$ étant l'amplitude complexe de l'onde diffractée dans la direction θ pour:

$$\begin{cases} \beta = k \sin \theta \\ \chi = k \cos \theta \end{cases}$$

La partie de l'intégrale (II.3), pour $|\beta| > k$ correspond aux ondes évanescentes.

II.2.2. Mise en équations du problème

L'utilisation des équations de Maxwell sous forme covariante écrites dans le système de coordonnées dit de translation nous a conduit à introduire, à partir des composantes

covariantes des champs E et H , deux grandeurs F et G . Pour les problèmes à deux dimensions ($\partial/\partial z = 0$) et une onde harmonique ($\partial/\partial t = i\omega$), F et G sont reliées par un système unique (I.37) de deux équations, valable pour les deux types de modes **TE** et **TM**.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k^2(1+\dot{a}^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\dot{a} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} - \ddot{a} \frac{\partial F}{\partial u} + k^2 F = 0 \\ KG = i(1+\dot{a}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{a} \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

$$\text{Avec : } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \dot{a} = \frac{da(x)}{dx} \quad ; \quad \ddot{a} = \frac{d^2a(x)}{dx^2} \quad ; \quad F = F(x, u) \quad ; \quad G = G(x, u).$$

$$\text{Pour le mode TE: } \begin{cases} F = E_z ; \quad E_x = E_u = ZH_z = 0 \\ G = ZH_x ; \quad ZH_u \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{En mode TM: } \begin{cases} F = ZH_z ; \quad E_z = ZH_x = ZH_u = 0 \\ G = E_x ; \quad E_u \neq 0. \end{cases}$$

λ longueur d'onde dans le milieu considéré, Z impédance du milieu.

La déformation étant limitée dans l'espace, la fonction $a(x)$ ainsi que F et G sont représentables en intégrale de Fourier. Soient $A(\beta)$, $f(\beta, u)$ et $g(\beta, u)$ leurs transformées de Fourier respectives. L'utilisation de la relation de convolution permet d'obtenir, en appliquant la transformée de Fourier au système (II.4), le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f(\beta, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha^2 - \beta^2) A(\beta - \alpha) \frac{\partial f(\alpha, u)}{\partial u} d\alpha + \\ \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\beta - \alpha - \gamma) A(\beta - \alpha - \gamma) A(\gamma) \frac{\partial^2 f(\alpha, u)}{\partial u^2} d\alpha d\gamma \\ kg(\beta, u) = i \frac{\partial f(\beta, u)}{\partial u} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha A(\beta - \alpha) f(\alpha, u) d\alpha - \\ \quad - i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\beta - \alpha - \gamma) A(\beta - \alpha - \gamma) A(\gamma) \frac{\partial f(\alpha, u)}{\partial u} d\alpha d\gamma \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

En posant: $\gamma^2 = k^2 - \beta^2$.

II.3. MÉTHODE DE PERTURBATIONS

Lorsque l'amplitude moyenne de la déformation est faible devant la longueur d'onde, une bonne approximation consiste à chercher les solutions f et g sous forme de séries entières d'un paramètre τ ($0 < \tau < 1$) que l'on prend égal à h/λ (h étant la hauteur moyenne des rugosités). Ce choix est très valable pour la majorité des problèmes physiques réels.

$$f(\beta, u) = \sum_{p=0}^{+\infty} \tau^p f_p(\beta, u); \quad g(\beta, u) = \sum_{p=0}^{+\infty} \tau^p g_p(\beta, u) \quad (\text{II.6})$$

Après avoir reporté les expressions (II.6) dans le système différentiel (II.5) et identifié les termes de même degré en τ , nous trouvons à l'ordre p ($p \geq 1$), le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f_p(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_p(\beta, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\beta - \alpha)}{\tau} (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial f_{p-1}(\alpha, u)}{\partial u} d\alpha + \\ \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\beta - \alpha - \gamma) \frac{A(\beta - \alpha - \gamma)}{\tau} \frac{A(\gamma)}{\tau} \frac{\partial^2 f_{p-2}(\alpha, u)}{\partial u^2} d\alpha d\gamma \\ kg_p(\beta, u) = i \frac{\partial f_p(\beta, u)}{\partial u} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\beta - \alpha) \frac{A(\beta - \alpha)}{\tau} f_{p-1}(\alpha, u) d\alpha - \\ \quad - i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\beta - \alpha - \gamma) \frac{A(\beta - \alpha - \gamma)}{\tau} \frac{A(\gamma)}{\tau} \frac{\partial f_{p-2}(\alpha, u)}{\partial u} d\alpha d\gamma \end{array} \right. \quad (\text{II.7})$$

II.4. RÉOLUTION

Pour étudier le problème de la diffraction par une surface métallique rugueuse de conductivité finie, nous sommes donc amenés à résoudre le système (II.7) dans les deux milieux (air, conducteur). Ceci se fait par récurrence à partir du cas non perturbé correspondant à une surface plane et dont les solutions sont connues.

Pour chaque ordre de perturbations p , on sera donc amené à écrire les conditions aux limites afin de trouver les constantes d'intégration qui permettent par la suite de trouver la répartition angulaire de l'intensité d'énergie diffractée correspondant à cet ordre.

A un ordre de perturbations ($p > 0$), la condition de rayonnement à l'infini et la condition d'onde incidente permettent d'écrire les solutions du système (II.7) sous la forme :

Dans l'air ($u > 0$):

$$\begin{cases} f_p(\beta, u) = B_p(\beta)e^{i\chi u} + C_p(\beta, u) \\ k g_p(\beta, u) = -\chi B_p(\beta)e^{i\chi u} + i \frac{\partial C_p(\beta, u)}{\partial u} + D_p(\beta, u) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Si la quantité χ est réelle, l'onde correspondante est une onde plane, sinon l'onde est évanescence.

Dans le métal ($u \leq 0$):

$$\begin{cases} f'_p(\beta, u) = A'_p(\beta)e^{i\chi' u} + C'_p(\beta, u) \\ k' g'_p(\beta, u) = -\chi' A'_p(\beta)e^{i\chi' u} + i \frac{\partial C'_p(\beta, u)}{\partial u} + D'_p(\beta, u) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Avec: $k'^2 = \omega^2 \mu' \varepsilon' (1 - i \sigma / \omega \varepsilon')$. (ω la pulsation de l'onde, σ la conductivité du métal, μ la perméabilité, ε la constante diélectrique).

$B_p(\beta)$ et $A'_p(\beta)$ sont des constantes d'intégration indépendante de la variable u .

$C_p(\beta, u)$ et $C'_p(\beta, u)$ sont des solutions particulières de l'équation homogène.

$D_p(\beta, u)$ et $D'_p(\beta, u)$ sont deux fonctions de la variable u s'exprimant à partir des solutions des ordres inférieurs à p .

A chaque ordre de perturbations, on sera amené à écrire les conditions aux limites afin de trouver les coefficients d'intégration en exprimant la continuité des composantes tangentielles des champs sur la surface de séparation de deux milieux ($u = 0$). Cette continuité se trouve résumé dans le tableau suivant:

Polarisation	TE	TM
$u = 0$	$F'(x, 0) = F(x, 0)$ $\frac{G'(x, 0)}{Z'} = \frac{G(x, 0)}{Z}$	$\frac{F'(x, 0)}{Z'} = \frac{F(x, 0)}{Z}$ $G'(x, 0) = G(x, 0)$

Tableau II.1. Les conditions aux limites.

POLARISATION TE: Les constantes d'intégration $B_p(\beta)$ et $A'_p(\beta)$ sont, dans ce cas de polarisation, solution du système:

$$\begin{cases} B_p(\beta) + C_p(\beta, 0) = A'_p(\beta) + C'_p(\beta, 0) \\ D_p(\beta, 0) - \chi B_p(\beta) + i \frac{\partial C_p(\beta, 0)}{\partial u} = -\chi' A'_p(\beta) + i \frac{\partial C'_p(\beta, 0)}{\partial u} + D'_p(\beta, 0) \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

La résolution de ce système permet d'aboutir aux expressions des constantes d'intégration $B_p(\beta)$ et $A'_p(\beta)$:

$$\begin{cases} B_p(\beta) = \frac{\chi' [C'_p(\beta, 0) - C_p(\beta, 0)] - [D'_p(\beta, 0) - D_p(\beta, 0)] - i \frac{\partial [C'_p(\beta, 0) - C_p(\beta, 0)]}{\partial u}}{\chi + \chi'} \\ A'_p(\beta) = \frac{\chi [C_p(\beta, 0) - C'_p(\beta, 0)] - [D'_p(\beta, 0) - D_p(\beta, 0)] - i \frac{\partial [C'_p(\beta, 0) - C_p(\beta, 0)]}{\partial u}}{\chi + \chi'} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

POLARISATION TM: De la même manière, les conditions aux limites (Tableau II.1) permettent d'écrire le système suivant:

$$\begin{cases} B_p(\beta) + C_p(\beta, 0) = \nu A'_p(\beta) + \nu C'_p(\beta, 0) \\ -\nu \chi B_p(\beta) + \nu D_p(\beta, 0) + i \nu \frac{\partial C_p(\beta, 0)}{\partial u} = \chi' A'_p(\beta) + i \frac{\partial C'_p(\beta, 0)}{\partial u} + D'_p(\beta, 0) \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Dont les solutions sont:

$$\begin{cases} B_p(\beta) = \frac{\chi' [\nu C'_p(\beta, 0) - C_p(\beta, 0)] - \nu D'_p(\beta, 0) + \nu^2 D_p(\beta, 0) + i \nu \frac{\partial [C'_p(\beta, 0) - \nu C_p(\beta, 0)]}{\partial u}}{\nu^2 \chi + \chi'} \\ A'_p(\beta) = \frac{\chi' [\nu C_p(\beta, 0) - \nu^2 C'_p(\beta, 0)] - D'_p(\beta, 0) + \nu D_p(\beta, 0) + i \frac{\partial [C'_p(\beta, 0) - \nu C_p(\beta, 0)]}{\partial u}}{\nu^2 \chi + \chi'} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

II.5. BILAN ENERGETIQUE

II.5.1. Puissance diffractée

La puissance diffractée est calculée à partir de la composante N^u du vecteur de Poynting.

$$\text{Pour la polarisation TE: } N^u = E_z H_x = \frac{FG}{Z}$$

$$\text{Pour la polarisation TM: } N^u = -E_x H_z = \frac{FG}{Z}$$

Donc, l'expression de la composante N^u du vecteur de Poynting est la même pour les deux types de polarisation. Sa valeur moyenne est :

$$\bar{N}^u = \frac{1}{2Z} \text{Re}(FG^*) \quad (\text{II.14})$$

La puissance totale diffractée par unité de largeur est:

$$P^d = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^u(x, u) dx dz \quad (\text{II.15})$$

F et G étant indépendantes de z , on peut écrire:

$$P^d = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^u(x, u) dx \quad (\text{II.16})$$

Suivant le théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty} FG^* dx = \int_{-\infty}^{+\infty} fg^* d\beta$, la relation de la puissance diffractée s'écrit:

$$P^d = \frac{1}{2Z} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f^d(\beta, u) g^{d*}(\beta, u) d\beta \right] \quad (\text{II.17})$$

Loin de la surface de séparation des deux milieux, l'énergie est transportée uniquement par des ondes planes. Dans l'air et pour le cas des ondes planes, on a: $\chi^2 \geq 0 \Rightarrow |\beta| \leq k$ ce qui permet de réduire l'intervalle d'intégration à $[-k, +k]$:

$$P^d = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \left[\int_{-k}^{+k} f^d(\beta, u) g^{d*}(\beta, u) d\beta \right] \quad (\text{II.18})$$

Dans une direction θ donnée ($\beta = k \sin \theta$), la puissance diffractée est donnée par:

$$P^d(\beta) = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \left[f^d(\beta, u) g^{d*}(\beta, u) \right] \quad (\text{II.19})$$

Dans l'air, et afin de bien visualiser l'effet de la diffraction, il est très commode d'introduire le champ F^m correspondant au champ réfléchi par la partie plane. Celui diffracté par la partie déformée F^s qui représente la véritable contribution des rugosités et s'annule si le profil est parfaitement plan:

$$F^s = F^d - F^m \quad (\text{II.20})$$

Sa transformée de Fourier est:

$$f^s(\beta, u) = f^d(\beta, u) - f^m(\beta, u) \quad (\text{II.21})$$

La puissance diffractée par la partie déformée s'écrit alors:

$$P^s(\beta) = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \left[f^s(\beta, u) g^{s*}(\beta, u) \right] \quad (\text{II.22})$$

Puisque le phénomène de la diffraction par la partie déformée n'apparaît qu'à partir de l'ordre 1, l'expression de la puissance diffractée peut s'écrire sous la forme:

$$P^s(\beta) = \sum_{p=1}^{\infty} \tau^{2p} P_p^s(\beta) \quad (\text{II.23})$$

$$\text{Avec: } P_p^s(\beta) = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \left[f_p^s(\beta, u) g_p^{s*}(\beta, u) \right]$$

II.5.2. Intensité diffractée

Comme nous nous intéressons particulièrement à la répartition angulaire de l'énergie diffractée, nous définissons une quantité dite "intensité diffractée" ou intensité lumineuse par le rapport de la puissance diffractée par la partie rugueuse dans la direction θ ($\beta = k \sin \theta$) à la puissance incidente:

$$I^d(\beta) = \frac{P^s(\beta)}{P^i(\beta_0)} = \frac{\text{Re}[f^s(\beta, u) \cdot g^{s*}(\beta, u)]}{\text{Re}[f^i(\beta_0, u) \cdot g^{i*}(\beta_0, u)]} \quad (\text{II.24})$$

$P^i(\beta_0)$ étant la puissance incidente suivant la direction θ_0 ($\beta_0 = k \sin \theta_0$).

II.6. RÉOLUTION AU PREMIER ORDRE DE PERTURBATIONS

II.6.1. Ordre zéro

A cet ordre, qui correspond à une surface plane, le système (II.7) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_0(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_0(\beta, u) = 0 \\ k g_0(\beta, u) = i \frac{\partial f_0(\beta, u)}{\partial u} \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Avec: $\chi^2 = k^2 - \beta^2$.

Les solutions de ce système sont:

Dans l'air ($u > 0$):

$$\begin{cases} f_0(\beta, u) = A_0 \delta(\beta - \beta_0) e^{-i \chi u} + B_0(\beta) e^{i \chi u} \\ k g_0(\beta, u) = \chi [A_0 \delta(\beta - \beta_0) e^{-i \chi u} - B_0(\beta) e^{i \chi u}] \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Dans le métal ($u \leq 0$):

$$\begin{cases} f_0(\beta, u) = A'_0(\beta) e^{-i \chi' u} \\ k g_0(\beta, u) = \chi' A'_0(\beta) e^{-i \chi' u} \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

L'écriture des conditions aux limites permet de trouver les constantes B_0 et A'_0 suivant le mode:

Mode **TE** :

$$\begin{cases} B_0(\beta) = A_0 \frac{\chi_0 - \chi'_0}{\chi_0 + \chi'_0} \delta(\beta - \beta_0) \\ A'_0(\beta) = A_0 \frac{2\chi_0}{\chi_0 + \chi'_0} \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Mode **TM** :

$$\begin{cases} B_0(\beta) = A_0 \frac{\nu^2 \chi_0 - \chi'_0}{\chi_0 + \chi'_0} \delta(\beta - \beta_0) \\ A'_0(\beta) = 2A_0 \frac{\nu \chi_0}{\nu^2 \chi_0 + \chi'_0} \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

Avec A_0 étant l'amplitude de l'onde incidente, $\chi_0^2 = k^2 - \beta_0^2$ où $\beta_0 = k \sin \theta_0$ (θ_0 étant l'angle de l'onde incidente par rapport à la verticale). ν indice de réfraction complexe du milieu métallique :

$$\nu^2 = \varepsilon'_r = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$$

II.6.2. Ordre un

C'est à cet ordre que le phénomène de diffraction apparaît, le système (II.9) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_1(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_1(\beta, u) = - \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta^2 - \alpha^2) \frac{A(\beta - \alpha)}{\tau} \frac{\partial f_0(\alpha, u)}{\partial u} d\alpha \\ kg_1(\beta, u) = i \frac{\partial f_1(\beta, u)}{\partial u} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\beta - \alpha) \frac{A(\beta - \alpha)}{\tau} f_0(\alpha, u) d\alpha \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Les solutions de ce système sont:

Dans l'air ($u > 0$):

$$\begin{cases} f_1(\beta, u) = B_1(\beta) e^{i\chi u} - i \chi_0 \frac{A(\beta - \beta_0)}{\tau} [A_0 e^{-i\chi_0 u} - B_0 e^{i\chi_0 u}] \\ kg_1(\beta, u) = -\chi B_1(\beta) e^{i\chi u} - i \chi_0^2 \frac{A(\beta - \beta_0)}{\tau} \left[1 - \frac{\beta_0(\beta - \beta_0)}{\chi_0^2} \right] [A_0 e^{-i\chi_0 u} + B_0 e^{i\chi_0 u}] \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Dans le métal ($u \leq 0$):

$$\begin{cases} f'_1(\beta, u) = A'_1(\beta) e^{-i\chi'u} - i\chi'_0 A'_0 \frac{A(\beta - \beta_0)}{\tau} e^{-i\chi_0 u} \\ kg'_1(\beta, u) = \chi' A'_1(\beta) e^{-i\chi'u} - i\chi_0^2 A'_0 \frac{A(\beta - \beta_0)}{\tau} \left[1 - \frac{\beta_0(\beta - \beta_0)}{\chi_0^2} \right] e^{-i\chi_0 u} \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

L'écriture des conditions aux limites permet de trouver les constants B_1 et A'_1 suivant chacun des feux modes:

Mode **TE** :

$$\begin{cases} B_1(\beta) = 2i\chi_0 \frac{\chi'_0 - \chi_0}{\chi_0 + \chi'_0} A_0 \frac{A(\beta - \beta_0)}{\tau} \\ A'_1(\beta) = B_1(\beta) \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Mode **TM** :

$$\begin{cases} B_1(\beta) = 2i \frac{A_0(1-\nu^2)\chi_0 A(\beta - \beta_0)}{\tau(\chi'_0 + \nu^2\chi_0)(\chi' + \nu^2\chi)} [\chi'_0 \chi' - \nu^2\beta\beta_0] \\ A'_1(\beta) = 2i \frac{A_0(1-\nu^2)\nu\chi_0 A(\beta - \beta_0)}{\tau(\chi'_0 + \nu^2\chi_0)(\chi' + \nu^2\chi)} [\beta\beta_0 + \chi'_0 \chi] \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

II.6.3. BILAN ENERGETIQUE

II.6.3.1. Puissance diffractée

Lorsque la hauteur de la déformation est relativement faible devant la longueur d'onde incidente ($\tau \ll 1$), une bonne approximation consiste à remplacer les fonctions f et g par leur développement en série entière à l'ordre un. La puissance diffractée s'écrit alors :

$$P^s(\beta) = \frac{1}{2Z} \tau^2 |B_1(\beta)|^2 \quad (\text{II.35})$$

La puissance incidente est donnée par:

$$P^i(\beta_0) = \frac{1}{2Z} \chi_0 |A_0|^2 \quad (\text{II.36})$$

Avec: $\chi = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ et $\chi_0 = \sqrt{k^2 - \beta_0^2}$; $\tau = \frac{h}{\lambda}$; $(k > \beta, k > \beta_0)$.

II.6.3.2. Intensité diffractée

L'intensité diffractée dans une direction θ ($\beta = k \sin \theta$) est donnée, au premier ordre de perturbations par :

$$I^d(\beta) = \left| \frac{B_1(\beta)}{A_0} \right|^2 \frac{\chi}{\chi_0} \tau^2 \quad (\text{II.37})$$

Dans le cas d'une polarisation **TE** cette expression devient :

$$I^d(\beta) = \left| 2\chi_0 \frac{\chi_0 - \chi'_0}{\chi + \chi'} \int_{-1/2}^{+1/2} a(x) e^{-i(\beta - \beta_0)x} dx \right|^2 \frac{\chi}{\chi_0} \quad (\text{II.38})$$

Alors que dans l'autre cas de polarisation **TM** elle s'écrit :

$$I^d(\beta) = \left| 2\chi_0 \frac{(1 - \nu^2)(\chi'_0 \chi' - \nu^2 \beta \beta_0)}{(\chi'_0 + \nu^2 \chi_0)(\chi' + \nu^2 \chi)} \int_{-1/2}^{+1/2} a(x) e^{-i(\beta - \beta_0)x} dx \right|^2 \frac{\chi}{\chi_0} \quad (\text{II.39})$$

Avec: $\nu^2 = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = \varepsilon_r - i 60 \sigma \lambda_0$

$$k' = \nu k \quad (\nu \text{ indice du milieu})$$

$$\chi_0 = \sqrt{k^2 - \beta_0^2}; \quad \chi'_0 = \sqrt{k'^2 - \beta_0^2} = \chi'_{01} + j \chi'_{02}$$

$$\chi = \sqrt{k^2 - \beta^2}; \quad \chi' = \sqrt{k'^2 - \beta^2} = \chi'_{11} + j \chi'_{12}$$

Les lettres primées correspondent au milieu métallique et celles non primées au vide.

II.6.3.3. Surface diffractante

Nous nous intéressons aux types de déformation de la surface diffractante:

- **DÉFORMATION DÉTERMINISTE** :

$a(x)$ est la fonction décrivant le profil de la déformation, elle est définie analytiquement. Comme on peut le remarquer, l'intensité diffractée est proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction décrivant le profil, résultat constaté par D. Maystre [1,5] dans son étude de la diffraction par des surfaces rugueuses infiniment conductrices.

- DÉFORMATION ALÉATOIRE :

La surface aléatoire $a(x)$ ne sera pas définie analytiquement comme le cas précédent. Elle sera représentée par ses caractéristiques statistiques (densité de distribution ou densité de probabilité, fonction de corrélation, etc....).

Les expressions de l'intensité de diffraction (II.38) et (II.39) peuvent prendre les formes symboliques suivantes :

$$I^d(\beta) = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) \left| \int_{-1/2}^{+1/2} a(x) e^{-i(\beta-\beta_0)x} dx \right|^2 \quad (\text{II.40})$$

Ou encore :

$$I^d(\beta) = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) A(\beta - \beta_0) A(\beta - \beta_0)^* \quad (\text{II.41})$$

On peut écrire aussi que:

$$I^d(\beta) = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1/2}^{+1/2} a(x) a(x') e^{-i(\beta-\beta_0)(x-x')} dx dx' \quad (\text{II.42})$$

En procédant à un changement de variable $x' = x + \kappa$ et en effectuant une moyenne sur un grand nombre de surfaces, on obtient la valeur de l'intensité moyenne donnée par :

$$\langle I^d(\beta) \rangle = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1/2-x}^{+1/2-x} \langle a(x) a(x + \kappa) \rangle e^{i(\beta-\beta_0)\kappa} dx d\kappa \quad (\text{II.43})$$

En se rappelant que $a(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-l/2, +l/2]$ et en supposant que la largeur des zones de transition entre les zones planes et la zone modulée de la surface est petite devant la largeur de la surface (pour assurer la continuité des dérivées première et seconde), $\langle a(x) a(x + \kappa) \rangle$ peut être remplacée par $\varphi(\kappa)$ pour $\kappa \in [-l, +l]$. Cette quantité s'annulant ailleurs, nous intervertissons l'ordre des intégrations, il vient :

$$\langle I^d(\beta) \rangle = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) \left[\int_{-l}^0 \varphi(\kappa) e^{i(\beta-\beta_0)\kappa} \int_{-1/2-\kappa}^{+1/2} dx d\kappa + \int_0^l \varphi(\kappa) e^{i(\beta-\beta_0)\kappa} \int_{-1/2}^{+1/2-\kappa} dx d\kappa \right] \quad (\text{II.44})$$

Ce qui donne :

$$\langle I^d(\beta) \rangle = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) \int_{-l}^l (1 - |\kappa|) \varphi(\kappa) \cdot e^{i(\beta - \beta_0)\kappa} d\kappa \quad (\text{II.45})$$

Suivant le théorème de convolution, on trouve :

$$\langle I^d(\beta) \rangle = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) \cdot l^2 \cdot \phi\left(\frac{\beta - \beta_0}{2\pi} l\right) * \text{sinc}^2\left(\frac{\beta - \beta_0}{2\pi} l\right) \quad (\text{II.46})$$

Où ϕ est la densité spectrale de l'allure de la surface diffractante, définit par :

$$\phi\left(\frac{\beta - \beta_0}{2\pi} l\right) = \int_{-l}^l \varphi(\kappa) e^{-i(\beta - \beta_0)\kappa} d\kappa \quad \text{et} \quad l^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\beta - \beta_0}{2\pi} l\right) = \int_{-l}^l (1 - |\kappa|) e^{-i(\beta - \beta_0)\kappa} d\kappa$$

D'après l'expression (II.46), la valeur moyenne de l'intensité de diffraction est proportionnelle à la densité spectrale de l'allure de la surface diffractante.

II.7. APPLICATIONS NUMÉRIQUES

II.7.1. Introduction

La fonction $a(x)$ décrivant le profil de la déformation est définie analytiquement. Comme on a vu dans le chapitre précédent, l'intensité diffractée est proportionnelle à la transformée de Fourier de $a(x)$, résultat constaté par d'autres auteurs [5,11] dans l'étude de la diffraction par des surfaces rugueuses infiniment conductrices.

II.7.2. Déformation déterministe

Nous avons étudié trois types de déformations (Gaussienne, Sinusoïdale, Saut unité) et pour chaque type de déformation nous avons étudié trois métaux différents (Aluminium, Argent, Or) ainsi que le cas d'un métal infiniment conducteur. Nous avons limité les calculs au premier ordre de perturbations.

Pour le cas sinusoïdal, l'étude a été faite pour un nombre croissant de demi-périodes (1,3 et 5 demi-périodes), afin de faire le lien entre le problème aperiodique et periodique (réseau sinusoïdal), ainsi que pour chaque métal.

L'étude a été faite pour les valeurs numériques suivantes :

- Longueur d'onde : $\lambda = 0,633\mu m$.
- Hauteur maximale des rugosités: $h = 0,1 \lambda$.
- Largeur des rugosités:

1. Pour le cas Gaussienne et Saut unité: $l = 2 \mu m$.

2. Pour le cas sinusoïdal: La période $d = 1 \mu m$, trois cas ont été étudiés 1,3 et 5 demi-périodes.

- La constante diélectrique complexe du métal pour $\lambda = 0,633\mu m$ est:

Aluminium: $\varepsilon'_r = -39,88 - i15,56$ ou $\nu = \sqrt{\varepsilon'_r} = 1,2099 - i6,4299$.

Argent: $\varepsilon'_r = -16,32 - i0,5414$ ou $\nu = \sqrt{\varepsilon'_r} = 0,06699 - i4,040$.

Or: $\varepsilon'_r = -10,28 - i1,040$ ou $\nu = \sqrt{\varepsilon'_r} = 0,1619 - i3,2103$.

Le *tableau II.2* représente l'énergie totale diffractée (sommée dans toutes les directions au dessus de la surface déformée, seule la contribution de la partie déformée a été représentée). Pour chacune des polarisations, l'onde arrive sous un angle de 60° . Les quatre types de métaux (infiniment conducteur, Aluminium, Argent et Or) avec les trois types de déformations sont représentés.

Les remarques tirées de ce tableau sont les suivantes:

- En mode **TE**, l'Argent a un coefficient de réflectivité plus grand que l'Or et l'Aluminium et proche du cas infiniment conducteur.
- En mode **TM**, l'Or a un coefficient de réflectivité plus grand que celui de l'Argent et de l'Aluminium et proche du cas infiniment conducteur.
- La déformation Saut unité diffracte mieux que les deux autres déformations.

En mode **TM**, l'énergie diffractée est nettement plus importante qu'en mode **TE**.

			Inf. Conducteur	Aluminium	Argent	Or
Gaussienne	Mode	TE	$9,638.10^{-4}$	$9,061.10^{-4}$	$9,556.10^{-4}$	$9,342.10^{-4}$
		TM	$1,832.10^{-3}$	$1,177.10^{-3}$	$1,246.10^{-3}$	$1,726.10^{-3}$
Sinusoïdale	Mode	TE	$1,126.10^{-3}$	$1,040.10^{-3}$	$1,113.10^{-3}$	$1,081.10^{-3}$
		TM	$4,241.10^{-3}$	$3,010.10^{-3}$	$2,893.10^{-3}$	$3,308.10^{-3}$
Saut unité	Mode	TE	$1,832.10^{-3}$	$2,634.10^{-3}$	$2,772.10^{-3}$	$2,712.10^{-3}$
		TM	$5,193.10^{-3}$	$3,934.10^{-3}$	$4,054.10^{-3}$	$5,585.10^{-3}$

Tableau II.2. L'énergie totale diffractée

Les figures II.2, représentent pour le mode **TE** (figure II.2a) et **TM** (figure II.2b) l'intensité de diffraction en fonction de θ (angle de diffraction) pour $\theta_0 = 60^\circ$ (angle d'incidence) avec une déformation sinusoïdale comportant 1,3 et 5 demi-périodes avec comme métal l'Aluminium. Elles montrent qu'en augmentant le nombre des demi-périodes, l'énergie diffractée se concentre dans les directions θ correspondant aux ordres de diffraction du réseau avec $\sin \theta_n = \sin \theta_0 + n \frac{\lambda}{d}$ pour $\theta_0 = 60^\circ$, on trouve $\theta_{-1} = 13,47^\circ$.

A l'examen de ces courbes, on constate d'une façon générale que l'énergie diffractée est nettement plus importante en polarisation **TM** qu'en polarisation **TE**.

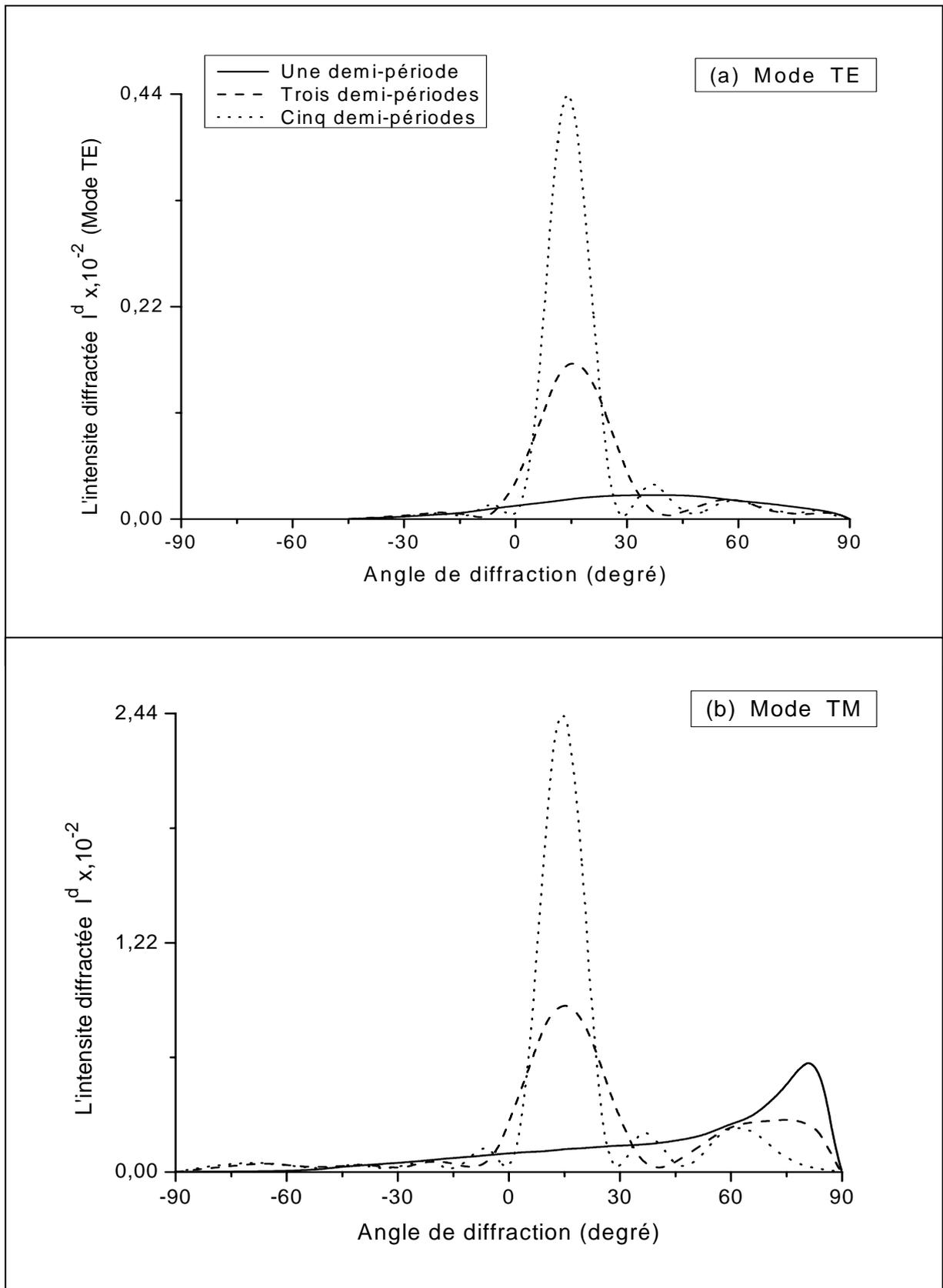


Figure II.2. L'intensité de diffraction, (a) Mode **TE**, (b) Mode **TM**.
 Déformation sinusoïdale (Hauteur $h=0,1\lambda$; Période $d=1\mu m$).
 Longueur d'onde $\lambda=0,633\mu m$; Incidence $\theta_0=60^\circ$; Métal: **Aluminium**.

II.7.3. Déformation aléatoire

La valeur moyenne de l'intensité de diffraction est obtenue à partir de l'expression (II.43) en appliquant numériquement sur cinq cents échantillons de surfaces rugueuses aléatoires de longueur l ($l=20\lambda$) construites par une méthode de simulation (figure II.3.) pour les différentes valeurs du nombre moyen des rugosités ($lT=1, 10, 30, 100$); avec $lT=l/T$. (T étant la distance de corrélation).

La procédure numérique utilisée pour générer une telle surface est une méthode spectrale exposée par Thorsos [28]. Tous les graphes ont été tracés pour les valeurs numériques suivantes: longueur d'onde $\lambda=0,6330\mu m$, hauteur moyenne des rugosités $h=0,05\lambda$, métal: Aluminium.

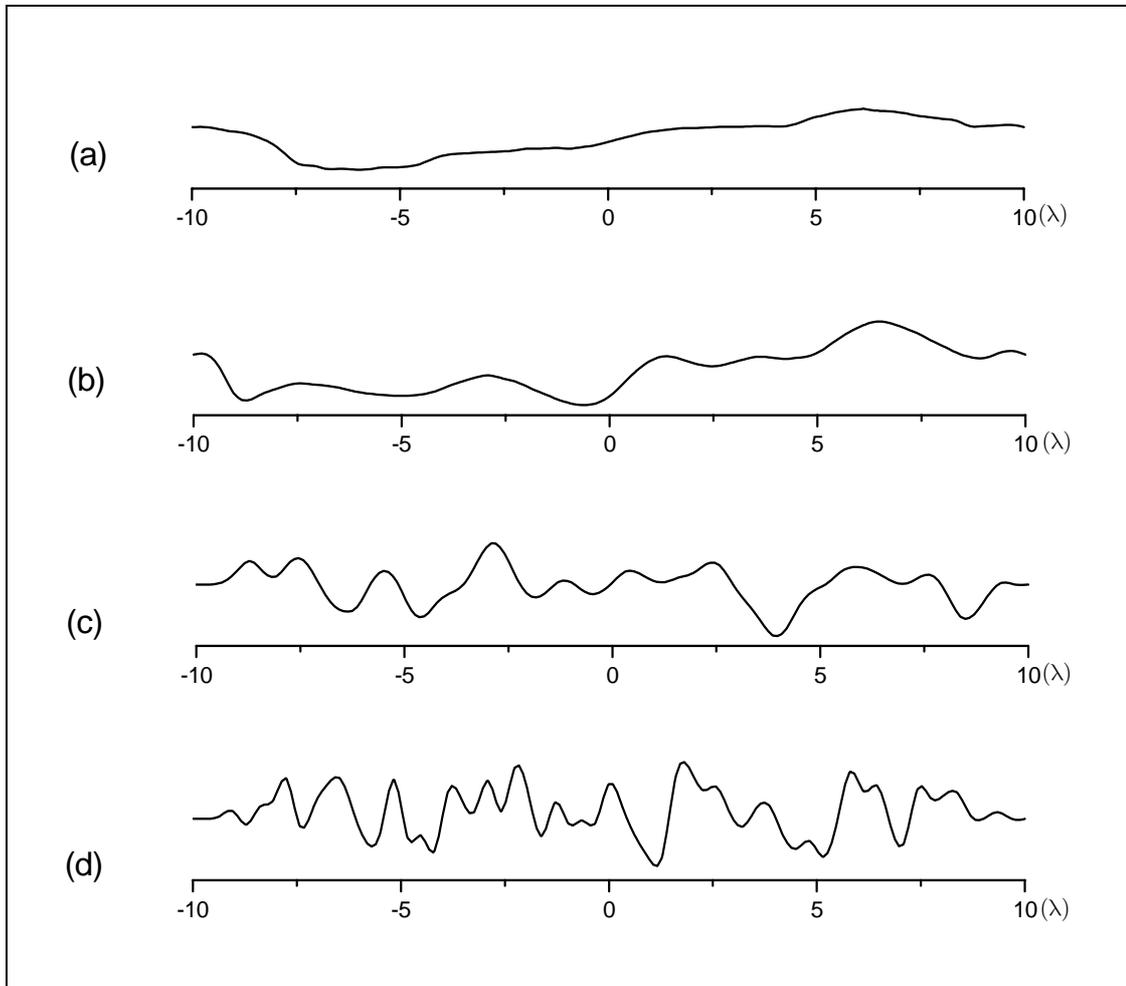


Figure II.3: Profil de la surface aléatoire.

(a) $lT=1$, (b) $lT=10$, (c) $lT=30$, (d) $lT=100$.

Pour $IT=1$, la courbe (figure II.4.) présente un maximum dans la direction spéculaire. Ceci est dû au fait que la surface est presque plate. Dès qu'on augmente le nombre moyen des rugosités, ce phénomène tend à disparaître et on aura des courbes oscillantes correspondant à une succession de zones d'éclairement et de zones sombres ; bien connues des opticiens. Un maximum secondaire apparaît sur les graphes dans la direction d'incidence : c'est le phénomène de rétrodiffusion "Backscattering". On constate qu'avec cinq cents (500) échantillons, la valeur moyenne de l'intensité est proche de la valeur théorique donnée par l'expression (II.40). Ce résultat sera meilleur avec un nombre d'échantillons plus grand.

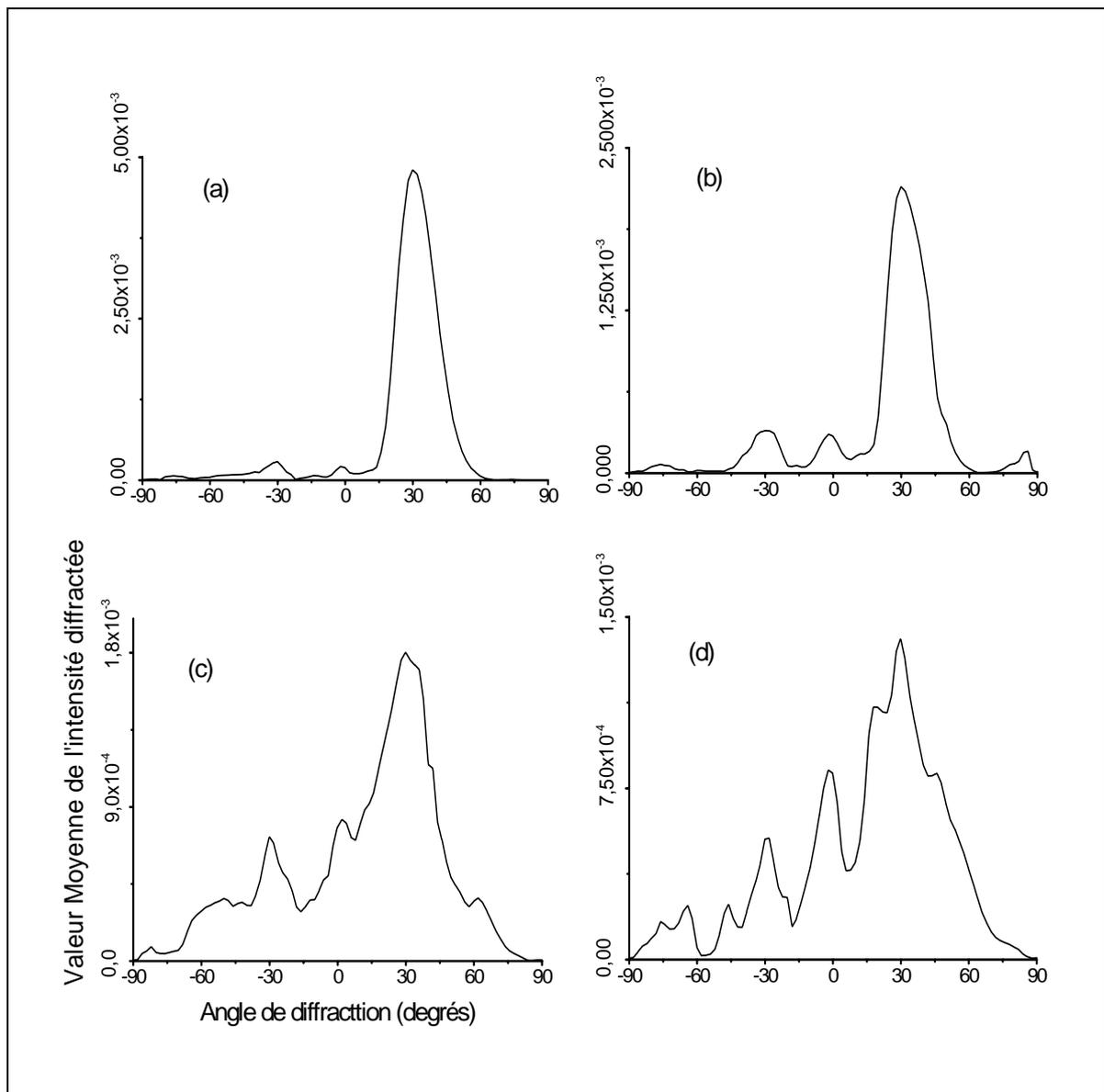


Figure II.4. Valeur moyenne de l'intensité diffractée.

Angle d'incidence $\theta_0=30^\circ$, métal: **Argent**.

Polarisation **TE**, Nbre d'échantillons $NE=500$.

(a) $IT=1$, (b) $IT=10$, (c) $IT=30$, (d) $IT=100$.

Le *Tableau II.3* représente la valeur moyenne de la puissance totale diffractée (intégrée dans toutes les directions au dessus de la surface déformée, seule la contribution de la partie déformée a été représentée). Pour chacune des polarisations, l'onde arrive sous un angle de 30° . Quatre types de métaux (infiniment conducteur, Aluminium, Argent et Or) sont représentés.

		Inf. Cond.	Aluminium	Argent	Or
Mode	TE	$1,632 \times 10^{-3}$	$1,025 \times 10^{-3}$	$1,415 \times 10^{-3}$	$1,210 \times 10^{-3}$
	TM	$2,734 \times 10^{-3}$	$2,124 \times 10^{-3}$	$2,321 \times 10^{-3}$	$2,405 \times 10^{-3}$

Tableau II.3: Valeur moyenne de l'intensité totale diffractée.

Angle d'incidence $\theta_0=30^\circ$, $LT=30$, $NE=500$.

*Métal : **Aluminium** $\nu=1,2099-j6,4299$.*

***Argent** $\nu=0,06699-j4,040$.*

***Or** $\nu=0,1619-j3,2103$.*

Les remarques tirées de ce tableau sont les suivantes:

- En mode TE, l'Argent a un coefficient de réflectivité plus grand que celui de l'Or et de l'Aluminium et inférieur au cas infiniment conducteur.
- En mode TM, l'Or a un coefficient de réflectivité plus grand que celui de l'Argent et de l'Aluminium et inférieur au cas infiniment conducteur.
- En mode TM la valeur de l'intensité diffractée est nettement plus importante qu'en mode TE.

II.8. CONCLUSION

La méthode de perturbations que nous avons présentée nous a permis de trouver les expressions des intensités de diffraction ou coefficients de pertes pour des surfaces rugueuses. Les résultats, au premier ordre de perturbations, sont d'autant plus exacts que la hauteur de déformation est faible comparée à la longueur d'onde utilisée.

Hormis la complexité des calculs théoriques, rien ne s'oppose au passage au second ordre de perturbations. Ceci permettrait d'améliorer la précision des résultats pour des surfaces assez hautes au détriment de la simplicité des solutions.

CHAPITRE III

ÉTUDE DES PERTES PAR RAYONNEMENT DANS UN GUIDE DÉFORMÉ APÉRIODIQUEMENT

- III.1. Introduction
- III.2. Position du problème
- III.3. Résolution
- III.4. Résultats numériques

Chapitre III

ÉTUDE DES PERTES PAR RAYONNEMENT DANS UN GUIDE DÉFORMÉ APÉRIODIQUEMENT

III.1. INTRODUCTION

Le problème que nous allons évoquer dans ce chapitre concerne le rayonnement issu de la déformation apériodique d'un guide diélectrique déposé sur un substrat métallique supposé infiniment conducteur. Dans le cas d'un guide lisse, la propagation se fait sans rayonnement, car à l'extérieur du guide les ondes sont évanescentes, mais si celui-ci a subi une déformation, un rayonnement à l'extérieur devient possible.

Le but de ce travail est d'étudier le rayonnement et de montrer la possibilité de réaliser des antennes à partir de guides diélectriques déformés apériodiquement. La méthode proposée ici est basée sur l'utilisation de la forme covariante des équations de Maxwell écrites dans un système de coordonnées non orthogonales adapté aux limites. La déformation est limitée dans l'espace pour qu'une représentation en intégrale de Fourier soit possible. Si l'amplitude de la déformation est faible par rapport à la longueur d'onde, une méthode de perturbations donne une bonne approximation. Un des intérêts de cette méthode est de conduire à des calculs analytiques et de permettre des applications numériques.

III.2. POSITION DU PROBLÈME

Pour un guide planaire, en optique classique quand l'interface diélectrique vide n'est pas parfaitement lisse, mais possède des rugosités, les rayons lumineux circulant dans le diélectrique sont réfléchis irrégulièrement. Certains rayons arrivent avec un angle d'incidence tel qu'ils donnent naissance à un changement de mode, tandis que d'autres s'échappent dans le diélectrique pour les angles d'incidence dépassant l'angle critique de réflexion totale. Dans le cas où, les rayons lumineux sont transmis sur de longues distances, les irrégularités peuvent provoquer un couplage entre modes (c'est-à-dire une conversion de mode) et des pertes par rayonnement. Ceci est la cause de pertes par transmission et affecte

la bande passante. Dans la suite nous nous intéresserons uniquement aux pertes par rayonnement.

La lumière étant une onde électromagnétique, ses propriétés doivent être décrites par des équations de Maxwell. Nous nous proposons d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique, fonction harmonique du temps ($\exp(i\omega t)$), dans un guide planaire d'indice de réfraction v qui a subi une déformation. Pour cela nous utilisons les équations de Maxwell sous forme covariante. Leur résolution nécessite, au préalable, le choix d'un système de coordonnées pour pouvoir les projeter. Ce système de coordonnées permet d'exprimer très simplement les conditions de continuité à l'interface entre les deux milieux puisque cette interface coïncide avec une surface de coordonnées ayant pour profil $a(x)$ (figure III.1).

Le guide est supposé infini dans la direction ox et oz (on considère le problème à deux dimensions ($\partial/\partial z = 0$)). La propagation se fait dans la direction ox . Le guide planaire que nous étudions est déposé sur un substrat métallique supposé infiniment conducteur.

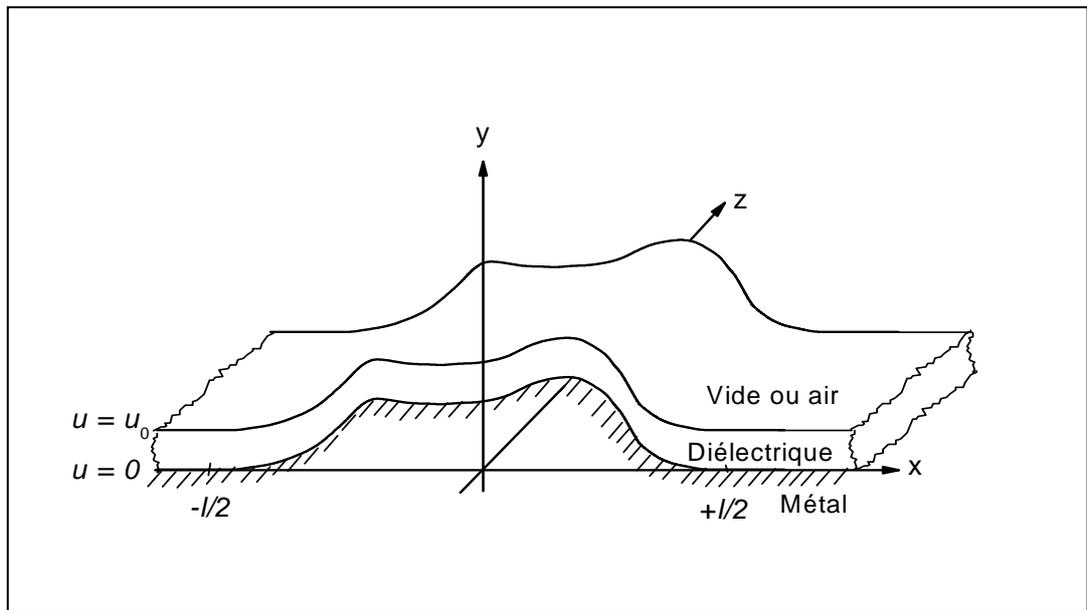


Figure III.1. Profil du guide diélectrique déformé.

III.3. RÉOLUTION

III.3.1. Considérations générales

Pour résoudre le système (II.9), on part de l'ordre zéro qui représente la propagation dans un guide lisse dont la solution simple est connue. On calcule ensuite par récurrence les ordres supérieurs. La première équation différentielle du système (II.9) est linéaire du second ordre et à coefficients constants, par rapport à la variable u . Les solutions sont de la forme suivante :

Dans le vide ($u \geq u_0$):

$$\begin{cases} f_p(\beta, u) = A_p(\beta)e^{i\chi u} + C_p(\beta, u) \\ kg_p(\beta, u) = i \frac{\partial f_p(\beta, u)}{\partial u} + D_p(\beta, u) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Avec: $\chi^2 = k^2 - \beta^2$

Dans le guide ($0 \leq u \leq u_0$):

$$\begin{cases} f'_p(\beta, u) = A'_p(\beta)e^{i\chi' u} + B'_p e^{-i\chi' u} + C'_p(\beta, u) \\ k'g'_p(\beta, u) = i \frac{\partial f'_p(\beta, u)}{\partial u} + D'_p(\beta, u) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Avec: $\chi'^2 = k'^2 - \beta^2$; $k' = vk$

$A_p(\beta)$, $A'_p(\beta)$ et $B'_p(\beta)$ sont des constantes d'intégration et ne dépendent pas de la variable u . $C_p(\beta, u)$ et $C'_p(\beta, u)$ sont deux fonctions de la variable u , solutions particulières de l'équation non homogène (constituées de l'intégrale d'une somme de fonctions exponentielles). $D_p(\beta, u)$ et $D'_p(\beta, u)$ sont deux fonctions de variables u connues s'exprimant à partir des ordres inférieurs à p . A chaque ordre de perturbations, l'application des conditions aux limites (Tableau III.1), permet de déterminer les constantes $A_p(\beta)$, $A'_p(\beta)$ et $B'_p(\beta)$.

Mode	$u = 0$	$u = u_0$
TE	$F'(0) = 0$	$F'(u_0) = F(u_0); \quad \frac{G'(0)}{Z'} = \frac{G(0)}{Z}$
TM	$G'(0) = 0$	$\frac{F'(0)}{Z'} = \frac{F(0)}{Z}; \quad G'(u_0) = G(u_0)$

Tableau III.1. Les conditions aux limites.

III.3.1.1. Mode TE

$A_p(\beta)$, $A'_p(\beta)$ et $B'_p(\beta)$ sont les solutions du système de trois équations linéaires suivantes:

$$\begin{cases} A'_p(\beta) + B'_p(\beta) = -C'_p(\beta, 0) \\ A'_p(\beta)e^{i\chi'u_0} + B'_p(\beta)e^{-i\chi'u_0} - A_p(\beta)e^{i\chi'u_0} = C_p(\beta, u_0) - C'_p(\beta, u_0) \\ -\chi'A'_p(\beta)e^{i\chi'u_0} + \chi'B'_p(\beta)e^{-i\chi'u_0} - \chi A_p(\beta)e^{i\chi'u_0} \\ = i \frac{\partial}{\partial u} (C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u))_{u=u_0} + D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Ce système n'admet de solutions que si son déterminant est différent de zéro, c'est à dire si:

$$\text{tg}(\chi'u_0) - \frac{\chi'}{i\chi} \neq 0 \quad (\text{III.4})$$

Dans le cas où $\text{tg}(\chi'u_0) = \frac{\chi'}{i\chi}$, il y a dégénérescence. Si la condition (III.4) est vérifiée, on trouve :

$$B'_p(\beta) = -A'_p(\beta) - C'_p(\beta, 0) \quad (\text{III.5})$$

$$A'_p(\beta) = \frac{i \frac{\partial}{\partial u} (C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u))_{u=u_0} + D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0)}{2i (\chi \sin(\chi'u_0) + i\chi' \cos(\chi'u_0))} + \frac{(\chi' + \chi)C'_p(\beta, 0)e^{-i\chi'u_0} + \chi(C_p(\beta, u_0) - C'_p(\beta, u_0))}{2i (\chi \sin(\chi'u_0) + i\chi' \cos(\chi'u_0))} \quad (\text{III.6})$$

$$A_p(\beta) = \frac{i \frac{\partial}{\partial u} (C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u))_{u=u_0} + D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0)}{\chi + i\chi' \cotg(\chi'u_0)} - \frac{i\chi' \cotg(\chi'u_0)(C_p(\beta, u_0) + C'_p(\beta, u_0)) - i\chi' \frac{C'_p(\beta, 0)}{\sin(\chi'u_0)}}{\chi + i\chi' \cotg(\chi'u_0)} \quad (\text{III.7})$$

III.3.1.2. Mode TM

De la même manière, en appliquant les conditions aux limites, on arrive à un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -\chi' A'_p(\beta) + \chi' B'_p(\beta) = -i \frac{\partial}{\partial u} C'_p(\beta, u) \Big|_{u=0} - D'_p(\beta, 0) \\ \nu A'_p(\beta) e^{i\chi' u_0} + \nu B'_p(\beta) e^{-i\chi' u_0} - A_p(\beta) e^{i\chi u_0} = C_p(\beta, u_0) - \nu C'_p(\beta, u_0) \\ -\chi' A'_p(\beta) e^{i\chi' u_0} + \chi' B'_p(\beta) e^{-i\chi' u_0} - \nu \chi A_p(\beta) e^{i\chi u_0} = \\ = i \frac{\partial}{\partial u} (\nu C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u)) \Big|_{u=u_0} + \nu D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Ce système n'admet de solutions que si son déterminant est différent de zéro, c'est à dire si:

$$\text{tg}(\chi' u_0) - \nu^2 \frac{\chi}{i \chi'} \neq 0 \quad (\text{III.9})$$

Dans le cas où $\text{tg}(\chi' u_0) = \nu^2 \frac{\chi}{i \chi'}$, il y a dégénérescence. Si la condition (III.4) est vérifiée, on trouve :

$$B'_p(\beta) = A'_p(\beta) - \frac{i}{\chi'} \frac{\partial}{\partial u} C'_p(\beta, u) \Big|_{u=0} - \frac{1}{\chi'} D'_p(\beta, 0) \quad (\text{III.10})$$

$$\begin{aligned} A'_p(\beta) = & \frac{i \frac{\partial}{\partial u} (\nu C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u)) \Big|_{u=u_0} + \nu \chi (C_p(\beta, u) - \nu C'_p(\beta, u))}{2\nu^2 \chi \cos(\chi' u_0) - 2i \chi' \sin(\chi' u_0)} \\ & + \frac{\nu D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0) + (\nu^2 \frac{\chi}{\chi'} + 1) \left(i \frac{\partial}{\partial u} C'_p(\beta, u) - D'_p(\beta, u) \right) \Big|_{u=u_0} e^{-i\chi' u_0}}{2\nu^2 \chi \cos(\chi' u_0) - 2i \chi' \sin(\chi' u_0)} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{aligned} A_p(\beta) = & \frac{\nu \left(i \frac{\partial}{\partial u} C_p(\beta, u) - D'_p(\beta, u) \right) \Big|_{u=u_0} + i \chi' \sin(\chi' u_0) (C_p(\beta, u) - \nu C'_p(\beta, u))}{\nu^2 \chi \cos(\chi' u_0) - i \chi' \sin(\chi' u_0)} \\ & + \frac{\nu \cos(\chi' u_0) \left(i \frac{\partial}{\partial u} (\nu C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u)) \Big|_{u=u_0} + D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0) \right)}{\nu^2 \chi \cos(\chi' u_0) - i \chi' \sin(\chi' u_0)} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

III.3.1.3. Bilan énergétique

➤ **Puissance transmise :**

Pour déterminer cette puissance, il faut calculer la composante N^x du vecteur de Poynting :

$$N^x = E_u H_z - H_u E_z \quad (\text{III.13})$$

La valeur moyenne de N^x sur une période est donnée par :

$$\bar{N}^x = \frac{1}{2} \text{Re} [E_u H_z^* - H_u E_z^*] \quad (\text{III.14})$$

Et la puissance transmise par unité de largeur du guide est :

$$P_t = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^x du dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^x du \quad (\text{III.15})$$

➤ **Puissance rayonnée dans le vide :**

Pour cette puissance, c'est la composante N^u du vecteur de Poynting qui nous intéresse :

$$\text{Pour le mode TE: } N^u = E_z H_x = \frac{FG}{Z}$$

$$\text{Pour le mode TM: } N^u = -H_z E_x = \frac{FG}{Z}$$

Donc pour les deux types de polarisation, l'expression de la composante N^u du vecteur de Poynting est la même, sa la valeur moyenne est :

$$\bar{N}^u = \text{Re} \left[\frac{FG^*}{2Z} \right] \quad (\text{III.16})$$

La puissance rayonnée par unité de largeur est:

$$P_r = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{FG^*}{2Z} \right] dx dz \quad (\text{III.17})$$

Puisque F et G sont indépendants de z , on aura:

$$P_r = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} FG^* dx \quad (\text{III.18})$$

Suivant le théorème de Parseval (II.17), on peut écrire :

$$P_r = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} fg^* d\beta \quad (\text{III.19})$$

Le rayonnement est provoqué par les ondes réelles dans le vide qui seules transportent de l'énergie à l'infini (ondes rayonnées). Pour ces ondes, χ^2 satisfait la condition $\chi^2 \geq 0$, c'est-à-dire $|\beta| \leq k$, ce qui permet de réduire l'intervalle d'intégration à :

$$P_r = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \int_{-k}^{+k} fg^* d\beta \quad (\text{III.20})$$

Cette expression représente la puissance totale perdue dans toutes les directions ($-\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2$) au dessus du guide. L'intégrant représente la puissance rayonnée en fonction de β , c'est-à-dire en fonction de la direction θ .

$$P_r(\beta) = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} [fg^*] \quad (\text{III.21})$$

➤ **Coefficient de pertes :**

La puissance transmise P_t est fonction quadratique des champs, donc son expression contiendra le facteur $\exp(-2\eta x)$, ce qui signifie que la variation de P_t sur un élément dx est telle que :

$$\frac{dP_t}{dx} = -2\eta P_t \quad (\text{III.22})$$

η étant le coefficient de pertes.

La variation exprimée par la relation (III.22) représente l'atténuation que subit l'énergie transmise lorsqu'elle parcourt dx . Donc, cette variation est égale aux pertes par rayonnement, en supposant que les autres sources de pertes sont négligeables. On a alors :

$$P_r = 2\eta P_t \quad (\text{III.23})$$

On en déduit le coefficient de pertes en Nepers.

$$\eta = \frac{P_r}{2P_t} \quad (\text{III.24})$$

Ou en dB: $\eta_{dB} = 8,868\eta$.

Puisqu'on a considéré la puissance rayonnée en fonction de β , on représente aussi le coefficient de pertes en fonction de la même variable :

$$\eta(\beta) = \frac{P_r(\beta)}{2P_t} \quad (\text{III.25})$$

III.3.2. Application

III.3.2.1. Ordre zéro : A ce niveau d'ordre, le guide est plan, et le système (II.9) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_0(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_0(\beta, u) = 0 \\ kg_0(\beta, u) = i \frac{\partial f_0(\beta, u)}{\partial u} \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

En posant: $\chi^2 = k^2 - \beta^2$.

Le tableau III.2 représente les trois types d'onde (de rayonnement R, évanescente O.E, guidée O.G) pour chaque milieu, et ceci suivant les valeurs de β .

Milieu \ β	$-\infty$	$-k'$	$-k$	$+k$	$+k'$	$+\infty$
Vide	O.E.		R.	O.E.		
Diélectrique	O.E.	O.G.				O.E.

Tableau III.2. Les différents types d'onde pour chaque milieu suivant les valeurs de β .

Pour avoir une propagation guidée dans le diélectrique, il faut que β prenne une valeur β_0 telle que $-k' < \beta_0 < +k'$. Si cette condition est réalisée, nous obtenons les solutions suivantes :

Dans le vide (ondes évanescentes) :

$$\begin{cases} f_0(\beta, u) = A_0(\beta)e^{-\tilde{x}u} \\ kg_0(\beta, u) = -i\tilde{x}A_0(\beta)e^{-\tilde{x}u} \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

Avec : $\tilde{x}^2 = \beta^2 - k^2$.

Dans le guide (ondes guidées) :

$$\begin{cases} f'_0(\beta, u) = A'_0(\beta)e^{i\chi'u} + B'_0(\beta)e^{-i\chi'u} \\ kg'_0(\beta, u) = -\chi'A'_0(\beta)e^{i\chi'u} + \chi'B'_0(\beta)e^{-i\chi'u} \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Avec: $k' = \nu k$; ν indice de refraction; $\chi'^2 = k'^2 - \beta^2$.

Les lettres primées correspondent au diélectrique et non primées au vide. Puisque β prend une valeur β_0 (un seul mode qui se propage), les fonctions $A_0(\beta)$, $A'_0(\beta)$ et $B'_0(\beta)$ deviennent:

$$A_0(\beta) = A_0\delta(\beta - \beta_0); \quad A'_0(\beta) = A'_0\delta(\beta - \beta_0); \quad B'_0(\beta) = B'_0\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{III.29}).$$

Avec: δ distribution de Dirac.

En faisant la transformée de Fourier inverse, nous obtenons les solutions suivantes:

Dans le vide:

$$\begin{cases} F_0(x, u) = A_0e^{i\beta_0x - \tilde{x}_0u} \\ kG_0(x, u) = -i\tilde{x}_0A_0e^{i\beta_0x - \tilde{x}_0u} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Avec: $\tilde{x}_0^2 = \beta_0^2 - k^2$

Dans le guide:

$$\begin{cases} F'_0(x, u) = (A'_0 e^{i\chi'_0 u} + B'_0 e^{-i\chi'_0 u}) e^{i\beta_0 x} \\ kG'_0(x, u) = \chi'_0 (-A'_0 e^{i\chi'_0 u} + B'_0 e^{-i\chi'_0 u}) e^{i\beta_0 x} \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

$$\text{Avec: } \chi'_0{}^2 = k'^2 - \beta_0^2$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, nous appliquons les conditions aux limites. On trouve pour le mode **TE**:

$$\begin{cases} A'_0 + B'_0 = 0 \\ A'_0 e^{i\chi'_0 u_0} + B'_0 e^{-i\chi'_0 u_0} - A_0 e^{-\tilde{x}_0 u_0} = 0 \\ -\chi'_0 A'_0 e^{i\chi'_0 u_0} + \chi'_0 B'_0 e^{-i\chi'_0 u_0} + \tilde{x}_0 A_0 e^{-\tilde{x}_0 u_0} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

Ce système linéaire homogène n'admet de solution que si son déterminant est nul. Ce qui donne:

$$\text{tg}(\chi'_0 u_0) = \frac{\chi'_0}{\tilde{x}_0} \quad (\text{III.33})$$

Cette dernière équation définit l'équation de dispersion du guide planaire lisse pour le mode **TE** et la solution s'écrit:

Dans le vide:

$$\begin{cases} f_0(\beta, u) = A_0 \sin(\chi' u_0) e^{-\tilde{x}(u-u_0)} \delta(\beta - \beta_0) \\ kg_0(\beta, u) = -i\tilde{x} A_0 \sin(\chi' u_0) e^{-\tilde{x}(u-u_0)} \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

Dans le guide:

$$\begin{cases} f'_0(\beta, u) = A_0 \sin(\chi' u) \delta(\beta - \beta_0) \\ k'g'_0(\beta, u) = i\chi' A_0 \cos(\chi' u) \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

Pour le mode **TM**, avec le même raisonnement que le mode **TE** et en appliquant les conditions aux limites, nous trouvons un système linéaire homogène dont la solution existe si le déterminant est nul, c'est-à-dire si:

$$tg(\chi'_0 u_0) = \frac{v_0^2 \tilde{\chi}_0}{\chi_0} \quad (\text{III.36})$$

Cette dernière équation définit l'équation de dispersion pour ce mode et nous trouvons les solutions suivantes:

Dans le vide:

$$\begin{cases} f_0(\beta, u) = v A_0 \cos(\chi' u_0) e^{-\tilde{\chi}(u-u_0)} \delta(\beta - \beta_0) \\ k g_0(\beta, u) = -i \tilde{\chi} A_0 \cos(\chi' u_0) e^{-\tilde{\chi}(u-u_0)} \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

Dans le guide:

$$\begin{cases} f'_0(\beta, u) = A_0 \cos(\chi' u) \delta(\beta - \beta_0) \\ k' g'_0(\beta, u) = -i \chi' A_0 \sin(\chi' u) \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

III.3.2.2. Ordre un: A cet ordre, le rayonnement dans le vide est possible, le système (II.9) s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_1(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_1(\beta, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\beta - \alpha)}{\tau} (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial f_0(\alpha, u)}{\partial u} d\alpha \\ k g_1(\beta, u) = i \frac{\partial f_1(\beta, u)}{\partial u} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\beta - \alpha) \frac{A(\beta - \alpha)}{\tau} f_0(\alpha, u) d\alpha \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Pour le mode **TE** : Dans le vide ce système devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_1(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_1(\beta, u) = \tilde{\chi}_0 A(\beta - \beta_0) (\beta^2 - \beta_0^2) A_0 \sin(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{\chi}_0(u-u_0)} \\ k g_1(\beta, u) = i \frac{\partial f_1(\beta, u)}{\partial u} + i \beta_0 (\beta - \beta_0) A(\beta - \beta_0) A_0 \sin(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{\chi}_0(u-u_0)} \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} f_1(\beta, u) = A_1(\beta) e^{i\chi u} - \tilde{\chi}_0 A_0 A(\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{\chi}_0(u-u_0)} \\ k g_1(\beta, u) = -i \chi A_1(\beta) e^{i\chi u} + i \tilde{\chi}_0^2 A_0 A(\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{\chi}_0(u-u_0)} \left(1 - \frac{\beta_0(\beta - \beta_0)}{\tilde{\chi}_0^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

Dans le guide le système (III.40) devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f'_1(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi'^2 f'_1(\beta, u) = -\chi'_0 A_0 A(\beta - \beta_0)(\beta^2 - \beta_0^2) \cos(\chi'_0 u) \\ k' g'_1(\beta, u) = i \frac{\partial f'_1(\beta, u)}{\partial u} + i \beta_0(\beta - \beta_0) A_0 A(\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u) \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} f'_1(\beta, u) = A'_1(\beta) e^{i\chi'u} + B'_1(\beta) e^{-i\chi'u} + \chi'_0 A_0 A(\beta - \beta_0) \cos(\chi'_0 u) \\ k' g'_1(\beta, u) = \chi' A'_1(\beta) e^{i\chi'u} + \chi' B'_1(\beta) e^{-i\chi'u} - i \chi_0^2 A_0 A(\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u) \left(1 - \frac{\beta_0(\beta - \beta_0)}{\chi_0^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

Nous appliquons les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration, tout calcul fait, on trouve:

$$B'_1(\beta) = -A'_1(\beta) - \chi' A(\beta - \beta_0) \quad (\text{III.44})$$

$$A'_1(\beta) = \frac{A_0 A(\beta - \beta_0) (k^2 (v^2 - 1) \sin(\chi'_0 u_0) - i \chi'_0 (\chi + \chi') e^{i\chi'u_0})}{2(\chi \sin(\chi'u_0) + i \chi' \cos(\chi'u_0))} \quad (\text{III.45})$$

$$A_1(\beta) = \frac{i A_0 A(\beta - \beta_0) (k^2 (v^2 - 1) \sin(\chi'_0 u_0) \cdot \sin(\chi'u_0) - \chi' \chi'_0)}{\chi \sin(\chi'u_0) + i \chi' \cos(\chi'u_0)} \quad (\text{III.46})$$

Pour le mode **TM** la solution dans le vide s'écrit:

$$\begin{cases} f_1(\beta, u) = A_1(\beta) e^{i\chi'u} - v \tilde{\chi}_0 A_0 A(\beta - \beta_0) \cos(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{\chi}_0(u-u_0)} \\ k g_1(\beta, u) = -i \chi A_1(\beta) e^{i\chi'u} + i \tilde{\chi}_0^2 A_0 A(\beta - \beta_0) \cos(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{\chi}_0(u-u_0)} \left(1 - \frac{\beta_0(\beta - \beta_0)}{\tilde{\chi}_0^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Et dans le guide la solution s'écrit:

$$\begin{cases} f'_1(\beta, u) = A'_1(\beta) e^{i\chi'u} + B'_1(\beta) e^{-i\chi'u} - \chi'_0 A_0 A(\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u) \\ k' g'_1(\beta, u) = -\chi' A'_1(\beta) e^{i\chi'u} + \chi' B'_1(\beta) e^{-i\chi'u} - i \chi_0^2 A_0 A(\beta - \beta_0) \cos(\chi'_0 u) \left(1 - \frac{\beta_0(\beta - \beta_0)}{\chi_0^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Avec:

$$B'_1(\beta) = A'_1(\beta) + i \frac{A_0}{\chi'} A(\beta - \beta_0)(k'^2 - \beta\beta_0) \quad (\text{III.49})$$

$$A'_1(\beta) = \frac{A_0 A(\beta - \beta_0) \left((1 - \nu^2)(\beta\beta_0 - i\nu^2 \tilde{x}_0 \chi) \cos(\chi' u_0) + (k'^2 - \beta\beta_0) \left(1 + \frac{\chi}{\chi'} \nu^2\right) e^{i\chi' u_0} \right)}{2(\chi' \sin(\chi' u_0) + i\nu^2 \chi' \cos(\chi' u_0))} \quad (\text{III.50})$$

$$A_1(\beta) = \frac{\nu A_0 A(\beta - \beta_0) \left((1 - \nu^2) \cos(\chi' u_0) (\tilde{x}_0 \chi' \sin(\chi' u_0) + \beta\beta_0 \cos(\chi' u_0) + k'^2 - \beta\beta_0) e^{-i\chi' u_0} \right)}{\chi' \sin(\chi' u_0) + i\nu^2 \chi' \cos(\chi' u_0)} \quad (\text{III.51})$$

III.3.2.3. Bilan énergétique

✓ **Puissance transmise:** Pour déterminer cette puissance, il faut calculer la composante N^x du vecteur de Poynting. Tout calcul fait, nous trouvons:

Pour le mode **TE**:

$$P_t = \frac{\beta_0}{2kZ} \frac{|A_0|^2}{\tilde{x}_0} (1 + \tilde{x}_0 u_0) \quad (\text{III.52})$$

Pour le mode **TM**:

$$P_t = \frac{\beta_0}{2kZ} \frac{|A_0|^2}{\tilde{x}_0} \left(\tilde{x}_0 u_0 + \frac{1}{(\nu + 1) \frac{\beta_0^2}{\nu^2 k^2} - 1} \right) \quad (\text{III.53})$$

✓ **Puissance rayonnée dans le vide:** Comme il a été montré précédemment pour les deux types de polarisation l'expression de la composante N^u du vecteur de Poynting est la même. Nous trouvons:

$$P_r(\beta) = \tau^2 \frac{\chi}{2Z} |A_1|^2 \quad (\text{III.54})$$

✓ **Coefficient de pertes:** L'expression du coefficient de pertes pour les deux types de polarisation s'écrit:

$$\eta(\beta) = \frac{P_r(\beta)}{2P_t} \quad (\text{III.55})$$

On obtient l'expression suivante:

$$\eta(\beta) = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) |A(\beta - \beta_0)|^2 \quad (\text{III.56})$$

Avec: Pour le mode **TE**:

$$\mathcal{G}(\beta, \beta_0) = \frac{(k^2(\nu^2 - 1) \sin(\chi' u_0) \sin(\chi' u_0) - \chi' \chi'_0)^2}{(\chi^2 \sin^2(\chi' u_0) + \chi'^2 \cos^2(\chi' u_0))} \frac{\chi \tilde{x}_0}{\beta_0(1 + \tilde{x}_0 \mu_0)}$$

Pour le mode **TM**:

$$\mathcal{G}(\beta, \beta_0) = \frac{((1 - \nu^2) \cos(\chi' u_0) (\tilde{x}_0 \chi' \sin(\chi' u_0) + \beta \beta_0 \cos(\chi' u_0)) + k'^2 - \beta \beta_0)^2}{(\chi^2 \sin^2(\chi' u_0) + \nu^2 \chi'^2 \cos^2(\chi' u_0))} \frac{\nu^2 \chi \tilde{x}_0}{\beta_0 \left(\tilde{x}_0 \mu_0 + \frac{1}{\frac{\beta_0^2}{\nu^2 k^2} (\nu^2 + 1) - 1} \right)}$$

III.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

III.4.1. Equation de dispersion

L'équation de dispersion définit la gamme des longueurs d'ondes qui peuvent se propager dans le guide planaire en fonction de la géométrie et des caractéristiques physiques de ce dernier. Elle est calculée à partir des conditions aux limites à l'ordre zéro. Pour les deux types de mode, on trouve à partir des expressions (III.33) et (III.36):

Pour le mode **TE**:

$$\frac{u_0}{\lambda} = \frac{\arctg \sqrt{\frac{\beta_0^2 - 1}{\nu^2 k^2 - \nu^2}} + (2n + 1) \frac{\pi}{2}}{2\pi \nu \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{\nu^2 k^2}}} \quad (\text{III.57})$$

Pour le mode **TM**:

$$\frac{u_0}{\lambda} = \frac{\arctg v^2 \sqrt{\frac{\beta_0^2}{v^2 k^2} - \frac{1}{v^2}} + n\pi}{2\pi \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{v^2 k^2}}} \quad (\text{III.58})$$

Le rapport u_0/λ est défini sur l'intervalle $]1/v, 1[$ et $\sin \theta_0 = \beta_0/vk$.

Le fondamental pour chaque polarisation est donné pour $n=0$. Nous donnons les graphes de dispersion (figure III.2) pour un diélectrique d'indice de réfraction $v=2,6$.

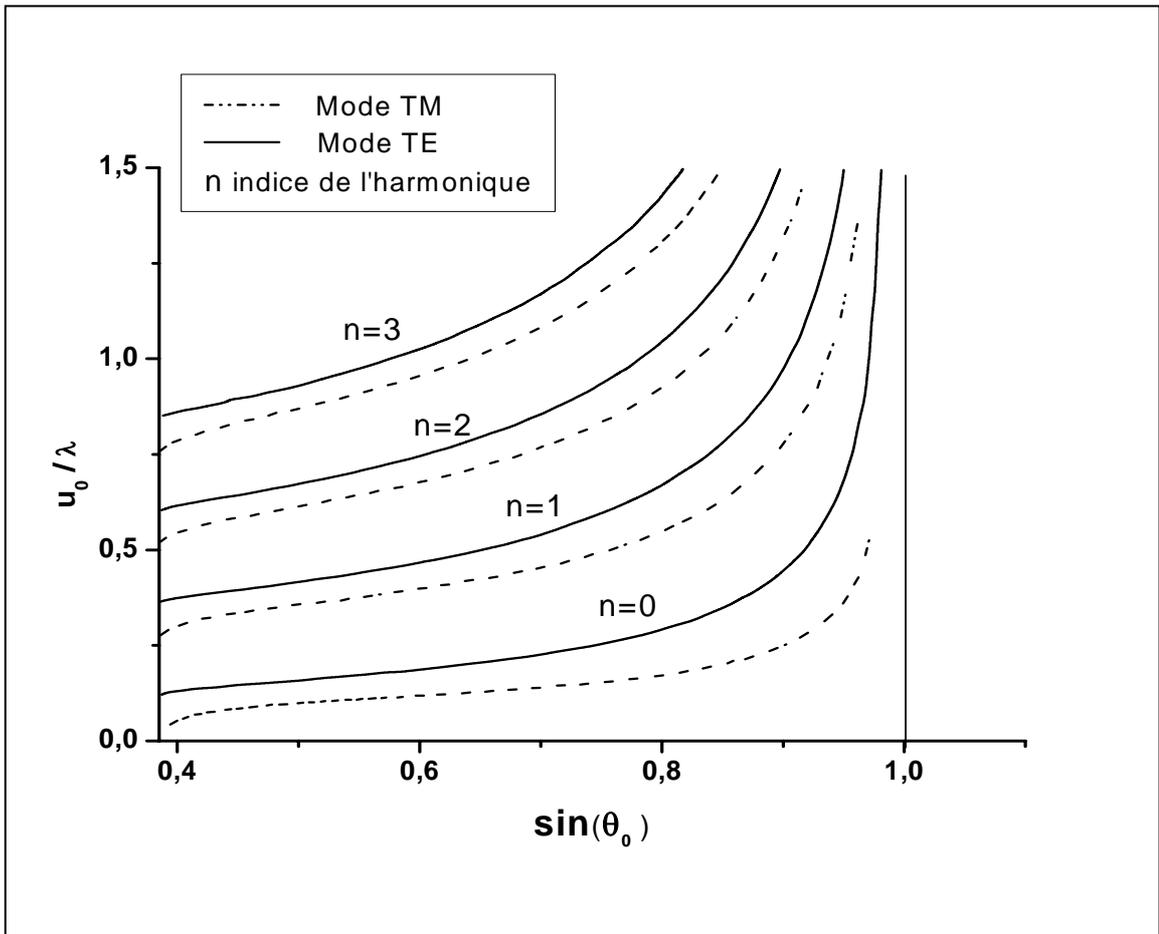


Figure III.2. Les graphes de dispersion d'un guide diélectrique lisse déposé sur un substrat métallique infiniment conducteur.
(—) mode **TE**; (.....) mode **TM**; n indice de l'harmonique.

III.4.2. Coefficient de pertes

Nous avons étudié des déformations sinusoïdales et nous donnons les pertes totales par rayonnement en fonction de l'indice effectif dans le guide $\sin\theta_0 = \beta_0/\nu k$, (θ_0 étant l'angle de réflexion totale dans le guide planaire). Nous avons limité les calculs au premier ordre de perturbations. Tous les graphes ont été tracés pour les valeurs numériques suivantes :

$$\frac{h}{l} = 0,1 \quad ; \quad \frac{l}{u_0} = 5 \quad ; \quad \nu = 2,6$$

Avec: h : la hauteur de la déformation ; l sa largeur ; u_0 l'épaisseur du guide; ν l'indice de réfraction du diélectrique constituant le guide.

Les figures III.3. (a) et (b) représentent pour les modes **TE** et **TM** respectivement les pertes totales par rayonnement (intégrées dans toutes les directions au dessus du guide) pour une déformation sinusoïdale comportant 1, 3 ou 5 demi-périodes.

A l'examen de ces courbes, on constate que pour un cas donné, les pertes en mode TM sont plus importantes qu'en mode TE.

Les pertes augmentent lorsque $\sin\theta_0$ diminue. Elles deviennent très importantes au voisinage de l'angle critique de réflexion totale pour le milieu considéré d'indice ν_0 ($\sin\theta_0 = 1/\nu_0$).

Nous avons représenté le diagramme de rayonnement exprimant l'énergie rayonnée en fonction de la direction θ pour plusieurs cas (figure III.4). En augmentant le nombre de demi-périodes, le lobe principal devient plus étroit et les lobes secondaires apparaissent, mettant en évidence la directivité de l'antenne.

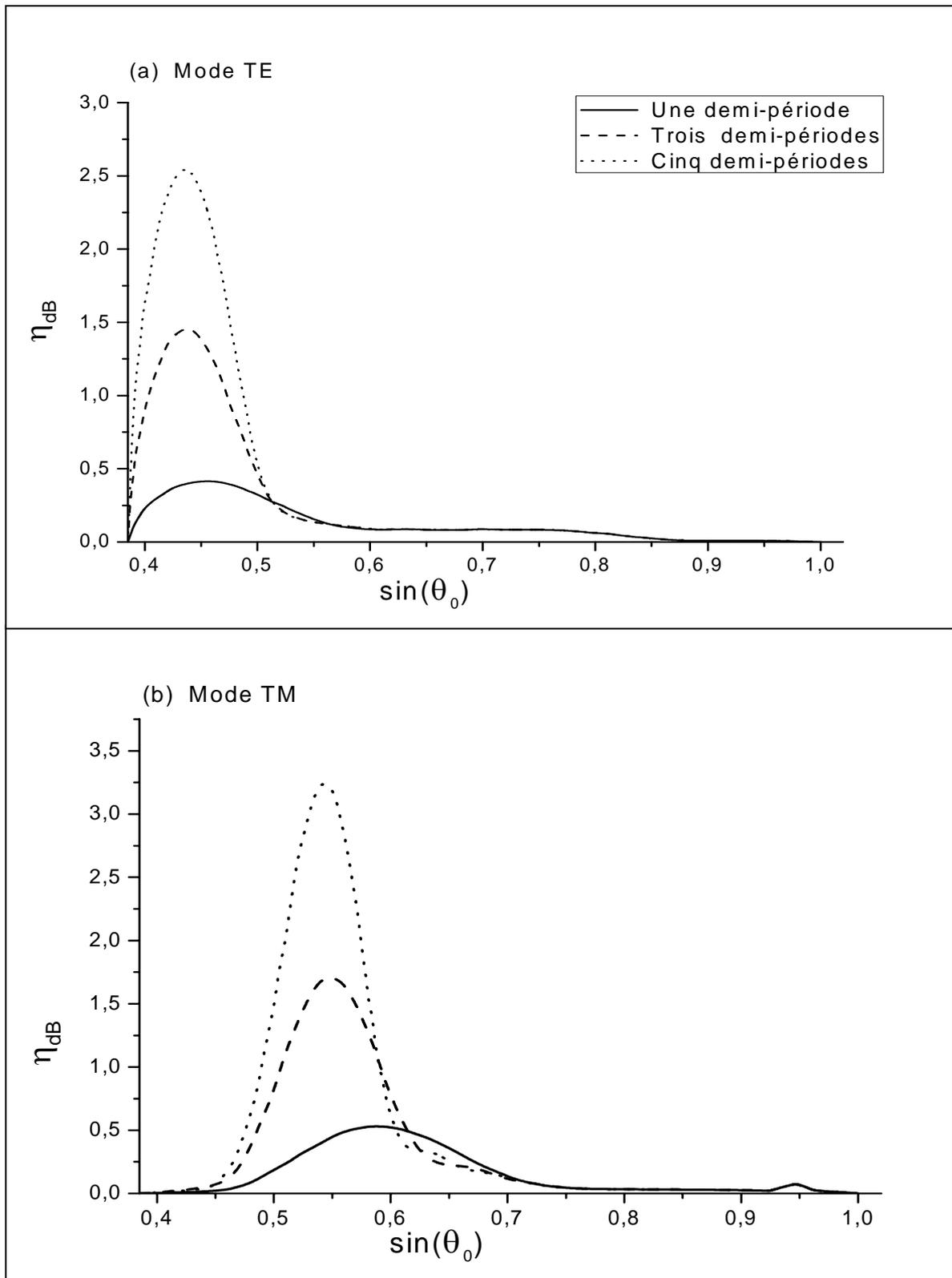


Figure III.3. Pertes totales en dB, (a) Mode **TE**, (b) Mode **TM**.
Déformation sinusoidale ($h/l=0,1$; $l/u_0=5$), $\nu=2,6$.

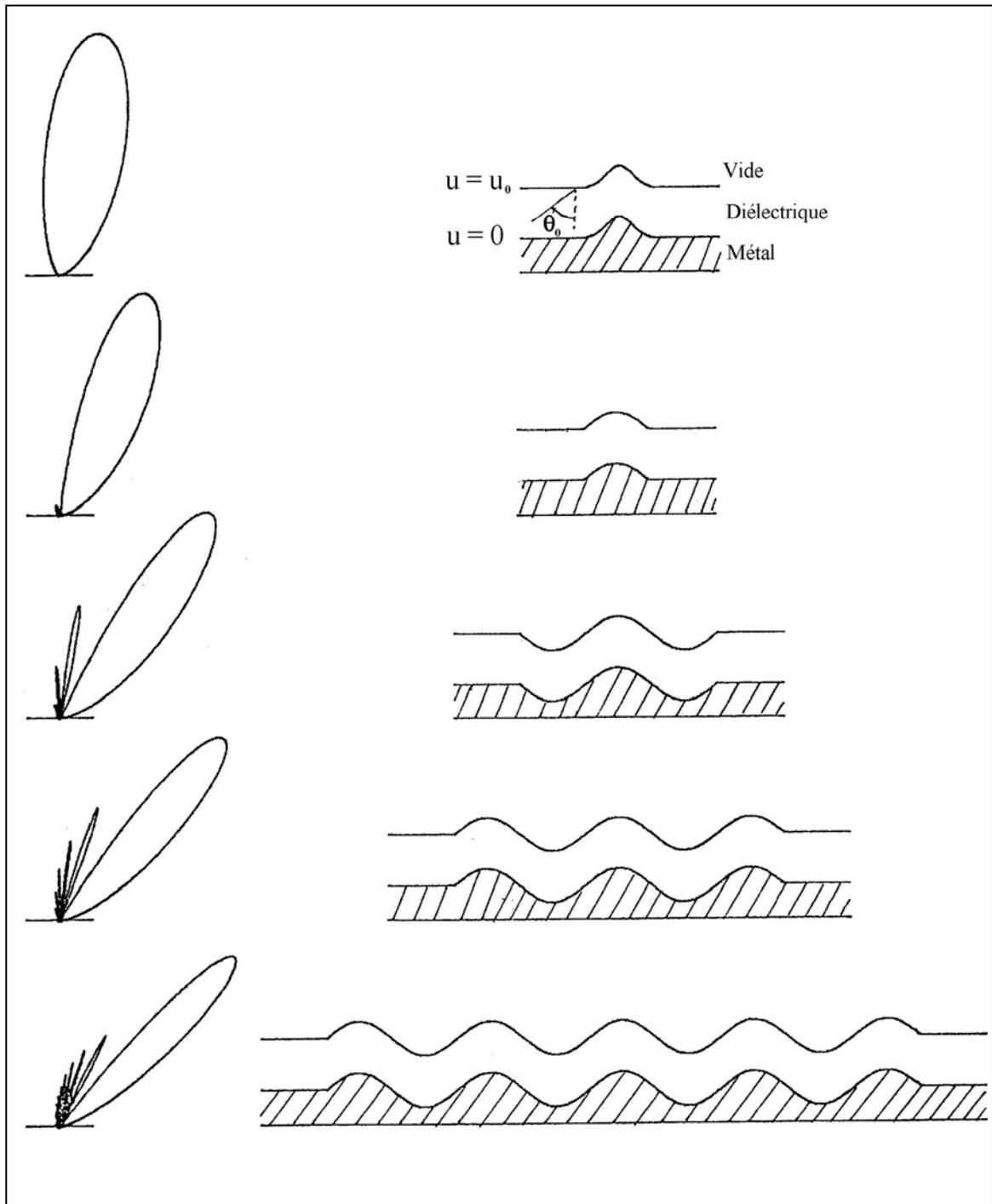


Figure III.4. Diagramme de rayonnement exprimant l'énergie rayonnée en fonction de la direction θ ($\theta_0 = 30^\circ$).

TROISIÈME PARTIE :
MÉTHODE RIGOUREUSE

CHAPITRE IV

ÉTUDE DE LA DIFFRACTION PAR UNE MÉTHODE RIGoureuse

- IV.1. Position du problème
- IV.2. Mise en équation du problème
- IV.3. Résolution
- IV.4. Calcul des densités d'énergie
- IV.5. Applications numériques
- IV.6. Conclusion

**QUATRIÈME PARTIE :
ÉTUDE DU PROBLÈME INVERSE DE LA
DIFFRACTION**

CHAPITRE III

ÉTUDE DES PERTES PAR RAYONNEMENT DANS UN GUIDE DÉFORMÉ APÉRIODIQUEMENT

- III.1. Introduction
- III.2. Position du problème
- III.3. Résolution
- III.4. Résultats numériques

Chapitre III

ÉTUDE DES PERTES PAR RAYONNEMENT DANS UN GUIDE DÉFORMÉ APÉRIODIQUEMENT

III.1. INTRODUCTION

Le problème que nous allons évoquer dans ce chapitre concerne le rayonnement issu de la déformation apériodique d'un guide diélectrique déposé sur un substrat métallique supposé infiniment conducteur. Dans le cas d'un guide lisse, la propagation se fait sans rayonnement, car à l'extérieur du guide les ondes sont évanescentes, mais si celui-ci a subi une déformation, un rayonnement à l'extérieur devient possible.

Le but de ce travail est d'étudier le rayonnement et de montrer la possibilité de réaliser des antennes à partir de guides diélectriques déformés apériodiquement. La méthode proposée ici est basée sur l'utilisation de la forme covariante des équations de Maxwell écrites dans un système de coordonnées non orthogonales adapté aux limites. La déformation est limitée dans l'espace pour qu'une représentation en intégrale de Fourier soit possible. Si l'amplitude de la déformation est faible par rapport à la longueur d'onde, une méthode de perturbations donne une bonne approximation. Un des intérêts de cette méthode est de conduire à des calculs analytiques et de permettre des applications numériques.

III.2. POSITION DU PROBLÈME

Pour un guide planaire, en optique classique quand l'interface diélectrique vide n'est pas parfaitement lisse, mais possède des rugosités, les rayons lumineux circulant dans le diélectrique sont réfléchis irrégulièrement. Certains rayons arrivent avec un angle d'incidence tel qu'ils donnent naissance à un changement de mode, tandis que d'autres s'échappent dans le diélectrique pour les angles d'incidence dépassant l'angle critique de réflexion totale. Dans le cas où, les rayons lumineux sont transmis sur de longues distances, les irrégularités peuvent provoquer un couplage entre modes (c'est-à-dire une conversion de mode) et des pertes par rayonnement. Ceci est la cause de pertes par transmission et affecte

la bande passante. Dans la suite nous nous intéresserons uniquement aux pertes par rayonnement.

La lumière étant une onde électromagnétique, ses propriétés doivent être décrites par des équations de Maxwell. Nous nous proposons d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique, fonction harmonique du temps ($\exp(i\omega t)$), dans un guide planaire d'indice de réfraction v qui a subi une déformation. Pour cela nous utilisons les équations de Maxwell sous forme covariante. Leur résolution nécessite, au préalable, le choix d'un système de coordonnées pour pouvoir les projeter. Ce système de coordonnées permet d'exprimer très simplement les conditions de continuité à l'interface entre les deux milieux puisque cette interface coïncide avec une surface de coordonnées ayant pour profil $a(x)$ (figure III.1).

Le guide est supposé infini dans la direction ox et oz (on considère le problème à deux dimensions ($\partial/\partial z = 0$)). La propagation se fait dans la direction ox . Le guide planaire que nous étudions est déposé sur un substrat métallique supposé infiniment conducteur.

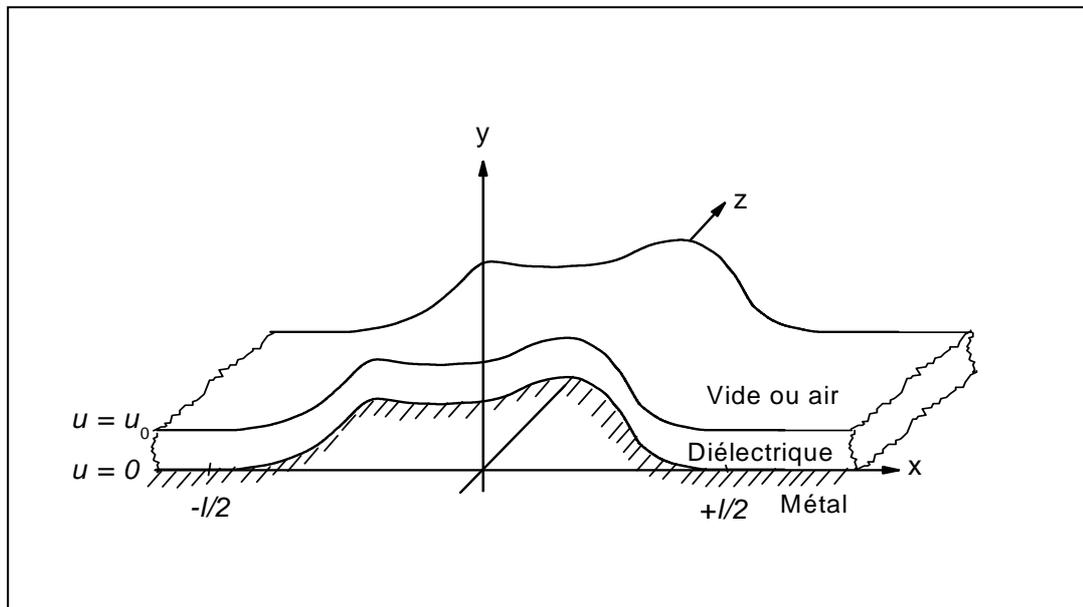


Figure III.1. Profil du guide diélectrique déformé.

III.3. RÉOLUTION

III.3.1. Considérations générales

Pour résoudre le système (II.9), on part de l'ordre zéro qui représente la propagation dans un guide lisse dont la solution simple est connue. On calcule ensuite par récurrence les ordres supérieurs. La première équation différentielle du système (II.9) est linéaire du second ordre et à coefficients constants, par rapport à la variable u . Les solutions sont de la forme suivante :

Dans le vide ($u \geq u_0$):

$$\begin{cases} f_p(\beta, u) = A_p(\beta)e^{i\chi u} + C_p(\beta, u) \\ kg_p(\beta, u) = i \frac{\partial f_p(\beta, u)}{\partial u} + D_p(\beta, u) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Avec: $\chi^2 = k^2 - \beta^2$

Dans le guide ($0 \leq u \leq u_0$):

$$\begin{cases} f'_p(\beta, u) = A'_p(\beta)e^{i\chi' u} + B'_p e^{-i\chi' u} + C'_p(\beta, u) \\ k'g'_p(\beta, u) = i \frac{\partial f'_p(\beta, u)}{\partial u} + D'_p(\beta, u) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Avec: $\chi'^2 = k'^2 - \beta^2$; $k' = vk$

$A_p(\beta)$, $A'_p(\beta)$ et $B'_p(\beta)$ sont des constantes d'intégration et ne dépendent pas de la variable u . $C_p(\beta, u)$ et $C'_p(\beta, u)$ sont deux fonctions de la variable u , solutions particulières de l'équation non homogène (constituées de l'intégrale d'une somme de fonctions exponentielles). $D_p(\beta, u)$ et $D'_p(\beta, u)$ sont deux fonctions de variables u connues s'exprimant à partir des ordres inférieurs à p . A chaque ordre de perturbations, l'application des conditions aux limites (Tableau III.1), permet de déterminer les constantes $A_p(\beta)$, $A'_p(\beta)$ et $B'_p(\beta)$.

Mode	$u = 0$	$u = u_0$
TE	$F'(0) = 0$	$F'(u_0) = F(u_0); \quad \frac{G'(0)}{Z'} = \frac{G(0)}{Z}$
TM	$G'(0) = 0$	$\frac{F'(0)}{Z'} = \frac{F(0)}{Z}; \quad G'(u_0) = G(u_0)$

Tableau III.1. Les conditions aux limites.

III.3.1.1. Mode TE

$A_p(\beta)$, $A'_p(\beta)$ et $B'_p(\beta)$ sont les solutions du système de trois équations linéaires suivantes:

$$\begin{cases} A'_p(\beta) + B'_p(\beta) = -C'_p(\beta, 0) \\ A'_p(\beta)e^{i\chi'u_0} + B'_p(\beta)e^{-i\chi'u_0} - A_p(\beta)e^{i\chi'u_0} = C_p(\beta, u_0) - C'_p(\beta, u_0) \\ -\chi'A'_p(\beta)e^{i\chi'u_0} + \chi'B'_p(\beta)e^{-i\chi'u_0} - \chi A_p(\beta)e^{i\chi'u_0} \\ = i \frac{\partial}{\partial u} (C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u))_{u=u_0} + D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Ce système n'admet de solutions que si son déterminant est différent de zéro, c'est à dire si:

$$\operatorname{tg}(\chi'u_0) - \frac{\chi'}{i\chi} \neq 0 \quad (\text{III.4})$$

Dans le cas où $\operatorname{tg}(\chi'u_0) = \frac{\chi'}{i\chi}$, il y a dégénérescence. Si la condition (III.4) est vérifiée, on trouve :

$$B'_p(\beta) = -A'_p(\beta) - C'_p(\beta, 0) \quad (\text{III.5})$$

$$A'_p(\beta) = \frac{i \frac{\partial}{\partial u} (C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u))_{u=u_0} + D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0)}{2i (\chi \sin(\chi'u_0) + i \chi' \cos(\chi'u_0))} + \frac{(\chi' + \chi)C'_p(\beta, 0)e^{-i\chi'u_0} + \chi(C_p(\beta, u_0) - C'_p(\beta, u_0))}{2i (\chi \sin(\chi'u_0) + i \chi' \cos(\chi'u_0))} \quad (\text{III.6})$$

$$A_p(\beta) = \frac{i \frac{\partial}{\partial u} (C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u))_{u=u_0} + D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0)}{\chi + i \chi' \cotg(\chi'u_0)} - \frac{i \chi' \cotg(\chi'u_0)(C_p(\beta, u_0) + C'_p(\beta, u_0)) - i \chi' \frac{C'_p(\beta, 0)}{\sin(\chi'u_0)}}{\chi + i \chi' \cotg(\chi'u_0)} \quad (\text{III.7})$$

III.3.1.2. Mode TM

De la même manière, en appliquant les conditions aux limites, on arrive à un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -\chi' A'_p(\beta) + \chi' B'_p(\beta) = -i \frac{\partial}{\partial u} C'_p(\beta, u) \Big|_{u=0} - D'_p(\beta, 0) \\ \nu A'_p(\beta) e^{i\chi' u_0} + \nu B'_p(\beta) e^{-i\chi' u_0} - A_p(\beta) e^{i\chi u_0} = C_p(\beta, u_0) - \nu C'_p(\beta, u_0) \\ -\chi' A'_p(\beta) e^{i\chi' u_0} + \chi' B'_p(\beta) e^{-i\chi' u_0} - \nu \chi A_p(\beta) e^{i\chi u_0} = \\ = i \frac{\partial}{\partial u} (\nu C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u)) \Big|_{u=u_0} + \nu D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Ce système n'admet de solutions que si son déterminant est différent de zéro, c'est à dire si :

$$\text{tg}(\chi' u_0) - \nu^2 \frac{\chi}{i \chi'} \neq 0 \quad (\text{III.9})$$

Dans le cas où $\text{tg}(\chi' u_0) = \nu^2 \frac{\chi}{i \chi'}$, il y a dégénérescence. Si la condition (III.4) est vérifiée, on trouve :

$$B'_p(\beta) = A'_p(\beta) - \frac{i}{\chi'} \frac{\partial}{\partial u} C'_p(\beta, u) \Big|_{u=0} - \frac{1}{\chi'} D'_p(\beta, 0) \quad (\text{III.10})$$

$$\begin{aligned} A'_p(\beta) = & \frac{i \frac{\partial}{\partial u} (\nu C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u)) \Big|_{u=u_0} + \nu \chi (C_p(\beta, u) - \nu C'_p(\beta, u))}{2\nu^2 \chi \cos(\chi' u_0) - 2i \chi' \sin(\chi' u_0)} \\ & + \frac{\nu D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0) + (\nu^2 \frac{\chi}{\chi'} + 1) \left(i \frac{\partial}{\partial u} C'_p(\beta, u) - D'_p(\beta, u) \right) \Big|_{u=u_0} e^{-i\chi' u_0}}{2\nu^2 \chi \cos(\chi' u_0) - 2i \chi' \sin(\chi' u_0)} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{aligned} A_p(\beta) = & \frac{\nu \left(i \frac{\partial}{\partial u} C_p(\beta, u) - D'_p(\beta, u) \right) \Big|_{u=u_0} + i \chi' \sin(\chi' u_0) (C_p(\beta, u) - \nu C'_p(\beta, u))}{\nu^2 \chi \cos(\chi' u_0) - i \chi' \sin(\chi' u_0)} \\ & + \frac{\nu \cos(\chi' u_0) \left(i \frac{\partial}{\partial u} (\nu C_p(\beta, u) - C'_p(\beta, u)) \Big|_{u=u_0} + D_p(\beta, u_0) - D'_p(\beta, u_0) \right)}{\nu^2 \chi \cos(\chi' u_0) - i \chi' \sin(\chi' u_0)} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

III.3.1.3. Bilan énergétique

➤ **Puissance transmise :**

Pour déterminer cette puissance, il faut calculer la composante N^x du vecteur de Poynting :

$$N^x = E_u H_z - H_u E_z \quad (\text{III.13})$$

La valeur moyenne de N^x sur une période est donnée par :

$$\bar{N}^x = \frac{1}{2} \text{Re} [E_u H_z^* - H_u E_z^*] \quad (\text{III.14})$$

Et la puissance transmise par unité de largeur du guide est :

$$P_t = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^x dudz = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^x du \quad (\text{III.15})$$

➤ **Puissance rayonnée dans le vide :**

Pour cette puissance, c'est la composante N^u du vecteur de Poynting qui nous intéresse :

$$\text{Pour le mode TE: } N^u = E_z H_x = \frac{FG}{Z}$$

$$\text{Pour le mode TM: } N^u = -H_z E_x = \frac{FG}{Z}$$

Donc pour les deux types de polarisation, l'expression de la composante N^u du vecteur de Poynting est la même, sa la valeur moyenne est :

$$\bar{N}^u = \text{Re} \left[\frac{FG^*}{2Z} \right] \quad (\text{III.16})$$

La puissance rayonnée par unité de largeur est:

$$P_r = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{FG^*}{2Z} \right] dx dz \quad (\text{III.17})$$

Puisque F et G sont indépendants de z , on aura:

$$P_r = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} FG^* dx \quad (\text{III.18})$$

Suivant le théorème de Parseval (II.17), on peut écrire :

$$P_r = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} fg^* d\beta \quad (\text{III.19})$$

Le rayonnement est provoqué par les ondes réelles dans le vide qui seules transportent de l'énergie à l'infini (ondes rayonnées). Pour ces ondes, χ^2 satisfait la condition $\chi^2 \geq 0$, c'est-à-dire $|\beta| \leq k$, ce qui permet de réduire l'intervalle d'intégration à :

$$P_r = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} \int_{-k}^{+k} fg^* d\beta \quad (\text{III.20})$$

Cette expression représente la puissance totale perdue dans toutes les directions ($-\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2$) au dessus du guide. L'intégrant représente la puissance rayonnée en fonction de β , c'est-à-dire en fonction de la direction θ .

$$P_r(\beta) = \frac{1}{2Z} \operatorname{Re} [fg^*] \quad (\text{III.21})$$

➤ **Coefficient de pertes :**

La puissance transmise P_t est fonction quadratique des champs, donc son expression contiendra le facteur $\exp(-2\eta x)$, ce qui signifie que la variation de P_t sur un élément dx est telle que :

$$\frac{dP_t}{dx} = -2\eta P_t \quad (\text{III.22})$$

η étant le coefficient de pertes.

La variation exprimée par la relation (III.22) représente l'atténuation que subit l'énergie transmise lorsqu'elle parcourt dx . Donc, cette variation est égale aux pertes par rayonnement, en supposant que les autres sources de pertes sont négligeables. On a alors :

$$P_r = 2\eta P_t \tag{III.23}$$

On en déduit le coefficient de pertes en Nepers.

$$\eta = \frac{P_r}{2P_t} \tag{III.24}$$

Ou en dB: $\eta_{dB} = 8,868\eta$.

Puisqu'on a considéré la puissance rayonnée en fonction de β , on représente aussi le coefficient de pertes en fonction de la même variable :

$$\eta(\beta) = \frac{P_r(\beta)}{2P_t} \tag{III.25}$$

III.3.2. Application

III.3.2.1. Ordre zéro : A ce niveau d'ordre, le guide est plan, et le système (II.9) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_0(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_0(\beta, u) = 0 \\ kg_0(\beta, u) = i \frac{\partial f_0(\beta, u)}{\partial u} \end{cases} \tag{III.26}$$

En posant: $\chi^2 = k^2 - \beta^2$.

Le tableau III.2 représente les trois types d'onde (de rayonnement R, évanescence O.E, guidée O.G) pour chaque milieu, et ceci suivant les valeurs de β .

Milieu \ β	$-\infty$	$-k'$	$-k$	$+k$	$+k'$	$+\infty$
Vide	O.E.		R.	O.E.		
Diélectrique	O.E.	O.G.			O.E.	

Tableau III.2. Les différents types d'onde pour chaque milieu suivant les valeurs de β .

Pour avoir une propagation guidée dans le diélectrique, il faut que β prenne une valeur β_0 telle que $-k' < \beta_0 < +k'$. Si cette condition est réalisée, nous obtenons les solutions suivantes :

Dans le vide (ondes évanescentes) :

$$\begin{cases} f_0(\beta, u) = A_0(\beta)e^{-\tilde{x}u} \\ kg_0(\beta, u) = -i\tilde{x}A_0(\beta)e^{-\tilde{x}u} \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

Avec : $\tilde{x}^2 = \beta^2 - k^2$.

Dans le guide (ondes guidées) :

$$\begin{cases} f'_0(\beta, u) = A'_0(\beta)e^{i\chi'u} + B'_0(\beta)e^{-i\chi'u} \\ kg'_0(\beta, u) = -\chi'A'_0(\beta)e^{i\chi'u} + \chi'B'_0(\beta)e^{-i\chi'u} \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Avec: $k' = \nu k$; ν indice de refraction; $\chi'^2 = k'^2 - \beta^2$.

Les lettres primées correspondent au diélectrique et non primées au vide. Puisque β prend une valeur β_0 (un seul mode qui se propage), les fonctions $A_0(\beta)$, $A'_0(\beta)$ et $B'_0(\beta)$ deviennent:

$$A_0(\beta) = A_0\delta(\beta - \beta_0); \quad A'_0(\beta) = A'_0\delta(\beta - \beta_0); \quad B'_0(\beta) = B'_0\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{III.29}).$$

Avec: δ distribution de Dirac.

En faisant la transformée de Fourier inverse, nous obtenons les solutions suivantes:

Dans le vide:

$$\begin{cases} F_0(x, u) = A_0e^{i\beta_0x - \tilde{x}_0u} \\ kG_0(x, u) = -i\tilde{x}_0A_0e^{i\beta_0x - \tilde{x}_0u} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Avec: $\tilde{x}_0^2 = \beta_0^2 - k^2$

Dans le guide:

$$\begin{cases} F'_0(x, u) = (A'_0 e^{i\chi'_0 u} + B'_0 e^{-i\chi'_0 u}) e^{i\beta_0 x} \\ kG'_0(x, u) = \chi'_0 (-A'_0 e^{i\chi'_0 u} + B'_0 e^{-i\chi'_0 u}) e^{i\beta_0 x} \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

$$\text{Avec: } \chi'_0{}^2 = k'^2 - \beta_0^2$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, nous appliquons les conditions aux limites. On trouve pour le mode **TE**:

$$\begin{cases} A'_0 + B'_0 = 0 \\ A'_0 e^{i\chi'_0 u_0} + B'_0 e^{-i\chi'_0 u_0} - A_0 e^{-\tilde{x}_0 u_0} = 0 \\ -\chi'_0 A'_0 e^{i\chi'_0 u_0} + \chi'_0 B'_0 e^{-i\chi'_0 u_0} + \tilde{x}_0 A_0 e^{-\tilde{x}_0 u_0} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

Ce système linéaire homogène n'admet de solution que si son déterminant est nul. Ce qui donne:

$$\text{tg}(\chi'_0 u_0) = \frac{\chi'_0}{\tilde{x}_0} \quad (\text{III.33})$$

Cette dernière équation définit l'équation de dispersion du guide planaire lisse pour le mode **TE** et la solution s'écrit:

Dans le vide:

$$\begin{cases} f_0(\beta, u) = A_0 \sin(\chi' u_0) e^{-\tilde{x}(u-u_0)} \delta(\beta - \beta_0) \\ kg_0(\beta, u) = -i\tilde{x} A_0 \sin(\chi' u_0) e^{-\tilde{x}(u-u_0)} \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

Dans le guide:

$$\begin{cases} f'_0(\beta, u) = A_0 \sin(\chi' u) \delta(\beta - \beta_0) \\ k'g'_0(\beta, u) = i\chi' A_0 \cos(\chi' u) \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

Pour le mode **TM**, avec le même raisonnement que le mode **TE** et en appliquant les conditions aux limites, nous trouvons un système linéaire homogène dont la solution existe si le déterminant est nul, c'est-à-dire si:

$$tg(\chi'_0 u_0) = \frac{v_0^2 \tilde{x}_0}{\chi_0} \quad (\text{III.36})$$

Cette dernière équation définit l'équation de dispersion pour ce mode et nous trouvons les solutions suivantes:

Dans le vide:

$$\begin{cases} f_0(\beta, u) = v A_0 \cos(\chi' u_0) e^{-\tilde{x}(u-u_0)} \delta(\beta - \beta_0) \\ k g_0(\beta, u) = -i \tilde{x} A_0 \cos(\chi' u_0) e^{-\tilde{x}(u-u_0)} \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

Dans le guide:

$$\begin{cases} f'_0(\beta, u) = A_0 \cos(\chi' u) \delta(\beta - \beta_0) \\ k' g'_0(\beta, u) = -i \chi' A_0 \sin(\chi' u) \delta(\beta - \beta_0) \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

III.3.2.2. Ordre un: A cet ordre, le rayonnement dans le vide est possible, le système (II.9) s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_1(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_1(\beta, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\beta - \alpha)}{\tau} (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial f_0(\alpha, u)}{\partial u} d\alpha \\ k g_1(\beta, u) = i \frac{\partial f_1(\beta, u)}{\partial u} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\beta - \alpha) \frac{A(\beta - \alpha)}{\tau} f_0(\alpha, u) d\alpha \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Pour le mode **TE** : Dans le vide ce système devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_1(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi^2 f_1(\beta, u) = \tilde{x}_0 A(\beta - \beta_0) (\beta^2 - \beta_0^2) A_0 \sin(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{x}_0(u-u_0)} \\ k g_1(\beta, u) = i \frac{\partial f_1(\beta, u)}{\partial u} + i \beta_0 (\beta - \beta_0) A(\beta - \beta_0) A_0 \sin(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{x}_0(u-u_0)} \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} f_1(\beta, u) = A_1(\beta) e^{i\chi u} - \tilde{x}_0 A_0 A(\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{x}_0(u-u_0)} \\ k g_1(\beta, u) = -i \chi A_1(\beta) e^{i\chi u} + i \tilde{x}_0^2 A_0 A(\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{x}_0(u-u_0)} \left(1 - \frac{\beta_0(\beta - \beta_0)}{\tilde{x}_0^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

Dans le guide le système (III.40) devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f'_1(\beta, u)}{\partial u^2} + \chi'^2 f'_1(\beta, u) = -\chi'_0 A_0 A (\beta - \beta_0) (\beta^2 - \beta_0^2) \cos(\chi'_0 u) \\ k' g'_1(\beta, u) = i \frac{\partial f'_1(\beta, u)}{\partial u} + i \beta_0 (\beta - \beta_0) A_0 A (\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u) \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} f'_1(\beta, u) = A'_1(\beta) e^{i\chi' u} + B'_1(\beta) e^{-i\chi' u} + \chi'_0 A_0 A (\beta - \beta_0) \cos(\chi'_0 u) \\ k' g'_1(\beta, u) = \chi' A'_1(\beta) e^{i\chi' u} + \chi' B'_1(\beta) e^{-i\chi' u} - i \chi_0^2 A_0 A (\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u) \left(1 - \frac{\beta_0 (\beta - \beta_0)}{\chi_0^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

Nous appliquons les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration, tout calcul fait, on trouve:

$$B'_1(\beta) = -A'_1(\beta) - \chi' A (\beta - \beta_0) \quad (\text{III.44})$$

$$A'_1(\beta) = \frac{A_0 A (\beta - \beta_0) (k^2 (v^2 - 1) \sin(\chi'_0 u_0) - i \chi'_0 (\chi + \chi') e^{i\chi' u_0})}{2 (\chi \sin(\chi' u_0) + i \chi' \cos(\chi' u_0))} \quad (\text{III.45})$$

$$A_1(\beta) = \frac{i A_0 A (\beta - \beta_0) (k^2 (v^2 - 1) \sin(\chi'_0 u_0) \cdot \sin(\chi' u_0) - \chi' \chi'_0)}{\chi \sin(\chi' u_0) + i \chi' \cos(\chi' u_0)} \quad (\text{III.46})$$

Pour le mode **TM** la solution dans le vide s'écrit:

$$\begin{cases} f_1(\beta, u) = A_1(\beta) e^{i\chi u} - \nu \tilde{\chi}_0 A_0 A (\beta - \beta_0) \cos(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{\chi}_0 (u - u_0)} \\ k g_1(\beta, u) = -i \chi A_1(\beta) e^{i\chi u} + i \tilde{\chi}_0^2 A_0 A (\beta - \beta_0) \cos(\chi'_0 u_0) e^{-\tilde{\chi}_0 (u - u_0)} \left(1 - \frac{\beta_0 (\beta - \beta_0)}{\tilde{\chi}_0^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Et dans le guide la solution s'écrit:

$$\begin{cases} f'_1(\beta, u) = A'_1(\beta) e^{i\chi' u} + B'_1(\beta) e^{-i\chi' u} - \chi'_0 A_0 A (\beta - \beta_0) \sin(\chi'_0 u) \\ k' g'_1(\beta, u) = -\chi' A'_1(\beta) e^{i\chi' u} + \chi' B'_1(\beta) e^{-i\chi' u} - i \chi_0^2 A_0 A (\beta - \beta_0) \cos(\chi'_0 u) \left(1 - \frac{\beta_0 (\beta - \beta_0)}{\chi_0^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Avec:

$$B'_1(\beta) = A'_1(\beta) + i \frac{A_0}{\chi'} A(\beta - \beta_0)(k'^2 - \beta\beta_0) \quad (\text{III.49})$$

$$A'_1(\beta) = \frac{A_0 A(\beta - \beta_0) \left((1 - \nu^2)(\beta\beta_0 - i\nu^2 \tilde{x}_0 \chi) \cos(\chi' u_0) + (k'^2 - \beta\beta_0) \left(1 + \frac{\chi}{\chi'} \nu^2\right) e^{i\chi' u_0} \right)}{2(\chi' \sin(\chi' u_0) + i\nu^2 \chi' \cos(\chi' u_0))} \quad (\text{III.50})$$

$$A_1(\beta) = \frac{\nu A_0 A(\beta - \beta_0) \left((1 - \nu^2) \cos(\chi' u_0) (\tilde{x}_0 \chi' \sin(\chi' u_0) + \beta\beta_0 \cos(\chi' u_0) + k'^2 - \beta\beta_0) e^{-i\chi' u_0} \right)}{\chi' \sin(\chi' u_0) + i\nu^2 \chi' \cos(\chi' u_0)} \quad (\text{III.51})$$

III.3.2.3. Bilan énergétique

✓ **Puissance transmise:** Pour déterminer cette puissance, il faut calculer la composante N^x du vecteur de Poynting. Tout calcul fait, nous trouvons:

Pour le mode **TE**:

$$P_t = \frac{\beta_0}{2kZ} \frac{|A_0|^2}{\tilde{x}_0} (1 + \tilde{x}_0 \mu_0) \quad (\text{III.52})$$

Pour le mode **TM**:

$$P_t = \frac{\beta_0}{2kZ} \frac{|A_0|^2}{\tilde{x}_0} \left(\tilde{x}_0 \mu_0 + \frac{1}{(\nu + 1) \frac{\beta_0^2}{\nu^2 k^2} - 1} \right) \quad (\text{III.53})$$

✓ **Puissance rayonnée dans le vide:** Comme il a été montré précédemment pour les deux types de polarisation l'expression de la composante N^u du vecteur de Poynting est la même. Nous trouvons:

$$p_r(\beta) = \tau^2 \frac{\chi}{2Z} |A_1|^2 \quad (\text{III.54})$$

✓ **Coefficient de pertes:** L'expression du coefficient de pertes pour les deux types de polarisation s'écrit:

$$\eta(\beta) = \frac{P_r(\beta)}{2P_t} \quad (\text{III.55})$$

On obtient l'expression suivante:

$$\eta(\beta) = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) |A(\beta - \beta_0)|^2 \quad (\text{III.56})$$

Avec: Pour le mode **TE**:

$$\mathcal{G}(\beta, \beta_0) = \frac{(k^2(\nu^2 - 1) \sin(\chi'_0 u_0) \sin(\chi' u_0) - \chi' \chi'_0)^2}{(\chi^2 \sin^2(\chi' u_0) + \chi'^2 \cos^2(\chi' u_0))} \frac{\chi \tilde{x}_0}{\beta_0(1 + \tilde{x}_0 \mu_0)}$$

Pour le mode **TM**:

$$\mathcal{G}(\beta, \beta_0) = \frac{((1 - \nu^2) \cos(\chi'_0 u_0) (\tilde{x}_0 \chi' \sin(\chi' u_0) + \beta \beta_0 \cos(\chi' u_0)) + k'^2 - \beta \beta_0)^2}{(\chi'^2 \sin^2(\chi' u_0) + \nu^2 \chi^2 \cos^2(\chi' u_0))} \frac{\nu^2 \chi \tilde{x}_0}{\beta_0 \left(\tilde{x}_0 \mu_0 + \frac{1}{\frac{\beta_0^2}{\nu^2 k^2} (\nu^2 + 1) - 1} \right)}$$

III.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

III.4.1. Equation de dispersion

L'équation de dispersion définit la gamme des longueurs d'ondes qui peuvent se propager dans le guide planaire en fonction de la géométrie et des caractéristiques physiques de ce dernier. Elle est calculée à partir des conditions aux limites à l'ordre zéro. Pour les deux types de mode, on trouve à partir des expressions (III.33) et (III.36):

Pour le mode **TE**:

$$\frac{u_0}{\lambda} = \frac{\arctg \sqrt{\frac{\beta_0^2 - 1}{\nu^2 k^2 - \nu^2}} + (2n + 1) \frac{\pi}{2}}{2\pi \nu \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{\nu^2 k^2}}} \quad (\text{III.57})$$

Pour le mode **TM**:

$$\frac{u_0}{\lambda} = \frac{\arctg v^2 \sqrt{\frac{\beta_0^2}{v^2 k^2} - \frac{1}{v^2}} + n\pi}{2\pi \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{v^2 k^2}}} \quad (\text{III.58})$$

Le rapport u_0/λ est défini sur l'intervalle $]1/v, 1[$ et $\sin \theta_0 = \beta_0/vk$.

Le fondamental pour chaque polarisation est donné pour $n=0$. Nous donnons les graphes de dispersion (figure III.2) pour un diélectrique d'indice de réfraction $v=2,6$.

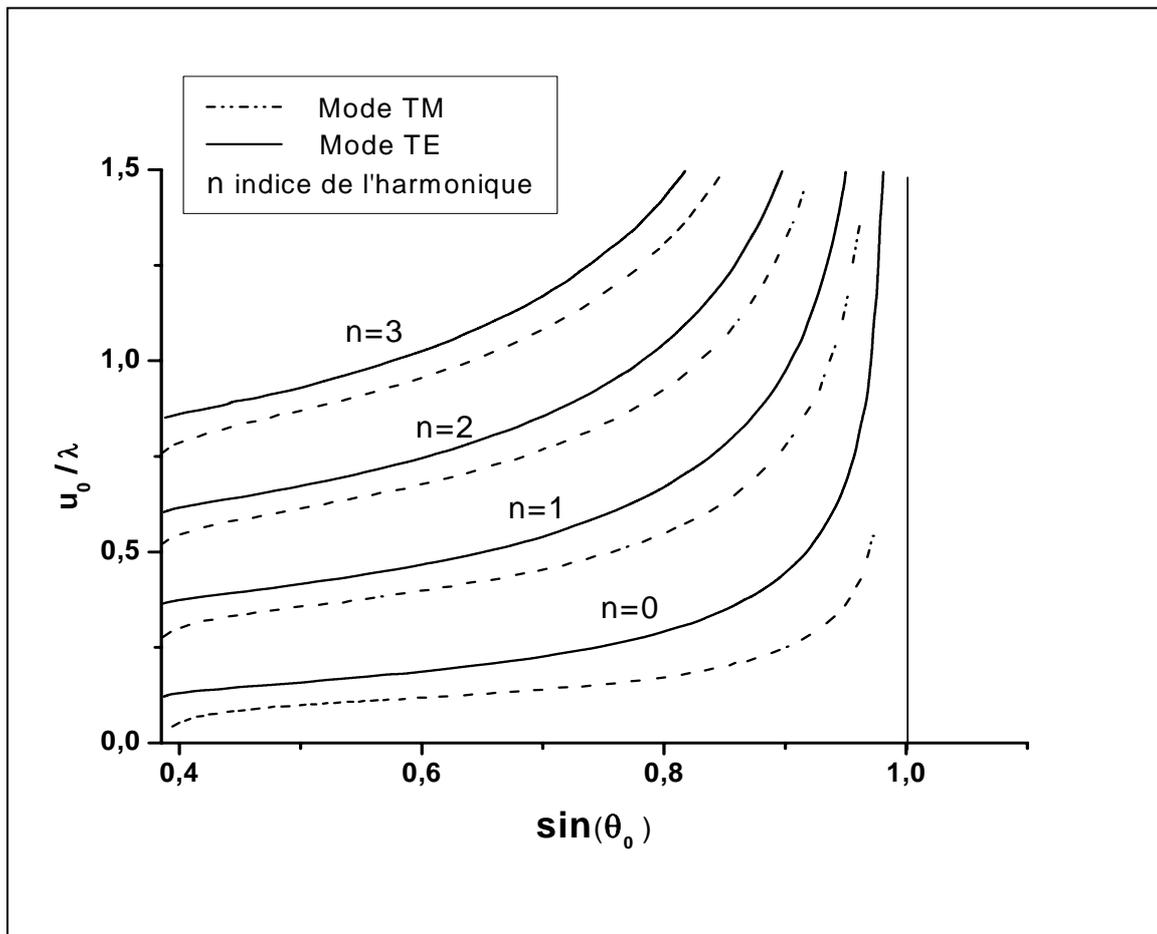


Figure III.2. Les graphes de dispersion d'un guide diélectrique lisse déposé sur un substrat métallique infiniment conducteur.
(—) mode **TE**; (·····) mode **TM**; n indice de l'harmonique.

III.4.2. Coefficient de pertes

Nous avons étudié des déformations sinusoïdales et nous donnons les pertes totales par rayonnement en fonction de l'indice effectif dans le guide $\sin\theta_0 = \beta_0/\nu k$, (θ_0 étant l'angle de réflexion totale dans le guide planaire). Nous avons limité les calculs au premier ordre de perturbations. Tous les graphes ont été tracés pour les valeurs numériques suivantes :

$$\frac{h}{l} = 0,1 \quad ; \quad \frac{l}{u_0} = 5 \quad ; \quad \nu = 2,6$$

Avec: h : la hauteur de la déformation ; l sa largeur ; u_0 l'épaisseur du guide; ν l'indice de réfraction du diélectrique constituant le guide.

Les figures III.3. (a) et (b) représentent pour les modes **TE** et **TM** respectivement les pertes totales par rayonnement (intégrées dans toutes les directions au dessus du guide) pour une déformation sinusoïdale comportant 1, 3 ou 5 demi-périodes.

A l'examen de ces courbes, on constate que pour un cas donné, les pertes en mode TM sont plus importantes qu'en mode TE.

Les pertes augmentent lorsque $\sin\theta_0$ diminue. Elles deviennent très importantes au voisinage de l'angle critique de réflexion totale pour le milieu considéré d'indice ν_0 ($\sin\theta_0 = 1/\nu_0$).

Nous avons représenté le diagramme de rayonnement exprimant l'énergie rayonnée en fonction de la direction θ pour plusieurs cas (figure III.4). En augmentant le nombre de demi périodes, le lobe principal devient plus étroit et les lobes secondaires apparaissent, mettant en évidence la directivité de l'antenne.

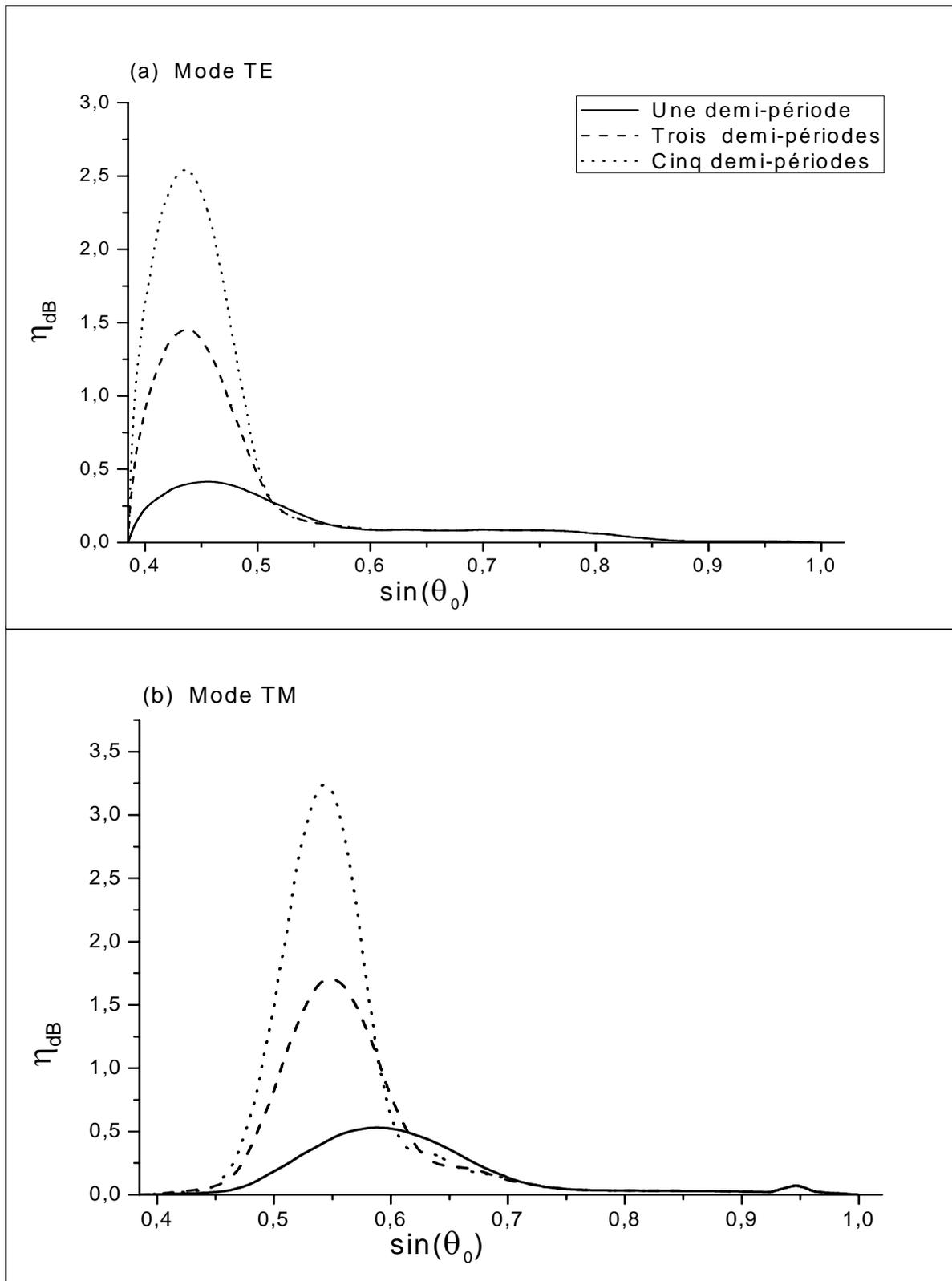


Figure III.3. Pertes totales en dB, (a) Mode **TE**, (b) Mode **TM**.
Déformation sinusoïdale ($h/l=0,1$; $l/u_0=5$), $\nu=2,6$.

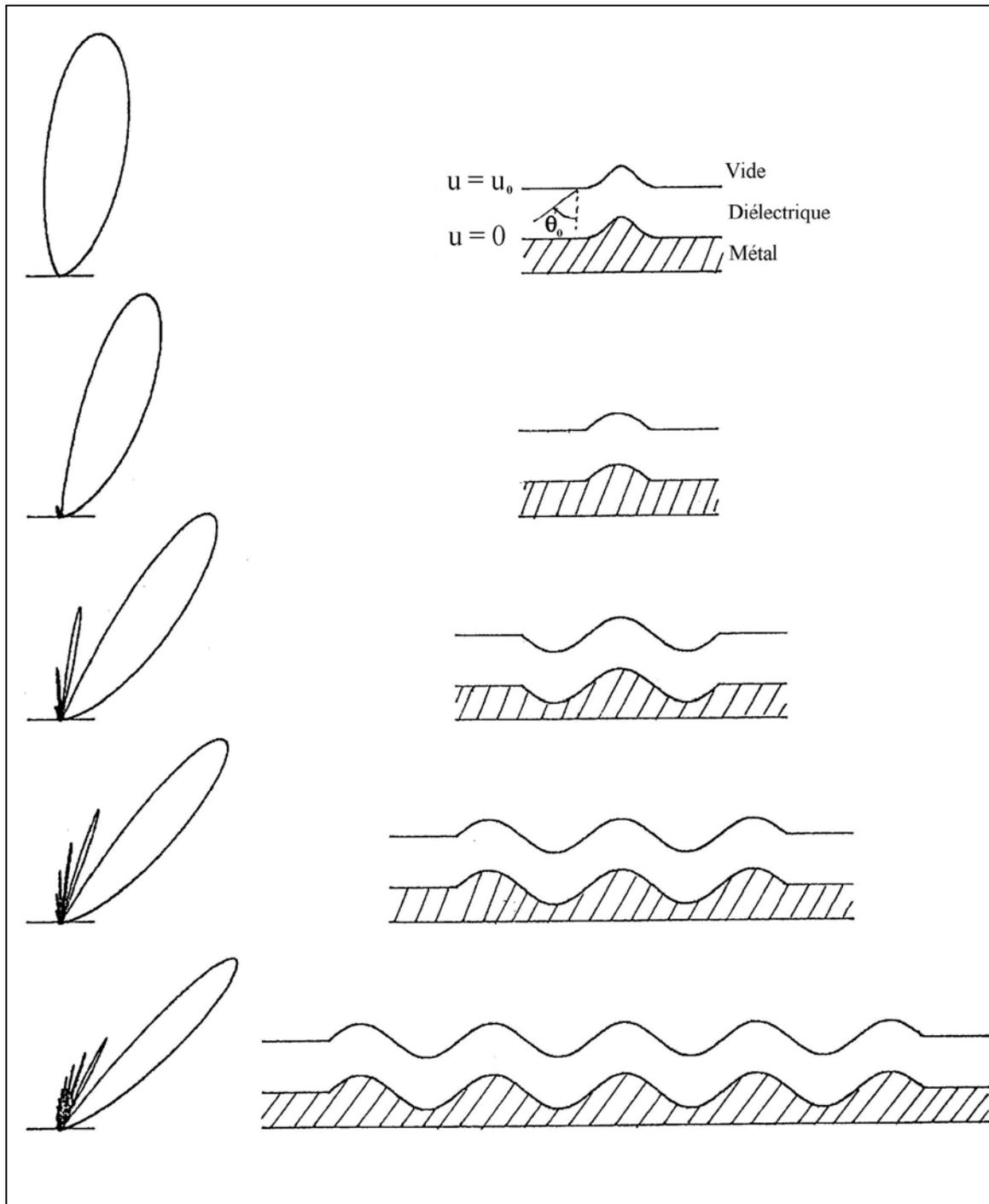


Figure III.4. Diagramme de rayonnement exprimant l'énergie rayonnée en fonction de la direction θ ($\theta_0 = 30^\circ$).

CHAPITRE V

ÉTUDE DU PROBLÈME INVERSE DE LA DIFFRACTION

- V.1. Introduction
- V.2. Principe de la méthode employée
- V.3. Mise en équations du problème
- V.4. Applications

Chapitre V

ÉTUDE DU PROBLÈME INVERSE DE LA DIFFRACTION

V.1. INTRODUCTION

L'instrument utilisé traditionnellement pour mesurer et caractériser la microtopographie des surfaces est le palpeur qui détériore souvent la surface et la mesure exige beaucoup de temps. Ces inconvénients expliquent les efforts croissants pour développer de nouvelles méthodes optiques simples, rapides et non destructives des caractérisations des surfaces rugueuses. Une des techniques possibles consiste à déduire les caractéristiques du profil de la surface à partir du champ électromagnétique qu'elle diffracte lorsqu'elle est éclairée par le faisceau d'un laser. Ce problème a été abondamment traité par les opticiens mais les théories sont à rejeter de toute évidence lorsque l'ordre de grandeur des dimensions des rugosités est inférieur à la dizaine de microns. Dans ce chapitre, nous nous intéressons précisément aux surfaces rugueuses de ce type et il convient donc d'utiliser les lois fondamentales de l'électromagnétisme. Cette étude s'avère aujourd'hui nécessaire en raison des applications technologiques et scientifiques très importantes [25].

Il faut d'abord remarquer que le problème que nous venons de poser est un problème inverse, par opposition au problème direct qui consiste à calculer les caractéristiques du champ diffracté à partir de celles de la surface rugueuse. Les difficultés théoriques du problème inverse sont plus grandes que celles du problème direct. La recherche de la solution du problème inverse se heurte à des phénomènes d'instabilité.

Le problème inverse que nous allons étudier dans ce chapitre est le suivant : connaissant l'intensité de diffraction, reconstruire le profil de la surface rugueuse. On appelle $I_m^d(\beta)$ ($\beta = k \sin \theta$) l'intensité de diffraction mesurée pour une certaine plage de variation de l'angle θ ($-90^\circ < -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 < +90^\circ$); $I_m^d(\beta)$ est donc connu seulement sur l'intervalle ($-k \sin \theta_1 \leq \beta \leq +k \sin \theta_1$). On se donne également une estimation grossière de la largeur de la rugosité. Aucune autre hypothèse a priori n'est faite sur la forme de la rugosité.

V.2. PRINCIPE DE LA MÉTHODE EMPLOYÉE [31]

L'intensité de diffraction correspondant à un profil quelconque $a(x)$, dépend évidemment de $a(x)$; on le notera donc $I(\beta, a)$. D'après le chapitre II, $I(\beta)$ ne peut être calculé qu'en intégrant le système aux dérivées partielles (II.7). Rappelons l'expression permettant de calculer l'intensité de diffraction en fonction de $a(x)$ pour $x \in [-l/2, +l/2]$:

$$I^d(\beta) = \frac{\text{Re}[f^s(\beta) \cdot g^{s*}(\beta)]}{p^i} \quad (\text{V.1})$$

Où $f^s(\beta)$ et $g^{s*}(\beta)$ sont les solutions du système integro-différentielle (II.7) et p^i la puissance incidente. La relation entre $a(x)$ et I^d est assez compliquée, et utilise les fonctions intermédiaire f^s et g^{s*} . Elle n'est pas linéaire bien sûr puisque dans le cas général au profil $2a(x)$ ne correspond pas l'intensité de diffraction $2I(\beta)$. De plus, cette relation ne peut même pas s'écrire explicitement sous forme analytique.

Une idée naturelle consiste, dans un premier temps, à restreindre l'étude à de petites variations δI et δa de $I(\beta)$ et $a(x)$. Au premier ordre en δa , il existe une relation linéaire entre δI et δa .

Considérons une variation δa , entraînant des variations de f^s , g^{s*} et I . L'opérateur linéaire qui lie δf et δg à a n'est autre que la différentielle de f et g par rapport à a . La différentielle est une généralisation de la relation de gradient au cas des espaces fonctionnels qui sont de dimensions infinies. Ici cet opérateur prend la forme :

$$\delta I(\beta) = \frac{\text{Re}[f^s(\beta) \cdot \delta g^{s*}(\beta) + g^{s*}(\beta) \cdot \delta f^s(\beta)]}{p^i} \quad (\text{V.2})$$

Avec:

$$\delta f^s(\beta) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\delta f^s(\beta, a, x)}{\delta a} \delta a(x) dx \quad (\text{V.3})$$

$$\delta g^{s*}(\beta) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\delta g^{s*}(\beta, a, x)}{\delta a} \delta a(x) dx \quad (\text{V.4})$$

Ce qui permet d'écrire l'expression (V.2) sous la forme:

$$\delta I(\beta) = \int_{-l/2}^{l/2} N(\beta, a, x) \delta a(x) dx \quad (\text{V.5})$$

Où la fonction $N(\beta, a, x)$ est appelée noyau.

Maintenant que nous disposons d'une relation linéaire au premier ordre entre l'intensité de diffraction I et la déformation $a(x)$, il est possible de résoudre le problème inverse à l'aide d'un algorithme itératif. Soit $I(\beta)$ l'intensité de diffraction donnée à priori et $a(x)$ le profil de la surface rugueuse associée dont nous admettons l'existence. Supposons également connue une première approximation $a_1(x)$ (même grossière) de $a(x)$.

Grâce à l'algorithme associé au problème direct, on peut calculer l'intensité de diffraction I_1 associée à a_1 . Si a_1 n'est pas trop éloignée de la solution a , les fonctions $\delta a = a - a_1$ et $\delta I = I - I_1$ sont de petites variations approximativement liées par la relation (V.5).

Calculons la fonction a_2 solution de l'équation :

$$I - I_1 = \int_{-l/2}^{+l/2} N(\beta, a_1, x) \cdot (a_2 - a_1) dx \quad (\text{V.6})$$

La fonction $N(\beta, a_1, x)$ est associée à la surface $a_1(x)$ connue et calculable.

Si δa et δI sont suffisamment petites, a_2 constitue effectivement une bien meilleure approximation de a que de a_1 . Il ne reste plus ensuite qu'à effectuer l'itération du processus pour obtenir une suite d'approximations a_3, a_4, \dots de plus en plus précises. L'itération sera arrêtée quand la précision sur la solution calculée sera jugée suffisante. Cet algorithme porte le nom d'algorithme de Newton-Kantorovitch. Cependant, une résolution sans précautions se traduit dès les premières itérations par l'obtention de solutions très oscillantes, dépourvues de

sens physique et l'algorithme ne converge pas. Il est nécessaire de trouver un moyen mathématique pour pallier à cette instabilité. Il est fourni par une méthode de régularisation.

➤ **Méthode de régularisation**

Nous définissons les normes suivantes :

$$\|\delta I(\beta)\| = \left[\int_{-\beta_1}^{+\beta_1} [\delta I(\beta)]^2 d\beta \right]^{1/2} \quad (\text{V.7})$$

$$\|\delta a(x)\| = \left[\int_{-l/2}^{+l/2} [\delta a(x)]^2 dx \right]^{1/2} \quad (\text{V.8})$$

La méthode de régularisation consiste à remplacer la résolution de (V.5) par le problème variationnel suivant: trouver la fonction δa qui réalise le minimum de l'expression :

$$J(\delta a) = J_1(\delta a) + rJ_2(\delta a) \quad (\text{V.9})$$

$$\text{Avec:} \quad J_1(\delta a) = \left\| \int_{-l/2}^{+l/2} N(\beta, a, x) \cdot \delta a(x) dx - \delta I(\beta) \right\|^2$$

$$J_2(\delta a) = \|\delta a(x)\|^2$$

Si δa_1 réalise le minimum de $J(\delta a)$, une variation de δa quelconque laisse $J(\delta a)$ inchangé au premier ordre: $\delta J(\delta a) = 0$.

Ce qui donne:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \tilde{N}(a_x, a_y, x, y) \delta a_r(y) dy + r \delta a_r(x) = \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} N(\beta, a, x) \delta I(\beta) d\beta \quad (\text{V.10})$$

$$\text{Avec:} \quad \tilde{N}(a_x, a_y, x, y) = \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} N(\beta, a(x), x) N(\beta, a(y), y) d\beta$$

Equation intégrale qu'il faut résoudre numériquement pour déterminer δa_r

➤ **Détermination du paramètre de régularisation**

Le paramètre r peut se déterminer de différentes façons [31]. Le calcul de r peut par exemple s'effectuer de la façon suivante: Soit r_0 une forte valeur de r ; on calcule δa_r et $J_1(\delta a_r)$ successivement pour $r = r_0, r_0/10, r_0/100, \dots$, et on retient comme valeur finale du paramètre de régularisation la valeur $r = r_0 \cdot 10^{-n}$, telle que:

$$J_1(\delta a_r) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad J_1(\delta a_{10r}) > \varepsilon$$

La mise en oeuvre de cet algorithme peut se traduire par l'organigramme représenté sur la *figure V.1*.

Du point de vue physique, cet algorithme effectue un tri dans l'ensemble des profils admissibles, compte tenu de la précision finie sur l'intensité de diffraction, et sélectionne le profil le plus régulier possible. Le critère de régularisation étant déterminé par la norme $\|\delta a_r\|$.

Premièrement, on se donne l'intensité de diffraction I_m dans l'intervalle $[-k \sin \theta_m, +k \sin \theta_m]$, ainsi qu'une estimation grossière de l'intervalle l . En fait dans l'étude présentée ici, $I_m(\beta)$ est constitué de mesures expérimentales simulées à l'ordinateur de la façon suivante: un certain profil a_m est choisi à priori: I_m est alors l'amplitude correspondant à ce profil calculée sur ordinateur à l'aide d'un programme basé sur une certaine théorie T_m . Dans la suite du processus, a_m est "oublié" et on tente de le reconstruire à partir de I_m . On part ensuite d'une fonction $a_1(x)$ qui peut être très éloignée de $a(x)$. On calcule $I_1(\beta)$ à l'aide d'un programme résolvant le problème direct et basé sur une méthode T . Ensuite, on calcule le noyau $N(\beta, a_1, x)$ et δa en résolvant une équation intégrale. L'algorithme fournit ensuite une deuxième estimation $a_2(x)$. En appliquant de nouveau le même processus, on obtient une suite a_3, a_4, \dots de solutions cherchées. Il est important de noter que les théories T_m et T peuvent être différentes. Toute l'étude est restreinte au mode **TE**, mais la méthode serait bien sûr applicable au mode **TM**.

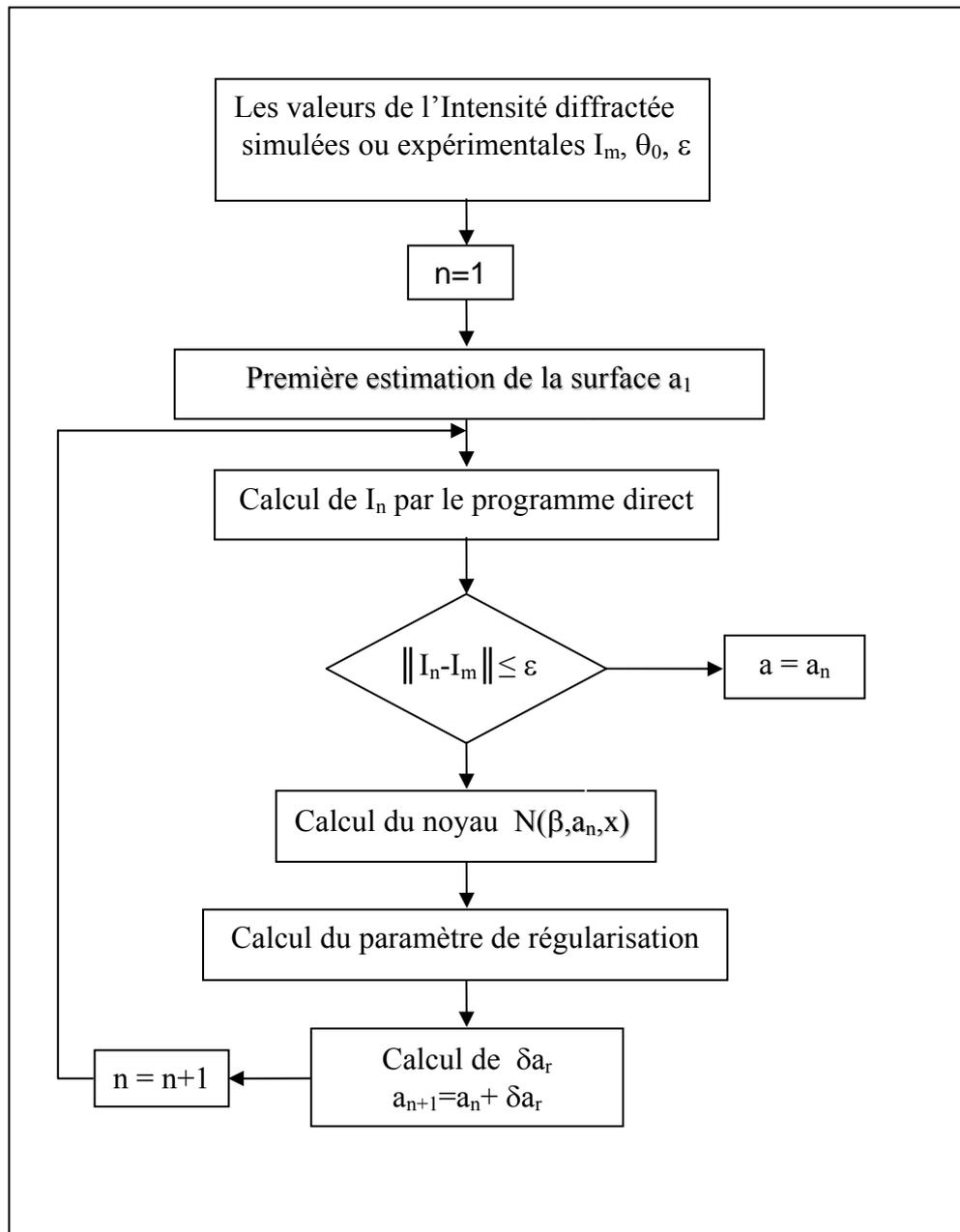


Figure V.1. Organigramme du problème inverse.

V.3. MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Pour une surface fixée à priori correspond un diagramme de diffraction. Les surfaces étudiées ici seront du type indiqué dans le paragraphe II.2. L'algorithme de la figure V.1., montre que l'application nécessite l'utilisation d'un programme direct dans chaque étape de calcul de l'intensité de diffraction. Dans le cas de surfaces de faible hauteur, on utilisera le programme direct de la méthode des perturbations.

Au premier ordre de perturbations d'après l'expression (II.41), l'expression de l'intensité de diffraction s'écrit :

$$I^d(\beta) = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) A(\beta - \beta_0) A(\beta - \beta_0)^* \quad (\text{V.11})$$

Avec: $\beta = k \sin \theta$ (θ angle de diffraction).

$\beta_0 = k \sin \theta_0$ (θ_0 angle d'incidence)

$A(\beta)$ la transformée de Fourier de $a(x)$.

$$\mathcal{G}(\beta, \beta_0) = \begin{cases} \left| 2\chi_0 \frac{\chi_0 - \chi'_0}{\chi + \chi'} \right|^2 \frac{\chi}{\chi_0} & \text{en mode TE} \\ \left| 2\chi_0 \frac{(1-\nu^2)(\chi'_0 \chi' - \nu^2 \beta \beta_0)}{(\chi'_0 + \nu^2 \chi_0)(\chi' + \nu^2 \chi)} \right|^2 \frac{\chi}{\chi_0} & \text{en mode TM} \end{cases}$$

Considérons une petite variation $\delta a(x)$, entraînant une variation de l'intensité de diffraction δI . D'après l'expression (V.11), il vient :

$$\delta I(\beta) = \mathcal{G}(\beta, \beta_0) \left[A(\beta - \beta_0) \delta A^*(\beta - \beta_0) + A^*(\beta - \beta_0) \delta A(\beta - \beta_0) \right] \quad (\text{V.12})$$

Ou encore:

$$\delta I(\beta) = 2\mathcal{G}(\beta, \beta_0) \operatorname{Re} \left[A^*(\beta - \beta_0) \delta A(\beta - \beta_0) \right] \quad (\text{V.13})$$

Avec:

$$\delta A(\beta - \beta_0) = \int_{-l/2}^{+l/2} \delta a(x) e^{-i(\beta - \beta_0)x} dx \quad (\text{V.14})$$

Donc l'expression (V.12) devient:

$$\delta I(\beta) = 2\mathcal{G}(\beta, \beta_0) \operatorname{Re} \left[\int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-l/2}^{+l/2} a(x') \delta a(x) e^{-i(\beta - \beta_0)(x' - x)} dx dx' \right] \quad (\text{V.15})$$

Ou encore:

$$\delta I(\beta) = \int_{-l/2}^{+l/2} \left[2\mathcal{G}(\beta, \beta_0) \int_{-l/2}^{+l/2} a(x') \cos[(\beta - \beta_0)(x' - x)] dx' \right] \delta a(x) dx \quad (\text{V.16})$$

D'où, d'après l'expression (V.5), le noyau $N(\beta, a, x)$ aura pour expression :

$$N(\beta, a, x) = 2\mathcal{G}(\beta, \beta_0) \int_{-l/2}^{+l/2} a(x') \cos[(\beta - \beta_0)(x' - x)] dx' \quad (\text{V.17})$$

Et le noyau $\tilde{N}(a_x, a_y, x, y)$ aura pour expression:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(a_x, a_y, x, y) = \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} \mathcal{G}^2(\beta, \beta_0) \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-l/2}^{+l/2} a(x') a(y') \cos((\beta - \beta_0)(x' - x)) \\ \cdot \cos((\beta - \beta_0)(y' - y)) dx' dy' d\beta \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

V.4. APPLICATIONS

Toute l'application est restreinte au cas **TE**, mais la même méthode serait bien sûr applicable au cas **TM**. Les surfaces étudiées ici seront de deux types :

- Surfaces déterministes (surface sinusoïdale à support borné).
- Surfaces aléatoires à support borné.

Cas d'un réseau à support borné

Le phénomène de limite de résolution est bien connu en optique. Il est naturel d'étudier l'existence d'une telle limite dans le domaine de résonance. Dans ce but, nous avons considéré plusieurs profils de réseaux finis correspondant à différentes valeurs de la période d , éclairés sous l'incidence $\theta_0=60^\circ$, avec une onde plane de longueur $\lambda = 0,633\mu m$ et présentant une région modulée de largeur 2λ . Nous avons tenté de reconstruire chacun de ces profils à partir de son intensité diffractée supposée connue dans l'intervalle $(-85^\circ \leq \theta \leq +85^\circ)$. La *figure V.2.* montre que si la période du réseau diminue par rapport à la longueur d'onde, des difficultés surgissent dans la reconstruction du profil. De plus l'expression de l'intensité de diffraction (V.11) dépend de la transformée de Fourier de la fonction qui décrit le profil ; d'où une nécessité d'appliquer la condition de Shannon sur l'échantillonnage dans le calcul numérique de la transformée de Fourier rapide.

On arrive à la conclusion que la reconstruction est toujours possible dans le domaine de résonance, c'est-à-dire que les grandeurs de la déformation sont du même ordre que la longueur d'onde.

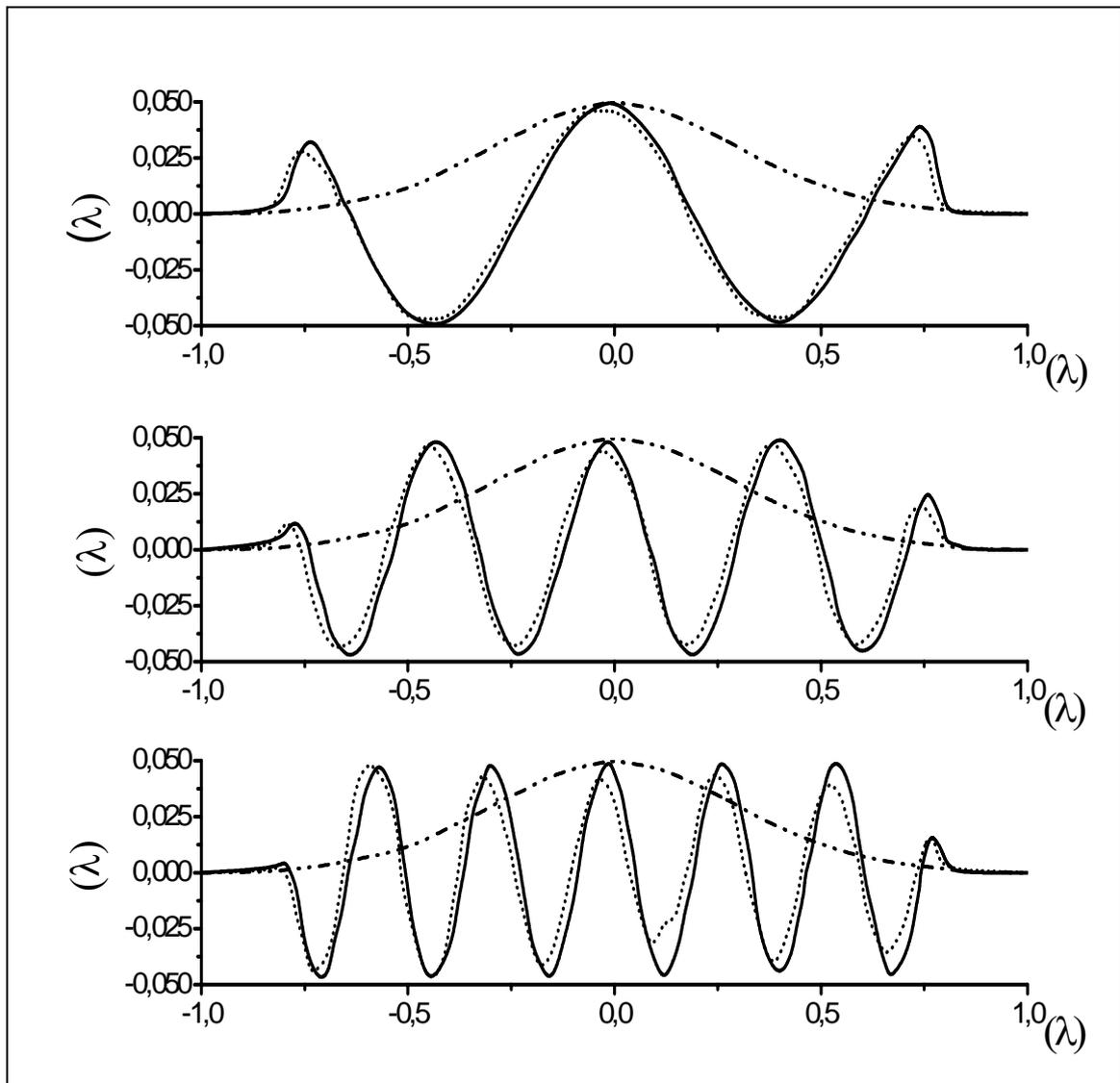


Figure V.2. Reconstruction du profil d'un réseau fini.

Déformation sinusöidale ($h=0,05\lambda$; $l=2\lambda$)

(a) $d=1\lambda$; (b) $d=0,5\lambda$; (c) $d=0,33\lambda$. $\lambda=0,633\ \mu\text{m}$; Métal: **Aluminium**.

(—) vrai profil, (- · -) estimation, (·····) profil reconstruit.

Cas de surface aléatoire à support borné

L'organigramme de la *figure V.1.* s'applique aussi à tout profil suffisamment régulier et en particulier à des profils aléatoires. Nous avons donc appliqué le même algorithme à ce type de surfaces. La *figure V.3* montre un exemple de reconstruction de surfaces aléatoires de faible hauteur éclairées sous l'incidence $\theta_0=60^\circ$ par une onde plane de longueur $\lambda = 0,633\mu m$ et présentant une région modulée d'une longueur 20λ . La reconstruction du profil est d'autant meilleure que le nombre moyen de rugosités IT qu'il présente est petit. Dès qu'on augmente IT , des difficultés surgissent dans la reconstruction du profil.

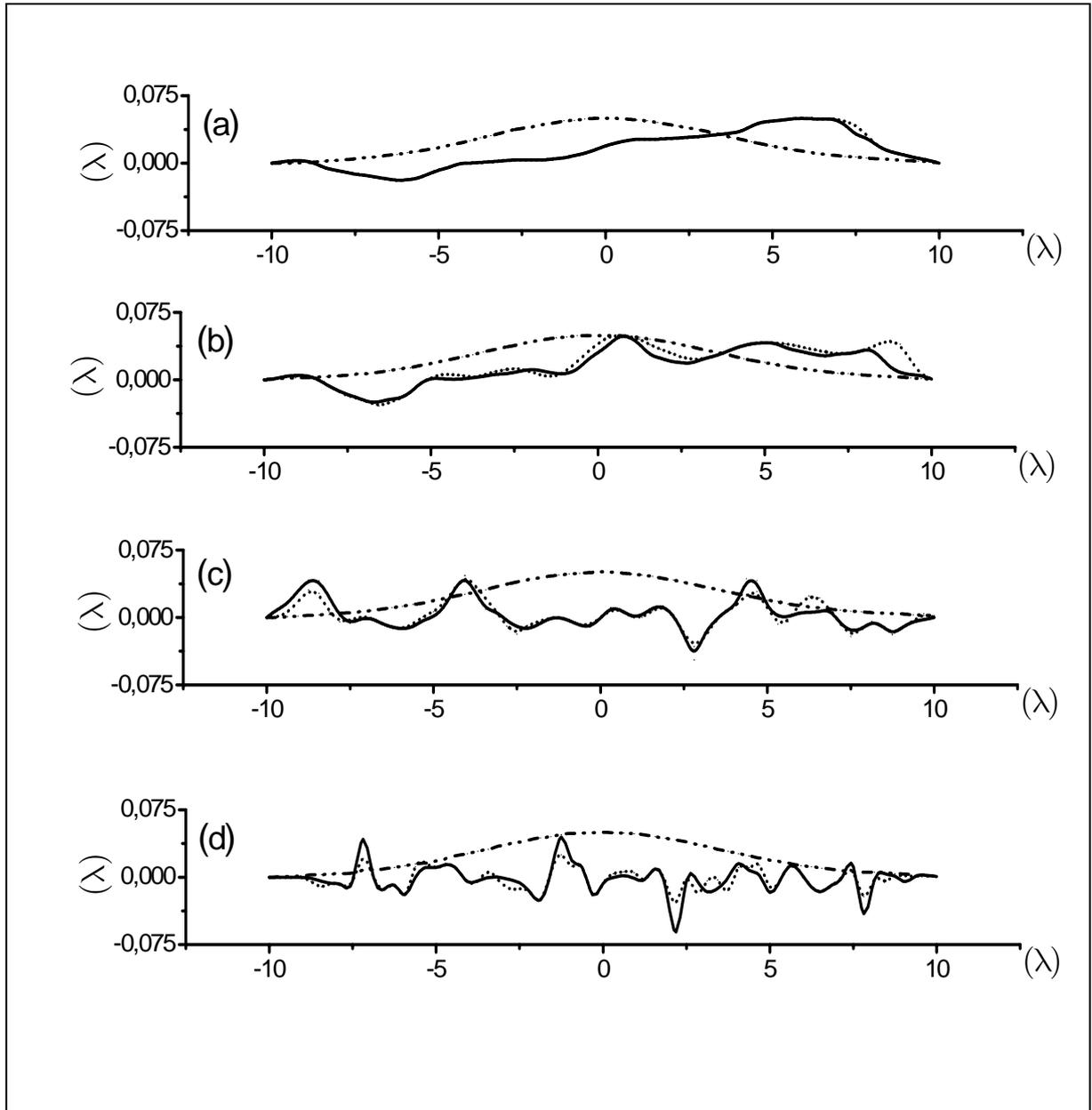


Figure. V.3. Reconstruction du profil de la surface aléatoire.

(a) $IT=1$, (b) $IT=10$, (c) $IT=30$, (d) $IT=100$.

(—) vrai profil, (- - -) estimation, (.....) profil reconstruit.

CONCLUSION

CONCLUSION

Dans le but d'étudier, d'une façon précise, la diffraction et la propagation d'une onde électromagnétique dans des structures rugueuses, nous avons utilisé les équations de Maxwell sous forme covariante et le système de coordonnées de translation, permettant d'écrire de manière simple les conditions aux limites et de pousser assez loin les calculs analytiques pour mieux maîtriser les phénomènes physiques.

En considérant la fonction qui décrit le profil de la surface rugueuse comme une fonction perturbatrice, nous avons pu rechercher les solutions par une méthode de perturbations. Cette étude possède l'avantage d'être entièrement analytique. Elle décrit les phénomènes à l'aide de formules et permet de passer de manière continue du cas non perturbé (surface lisse) au cas perturbé (surface rugueuse).

La comparaison avec les méthodes rigoureuses montre que les solutions obtenues, au premier ordre de perturbations, sont (comme on peut s'y attendre) d'autant plus exactes que la hauteur de la rugosité est faible devant la longueur d'onde. D'autre part, ces résultats sont plus précis que ceux obtenus par application de l'approximation de Kirchhoff qui est pratiquement inutilisable lorsque les dimensions de la déformation sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde utilisée.

L'étude du problème de la diffraction, au chapitre II, nous a permis de trouver les expressions analytiques des intensités de diffractions dans le cas général (forme et nature de la surface diffractante). Nous pouvons généraliser cette méthode pour le cas des surfaces diélectriques rugueuses d'une ou plusieurs couches utilisées en optique intégrée.

Dans le chapitre III, la représentation du diagramme de pertes donne des indications pour l'étude du problème inverse et montre sous quels angles il faudrait exciter le guide pour que l'énergie passe de manière significative du milieu extérieur au guide. La représentation du diagramme de rayonnement met en évidence la possibilité de réaliser des antennes à partir de guides diélectriques déformés aperiodiquement.

Dans le chapitre IV, nous avons développé une méthode différentielle rigoureuse qui nous a donné de bons résultats pour l'étude de la diffraction par une surface rugueuse de conductivité finie. Le programme de calcul que nous avons élaboré à partir de cette méthode permet, par des procédés d'échantillonnage, de calculer les valeurs et vecteurs propres et l'inversion de matrice, de trouver les coefficients de réflexion et par suite la répartition angulaire de la densité d'énergie, dans les deux cas de polarisation (**TE** et **TM**).

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème inverse. L'algorithme utilisé pour l'étude de ce problème, nous a donné une bonne reconstruction du profil diffractant dans le domaine de résonance. Nos résultats ont été comparés avec des expérimentations et avec d'autres résultats théoriques. La bonne concordance rend compte de la puissance de notre méthode qui possède l'avantage d'être analytique.

Grâce à son efficacité et à sa simplicité, la méthode rigoureuse peut être généralisée ultérieurement pour résoudre le problème de la diffraction dans le cas d'une surface rugueuse multicouches. Une extension de ces travaux, qui apportent une contribution à la résolution des problèmes de la diffraction par des surfaces rugueuses, peut être faite en passant à l'espace tridimensionnel et en remplaçant la source d'onde plane par un dipôle rayonnant. Cela permettra d'élargir davantage le domaine d'application de cette méthode en radiocommunication et propagation des ondes radar où l'émission se fait par des antennes rayonnantes.

ANNEXES

A. RAPPEL SUR LES TENSEURS

A.1. Introduction

A.2. Vecteurs covariants, Vecteurs contravariants

A.3. Tenseurs et Pseudo tenseurs

A.4. Tenseur métrique

B. CARACTERISATION DE LA SURFACE

B.1. Cas déterministe

B.2. Cas aléatoire

ANNEXES

A. RAPPEL SUR LES TENSEURS

A.1. Introduction

L'utilisation d'un système de coordonnées non orthogonal adapté à la géométrie du problème simplifie l'écriture des conditions aux limites. Du fait de la non orthogonalité du nouveau système, la représentation des grandeurs physiques à l'aide de grandeurs vectorielles et scalaires s'avère insuffisante ; on a recours aux tenseurs.

Minkowsky fut l'un des premiers à associer aux champs habituels de l'électromagnétisme des tenseurs de l'espace-temps généralisant ainsi les équations de Maxwell. En se plaçant dans des milieux au repos, ce formalisme permet de montrer que, par nature, \mathbf{E} et \mathbf{H} sont des vecteurs covariants alors que \mathbf{B} , \mathbf{D} et \mathbf{J} des pseudo-vecteurs contravariants.

Nous jugeons donc utile de rappeler, sommairement, quelques définitions concernant les tenseurs.

A.2. Vecteurs covariants, Vecteurs contravariants

Dans un espace vectoriel E_n à n dimensions, et en adoptant la convention d'Einstein qui sous-entend la sommation sur les indices figurant deux fois dans le même monôme, une fois en indice supérieur et une fois en indice inférieur, un vecteur quelconque \vec{a} s'écrit de la manière suivante :

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a^i \vec{e}_i = a^i \vec{e}_i \quad (\text{A.1})$$

Où les e_i sont les vecteurs de base et les a^i , les composantes correspondantes.

Lors d'un changement de base $(e_i) \rightarrow (e_i')$, les nouveaux vecteurs de base peuvent se mettre sous la forme :

$$\vec{e}_{i'} = A_i^j \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{e}_i = A_i^{i'} \vec{e}_{i'} \quad (\text{A.2})$$

Où les A_i^j sont les éléments de la matrice de changement de base.

L'identité du vecteur \vec{a} dans les deux systèmes:

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i = a^{i'} \vec{e}_{i'} \quad (\text{A.3})$$

Montre que:

$$a^{i'} = A_i^{i'} a^i \quad (\text{A.4})$$

a^i sont les composantes du vecteur \vec{a} dans la base (\vec{e}_i) et $a^{i'}$ ses composantes dans la base $(\vec{e}_{i'})$. Ces composantes sont dites « contravariantes » puisqu'elles se transforment à l'inverse des vecteurs de base.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque les composantes d'un vecteur \vec{a}^* se transforment de la même façon que les vecteurs de base, elles sont dites « covariantes » et sont notées a_i^* . Le vecteur \vec{a}^* qui est un vecteur covariant, est un élément de l'espace E_n^* appelé « espace dual » de l'espace vectoriel E_n .

On peut facilement démontrer que :

$$A_i^j A_j^{i'} = \delta_j^{i'} \quad (\text{A.5})$$

Où $\delta_j^{i'}$ est le symbole de Kronecker.

A.3. Tenseurs et Pseudo-tenseurs

On appelle pseudo-tenseur affine T d'ordre p associé à E_n , un ensemble de n^p composantes qui dans un changement de base se transforment de la manière suivante, par exemple pour p=3 :

$$T_{j'l'}^{i'} = |\Delta|^{-k} A_i^{i'} A_j^j A_l^l T_{jl}^i = |\Delta|^{-k} A_i^{i'j'l} T_{jl}^i \quad (\text{A.6})$$

Où: $\Delta = \det(A_i^{i'})$ et $\Delta^{-1} = \det(A_i^i)$.

$k = 0 \Rightarrow T$ Est un tenseur.

$k \neq 0 \Rightarrow T$ Est un pseudo-tenseur.

A.4. Tenseur métrique

En chaque point P de l'espace rapporté à des axes curvilignes (en géométrie métrique), la métrique est définie en écrivant que le produit scalaire de deux vecteurs $d\vec{s}(dx^1, \dots, dx^n)$ et $d\vec{S}(dX^1, \dots, dX^n)$ localisés au point P est une forme bilinéaire de leurs composantes :

$$d\vec{s}d\vec{S} = g_{ij}dx^i dX^j \quad (\text{A.7})$$

Si on suppose que la forme est symétrique, on aura :

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (\text{A.8})$$

Le carré de la longueur d'un vecteur s'obtient par:

$$ds^2 = d\vec{s}d\vec{s} = g_{ij}dx^i dx^j \quad (\text{A.9})$$

Dans un espace vectoriel Euclidien, on a:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (\text{A.10})$$

L'ensemble des n^2 quantités g_{ij} forme un tenseur symétrique d'ordre deux appelé tenseur métrique.

De la même manière, il est possible de définir un autre tenseur, symétrique, deux fois contravariant :

$$g^{ij} = \vec{e}^i \vec{e}^j \quad (\text{A.11})$$

Les composantes g_{ij} et g^{ij} sont liées par la relation suivante:

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (\text{A.12})$$

Qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$(g_{ij})(g^{jk}) = (I) \Rightarrow (g_{ij}) = (g^{jk})^{-1} \quad (\text{A.13})$$

Où (I) est la matrice unité.

Le calcul des composantes g^{ij} peut donc se faire par inversion de la matrice formée par les composantes g_{ij} .

Le tenseur métrique permet le passage des composantes covariantes aux composantes contravariantes d'un vecteur et vice versa. Il vient donc :

$$\vec{e}_i = g_{ij}\vec{e}^j \quad \text{et} \quad \vec{e}^i = g^{ij}\vec{e}_j$$

Un vecteur \vec{X} s'écrit :

$$\vec{X} = a^i \vec{e}_i = a^i g_{ij} \vec{e}^j = a_j \vec{e}^j \quad (\text{A.14}).$$

On peut donc dire qu'il possède à la fois des composantes covariantes et des composantes contravariantes.

B. CARACTERISATION DE LA SURFACE

B.1. Cas déterministe

Le formalisme que nous utilisons est applicable pour toute forme de surface $a(x)$ au moins deux fois dérivable. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée aux extrémités de la partie déformée, la multiplication de la fonction $a(x)$ par une fonction adéquate $v(x)$ permet, en gardant la même forme globale du profil, de respecter la dérivabilité aux bornes.

La fonction $v(x)$ est définie (dans le cas où la déformation est localisée sur $[-l/2, +l/2]$) par:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \notin [-l/2, +l/2] \\ 1 & , \text{si } x \in [-l/2 + \Delta l, +l/2 - \Delta l] \\ \frac{x + l/2}{\Delta l} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{x + l/2}{\Delta l}\right) & , \text{si } x \in [-l/2, -l/2 + \Delta l] \\ \frac{l/2 - x}{\Delta l} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{l/2 - x}{\Delta l}\right) & , \text{si } x \in [+l/2 - \Delta l, +l/2] \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

En prenant Δl petit devant l pour qu'il n'ait pas d'influence.

B.2. Cas aléatoire

✓ Paramètres statistiques des surfaces:

Pour les surfaces rugueuses aléatoires stationnaires, on définit des paramètres statistiques tels que la fonction de corrélation $\varphi(\kappa)$:

$$\varphi(\kappa) = \langle a(x)a(x + \kappa) \rangle \quad (\text{B.2})$$

Où $\langle \dots \rangle$ désigne la valeur moyenne prise sur un grand nombre d'échantillons de surfaces ayant des profils identiques. Les $a(x)$ étant supposés ergodiques, $\varphi(\kappa)$ peut aussi être calculée à partir d'une seule surface, en prenant la moyenne sur x allant de $-\infty$ à $+\infty$. La variance des surfaces (le carré de la hauteur moyenne) pourra être déduite à partir de $\varphi(\kappa)$ par:

$$h^2 = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu) d\nu \quad (\text{B.3})$$

$\phi(\nu)$ est la densité spectrale du profil, c'est à dire la transformée de Fourier de la fonction de corrélation:

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\kappa) e^{-i 2\pi\kappa\nu} d\kappa \quad (\text{B.4})$$

Les surfaces aléatoires considérées dans notre travail ont une fonction de corrélation de forme Gaussienne qui dépend de deux paramètres importants; l'écart type h (hauteur moyenne des rugosités) et la longueur de corrélation T (largeur moyenne des rugosités).

$$\varphi(\kappa) = h^2 e^{-\frac{\kappa^2}{T^2}} \quad (\text{B.5})$$

Avec κ la distance qui sépare deux points de la surface. D'où la densité spectrale:

$$\phi(\nu) = h^2 T \sqrt{\pi} e^{-(\pi\nu T)^2} \quad (\text{B.6})$$

Remarque:

La fonction de corrélation et la densité spectrale sont des quantités couramment employées pour décrire les signaux aléatoires et constituent souvent les seuls paramètres pris en considération. Malheureusement ces deux fonctions ne suffisent pas pour caractériser complètement une surface aléatoire. C'est-à-dire, on peut avoir plusieurs surfaces rugueuses aléatoires différentes qui ont même fonction de corrélation.

✓ **Définition de la surface:**

La surface de profil $u = a(x)$ est supposée être un processus aléatoire stationnaire de loi normale centrée réduite (moyenne nulle, variance unité). La fonction de corrélation $\varphi(\kappa)$ est supposée Gaussienne:

$$\varphi(\kappa) = \langle a(x)a(x + \kappa) \rangle = h^2 e^{-\frac{\kappa^2}{T^2}} \quad (\text{B.7})$$

T étant la longueur de corrélation et h l'écart type ou hauteur moyenne des rugosités autour de la ligne $u = 0$.

Une surface aléatoire ne sera pas définie analytiquement. Elle sera représentée numériquement par les valeurs $a(x_i)$ de $a(x)$ en des points x_i régulièrement espacés ($x_{i+1} - x_i = \Delta x$). Le procédé mathématique de génération des $a(x_i)$ peut se résumer de la manière suivante: Une suite de chiffres aléatoires indépendants de loi normale centrée réduite est construite à partir d'une autre séquence de nombres aléatoires uniformément répartis entre 0 et 1 générée directement par ordinateur. La première suite est modifiée pour avoir une variance h^2 désirée. La séquence résultante s_k ($k \in (1, N), s \in N(0, h^2)$) est corrélée avec une Gaussienne de distance de corrélation T pour obtenir la séquence du profil de la surface $a_k = a(x_k)$ de fonction de corrélation Gaussienne de même distance de corrélation et de variance h^2 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **D. Maystre** "Sur la diffraction et l'absorption par les réseaux utilisés dans l'infrarouge, le visible et l'ultraviolet: Application à la spectroscopie et au filtrage des ondes électromagnétiques" Thèse d'état, Université d'Aix-Marseille III, 1974.
- [2] **J. Chandezon** "Les équations de Maxwell sous forme Covariante. Application a l'étude de la propagation dans les guides périodiques et à la diffraction par des réseaux."Thèse d'état, Clermont Ferrand, 1979.
- [3] **J. Chandezon, D. Maystre, G., Raoult** "A new theoretical method for diffraction gratings and its numerical application" J. Optics, Fr,11, N° 4, pp. 235-241, 1980.
- [4] **J. Chandezon, M.T. Dupuis, G. Cornet, D. Maystre** "Multicoated grating: a differential formalism applicable in the entire optical region", J. Opt. Soc. Am. , 72, pp.839-847, USA 1982.
- [5] **D. Maystre** "Electromagnetic Scattering from Perfectly Conducting Rough Surfaces in Resonance Region", IEEE Trans. Antennas propag. , Vol. AP.31, No. 6, Nov.1983.
- [6] **S.O. Rice** "Reflection of Electromagnetic wave from Slightly Rough Surfaces" Pure Appl.Math.4, No. 2/3, 351-378, 1951.
- [7] **J.R. Watt** "Perturbation Analysis for Reflection from Two dimensional Periodic Sea Waves" Radio Sc., 6, 387-391, 1971.
- [8] **D.E. Barrick** "Theory of HF and VHF Propagation across the Rough Sea" Radio Sc., 6, 617-533 , 1971.
- [9] **R.K. Rosich and J.R. Wait** "A General Perturbation Solution for Reflection from Two Dimensional Periodic surfaces" Radio Sc., 12, pp. 719-729, 1977.
- [10] **P. Beckmann and Spizzichino** "The scattering of Electromagnetic Waves from Rough surfaces." Macmillan, New York, 1963.
- [11] **D. Maystre, O. Mata. Mendez and A. Roger** "A New Electromagnetic theory for Scattering from Shallow Rough Surfaces" Opt. Acta Vol. 30, No. 12, 1707-1723, 1983.
- [12] **J.A. Desanto** "Scattering Scalar Wave from Rough interface using a single integral equation" Wave Motion, 5, 125-135, 1983.

- [13] **S. Afifi, J. Chandezon**, " Etude des pertes par rayonnement dans une lame diélectrique périodiquement déformée ", Comptes Rendus du 8^{ème} Colloque (OHD) Grenoble (France), 16-18 septembre 1985.
- [14] **S. Afifi**, " Propagation et diffraction d'une onde électromagnétique dans des structures aperiodiques ", Thèse Docteur Ingénieur, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand (France), 1986.
- [15] **S. Afifi, J. Chandezon**, " Etude théorique du rayonnement d'un guide diélectrique déformé utilisé comme une antenne", Les V^{ème} Journées Nationales Micro-ondes, Nice (France), 22-24 Juin 1987.
- [16] **S. Afifi, J. Chandezon**, "Scattering by rough metallic surface: study of direct and inverse problem", Journées internationales de Nice sur les antennes JINA'92 (France) 12-14 Novembre 1992.
- [17] **S. Afifi, M. Diaf** "Etude du problème direct de la diffraction d'une onde électromagnétique par une surface rugueuse métallique de conductivité finie" Conférence internationale d'optique ICO2004, Sétif (Algérie), 22-23 novembre 2004.
- [18] **S. Afifi, M. Diaf** " Diffraction d'une onde électromagnétique par une surface rugueuse métallique de conductivité finie" 1st International Symposium on Electromagnetism, Satellites and Cryptography ISESC'05, JIJEL UNIVERSITY (Algérie), June 19-21, 2005.
- [19] **G. Granet**, " Diffraction par des surfaces périodiques : Etude en coordonnées non orthogonales ", Thèse Docteur d'Université, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand, France, 1992.
- [20] **Lifing li, J. Chandezon**, " Improvement of the coordinate transformation method for surface-relief grating with edges", J. Opt. Soc. Am. A11, 2247-2255, 1996.
- [21] **G. Granet and J. Chandezon**, "The method of curvilinear coordinates applied to the problem of scattering from surface relief gratings defined by parametric equations: application to scattering from a cycloidal grating", Pure App. Opt. **6**, 727-740, 1997.
- [22] **G. Granet**, "Analysis of diffraction by surface-relief crossed grating with use of Chandezon method: application to multilayer crossed grating", J. Opt. Soc. Am. A15, 1121-1131, 1998.
- [23] **G. Granet, J. Chandezon, J.P. Plumey and K. Raniriharinosy**, "Reformulation of the coordinate transformation method through the concept of adaptive spatial resolution. Application to trapezoidal gratings", J. Opt. Soc. Am. A18, 2102-2108, 2001.

- [24] **R. Dusséaux, R. de Oliveira** " Scattering of a plane wave by a 1-dimensional rough surface study in a nonorthogonal coordinate system ", Progress In Electromagnetics Research, Pier 34, 69-88, 2001.
- [25] **C. Baudier,** " Diffraction d'ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires : méthode approchée de Rayleigh et méthode exacte en coordonnées non orthogonales ", Thèse Docteur d'Université, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, France, 2002.
- [26] **K. S. Edée,** " Diffraction par des surfaces rugueuses : Etude en coordonnées non orthogonales ", Thèse Docteur d'Université, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand, France, 2003.
- [27] **C. Baudier, R. Dusséaux, K.S. Edée and G. Granet** "Scattering of a plane wave by one-dimensional dielectric random rough surfaces – study with the curvilinear coordinate method" Waves Random Media 14, 61-74, 2004 .
- [28] **E. I. Thorsos** "The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 83, N°.1, 78-92,1988.
- [29] **Y. Kugo and P. Phu,** "Experiment studies of millimeter-wave scattering in discrete random media and from rough surfaces", Progress In Electromagnetics Research, PIER 14, 37-88, 1996.
- [30] **E.J. Post,** "Formal Structure of Electromagnetics: General Covariance and Electromagnetics", North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962.
- [31] **A. Roger** " Problèmes inverses de diffraction en électromagnétisme " Thèse d'état (université d'Aix-Marseille III) 1981.
- [32] **J.A. Stratton** "Electromagnetic Theory." Mc. Graw-Hill .New York, 1941.
- [33] **Rayleigh** "The Theory of sound." Vol. II, Dover, New York, 1945.
- [34] **A. Staggryn** "Electromagnetic Scattering From Rough Finitely Conducting Surfaces", Radio Sc., Vol.2 (New Series), No.4, April 1967.
- [35] **G.R. Valenzuela** "Scattering of Electromagnetic Waves From a Tilted Slightly Rough Surface.", Radio Sc., Vol.3 (New Series), No.11, pp.1057-1066. Nov.1968
- [36] **R.F. Millar** "On the Rayleigh Assumption in Scattering by periodic Surface", Proc. Cambridge Phi. Soc., Vol.65, pp. 773-791, 1969.
- [37] **P.C. Waterman** "Scattering by Periodic Surfaces." J. Acoust. Soc. Am., Vol.57, No.4, pp. 791-802, April 1975.

- [38] **R.F. Millar** "On the Rayleigh Assumption In Scattering by Periodic Surface, II", Proc. Cambridge Phi. Soc., Vol.69, pp. 2478-2481, 1978.
- [39] **R. Petit** "Electromagnetic Theory of grating." Springer- Verlag New York 1980.
- [40] **Shun-Lien and J. Au Kong** "Scattering of Wave from Periodic Surfaces." Proceeding of the IEEE, Vol.69, No.9, pp. 1132-1144, September 1981.
- [41] **J.G. Waston and J.B. Keller** " Rough Surface Scattering Via the Smoothing Method", J.Acoust. Soc. Am. 75(6), pp. 1705-1708, June 1984.
- [42] **D. Winebrenner, A. Ishimaru** "Investigation of a Surface field Phase Perturbation Technique for Scattering from Rough Surfaces." Radio Sc., Vol. 20, No. 2, pp.161-170, March-April 1985.
- [43] **Dau-Sing Wang** "Limits and Validity of the Impedance Boundary Conditions on Penetrable Surfaces", IEEE, Vol. Ap.35, N'4, April 1987.
- [44] **A. Benali, A. Essalhi** "Calcul des champs au dessus d'une mer agitée.", Rapport de contrat avec le centre d'étude de Cramât, Juin 1989.
- [45] **Ronald N. Barcewel** "The Fourier Transform and its Applications." Second edition, Revised, New York 1986.
- [46] **Craeme L. James** "Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves.", Third edition revised, Peter Peregrines Ltd., London 1986.

Étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses

Par

AFIFI Saddek

RÉSUMÉ :

La diffraction d'une onde électromagnétique par des surfaces rugueuses déterministe ou aléatoire, métallique ou diélectrique est étudiée par une méthode différentielle. Le formalisme utilisé repose essentiellement sur la forme covariante des équations de Maxwell écrites dans un système de coordonnées non orthogonales adapté à la géométrie du problème. Les solutions du problème sont écrites sous forme d'intégrale de Fourier.

Pour le problème direct, deux méthodes sont proposées :

- Dans la première, on considère la déformation comme une fonction perturbatrice et les solutions sont trouvées par une méthode de perturbations.
- Dans la seconde, le traitement est plus rigoureux. Le problème est ramené à la résolution d'un système intégral-différentiel linéaire à coefficients constants. Par la suite, on est conduit à la recherche de valeurs et de vecteurs propres d'une matrice caractéristique à la fois du milieu et de la forme de la surface diffractante.

Pour le problème inverse, la reconstruction du profil de la surface métallique pour les valeurs de l'intensité de diffraction simulées est faite à partir d'un algorithme basé sur une méthode itérative.

Mots clés : onde électromagnétique, diffraction, surfaces rugueuses, problème direct, méthode des perturbations, méthode rigoureuse, problème inverse.

ABSTRACT

The scattering of electromagnetic wave by rough structures determinist or random, metal or dielectric are studied by a differential method. The formalism used primarily based on the Maxwell's equations in covariant form within the framework of a non-orthogonal coordinates system adapted to the geometry of the problem. The solutions of the problem are written in Fourier's integral form.

For the direct problem two methods are proposed:

- The first, regards the deformation as a disturbing function and the solutions are found by a perturbation method.
- The second one, the treatment is more rigorous. The problem is brought back to the resolution of a linear integro-differential system with constant coefficients. Thereafter one is led in the search of eigenvalues and eigenvectors of a matrix characteristic at the same time of the medium and form of diffracting surface.

For the inverse problem, the reconstruction of the profile of the metal surface from the simulated diffraction intensity values is found using an iterative algorithm.

Key words: electromagnetic wave, diffraction, rough surfaces, direct problem, perturbation method, rigorous method, inverse problem.