UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques

Étude d'une Equation aux Dérivées Partielles complètement non linéaire avec résonance dans $\mathbb{R}^N$

Par

Zahia BELYACINE

Directeur de thèse : Dr. Nawel Benouhiba Univ. Annaba

Jury :

Président	**Pr.F.Rebbani**	**Univ.Annaba**
Examinateur	**Dr.M.Kouche**	**Univ.Annaba**
Examinateur	**Dr.A.Nouar**	**Univ.Skikda**
Examinateur	**Pr.S.Badraoui**	**Univ.Guelma**
Examinateur	**Dr.A.Hitta**	**Univ.Guelma**

ÉTUDE D'UNE EQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES COMPLÈTEMENT NON LINÉAIRE AVEC RÉSONANCE DANS $\mathbb{R}^N$

Par

Zahia Belyacine

A mes parents,

A mes frères et sœurs,

Je dédie ce travail.

Table des matières

Résumé

Nous étudions dans cette thèse différentes équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique. Nous montrons l'existence des solutions non triviales de certains problèmes contenant un opérateur non homogène.

Cette thèse est répartie en plusieurs chapitres qui ne peuvent pas être lus indépendamment les uns des autres.

Dans les chapitres deux et trois, nous faisons un bref rappel des différents notions et outils dont nous faisons un usage fréquent dans les autres chapitres.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à étudier les valeurs propres de l'opérateur (p,q)-Laplacien avec poids dans $\mathbb{R}^N$. Nous allons démontrer qu'il existe $\lambda^* > 0$ telle que toute $\lambda > \lambda^*$ est une valeur propre du problème considéré. L'approche utilisée est basée essentiellement sur le théorème du Col. Nous donnons aussi dans ce chapitre un résultat concernent l'existence et l'unicité de la valeur propre principale.

Dans le cinquième chapitre, nous traitons un problème de résonance avec une fonction source non linéaire. Nous montrons moyennant une variante du théorème de Leray-Lions que de tels problèmes admettent au moins une solution non triviale.

Dans le sixième chapitre, nous établissons des résultats de régularité des solutions des problèmes traités dans les deux chapitres précédents.

Dans le dernier chapitre, nous établissons l'existence d'une famille de valeurs propres d'un opérateur nonlinéaire du type divergence généralisant ainsi les résultats du chapitre quatre. Nous clôturons cette thèse avec une conclusion et des perspectives.

Mots clés : Espace de Sobolev ; solution faible ; point critique ; valeur propre ; problème de résonance ; Théorème du Col.

Abstract

This thesis is devoted to the study of a class of elliptic nonlinear partial differential equations. We are mainly concerned by the (p, q)-Laplacian operator. After brief remainders, we establish different existing results.

We firstly prove the existence of a continuous family of eigenvalues for the (p, q)-Laplacian with a positive weight in $\mathbb{R}^N$. Then we treat a resonance problem where we ensure the existence of at least one nontrivial solution. We also consider the regularity problem.

In the end, we generalize the above results to a nonlinear problem that contains an operator of divergence type.

Key words and phrases : Sobolev spaces ; weak solution ; critical point ; eigenvalue ; resonance problem ; Mountain Pass Theorem.

Remerciements

Comme le veut la tradition, je vais tenter de satisfaire au difficile exercice de la page des remerciements. Non qu'exprimer ma gratitude envers les personnes en qui j'ai trouvé un soutien soit contre ma nature, bien au contraire. La difficulté tient plutôt dans le fait de n'oublier personne. C'est pourquoi, je remercie par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. Ils se reconnaîtront.

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans la confiance, la patience et la générosité de ma directrice de thèse Docteur Nawel Benouhiba que je tiens à remercier vivement. Je voudrais aussi la remercier pour le temps et la patience qu'elle m'a accordé tout au long de ces années et d'avoir crue en mes capacités. De plus, les conseils qu'elle m'a divulgué en période de rédaction ont toujours été clairs et succincts, me facilitant grandement la tâche et me permettant d'aboutir à la production de cette thèse.

Je remercie Professeur F. Rebbani pour avoir accepté de présider le jury, ainsi que pour ses encouragements et les marques d'intérêt pour mon travail.

Je remercie les professeurs M. Kouche, A. Nouar, S. Badraoui et A. Hitta de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. J'éprouve un profond respect pour leur travail ainsi que pour leurs qualités humaines. Je les remercie aussi pour leur participation au jury de thèse. Ils ont également contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de cette thèse, et je leur en suis reconnaissante.

J'adresse tout mon respect à tous mes professeurs, particulièrement, ceux qui m'ont enseigné en Licence et en Master.

Mes remerciements vont aussi aux membres du laboratoire de mathématiques Appliquées, que j'ai côtoyéz pendant plus de quatre ans et qui m'ont toujours encouragé par leurs précieux conseils et leur soutien moral.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues jeunes chercheurs du laboratoire avec lesquels j'ai partagé ces années.

Notations générales

Symbole	**Signification**
Δu	Laplacien de u
$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(\lvert\nabla u\rvert^{p-2}\nabla u\right)$	p-Laplacien de u
p^*	Exposent critique de p, $p^* = \begin{cases} \frac{pN}{N-p}, & \text{si } p < N \\ +\infty, & \text{si } p \geq N \end{cases}$
$\operatorname{supp}(u)$	Support de la fonction u
$\lVert\cdot\rVert_X$	Norme dans l'espace X
$d\left(x, A\right)$	Distance entre x et l'ensemble A
B_R	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée à l'origine
$B_R\left(x_0\right)$	Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^N$
X'	Espace dual de X
$p.p.$	Presque pour tous les points
$s.c.i.$	Semi continue inférieurement
$s.c.s.$	Semi continue supérieurement
$C\left(\Omega\right)$ où $C^0\left(\Omega\right)$	Ensemble des fonctions continues dans Ω
$C_c^0\left(\Omega\right)$	Ensemble des fonctions continues dans Ω a support compact

$C^k(\Omega)$	Ensemble des fonctions de classe k dans Ω
$C^{k,\beta}(\Omega)$	Ensemble des fonctions Hölderiennes de classe k dans Ω
$C_c^k(\Omega)$	Ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$ a support compact
$C^\infty(\Omega)$	Ensemble des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω
$C_c^\infty(\Omega)$	Ensemble des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ a support compacte
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable}, \int_\Omega \lvert u\rvert^p < \infty\}, 1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable et } \exists C \text{ tel que } \lvert u(x)\rvert \leq C \;\; p.p.\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace nulle
$W_0^{-k,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Introduction

Cette thèse concerne l'étude de certains problèmes elliptiques non linéaires. Dans les problèmes considérés au cours de ce travail, nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^N, N \geq 3$. Ceci pose un certain nombre de difficultés liées principalement au fait que le domaine n'est pas borné ce qui entraine la perte des injections compactes de Sobolev, chose qui est primordiale pour assurer la convergence des suites bornées.

A travers les chapitres 4-7, nous avons montré comment ces difficultés peuvent être surmontées et démontrer de nouveaux résultats concernant les valeurs propres, existence de solutions du problème de résonance, la régularité et le comportement asymptotique des solutions faibles. Un des éléments essentiels permettant de pallier ces obstacles réside dans l'emploi d'une fonction poids appartenant à un espace de Lebesgue approprié. Il est alors possible d'adapter des méthodes variationnelles ou encore certains arguments topologiques.

Notons que les problèmes que nous avons étudiés dans ce travail de thèse comportent des opérateurs de type divergence notamment l'opérateur non linéaire, non autoadjoint dit (p, q)-Laplacien qui est défini par $(\triangle_p + \triangle_q)u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{q-2}\nabla u)$.

De tels opérateurs apparaissent dans de nombreux modèles cinétiques de réactions chimiques, de dynamique des populations, de physique des plasmas ainsi que dans certains modèles d'écoulement de fluides non newtoniens.

Dans la littérature nous trouvons de nombreux travaux dédiés à l'étude théorique de tels équations et systèmes d'équations. En fait, l'étude de ce type de problèmes a effectivement commencé au milieu des années 1980 par M. Ôtani [51] en une dimension puis par F. de Thélin [64] en dimension N. Ce dernier auteur a démontré l'existence et l'unicité des solutions radiales dans $\mathbb{R}^N$ pour des équations de type $-\Delta_p u = g(x,u)$ où la fonction g est contrôlée par des fonctions polynomiales par rapport à u. Plus tard Ôtani [51] a généralisé ce résultat à des ouverts quelconques. On peut citer certains précurseurs de l'analyse des problèmes elliptiques aux valeurs propres comme G. Barles [13] et A. Anane [9], qui ont étudié les équations du type :

$$-\Delta_p u = \lambda \left|u\right|^{p-2} u \quad \text{dans } \Omega \text{ domaine borné.}$$

Plus tard en 1993, P. Lindqvist [44] a établi différents résultats sur ce type d'équations qui font suite à l'article de A. Anane [9]. Par ailleurs, il y a d'autres résultats sur l'unicité qui ont été énoncés par J. I. Dìaz et J. E. Saa [26] en 1987 pour des équations de la forme $-\Delta_p u = f(x,u)$ sous la condition que la fonction $r \to \frac{f(x,r)}{r^{p-1}}$ soit décroissante.

Le problème de bifurcation à partir de la première valeur propre a été abordé par R. F. Manásevich et M. A. Del Pino [46], tandis que les problèmes de non résonance associés au p-Laplacien étaient étudiés par A. Anane et O. Chakrone [10]. Plus tard, le cas non borné de ces équations a été abordé par P. Drábek and J. Milota [29], Drábek, Z. Moudan et A. Touzani [30] et Y. X. Huang [40], où les questions d'existence et d'unicité ont été résolues aussi bien pour des problèmes de valeurs propres que pour des problèmes non-linéaires.

Le but de cette thèse est de présenter des résultats concernant certaines classes d' équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires faisant intervenir l'opérateur (p,q)-Laplacien. Nous considérons le problème elliptique non linéaire

$$-\Delta_p u - \Delta_q u + f(x,u) = \lambda g(x) |u|^{p-2} u, \ \ x \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

où p, $q > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, g est une fonction positive mesurable dans $\mathbb{R}^N$ et $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction de Carathéodory.

Dans le cas $p = q = 2$ et $f \equiv 0$, le spectre du problème (1) est purement ponctuel. Il est constitué d'une suite croissante de valeurs propres positives. Des résultats sur l'existence des valeurs propres principales positives figurent dans le travail de Brown, Cosner et Fleckinger [21] et Allegretto [3]. Dans le cas $p = q \neq 2$, l'utilisation de la théorie de Ljusternick-Schnirlemann assure l'existence des valeurs propres de problème (1). Les problèmes de la résonance autour d'une valeur propre du p-laplacien ont été traités dans [6].

Nous allons exposer dans ce qui suit explicitement l'état de l'art sur les problèmes contenant le p-Laplacien.

Rappels sur le p-Laplacien

Nous avons voulu présenter ici les différents résultats concernant le p-Laplacien avec poids. Le p-Laplacien représente une généralisation naturelle du Laplacien. Même s'il paraît que la forme des résultats est analogue dans le cas du Laplacien et du p-Laplacien, les approches elles, sont tout à fait différentes. Dans la section 1.2, nous présentons des résultats sur le spectre du p-Laplacien avec poids dans $\mathbb{R}^N$ ainsi sa valeur propre principale. Dans la section 1.3, nous traitons un problème de résonance au tour de la valeur propre principale et nous présentons des résultats d'existence au moins trois solutions distinctes. Dans la section 1.4, nous présentons une vue globale sur l'apport de cette thèse en résumant les différents chapitres.

1.2 Valeurs propres du p-Laplacien avec poids dans $\mathbb{R}^N$

Rappelons ici certains résultats concernant l'existence des valeurs propres pour le problème elliptique non linéaire défini sur $\mathbb{R}^N$ de la forme

$$-\Delta_p u = \lambda g(x) |u|^{p-2} u, \ \ x \in \mathbb{R}^N, \ \ , \tag{1.2.1}$$

où Δ_p est l'opérateur p-Laplacien défini par $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ et g une fonction mesurable positive dans $\mathbb{R}^N$.

Une formulation variationnelle du problème 1.2.1 est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \ u \not\equiv 0, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} g |u|^{p-2} uv dx, \ \text{pour tout } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{array} \right. \tag{1.2.2}$$

Le problème 1.2.2 est équivalent à trouver des solutions non triviales u de l'équation

$$J'(u)\,v = \lambda F'(u)\,v \quad \text{pour tout } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{1.2.3}$$

où J', F' désignent les dérivées au sens de Gâteaux des fonctionnelles

$$J(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx \tag{1.2.4}$$

et

$$F(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|u|^p\,dx \tag{1.2.5}$$

D'après la théorie de Ljusternick-Schnirelmann, la résolution de l'équation 1.2.3 revient exactement à la recherche des points critiques de J sur la variété G,

$$G = \left\{ u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right),\ pF(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|u|^p\,dx = 1 \right\} \tag{1.2.6}$$

Théorème 1.2.1. [4] *Soit $1 < p < N$. Supposons que $g_1 \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{N/p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ $g_1 \not\equiv 0$ (où $g = g_1 + g_2$). Alors le problème 1.2.2 admet une suite de solutions (λ_k, u_k) $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \to \infty)$ avec $\int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|u_k|^p\,dx = 1$.*

Avant de démontrer ce résultat, on a besoin de vérifier la condition de Palais-Smale afin de pouvoir appliquer la théorie de Ljusternick-Schnirelmann.

Lemme 1.2.2. *Supposons $g_1 \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{N/p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Alors la fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale sur G, i.e. pour $(u_n) \subset G$, si $J(u_n)$ est bornée et*

$$J'(u_n) - a_n F'(u_n) \to 0 \text{ dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ où } a_n = \frac{\langle J'(u_n), u_u\rangle}{\langle F'(u_n), u_u\rangle} \tag{1.2.7}$$

alors (u_n) admet une sous-suite convergente dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Démonstration. Soit $(u_n) \subset G$ une suite de Palais-Smale. D'après l'inégalité de Hölder et le théorème d'injection du Sobolev, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p \, dx \leq c \|g_1\|_{N/p} \|\nabla u_n\|_p^p \tag{1.2.8}$$

Comme $J(u_n)$ est borné alors $\int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p$ est borné. Par conséquent nous concluons que $\int_{\mathbb{R}^N} g_2 |u_n|^p = \int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p - 1$ est borné. Nous rappelons l'inégalité de Hardy,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{(1+|x|)^p} dx \leq \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx. \tag{1.2.9}$$

Nous concluons que (u_n) est bornée dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. D'où sans perte de généralité, nous pouvons supposer, pour un certain $u_0 \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ que $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Dans tout domaine borné Ω on a $\int_\Omega g |u_0|^p \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g |u_n|^p \, dx$. Nous énonçons que $u_0 \not\equiv 0$. En effet si $u_0 \equiv 0$, alors pour tout domaine Ω borné, on a $\int_\Omega g_1 |u_n|^p \to 0$. Soit $\widetilde{\Omega}$ un domaine borné tel que pour tout n assez grand on a

$$c \|g_1\|_{N/p, \mathbb{R}^N \setminus \widetilde{\Omega}} \|\nabla u_n\|_p^p < \frac{1}{4}. \tag{1.2.10}$$

Maintenant nous pouvons choisir n suffisamment grand tel que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p \, dx &= \int_{\widetilde{\Omega}} g_1 |u_n|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \widetilde{\Omega}} g_1 |u_n|^p \, dx \\ &\leq \int_{\widetilde{\Omega}} g_1 |u_n|^p \, dx + c \|g_1\|_{N/p, \mathbb{R}^N \setminus \widetilde{\Omega}} \cdot \|\nabla u_n\|_p^p \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Nous déduisons que $\int_{\mathbb{R}^N} g_2 |u_n|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p \, dx - 1 < -\frac{1}{2}$, d'où la contradiction. Donc $u_0 \not\equiv 0$. Il suit de (1.2.7) que pour tout $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi = a_n \int_{\mathbb{R}^N} g |u_n|^{p-2} u_n \varphi + o(1) \tag{1.2.12}$$

où $\varphi = u_n - u_m$.

Ecrivons l'équation 1.2.12 pour n et m. Après soustraction nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m\right) \nabla (u_n - u_m) \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} g \left(a_n |u_n|^{p-2} u_n - a_m |u_m|^{p-2} u_m\right) (u_n - u_m) + o(1) \\
&= \int\limits_{\Omega} g a_n \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m\right) (u_n - u_m) \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g a_n \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m\right) (u_n - u_m) \\
&+ (a_n - a_m) \int\limits_{\mathbb{R}^N} g |u_m|^{p-2} u_m (u_n - u_m) + o(1),
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

où Ω est un domaine borné arbitraire. Notons ici que $a_n = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \, dx$ est borné. On voit que, d'après l'inégalité de Hölder et la monotonie de la fonction $|t|^{p-2} t$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g \; a_n \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m\right) (u_n - u_m) \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g_1 a_n \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m\right) (u_n - u_m) \\
&\leq c.a_n \|g_1\|_{N/p, \mathbb{R}^N \setminus \Omega} \left(\|\nabla u_n\|_p^p + \|\nabla u_m\|_p^p\right),
\end{aligned}$$

qui approches à 0 quand $\Omega \to \mathbb{R}^N$, indépendant de n et m. Cependant, pour tout domaine Ω on a

$$\int\limits_{\Omega} g a_n \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m\right) (u_n - u_m) \, dx \to 0 \tag{1.2.14}$$

Comme $n, m \to \infty$, alors u_n converge vers u_0 dans $L^p(\Omega)$. En outre l'inégalité Hölder implique que l'intégrale $\int\limits_{\mathbb{R}^N} g |u_m|^{p-2} u_m (u_n - u_m) \, dx$ est borné, et nous pouvons choisir une sous-suite de a_n telle que $a_n - a_m \to 0$ quand $n, m \to \infty$. Donc nous concluons que le côté droite de 1.2.13 tend vers 0 quand $n, m \to \infty$. D'autre part, en utilisant l'inégalité : $\forall a,\, b \in \mathbb{R}^N$

$$|a-b|^p \leq c.\left\{\left(|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b\right).(a-b)\right\}^{s/2}\left(|a|^p+|b|^p\right)^{1-s/2} \tag{1.2.15}$$

où $s = p$ si $p \in (1,2)$ et $s = 2$ si $p \geq 2$, on trouve

$$\begin{aligned}|\nabla u_n-\nabla u_m|^p \leq c.&\left\{\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\right)\nabla\left(u_n-u_m\right)\right\}^{s/2}\\ &.\left(|\nabla u_n|^p+|\nabla u_m|^p\right)^{1-S/2}.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned}\int|\nabla u_n-\nabla u_m|^p \leq c_1.&\left\{\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\right)\nabla\left(u_n-u_m\right)\right\}^{s/2}\\ &\left(|\nabla u_n|^p+|\nabla u_m|^p\right)^{1-s/2}.\end{aligned}$$

Donc nous obtenons à partir de ces dernières inégalités que $\nabla u_n \to \nabla u_0$ dans $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$. Il suit alors que $\int\limits_{\mathbb{R}^N} g_i\,|u_n|^p\,dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} g_i\,|u_0|^p\,dx$, $i = 1, 2$ et cela combiné avec l'inégalité de Hardy implique que $u_n \to u_0$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Démonstration du Théorème 1.2.1. La preuve du théorème suit directement d'application de la théorie Ljusternick-schnirlemann (voir [13]). □

Existence de valeur propre principale

Nous rappelons ce résultat qui est dû à W. Allegretto [3].

Théorème 1.2.3. *On définit la quantité*

$$\lambda_1 = \inf_{u\in G}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx. \tag{1.2.16}$$

Alors, $\lambda_1 > -\infty$ est la plus petite valeur propre du problème (1.2.1). De plus, elle est principale, simple et unique

Remarque 1.2.4. *Il a été démontré dans [9] que la valeur propre principale dans le cas d'un problème posé dans un domaine borné est isolée. Nous pouvons établir ce résultat dans $\mathbb{R}^N$ en combinant les arguments utilisés dans [9] et la méthode du décomposition du domaine.*

Deuxième valeur propre

W. Allegretto et Y.X. huang dans [4] ont démontré que la valeur définie par

$$\lambda_2 = \inf_{v\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(t)|^p dx$$

où $\Gamma = \{v \in C([0,1], G) : v(0) = -\Phi_1, v(1) = \Phi_1\}$ et Φ_1 est la fonction propre associée à λ_1, est la deuxième valeur propre du problème et qu'elle n'est pas principale. Nous référons à [3,4,5,9] et les références dedans pour plus de détails.

1.3 Le p-Laplacien avec résonance

Nous nous intéressons à l'existence des solutions du problème

$$-\Delta_p u + f(x,u) = \lambda_1 g(x) |u|^{p-2} u \quad , \text{ dans } \mathbb{R}^N \tag{1.3.1}$$

où λ_1 est la première valeur propre de problème (1.2.1).

Nous cherchons les solutions du problème1.3.1 comme des points critiques non triviales de la fonctionnelle d'Euler-lagrange donnée par

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda_1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g \ |u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)dx, u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{1.3.2}$$

On définit

$$W = \left\{ u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) / \int_{\mathbb{R}^N} gu \left|\Phi_1\right|^{p-2} \Phi_1 dx = 0 \right\} \tag{1.3.3}$$

Nous pouvons facilement prouver que W est le complémentaire du sous-espace $\langle \Phi_1 \rangle$. Par conséquent on a la somme suivante

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) = \langle \Phi_1 \rangle \oplus W \tag{1.3.4}$$

Nous étudions le problème 1.3.1, sous les hypothèses suivantes.

$$f:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ fonction continument bornée vérfiant} \tag{1.3.5}$$

$f\,(x,0)=0$

$$F(x,s)=\int_0^s f(x,t)dt \;\; \text{est supposer borné} \tag{1.3.6}$$

$$f(x,t)t\to 0, \qquad \text{lorsque} \quad |t|\to\infty. \tag{1.3.7}$$

On note

$$T(x)=\lim_{|t|\to\infty}\inf f(x,t) \quad \text{et} \quad S(x)=\lim_{|t|\to\infty}\sup f(x,t), \tag{1.3.8}$$

et

$$f(x,t)\geq\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{p}\right)g(x)\,|t|^p\,, \qquad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{1.3.9}$$

De plus, nous supposons que

$$\begin{array}{c}\text{il existe } 0<\delta \text{ et } 0<m<\lambda_1 \text{ tel que}\\ f(x,t)\geq\frac{m}{p}g(x)\,|t|^p\,, \quad \text{pour } |t|<\delta.\end{array} \tag{1.3.10}$$

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.3.1. *Le problème 1.3.1 a au moins trois solutions* u_1, u_2 *et* u_3 *avec*

$$I(u_1),\quad I(u_2)<0 \qquad et \qquad I(u_3)>0, \tag{1.3.11}$$

Lemme 1.3.2. *La fonctionnelle* I *satisfait la condition de Palais-Smale* $(PS)_c$ *pour tout* $c<\int_{\mathbb{R}^N}T(x)dx$.

Démonstration du Théorème 1.3.1. Pour démontrer l'existence des deux premières solutions on applique le lemme d'Ekeland. Notons par $Q^{\pm}$ les ensembles suivants

$$Q^{+} = \{t\Phi_1 + w, \quad t \geq 0 \ \text{ et } \ w \in W\}$$
$$Q^{-} = \{t\Phi_1 + w, \quad t \leq 0 \ \text{ et } \ w \in W\}$$

Il est facile de voir que I est borné au-dessous $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. On a

$$I(t^{\pm}\Phi_1) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t^{\pm}\Phi_1) \ \leq \int_{\mathbb{R}^N} T(x)dx < 0,$$

par conséquence $\inf\limits_{u\in Q^{\pm}} I(u) < 0$. Nous pouvons conclure que

$$\inf_{u\in Q^{\pm}} I\left(u\right) \leq \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t^{\pm}\Phi_1) \leq \int_{\mathbb{R}^N} T(x)dx < 0.$$

Si

$$\inf_{u\in Q^{\pm}} I\left(u\right) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t^{\pm}\Phi_1) = I\left(t^{\pm}\Phi_1\right) \leq \int_{\mathbb{R}^N} T(x)dx < 0,$$

nous pouvons prendre $u_1 = t^{+}\Phi_1$ et $u_2 = t^{-}\Phi_1$. Autrement si

$$\inf_{u\in Q^{\pm}} I\left(u\right) < \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t^{\pm}\Phi_1) \leq \int_{\mathbb{R}^N} T(x)dx < 0,$$

est vérifié nous pouvons montrer par le lemme d'Ekeland qu'il existe deux suites $\{u_n\} \subset Q^{+}$ et $\{v_n\} \subset Q^{-}$ qui vérifie

$$I\left(u_n\right) \to \inf_{u\in Q^{+}} I\left(u\right) \ \text{ et } \ I'\left(u_n\right) \to 0,$$

et

$$I\left(v_n\right) \to \inf_{u\in Q^{-}} I\left(u\right) \ \text{ et } \ I'\left(v_n\right) \to 0.$$

Donc il existe u_1 et u_2 tels que

$$u_n \to u_1 \ \text{ et } \ v_n \to u_2 \ \text{ dans } W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Par conséquent, u_1 et u_2 sont des solutions du problème 1.3.1 vérifiant

$$I\left(u_1\right) = \inf_{u\in Q^{+}} I\left(u\right) < 0 \ \text{ et } \ I\left(u_2\right) = \inf_{u\in Q^{-}} I\left(u\right) < 0,$$

tels que $u_1 \in Q^{+}$ et $u_2 \in Q^{-}$.

Existence de la troisième solution

En utilisant les hypothèses sur f nous pouvons montrer facilement que

$$f(x,t) \geq \frac{m}{p} g(x) |t|^p - C |t|^\sigma, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.3.12}$$

où $p < \sigma < p^*$ et C est une constante indépendante de x.
Nous avons que

$$I(u) \geq \frac{m}{p\lambda_1} \|u\|^p + o(\|u\|), \text{ quand } \|u\| \to 0. \tag{1.3.13}$$

Comme $I(t^{\pm}\Phi_1) < 0$ alors il existe $R, \rho > 0$ et $u_0 = t^{\pm}\Phi_1$ tel que $R = \frac{m}{p\lambda_1}$

$$I(u) \geq R > 0, \text{ pour } \|u\| \leq \rho \text{ et } I(u_0) < 0.$$

Par conséquent, en utilisant une version du théorème du Col et la condition de Palais-Smale, il existe une suite $\{u_n\} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ qui satisfait

$$I(u_n) \to c \geq R > 0 \text{ et } \|I'(u_n)\|_{H_0^{1,p}(\Omega)^*} (1 + \|u_n\|) \to 0. \tag{1.3.14}$$

Si $\{u_n\}$ n'est bornée, nous pouvons supposer que

$$|u_n(x)| \to \infty, \text{ p.p.} \tag{1.3.15}$$

On a

$$o_n(1) = I'(u_n)(u_n) = \|u_n\|^p - \lambda_1 \int_\Omega g |u_n|^p \, dx + \int_\Omega f(x, u_n) u_n dx,$$

et alors

$$0 \leq \|u_n\|^p - \lambda_1 \int_\Omega g |u_n|^p \, dx \leq \int_\Omega |f(x, u_n) u_n| \, dx + o_n(1).$$

Nous concluons alors que

$$\|u_n\|^p - \lambda_1 \int_\Omega g |u_n|^p \, dx \to 0.$$

Maintenant, on utilise l'égalité

$$c + o_n(1) = I(u_n) = \frac{1}{p} \left[\|u_n\|^p - \lambda_1 \int_\Omega g |u_n|^p \, dx \right] + \int_\Omega F(x, u_n(x)) \, dx,$$

avec lemme Fatou on obtient

$$c \leq \lim_{n\to\infty} \sup \int_{\Omega} F(x, u_n(x))\ dx \leq \int_{\Omega} S(x) dx \leq 0,$$

qui est une contradiction car $c > 0$. Alors $\{u_n\}$ est bornée. Soit $u_3 \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que

$$u_n \rightharpoonup u_3. \tag{1.3.16}$$

En utilisant le même raisonnement que celui utilisé pour démontrer la condition de Palais-Smale, nous trouvons que

$$u_n \to u_3 \tag{1.3.17}$$

et par conséquent

$$I\left(u_3\right) = c \geq R > 0 \text{ et } I'\left(u_3\right) = 0.$$

Le résultat est ainsi démontré. $\square$

1.4 Apport de la thèse

Avant de faire une présentation détaillée des résultats que nous avons obtenus, nous avons voulu présenter un bref résumé de chaque chapitre. Les deux chapitres qui suivent ont été consacré aux différents définitions et rappels nécessaires à la lecture du reste de la thèse.

Résultats principaux du chapitre 4 : Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés au problème aux valeurs propres suivant

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda g(x) |u|^{p-2} u, \; x \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

où $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ est l'opérateur p-Laplacien, $p, q > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \geq 3$ et $g(x)$ est une fonction positive. On considère ce problème sous les hypothèses suivantes

$$1 < q < p < q^* \tag{H_1}$$

et

$$0 \leq g \in L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{H_2}$$

avec $\alpha = \frac{p(1-t)}{1-\frac{pt}{p^*}}$ pour un certain $t \in (0,1)$.

Existence des valeurs propres

On cherche à démontrer l'existence des solutions faibles de ce problème qui sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p \, dx.$$

Le premier résultat de ce chapitre concerne la régularité de la fonctionnelle I.

Proposition 1.4.1. *La fonctionnelle I est de classe C^1 sur W. Sa différentielle est donnée par :*

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p-2} uv dx \quad , \forall v \in W.$$

Afin de pouvoir appliquer le théorème du Col, il est tout d'abord important de démontrer que la fonctionnelle I satisfait la condition de Palais-Smale.

Lemme 1.4.2. *La fonctionnelle I vérifie la condition de Palais-Smale $(PS)_c$ au niveau $c \in \mathbb{R}$.*

Lemme 1.4.3. *Pour tout $u \in W$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx \leq C \|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\left(B'_R\right)} \|u\|^{pt}_{1,p} \|u\|^{p(1-t)}_{1,q}.$$

Moyennant cette inégalité, nous pouvons vérifier que la fonctionnelle I satisfait la géométrie du Col qui est résumée dans le lemme qui suit.

Lemme 1.4.4. *1. Il existe $\rho, \beta > 0$ tels que $I(u) \geq \beta$ si $\|u\| = \rho$.*

2. Il existe $u_0 \in W$ avec $\|u\| > \rho$ et $I(u_0) < 0$.

En regroupons toutes ces informations nous arrivons à démontrer le principal résultat de cette section via le théorème du Col.

Théorème 1.4.5. *Si p, q et g vérifient $(H_1), (H_2)$, alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que tout $\lambda > \lambda^*$ est une valeur propre du problème (1).*

Valeur propre principale

Le premier résultat de cette partie est la proposition suivante.

Proposition 1.4.6. *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) la quantité*

$$\overline{\lambda} = \inf_{u \in W \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{p}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx}{\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx}$$

est une valeur propre principale du problème (1).

On commence la démonstration par rappeler l'identité de Picone généralisée.

Théorème 1.4.7. (*Identité de Picone généralisée*) *Soit* $u \geq 0, v > 0$ *deux fonctions différentiables. Notons*

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u\,|\nabla v|^{p-2}\nabla v;$$
$$R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v.$$

Alors

$$L(u,v) = R(u,v).$$

De plus, $L(u,v) \geq 0$, *et* $L(u,v) = 0$ *p.p.* Ω *si et seulement si* $\nabla(u/v) = 0$ *p.p.* Ω, *i.e.* $u = kv$ *pour une certaine constante* k *dans chaque composante de* Ω.

On définit à présent les applications suivantes

$$L_p(\overline{u},v) = |\nabla\overline{u}|^p + (p-1)\frac{\overline{u}^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{\overline{u}^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla\overline{u}\,|\nabla v|^{p-2}\nabla v,$$
$$L_q(\overline{u},v) = |\nabla\overline{u}|^q + (p-1)\frac{v^p}{u^p}|\nabla v|^q - p\frac{\overline{u}^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla\overline{u}\,|\nabla v|^{q-2}\nabla v,$$

et on pose :

$$L(\overline{u},v) = L_p(\overline{u},v) + L_q(\overline{u},v)$$

Nos principaux résultats sont présentés dans les deux lemmes suivants.

Lemme 1.4.8. *Pour tout* $\overline{u}$, $v \in C^\alpha_{loc}$ *avec* $v > 0$ *dans* $\mathbb{R}^N$, *nous avons* $L(\overline{u},v) \geq 0$, *ce qu'implique,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\overline{u}|^p + \int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\overline{u}|^q \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{-\Delta_p v}{v^{p-1}}|\overline{u}|^p + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}}|\overline{u}|^q,$$

et si $L(\overline{u},v) = 0$ *il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $\overline{u} = cv$.

Lemme 1.4.9. *La valeur propre principale* $\overline{\lambda}$ *est unique.*

Une partie des résultats obtenus dans le chapitre 4 a fait l'objet d'une publication : N. Benouhiba and Z. Belyacine, A CLASS OF EIGENVALUE PROBLEMS FOR THE (p,q)***-LAPLACIAN IN*** $\mathbb{R}^N$***, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 80 No. 5 2012, 727-737.***

URL: `www.ijpam.eu/contents/2012-80-5/11/11.pdf`

Résultats principaux du chapitre 5 : Dans le cinquième chapitre, on va présenter une méthode qui va nous permettre d'étudier l'existence des solutions du problème elliptique non linéaire suivant

$$-\Delta_p u - \Delta_q u + f(x,u) = \overline{\lambda} g(x) |u|^{p-2} u, \ \ x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction de Carathéodory. Dans ce travail nous supposons aussi que $f(x,0) \neq 0$ et que

$$|f(x,u)| \leq \sigma(x) + \rho(x) |u|^{\gamma}, \forall x \in \mathbb{R}^N, \ u \in \mathbb{R} \tag{H_3}$$

où $0 < \gamma < p^* - 1$, $\sigma \in L^{(p^*)'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $\rho \in L^{\delta}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ avec $\delta = \frac{p^*}{p^* - (\gamma+1)}$.

Nous supposons aussi que

$$\inf_{s \in \mathbb{R}^*} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2} s} > \overline{\lambda} g(x) \ \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{H_4}$$

Problème de résonance

Le problème du résonance (2) qui est équivalent à trouver $u \in W$, $u \neq 0$ tel que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u) v dx - \overline{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p-2} u v dx = 0, \tag{3}$$

pour tout $v \in W$ où $\overline{\lambda}$ est la valeur propre principale du problème (1). Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 1.4.10. *Supposons que les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3) *et* (H_4) *sont satisfaites, alors le problème* (3) *admet au moins une solution faible non triviale.*

On définie les opérateurs J, G, H, $F : W \to W'$ par

$$\begin{aligned}
\langle J(u), v \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx \\
\langle G(u), v \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u . \nabla v dx \\
\langle H(u), v \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p-2} u v dx \\
\langle F(u), v \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,u) v dx, \quad \forall u, v \in W.
\end{aligned}$$

On pose

$$T := J + G - \overline{\lambda} H + F.$$

L'outil essentiel pour démontrer ce résultat est l'application du Théorème Leray-Lions à l'opérateur T.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication :

N. Benouhiba and Z. Belyacine, ON THE SOLUTIONS OF THE (p,q)-LAPLACIAN PROBLEM AT RESONANCE, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications Volume 77 2013, 74-81.

URL: www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X12003665

Résultats principaux du chapitre 6 : dans le sixième chapitre on va étudier la régularité de la solution faible $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ des deux problèmes (1) et (2). Nous supposons que $g(x,u) = -f(x,u) + \lambda g(x)|u|^{p-2}u$ vérifie $g(x,t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction de Caratheodory ; $g(x,t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ et $g(x,u) \equiv 0$, pour $t < 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que $|g(x,t)| \leq \varepsilon |t|^{q-1} + C(\varepsilon)|t|^{p^*-1}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, où $p^* = \frac{NP}{N-P}$ si $N > p$, $0 < p^* < +\infty$ si $N \leq p$.

Théorème 1.4.11. *1. Supposons que (H_1), (H_2) et (H_3) sont vérifiées alors u est localement bornée, i.e. $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

2. $u(x)$ est décroissante quand $|x| \to +\infty$, i.e., $\exists C > 0$, $\varepsilon > 0$, $R > 0$ tel que

$$|u(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|} \text{ quand } |x| \geq R.$$

Principaux résultats du chapitres 7 : dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à l'existence des solutions de l'équation elliptique non linéaire suivante

$$-\operatorname{div}(\psi(\nabla u)) = \lambda g(x)|u|^{p-2}u,\ x \in \mathbb{R}^N \tag{4}$$

où $1 < p < N$, $N \geq 3$,et $g(x)$ fonction mesurable positive. Nous allons prouver l'existence d'au moins une solution de l'équation (4) dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Dans ce cas on utilise le théorème de Col pour montrer que la solution faible de ce problème est le point critique de la fonctionnelle d'énergie.

Une formulation variationnelle de problème (4) est donnée par

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ tel que} \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\nabla u\right) \nabla v dx = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} g\left(x\right) |u|^{p-2} uv dx, \forall v \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \end{cases}$$

Ce problème est équivalent à trouver des solutions non triviales u de l'équation

$$I'(u) = 0 \text{ dans } W^{-1,p'}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

où I est la fonctionnelle d'énergie donnée par

$$I(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Psi\left(\nabla u\right) dx - \frac{\lambda}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g\left(x\right) |u|^p \, dx \tag{5}$$

et $\Psi\left(t\right) = \int\limits_0^t \psi\left(s\right) ds.$

Nous étudions, dans ce travail les points critiques de (5) avec les hypothèses suivantes

(H_1) Supposons que $1 < q < p < q^*$ et $0 \leq g \in L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

(H_2) L'application $\Psi \in C^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$.

(H_3) Il existe $c_0 > 0$, $T > 0$ et $M > 0$ tels que $|\Psi\left(t\right)| \geq c_0 |t|^p$, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ et $|\psi\left(s\right)| \leq T|s|^{p-1}$ pour tout $s \in \mathbb{R}^N$.

Le principal résultat de ce travail est le théorème qui suit.

Théorème 1.4.12. *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *l'équation* (4) *admet une solution faible.*

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Définitions

Nous donnons dans cette section quelques définitions utiles à la lecture de cette thèse.

Définition 2.1.1. Soient V une partie d'un espace de Banach X et $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in V$ et $z \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tz \in V$, on dit que F admet (au point u) une dérivée dans la direction z si la limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t} \tag{2.1.1}$$

existe. On notera cette limite $F'(u)$.

On notera qu'une fonction F peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $z \in X$, sans pour autant être continue. Lorsque la dérivée directionnelle de F existe pour certains $z \in X$ on introduit la notion de dérivée au sens de Gâteaux.

Définition 2.1.2. Soient V une partie d'un espace de Banach X *et* $F : V \to \mathbb{R}$. Si $u \in V$, on dit que F est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-Différentiable en u), s'il existe $l \in X^{'}$ tel que dans chaque direction z où $F(u + tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F_z^{'}(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t} = \langle l, z \rangle \tag{2.1.2}$$

On posera $F^{'}(u) := l$.

On remarquera de nouveau qu'une fonction G-dérivable n'est pas nécessairement continue. On introduit enfin la dérivée classique (ou F-dérivée au sens de Fréchet).

Définition 2.1.3. Soient X espace de Banach, V un ouvert de X et $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $u \in V$, on dit que F est différentiable (ou dérivable) en u (au sens de Fréchet) s'il existe $l \in X^{'}$, tel que :

$$\forall v \in V, \qquad F(v) - F(u) = \langle l, v - u \rangle + o \langle v - u \rangle . \tag{2.1.3}$$

Si F est différentiable, l est unique et on note $F^{'}(u) := l$. L'ensemble des fonctions différentiables de $V \to \mathbb{R}$ sera noté $C^1(V, \mathbb{R})$.

On notera que si F est différentiable au sens de Fréchet, alors F est continu. En général il est plus commode de travailler avec la notion de G-dérivée, car on n'à qu'a considérer l'application $t \to F(u + tw)$ (pour w fixé dans X) définie dans un intervalle $[0, \varepsilon[$. C'est pour ne pas alourdir ce qui suit que l'on n'introduira pas des notions différents pour distinguer la G-dérivée et la dérivée de Fréchet.

Définition 2.1.4. Soint X un espace de Banach, $V \subset X$ un ouvert et $F \in$

$C^1(V,\mathbb{R})$. On dit que $u \in V$ est un **point critique** de F, si $F'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de F .

Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de F s'il existe $u \in V$ tel que $F(u) = c$ et $F'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de F.

Définition 2.1.5. Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X,\mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes

$$G := \{v \in X; F(v) = 0\}. \tag{2.1.4}$$

On suppose que pour tout $u \in G$, on a $F^{'}(u) \neq 0$. Si $J \in C^1(X,\mathbb{R})$(ou bien de classe C^1 sur un voisinage de G ou encore C^1sur G) on dit que $c \in \mathbb{R}$ est **v**aleur critique de J sur G s'il existe $u \in G$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $J(u) = c$ et $J'(u) = \lambda\ F^{'}(u)$. Le point u est un point critique de J sur G et le réel λ est appelé **multiplicateur de Lagrange** pour la valeur critique c (ou le point critique u).

Lorsque X est un espace fonctionnel de l'équation $J^{'}(u) = \lambda\ F^{'}(u)$ qui correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J^{'}(u) = \lambda\ F^{'}(u)$ est l'équation d'Euler-Lagrange (ou l'équation d'Euler) satisfaite par le point critique u sur la contrainte G.

Définition 2.1.6. Soient A, B deux opérateurs non linéaire définis sur un espace de Banach X.

On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur$A$ par rapport à l'opérateur B s'il existe $u \in X$, et $u \not\equiv 0$ tel que

$$Au = \lambda Bu$$

Définition 2.1.7. (Fonction de Carathéodory) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Une fonction f de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite de Carathéodory, si elle vérifie :

1. L'application : $t \to f(x,t)$ est continue p.p. $x \in \Omega$.
2. L'application : $t \to f(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1.8. (Fonction semi continue inférieurement (s.c.i)) Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Elle est dite faiblement semi continue inférieurement (s.c.i.) en x si, pour toute suite $\{x_n\}$ telle que

x_n converge faiblement vers x, on a :

$$J(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(x_n).$$

Définition 2.1.9. (opérateur de Nemitskii) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit f : $\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. On appelle opérateur de Nemitskii associé à f l'application T_f défini par

$$(T_f u)(x) = f(x, u(x))$$

Définition 2.1.10. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On dit que f_n converge (fortement) vers f dans L^p, et on note $f_n \to f$ L^p, si $f_n, f \in L^p$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

Définition 2.1.11. Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que f_n converge (faiblement) vers f dans L^p, et on note $f_n \rightharpoonup f$ L^p, si $f_n, f \in L^p$ et si

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}(f_n(x)-f(x))\,\phi(x)\,dx=0,\qquad \forall\phi\in L^{p'}(\Omega).$$

Un outil essentiel dans le calcul de la variation est la compacité des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier pour chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non des valeurs critiques. Elle sera par contre un outil essentiel pour montrer cette existence dans plusieurs cas.

Définition 2.1.12. (Condition de Palais-Smale)Soit X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau $c \in \mathbb{R}$) si de toute suite (u_n) de X telle que

$$J(u_n)\to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n)\to 0 \text{ dans } X', \tag{2.1.5}$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque 2.1.13. **i)** *La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.*

ii) *Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si $c = \inf_X J$, on peut parfaitement avoir une suite minimisante u_n telle que $J'(u_n) \nrightarrow 0$. Il suffit*

de prendre $X = \mathbb{R}$, $J(u) = sinu^2, c = -1$ *et* $u_n = \left(\frac{3\pi}{2} + n2\pi + \frac{1}{\sqrt{n2\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$.
On a $J(u_n) \to -1 et\ J'(u_n) \to 2$.

2.2 Espace de Sobolev

Dans cette section nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les espaces "naturels" de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles des équations aux dérivées partielles. Physiquement les espaces de Sobolev s'interprètent comme des espaces de fonctions d'énergie finie. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, ou pour la démonstration des résultats que nous annonçons ici, on pourra consulter par exemple H. Brezis [19, chapitres 8 et 9] et R.A. Adams [1].

Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné ou pas, régulier ou pas et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.2.1. Soit $k > 1$ un entier et p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$. On définit

$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ; | \, \forall\alpha$ multi-indice avec $|\alpha| \leq k \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tel que $\int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega g_\alpha\varphi \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \, \}$.

Notons que par récurrence, On a

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{k-1,p}(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega) \qquad \forall i = 1, 2, 3, ..., N\right\}.$$

L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposition 2.2.2. [19] *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ *est réflexif si* $1 < p < \infty$, *il est séparable si* $1 \leq p < \infty$.

Les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on note par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 2.2.3. *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$.*

Remarque 2.2.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$, alors on peut identifier $W_0^{1,p}(\Omega)$ à l'ensemble des fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega)$ qui sont nulles presque partout sur le bord de Ω*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \tag{2.2.1}$$

Si $p = \infty$, alors l'assertion précédente est fausse. En revanche, la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ est équivalente à $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$

Injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

Théorème 2.2.5. (*Inégalité de Sobolev* [1])

Soit Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < N$. Alors il existe une constante C (dépendant de N et p)telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pour l'espace $W^{k,p}(\Omega)$, on a le résultat suivant.

Théorème 2.2.6. *Soit* Ω *est un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^N$. *Soient* $k \geq 1$ *et* $p \in [1, +\infty[$. *Alors*

1. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, *on a* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$.
2. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$, *on a* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* $q \in [p, +\infty[$, *(mais pas pour* $q = +\infty$
3. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$, *on a* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. *Dans ce cas, si* $k - \frac{N}{p} > 0$ *n'est pas un entier, alors* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{s,\beta}(\Omega)$, *où*

   $s = k - \frac{N}{p} - s$, *les injections restent valables si* $k = 1$ *et* $p \in [1, +\infty[$.

   Toutes ces injections sont continues.

   Sans hypothèse de régularité sur Ω, *les injections sont vraies localement :* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$, *elles restent globalement vraies si on remplace* $W^{k,p}(\Omega)$ *par* $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Concernant la compacité des injections précédentes, on a le théorème suivant.

Théorème 2.2.7. (*Théorème de Rellich-Kondrachov* [1])

On suppose que Ω *est un ouvert borné de classe* C^1 *dans* $\mathbb{R}^N$. *On a*

Si $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, *pour tout* $q \in [1, p^*[$,

Si $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, *pour tout* $q \in [1, +\infty[$.

Pour tout $q \in]N, +\infty[$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

La condition sur le domaine est nécessaire, si Ω *n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes en général comme le démontre le contre exemple suivant : Soit* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tel que,* $\phi \geq 0$, *on pose* $\phi_n(x) = \phi(x + ne)$, $e = (1, 1, 1, ..., 1)$, *il est facile de voir que* $\phi_n \to 0$ *p.p. et* $\|\phi_n\|_{L^q} = \|\phi\|_{L^q} > 0$.

Théorème 2.2.8. *(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg* [1]*)*

Soit $1 \leq p < N$, *alors* $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et il existe une constante* $C = C(p, N)$ *telle que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Soit q *tel que* $p \leq q \leq p^*$. *Alors* $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right), \forall q \in [p, p^*]$ *avec une injection continue.*

(Le cas limite $p = N$ *) on a* $W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right), \forall q \in [N, +\infty[$ *avec une injection continue.*

(Morrey) Soit $p > N$ *alors* $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ *avec une injection continue. De plus, pour tout* $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *on a* $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p}$ *p.p.* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *avec* $\alpha = 1 - \frac{1}{N}$ *et* C *est une constante dépendant seulement de* p *et* N.

Chapitre 3

Méthodes de résolution des E.D.P non linéaires

En analyse fonctionnelle non linéaire, l'étude des E.D.P non linéaires se fait par méthodes variationnelles ou par méthodes topologiques.

3.1 Méthode variationnelle (Méthode des points critiqu

L'approche variationnelle des équations aux dérivées partielles non linéaire est basée sur la notion de la solution faible qui est associée à chaque problème.

Cette solution est en fait un point critique de la fonctionnelle associée au problème. Les solutions des problèmes différentiels avec une structure variationnelle peuvent être des points critiques autres que les minimums ou les maximums.

Un outil essentiel pour l'étude de ce genre de points critiques est la technique de déformation introduite en 1934 par Ljusternik and Schnirelman. La technique de déformation est efficace pour obtenir les points critiques des fonctionnelles qui ne sont pas bornées inférieurement.

3.1.1 Le lemme de déformation

Soit V un espace de Banach et $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On pose pour $c \in \mathbb{R}$

$$\{J \leq c\} = \{u \in V; J(u) \leq c\}.$$

De façon analogue on définit les ensembles, $\{J < c\}$, $\{J \geq c\}$, $\{J > c\}$ est les ensembles de niveau $\{J = a\}$.

Le point crucial dans l'existence des points critiques est la différence topologique entre les ensembles $\{J < c\}$ et $\{J \leq c + \varepsilon\}$ pour certains valeurs de $c \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.1.1. *(Lemme de déformation) Soit V un espace de Banach et $J : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 vérifiant la condition de Palais-Smale. Soit $c \in R$ une valeur régulière de J. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il existe un homéomorphisme $\eta : V \to V$ satisfaisant*

i) Pour tout $u \in \{J \leq c - \varepsilon_0\} \cup \{J \geq c + \varepsilon_0\}$, on a $\eta(u) = u$,

ii) On a $\eta(\{J \leq c + \varepsilon\}) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$.

Démonstration. On commence par la démonstration dans le cas où V est un espace de Hilbert et J est de classe C^2. Comme V est un espace de Hilbert, on identifie V et V' par l'intermédiaire du produit scalaire et l'on confond donc différentielle et gradient.

Soit c une valeur régulière de J et montrons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\|DJ(u)\|_V \geq \delta$ pour tout $u \in \{c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0\}$. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $u_n \in \{c - 1/n \leq J \leq c + 1/n\}$ telle que $\|DJ(u_n)\|_V \to 0$. Comme J satisfait la condition de Palais-Smale, on peut en extraire une sous-suite convergente vers un certain u. Par continuité de J, il vient $J(u) = c$ et par continuité de DJ, il vient $DJ(u) = 0$, en d'autres termes, c est une valeur critique, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Prenons maintenant $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Les ensembles

$$A = \{J \leq c - \varepsilon_0\} \cup \{J \geq c + \varepsilon_0\} \text{ et } B = \{c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon\}$$

sont fermés et disjoints, donc la fonction

$$\gamma(u) = \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}$$

est telle que $0 \leq \gamma(u) \leq 1$, $\gamma(u) = 0$ ssi $u \in A$ et $\gamma(u) = 1$ ssi $u \in B$. De plus, cette fonction est localement lipschitzienne sur V. En effet, la fonction $u \to d(u, A) + d(u, B)$ est localement minorée. Pour le voir, on remarque que si $u \in V \backslash B$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(u, 2r) \subset V \backslash B$ puisque B est fermé, donc $d(v, A) + d(v, B) \geq r$ sur la boule $B(u, r)$. Si $u \in B$, alors $u \in V \backslash A$ et le même raisonnement s'applique. Par conséquent, pour tout couple $v, w \in B(u, r)$, on a

$$\begin{aligned} |\gamma(v) - \gamma(w)| &\leq \frac{|d(v, A) - d(w, A)|}{d(v, A) + d(v, B)} + d(w, A) \left| \frac{1}{d(v, A) + d(v, B)} - \frac{1}{d(w, A) + d(w, B)} \right| \\ &\leq \frac{1}{r} |d(v, A) - d(w, A)| + \frac{sup_{B(u,r)} d(w, A)}{r^2} \left[|d(v, A) - d(w, A)| + |d(v, B) - d \right. \\ &\leq (\frac{1}{r} + \frac{2(d(u, A) + r)r}{2}) \left\| v - w \right\|_V , \end{aligned}$$

puisque l'application $v \to d(v, A)$ est 1-lipschitzienne.

Posons maintenant,

$$\Phi(u) = -\gamma(u)\frac{DJ(u)}{max(\|DJ(u)\|_V, \delta)}.$$

Cette application est bien définie de V dans V. On vérifie sans difficulté qu'elle est localement lipschitzienne (car DJ est de classe C^1) et telle que $\|\Phi(u)\|_V \leq 1$ pour tout u. De plus, on a $\Phi(u) = 0$ sur A (et $\Phi(u) = -DJ(u)/\|DJ(u)\|_V$ sur B). Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \Phi(z), \\ z(0) = u, \end{cases}$$

admet pour tout $u \in V$ une solution unique $t \to z(t)$ définie sur un intervalle $]t_{min}, t_{max}[$. Comme le second membre est borné, on a en fait $t_{min} = -\infty$ et $t_{max} = +\infty$. Posons $\eta_t(u) = z(t)$. Le théorème de dépendance continue de la solution d'une EDO par rapport à la donnée initiale montre que η_t est localement lipschitzienne pour tout t. De plus, toujours par Cauchy-Lipschitz, on a la propriété de semi-groupe

$$\eta_t(\eta_s(u)) = \eta_{t+s}(u).$$

Il en découle que η_t est inversible et que son inverse est η_{-t} , qui est aussi localement lipschitzienne. On a ainsi montré que η_t est un homéomorphisme de V sur V pour tout t.

Remarquons maintenant que pour $u \in A$, on a $\eta_t(u) = u$ pour tout t puisque $\Phi(u) = 0$. On va pour conclure choisir une valeur de t appropriée. Tout d'abord, on remarque que J est décroissante le long des trajectoires $\eta_t(u)$. En effet

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{dt}J(\eta_t(u)) &= \left(DJ(\eta_t(u))|\frac{d}{dt}\eta_t(u)\right) = (DJ(\eta_t(u))|\Phi(\eta_t(u))) \\
&= -\gamma(\eta_t(u))\frac{\|DJ(\eta t(u))\|_V^2}{max(\|DJ(\eta_t(u))\|_V, \delta)} \leq 0.
\end{aligned}
$$

En particulier, si $u \in \{J \leq c - \varepsilon\}$, on a $J(\eta_t(u)) \leq c - \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. Or l'ensemble qui nous intéresse peut s'écrire $\{J \leq c + \varepsilon\} = \{J \leq c - \varepsilon\} \cup B$. Il suffit donc de s'intéresser à l'ensemble $\eta_t(B)$. Soit donc $u \in B$. Comme la fonction $t \to J(\eta_t(u))$ est continue décroissante, il existe un premier instant $t_0 \geq 0$ (dépendant de u) tel que $J(\eta_{t_0}(u)) = c - \varepsilon$ (avec $t_0 = +\infty$ si on n'atteint jamais cette valeur). Donc, pour tout $0 \leq t \leq t_0$, on a $\eta_t(u) \in B$, d'où

$$
\frac{d}{dt}J(\eta_t(u)) = -\|DJ(\varepsilon_t(u))\|_V \leq -\delta.
$$

Par conséquent, en intégrant cette inégalité, il vient

$$
J(\eta_{t_0}(u)) - J(u) \leq -\delta_{t_0},
$$

d'où

$$
t_0 \leq \frac{1}{\delta}\left(J(u) - J(\eta_{t_0}(u))\right) \leq \frac{1}{\delta}(c + \varepsilon - (c - \varepsilon)) = \frac{2\varepsilon}{\delta}.
$$

En d'autres termes, on a montré que pour$t = 2\varepsilon/\delta, \eta_t(B) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$, ce qui conclut la démonstration. □

Remarque 3.1.2. *i) On a démontré un peu plus que ce qui est affirmé dans le lemme de déformation : il s'agit non seulement d'un homéomorphisme, mais d'une homotopie (η_t dépend continûment de t).*

ii) Il existe de nombreuses variantes du lemme de déformation. Par exemple, on peut imposer que $\eta(\{J \leq c+\varepsilon\}) = \{J \leq c-\varepsilon\}$.

iii) Le lemme de déformation dépend de façon cruciale de la condition de Palais-Smale. Considérons la fonction $J(x) = \frac{x}{1+x^2}$ *sur* $V = \mathbb{R}$. *Elle ne satisfait pas la condition de Palais-Smale en* $c = 0$. *De plus,* $c = 0$ *est une valeur régulière, mais* $\{J \leq \varepsilon\}$ *n'est certainement pas homéomorphe à un sous-ensemble de* $\{J \leq -\varepsilon\}$ *car ce dernier est compact, alors que* $\{J \leq \varepsilon\}$ *ne l'est pas.*

Dans le cas où V *n'est pas un espace de Hilbert, on ne peut pas identifier* V' *et* V *et la démonstration, qui a besoin d'un champ de vecteurs dans* V *comme second membre de l'EDO ne fonctionne pas telle quelle. Même si* V *est un espace de Hilbert, mais* J *est seulement de classe* C^1, *alors ce second membre n'est pas localement lipschitzien, et on ne peut donc pas appliquer le théorème de Cauchy Lipschitz. Dans ces deux cas, on remplace dans la démonstration ci-dessus (définition de la fonction* Φ*) le gradient de* J *par un pseudo-gradient, dont nous indiquons brièvement la construction.*

Définition 3.1.3. Soit V un espace de Banach et $J \in C^1(V; R)$. On dit que $v \in V$ est un pseudo-gradient de J en u si on a

$$\|v\|_V \leq 2\,\|DJ(u)\|_{V'} \text{ et } \langle DJ(u), v\rangle \geq \|DJ(u)\|_{V'}^2 \tag{3.1.1}$$

Soit V_r l'ensemble des points réguliers de J. Une application $v : V_r \to V$ est un champ de pseudo-gradient de J si elle est localement lipschitzienne et si pour tout $u, v(u)$ est un pseudo-gradient de J en u.

Lemme 3.1.4. *Soit* V *un espace de Banach et* $J \in C^1(V; \mathbb{R})$. *Il existe un champ de pseudo-gradient de* J.

Démonstration. Soit $u \in V_r$. On va d'abord montrer l'existence d'un pseudo gradient v_u en u. Pour cela, on note que, comme par définition de la norme duale, $\|DJ(u)\|_{V'} = \underset{\|v\|_V=1}{sup} \langle DJ(u), v\rangle \neq 0$, il existe donc $w_u \in V$ tel que $\|w_u\|_V = 1$ et $\langle DJ(u), v\rangle > \frac{2}{3}\|DJ(u)\|_{V'}$. Posant alors $v_u = \frac{2}{3}\|DJ(u)\|_{V'} w_u$, il vient

$$\|v_u\|_V = \frac{2}{3}\|DJ(u)\|_{V'} < 2\|DJ(u)\|_{V'} \text{ et } \langle DJ(u), v_u\rangle > \|DJ(u)\|^2_{V'}.$$

Comme les inégalités ci-dessus sont strictes, par continuité de DJ, il existe un ouvert Ω_u tel que pour tout $z \in \Omega_u$

$$\|v_u\|_V \leq 2\|DJ(z)\|_{V'} \text{ et } \langle DJ(z), v_u\rangle > \|DJ(z)\|^2_{V'}.$$

En d'autres termes, v_u est un pseudo-gradient en tout point z de Ω_u. Remarquons que comme $v_u \neq 0$, $\Omega_u \subset V_r$ d'après la première inégalité ci-dessus. On a donc construit un recouvrement ouvert de $V_r = \cup_{u\in V_r}\Omega_u$ avec un pseudo-gradient v_u constant dans chaque Ω_u. Il s'agit de recoller ces vecteurs constants en un champ localement lipschitzien.

Pour cela, on utilise le fait que tout espace métrique est compact. Ceci signifie que tout recouvrement ouvert admet un raffinement ouvert localement fini. Dans notre contexte, ceci se traduit par l'existence d'un autre recouvrement ouvert de V_r, $\{\omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $u_\lambda \in V_r$ tel que $\omega_\lambda \subset \Omega_{u_\lambda}$ et pour tout point u de V_r, il existe un voisinage ouvert O de u tel que $O \cap \omega_\lambda = \emptyset$ sauf pour un nombre fini d'indices $\lambda \in \Lambda$, i.e., on recouvre localement avec un nombre fini d'ouverts ω_λ.

Posons alors $\Psi_\lambda(u) = d(u, V_r \backslash \omega_\lambda)$. Alors, Ψ_λ est 1-lipschitzienne, le support de Ψ_λ est exactement $\overline{\omega}_\lambda$ et Ψ_λ est localement bornée inférieurement par un nombre strictement positif dans ω_λ car si $B(u,r) \subset \omega_\lambda$, alors $\Psi_\lambda \geq r$ sur $B(u,r)$. De plus, la somme $\sum_{\mu\in\Lambda} \Psi_\mu$ est localement finie, donc localement lipschitzienne et localement bornée inférieurement par un nombre strictement positif à cause du fait que $\{\omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouvrement de V_r. Si l'on pose sur V_r,

$$\theta_\lambda = \frac{\Psi_\lambda}{\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \Psi_\mu},$$

on voit ainsi que $0 \leq \theta_\lambda \leq 1$, $\sum_{\mu\in\Lambda} \theta_\mu = 1$, $supp\theta_\lambda = \overline{\omega}_\lambda$ et θ_λ est localement lipschitzienne.

On peut maintenant définir

$$v\left(u\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \theta_\lambda\left(u\right) v_{u_\lambda}.$$

Cette somme est localement finie, donc bien définie et localement lipschitzienne. En tout point u, c'est une combinaison convexe d'un nombre fini de pseudo gradients en u. En effet, $\theta_\lambda\left(u\right) > 0$ si et seulement si $u \in \omega_\lambda$, avec $\omega_\lambda \subset \Omega_{u_\lambda}$, ensemble où v_{u_λ} est un pseudo-gradient (constant). Or il est clair que toute combinaison convexe de pseudo-gradients est un pseudo-gradient, ce qui termine la démonstration. $\square$

3.1.2 Principe du Min-Max

Le lemme de déformation permet d'avoir une caractérisation topologique des valeurs régulières exprimée seulement en termes des valeurs prises par la fonctionnelle et non à l'aide de sa différentielle. On le met en oeuvre à travers le principe du min-max qui suit. Pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 > 0$, on introduit un ensemble d'homéomorphismes

$D_c^{\varepsilon_0} = \{$ η homéomorphismes de V satisfaisant la propriété i) du lemme de déformation $\}$

Théorème 3.1.5. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de V non vide et*

$$c = \underset{A \in \mathcal{A}}{inf} \underset{u \in A}{sup} J(u).$$

On suppose que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c tel que $c \in \mathbb{R}$ et qu'il existe α tel que $\mathcal{A}$ soit stable par $D_c^{\varepsilon_0}$ pour tout $\alpha \geq \varepsilon_0 > 0$, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{A}$, alors $\eta(A) \in \mathcal{A}$ pour tout $\eta \in D_c^{\varepsilon_0}$. Alors c est une valeur critique de J.

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que c soit une valeur régulière de J. En vu de la façon dont le paramètre ε_0 est introduit dans le lemme de déformation, on peut toujours supposer que celui-ci est inférieur à α. Soit ε un valeur associée au lemme de déformation. Par définition de la borne inférieure, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\underset{u \in A}{sup} J(u) \leq c + \varepsilon,$$

soit encore $A \subset \{J \leq c + \varepsilon\}$. Par le lemme de déformation, il existe $\eta \in D_c^{\varepsilon_0}$ tel que $\eta(\{J \leq c + \varepsilon\}) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$, d'où a fortiori $A' = \eta(A) \subset \{J \leq c - \varepsilon\}$, ce qui implique que $\underset{u \in A'}{sup} J(u) \leq c - \varepsilon$. Or, par hypothèse, $A' \in \mathcal{A}$ ce qui contredit la définition de c en tant que borne inférieure. $\square$

Remarque 3.1.6. *i) Si J vérifie la condition de Palais-Smale, $-J$ aussi. On a donc un résultat analogue pour les quantités*

$$d = \underset{A\in\mathcal{A}u\in A}{inf\,sup} J\left(u\right).$$

ii) Si on prend $\mathcal{A} = \{\{u\}, u \in V\}$, alors on retrouve le fait qu'une fonctionnelle qui vérifie la condition de Palais-Smale et qui est minorée atteint sa borne inférieure.

iii) L'utilisation du principe du min-max dépend du choix de $\mathcal{A}$. On prend en général des classes d'ensembles qui partagent un même invariant topologique (genre, catégorie, classe d'homotopie, etc.) susceptible d'être conservé par le flot η_t .

3.1.3 Le théorème du Col

Le première exemple de construction de valeur critique par le procédé de min-max est le théorème du Col de la montagne (en anglais Mountain Pass Theorem) qui exprime très bien le continu du résultat et sa démonstration : si on se trouve en un point A dans une cuvette à une altitude h_0, entourée de montagnes d'une altitude supérieure ou égale à $h > h_0$; si on veut aller à un point B située en dehors de la cuvette au delà des montagnes, et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B. Pour le trouver il suffit de prendre parmis tous les chemins allant de A à B, celui qui monte le moins haut.

Théorème 3.1.7. *Soient V un espace de Banach, $J \in C^1(V, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale et telle que* *i)* $J(0) = 0$,

ii) Il existe $R > 0$ *et* $a > 0$ *tels que si* $\|u\|_V = R$ *alors* $J(u) \geq a$,

iii) Il existe $v \in V, \|v\|_V > R$, *tel que* $J(v) < a$.

Alors J *admet une valeur critique* $c \geq a$. *De façon plus précise, si on pose*

$$\mathcal{A} := \{\varphi([0,1]); \varphi \in C([0,1]; V), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = v\},$$

et

$$c := \inf_{A \in \mathcal{A}} \max_{v \in A} J(v)$$

Alors c *est une valeur critique de* J.

Démonstration. Soient $\mathcal{A}$ (qui est évidemment non vide) et c définis comme dans le théorème. Tout d'abord notons que par connexité, pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'intersection $A \cap \{u \in V; \ \|u\| = R\}$ est non vide, et par conséquent $\max_{v \in A} J(v) \geq a$ et finalement $c \geq a$.

Si c n'est pas une valeur critique de J, avec les notations de lemme de déformation, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, On peut trouver $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$A := \varphi([0,1]), \qquad c \leq \max_{v \in A} J(v) \leq c + \varepsilon.$$

En posant $\psi(\tau) := \eta(1, \varphi(\tau))$ et $B := \psi([0,1])$, on a $B \in \mathcal{A}$. Mais la propriété du lemme de déformation implique que $B \subset [J(v) \leq c - \varepsilon]$, ce qui contredit le fait que, par définition de c, on a $\max_{v \in B} J(v) \geq c$. On en conclut que c est une valeur critique de J (et nous avons vu que $c \geq a$). $\square$

Remarque 3.1.8. **i)** *On comprend mieux pourquoi ce théorème s'appelle théorème du Col. Quand on interprète géométriquement ou plutôt géographiquement les conditions i) à iii) dans le cas où* $V = \mathbb{R}^2$ *et J(u) représente l'altitude dans* $\mathbb{R}^3$ *d'un point u. Les conditions i) et ii) signifient que l'origine est placée dans une cuvette entourée de montagnes d'altitude au moins a. La condition iii) signifie qu'au delà de ces montagnes existe un point v situé moins haut que lesdites montagnes, disons dans une vallée. Par conséquent, il est intuitivement clair que l'on peut joindre continûment* 0 *à v en passant par un col de montagne et la construction du min-max nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin et de choisir un chemin qui minimise cette altitude maximale.*

ii) *Il faut toute fois faire attention à l'intuition montagnarde. Ainsi, le théorème du Col est vrai même si J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale quand* $V = \mathbb{R}$ *(par le théorème des valeurs intermédiaires et celui de Rolle), par contre il est faux quand* $V = \mathbb{R}^2$*, c'est-à-dire qu'il peut ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte. Ainsi, par exemple, la fonction*

$$J(x_1, x_2) = x_1^2(1 + x_2)^3 + x_2^4$$

n'a clairement qu'un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$*, à savoir l'origine où* $J = 0$*. Ce point critique est un minimum local, donc une cuvette entourée de montagnes, et l'on peut descendre encore plus bas à l'extérieur de la cuvette car* $inf_{\mathbb{R}^2}\ J = -\infty$ *.C'est donc un exemple de fonction présentant un seul point critique, qui est un minimum local mais pas global.*

Comme il n'y a pas d'autre point critique que le minimum local, c'est donc qu'il n'existe pas de col pour sortir de la cuvette. Cela ne peut se produire que si les chemins minimisants partent vers l'infini. Cette perte de compacité est évidemment liée au fait que J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale au niveau de l'inf-max.

3.2 Méthode Topologique

Nous allons introduire ici une variante du théorème des opérateurs monotones.

3.2.1 Théorème de Leray-Lions

Théorème 3.2.1. (*Leray-Lions*) *Soit X espace de Banach réel réflexive. Soit $T : X \to X^*$ un opérateur qui vérifie les conditions suivantes*

(*i*) *T est borné.*

(*ii*) *T est semi-continu.*

(*iii*) *T est coercive.*

De plus, on suppose qu'il existe une application bornée $\Phi : X \times X \to X^*$ telle que

(*iv*) $\Phi(u, u) = T(u)\ \forall u \in X$;

(*v*) *$\forall u, w, h \in X$ et toute suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ des nombres réels telle que $t_n \to 0$, nous avons*

$$\Phi(u + t_n h, w) \rightharpoonup \Phi(u, w);$$

(*vi*) *$\forall u, w, h \in X$ on a $\langle \Phi(u, u) - \Phi(u, w), u - w \rangle \geq 0$;*

(vii) si $u_n \rightharpoonup u$ *et*

$$\lim_{n \rightharpoonup \infty} \langle \Phi(u_n, u_n) - \Phi(u, u_n), u_n - u \rangle = 0;$$

alors on a

$$\Phi(w, u_n) \rightharpoonup \Phi(w, u) \ \ \forall w \in X;$$

(viii) si $w \in X,\ u_n \rightharpoonup u,\ \Phi(w, u_n) \rightharpoonup z,$ *alors*

$$\lim_{n \rightharpoonup \infty} \langle \Phi(w, u_n), u_n \rangle = \langle z, u \rangle.$$

Alors l'équation

$$T(u) = f^*$$

admet au moins une solution $u \in X$ *pour tout* $f^* \in X^*$.

Démonstration. On divise la preuve en huit étapes.

Etape 1 : Sans perte de la généralité on peut démontrer le théorème pour l'équation

$$T(u) = 0. \tag{3.2.1}$$

Etape 2 : On construit une « approximation de l'équation (3.2.1) de dimension infinie par une équation dans un espace de dimension finie ». Plus précisément : soit Λ est une famille de tous les sous-espaces de dimension finie dans l'espace X. Si $F \in \Lambda$, définie l'opérateur $j_F : F \to X$ par

$$j_F(u) = u.$$

Évidemment j_F est linéaire et continue sur F. Soit j_F^* est l'opérateur adjoint de j_F. Alors

$$j_F^* : X^* \to F^*$$

et pour $u \in F$, on pose

$$T_F(u) := j_F^*(T(u)).$$

Etape 3 : Depuis la continuité de l'opérateur linéaire et le fait que la convergence faible coïncide avec la convergence forte sur un sous-espace de dimension finie, il suit de (ii) que T_F est continu. On pose alors

$$c(r) := \inf_{\substack{u \in X \\ \|u\|=r}} \frac{\langle T(u), u \rangle}{\|u\|}.$$

Par la condition (iii), nous avons

$$\lim_{r \to \infty} c(r) = \infty,$$

i.e.,

$$\langle T_F(u), u \rangle = \langle T(u), j_F(u) \rangle = \langle T(u), u \rangle \geq c(\|u\|)\|u\| \tag{3.2.2}$$

est vérifié pour tout $u \in F$.

Etape 4 : On démontre que l'équation

$$T_F(u) = 0_{F^*} \tag{3.2.3}$$

admet au monis une solution $u_F \in F$.

En effet Soit X espace de Banach de dimension finie, soit $T : X \to X^*$. Supposons qu'il existe fonctions réelles $c = c(r)$, définies sur l'intervalle $(0, \infty)$, telle que

$\lim\limits_{r\to\infty} c(r) = \infty$ et que $\langle T(u), u\rangle \geq c(\|u\|)\|u\|$ verifies pour tout $u \in X$.

Alors $T(X) = X^*$, i.e., l'équation

$$T(u) = f^*$$

admet au moins une solution pour $f^* \in X^*$ (f^* est arbitraire).

Soit $f^* \in X^*$. Dans le cas quand $X = X^* = \mathbb{R}^N$ et $\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^N}$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$, il existe $r > 0$ tel que l'opérateur $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définie par la relation

$$F(u) = T(u) - f^*$$

vérifie la supposition

$$\langle F(u), u\rangle_{\mathbb{R}^N} > 0 \quad \text{pour} \quad u \in \partial B(0; R) \quad \text{avec} \quad R > 0 \quad (R \text{ assez grande}). \tag{3.2.4}$$

On applique la propriété invariance de l'homotopie et on montre que (3.2.4) implique qu'il existe

$$F(u_0) = 0, \qquad \text{i.e.,} \qquad T(u_0) = f^*.$$

Etape 5 : $\exists r_0 > 0$ tel que

$$\|u_F\| \leq r_0$$

pour tout $F \in \Lambda$ et pour tout solution $u_F \in F$ de l'équation (3.2.3). En effet, si un tel r_0 n'existe pas, il y a une suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$des solutions de l'équation (3.2.3) avec $F = F_n$, $n = 1, 2$,..., telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} c\left(\|u_n\|\right) = \infty.$$

Ceci est une contradiction avec l'inégalité (3.2.2)

$$c\left(\|u_n\|\right)\|u_n\| \leq 0 = \left\langle T_F\left(u_n\right), u_n\right\rangle .$$

Etape 6 : Soit $F_0 \in \Lambda$ et

$$\Lambda_{F_0} = \left\{F \in \Lambda : F_0 \subset F\right\}.$$

On note par $\mathcal{U}_{F_0}$ ensemble de tous les éléments $u \in X$ qui sont les solutions de l'équation (3.2.3) pour $F \in \Lambda_{F_0}$. De plus, soit $\overline{\mathcal{U}_{F_0}^{w}}$ la fermeture faible de l'ensemble $\mathcal{U}_{F_0}$. Notons que $\overline{\mathcal{U}_{F_0}^{w}} \subset \overline{B\left(0; r_0\right)}$ pour tout $F_0 \in \Lambda$. Soit $\Lambda_F \subset \Lambda$ est une sous-suite finie de Λ. Alors

$$\bigcap_{F_0\in\Lambda_F} \overline{\mathcal{U}_{F_0}^{w}} \neq \varnothing.$$

En effet, soit $\Lambda_F = \left\{F_0^i \in \Lambda : \dim F_0^i < \infty,\ i = 1,\ \ldots\ ,n\right\}$. Alors chacun des ensembles $\mathcal{U}_{F_0^i}$ contiens tous les solutions $u \in X$ de l'équation (3.2.3) dans $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} F_0^i$. Puisque $\overline{B\left(0; r_0\right)}$ est un espace topologique compact, on a

$$\bigcap_{F_0\in\Lambda} \overline{\mathcal{U}_{F_0}^{w}} \neq \varnothing.$$

Donc il existe

$$u_0 \in \bigcap_{F_0 \in \Lambda} \overline{\mathcal{U}_{F_0}^w}.$$

Dans toutes les deux étapes nous montrons que u_0 est une solution de l'équation (3.2.1).

Etape 7 :Soit $v \in X$. On choisit $F_0 \in \Lambda$ tel que $v \in F_0$, et soit $F \in \Lambda_{F_0}$. Si $u_F \in F$ est une solution de l'équation $(3.2.3)$, alors la condition (iv) implique que

$0 \leq \langle T(v) - T(u_F), v - u_F \rangle = \langle T(v), v - u_F \rangle - \langle T(u_F), v - u_F \rangle$

$= \langle T(v), v - u_F \rangle - \langle T(u_F), j_F(v - u_F) \rangle = \langle T(v), v - u_F \rangle - \langle T_F(u_F), v - u_F \rangle$

$= \langle T(v), v - u_F \rangle.$

Donc

$$\langle T(v), v - u \rangle \geq 0 \quad \text{et vérifier pour tout} \quad u \in \mathcal{U}_{F_0} \quad (\text{ tel que } u \text{ arbitraire}). \tag{3.2.5}$$

Par la définition de la topologie faible, l'équation (3.2.5) est valable pour $u \in \overline{\mathcal{U}_{F_0}^w}$. Particulièrement, alors on a

$$\langle T(v), v - u_0 \rangle \geq 0. \tag{3.2.6}$$

Etape 8 : On choisie $w \in X$, $t > 0$, et on pose $v = u_0 + tw$ dans l'inégalité (3.2.6). Alors

$$0 \leq \langle T(u_0 + tw), tw \rangle = t \langle T(u_0 + tw), w \rangle, \qquad \text{i.e.,} \quad 0 \leq \langle T(u_0 + tw), w \rangle.$$

Quand on passe à la limite lorsque $t \to 0^+$, en appliquant la condition (ii) on obtient l'inégalité

$$\langle T(u_0), w\rangle \geq 0 \tag{3.2.7}$$

pour tout $w \in X$. On remplace l'élément w dans l'équation par l'élément $(-w)$, on trouve

$$\langle T(u_0), -w\rangle = \langle T(u_0), w\rangle, \tag{3.2.8}$$

et donc

$$\langle T(u_0), w\rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad w \in X, \quad \text{i.e.,} \quad T(u_0) = 0.$$

$\square$

Chapitre 4

Valeurs propres pour le problème (p,q)-Laplacien dans $\mathbb{R}^N$

Ce chapitre est dévoué à l'étude d'un problème aux valeurs propres lié à l'opérateur (p,q)-Laplacien avec un poids dans $\mathbb{R}^N$. L'équation modèle a la forme suivante

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda g(x) |u|^{p-2} u, \; x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.0.1}$$

Dans l'équation (4.0.1), les réels p et q sont tels que $1 < p, q < \infty$,$N \geq 3$ et g est le poids qui est une fonction mesurable positive. Le paramètre λ est une valeur propre et u est la solution faible recherchée.

On introduit l'espace des solutions $W = W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ muni de la norme

$$\|u\| = (\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} + (\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q \, dx)^{\frac{1}{q}}.$$

L'espace W est un espace de Banach réflexif et séparable.

Une fonction $u \in W$ est dite solution faible de l'équation (4.0.1) si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p-2} uv dx = 0 \,, \forall v \in W.$$

Dans la section 4.1, nous présentons des résultats sur l'existence des solutions faibles non triviales du problème (4.0.1) associées à des valeurs propres λ supérieurs à un seuil $\lambda^* > 0$. Dans la section 4.2, nous assurons l'existence d'une valeur propre principale et nous donnons sa caractérisation par un principe d'*inf*. Enfin, dans la section 4.3, nous démontrons l'unicité de cette valeur propre.

Pour atteindre les objectifs désirés, nous nous mettons sous les hypothèses suivantes.

Hypothèses. Nous supposons que

$$1 < q < p < q^* \tag{4.0.2}$$

et

$$0 \leq g \in L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{4.0.3}$$

avec $\alpha = \frac{p(1-t)}{1-\frac{pt}{p^*}}$, pour $t \in (0,1)$ (alors $0 < \alpha < p$).

On cherche à démontrer l'existence des solutions faibles du problème (4.0.1) qui sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{q} \|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx. \tag{4.0.4}$$

Proposition 4.0.2. *La fonctionnelle I est de classe C^1 sur W. Sa différentielle est donnée par :*

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p-2} uv dx, \forall v \in W. \tag{4.0.5}$$

Avant de démontrer cette proposition on a besoin du résultat suivant.

Lemme 4.0.3. *Pour tout $u \in W$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx \leq C \|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\left(B'_R\right)} \|u\|^{pt}_{1,p} \|u\|^{p(1-t)}_{1,q}. \tag{4.0.6}$$

Démonstration. On a par l'inégalité de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx \leq A_1 A_2$$

où $A_1 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^\alpha dx\right)^{\frac{p(1-t)}{\alpha}}$ et $A_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{pt}{p^*}}$.
Par l'injection de Sobolev on obtient

$$A_2 \leq C \|g\|_\infty \|u\|^{pt}_{1,p}. \tag{4.0.7}$$

On applique l'inégalité de Hölder pour l'estimation de A_1 et on obtient

$$A_1^{\frac{\alpha}{p(1-t)}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'} dx\right)^{\frac{1}{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q^*} dx\right)^{\frac{\alpha}{q^*}}. \tag{4.0.8}$$

Par l'injection de Sobolev nous concluons que

$$A_1 \leq C \|g\|^{p(1-t)}_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{p(1-t)}_{1,q}.$$

$\square$

Démonstration de la proposition 4.0.2. Tout d'abord, il est clair que les trois intégrales de l'équation (4.0.5) sont bien définies pour tout $u \in W$.

On définie les deux opérateurs

$$\langle J(u), v\rangle = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, v dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q \, v dx$$

$$\langle G(u), v\rangle = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p \, v dx, \qquad \forall u, v \in W.$$

et leurs dérivées

$$\left\langle J'(u), v\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot v dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \cdot v dx$$

$$\left\langle G'(u), v\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p-2} u \cdot v dx, \qquad \forall u, v \in W.$$

Comme J est trivialement de classe C^1 sur W (voir [29]), donc il reste à démontrer que G est de classe $C^1(W, \mathbb{R})$.

Existence de la dérivée de Gâteaux : Soit $u, v \in W$ et $0 < |t| < 1$. Alors par le théorème de la valeur intermédiaire on a :

$|G(u + tv) - G(u)| / |t| = \left|G'(u + t_0 v)\right| |v|$

et on a

$$\begin{aligned}\left|G'(u + t_0 v)\right| |v| &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u + t_0 v|^{p-2} |u + t_0 v| |v| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u + t_0 v|^{p-2} |u + t_0 v| |u + t_0 v| dx\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u + t_0 v|^p \, dx.$$

Par l'inégalité (4.0.6), on obtient

$$\left|G'(u + t_0 v)\right| |v| \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u + t_0 v|^p \, dx \leq C \|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}(B'_R)} \|u + t_0 v\|^{pt}_{1,p} \|u + t_0 v\|^{p(1-t)}_{1,q}$$

Continuité de la dérivée de Gâteaux :

Soit $(u_n) \subset W$ une suite faiblement convergente ($i.e. u_n \rightharpoonup u$), $R > 0$ et $C \in \mathbb{R}$.

Pour tout $v \in W$ on a

$\int_{\mathbb{R}^N} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx = \int_{B_R} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx + \int_{B'_R} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx.$

On a par l'inégalité de Hölder et l'hypothèse (4.0.3), on obtient

$$\left| \int_{B_R} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx \right| \leq C \|g\|_\infty \left(\int_{B_R} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{(p^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(p^*)'}} \left(\int_{B_R} |v|^{p^*} \right.$$

Donc par l'injection de Sobolev, on trouve

$$\left| \int_{B_R} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx \right| \leq C \|g\|_\infty \|v\| \left(\int_{B_R} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{(p^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(p^*)'}}.$$

Comme u_n converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors $(\chi_{B_R} u_n)$ converge faiblement vers $(\chi_{B_R} u)$ dans $W^{1,p}(B_R)$. Nous pouvons déduire que $(\chi_{B_R} u_n)$ converge fortement vers $(\chi_{B_R} u)$ dans $L^{(p^*)'(p-1)}(B_R)$ puisque $(p^*)'(p-1) < p^*$. Alors il existe une sous-suite, noté encore $(\chi_{B_R} u_n)$, et $h \in L^{(p^*)'(p-1)}(B_R)$ tel que $\chi_{B_R} u_n \to \chi_{B_R} u$ p.p. dans B_R quand $n \to \infty$ et $\forall n$, $|\chi_{B_R} u_n| \leq h$ p.p. dans B_R et $\chi_{B_R} |u_n|^{p-1} \leq h^{p-1}$ p.p. dans B_R. Par le théorème de Lebesgue il existe une autre sous-suite, noté encore $(\chi_{B_R} u_n)$, telle que $\chi_{B_R} |u_n|^{p-2} u_n \longrightarrow \chi_{B_R} |u|^{p-2} u$ fortement dans $L^{(p^*)'(p-1)}(B_R)$.

D'autre part par l'inégalité de Hölder on a pour tout $v \in W$

$$\left| \int_{B'_R} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx \right| \leq \left(\int_{B'_R} g \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{\alpha p^*}{(p-1) q^*}} v dx \right)^{\frac{(p-1) q^*}{\alpha p^*}}.$$

$$\cdot \left(\int_{B'_R} g\,|v|^{\left(\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}\right)'} dx \right)^{\frac{1}{\left(\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}\right)'}} .$$

En appliquant encore l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{B'_R} g\,|v|^{\left(\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}\right)'} dx &\leq \|g\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}(B'_R)}^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)/\left(\frac{\alpha}{\alpha p^*-(p-1)q^*}\right)'} \left(\int_{B'_R} g^{\frac{pq^*-\alpha p^*}{q^*-\alpha}} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha p^*-(p-1)q^*}} \\
&\leq C\,\|g\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}(B'_R)}^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)/\left(\frac{\alpha}{\alpha p^*-(p-1)q^*}\right)'} \|g\|_{\infty}^{\frac{pq^*-\alpha p^*}{q^*-\alpha}} \|v\|_{1,p}^{\frac{\alpha p^*}{\alpha p^*-(p-1)q^*}}
\end{aligned}$$

$$\left| \int_{B'_R} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx \right| \leq C\,\|g\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}(B'_R)}^{A} \|v\|$$

où $A = \dfrac{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\alpha}{\alpha p^*-(p-1)q^*}\right)'\left(\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}\right)'}$. Il vient que $\int_{B'_R} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx \to 0$ quand $R \longrightarrow \infty$ car $g \in L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Donc on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx = 0$. Par conséquent l'opérateur G est continu. □

4.1 Existence des valeurs propres

Afin de pouvoir appliquer les techniques de théorème du Col, il est tout d'abord important de démontrer que la fonctionnelle I satisfait la condition de Palais-Smale.

Lemme 4.1.1. *La fonctionnelle I vérifie la condition de Palais-Smale $(PS)_c$ au niveau $c \in \mathbb{R}$.*

La grande difficulté dans la démonstration de la condition de Palais-Smale est de démontrer que la suite est bornée dans W.

Démonstration. Soit $(u_n) \subset W$ une suite de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$. Ceci signifie que

$$I(u_n) \to c \text{ et } I'(u_n) \to 0 \text{ dans } W'.$$

Premièrement on démontre que la suite u_n est bornée dans W. Pour tout $v \in W$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle I'(u_n), v\rangle = 0 \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \langle I'(u_n), u_n\rangle = 0. \tag{4.1.1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_{1,q}^q = c$. On peut conclure que (u_n) est borné dans $W^{1,q}\left(\mathbb{R}^N\right)$. On pose maintenant

$$J(u_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \, dx - \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} g\, |u_n|^p \, dx.$$

Par la considération précédente, $J(u_n)$ est une suite réelle convergente. Alors, il existe $C > 0$ tel que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \, dx \leq C + \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} g\, |u_n|^p \, dx.$$

Comme la suite u_n dans $W^{1,q}\left(\mathbb{R}^N\right)$ on peut trouver par lemme 4.0.3 une constante positive, notée encore C, telle que

$$\|u_n\|_{1,p}^p \leq C\left(1 + \|u_n\|_{1,p}^{pt}\right). \tag{4.1.2}$$

On va supposer par contradiction que la suite u_n n'est pas bornée dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors $\|u_n\|_{1,p} \to +\infty$. Par l'inégalité (4.1.2), on obtient$\|u_n\|_{1,p}^{p(1-t)} \leq C(1 + \|u_n\|_{1,p}^{-pt})$.

D'après la supposition $0 < t < 1$ on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p}^{p(1-t)} \leq C$ ce qui est une contradiction. Par conséquence, u_n est bornée dans W. Il existe alors $u \in W$ tel que (u_n) converge faiblement vers u, i.e. $u_n \rightharpoonup u$.

Il est facile à démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u\rangle = 0. \tag{4.1.3}$$

On a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u)v dx = 0 \quad \forall v \in W. \tag{4.1.4}$$

Alors d'après (4.1.3) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)\, dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{q-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{q-2} \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)\, dx = 0.$$

On applique l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) (\nabla u_n - \nabla u)\, dx$$
$$\geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p)\, dx - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$- \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \cdot \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$
$$= \left(\|u_n\|_{1,p}^{p-1} + \|u\|_{1,p}^{p-1}\right) \left(\|u_n\|_{1,p} - \|u\|_{1,p}\right) \geq 0.$$

Comme la partie à gauche tend vers 0, alor $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p} = \|u\|_{1,p}$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et de la même façon on peut démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,q} = \|u\|_{1,q}$ dans $W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

La suite (u_n) étant faiblement convergente vers u dans W et comme l'espace W vérifie la propriété de Radon-Riesz alors u_n converge fortement vers u dans W. □

On va à présent démontrer que la fonctionnelle I vérifie la géométrie du Col.

Lemme 4.1.2. *1. Il existe $\rho, \beta > 0$ tels que $I(u) \geq \beta$ si $\|u\| = \rho$.*

2. Il existe $u_0 \in W$ avec $\|u\| > \rho$ et $I(u_0) < 0$.

Démonstration. 1. Soit $u \in W$, on pose $\rho = \|u\| = \rho_1 + \rho_2$ où $\rho_1 = \|u\|_{1,p}$, $\rho_2 = \|u\|_{1,q}$ et on a

$$I(u) \geq \frac{1}{p}\rho_1 + \frac{1}{q}\rho_2 - \frac{\lambda}{p} C \|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'} \rho_1^{pt} \rho_2^{q(1-t)}$$

$$\geq \frac{1}{p}\rho_1^{pt} \left(\rho_1^{p(1-t)} - \lambda C \|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'} \rho_2^{q(1-t)} \right).$$

On peut choisir $\rho_2 = \varepsilon$ et $\rho_1 = \left(1 + \lambda C \|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'} \varepsilon^{q(1-t)}\right)^{\frac{1}{p(1-t)}}$ pour petit $\varepsilon > 0$. Par conséquent

$$I(u) \geq \frac{1}{p} \left(1 + \lambda C \|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'} \varepsilon^{q(1-t)}\right)^{\frac{t}{(1-t)}} > 0$$

pour tout $u \in W$ tel que $\|u\| = \left(1 + \lambda C \|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'} \varepsilon^{q(1-t)}\right)^{\frac{1}{p(1-t)}} + \varepsilon.$

2. On note par φ la fonction propre normalisée associée à la première valeur propre λ_1 du p-Laplacien avec poids, i.e.

$$-\operatorname{div}\left(\nabla |\varphi|^{p-2} \nabla\varphi\right) = \lambda_1 g |\varphi|^{p-2} \varphi \text{ dans } \mathbb{R}$$

et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p \, dx = 1.$$

Donc

$$I(\tau\varphi) = \frac{\tau^p}{p} + \frac{\tau^q}{q} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^q \, dx - \frac{\lambda \tau^p}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g \, |\varphi|^p \, dx$$

et comme on a $\int\limits_{\mathbb{R}^N} g \, |\varphi|^p \, dx = \frac{1}{\lambda_1}$ on obtient

$$I(\tau\varphi) = \frac{\tau^p}{p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + \frac{\tau^q}{q} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^q \, dx.$$

On affirme que toute valeurs propres du problème (4.0.1) vérifie $\lambda > \lambda_1$. Alors $I(\tau\varphi) \to -\infty$ quand $\tau \to +\infty$. Par conséquent, il existe $\tau_0 > 0$ tel que $I(\tau_0\varphi) < 0$ et on pose $u_0 = \tau_0 \varphi$.

Nous revenons maintenant à l'affirmation que $\lambda > \lambda_1$. Dans ce cas, nous introduisons la quantité

$$\lambda^* = \inf_{u \in W \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q \, dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x) \, |u|^p \, dx}$$

Pour tout $u \in W$, on a

$$\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx} \geq \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx} \geq \inf_{u \in W^{1,p} \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx} = \lambda_1.$$

Alors il est facile de voir que λ^* est positive.

Nous supposons qu'il existe une valeur propre λ du problème (4.0.1) telle que $\lambda < \lambda^*$. Alors il existe $v \in W$, $v \neq 0$ qui vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |v|^p \, dx.$$

On obtient alors

$$\lambda^* > \lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q dx}{\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |v|^p dx} \geq \inf_{u \in W \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q dx}{\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |v|^p dx} = \lambda^*$$

qui est une contradiction. Donc, il n'existe aucune valeur propre inférieure à λ^*. D'autre part λ^* n'est pas une valeur propre du problème (4.0.1). En effet, soit $u_n \in W$ une suite minimisante de λ^*. En utilisant raisonnement dans [16] pour démonter que u_n converge fortement vers une fonction non triviale $u \in W$ qui vérifie

$$p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w dx + q \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla w dx = \lambda^* p \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p-2} u w dx \text{ }, \forall w \in W$$

Ceci conduit à l'équation

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla w dx = 0, \ \forall w \in W.$$

Donc, $u \equiv 0$ est ceci est une contradiction. $\square$

Théorème 4.1.3. *Supposons que les hypothèses* (4.0.2), (4.0.3) *sont satisfaites, alors il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* λ *qui vérifie* $\lambda > \lambda^*$ *est une valeur propre du problème* (4.0.1).

Démonstration. Fixant $\lambda > \lambda^*$. On définit classe de familles

$$\beta := \{\psi \in C([0,1], W), \ \psi(0) = 0, \ \psi(1) = u_0\},$$

où u_0 est obtenu au lemme (4.1.2).

On défini le niveau minimum correspondant

$$c := \inf_{\psi\in\beta} \max_{t\in[0,1]} I\left(\psi\left(t\right)\right).$$

Comme la fonctionnelle I satisfait la condition de Palais-Smale et la géométrie du Col, il l'en résulte que c définie ci-dessus est une valeur critique de I. Donc pour chaque $\lambda > \lambda^*$, il existe u_λ point critique associé à c qui vérifie nécessairement $c \geq \frac{1}{p}\left(1 + \lambda C \left\|g\right\|_\infty \left\|g\right\|_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}^{p(1-t)} \varepsilon^{q(1-t)}\right)$. Alors, u_λ n'est pas triviale depuis $I\left(0\right) = 0$. Le théorème est ainsi démontré. □

4.2 Valeur propre principale

Définition 4.2.1. On dit que λ est une valeur propre principale du problème (4.0.1) s'il existe $u \in W$, $u \neq 0$ et $u \geq 0$ vérifie que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u\right|^{q-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g\left(x\right) \left|u\right|^{p-2} uv dx, \quad \forall v \in W.$$

On a la proposition suivante.

Proposition 4.2.2. *Sous les hypothèses* (4.0.2) *et* (4.0.3) *la quantité*

$$\overline{\lambda} = \inf_{u\in W\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u\right|^p dx + \frac{p}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u\right|^q dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g\left(x\right) \left|u\right|^p dx} \tag{4.2.1}$$

est une valeur propre principale du problème (4.0.1).

Démonstration. On définie $\Phi : W \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\Phi(u) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx + \frac{p}{q} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q \, dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x) \, |u|^p \, dx}.$$

Il est facile de voir que Φ est une fonction C^1 faiblement semi-continue inférieurement dans $W \setminus \{0\}$. Nous rappelons que la première valeur propre λ_1 du p-Laplacien avec poids est caractérisée par

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(x) \, |u|^p \, dx} \tag{4.2.2}$$

On vérifie facilement que pour tout $u \in W \setminus \{0\}$

$$\Phi(u) \geq \lambda_1.$$

Alors Φ est bornée inférieurement dans $W \setminus \{0\}$ et est un nombre réel positif plus grand que λ_1.

Soit $(u_n) \subset W \setminus \{0\}$ une suite minimisant de $(4.2.1)$, i.e.

$$\overline{\lambda} = \lim_{n \to +\infty} \Phi(u_n).$$

Comme on a $|\nabla |u|| = |\nabla u|$ alors $(|u_n|)$ est aussi une suite minimisante. Donc nous pouvons supposer que (u_n) est positive. On a

$$\overline{\lambda} = \lim_{n \to +\infty} \Phi(u_n).$$

Premièrement on démontre que u_n est bornée dans W. Puisque $\Phi(u_n)$ est un suite réelle convergente, il existe une constante $c_1 > 0$ tel que

$$\Phi(u_n) \leq c_1. \tag{4.2.3}$$

D'autre part, on obtient par l'inégalité (4.0.6)

$$\Phi\left(u_n\right) \geq c_3 \frac{\left\|u_n\right\|_{1,p}^{p} + \left\|u_n\right\|_{1,q}^{q}}{\left\|u_n\right\|_{1,p}^{pt} \left\|u_n\right\|_{1,q}^{q(1-t)}} \tag{4.2.4}$$

Par conséquent, (u_n) est bornée dans W si non $\Phi\left(u_n\right) \to \infty$ et ceci est une contradiction avec (4.2.3). La réflexivité de W garantie l'existence de $\overline{u} \in W$, $\overline{u} \geq 0$ tel que $u_n \rightharpoonup \overline{u}$. Comme Φ faiblement semi-continue inférieurement alors,

$$\Phi\left(\overline{u}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf\ \Phi\left(u_n\right)$$

Il suit que $\overline{\lambda} = \Phi\left(\overline{u}\right)$ et par conséquent on conclut que $\overline{u}$ est un point critique de Φ, i.e.

$$\left\langle \Phi'\left(\overline{u}\right), v\right\rangle = 0,\ \forall v \in W. \tag{4.2.5}$$

Un simple calcul montre que (4.2.5) est équivalent à

$$\frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla \overline{u}\right|^{p-2} \nabla \overline{u}.\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla \overline{u}\right|^{q-2} \nabla \overline{u}.\nabla v dx\right) \int_{\mathbb{R}^N} g\left|\overline{u}\right|^{p} dx -$$

$$-\left(\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla \overline{u}\right|^{p} dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla \overline{u}\right|^{q} dx\right) \int_{\mathbb{R}^N} g\left|\overline{u}\right|^{p-2} \overline{u} v dx = 0,\ \forall v \in W.$$

Ce signifie que $\overline{u}$ est un fonction propre de problème (4.0.1) associé à $\overline{\lambda} = \Phi\left(\overline{u}\right)$.

Maintenant on démontre que $\overline{u} \neq 0$. On suppose par contradiction que $\overline{u} \equiv 0$. Ceci implique que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\left|u_n\right|^{p} dx = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u_n\right|^{p} dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u_n\right|^{p} dx\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(u_n\right) \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\left|u_n\right|^{p} dx$$

$$= 0.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p} = \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,q} = 0.$

La relation (4.2.4) donne

$$\Phi(u_n) \geq c_3 \frac{\|u_n\|_{1,p}^{\frac{q-p(1-t)}{t}} + \|u_n\|_{1,q}^{q}}{\|u_n\|_{1,p}^{pt} \|u_n\|_{1,q}^{p(1-t)}}$$

$$= \|u_n\|_{1,p}^{-pt} \|u_n\|_{1,q}^{\frac{pt^2-(p-q)}{t}} \left(1 + \|u_n\|_{1,q}^{-(1-t)(p+q)}\right).$$

En tenant compte des hypothèses sur les exposant p, q et t on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \infty$ et ceci est une contradiction. Par conséquent, $\overline{u} \neq 0$ et $\overline{\lambda}$ est une valeur propre principale du problème (4.0.1). □

4.3 Unicité de la valeur propre principale $\overline{\lambda}$

On commence cette partie par rappeler l'identité de Picone généralisée.

Théorème 4.3.1. (*Identitéde Picone généralisée*) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné ou pas et $u \geq 0, v > 0$ deux fonctions différentiables. Notons*

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u\,|\nabla v|^{p-2}\nabla v;$$
$$R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v.$$

Alors

$$L(u,v) = R(u,v).$$

De plus, $L(u,v) \geq 0$, et $L(u,v) = 0$ p.p. Ω si et seulement si $\nabla(u/v) = 0$ p.p. $\mathbb{R}^N$, i.e. $u = kv$ pour une certaine constante k dans chaque composante de $\mathbb{R}^N$.

Démonstration. En développent $R(u,v)$ il est facile de voir que $L(u,v) = R(u,v)$. On utilise maintenant l'inégalité de Minkowski $\alpha\beta \leq |\alpha|^p/p + |\beta|^q/p$

avec $\alpha = |\nabla u|$ et $\beta = (u|\nabla v|/v)^{p-1}$, où $1/p + 1/q = 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla v|.|\nabla u| + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p \\ &+ p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\left[|\nabla v|.|\nabla u| - \nabla v.\nabla u\right]. \end{aligned}$$

Si $L(u,v)(x_0) = 0$, et $u(x_0) \neq 0$ alors ma nécessairement $|\nabla v|.|\nabla u| = \nabla v.\nabla u$ et $|\nabla u| = (u/v)|\nabla v|$, i.e. $\nabla u = (u/v)\nabla v$ ou $\nabla(u/v)(x_0) = 0$. D'autre part, si $S = \left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = 0\right\}$ alors $\nabla u = 0$ p.p. (cf. [4]), et donc $\nabla(u/v) = 0$ p.p. nous concluons que$\nabla(u/v) = 0$ p.p. $\mathbb{R}^N$ et par conséquent $u = cv$. □

On définit à présent les applications suivantes

$$\begin{aligned} L_p(\overline{u},v) &= |\nabla\overline{u}|^p + (p-1)\frac{\overline{u}^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{\overline{u}^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla\overline{u}\,|\nabla v|^{p-2}\nabla v, \\ L_q(\overline{u},v) &= |\nabla\overline{u}|^q + (p-1)\frac{v^p}{u^p}|\nabla v|^q - p\frac{\overline{u}^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla\overline{u}\,|\nabla v|^{q-2}\nabla v, \end{aligned}$$

et on pose :

$$L(\overline{u},v) = L_p(\overline{u},v) + L_q(\overline{u},v)$$

Lemme 4.3.2. *Pour tout $\overline{u}, v \in C^{\alpha}_{loc}$ avec $v > 0$ dans $\mathbb{R}^N$, nous avons $L(\overline{u},v) \geq 0$, ce qu'implique,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\overline{u}|^p + \int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\overline{u}|^q \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{-\Delta_p v}{v^{p-1}}|\overline{u}|^p + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}}|\overline{u}|^q, \tag{4.3.1}$$

et si $L(\overline{u},v) = 0$ il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{u} = cv$.

Démonstration. On utilise l'identité de Young, pour $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \nabla\overline{u}\,|\nabla v|^{p-2}\nabla v\frac{\overline{u}\,|\overline{u}|^{p-2}}{v^{p-1}} &\leq |\nabla\overline{u}|\,|\nabla v|^{p-1}\left(\frac{|\overline{u}|}{v}\right)^{p-1} \\ &\leq \frac{\epsilon^p}{p}|\nabla\overline{u}|^p + \frac{p-1}{p\epsilon^p}\left|\frac{\overline{u}}{v}\right|^p|\nabla v|^p. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Soit $\epsilon = 1$, par intégration sur $\mathbb{R}^N$, on trouve

$$p\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \overline{u} \left(\frac{\overline{u}\,|\overline{u}|^{p-2}}{v^{p-1}} \right) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^p + (p-1) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\overline{u}}{v} \right|^p |\nabla v|^p . \qquad (4.3.3)$$

De la même manière on obtient

$$q\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \overline{u} \left(\frac{\overline{u}\,|\overline{u}|^{q-2}}{v^{q-1}} \right) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^q + (q-1) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\overline{u}}{v} \right|^q |\nabla v|^q . \qquad (4.3.4)$$

Donc

$$L_p(\overline{u}, v) \geq 0 \text{ et } L_q(\overline{u}, v) \geq 0,$$

Ce qu'implique que

$$L(\overline{u}, v) \geq 0$$

D'autre part, si $L(\overline{u}, v) = 0$, alors nous avons

$$p\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \overline{u} \left(\frac{\overline{u}\,|\overline{u}|^{p-2}}{v^{p-1}} \right) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^p + (p-1) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\overline{u}}{v} \right|^p |\nabla v|^p = 0, \quad (4.3.5)$$

et

$$q\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \overline{u} \left(\frac{\overline{u}\,|\overline{u}|^{q-2}}{v^{q-1}} \right) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^q + (q-1) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\overline{u}}{v} \right|^q |\nabla v|^q = 0 \quad (4.3.6)$$

et par le choit $\epsilon = 1$ dans (4.3.2), on obtient

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left\{ \nabla \overline{u} \nabla v \, |\nabla v|^{p-2} \frac{\overline{u}\,|\overline{u}|^{p-2}}{v^{p-1}} - |\nabla \overline{u}|\, |\nabla v|^{p-1} \left(\frac{|\overline{u}|}{v} \right)^{p-1} \right\} dx = 0, \qquad (4.3.7)$$

et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left\{ \nabla \overline{u} \nabla v \, |\nabla v|^{q-2} \frac{\overline{u}\,|\overline{u}|^{q-2}}{v^{q-1}} - |\nabla \overline{u}|\, |\nabla v|^{q-1} \left(\frac{|\overline{u}|}{v} \right)^{q-1} \right\} dx = 0. \qquad (4.3.8)$$

Par $(4.3.5), (4.3.6)$, on déduit que $|\nabla \overline{u}| = |(u/v \nabla v)|$ et d'après les deux inégalités $(4.3.7), (4.3.8)$ on trouve que $\nabla \overline{u} = \eta\,(u/v)\,\nabla v$, où $|\eta| = 1$, et dans ce cas on obtient $L(\overline{u}, v) = 0$. Ceci implique que $\eta = 1$ et $\nabla(u/v) = 0$. Par conséquent , il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = cv$. $\square$

Proposition 4.3.3. *La valeur propre principale $\overline{\lambda}$ est unique.*

Démonstration. Supposons que $\overline{u}, v$ sont deux fonctions propres du problème (4.0.1) associées respectivement à $\overline{\lambda}, \lambda$, avec $\overline{u}, v > 0$ dans $\mathbb{R}^N$. Soit $\varphi_k \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ une suite convergente vers v dans W. Alors, pour une sous-suite noté encore φ_k et $\nabla\varphi_k$ converge dans $\mathbb{R}^N$ vers v et ∇v réspectivement. On prend $|\varphi_k|^p / u^{p-1}$ comme fonction test dans l'équation (4.0.1), et on utilise l'identité de Picone pour obtenir

$$0 \leq L(\varphi_k, \overline{u}) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_k|^p + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_k|^q - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{p-2} \nabla\overline{u} \left(\frac{|\varphi_k|^p}{\overline{u}^{p-1}}\right) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{q-2} \nabla\overline{u} \left(\frac{|\varphi_k|^q}{\overline{u}^{q-1}}\right) \tag{4.3.9}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_k|^p + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_k|^q - \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|\varphi_k|^p .$$

En passant à la limite, quand k tend vers ∞, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq L(v, \overline{u}) &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q - \overline{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g v^p \\ &= \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^N} g v^p - \overline{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g v^p \\ &= \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^N} g v^p \end{aligned}$$

comme $L(v, \overline{u}) = 0$, on conclut que $\overline{u} = cv$ et $\overline{\lambda} = \lambda$. □

Chapitre 5

Sur les solutions du problème (p,q)-Laplacien avec résonance

D'un point de vu physique, la résonance est un phénomène selon lequel certains système sont sensibles à certaines fréquences. Mathématiquement parlé, il s'agit d'existence de solutions non triviales d'une E.D.P. soumise à une fréquence propre (valeur propre) de l'opérateur différentiel associé à cette E.D.P.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier le problème de résonance suivant

$$-\Delta_p u - \Delta_q u + f(x,u) = \overline{\lambda} g(x) |u|^{p-2} u, \ x \in \mathbb{R}^N \tag{5.0.1}$$

où les réels p et q sont tels que $1 < p, q < \infty$,$N \geq 3$, g est le poids qui est une fonction mesurable positive et $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory. Le paramètre $\overline{\lambda}$ est la valeur propre principale du problème (4.0.1) étudiée au chapitre précédent et u est la solution recherchée dans l'espace W.
Dans le chapitre 4 contrairement au cas du p-Laplacien, nous n'avons pas pu démontré la simplicité de la valeur propre principale. Et donc nous ne pouvons pas chercher la solution de notre problème comme étant des points critiques de

la fonctionnelle de l'énergie sur le complémentaire, dans W, d'un espace de dimension finie. C'est pourquoi nous avons eu recours à une méthode topologique qui est le théorème de Leray-Lions(voir chapitre 3).

Nous introduisons les hypothèses suivantes.

Hypothèses. Nous supposons que les hypothèses (4.0.2), (4.0.3) sont vérifiées. Nous supposons aussi que $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory telle que $f(x,0) \neq 0$ et

$$|f(x,u)| \leq \sigma(x) + \rho(x)|u|^{\gamma} \quad \text{pour p.p. } x \in \mathbb{R}^N,\ u \in \mathbb{R} \tag{5.0.2}$$

où $0 < \gamma < p^* - 1$, $\sigma \in L^{(p^*)'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $\rho \in L^{\delta}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ avec $\delta = \frac{p^*}{p^* - (\gamma+1)}$.
Nous supposons aussi que

$$\inf_{s \in \mathbb{R}^*} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} > \overline{\lambda} g(x) \ \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.0.3}$$

Problème de résonance

Le problème de résonance (5.0.1) est équivalent à trouver les solutions $u \in W$, $u \neq 0$ qui vérifient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u) v dx - \overline{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^{p-2} u v dx = 0, \tag{5.0.4}$$

pour tout $v \in W$.

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 5.0.4. *Supposons que les hypothèses* (4.0.2), (4.0.3), (5.0.2) *et* (5.0.3) *sont satisfaites, alors le problème* (5.0.1) *admet au moins une solution faible non triviale.*

On définie pour les opérateurs J, G, H, $F : W \to W'$ par :

$$\begin{aligned}
\langle J(u), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla v dx \\
\langle G(u), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q-2} \nabla u.\nabla v dx \\
\langle H(u), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^{p-2} uv dx \\
\langle F(u), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u) v dx, \qquad \forall u, v \in W.
\end{aligned}$$

On pose

$$T := J + G - \overline{\lambda} H + F.$$

On peut vérifier aisément qu'une fonction u est solution de (5.0.4) si et seulement si $Tu = 0$ dans W'. On commence par démontrer des résultats auxiliaire qui est résumé dans le lemme qui suit.

Lemme 5.0.5. *Soit $u_n \to u$ dans W. Alors $H(u_n) \to H(u)$ et $F(u_n) \to F(u)$ quand $n \to \infty$.*

Démonstration. Pour tout $v \in W$ et $R > 0$ on pose

$\langle H(u_n) - H(u), v\rangle = \int_{B_R} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx + \int_{B_R'} g(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx.$

En appliquant l'inégalité de Hölder et l'hypothèse (4.0.3), nous obtenons

$$\left|\int_{B_R} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)vdx\right| \leq C\|g\|_\infty \left(\int_{B_R} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{(p^*)'} vdx\right)^{\frac{1}{(p^*)'}}.$$

Donc par l'injection de Sobolev, nous avons

$$\left|\int_{B_R} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)vdx\right| \leq C\|g\|_\infty \|v\| \left(\int_{B_R} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{(p^*)'} dx\right)^{\frac{1}{(p^*)'}}.$$

Comme u_n converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors $(\chi_{B_R}u_n)$ converge faiblement vers $(\chi_{B_R}u)$ dans $W^{1,p}(B_R)$. Nous pouvons déduire que $(\chi_{B_R}u_n)$ converge fortement vers $(\chi_{B_R}u)$ dans $L^{(p^*)'(p-1)}(B_R)$ car $(p^*)'(p-1) < p^*$. Alors il existe une sous-suite, noté encore $(\chi_{B_R}u_n)$, et $h \in L^{(p^*)'(p-1)}(B_R)$ tel que $\chi_{B_R}u_n \to \chi_{B_R}u$ p.p. dans B_R quand $n \to \infty$ et $\forall n$, $|\chi_{B_R}u_n| \leq h$ p.p. dans B_R et $\chi_{B_R}|u_n|^{p-1} \leq h^{p-1}$ p.p. dans B_R. Par le théorème de Lebesgue il existe une autre sous-suite, notée encore $(\chi_{B_R}u_n)$, telle que $\chi_{B_R}|u_n|^{p-2}u_n \longrightarrow \chi_{B_R}|u|^{p-2}u$ fortement dans $L^{(p^*)'}(B_R)$.

D'autre part par l'inégalité de Hölder on a pour tout $v \in W$

$$\left|\int_{B'_R} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)vdx\right| \leq \left(\int_{B'_R} g\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}} vdx\right)^{\frac{(p-1)q^*}{\alpha p^*}}.$$

$$.\left(\int_{B'_R} g|v|^{\left(\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}\right)'} dx\right)^{\frac{1}{\left(\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}\right)'}}.$$

En appliquant encore l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\int_{B'_R} g|v|^{\left(\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}\right)'} dx \leq \|g\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}(B'_R)}^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)/\left(\frac{\alpha}{\alpha p^*-(p-1)q^*}\right)'} \left(\int_{B'_R} g^{\frac{pq^*-\alpha p^*}{q^*-\alpha}}|v|^{p^*}dx\right)^{\frac{\alpha}{\alpha p^*-(p-1)q^*}}$$

$$\leq C\|g\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}(B'_R)}^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)/\left(\frac{\alpha}{\alpha p^*-(p-1)q^*}\right)'} \|g\|_\infty^{\frac{pq^*-\alpha p^*}{q^*-\alpha}} \|v\|_{1,p}^{\frac{\alpha p^*}{\alpha p^*-(p-1)q^*}}$$

$$\left|\int_{B'_R} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)vdx\right| \leq C\|g\|_{L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}(B'_R)}^{A}\|v\|$$

où $A = \frac{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\alpha}{\alpha p^*-(p-1)q^*}\right)'\left(\frac{\alpha p^*}{(p-1)q^*}\right)'}$. Il vient que $\int_{B'_R} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)vdx \to 0$

quand $R \longrightarrow \infty$ puisque $g \in L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle H(u_n) - H(u), v\rangle = 0$ pour tout $v \in W$.

Pour l'opérateur F on a $\forall v \in W$

$\langle F(u_n) - F(u), v\rangle = \int\limits_{B_R} (f(x,u_n) - f(x,u))\, v dx + \int\limits_{B_R'} (f(x,u_n) - f(x,u))\, v dx.$

Comme u_n converge fortement vers u dans W, alors u_n est borné dans W donc dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Alors $(\chi_{B_R} u_n)$ est borné dans $W^{1,p}(B_R)$. Nous pouvons déduire que $(\chi_{B_R} u_n)$ converge fortement vers $(\chi_{B_R} u)$ dans $L^\alpha(B_R)$ pour tout $1 \leq \alpha < p^*$ en particulier, pour $\alpha = \gamma (p^*)'$. Alors il existe une sous-suite, noté encore $\chi_{B_R} u_n$ et $h \in L^\alpha(B_R)$ telle que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ dans } B_R \text{ quand } n \to \infty$$

et

$$|u_n(x)| \leq h(x) \text{ dans } B_R.$$

Il suit que

$$f(x, u_n(x)) \to f(x, u(x)) \text{ dans } B_R \text{ quand } n \to \infty$$

et

$$|f(x,u_n)| \leq \sigma(x) + \rho(x) h^\gamma(x) \text{ dans } B_R.$$

On a par supposition que $\rho \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, alors $\sigma + \rho h^\gamma \in L^{(p^*)'}(B_R)$ Donc,

$$f(., u_n) \to f(., u) \text{ dans } L^{(p^*)'}(B_R).$$

D'autre part, par l'injection de Sobolev on a pour tout $v, w \in W$

$$\int\limits_{B_R'} \sigma |v|\, dx \leq \left(\int\limits_{B_R'} |v|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int\limits_{B_R'} \sigma^{(p^*)'} dx\right)^{\frac{1}{(p^*)'}} \leq c\|v\| \left(\int\limits_{B_R'} \sigma^{(p^*)'} dx\right)^{\frac{1}{(p^*)'}}. \tag{5.0.5}$$

De la même façon nous obtenons

$$\int\limits_{B'_R} \rho\,|w|^{\gamma}\,|v|\,dx \leq \left(\int\limits_{B'_R} |w|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{\gamma}{p^*}} \left(\int\limits_{B'_R} (\rho\,|v|)^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}}\,dx\right)^{\frac{p^*-\gamma}{p^*}}$$

$$\leq \left(\int\limits_{B'_R} |w|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{\gamma}{p^*}} \left(\int\limits_{B'_R} |v|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int\limits_{B'_R} \rho^{\delta} dx\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

donc

$$\int\limits_{B'_R} \rho\,|w|^{\gamma}\,|v|\,dx \leq c'\,\|w\|^{\gamma}\,\|v\| \left(\int\limits_{B'_R} \rho^{\delta} dx\right)^{\frac{1}{\delta}}. \tag{5.0.6}$$

$$\int\limits_{B'_R} (f(x,u_n) - f(x,u))\,v dx \leq \int\limits_{B'_R} |f(x,u_n) - f(x,u)|\,|v|\,dx$$

$$\leq \left(c\left(\int\limits_{B'_R} \sigma^{(p^*)'} dx\right)^{\frac{1}{(p^*)'}} + c'' \left(\int\limits_{B'_R} \rho^{\delta} dx\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \|v\|. \tag{5.0.7}$$

Comme $\sigma \in L^{(p^*)'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $\rho \in L^{\delta}\left(\mathbb{R}^N\right)$, il vient que $\int\limits_{B'_R} (f(x,u_n) - f(x,u))\,v dx \to$ 0 quand $R \to \infty$. Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle F(u_n) - F(u), v\rangle = 0\ \forall v \in W$. $\square$

Démonstration du Théorème 5.0.4. Nous allons appliquer le théorème de Leray-Lions. Nous démontrons en premier lieu que J , G, H et F sont des opérateurs bornés, au sens où ils transforment des ensembles bornés de W à des ensembles bornés de W'. Soit $u \in W$ tel que $\|u\| \leq M$. Pour toute $s > 1$ par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\sup_{\|v\|=1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{s-2}\,\nabla u.\nabla v dx \right|$$

$$\leq \sup_{\|v\|=1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{s-1} \nabla v dx$$

$$\leq \sup_{\|v\|=1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{(s-1)s'} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \|u\|^{\frac{s}{s'}} \leq M^{s-1}.$$

Donc J et G sont des opérateurs bornés de W dans W'. D'autre part on a

$$\|H(u)\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle H(u), v\rangle|$$

$$\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par la relation (4.0.6) nous obtenons

$$\|H(u)\|_* \leq c \sup_{\|v\|\leq 1} \left(\|u\|_{1,p}^{pt} \|u\|_{1,q}^{p(1-t)} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|v\|_{1,p}^{pt} \|v\|_{1,q}^{p(1-t)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c \sup_{\|v\|\leq 1} \left(\|u\|_{1,p}^{pt} \|u\|_{1,q}^{p(1-t)} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq M^{p-1}.$$

Pour l'opérateur F, pour tout u, $v \in W$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u) v dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x) |v| dx + \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) |u|^\gamma |v| (x) dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \sigma^{(p^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(p^*)'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{\gamma}{p^*}} \left(\int_{B'_R} (\rho |v|)^{\frac{p^*}{p^*-\gamma}} dx \right)^{\frac{p^*-\gamma}{p^*}}$$

$$\leq \left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} \sigma^{(p^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(p^*)'}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{\gamma}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho^\delta dx \right)^{\frac{1}{\delta}} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

En utilisant l'injection de Sobolev, nous obtenons

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u) v dx \right| \leq c \left(\|\sigma\|_{(p^*)'} + \|u\|^\gamma \|\rho\|_\delta \right)$$

alors

$$\|Fu\|_* \leq c\,\|\sigma\|_{(p^*)'} + M^\gamma\,\|\rho\|_\delta$$

Par conséquent, l'opérateur T est borné.

Ensuite, on démontre que l'opérateur T est continu de W dans W'. Soient u_n, $u \in W$ telles que $\|u_n - u\| \to 0$ quand $n \to \infty$. On a

$$\|J(u_n) - J(u)\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle J(u_n) - J(u), v\rangle| \tag{5.0.8}$$

$$= \sup_{\|v\|\leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla v dx \right|$$

$$\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \|v\|_{1,p}.$$

La dernière intégrale tend vers 0 quand $\|u_n - u\| \to 0$, à cause la continuité de l'opérateur de Nemytskii $\Psi(u(x)) = \Psi(\nabla u(x))$ de $L^p(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où $\Psi(s) = |s|^{p-2}s$. Par le même résonnement on trouve que $\|G(u_n) - G(u)\|_* \to 0$ quand $n \to \infty$.

La continuité de l'opérateur H et F est garantie par lemme 5.0.5. Par conséquent, T est continu alors il aussi demi-continu de W dans W'.

Pour la coercivité de T, on a

$$\frac{1}{\|u\|}\langle Tu, u\rangle = \frac{1}{\|u\|}\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^q + \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(x,u)u - \overline{\lambda} g|u|^p\right) dx \right).$$

et par l'hypothèse (5.0.3) il vient que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(f(x,u)u - \overline{\lambda} g|u|^p\right) dx \geq 0.$$

Alors la coercivité de T est immédiate.

On définit l'opérateur $\Phi : W \times W \to W'$ par

$$\langle \Phi(u,w), v\rangle = \langle (J+G)(u), v\rangle + \left\langle \left(F - \overline{\lambda} H\right)(w), v\right\rangle. \tag{5.0.9}$$

C'est clair que $\Phi(u,u) = T(u)$ pour tout $u \in W$.

Maintenant on vérifient la dernière partie de Théorème Leray-Lions.

Soit t_n une suite réelle telle que $t_n \to 0$ et u, v et $w \in W$, alors

$$\Phi(u + t_n v, w) = (J+G)(u + t_n v) + \left(F - \overline{\lambda} H\right)(w).$$

Puisque $J + G$ est continu, alors

$$\Phi(u + t_n v, w) \to \Phi(u,w).$$

Ensuite on vérifie la monotonie de la partie principale de Φ. Pour tout u, $v \in W$ on a

$$\langle \Phi(u,u) - \Phi(w,u), u - w\rangle = \langle (J+G)(u) - (J+G)(w), u - w\rangle.$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\langle J(u) - J(w), u - w\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla w dx$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w.\nabla u dx$$

$$\geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + |\nabla w|^p\right) dx - \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$-\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \cdot \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$= \left[\|u\|_{1,p}^{p-1} - \|w\|_{1,p}^{p-1} \right] \left[\|u\|_{1,p} - \|w\|_{1,p} \right] \geq 0. \tag{5.0.10}$$

Par la même raisonnement nous obtenons

$$\langle G(u) - G(w), u - w \rangle = \left[\|u\|_{1,q}^{q-1} - \|w\|_{1,q}^{q-1} \right] \left[\|u\|_{1,q} - \|w\|_{1,q} \right] \geq 0. \tag{5.0.11}$$

Donc

$$\langle \Phi(u,u) - \Phi(u,w), u - w \rangle \geq 0.$$

Soit $u_n \rightharpoonup u$ dans W et on a $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \Phi(u_n, u_n) - \Phi(u, u_n), u - w \rangle = 0$. Par la monotonie de J et G (voir [29]), on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \langle J(u_n) - J(u), u_n - u \rangle = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \langle G(u_n) - G(u), u_n - u \rangle = 0.$$

donc il suit de la relation (5.0.10) et (5.0.11) que

$$\|u_n\|_{1,p} \to \|u\|_{1,p}$$

et

$$\|u_n\|_{1,q} \to \|u\|_{1,q}.$$

Puisque $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ sont des espace de Banach uniformément convexe, donc on trouve la converge fortement de u_n vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ et donc dans W.

Il suit de la continuité de l'opérateur $F-\overline{\lambda}H$ et que $\Phi(w,u_n)\to\Phi(w,u)$ pour tout $w\in W. Maintenant soit$ w$\in W$, $u_n\rightharpoonup u$ dans W et $\Phi(w,u_n)\rightharpoonup z$. On a

$$\langle\Phi(w,u_n),u_n\rangle=\langle\Phi(w,u_n),u\rangle+\langle\Phi(w,u_n),u_n-u\rangle\,.$$

On a par la supposition $\langle\Phi(w,u_n),u\rangle=\langle z,u\rangle$ alors nous allons montrer seulement que $\langle\Phi(w,u_n),u_n-u\rangle\to 0$ quand $n\to\infty$.

Nous avons par la définition

$$\langle\Phi(w,u_n),u_n-u\rangle=\langle(J+G)\,w,u_n-u\rangle+\left\langle\left(F-\overline{\lambda}H\right)u_n,u_n-u\right\rangle$$

$$=\left\langle(J+G)\,w+\left(F-\overline{\lambda}H\right)u,u_n-u\right\rangle+\left\langle\left(F-\overline{\lambda}H\right)u_n-\left(F-\overline{\lambda}H\right)u,u_n-u\right\rangle.$$

La première quantité dans la dernière équation tend vers zéro car u_n converge faiblement vers u.

Pour la deuxième partie, on a

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\left(F-\overline{\lambda}H\right)u_n-\left(F-\overline{\lambda}H\right)u,u_n-u\right\rangle\right|&\leq\left\|\left(F-\overline{\lambda}H\right)u_n-\left(F-\overline{\lambda}H\right)u\right\|_*\|u_n-u\|\\&\leq c\left\|\left(F-\overline{\lambda}H\right)u_n-\left(F-\overline{\lambda}H\right)u\right\|_*.\end{aligned}$$

Comme u_n est faiblement convergente, alors elle est bornée dans W. Par lemme 5.0.5 on a $\left\|\left(F-\overline{\lambda}H\right)u_n-\left(F-\overline{\lambda}H\right)u\right\|_*\to 0$ quand $n\to\infty$. Il suit que $\langle\Phi(w,u_n),u_n-u\rangle\to 0$ quand $n\to\infty$ et alors $\langle\Phi(w,u_n),u\rangle\to\langle z,u\rangle$.

Ainsi d'après le théorème Leray-Lions nous pouvons conclure que l'équation $T(u)=0$ a au moins une solution u dans W. Cette solution est une solution faible non triviale du problème (5.0.1) puisque $T(0)\neq 0$. La preuve du théorème est ainsi complète. $\square$

Chapitre 6

Régularité des Solutions

Ce chapitre est concerné par l'étude qualitative des solutions des problèmes (4.0.1) et (5.0.1). Nous démontrons dans la section 6.1 que les solutions sont localement bornées. Dans la section 6.2 nous décrivons le comportement asymtôtique de ces solutions à l'infini. Nous démontrons exactement qu'elles sont d'une décroissance exponentielle.

Hypothèses. Nous supposons que les hypothèses des chapitres 4 et 5 sont satisfaites. Nous posons $g(x,u) = -f(x,u) + \lambda g(x) |u|^{p-2} u$ et nous supposons qu'elle vérifie

($\mathbf{H}_1$) $g(x,t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction de Caratheodory ; $g(x,t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ et $g(x,u) \equiv 0$, pour $t < 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$.

($\mathbf{H}_2$) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que $|g(x,t)| \leq \varepsilon |t|^{q-1} + C(\varepsilon) |t|^{p^*-1}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, où $p^* = \frac{NP}{N-P}$ si $N > p$, $0 < p^* < +\infty$ si $N \leq p$.

($\mathbf{H}_3$) $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{g(x,t)}{t^{p-1}}$ uniformément dans $x \in \mathbb{R}^N$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{g(x,t)}{t^{p-1}} = l$ uniformément dans $x \in \mathbb{R}^N$ pour $l \in (0, +\infty)$.

6.1 Régularité des solutions

Théorème 6.1.1. *Supposons que* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *sont vérifiées alors les solutions* u *des problèmes (4.0.1) et (5.0.1) sont localement bornées i.e.,* $u \in L^{\infty}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Démonstration. On démontre que toute solution faible u de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u + f(x,u) = \lambda g(x) |u|^{p-2} u, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W \end{cases} \tag{6.1.1}$$

est localement bornée.

On choisit fonction $\eta \in C^{\infty}$ non négative telle que pour $R > 0$, $r > 0$ on a

$$|\nabla \eta| \leq \frac{2}{r}.$$

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in B_R, \\ (0,1), & \text{autre}, \\ 0, & \text{si } x \notin B_{R+r}. \end{cases}$$

Nous supposons que $u \geq 0$ et on pose $\overline{u} = u + k$ (pour $k > 0$).

Alors

$$\overline{u}_L = \begin{cases} \overline{u}, & \text{si } u < L, \\ L + k, & \text{si } u \geq L. \end{cases}$$

On considère u^+, u^- et $\overline{u} = u^+ + k$, $\overline{u} = u^- + k$ séparément. Pour toutes les cas, on a $\nabla \overline{u}_L = 0$ dans $\left\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(x) = 0 \text{ où } u(x) \geq L\right\}$. On pose la fonction $\varphi(x) = \eta^p \left(\overline{u}\, \overline{u}_L^{p(\beta-1)} - k^{p(\beta-1)+1}\right)$, où $\beta > 1$, d'autre part on note par

$g(x,t) = -f(x,t) + \lambda g(x) |t|^{p-2} t.$

On suppose C une constante dépende seulement de N, p, q, on multiplie l'équation (6.1.1) par φ et on intègre sur $\mathbb{R}^N$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} p\eta^{p-1}\left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)} - k^{p(\beta-1)+1}\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \eta + \eta^p \overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \overline{u} \\
&+ p(\beta-1)\eta^p \overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \overline{u} \\
&+ p\eta^{p-1}\left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)} - k^{p(\beta-1)+1}\right)|\nabla u|^{q-2}\nabla u \nabla \eta \\
&+ \eta^p\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^{q-2}\nabla u \nabla \overline{u} + p(\beta-1)\eta^p \overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)-1}|\nabla u|^{q-2}\nabla u \nabla \overline{u} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)\varphi dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N}\left[\overline{u}^{p^*-1} + 1\right]\eta^p \overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)}
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} p\eta^{p-1}\left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)} - k^{p(\beta-1)+1}\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \eta dx\right| \\
&\leq p\int_{\mathbb{R}^N} \eta^{p-1}\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla \overline{u}|^{p-2}|\nabla \overline{u}||\nabla \eta| dx \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N}\left(\eta \overline{u}_L^{(\beta-1)}|\nabla \overline{u}|\right)^p dx + C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}\left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}|\nabla \eta|\right)^p dx,
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

et de la même manière on trouve

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} p\eta^{p-1}\left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)}-k^{p(\beta-1)+1}\right)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\nabla\eta dx\right|$$
$$\leq p\int_{\mathbb{R}^N}\eta^{p-1}\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla\overline{u}|^{q-2}|\nabla\overline{u}|\,|\nabla\eta|\,dx$$
$$=p\int_{\mathbb{R}^N}\overline{u}_L^{p(\beta-1)}\left[\eta^{\frac{p(q-1)}{q}}|\nabla\overline{u}|^{q-2}|\nabla\overline{u}|\,.\eta^{\frac{p}{q}-1}\overline{u}\,|\nabla\eta|\right]dx$$
$$\leq\int_{\mathbb{R}^N}\overline{u}_L^{p(\beta-1)}\left[\varepsilon\eta^p|\nabla\overline{u}|^q+C(\varepsilon)\,\eta^{p-q}\overline{u}^q|\nabla\eta|^q\right] \tag{6.1.4}$$
$$=\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\eta^p\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla\overline{u}|^q\,dx+C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}\eta_L^{p-q}\overline{u}^q\overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla\eta|^q\,dx.$$

Donc, on peut choisir ε tel que on a

$$C\int_{\mathbb{R}^N}\left[\overline{u}^{p^*-1}+1\right]\eta^p\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)}$$
$$\geq\int_{\mathbb{R}^N}p(\beta-1)\,\eta^p\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)-1}|\nabla\overline{u}_L|^p+\frac{1}{2}\eta^p\overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla\overline{u}|^p-C\left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla\eta|\right)^p$$
$$p(\beta-1)\,\eta^p\overline{u}\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)-1}|\nabla\overline{u}_L|^q+\frac{1}{2}\eta^p\overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla\overline{u}|^q-C\eta^{p-q}\overline{u}^q\overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla\eta|^q\,dx. \tag{6.1.5}$$

Prendre $k=1$ et dans ce cas on a $\overline{u}\geq 1$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N}p(\beta-1)\,\eta^p\ \overline{u}_L^{p(\beta-1)-1}\left(|\nabla\overline{u}_L|^p+|\nabla\overline{u}_L|^q\right)+\frac{1}{2}\eta^p\overline{u}_L^{p(\beta-1)}\left(|\nabla\overline{u}|^p+|\nabla\overline{u}|^q\right)dx$$
$$\leq C\int_{\mathbb{R}^N}(\eta^p\overline{u}^{p^*}\overline{u}_L^{p(\beta-1)}+\left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}|\nabla\eta|\right)^p+\eta^{p-q}\overline{u}^q\overline{u}_L^{p(\beta-1)}|\nabla\eta|^q\,dx), \tag{6.1.6}$$

On pose $W_L = \eta \overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}$ et voir que $\eta \overline{u}_L^{(\beta-1)} \leq \eta \overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}$ et

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta^{p-q} \overline{u}^q \overline{u}_L^{p(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|^q dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{u}^q \overline{u}_L^{q(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|^q . \eta^{p-q} \overline{u}_L^{(p-q)(\beta-1)} dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|\right)^p dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\eta \overline{u}_L^{(\beta-1)}\right)^p dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|\right)^p dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\eta \overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}\right)^p dx.
\end{aligned}
$$

L'inégalité (6.1.5) implique que

$$
\begin{aligned}
\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\eta \overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}\right)^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla W_L\right|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla W_L\right|^p dx \qquad (6.1.7) \\
&\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{u}^p \overline{u}_L^{p(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|^p + C\beta^p \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big[\eta^p \overline{u}_L^{p(\beta-1)} \left|\nabla \overline{u}\right|^p + \eta^p \overline{u}_L^{p(\beta-1)} \left|\nabla \overline{u}\right. \\
&\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{u}^p \overline{u}_L^{p(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|^p + C\beta^p \cdot \\
&\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\eta^p \overline{u}^{p^*} \overline{u}_L^{p(\beta-1)} + \left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|\right)^p + \eta^{p-q} \overline{u}^q \overline{u}_L^{p(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|^q \right] dx \\
&\leq C\beta^p \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\eta^p \overline{u}^{p^*} \overline{u}_L^{p(\beta-1)} + \left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|\right)^p + \left(\eta \overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}\right)^p \right] dx \\
&\leq C\beta^p \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|\right)^p dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta^p \overline{u}^{p^*} \overline{u}_L^{p(\beta-1)} dx. \right]
\end{aligned}
$$

Nous exigeons qu'il existe $R_0 > 0$ tel que

$$\overline{u} \in L^{\frac{(p^*)^2}{p}}\left(B_{R_0}\right). \tag{6.1.8}$$

En effet, comme

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta^p \overline{u}^{p^*} \overline{u}_L^{p(\beta-1)} dx \leq \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\eta \overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}\right)^{p^*} dx\right]^{p/p^*} \cdot \left[\int\limits_{B_{R+r}} \overline{u}^{p^*} dx\right]^{(p^*-p)/p^*}, \tag{6.1.9}$$

On prend $\beta = \frac{p^*}{p}$ dans (6.1.6) et $R = R_0$ assez petit tel que

$$\left[\int\limits_{B_{2R}} \overline{u}^{p^*} dx\right]^{(p^*-p)/p^*} \leq \frac{1}{2C},$$

on trouve que

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\eta \overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)}\right)^{p^*} dx\right)^{p/p^*} \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{u}\ \overline{u}_L^{(\beta-1)} \left|\nabla \eta\right|\right)^p dx \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{u}^{p\beta} \left|\nabla \eta\right|^p dx. \tag{6.1.10}$$

Supposons que $L \to +\infty$ alors on a $\overline{u}_L \to \overline{u}$ dans $(6.1.10)$, on obtient

$$\left[\int\limits_{B_{R+r}} \overline{u}^{\frac{(p^*)^2}{p}} dx\right]^{p/p^*} \leq C \int\limits_{B_{R+r}} \left|\nabla \eta\right|^p \overline{u}^{p^*} dx < +\infty.$$

Alors on peut démontré que $\overline{u} \in L^\infty\left(B_{R_0}\right)$, $0 < R < R_0/2$.

On pose $t = (p^*)^2 / (p^* - p)\, p > 1$. Supposons que $\overline{u} \in L^{p\beta t/(t-1)}\left(B_{R+r}\right)$, $0 < r < R$. Par (6.1.8) et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta^p \overline{u}^{p^*} \overline{u}_L^{p(\beta-1)} dx \leq \left[\int_{B_{R+r}} \left(\eta^p \overline{u}_L^{p\beta} \right)^{t/(t-1)} \right]^{(t-1)/t} \cdot \left[\int_{B_{R+r}} \left(\overline{u}^{(p^*-p)t} \right) \right]^{1/t} \tag{6.1.12}$$

$$\leq \left[\int_{B_{R+r}} \left(\eta^p \overline{u}^{p\beta} \right)^{t/(t-1)} \right]^{(t-1)/t} \cdot \left[\int_{B_{R+r}} \left(\overline{u}^{(p^*)} \right]^2 /p \right]^{1/t}$$

$$\leq C \left[\int_{B_{R+r}} \left(\eta^p \overline{u}^{p\beta} \right)^{t/(t-1)} \right]^{(t-1)/t}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p \, \overline{u}^p \overline{u}_L^{p(\beta-1)} dx \leq C r^{-p} \left[\int_{B_{R+r}} \left(\overline{u}^{p\beta} \right)^{t/(t-1)} \right]^{(t-1)/t} . \tag{6.1.13}$$

Alors on obtient

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\eta \overline{u} \; \overline{u}_L^{(\beta-1)} \right)^{p^*} dx \right]^{p/p^*} \leq C \beta^p r^{-p} \left[\int_{B_{R+r}} \left(\overline{u}^{p\beta} \right)^{t/(t-1)} \right]^{(t-1)/t} ,$$

i.e.,

$$\left[\int_{B_R} \overline{u}^{p^*\beta} dx \right]^{1/\beta} \leq C^{1/\beta} \beta^{p^*/\beta} r^{-p*/\beta} \left[\int_{B_{R+r}} \left(\overline{u}^{p\beta} \right)^{t/(t-1)} \right]^{(t-1)^{p^*}/tp\beta} , \tag{6.1.14}$$

où C dépend r, β.

On pose $\chi = (p^*)(t-1)/pt \, (\chi > 1)$, $\beta = \chi^i$, $B_i = B_{R+2^{-i}r}$, $i = 0, 1, ...,$ dans (6.1.13) et

$$I_i = \left(\int_{B_i} \left(|\overline{u}|^{(pt)/(t-1)} \right)^{\chi^i} dx \right)^{1/\chi^i} . \tag{6.1.15}$$

Alors (6.1.13) implique que

$$\begin{aligned} I_{i+1} &= \left\| \overline{u}^{pt/(t-1)} \right\|_{\chi^{i+1}(B_{i+1})} = \|\overline{u}\|^{p^*/\chi}_{p^*\chi^i(B_{i+1})} \\ &\leq C^{\frac{1}{\chi^{i+1}}} \left(\frac{r}{2^{i+1}} \right)^{-\frac{p^*}{\chi^{i+1}}} \left\| \overline{u}^{(pt)/(t-1)} \chi^{p^* i \chi^{-(i+1)}} \right\|_{\chi^i(B_i)} \\ &= C^{\frac{1}{\chi^{i+1}}} . \left[2^{-(i+1)} r \right]^{-\frac{p^*}{\chi^{i+1}}} \chi^{p^* i \chi^{-(i+1)}} I_i \\ &\leq C^{\sum_{j=0}^{i+1} \chi^{-j}} \left(2^{p^*} \right)^{\sum_{j=0}^{i+1} j\chi^{-j}} \left(r^{-p^*} \right)^{\sum_{j=0}^{i+1} \chi^{-j}} \chi^{p^* \sum_{j=0}^{i+1} j\chi^{-(j+1)}} I_0. \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

Remarquons que $I_0 \leq C \left(\int_{B_{2R}} \left(|\overline{u}|^{p^*} \right) dx \right)^{\frac{1}{p^*}} < +\infty$; alors soit $i \to +\infty$ dans (6.1.15) on obtient

$$\overline{u} \in L^\infty \left(B_R \left(x_0 \right) \right), \tag{6.1.17}$$

et comme x_0 est arbitraire, on obtient

$$u \in L^\infty_{loc} \left(\mathbb{R}^N \right) \tag{6.1.18}$$

par la définition de $\overline{u}$. Ceci achève la démonstration. □

6.2 Comportement asymptôtique des solutions

Théorème 6.2.1. *Les solutions u des problèmes (4.0.1) et (5.0.1) sont décroissantes à l'infini, i.e.* $\exists C > 0$, $\varepsilon > 0$, $R > 0$ *tels que*

$$|u(x)| \leq C e^{-\varepsilon |x|} \ pour \ |x| \geq R. \tag{6.2.1}$$

Démonstration. On montré qu'il existe une constante $\widetilde{C}$, tel que $\|u\|_{L^\infty} \leq \widetilde{C}$. On défini la fonction $U(x) = \widetilde{C} e^{\varepsilon R} e^{-\varepsilon|x|}$ et la fonction test $\phi \in W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}^N \setminus B_R\right)$. Alors si $|x| > R$ (R assez grand) et $\varepsilon > 0$ (ε assez petit) on trouve que

$$-\Delta_p U - \Delta_q U + \frac{\lambda}{2} g |U|^{p-2} U = U^{p-1}\left[\frac{\lambda}{2} g - \frac{(N-1)}{|x|}\varepsilon^{p-1} - (p-1)\varepsilon^p\right] > 0.$$

C'est la raison pour laquelle

$$\int_{|x|\geq R} \left(-\Delta_p U - \Delta_q U + \frac{\lambda}{2} g |U|^{p-2} U\right) \phi dx \geq 0. \tag{6.2.2}$$

D'autre part par l'hypothèse (H_3) on a

$$g(x,u) \leq -\frac{\lambda}{2} g |u|^{p-2} u \quad \text{quand} \quad u \to 0^+. \tag{6.2.3}$$

Donc, (6.2.3) implique que

$$\int_{|x|\geq R} \left(-\Delta_p u - \Delta_q u + \frac{\lambda}{2} g |u|^{p-2} u\right) \phi dx \leq 0. \tag{6.2.4}$$

Alors, $(6.2.2)\,,(6.2.4)$ et la définition de ϕ montre que

$$\begin{aligned}
0 \geq & \int\limits_{|x|\geq R} \sum_{i=1}^{N} \left(|\nabla u|^{p-2} u_{x_i} - |\nabla U|^{p-2} U_{x_i}\right) \phi_{x_i} dx \\
& + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{|x|\geq R} g\left(u^{p-1} - U^{p-1}\right) \phi dx \\
& + \int\limits_{|x|\geq R} \sum_{i=1}^{N} \left(|\nabla u|^{q-2} u_{x_i} - |\nabla U|^{q-2} U_{x_i}\right) \phi_{x_i} dx \qquad (6.2.5) \\
= & \int\limits_{\{|x|\geq R\}\cap\{u>U\}} \sum_{i=1}^{N} \left(|\nabla u|^{p-2} u_{x_i} - |\nabla U|^{p-2} U_{x_i}\right) \phi_{x_i} dx \\
& + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{|x|\geq R} g\left(u^{p-1} - U^{p-1}\right) \phi dx \\
& + \int\limits_{|x|\geq R} \sum_{i=1}^{N} \left(|\nabla u|^{q-2} u_{x_i} - |\nabla U|^{q-2} U_{x_i}\right) \phi_{x_i} dx.
\end{aligned}$$

Puisque $\left(|\xi|^{t-2}\xi_i - |\eta|^{t-2}\eta_i\right)(\xi_i - \eta_i) > 0$ quand $t > 1$, $\xi \neq \eta$, (6.2.5) implique que

$$u \leq U \quad \text{p.p.} \quad \text{dans } \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R\right\}. \qquad (6.2.6)$$

Remarquons que $U \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et d'après (i) implique que $u \in C^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Par conséquent $u \leq \widetilde{C} e^{\varepsilon R} e^{-\varepsilon|x|} = C e^{-\varepsilon|x|}$. $\square$

Chapitre 7

Valeurs propres d'un Problème nonlinéaire contenant un opérateur du type divergence

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'existence des solutions du l'équation elliptique non linéaire suivante

$$-\operatorname{div}\left(\psi\left(\nabla u\right)\right)=\lambda g\left(x\right)\left|u\right|^{p-2}u,\ \ x\in\mathbb{R}^{N} \tag{7.0.1}$$

où $1<p<N$, $N\geq 3$,et $g\left(x\right)$ fonction mesurable positive. Nous allons prouver l'existence de solution pour l'équation 7.0.1 dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$. Dans ce cas on utilisons le théorème du Col, on trouve que la solution faible de ce problème est le point critique de la fonctionnelle d'énergie.

Une formulation variationnelle de problème 7.0.1 est donnée par

$$\left\{\begin{array}{c}\text{trouver } u\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^{N}\right)\ \text{ tel que}\\ \int\limits_{\mathbb{R}^{N}}\psi\left(\nabla u\right)\nabla v dx=\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^{N}}g\left(x\right)\left|u\right|^{p-2}uvdx\qquad ,\forall v\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^{N}\right).\end{array}\right. \tag{7.0.2}$$

Ce problème est équivalent à trouver des solutions non triviales u de l'équation

$$I'(u) = 0 \text{ dans } W^{-1,p'}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{7.0.3}$$

où I c'est la fonctionnelle d'énergie donnée par

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Psi\left(\nabla u\right) dx - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g\left(x\right)\left|u\right|^p dx, \qquad \text{pour tout } u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{7.0.4}$$

et $\Psi\left(t\right) = \int_0^t \psi\left(s\right) ds.$

Nous étudions, dans ce travail l'équation 7.0.1 avec une fonction ψ vérifiant les hypothèses suivantes.

Hypothèses

(H_1) Supposons que $1 < q < p < q^*$ et $0 \leq g \in L^{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$

(H_2) L'application $\Psi \in C^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right).$

(H_3) Il existe $c_0 > 0, T > 0$ et $M > 0$ tels que $\left|\Psi\left(t\right)\right| \geq c_0|t|^p$, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ et $\left|\psi\left(s\right)\right| \leq T|s|^{p-1}$ pour tout $s \in \mathbb{R}^N$.

Théorème 7.0.2. *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *l'équation* (7.0.1) *admet une solution faible pour tout* $\lambda > \lambda_1$.

Afin de pouvoir appliquer les techniques du calcul des variations, il est tout d'abord important de se demander comment se comportent les suites de Palais-Smale de I.

Lemme 7.0.3. *I vérifie la condition de Palais-Smale.*

Démonstration. On a

$$I'\left(u\right)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \psi\left(\nabla u\right)\nabla\varphi dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g\left(x\right)\left|u\right|^{p-2} u\varphi dx, \text{ pour tout } u, \varphi \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ une suite vérifie la condition de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$. Ceci signifie que

$$I(u_n) \to c \text{ et } I'(u_n) \to 0 \text{ dans } W^{-1,p'}.$$

Premièrement on démontre que la suite u_n est bornée dans $W^{1,p}$.

Pour tout $v \in W^{1,p}$, on a

$$\begin{aligned}
I(u_n) - \tfrac{1}{p}\left\langle I'(u_n), u_n\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(\nabla u_n)\, dx - \tfrac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\,|u_n|^p\, dx \\
&\quad -\tfrac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\nabla u_n)\,\nabla u_n dx + \tfrac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\,|u_n|^p\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(\nabla u_n)\, dx - \tfrac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\nabla u_n)\,\nabla u_n dx \\
&\geq c_0\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\, dx - \tfrac{T}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\, dx
\end{aligned}$$

Par la condition de Palais-Smale, on obtient

$$\left(c_0 - \frac{T}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\, dx \leq c$$

implique que

$$\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq M.$$

Par conséquence, il existe une sous-suite notée encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente vers u (i.e. $u_n \rightharpoonup u$) dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et fortement convergente vers u (i.e. $u_n \to u$) dans $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$.

On peut facilement trouver que

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u\right\rangle = 0 \tag{7.0.5}$$

et nous avons démontrer précédament dans chapitre (4)que

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)vdx = 0 \text{ pour tout } v \in W^{1,p} \tag{7.0.6}$$

alors d'après (7.0.5) et (7.0.6) on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\psi\left(\nabla u_n\right) - \psi\left(\nabla u\right)\right)\left(\nabla u_n - \nabla u\right)dx = 0.$$

Cette égalité est vrai si et seulement si $\nabla u_n \to \nabla u$, ce qui montre que u_n converge fortement vers u dans $W^{1,p}$. □

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer que I vérifie le théorème du Col.

Lemme 7.0.4. *1. $\exists\rho,\sigma > 0$ tels que $\|u\|_{1,p} = \rho \Longrightarrow I(u) \geq \sigma$.*

2. $\exists u_0 \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tels que $\|u_0\|_{1,p} > \rho$ et $I(u_0) < 0$.

Démonstration. 1. Soit $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, on pose $\rho_1 = \|u\|_{1,p}$, $\rho_2 = \|u\|_{1,q}$, on a :

$I(u) \geq c_0\rho_1^p + \frac{1}{q}\rho_2 - \frac{\lambda}{p}C\|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\rho_1^{pt}\rho_2^{p(1-t)}$

$\geq \rho_1^{pt}\left(c_0\rho_1^{p(1-t)} - \lambda C\|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\rho_2^{q(1-t)}\right)$

où $0 < t < 1$. On peut choisir $\rho_2 = \varepsilon$ et $\rho_1 = \frac{1}{c_0}\left(1 + \frac{\lambda C}{p}\|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\varepsilon_2^{q(1-t)}\right)^{\frac{1}{p(1-t)}}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Par conséquent

$I(u) \geq \left(1 + \frac{1}{p}\lambda C\|g\|_\infty \|g\|^{p(1-t)}_{\left(\frac{q^*}{\alpha}\right)'}\varepsilon_2^{q(1-t)}\right)^{\frac{pt}{p(1-t)}} > 0$

$\forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

2. On note par φ la fonction normalisé associée au première valeur propre λ_1 pour le problème du p-Laplacien suivant

$$-div\left(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\right) = \lambda_1 g\,|\varphi|^{p-2}\,\varphi \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

et

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^p\,dx = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
I(t\varphi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Psi(t\nabla\varphi)\,dx - \frac{\lambda}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|t\varphi|^p\,dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Psi(t\nabla\varphi)\,dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|\varphi|^p\,dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} Tt\,|\nabla\varphi|\,dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|\varphi|^p\,dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} Tt\,|\nabla\varphi|^p\,dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|\varphi|^p\,dx \\
&= Tt - \frac{\lambda t^p}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|\varphi|^p\,dx
\end{aligned}$$

et comme on a $\int\limits_{\mathbb{R}^N} g\,|\varphi|^p\,dx = \frac{1}{\lambda_1}$ on obtient

$$I(t\varphi) \leq Tt - \frac{\lambda t^p}{\lambda_1 p}.$$

Donc pour $\lambda > \lambda_1$, $I(t\varphi) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$, et par conséquent, il existe $t_0 = t_0\varphi$ tels que $I(t_0\varphi) < 0$. $\square$

Démonstration du Théorème 7.0.1. Les conditions du théorème du Col sont satisfaites donc il existe une solution qui est un point critique de la fonctionnelle d'Euler-Lagrange I. □

Conclusion

Une étude approfondie de certains problèmes faisant intervenir l'opérateur (p, q)-Laplacien a été présenté dans cette thèse. Nous étions essentiellement concernés par l'étude des valeurs propres et le problème de résonance. Les méthodes et les résultats présentés dans le présent manuscrit ont différé de ceux du p-Laplacien.

Pour traiter le problème aux valeurs propres, nous étions ramenés à utiliser le théorème du Col au lieu de la théorie du Ljusternick-Schnirelmann.

Du côté des résultats, nous avons démontré que les valeurs propres constituent une famille continue de réels positifs. Nous avons aussi démontré qu'il existe une seule valeur propre principale.

Lorsque nous avons posé le problème de résonance, une difficulté major liée à la non simplicité de la valeur propre principale est apparue et a rendu la décomposition de l'espace des solutions impossible. Nous avons alors proposé d'utiliser le théorème de Leray-Lions qui a assuré l'existence d'au moins une solution non triviale.

Dans une autre direction, nous avons élaboré un résultat de régularité des solutions trouvées et nous avons décrit leur comportement à l'infini. Nous avons clôturer cette thèse par présenter une généralisation de l'opérateur (p, q)-Laplacien que nous souhaitons poursuivre son étude à l'avenir.

Chapitre 8

Appendice

Théorème 8.0.5. *$[Ljusternick - Schnirelmann]$Soient X un espace de Banach, $F \in C^{1,1}_{loc}(X, \mathbb{R})$ et G défini par*

$$G = \{v \in X; pF(v) = 1\} \tag{8.0.1}$$

vérifient

$$\forall v \in G, F^{'}(v) \neq 0 \tag{8.0.2}$$

Soit $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ et $J = E \setminus_G$. On suppose que F et J sont paires, tel que J n'est pas constante, satisfait la condition de Palais-Smale sur G et que $0 \notin G$.

Pour tout entier $K \geq 1$on pose:

$$c_K = \inf_{A \in B_K} \sup_{u \in A} J(v) \tag{8.0.3}$$

où

$$B_k = \{A \in G(X); \gamma(A) \geq K\} \tag{8.0.4}$$

(i)Pour tout$K \geq 1$ tel que $B_k \neq \emptyset$ et $c_K \in \mathbb{R}, c_K$ est une valeur critique de J sur G. De plus $c_K \leq c_{K+1}$, et si pour un entier $j \geq 1$ on a $B_{k+j} \neq \emptyset$ et $c_K = c_{K+j} \in \mathbb{R}$ alors $\gamma\left(K\left(c_K\right)\right) \geq j+1$,où :

$$K\left(c_K\right) = \left\{u \in G; J\left(u\right) = c_K, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } E^{'}\left(u\right) = \lambda F^{'}\left(u\right)\right\}. \qquad (8.0.5)$$

(ii) Si pour tout $K \geq 1$ on a $B_K \neq \emptyset$ et $c_K \in \mathbb{R}$, alors

$$\underset{n \to \infty}{Lim}\ c_k = +\infty \qquad (8.0.6)$$

Bibliographie

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] G. A. Afrouzi and H. Ghorbani, Existence of positive solutions for the p(x)-Laplacian problems, Electronic Journal of Differential Equations, (2007), No. 177, pp. 1–9.

[3] W. Allegretto, Principal eigenvalues for indefinite weight elliptic problems $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992) , 701-706.

[4] W. Allegretto and Y. X. Huang, Eigenvalues of the indefinite weight p-laplacian in weighted space, Funkc. Ekvac. 38 (1995), 233–242.

[5] W. Allegretto and Y. X. Huang, A Picone's Identity for the p-laplacian and Application, Nonlinear Analysis, 32 (1998), 819–830.

[6] C. O. Alves, P. C. Carrião and O. H. Miyagaki, Multiple solutions for a problem with resonance involving the p-Laplacian, Abstr. Appl. Anal., 3, no. $1-2,(1998),191-201$.

[7] C. O. Alves, J.V. Goncalves and O.H. Miyagaki, On elliptic equations in with critical exponents, Electronic Journal of Differential Equations,(1996), No. 09, pp. 1-11.

[8] B. Alziary, J. Fleckinger and P. Takác, Variational metods for a resonant problem with the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, Electronic Journal of Differential Equations, (2004), No. 76, pp. 1–32.

[9] A. Anane, Simplicité et isolation de première valeur propre du p-laplacien avec poids. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série 1, p. 725-728, 1987.

[10] A. Anane and O. Chakrone, Sur un théorème de point critique et application à un problème de non-résonance entre deux valeurs propres de p-Laplacien, Annales de la faculté des sciences de Toulouze Vol IX , No 1(2000) pp 5-30.

[11] A. Anane and N. Tsouli, On a nonresonance condition between the first and the second eigenvalues for the p-Laplacian, Hindawi Publishing Corp 26 :10 (2001) 625–634.

[12] D. Arcoya and L. Orsina, Landesman Lazer conditions and quasilinear elliptic equations, Nonlinear Analysis T.M.A. 28 (1997), $1623 - 1632$.

[13] G. Barles, Remarks on uniqueness result of the first eigenvalue of the p-laplacian. Annales Faculté des Sciences de Toulouse. Vol. IX, No $1, 1988$.

[14] V. Benci and D. Fortunato, Second order elliptic operators on unbounded domains. Boll. Un. Mat. Ital. (5) 15-B(1978), 193-209.

[15] V. Benci, A. M. Micheletti and D. Visetti, An eigenvalue problem for a quasilinear elliptic field equation, J. Differential Equations, 184, No.2 (2002), 299-320.

[16] N. Benouhiba, On the eigenvalues of weighted p(x)-Laplacian on $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis, 74, No.1 (2011), 235-243.

[17] N. Benouhiba and Z. Belyacine, A class of Eigenvalue problems for the (p, q)-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, International Journal of Pure and Applied Mathematics Vol 80. No. 5 (2012), 727-737.

[18] M. S. Berger and M. Schechter, Embedding theorems and quasilinear elliptic boundary value problems for unbounded domains, Trans. Amer. Math. Soc.172(1972).

[19] H. Brézis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, Paris 1983.

[20] H. Brézis and F. E. Browder, Strongly nonlinear elliptic boundary value problems, Annali della scuola normale superior di pisa, tome 5, No 3, (1978), p. 587-603.

[21] K.J. Brown, C. Cosner and J. Fleckinger, Principal eigenvalues for problems with indefinite weight function on $\mathbb{R}^N$, Pro. Amer. Mth. Soc. 109, (1990) , 149-155.), 261-278.

[22] G.I. Buenrostro and G. L. Garza, A resonance problem for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, EJDE Vol. 2005, No. 112, (2005), $1 - 8$.

[23] D. Castorina , P. Esposito and B. Sciunzi, Spectral theory for linearized p-Laplace equations, Nonlinear Analysis vol 74 (2011) 3606–3613.

[24] R. Chippinilli, Compact embeddings of some weighted Sobolev spaces on $\mathbb{R}^N$. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1995) , 117-333.

[25] M. Cuesta, Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights, Electronic Journal of Differential Equations, (2001), No. 33, pp. 1-9.

[26] J.I.Diaz et J.E.Saa, Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasi linéaires, C. R. Acad.Sci. Paris Ser. I. Math., 305 (1987), 521-524.

[27] A. Djellit et N. Benouhiba, Existence de valeurs propres principales pour un problème elliptique en dimension 2. Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste Vol. XXXI, (1999) , $45 - 62$.

[28] A. Djellit et S. Tas, Etude d'une classe des systèmes elliptiques quasi linéaires dérivant d'un potentiel dans $\mathbb{R}^N$, (2007) ,Vol.20, $105 - 117$.

[29] P. Drábek and J. Milota, Methods of Nonlinear Analysis, Applications to di erential equations, Birkhauser Verlag AG (2007).

[30] P. Drábek, Z. Moudan and A. Touzani, Nonlinear homogeneous eigenvalue problem in $\mathbb{R}^N$, Non standard variational approach, Comment. Math. Univ. Carolin. 38(3), (1997), $421 - 431$.

[31] J. I. Dìaz, Nonlinear partial differential equations and free boundaries, Research Notes in Math., Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Vol. I (106) (1985).

[32] S. El Manounia and Kanishka Perera, Multiple non-trivial solutions of the Neumann problem for p-Laplacian systems, Complex Variables and Elliptic Equations Vol. 55, No. 5–6 (2010) pp 573–579.

[33] J. Fleckinger, R.F. Manàsevich, N.M. Stravrakakis and F. de Thélin, Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$, Adv. Diff. Eq. $2(1997), 981 - 1003$.

[34] N. Fukagai, M. Ito and K. Narukawa, Positive solution of quasilinear elliptic equation with critical Orlicz-Sobolev Nonlinearty on $\mathbb{R}^N, 49\ (2006)\, 235 - 267$.

[35] L. Gongabo and Z. Guo, Multiple solutions for the p&q-Laplacian problem with critical exponent, Acta Mathematica Scientia 2009, 29B (4) pp 903–918

[36] B. Hanouzet, Espace de Sobolev à poids, Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace, Rende. Sem. Univ. Pdova, (1971), pp 227-278.

[37] C. He and G. Li, The existence of nontrivial solution of the p-q-Laplacian problem with nonlinearity asymptotic to u^{p-1} at infinity in $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis 68 (2008) pp $1100 - 1119$.

[38] C. He and G. Li, The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing p&q-Laplacians, Annales Academi Scientiarum Mathematica Fennic , Vol. 33, (2008), $337 - 37$.

[39] P. S. Iliaş, P-laplacien à Poids Indéfini, Vol. LVIII. No. 2(2006), 49 - 56.

[40] Y. K. Huang, Eigenvalues of the p-laplacian in $\mathbb{R}^N$ with indefinite weight, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 36 (1995), No. 3, 519–527.

[41] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, Nancy, (1993).

[42] M.A. Krasnoselskii, Topological methods in the theory of non linear integral equations, Oxford, Pergamon Press, (1964).

[43] A. Lê, Eigenvalue problems for the p-laplacian, Nonlinear Anaysis 64(2006) 1057-1099.

[44] P. Lindqvist, Note on a nonlinear eigenvalue problem, Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), no. 1, 281–288.

[45] G. Li, G. Zhang, Multiple solutions for the p-q-Laplacian problem with critical exponent, Acta Mathematica Scientia, 29B, No.4 (2009), $903-918$.

[46] R. F. Manásevich and M. A. Del Pino, Global Birfurcation from the eigenvalues of the p-Laplacian. J. Diff. Equ., 92 (2), (1991) 226–251.

[47] G. Li, X. Liang, The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of p-q-Laplacian type on $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis 71 (2009) $2316-2334$.

[48] T. F. Ma and M. L. Pelicer, Perturbations near resonance for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, Abstr. and Applied Anaysis $7;6$ (2002), $323-334$.

[49] S. Martinez and J. D. Rossi, Isolation and simplicity for the first eigenvalue of the p-Laplacian with a nonlinear boundary condition, Abstract and Applied Analysis $7:5(2002)287-293$.

[50] L. Nirenberg, Variational and topological methods in nonlinear problems, Bull. Amer. Math. Soc., $4, No.3(1981), 267-302$.

[51] M. Ôtani, On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type inequalities, Nonlinear Anal. 8 (11), (1984), 1255–1270.

[52] K. Pereraa, Nontrivial critical groups in p-Laplacian problems via the yang index, Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center Volume 21, 2003, pp 301–309.

[53] K. Pereraa and Z. Zhang, Multiple positive solutions of singular p-Laplacian problems by variational methods, Boundary Value Problems 2005 :3 (2005) pp 377–382.

[54] M N Poulou and Nikoloas M. Stavrakakis, Eigenvalue problems for a quasilinear elliptic equation on $\mathbb{R}^N$, (2005) 2871–2882.

[55] N. C. Kourogenis and N. S. Papageorgiou, Multiple solutions for nonlinear discontinuous strongly resonant elliptic problems, Abstract and Applied Analysis $5:2(2000)$ pp $119-135$.

[56] W. M. Ni J. Serrin, Existence and nonexistence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations of the anomalous case, Acad. Naz. Lincei 77, 231–287, 1986.

[57] J. Serin, Local behavior of solutions of quasilinear equations, Acta Math. 111 (1964), pp 247-302.

[58] M. Schechter, Strong resonance problems for elliptic semilinear boundary value problems, J Operator theory 30 (1993), pp 301-314.

[59] H. Shaw, A nonlinear elliptic boundary value problem at resonance, Journal of differential equations 26, pp 335-346 (1977).

[60] N. Sidiroplous, Existence of solutions to indefinite quasilinear elliptic problem of p-q-Laplacian type, Electronic Journal of Differential Equations, Vol 2010 (2010) , No. 162, pp. $1-23$.

[61] J. Su, Semilinear elliptic boundary value problems with double resonance between two consecutive eigenvalues, Nonlinear Analysis 48 (2002) pp 881-895

[62] J. Su, Semilinear Elliptic Resonant Problems at Higher Eigenvalue with Unbounded Nonlinear Terms, Acta Mathematica Sinica, New Series 1998, July, Vol. 14, No.3, pp. $411 - 118$.

[63] A. Szulkin and M. Willem, Eigenvalue problems with indefinite weight, Studia Math. 135, pp 191–201(1999).

[64] F. de Thélin, Quelques résultats d'existence et de nonexistence pour une EDP elliptique nonlinéaire, C. R. Acad. Sci. Paris. 229 Série I, 18 : 839–844, 1984.

[65] T. Thi Minh Hang and H. Quoc Toan, On existence of weak solutions of neumann problem for quasilinear elliptic equations involving p-Laplacian an unbounded domain, Bull. Korean Math. Soc. 48 (2011), No. 6, pp. 1169-1182.

[66] A. Tertikas, Critical phenomena in linear elliptic problems, J. Funct. Anal. 145(1998), pp 42-66.

[67] V. Trénoguine, Analyse fonctionnelle, Moscou, éd. Mir, (1985) .

[68] N.S. Trudinger, On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations, Comm. Pure. Appl. Math. 20 (1967), pp 721-747.

[69] M. Wu and Z. Yang, A class of p-q-Laplacian type equation with potential eigenvalue problem in $\mathbb{R}^N$, Hindawi publishing corporation Boundary Value Problems Volume 2009,pp $1 - 19$.

[70] H. Yin, Z. Yang, A class of p-q-Laplacian type equation with concave-convex nonlinearities in bounded domain, J. Math. Anal. Appl., 382(2011), pp $843 - 855$.

[71] E. Zeidler, Nonlinear Functional analysis and its applications II-B, Springer-Verlag, New York, (1980) .

[72] E. Zeidler, Nonlinear Functional analysis and its applications III-B, Springer-Verlag, New York, (1980).