



Faculté des sciences de l'Ingénieur

Année 2006

Département d'Electronique

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT**

Contrôle des Systèmes Dynamiques par Approche Diffusive

Option
Contrôle

Par

Badreddine BOUDJEHEM

Soutenu le 27 juin 2006

DEVANT LE JURY

DIRECTEUR DE THESE : Hicham TEBBIKH

Professeur

U. de Guelma

PRESIDENT : Nouredine DOUGHMANE

Professeur

U. de Annaba

**EXAMINATEURS : Hadj Ahmed ABASSI
Rachida GHOUL-HADIBY
Salah BADRAOUI**

Professeur

Maître de conférences

Maître de conférences

U. de Annaba

U. de Constantine

U. de Guelma

ملخص

$$dX/dt=AX$$

A

ABSTRACT

The diffusive representation concept allows a non hereditary realization of pseudodifferential operators. This new approach is based on the particular behavior inputs/outputs of an appropriate dissipative diffusion equation, of which the infinite dimension state variable is used to summarize the history of the input, so that convolutions products of long memory, defined by the fractional operators, are available in output. This representation permits to have an increased system that can get under the abstract form $dX/dt = AX$ where A is an infinitesimal generator of a semi group, that permits the application of study and analysis tools possible in control, notably the stability study by Lyapunov. The numerical approximation is carried out in simple manner, it is only sufficient to respect really some criteria's to have a good approximation.

The object of this thesis is the application of this approach to dynamical control system by two different concepts.

The first one has very important problems that is the stabilization of flexible structures, as plates and beams, which are a distributed parameters systems. The difficulty comes because it is necessary to suppress all oscillations that can take birth in the system. This difficulty is generally linked to the great numbers of significant vibration modes whose frequency and shape sensitivity to inevitable modeling errors is excessive. Then, the modal analysis cannot provide a sufficiently precise model on a rich frequencies modal range. We present in this work a flexible arm control in the case where the arm is articulated to an extremity and free to the other extremity with a vertical translation base and in another case where the basis of the articulated point of the arm is fixed. The principle is based on the waves absorption boundary control by of to which are particular conditions are associated. The synthesis of such control, in frequency domain, involve the fractional differential operators whose non hereditary realization is based on diffusive representation. The global passive nature of the closed loop system confers to the control an unconditional robust nature.

The second concept treated in this thesis is a new robust control type so-called "Pseudo-Invariant" based on the diffusive approach and that permits to control the dynamic systems whose parameters are uncertain or unknown. The fundamental property of this control is to preserve as much that possible and on the all uncertainty domain of uncertain parameter, the dynamic features of the nominal system imposed by a classic control, with time-scaling (frequency). We apply this concept to DC motor control with uncertain transfer function. The uncertainty is carried at the inertia, the load and the time constant of the current closed loop. The comparison with the classic control shows the efficiency of the pseudo - invariant control notably its robustness.

RESUME

Le concept de représentation diffusive permet une réalisation non héréditaire des opérateurs intégro-différentiels fractionnaires. Cette nouvelle approche est basée sur le comportement entrées/sorties particulier d'une équation de diffusion convenable de nature dissipative, dont la dimension infinie de la variable d'état est utilisée pour résumer l'histoire de l'entrée, de telle sorte que les convolutions à mémoire longue, définie par les opérateurs fractionnaires, soient disponibles en sortie. Cette représentation permet d'avoir un système augmenté qui peut se mettre sous la forme abstraite $dX/dt = AX$ où A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe, ce qui rend l'application des outils d'étude et d'analyse en contrôle possible, notamment l'étude de la stabilité par Lyapunov. La mise en œuvre numérique est souple et très simple, il suffit seulement de bien respecter certains critères pour avoir une bonne approximation.

L'objet de cette thèse est l'application de cette approche au contrôle des systèmes dynamiques par deux concepts différents.

Le premier concerne un des problèmes très importants dans ce domaine qui est la stabilisation des structures flexibles, tel que les plaques et les poutres, qui sont des systèmes à paramètres répartis. La difficulté vient du fait qu'il faut supprimer toutes les oscillations qui peuvent prendre naissance dans le système. Cette difficulté est liée généralement au grand nombre de modes de vibrations significatives dont la fréquence et la forme sont très sensibles aux inévitables erreurs de modélisation. Alors, l'analyse modale ne peut pas fournir un modèle suffisamment précis sur une gamme modale riche en fréquences. Nous présentons dans ce travail le contrôle d'un bras flexible dans un cas où le bras est articulé à une extrémité et libre à l'autre extrémité avec une translation verticale de sa base et dans un autre cas où la base d'articulation du bras est fixe. Le principe est basé sur le contrôle frontière par absorption d'ondes auquel sont associées des conditions aux limites particulières. La synthèse de tel contrôle, dans le domaine fréquentiel, fait intervenir des opérateurs différentiels fractionnaires dont la réalisation non héréditaire est basée sur la représentation diffusive. La nature globale passive du système bouclé confère au contrôle une nature robuste inconditionnelle.

Le deuxième concept traité dans cette thèse est un nouveau type de contrôle robuste dit "Pseudo-invariant" basé sur l'approche diffusive et qui permet de contrôler les systèmes dynamiques dont les paramètres sont incertains ou mal connues. La propriété fondamentale de ce contrôle est de conserver autant que possible et sur tout le domaine d'incertitude des paramètres incertains, les caractéristiques dynamiques du système nominal imposées dans le cas d'un contrôle par une approche classique, ceci à un changement de temps (ou de fréquence) près. Nous appliquons ce concept au contrôle d'un moteur à courant continu dont la fonction de transfert est incertaine. L'incertitude est portée sur le moment d'inertie, la charge et la constante de temps de la boucle de courant. La comparaison avec la commande classique montre l'efficacité du contrôle pseudo-invariant notamment sa robustesse.

DEDICACE

Je dEdie ce travail A
Mes Parents
Ma femme
Mes FrÈres

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur Hicham TEBBIKH, professeur à l'université de Guelma, qui a guidé avec efficacité et cordialité le développement de cette thèse. Son soutien, tant scientifique que moral, m'a beaucoup aidé et je suis heureux de pouvoir lui exprimer ici ma profonde gratitude.

Je remercie également les membres de jury, Monsieur DOGHMANE Nouredine, professeur à l'université de Annaba pour avoir accepté de présider ce jury. Messieurs ABASSI HADJ Ahmed professeur à l'université de Annaba, GHOUL-HADIBY Rachida Maître de conférences à l'université de Constantine, et BADRAOUI Salah Maître de conférences à l'université de Guelma, pour avoir accepté de juger cette thèse.

Liste des tableaux

Tab.	Titre	Page
2.1	Fréquences propres du bras flexible articulé avec translation de base	36
3.1	Fréquences propres du bras flexible articulé sans translation de base	52

Liste des Figures

Fig.	Titre	Page
1.1	Choix de la fonction d'interpolation sur les segments internes	16
1.2	Choix de la fonction d'interpolation sur les segments extrêmes	17
1.3	Diagramme de Bode d'un intégrateur fractionnaire d'ordre 1/2 approché par représentation diffusive	19
1.4	Diagramme de Bode d'un dérivateur fractionnaire d'ordre 1/2 approché par représentation diffusive	19
1.5	Mauvaise approximation d'un dérivateur fractionnaire d'ordre 1/2	20
2.1	Bras flexible attaché au bras rigide	22
2.2	Bras flexible articulé libre avec translation de base	22
2.3	Système bras réel et bras virtuel	24
2.4	Décomposition des ondes	24
2.5	Ondes entrantes et sortantes à l'extrémité articulée	26
2.6	Contrôle par retour fractionnaire d'un bras flexible articulé avec translation de base	29
2.7	Déflexion du bras dans le cas autonome	40
2.8	Déflexion du bras avec contrôle	40
2.9	Forme initiale et finale du bras	41
2.10	Evolution du bout du bras avec contrôle	41
2.11	Energie mécanique du bras flexible	41
3.1	Bras flexible articulé à base fixe	42
3.2	Système bras réel et bras virtuel	43
3.3	Ondes entrantes et sortantes à l'extrémité articulée	44
3.4	Contrôle par retour fractionnaire d'un bras flexible articulé sans translation de base	47
3.5	Comportement en 2D du bras dans le cas autonome	55
3.6	Comportement en 3D du bras dans le cas autonome	55
3.7	Comportement en 3D du bras contrôlé	55
3.8	Comportement en 2D du bras contrôlé	55

3.9	Energie du bras dans le cas autonome	55
4.1	Structure d'un contrôle pseudo-invariant sou changement de fréquence	59
4.2	Structure d'un contrôle pseudo-invariant sous groupe de transformation	59
4.3	Structure d'un contrôle diffusive pseudo-invariant	61
4.4	Diagramme structurel d'un moteur à courant	63
4.5	Boucle de courant	64
4.6	Boucle de vitesse classique	64
4.7	Réponse indicielle en poursuite avec commande classique <i>avec $\lambda=[J, T_{bc}], \Lambda=[0.1, 1] \times T_{bc}$</i>	65
4.8	Commande pseudo-invariant de moteur à C. C. (Invariance stricte	66
4.9	Réponse indicielle du moteur avec un correcteur classique et un correcteur fractionnaire pour $J=J_{max}$	68
4.10	Approximation numérique du compensateur $K_{\mu}(p)$	68
4.11	Réponse indicielle du système avec le compensateur $K_{\mu}(p)$ avec $\lambda=[J, T_{bc}]$ et $\Lambda=[0.1, 1] \times T_{bc}$	69
4.12	Diagramme de Bode du système avec le correcteur fractionnaire	69
4.13	Réponse indicielle du système avec le compensateur $K_{\mu}(p)$ avec $\lambda=[J, T_{bc}]$ et $\Lambda=[0.1, 1] \times [0.01, 0.1]$	71
4.14	Réponse fréquentielle du compensateur $K_{\mu}(p)$ dans le cas d'invariance stricte (S-I) et l'invariance non stricte (NS-I)	71

Liste des Symboles

α : Ordre fractionnaire

I^α : Opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre α

D^α : Opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α

Γ : Fonction gamma

$\| \cdot \|_{L^2}$: Norme Hilbertien

∂_t^α : Opérateur modifier de dérivation fractionnaire d'ordre α

$\mu(\xi)$, $\nu(\xi)$ et $\eta(\xi)$: Représentations diffusives (Symboles diffusifs)

$\varphi(t, \xi)$ et $\psi(t, \xi)$: Réalisations diffusives (Variables auxiliaires de diffusion)

p : Variable de Laplace.

L : Transformé de Laplace.

ξ : Variable diffusive.

$H(p)$: Fonction de transfert.

$H_\lambda(p)$: Fonction de transfert incertain.

$F(p)$: Fonction de transfert en boucle fermée

$K(p)$: Compensateur

$K_\mu(p)$: Compensateur diffusif

$h(t)$: Réponse impulsionnelle.

X : Variable d'état.

Λ : Fonction d'interpolation (chapitre 1).

$\tilde{\varphi}$: Réalisation diffusive approchée.

$y(x, t)$: Déflexion du bras en position x à l'instant t .

θ : Angle.

$M(t)$: Couple.

$F(t)$: Force.

H_p et H_G : Espaces d'Hilbert

$H(0,1)$ et H^4 : Espaces de sobolov .

E_X : Energie globale.

E_b : Energie mécanique du bras.

E_ψ et E_φ : Energies des diffusions

a : Vecteur d'amplitude d'ondes incidentes.

b : Vecteur d'amplitude d'ondes réfléchissantes.

S_{OL} : Matrice de réflexion en boucle ouverte.

S_{CL} : Matrice de réflexion en boucle fermée.

W : Vecteur d'amplitude d'ondes incidentes et réfléchissantes.

γ : Coefficient de propagation.

ω : Pulsation.

F_{ext} : Vecteur des forces.

Φ_i : Fonction propre du mode i .

β_i : Fréquences propres

$q(t)$: Coefficient temporels de l'analyse modale.

Θ : Fonction du poids

ζ : Groupe des fonctions continues

T_σ : Transformation de groupe définie par σ

Λ : Ensemble des paramètres incertains (chapitre 4).

κ : Espace des compensateurs

K_0 : Compensateur de référence.

λ : Paramètres incertains

λ_0 : Paramètres nominales

J : Moment d'inertie du moteur

T_{bc} : Constante de temps de la boucle de courant du moteur

L et r : Inductance et résistance du moteur

Re : Partie réelle

\mathfrak{R} : Ensembles des nombres réels

Table des matières

Liste des tableaux	vi
Liste des figures	vii
Liste des symboles	ix

Introduction Générale

1. Problématique.....	1
2. Etat de l'art	2
3. Contribution	3
4. Résultats	4
5. Organisation de la thèse	5

Chapitre 1 : Représentation Diffusive

1.1 Introduction	6
1.2 Calcul fractionnaire.....	6
1.2.1. Opérateur fractionnaire.....	6
1.2.2 Système fractionnaire	7
1.2.3 Champs d'application	7
1.2.4 Problème liées au calcul fractionnaire.....	8
1.3 Représentation diffusive	8
1.3.1 Principe.....	8
1.3.2 Représentation diffusive	9
1.3.3 Représentation diffusive étendue par dérivation	11
1.3.4 Calcul direct du symbole diffusif	11
1.3.5 Exemples de symboles diffusifs	12
1.3.6 Avantages de la représentation diffusive	13
1.4 Approximation numérique	13
1.4.1 Principe	13
1.4.2 Discrétisation en temps	14
1.4.3 Approximation numérique étendue par dérivation	15
1.4.4 Choix des paramètres de l'approximation numérique	15
1.4.5 Erreur et convergence	18
1.5 Simulation numérique	18
1.6 Conclusion	20

Chapitre 2 : Contrôle Diffusif d'un Bras Flexible Articulé avec Translation de Base

2.1 Introduction	21
2.2 Dynamique du bras.....	21

2.2.1	Description du bras flexible avec translation de base	21
2.2.2	Modèle mathématique	22
2.3	Contrôle fractionnaire absorbant d'ondes.....	23
2.3.1	Principe.....	23
2.3.2	Décomposition du bras suivant ses modes d'onde	24
2.3.3	Synthèse du contrôle	26
2.3.4	Système global	28
2.4	Contrôle diffusif	29
2.4.1	Réalisation diffusive du contrôleur.....	29
2.4.2	Système augmenté.....	30
2.4.3	Etude de la stabilité.....	30
2.5	Approximation numérique.....	33
2.5.1	Principe	33
2.5.2	Représentation modale du bras flexible.....	33
2.5.3	Calcul des fonctions propres du bras.....	34
2.5.4	Résolution du système.....	37
2.5.5	Discretisation en temps.....	37
2.6	Simulation numérique.....	39
2.6.1	Données de la simulation.....	39
2.6.2	Interprétation des résultats.....	39
2.7	Conclusion	41

Chapitre 3 : Contrôle Diffusif d'un Bras Flexible à Base Articulé

3.1	Introduction	42
3.2	Dynamique du bras.....	42
3.3	Contrôle Fractionnaire Absorbant d'ondes.....	43
3.3.1	Principe	43
3.3.2	Synthèse du contrôle.....	44
3.3.3	Système global.....	46
3.4	Contrôle diffusif	47
3.4.1	Réalisation diffusive du contrôleur.....	47
3.4.2	Système augmenté.....	47
3.4.3	Etude de la stabilité.....	48
3.5	Approximation numérique.....	50
3.5.1	Représentation modale du Bras.....	50
3.5.2	Calcul des fonctions propres du bras.....	51
3.5.3	Résolution du système.....	53
3.6	Simulation numérique.....	54
3.7	Conclusion	56

Chapitre 4 : Contrôle Diffusif Pseudo-Invariant et Application à un Moteur à C. C.

4.1	Introduction.....	57
4.2	Théorie du contrôle pseudo-invariant	57
4.2.1	Principe.....	57
4.2.2	Invariance sous changement de fréquence.....	58
4.2.3	Invariance sous groupe de transformation	59
4.3	Contrôle diffusive pseudo-invariant.....	61
4.3.1	Formulation diffusive.....	61

4.3.2 Algorithme de résolution	62
4.4 Application à la Commande d'un moteur À C. C.....	63
4.4.1 Commande classique d'un moteur à C. C	63
4.4.2 Commande pseudo-invariant d'un moteur à C. C.....	65
4.5 Conclusion	71
Conclusion générale.....	73
Références.....	74

Introduction Générale

1- Problématique

Au cours des dernières années, l'usage d'opérateurs non standards, comme par exemple les opérateurs intégr-différentiels fractionnaires, s'est fortement répandu dans de nombreuses disciplines. En effet, l'intérêt théorique et pratique de ces opérateurs est désormais bien établi, en particulier :

- Ils apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes de modélisation en rhéologie des polymères ou viscoélasticité [72], en acoustique, combustion, en composants électroniques, en μ -ondes, etc. [36]
- la modélisation de certains phénomènes physiques dans l'équation de la dynamique des matériaux.
- La réalisation des composants électroniques à impédance fractionnaire [31] et [77].
- Dans le domaine des signaux et leur traitement, ils sont utilisés pour la modélisation et l'approximation markoviennes de bruit de composants électroniques [18], [30], [37] et [38] identification statistique et pour le filtrage [10].
- Le contrôle des systèmes par des correcteurs fractionnaires (PI fractionnaire, PID fractionnaire...etc. [40] et [68]).
- Les opérateurs fractionnaires apparaissent de façons naturelles lors du contrôle des structures flexibles telles que les plaques et les poutres par absorption des ondes réfléchissantes [49], [46], [47] et [79].
- La propriété d'invariance de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire présente un point de départ pour le contrôle des systèmes dynamiques incertains [6] et [67].

Les difficultés liées aux opérateurs fractionnaires ont fortement limité les applications pratiques. L'inconvénient majeur est le comportement héréditaire : L'étude de l'évolution d'un système possédant des termes fractionnaires nécessite a priori le stockage en mémoire de tout le passé du processus. De plus la nature du noyau de convolution qui décrit de tels opérateurs impose un pas de temps très petit et un domaine d'intégration très étendu. En outre, on ne peut pas obtenir un système sous la forme d'état standard, ce qui rend l'application des outils classiques de l'étude et de l'analyse en contrôle très difficile ou impossible et limite, notamment l'étude de la stabilité.

Introduite il y a une dizaine d'années au LAAS/CNRS France par G. Montseny [65] et développée, par la suite à une échelle internationale, par plusieurs laboratoires [4], [8], [32], [41] et [74], la "Représentation Diffusive" est une représentation symbolique qui permet d'avoir une réalisation non héréditaire d'opérateurs pseudo-différentiels.

Cette nouvelle approche est basée sur le comportement entrées/sorties particuliers d'une équation de diffusion convenable de nature dissipative, dont la dimension infinie de la

variable d'état est en quelque sorte utilisée pour résumer l'histoire de l'entrée, de telle sorte que les convolutions à mémoire longue définie par les opérateurs fractionnaires soient disponibles en sortie. Cette représentation permet d'avoir un système augmenté qui peut se mettre sous la forme abstraite $dX/dt=AX$ où A est générateur infinitésimale d'un semi groupe, ce qui rend l'application des outils d'étude et d'analyse en contrôle possible ; notamment l'étude de la stabilité par Lyapunov. La mise en œuvre numérique est très simple et souple. Le travail présenté dans [32] montre qu'il est possible d'avoir une bonne approximation de tels opérateurs si nous respectons quelques critères bien définis.

Par sa structure algébrico-topologique souple et bien adaptée à l'analyse, l'approximation et la simulation, la classe des opérateurs pseudo-différentiels sous la représentation diffusive permet d'aborder dans un cadre unifié une grande variété de problèmes non standards très actuels.

Nous citons par exemple la stabilisation d'une poutre encastree par adaptation d'impédance [11], le contrôle d'un bras flexible articulé [13] et [73], le contrôle des systèmes viscoélastiques [19], identification optimale de la dynamique des systèmes [28],...etc.

Un des problèmes très importants dans ce domaine est la réduction du comportement vibratoire des structures flexibles tel que les plaques et les poutres, qui sont des systèmes à paramètres répartis. La difficulté vient du fait qu'il faut supprimer toutes les oscillations qui peuvent prendre naissance dans le système. Cette difficulté est liée généralement au grand nombre de modes de vibrations significatives dont la fréquence et la forme sont très sensibles aux inévitables erreurs de modélisation. Alors, l'analyse modale ne peut pas fournir un modèle suffisamment précis sur une gamme modale riche en fréquences.

Le contrôle par l'approche passive consiste à ne prendre en compte que les propriétés locales de vibration. Les propriétés de propagation sont locales et ne dépendent que de quelques paramètres physiques, contrairement aux modes et fréquences propres qui eux, dépendent en outre de la géométrie du domaine de vibration.

L'atténuation de vibration commence par le point de vue que, dans beaucoup de cas, il peut être profitable de regarder la réponse d'une structure flexible à une force typique, localement appliquée, en terme de perturbations élastiques de déplacement. Généralement, les forces les plus grandes commencent aux bords. Ce point de vue mène naturellement à penser qu'il peut être possible de modifier les chemins normaux des perturbations pour manœuvrer ou diriger autrement l'énergie dans la structure. Alors, il n'est pas nécessaire d'observer les vibrations tout le long du bras pour réaliser le contrôle. Il suffit de connaître les vibrations arrivants au bout pour avoir un contrôle sur les ondes réfléchissantes indépendamment de la vibration, globale. Donc, il s'agit d'observer ces ondes par une impédance terminale.

2- Etat de l'art

L'idée de stabiliser les systèmes par absorption d'onde est d'abord appliquée aux systèmes représentés par l'équation d'onde, corde, câble élastique [49] et récemment prolongé à l'équation des poutres et d'autres structures flexibles. Ce type de contrôle est appliqué à une

poutre flexible encastrée / libre [79]. Les fonctions de transfert des compensateurs sont des fonctions irrationnelles. Leurs réalisations ont été effectuées expérimentalement par des compensateurs analogiques.

Le même problème a été étudié en [62], et le compensateur absorbant dont la fonction de transfert est irrationnelle est simulé numériquement. En [46] les auteurs ont étudié aussi le problème de vibration des poutres avec un autre principe, basé sur la minimisation des effets des ondes réfléchissantes aux ondes incidentes dans le sens que la norme H_∞ de la matrice de réflexion soit minimale. Les compensateurs trouvés ont des fonctions de transfert irrationnelles qui sont approchées pour être des polynômes rationnels par l'expansion fractionnaire continue.

Pour le contrôle des systèmes dynamiques incertains, c'est à dire dont les paramètres sont mal connus, nécessite la mise en œuvre de lois de commandes capables d'assurer un bon compromis entre performances et robustesse.

Un nouveau concept de robustesse très récent est introduit dans [59] dit "pseudo-invariant". Il a pour origine l'approche "CRONE" introduite et développée par A. Oustaloup [66]. La propriété fondamentale du contrôle pseudo-invariant est de conserver autant que possible et sur tout le domaine d'incertitude, les caractéristiques dynamiques imposées par le contrôle du système nominal par les approches classiques, ceci à un changement de temps (ou de fréquence) près. Le contrôle pseudo-invariant présentera aussi une réponse à un échelon de forme quasi-invariante à une dilatation des temps près, le coefficient de dilatation (le changement de temps) étant directement en fonction du paramètre incertain qui présente l'un des inconnus du problème, l'autre inconnu étant le contrôleur dynamique indépendant du paramètre incertain.

Le problème du contrôle pseudo-invariant est formulé par la représentation diffusible [3] et [23]. Cette formulation présente un grand avantage notamment sur la garantie d'existence des solutions causales possibles ainsi que la réalisation concrète par voie numérique sous approximation en dimension finie.

3- Contribution

Notre contribution se concentre à traiter les points suivants :

1- Réalisation diffusible d'opérateur pseudo-différentiel : choix des paramètres, calcul des coefficients et simulation numérique des opérateurs utilisés.

2- Le contrôle d'un bras flexible dans un cas où le bras est articulé à une extrémité et libre à l'autre extrémité avec une translation verticale de sa base et dans un autre cas où la base d'articulation du bras est fixe.

La théorie appliquée est basée sur le contrôle frontière par absorption d'ondes auquel sont associées des conditions aux limites particulières (suivant le cas considéré). Le principe de contrôle est de minimiser les effets des ondes incidentes sur les ondes réfléchissantes. La synthèse de tel contrôle, dans le domaine fréquentiel, fait intervenir des opérateurs

différentiels fractionnaires. La réalisation non héréditaire de ces opérateurs est basée sur la théorie de la représentation diffusive.

3- La théorie du contrôle diffusif pseudo-invariant. L'invariance peut être atteinte sous changement d'échelle de fréquence ou sous transformation de groupe. Les compensateurs conférant au système considéré la propriété d'invariance sont de type pseudo-différentiel.

Nous appliquons ce concept au contrôle d'un moteur à courant continu dont la fonction de transfert est incertaine. L'incertitude est portée sur le moment d'inertie, la charge et la constante de temps de la boucle de courant. Le modèle du moteur à c.c est choisi de telle sorte à avoir l'invariance sous changement de fréquence et l'invariance sous groupe de transformation. La comparaison avec la commande classique montre l'efficacité du contrôle pseudo-invariant notamment sa robustesse.

4- Résultats

Les résultats obtenus ont conduit aux communications et publications suivantes :

- 1- H. Tebbikh, G. Montseny, B. Boudjehem "Opérateurs pseudo-différentiels et stabilisation des structures vibrantes ", 2ème Col.Nat.de de Mathématique 7-8-9 Mai 2000, tebessa, Algérie.
- 2- B. Boudjehem, G. Montseny, H. Tebbikh," Contrôle diffusif d'un bras flexible", First International Conference on Electrical Engineering, 4-6 Nov. 2000, Boumerdes, Algeria.
- 3- B. Boudjehem, H. Tebbikh, G. Montseny, " Stabilisation d'une poutre vibrantes par approche diffusive", Conférence Maghrébine en Génie Electrique, 5-6 Nov. 2001, Constantine, Algérie.
- 4- B. Boudjehem, H. Tebbikh," Commande diffusive robuste d'un moteur à courant continue", Conférence sur Génie Electrique, 25-26 Dec.2001, Ecole Militaire polytechnique, Alger, Algérie.
- 5- B. Boudjehem, G. Montseny, H. Tebbikh," Robust wave-absorbing control of an articulated flexible arm", 4th Jordanian International Electrical and Electronics Engineering Conference sous parrainage IEEE, 16-18 April 2001, Amman, Jordan.
- 6- B. Boudjehem, H. Tebbikh, G. Montseny, " Fractional feedback control for hinged flexible beam attached to a rigid arm via diffusive representation", Proceedings of the 5th WSEAS Int. Conf. on SMO, august 17-19, 2005, pp118-122, Corfu, Greece.
- 7- B. Boudjehem, H. Tebbikh, G. Montseny, " Fractional feedback control for hinged flexible beam attached to a rigid arm via diffusive representation", WSEAS Transaction on Systems, issue 9, Vol. 4, September 2005.
- 8- R. Tebbikh, B. Boudjehem, L. Chaabi, H. Tebbikh," Diffusif pseudo differential control of flexible beam", WSEAS Transaction on Systems, issue 4, Vol. 5, April 2006

5- Organisation de la thèse

La thèse est organisée en quatre chapitres :

Le chapitre 1 présente les principales propriétés du calcul fractionnaire, les difficultés qui lui sont liées et présente aussi la théorie de la représentation diffusive d'opérateurs fractionnaires ainsi que l'approximation numérique correspondante.

Le chapitre 2 concerne l'étude et l'analyse théorique du contrôle du bras flexible articulé avec translation de base afin d'évaluer et construire des compensateurs diffusifs absorbeurs d'ondes. En outre, il présente l'approximation et la simulation numérique du système augmenté ainsi que l'interprétation des principaux résultats obtenus.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude et l'analyse du contrôle du bras flexible articulé sans déplacement de la base d'articulation. Les résultats de l'approximation numérique du système sont présentés.

Dans le chapitre 4, nous introduisons la théorie du concept de contrôle diffusif pseudo-invariant et son application au contrôle d'un moteur à courant continu.

Chapitre 1

Représentation Diffusive

1.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente quelques notions sur le calcul fractionnaire, son champ d'application et les difficultés qui lui sont liées. Nous présentons aussi une nouvelle approche pour la réalisation d'opérateurs fractionnaires dite "représentation diffusive". Cette représentation est bien adaptée à l'étude et à l'analyse des systèmes différentiels d'ordres fractionnaires et notamment le problème de la stabilité.

Les notions théoriques essentielles sont introduites de façon détaillée ainsi que l'approximation numérique qui présente un avantage majeur de la représentation diffusive.

1.2 CALCUL FRACTIONNAIRE

1.2.1 Opérateur fractionnaire

L'intégration et la dérivation fractionnaires d'ordre $\mathbf{a} \in [0 + \infty]$ d'une fonction causale f , formulées par Riemann-Liouville, sont données par [52] :

$$I^{\mathbf{a}} f(t) = \int_0^t \frac{(t-t)^{\mathbf{a}-1}}{\Gamma(\mathbf{a})} f(t) dt \quad (1.01)$$

$$D_t^{\mathbf{a}} f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-t)^{-\mathbf{a}}}{\mathbf{G}(1-\mathbf{a})} f(t) dt \quad (1.02)$$

où \mathbf{G} est la fonction Gamma définie par l'expression :

$$\mathbf{G}(\mathbf{a}) = \int_0^{\infty} t^{\mathbf{a}-1} e^{-t} dt \quad (1.03)$$

L'opérateur modifié de dérivation d'ordre \mathbf{a} est défini par :

$$\partial_t^a f(t) = \int_0^t \frac{(t-t)^{-a}}{\Gamma(1-a)} \frac{df(t)}{dt} dt \quad (1.04)$$

L'intégration et la dérivation fractionnaires d'ordre $\mathbf{a} = 1/2$ sont respectivement $\frac{2\sqrt{t}}{\mathbf{p}}$ et $2\sqrt{\frac{t}{\mathbf{p}}}$.

Les transformées de Laplace de l'intégration et de la dérivation d'ordre \mathbf{a} d'une fonction f sont données par :

$$L\{I^a f(t)\} = p^{-a} F(p) \quad (1.05)$$

$$\begin{aligned} L\{D^a f(t)\} &= p^a F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[D^{a-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad n-1 \leq a \leq n \\ &= p^a F(p) - \left[D^{a-1} f(t) \right] \end{aligned} \quad (1.06)$$

où L désigne la transformée de Laplace et $L\{f(t)\} = F(p)$.

1.2.2 Système fractionnaire

Un système fractionnaire linéaire à coefficients constants, d'entrée f et de sortie y , peut être représenté par une équation différentielle d'ordre fractionnaire donnée par l'expression :

$$\sum_{k=0}^K a_k \left(\frac{d}{dt} \right)^{a_k} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m \left(\frac{d}{dt} \right)^{b_m} f(t) \quad (1.07)$$

où K et M sont deux nombres entiers, $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_m$ sont des nombres réels et a_k, b_m sont des constantes arbitraires.

Par transformée de Laplace de (1.07), on obtient le système fractionnaire suivant :

$$H(p) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m p^{b_m}}{\sum_{k=0}^K a_k p^{a_k}} \quad (1.08)$$

S'il existe k, l et m tels que $\mathbf{a}_k = m\mathbf{a}_l$ $\mathbf{b}_m = k\mathbf{a}_l$, alors le système fractionnaire (1.08) est dit d'ordre commensurable, si ce n'est pas le cas il est d'ordre non commensurable.

1.2.3. Champs d'application

L'application des méthodes basées sur les systèmes différentiels fractionnaires est très vaste et touche différents domaines scientifiques. Elles sont utilisées essentiellement comme

outils de modélisation en Physique, Automatique, Mécanique, Chimie, Rhéologie...etc. on cite par exemple :

- La modélisation de certains phénomènes physiques dans l'équation de la dynamique des matériaux [1].
- La modélisation en chimie des polymères ou la modélisation de la dynamique à l'interface de structures fractales [35].
- La réalisation des composants électroniques à impédances fractionnaires [31].
- La commande des machines électriques par des correcteurs fractionnaires (PIF, PIDF, ...etc), [6] et [12].

1.2.4. Problèmes liés au calcul fractionnaire

Les difficultés rencontrées lors de l'étude des systèmes contenant d'opérateurs fractionnaires proviennent essentiellement du fait que ces opérateurs sont héréditaires et à noyaux singuliers ce qui rend l'approximation numérique très difficile et demande un très grand espace de stockage mémoire. En effet, les opérateurs de convolution prennent en compte toute l'évolution passée du système d'autant que la singularité du noyau en 0 nécessite un pas d'intégration très petit alors que cette lente décroissance, pour t tendant vers ∞ , nécessite un intervalle d'intégration très long.

En outre, le système n'est pas sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = AX + Bu$, ce qui rend l'application des outils classiques d'analyse des systèmes, telle que l'étude de la stabilité à travers une fonction de Lyapunov, très difficile.

1.3 REPRESENTATION DIFFUSIVE

La théorie de la représentation diffusive permet de réaliser les opérateurs fractionnaires de façon non héréditaire par des systèmes linéaires dynamiques entrée-sortie de nature diffusive. Elle est mieux adaptée à l'analyse et l'étude des systèmes contenant ces opérateurs.

1.3.1 Principe

Considérons le système entrée-sortie de type équation de la chaleur monodimensionnelle (dénommée également équation de diffusion) avec une entrée $f(t)$ ponctuelle en $x=0$ et une mesure (sortie) $y(t)$ en ce même point [57]:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{y}(t, x) = \partial_x^2 \mathbf{y}(t, x) + 2 f(t) \mathbf{d}(x), x \in \mathfrak{R} \\ y(t) = \mathbf{y}(t, 0) \end{cases} \quad (1.9)$$

Par transformation de Fourier par rapport à la variable spatiale x , le système (1.9) devient :

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -4p\mathbf{x}^2 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + 2f(t) \\ y(t) = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathfrak{R} \end{cases} \quad (1.10)$$

La solution de (1.10) est :

$$\begin{cases} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-4p\mathbf{x}^2(t-s)} f(s) ds \\ y(t) = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.11)$$

Pour une condition initiale non nulle $\mathbf{y}(0, x) = 0$, par explicitation de \mathbf{y} au moyen de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, on obtient classiquement :

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{pt}} * f(t) \quad (1.12)$$

Soit encore, en utilisant la notation standard des intégrateurs fractionnaires :

$$y(t) = I^{1/2} f(t) = \partial_t^{-\frac{1}{2}} f(t) \quad (1.13)$$

D'autre part, par explicitation directe de \mathbf{j} , la sortie y s'exprime également par le produit de convolution :

$$y(t) = \left(\int_{\mathbf{x}} e^{-4p\mathbf{x}^2 t} d\mathbf{x} \right) * f(t) \quad (1.14)$$

Cette représentation entrée-sortie non rationnelle repose sur l'introduction d'une variable d'état \mathbf{y} ou \mathbf{j} en dimension infinie.

Des transferts plus généraux seraient réalisables de même, en faisant intervenir dans (1.10) une distribution $T(\mathbf{x})$ sous la forme:

$$y(t) = \int_{\mathbf{x}} T(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.15)$$

1.3.2 Représentation diffusive

Etant donnée $H(p)$ la fonction de transfert (non rationnelle) associée à l'opérateur causal de convolution $H\left(\frac{d}{dt}\right)$, la réalisation diffusive canonique de cet opérateur est exprimée, lorsqu'elle existe, par la réalisation d'état de $f \rightarrow y = H\left(\frac{d}{dt}\right)f = h * f$, [53] :

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{x} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + f(t) \\ y(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.16)$$

où $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ est appelée représentation diffusive de $H\left(\frac{d}{dt}\right)$.

La représentation diffusive $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ d'un opérateur pseudo-différentiel à temps invariant de symbole $H(p)$ est définie, lorsqu'elle existe, comme solution de l'équation intégrale :

$$H(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x})}{p + \mathbf{x}} \quad (1.17)$$

L'équation (1.17) est la fonction de transfert associée à la représentation diffusive.

En d'autres termes, La représentation $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ est obtenue directement par la transformation de Laplace inverse de la réponse impulsionnelle h associée à l'opérateur $H\left(\frac{d}{dt}\right)$, $\mathbf{m} = L^{-1}h$:

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}t} d\mathbf{x} \quad (1.18)$$

La représentation diffusive est donc une utilisation "à contre sens" de la transformée de Laplace dans laquelle t joue le rôle de la variable de Laplace :

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) \xrightarrow{L} h(t) \xrightarrow{L} H(p)$$

Le système (1.16) peut se mettre sous la forme abstraite :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + Bf \\ y = CX \end{cases} \quad (1.19)$$

où A est un opérateur dissipatif à dimension infini, B est un opérateur de contrôle et C est un opérateur d'observation.

Les propriétés de dissipativité et de stabilité asymptotique d'opérateurs fractionnaires sont préservées par la représentation diffusive [41], [42] et [63].

Par des transformations convenables, le système (1.16) peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}^2 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + f(t) \\ y(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -4p\mathbf{x}^2 \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + f(t) \\ y(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.21)$$

La réalisation dite "équilibrée" suivante est bien adaptée au calcul d'énergie notamment

lors de l'étude de la stabilité par fonction de Lyapunov :

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + f(t)\sqrt{\mathbf{m}(\mathbf{x})} \\ y(t) = \int_0^{\infty} \sqrt{\mathbf{m}(\mathbf{x})}\mathbf{j}(t, \mathbf{x})d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.22)$$

Dans le cas d'un opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre \mathbf{a} de symbole $p^{-\mathbf{a}}$, $0 < \Re(\mathbf{a}) < 1$, la représentation diffusive est exprimée par :

$$\mathbf{m}_a(\mathbf{x}) = \frac{\sin(\mathbf{p}\mathbf{a})}{\mathbf{p}} \frac{1}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}} \quad (1.23)$$

1.3.3 Représentation diffusive étendue par dérivation

La classe des opérateurs diffusifs peut être élargie en considérant les opérateurs $pH(p)$ tel que $H(p)$ soit un opérateur diffusif. Soit $z(t)$ la sortie d'un dérivateur fractionnaire d'ordre \mathbf{b} et $f(t)$ son entrée, alors, nous pouvons écrire :

$$z(t) = \partial_t^{\mathbf{b}} f(t) = \frac{d}{dt} (I^{\mathbf{a}} f(t)) = \frac{d}{dt} y(t), \quad \mathbf{b} = 1 - \mathbf{a} \quad (1.24)$$

Donc, la représentation diffusive étendue par dérivation du système fractionnaire d'ordre \mathbf{a} d'entrée $f(t)$ et de sortie $y(t)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + f(t) \\ y(t) = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{m}(\mathbf{x})(-\mathbf{x}\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + f(t))d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.25)$$

1.3.4 Calcul direct du symbole diffusif

Il est possible de construire le modèle diffusif correspondant directement à partir des tables des transformées de Laplace. A titre d'exemple, considérons \mathbf{h}, \mathbf{n} et \mathbf{m} les symboles diffusifs respectifs des fonctions $G(p), H(p)$ et $V(p)$, alors :

-Le symbole diffusif de la somme de deux fonctions $G(p) = H(p) + V(p)$ est $\mathbf{h} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$

- Le symbole diffusif de la fonction $G(p) = pH(p)$ est $\mathbf{h} = -\mathbf{x}\mathbf{m}$

- Le symbole associé au produit de deux fonctions $G(p) = H(p).V(p)$ est $\mathbf{h} = \mathbf{m}\#\mathbf{n}$ où le symbole " # " désigne le produit défini par [57] :

$$\mathbf{m}\#\mathbf{n} = -\mathbf{n} \left(\mathbf{m} * \text{pv} \frac{1}{\mathbf{x}} \right) - \mathbf{m} \left(\mathbf{n} * \text{pv} \frac{1}{\mathbf{x}} \right) \quad (1.26)$$

et pv^1 désigne la distribution tempérée au sens de la "valeur principale".

Nous pouvons établir la correspondance entre les trois représentations :

Diffusive	Temporelle	Laplace
$\mu(\mathbf{x})$	$h(t)$	$H(p)$
$\mu \# \nu$	$h * \nu$	$H(p)V(p)$

De façon générale, sous les hypothèses citées en [53], le symbole diffusif d'opérateur $H\left(\frac{d}{dt}\right)$ existe et il est donné par :

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2j\mathbf{p}} [H(-\mathbf{x} - j0) - H(-\mathbf{x} + j0)], \mathbf{x} > 0 \quad (1.27)$$

1.3.5 Exemples de symboles diffusifs [55]

Restrictions	Laplace	Rép. Diffusive	Rép. Impulsionnelle
$L\mathbf{m} \in L^1_{Loc}$	$H=Lh$	$\mu=L^{-1}h$	h
$L(\mathbf{x}\mathbf{m}) \in L^1_{Loc}$	$pH(p)$	$-? \mu$	$\frac{d}{dt}h$
$0 < \Re(\mathbf{a}) < 1$	$p^{-\mathbf{a}}$	$\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{-\mathbf{a}} \frac{\sin(\mathbf{p}\mathbf{a})}{\mathbf{p}}$	$\frac{1}{\Gamma(\mathbf{a})} t^{\mathbf{a}-1}$
$0 < \Re(\mathbf{a}) < 1, n \in \mathbb{N}$	$p^{-(\mathbf{a}+n)}$	$\frac{ \sin(\mathbf{a}\mathbf{p}) }{\mathbf{p}} p f \frac{1}{\mathbf{x}^{\mathbf{a}+n}}$	$\frac{1}{\Gamma(\mathbf{a}+n)} t^{\mathbf{a}+n-1}$
$0 < \Re(\mathbf{a}) < 1$	$p^{-\mathbf{a}} H(p)$	$\mu_a \# \mu$	$I^{\mathbf{a}} h$
$\mathbf{a} > 0$ -	$H(p+\mathbf{a})$ p^{-1}	$\mathbf{m}(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ d	$e^{\mathbf{a}t} h(t)$ 1
$0 < \Re(\mathbf{a}) < 1$ $\mathbf{a} > 0$ }	$(p^{\mathbf{a}} + \mathbf{a})^{-1}$	$\frac{\sin(\mathbf{p}\mathbf{a})\mathbf{x} / \mathbf{p}}{\mathbf{x}^{2\mathbf{a}} + 2\mathbf{a} \cos(\mathbf{a}\mathbf{p})\mathbf{x}^{\mathbf{a}} + \mathbf{a}^2}$	$\mathbf{e}_{\mathbf{a}(-\mathbf{a},t)}$

¹ pv (principal value) est la valeur principale de $\frac{1}{\mathbf{x}}$ qui est définie par : $\int_{\Re} \text{pv} \left(\frac{1}{\mathbf{x}} \right) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Re - [-\epsilon, +\epsilon]} \frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} d\mathbf{x}$

1.3.6 Avantages de la représentation diffuse

L'avantage principal de la représentation diffuse est de transformer des problèmes non locaux en temps de nature héréditaire en des problèmes locaux de nature non héréditaire, qui permettent notamment une approximation numérique standard et efficace. Lorsque la représentation diffuse μ est positive, la réalisation proposée possède la propriété importante de dissipativité de l'opérateur integro-différentiel, ce qui entraîne des conséquences importantes, notamment dans l'étude de la stabilité des systèmes.

1.4 APPROXIMATION NUMERIQUE

1.4.1 Principe

Considérons un réseau fini dans le domaine $[0, K]$ (c-à-d $\mathbf{x} \in [0, K]$) [57], et notons :

$$N_Q = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Q\}, \quad \text{où} \quad 0 = \mathbf{x}_0 < \mathbf{x}_1 < \dots < \mathbf{x}_Q = K$$

Alors la discrétisation spatiale du système différentiel (1.16) nous conduit à la forme :

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}_k = -\mathbf{x} \mathbf{j}_k + f(t) \\ \mathbf{j}_k(t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}_k, t) \\ \mathbf{j}_k(0) = 0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, Q \quad (1.28)$$

Considérons l'interpolation linéaire sur $(\mathbf{x}_k \mathbf{j}_k(t))_{\mathbf{x}_k \in N_k}$ définie par :

$$\tilde{\mathbf{j}}(\cdot, t) = \sum_{k=1}^Q \mathbf{j}_k(t) \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) \quad (1.29)$$

où les \mathbf{L}_k sont les fonctions d'interpolation linéaire d'éléments finis de support $[-K, K]$, [76].

La sortie approchée du système (1.16) devient :

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int \sum_{k=1}^Q \mathbf{m}_k \mathbf{j}_k(t) \mathbf{L}_k(\mathbf{x}) \quad (1.30)$$

et peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \sum_{k=1}^Q \mathbf{j}_k(t) \mathbf{b}_k \quad (1.31)$$

où les termes \mathbf{b}_k correspondent aux intégrales sur les segments $[\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}]$ des fonctions d'éléments finis.

On note :

$$b_1 = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}_{min}} \mathbf{L}_1 d\mathbf{x} = \int_0^{\mathbf{x}_{min}} \mathbf{L}_1 d\mathbf{x} \quad (1.32)$$

$$b_k = \int_{\mathbf{x}_{k-1}}^{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{L}_k d\mathbf{x} \quad (1.33)$$

$$b_Q = \int_{\mathbf{x}_{max}}^{+\infty} \mathbf{L}_Q d\mathbf{x} \quad (1.34)$$

où $\mathbf{x}_{min} = \mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_{max} = \mathbf{x}_Q = K$

La représentation d'état correspondante est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + Bf(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases} \quad (1.35)$$

avec : $X(t) = (\mathbf{j}_1(t), \mathbf{j}_2(t), \dots, \mathbf{j}_Q(t))^T$ $\mathbf{j}_k(0) = 0$

$$A = \text{diag}(-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_k, \dots, -\mathbf{x}_Q)$$

$$B = (1, \dots, 1)^T$$

$$C = \frac{1}{\mathbf{p}} (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_k, \dots, \mathbf{m}_Q)$$

La fonction de transfert approchée du système (1.16) prend la forme :

$$\tilde{H}(p) = \sum_{k=1}^Q \frac{\mathbf{m}_k}{p + \mathbf{x}_k} \quad (1.36)$$

1.4.2 Discrétisation temporelle

Cette opération consiste à estimer la valeur de $\mathbf{j}(\mathbf{x}_k, t_n) = \mathbf{j}_k^n$, $k = 1, \dots, Q$, à chaque instant t_n .

Posons $t_n = n\Delta t$ (Δt est le pas du temps) et supposons que f est constante par morceau sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.

La solution du système (1.16) (sous formes continue et discrète) étant :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t e^{-\mathbf{x}(t-s)} f(s) \mathbf{m}(\mathbf{x}) ds \quad (1.37)$$

$$\mathbf{j}_k^n = \int_0^{t_n} e^{-\mathbf{x}_k(t_n-s)} f(s) \mathbf{m}(\mathbf{x}) ds \quad (1.38)$$

à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, elle devient :

$$\mathbf{j}_k^{n+1} = e^{-\mathbf{x}_k \Delta t} \mathbf{j}_k^n + \int_0^{\Delta t} \mathbf{m}(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}_k s} f^n ds \quad (1.39)$$

En intégrant, on obtient une équation récursive donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{j}_k^{n+1} = e^{-\mathbf{x}_k \Delta t} \mathbf{j}_k^n + \mathbf{m}_k \left[\frac{1 - e^{-\mathbf{x}_k \Delta t}}{\mathbf{x}_k} \right] f^n & k = 1, \dots, Q \\ \mathbf{j}_k^0 = 0 & n = 1, \dots, N_T \end{cases} \quad (1.40)$$

1.4.3 Approximation numérique étendue par dérivation

L'approximation numérique de la représentation diffusive étendue par dérivation peut se résumer par le système suivant (en suivant les mêmes étapes précédentes) :

$$\begin{cases} z(t) = z(n\Delta t) = \sum_{k=1}^Q \mathbf{y}_k^n \mathbf{h}_k + \sum_{k=1}^Q b_k f^n \\ \mathbf{y}_k^{n+1} = e^{-\mathbf{x}_k \Delta t} \mathbf{y}_k^n + \mathbf{m}_k \left[\frac{1 - e^{-\mathbf{x}_k \Delta t}}{\mathbf{x}_k} \right] f^n \\ \mathbf{y}_k^0 = 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

où $b_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{L}_k d\mathbf{x}$ et $\mathbf{h}_k = -\mathbf{x} b_k$.

1.4.4 Choix les paramètres de l'approximation numérique

Pour garantir la convergence de la méthode, l'approximation de l'intégrateur nécessite un choix correct des paramètres influents directement sur les résultats tels que : $\mathbf{x}_{\min}, \dots, \mathbf{x}_{\max}$, Q , ainsi que d'autres paramètres à définir par la suite.

1.4.4.1 Choix des pôles \mathbf{x}_k

Nous pouvons remarquer que les \mathbf{x}_k peuvent être interprétés comme pôles pour le système (1.16). Il convient, donc, de les distribuer à l'intérieur d'une bande de fréquence utile $[-\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_Q]$ pouvant être déterminée d'après le contenu harmonique de f . Cette bande de fréquence constitue le domaine des pulsations sur lequel l'approximation de l'opérateur fractionnaire sera correcte.

Il n'existe pas une méthodologie systématique déjà développée pour choisir les pôles \mathbf{x}_k , mais il y a plusieurs séquences usuelles qui peuvent être utilisées, nous citons :

- séquence arithmétique : $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + r$ où r est la raison de la séquence.
- séquence polynomiale : $\mathbf{x}_{k+1} = K_l^r \mathbf{x}$ où K_l est une constante.
- séquence géométrique : $\mathbf{x}_{k+1} = r\mathbf{x}_k$ où r est la raison de la séquence.

La séquence géométrique est largement utilisée dans la littérature, car elle produit une séquence linéaire en domaine fréquentiel, ce qui permet d'utiliser le diagramme de Bode. En pratique, elle réalise un compromis entre la largeur de bande utile et la complexité de l'approximation résultante. Dans ce cas, la relation entre les deux pôles extrêmes s'écrit :

$$\mathbf{x}_Q = r^{Q-1} \mathbf{x}_1 \quad (1.42)$$

Nous pouvons en déduire r :

$$r = \frac{e^{\left(\ln \frac{\mathbf{x}_Q}{\mathbf{x}_1}\right)}}{Q-1} \quad (1.43)$$

L'équation de diffusion $\partial \mathbf{j} = -\mathbf{x}\mathbf{j} + f$, est une équation différentielle de premier ordre de la forme $\partial \mathbf{j} = -\mathbf{w}\mathbf{j}$, d'où la relation entre \mathbf{w} et \mathbf{x} :

$$2\mathbf{p}f = \mathbf{x} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{min} = 2\mathbf{p}f_{min} \\ \mathbf{x}_{max} = 2\mathbf{p}f_{max} \end{cases} \quad (1.44)$$

1.4.4.2 Choix des fonctions d'interpolations Λ_k

Nous utilisons les éléments finis d'ordre 1 qui sont des fonctions continues nulles à l'extérieur du segment $[\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}]$, affine sur chacun des segments $[\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k]$, $[\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}]$ et prenant la valeur "1" en \mathbf{x}_k (Fig.1.1), d'où :

$$\Lambda_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} < \mathbf{x}_{k-1} \text{ ou } \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{k+1} \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_k \\ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-1}}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}} & \text{si } \mathbf{x}_{k-1} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_k \\ \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}}{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k} & \text{si } \mathbf{x}_k \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{k+1} \end{cases} \quad (1.45)$$

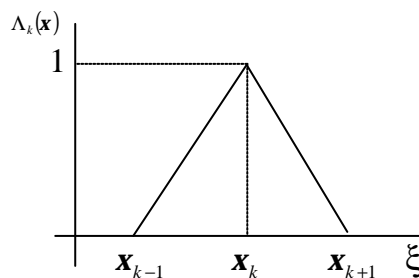


Figure 1.1 : Choix de la fonction d'interpolation sur les segments internes.

Il est clair que la qualité d'approximation dépend aussi de la qualité de reconstitution de l'état $\tilde{\mathbf{f}}$ au sens des fonctions d'interpolations L_k .

Sachant que $\mathbf{j}(\mathbf{x}, p)$ est la transformée de Laplace de $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$, où :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, p) = \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x})f(p)}{p + \mathbf{x}} \quad (1.46)$$

Alors :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cong \mathbf{m}(\mathbf{x}) \int f(t) dt \quad \text{quand } \mathbf{x} \rightarrow 0 \quad (1.47)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cong \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} f(t) \quad \text{quand } \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad (1.48)$$

Les fonctions d'interpolation sur les frontières sont donc :

$$L_1(\mathbf{x}) \cong \mathbf{m}(\mathbf{x}) \quad \text{quand } \mathbf{x} \rightarrow 0 \quad (1.49)$$

$$L_Q(\mathbf{x}) \cong \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \quad \text{quand } \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad (1.50)$$

Dans le cas où $\mathbf{a} = 1/2$, nous obtenons, à partir du système (1.20), $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = 2$ et les fonctions d'interpolation sur les segments extrêmes sont représentées dans la figure 1.2.

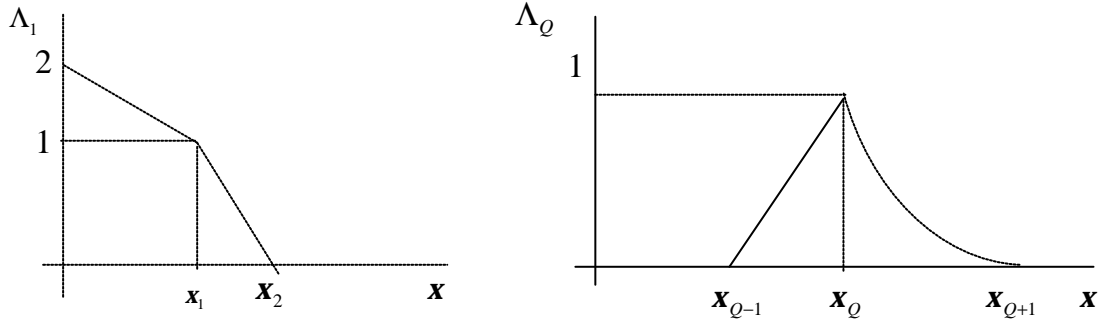


Figure 1.2 : Choix de la fonction d'interpolation sur les segments extrêmes.

Dans le cas particulier d'une intégration d'ordre 1/2 les coefficients b_i deviennent :

$$b_1 = \frac{2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} \quad (1.51)$$

$$b_Q = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_{Q-1}) + \mathbf{x}_Q \ln\left(\frac{\mathbf{x}_{Q+1}}{\mathbf{x}_Q}\right) \quad (1.52)$$

$$b_k = \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k-1}}{2} \quad 1 < k < Q \quad (1.53)$$

1.4.5 Erreur et convergence [48] et [57]

Un choix convenable des fonctions d'interpolations, pour $f \in L^2$ et $Q \rightarrow \infty$, conduit à :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}\|_{L^2} &\rightarrow 0 \\ \|y - \tilde{y}\| &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

où $\tilde{\mathbf{j}}$ et \tilde{y} sont les valeurs approchées.

L'erreur est de la forme :

$$\left| I^{1-a} f(t_n) - \tilde{y}(t_n) \right| \leq \mathbf{e}(\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}, \mathbf{r}, \Delta t) \quad (1.55)$$

où $\varepsilon \rightarrow 0$ pour \mathbf{x}_{\min} assez petit et \mathbf{x}_{\max} assez grand .

Donc, en choisissant Δt , \mathbf{r} et \mathbf{x}_{\min} suffisamment petits et \mathbf{x}_{\max} assez grand, l'erreur devient pratiquement 0.

1.5 SIMULATION NUMERIQUE

La simulation numérique a été effectuée par le logiciel Matlab. Le but de cette simulation est de déterminer les paramètres de l'approximation numérique qui conduisent à des opérateurs fractionnaires proches aux opérateurs réels en se basant sur la comparaison avec des systèmes fractionnaires dont les caractéristiques sont bien connues.

Pour cela, nous avons choisi l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire dont les fonctions de transferts sont p^{-a} et p^a respectivement. Ils se caractérisent par une amplitude et phase constantes (-a10dB et - a 45°) et (+a10 dB et+ a45°) respectivement.

Les résultats de la simulation ci-après illustrent l'efficacité de l'approximation utilisée.

Les valeurs de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_Q sont choisies à partir de la relation (1.44). La valeur de N est choisie de telle façon à obtenir une bande utile qui couvre toutes les fréquences.

Les paramètres de l'approximation choisis pour les prochains chapitres sont $N=30$, $\mathbf{x}_I=10^{-1}$ et $\mathbf{x}_N=10^4$

Les figures 1.3 et 1.4 présentent les diagrammes de Bode respectivement d'un intégrateur et dérivateur fractionnaires d'ordre 1/2. On remarque que le gain et la phase sont très proches du gain et de la phase idéaux (-10dB et -45°) respectivement (+10dB et +45°), dans le domaine de pulsation $[10^{-2}, 10^{+2}]$ qui représente une bande utile d'approximation.

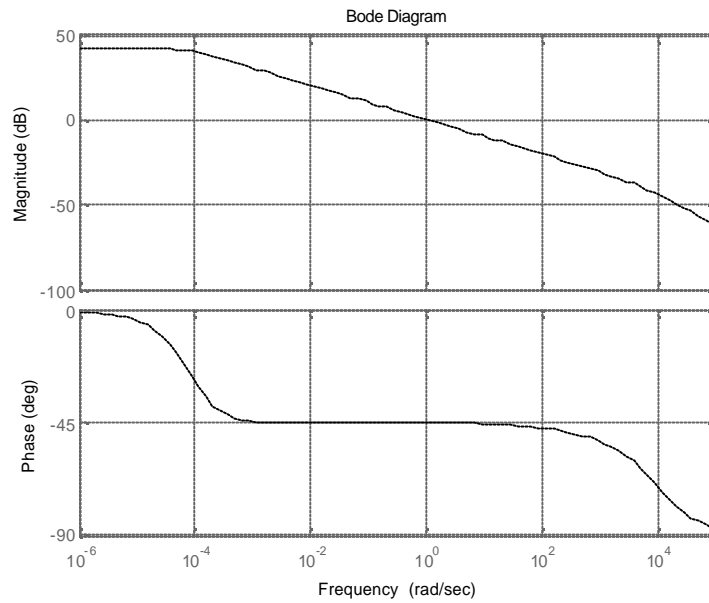


Figure 1.3 : Diagramme de Bode d'un intégrateur fractionnaire d'ordre 1/2 approché par représentation diffusive

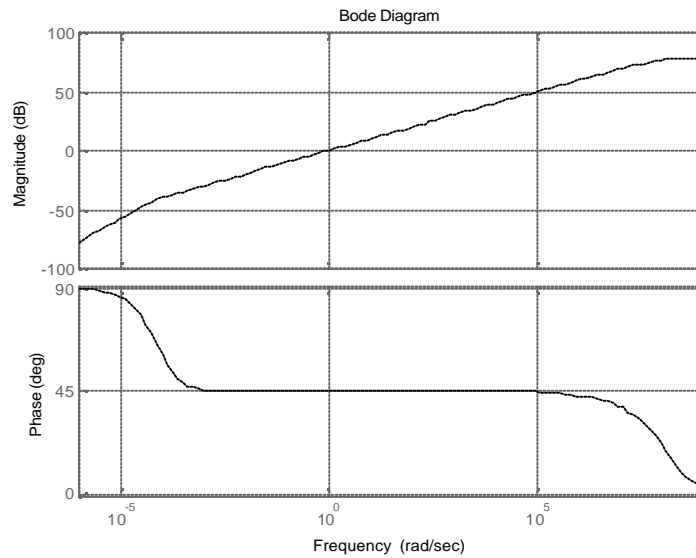


Figure 1.4 : Diagramme de Bode d'un dérivateur fractionnaire d'ordre 1/2 approché par représentation diffusive

La figure 1.5 présente une mauvaise approximation d'un intégrateur fractionnaire. La présence des ondulations autour de la valeur exacte justifie qu'un mauvais choix des paramètres de l'approximation numérique entraîne une approximation inexacte de l'opérateur fractionnaire.

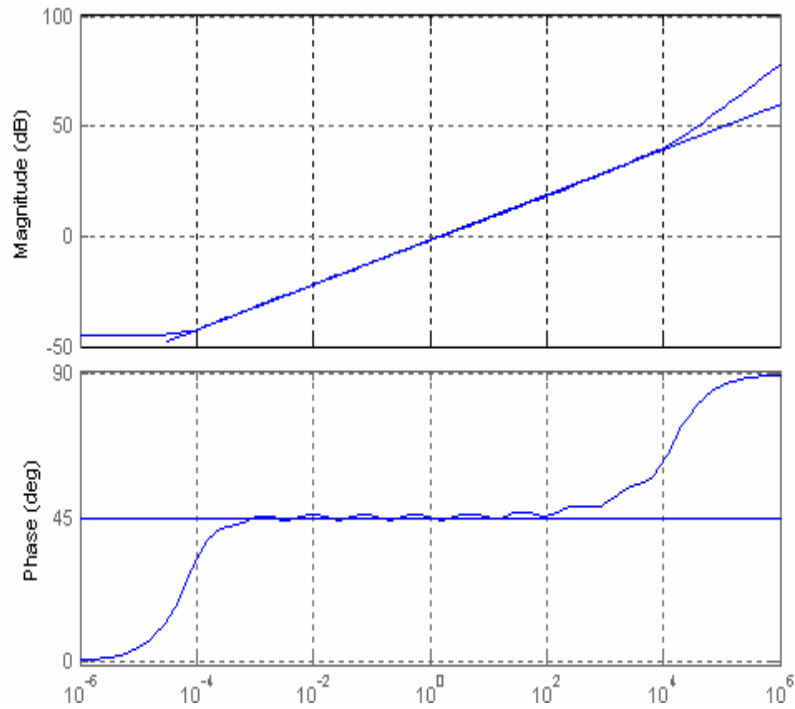


Figure 1.5 : Mauvaise approximation d'un dérivateur fractionnaire d'ordre 1/2

1.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie et l'approximation numérique de la représentation diffusive.

La réalisation non héréditaire d'opérateurs d'ordres fractionnaires par cette représentation a permis d'avoir un système qui peut se mettre sous la forme abstraite $dX/dt=AX+Bu$, ce qui rend l'application des outils classiques d'étude et d'analyse possibles et simples.

La qualité de l'approximation d'opérateurs fractionnaires dépend du choix des paramètres de l'approximation numérique

La simulation numérique a montré clairement l'efficacité et la souplesse de la représentation diffusive.

Chapitre 2

Contrôle Diffusif d'un Bras Flexible Articulé avec Translation de Base

2.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente la stabilisation d'un bras flexible articulé à une extrémité et libre à l'autre extrémité avec une translation verticale de sa base.

La théorie appliquée est basée sur le contrôle frontière par absorption d'ondes auquel sont associées des conditions aux limites particulières. Le principe de contrôle consiste à minimiser la valeur maximale de l'énergie entrante dans la structure, en d'autres termes, minimiser les effets des ondes incidentes sur les ondes réfléchissantes.

La synthèse de tels compensateurs, dans le domaine fréquentiel, fait intervenir des opérateurs différentiels fractionnaires. La réalisation non héréditaire de ces opérateurs est basée sur la théorie de la représentation diffusible décrite dans le chapitre 1. L'étude de la stabilité est basée sur la fonctionnelle de Lyapunov et la théorie des semi-groupes.

Le comportement vibratoire du bras est approché sur la base de l'approximation modale. Une telle méthode est très efficace pour approcher la réponse des structures dynamiques et permet d'obtenir un système de dimension finie.

2.2 DYNAMIQUE DU BRAS

2.2.1 Description du bras flexible avec translation de base

Considérons un bras flexible articulé à une extrémité et libre à l'autre extrémité. Ce bras est attaché à un bras rigide (Fig.2.1).

Pour garantir un modèle dynamique linéaire, nous supposons dans cette étude que l'angle q est suffisamment petit. Par conséquent, le problème de stabilisation peut être vu comme la stabilisation d'un bras flexible articulé-libre par une force et un couple appliqués au point d'articulation.

Le couple est généré par un moteur qui peut le placé au point "x=0" et la force est produite par une petite rotation du bras rigide ce qui entraîne le déplacement vertical du bras (Fig. 2.2).

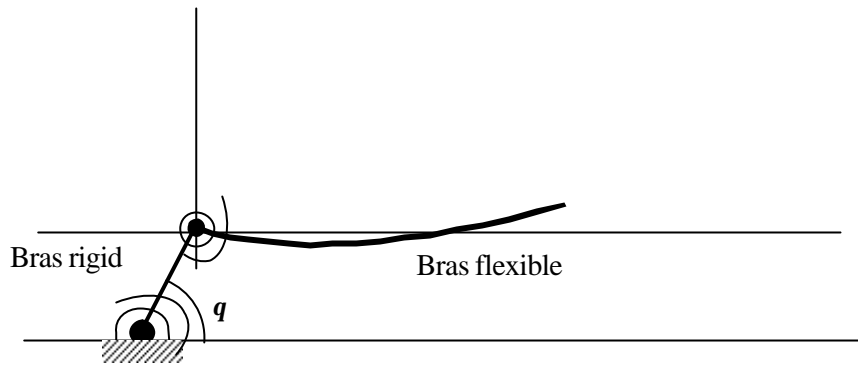


Fig. 2.1 : Bras flexible attaché au bras rigide

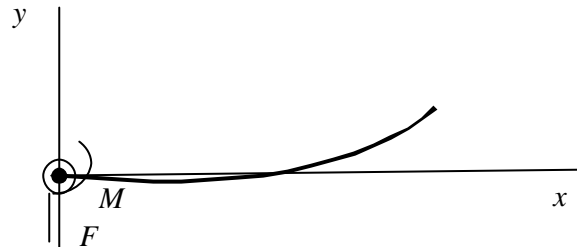


Fig. 2.2 : Bras flexible articulé libre avec translation de base

2.2.2 Modèle mathématique

La dynamique du bras est modélisée par l'équation aux dérivées partielles de la poutre vibrante d'Euler-Bernoulli. Avec la force de gravité $s(x) = rAg(L - x)$, cette équation s'écrit sous la forme [46] et [79] :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(s \frac{\partial y}{\partial x} \right) (x,t) - EIV \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2}(x,t) + rA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad (2.01)$$

La fonction $y(x,t)$ représente le déplacement du point du bras d'abscisse x à l'instant t , en d'autres termes, c'est la déflexion en x à l'instant t . E est le module de young, I est le moment transversal d'inertie, r est la densité de masse, A est la section droite du bras et L est la longueur du bras. Le troisième terme est l'amortissement de Chen-Russel.

Dans cette étude la force de gravitation et l'amortissement sont ignorés. L'équation (2.01) peut être réécrite sous la forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad x \in [0,1] \quad (2.02)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) + M(t) = 0, \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0,t) + F(t) = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,t) = 0, \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(1,t) = 0. \end{cases} \quad (2.03)$$

M et F sont respectivement le couple et la force appliqués au point d'articulation qui servent à stabiliser le bras flexible.

Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} y(x,0) = y_0(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x) \end{cases} \quad (2.04)$$

L'espace d'énergie (de Hilbert) associé à (2.02), (2.03) et (2.04) est défini par :

$$\begin{aligned} H_p &:= \mathbf{H}(0,1) \times L^2(0,1) \text{ avec} \\ \mathbf{H}(0,1) &= \{f \in L^2(0,1); f', f'' \in L^2(0,1), f(0) = f'(0) = 0\} \end{aligned}$$

avec le produit scalaire associé :

$$((e, f)/(g, h))_{H_p} = \int_0^1 (e'' g'' + fg) dx \quad (2.05)$$

L'énergie mécanique du bras est définie par :

$$E_b(t) = \frac{1}{2} \|(y, \partial_t y)\|_{H_p} \quad (2.06)$$

Dans le cas autonome où $M(t) = 0$ et $F(t) = 0$ le système est conservatif, c'est à dire l'énergie du système reste constante tout le temps.

2.3 CONTROLE FRACTIONNAIRE ABSORBANT D'ONDES

2.3.1 Principe

La réponse des structures flexibles peut être vue comme la superposition de propagations des ondes dans la structure.

Le principe du contrôle est basé sur l'absorption des ondes réfléchissantes aux frontières. Le contrôle absorbant d'ondes simule le prolongement du bras réel vers $-\infty$ par l'addition d'un bras virtuel de longueur infini. Il est clair que ce prolongement empêche toute réflexion. La démarche se base sur la modélisation de la structure par un modèle, dit local (aux niveaux des frontières), qui donne la direction de propagation des ondes et leurs interférences.

Il peut être présenté par le système (2.07), reliant les ondes incidentes et les ondes réfléchissantes :

$$b = S_{CL} a \tag{2.07}$$

où S_{CL} est la matrice de réflexion en boucle fermée, b est le vecteur des ondes réfléchissantes et a est le vecteur des ondes incidentes.

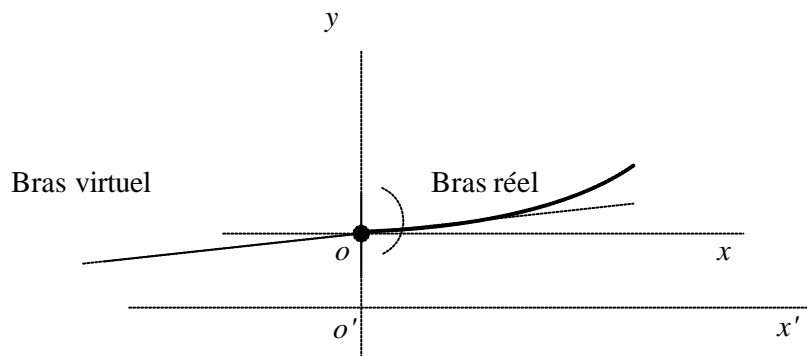


Figure. 2.3 : Système bras réel et bras virtuel.

Considérons un point de contrôle ou une discontinuité physique. Les modes de propagation sont séparés entre ceux qui arrivent à la jonction et ceux qui en partent. La figure (2.4) montre bien cette décomposition.

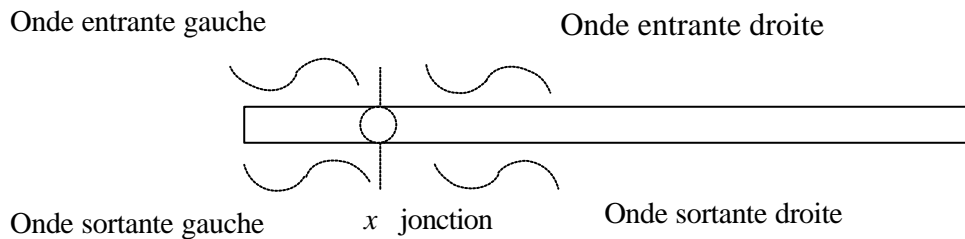


Figure 2.4 : Décomposition des ondes.

Pour empêcher toute réflexion, la jonction doit être absorbante au maximum. L'énergie locale du système sera, alors, transférée par propagation vers $-\infty$, c'est à dire que l'énergie du bras réelle tend vers 0, ce qui garantie la stabilisation.

2.3.2 Décomposition du bras suivant ses modes d'onde

Introduisons, en premier lieu, le vecteur d'état suivant :

$$Y = (y, \partial_x y, \partial_x^2 y, \partial_x^3 y)^T \quad (2.08)$$

ou $\partial_x y$ est la déflexion, $\partial_x^2 y$ est le moment fléchissant, $\partial_x^3 y$ est la force tranchante.

Pour alléger la présentation, nous utiliserons les mêmes notations dans le domaine fréquentiel.

Pour pouvoir entamer le problème de synthèse du contrôle absorbant, il est nécessaire de décrire la dynamique du bras en terme d'ondes progressives.

Par transformation de Fourier, l'équation (2.02) devient :

$$\mathbf{w}^2 \partial_t^2 y(x,t) + \partial_x^4 y(x,t) = 0 \quad (2.09)$$

où \mathbf{w} est la pulsation.

La représentation d'état de l'équation (2.09) est :

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{w}^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y \quad (2.10)$$

Le système (2.10) peut être diagonalisé par la transformation suivante :

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{\mathbf{w}} & -\sqrt{\mathbf{w}} & i\sqrt{\mathbf{w}} & \sqrt{\mathbf{w}} \\ -\mathbf{w} & \mathbf{w} & -\mathbf{w} & \mathbf{w} \\ i\mathbf{w}^{3/2} & -\mathbf{w}^{3/2} & -i\mathbf{w}^{3/2} & \mathbf{w}^{3/2} \end{bmatrix} \cdot W = D(\mathbf{w})W \quad (2.11)$$

Cette diagonalisation peut être interprétée en terme d'ondes progressives où chaque terme du nouveau vecteur d'état transversal W est l'amplitude d'un mode d'onde. Ces modes d'ondes sont constitués de combinaisons dépendant de la fréquence des variables d'états transversaux, c'est à dire des colonnes de la matrice $D(\omega)$, qui se propagent indépendamment l'un des autres le long du bras [79].

Les amplitudes de ces modes d'ondes varient en fonction de :

$$\frac{dW}{dx} = \begin{bmatrix} -i\sqrt{\mathbf{w}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\mathbf{w}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{\mathbf{w}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \cdot W \quad (2.12)$$

Les termes de la matrice, opérateur de l'équation (2.12), sont les coefficients de propagations dont la forme est :

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}) = \mathbf{l}(\mathbf{w}) + i\mathbf{k}(\mathbf{w}) \quad (2.13)$$

où la partie réelle $I(\mathbf{w})$ est le coefficient d'atténuation et la partie imaginaire $k(\mathbf{w})$ est le nombre d'onde.

Ces coefficients de propagation vont par paire, $(\mathbf{g}_j, -\mathbf{g}_j)$, et correspondent à des modes d'ondes similaires se propageant dans des directions opposées.

Le principe de conservation de l'énergie réduit ces coefficients de propagation au 1^{er} et 3^{ème} quadrant du plan complexe \mathbf{g} .

Les termes de W sont rangés selon l'ordre décrit par l'expression $W = (a_1, a_2, b_1, b_2)^T$, où a_1 et a_2 sont les amplitudes des modes d'ondes entrants à l'extrémité articulée du bras et b_1 et b_2 sont ceux des modes d'ondes sortants de l'extrémité articulée du bras. Les amplitudes a_2 et b_2 sont des ondes stationnaires, leur amplitude varie exponentiellement avec x , seulement elles contribuent peu à la dynamique du bras [79].

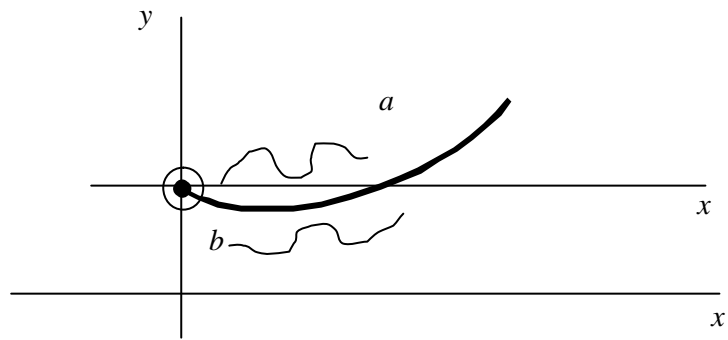


Figure 2.5 : Ondes entrantes et sortantes à l'extrémité articulée.

2.3.3 Synthèse du contrôle

En tenant compte de la description de la dynamique du bras en coordonnées de modes d'ondes, les conditions aux limites s'écrivent en fonction du vecteur d'état Y et des forces du contrôle (F et M) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y(0, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Les conditions aux limites au point d'articulation s'écrivent aussi en coordonnées des modes d'ondes par :

$$\begin{bmatrix} i\mathbf{w} & -i\mathbf{w} & i\mathbf{w} & -i\mathbf{w} \\ -i\mathbf{w}^{1/2} & i\mathbf{w}^{1/2} & i\mathbf{w}^{1/2} & -i\mathbf{w}^{1/2} \end{bmatrix} W(0, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

En exprimant les ondes réfléchissantes en fonction des ondes incidentes, nous obtenons, après réarrangement, le nouveau système :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i+1}{i-1} & \frac{-2}{i-1} \\ \frac{2i}{i-1} & \frac{i+1}{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{w}(i-1)} & \frac{-1}{\mathbf{w}^{3/2}(i-1)} \\ \frac{i}{\mathbf{w}(i-1)} & \frac{-1}{\mathbf{w}^{3/2}(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Qui est de la forme :

$$b = S_{OL}a + BF_{ext} \quad (2.17)$$

où S_{OL} est la matrice de réflexion en boucle ouverte et F_{ext} est le vecteur des forces agissantes sur le bras.

Le système (2.16) est la condition aux limites du système (2.14), exprimé en forme causale, à partir duquel, nous pouvons remarquer que les modes d'ondes b sont produits par la réflexion des ondes incidentes a .

De ce fait, le système (2.16) représente la base de construction des contrôleurs absorbants des ondes que nous allons utiliser à l'extrémité articulée ($x = 0$) du bras.

Dans cette étude, nous nous limitons aux « absorbeurs » d'ondes linéaires du type :

$$\begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} = C(\mathbf{w}) \cdot \begin{bmatrix} y \\ \partial_x y \end{bmatrix}_{(x=0)} \quad (2.18)$$

où y est la déflexion, $\partial_x y$ est la pente (vitesse de déflexion) et C est la matrice du compensateur.

Pour évaluer et construire les compensateurs absorbants d'ondes de la forme (2.18), il est nécessaire de considérer le système {(2.16), (2.18)} en boucle fermée qui prend la forme souhaitée (2.07).

En coordonnées de modes d'onde, l'équation (2.18) s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} D(\mathbf{w}) \cdot W \quad (2.19)$$

d'où

$$\begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{\mathbf{w}} & -\sqrt{\mathbf{w}} & i\sqrt{\mathbf{w}} & \sqrt{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \cdot W \quad (2.20)$$

Qui peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} = C \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\mathbf{w}} & -\sqrt{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \cdot a + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\mathbf{w}} & \sqrt{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \cdot b \right\} \quad (2.21)$$

En reportant (2.21) dans (2.16), nous obtenons la relation $b = S_{CL} a$ avec :

$$S_{CL} = \left\{ I - BC \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\mathbf{w}} & \sqrt{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left\{ S_{OL} + BC \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\mathbf{w}} & -\sqrt{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.22)$$

Le compensateur qui conduit à $S_{CL} = 0$, appelé dans la littérature micro-onde contrôleur à Impédance Adaptée, permet de supprimer les ondes réfléchissantes.

Donc, pour $S_{CL} = 0$, nous avons :

$$C = -B^{-1} S_{OL} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\mathbf{w}} & -\sqrt{\mathbf{w}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.23)$$

D'où :

$$C = \begin{bmatrix} -i\mathbf{w} & -(1+i)\sqrt{\mathbf{w}} \\ (i-1)\mathbf{w}^{3/2} & i\mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Le contrôle correspondant dans le domaine fréquentielle est :

$$\begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\mathbf{w} & -(1+i)\mathbf{w}/\sqrt{\mathbf{w}} \\ (i-1)\mathbf{w}^{3/2} & i\mathbf{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \partial_x y \end{bmatrix}_{(x=0)} \quad (2.25)$$

Avec :

$$\sqrt{i\mathbf{w}} = \frac{(1+i)\sqrt{\mathbf{w}}}{\sqrt{2}} \quad (2.26)$$

D'après le chapitre 1, il s'écrit dans le domaine temporel sous la forme :

$$\begin{cases} M(t) = \partial_t y(0,t) - \sqrt{2} I^{1/2} \partial_t \partial_x y(0,t) \\ F(t) = \sqrt{2} \partial_t^{3/2} \partial_t y(0,t) + \partial_t \partial_x y(0,t) \end{cases} \quad (2.27)$$

On rappelle que $I^{1/2}$ et $\partial_t^{3/2}$ sont les opérateurs fractionnaires cités dans le chapitre 1.

2.3.4 Système global

A partir des expressions (2.02), (2.03) et (2.27), le système global s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^4 y = 0 \\ \partial_x^2 y(1,t) = 0, \partial_x^3 y(1,t) = 0 \\ \partial_x^2 y(0,t) = \partial_t y(0,t) - \sqrt{2} I^{1/2} \partial_t \partial_x y(0,t) \\ \partial_x^3 y(0,t) = \sqrt{2} \partial_t^{3/2} y(0,t) + \partial_t \partial_x y(0,t) \end{cases} \quad (2.28)$$

Le schéma bloc de ce système est donné par la figure (2.6).

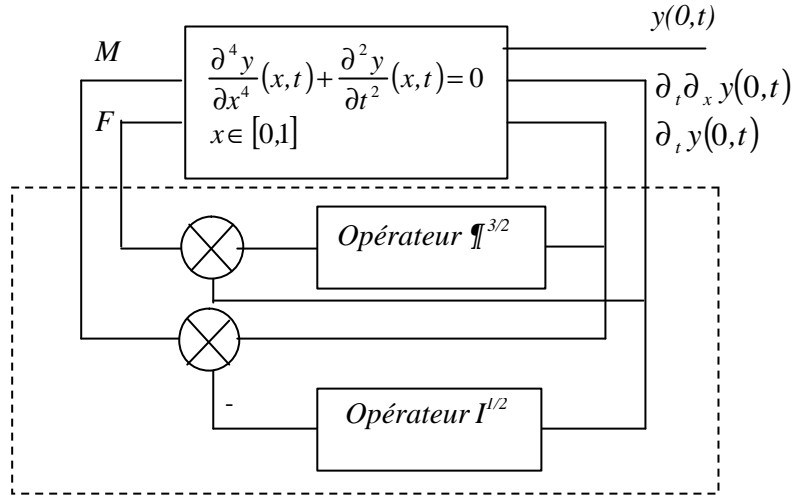


Fig. 2.6 : Contrôle par retour fractionnaire d'un bras flexible articulé avec translation de base

D'après la figure 2.6, nous constatons que la synthèse des contrôleurs absorbants d'ondes fait intervenir d'opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires. Leur réalisation classique nécessite la présence du produit de convolution.

2.4 CONTROLE DIFFUSIF

2.4.1 Réalisation diffusive du contrôleur

Nous avons mentionné dans le chapitre 1, qu'une réalisation non héréditaire d'opérateurs fractionnaires s'effectue par le modèle diffusif. Par conséquent, la réalisation diffusive du contrôleur (2.27) nécessite l'introduction de deux représentations diffusives : une pour l'intégration fractionnaire et l'autre pour la dérivation fractionnaire. Mathématiquement, ceci peut être formulé comme suit :

Réalisation diffusive de l'intégration :

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{x} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \partial_t \partial_x y(0,t) \\ I^{1/2} \partial_t \partial_x y(0,t) = \int_0^\infty \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.29)$$

Réalisation diffusive de la dérivation :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{x} \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) + \partial_t y(0, t) \\ \partial_t^{3/2} y(0, t) = \int_{\mathbf{x}} (\mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) \partial_t y(0, t)) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.30)$$

où μ , \mathbf{h} et \mathbf{h}_1 sont les représentations diffusives des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires (respectivement).

2.4.2 Système augmenté

En introduisant le système (2.29) et (2.30) dans (2.28), nous obtenons le nouveau système augmenté :

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x, t) + \partial_x^4 y(x, t) = 0 \\ \partial_x^2 y(0, t) = -\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \partial_t y(0, t) \\ \partial_x^3 y(0, t) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) \partial_t y(0, t)) d\mathbf{x} + \partial_t \partial_x y(0, t) \\ \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \partial_t \partial_x y(0, t) \\ \partial \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{x} \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) = \partial_t y(0, t) \end{cases} \quad (2.31)$$

Le système (2.31) peut se mettre sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = AX$, où $X = (y, \partial_t y, \mathbf{j}, \mathbf{y})^T$.

2.4.3 Etude de la stabilité

Considérons la fonctionnelle énergie globale du système (2.31) définie par :

$$E_x(t) = E_b(t) + \sqrt{2} E_j(t) + \sqrt{2} E_y(t) \quad (2.32)$$

où E_b est l'énergie mécanique du bras, E_j et E_y sont les énergies associées aux variables diffusives.

Alors :

$$E_b(t) = \frac{1}{2} \|\partial_t y + \partial_x^2 y\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_t y)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x^2 y)^2 dx \quad (2.33)$$

$$E_j(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{j}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{j})^2 dx \quad (2.34)$$

$$E_y(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{y})^2 dx \quad (2.35)$$

a) Proposition 1

Le système (2.31) est dissipatif dans le sens que $\frac{dE_x(t)}{dt} \leq 0$ où

$$E_b(t) \leq E_b(0) - \sqrt{2}(E(t)_j + E_y(t)) - (\sqrt{2} - 1) \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} ((\partial_t \mathbf{y})^2 + \mathbf{x}^2 \mathbf{j}^2) d\mathbf{x} dt \quad (2.36)$$

Démonstration :

On note que :

$$\frac{dE_x(t)}{dt} = \frac{dE_b(t)}{dt} + \sqrt{2} \cdot \frac{dE_j(t)}{dt} - \sqrt{2} \cdot \frac{dE_y(t)}{dt}$$

Avec :

$$\frac{dE_j(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \partial_t \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{x} \mathbf{j}^2(t, \mathbf{x}) + \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \partial_t \partial_x y(0, t)) d\mathbf{x}$$

$$\frac{dE_y(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) \partial_t \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{x} \mathbf{y}^2(t, \mathbf{x}) + \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) \partial_t y(0, t)) d\mathbf{x}$$

$$\frac{dE_b(t)}{dt} = [\partial_x^2 y \cdot \partial_t \partial_x y - \partial_t y \cdot \partial_x^3 y]_0^1 = M(t) \partial_t \partial_x y(0, t) - F(t) \partial_t y(0, t)$$

$$= -2 \partial_t y(0, t) \partial_t \partial_x y(0, t) - \sqrt{2} \partial_t \partial_x y(0, t) I^{1/2} \partial_t \partial_x y(0, t) - \sqrt{2} \partial_t y(0, t) \partial_t^{1/2} \partial_t y(0, t)$$

Les formes quadratiques $\int_0^T e I^{1/2} e dt$ et $\int_0^T f \partial_t^{1/2} f dt$ sont positives [54] et sont données par :

$$\int_0^T e I^{1/2} e dt = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_t \frac{\mathbf{J}^2}{2} + \mathbf{x} \mathbf{j}^2 \right) d\mathbf{x} dt$$

$$\int_0^T f \partial_t^{1/2} f dt = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_t \frac{\mathbf{Y}^2}{2} + \partial_t \mathbf{y}^2 \right) d\mathbf{x} dt$$

D'où, la dérivée de l'énergie globale devient :

$$\frac{dE_x(t)}{dt} = -(\sqrt{2} - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} ((\partial_t \mathbf{y})^2 + \mathbf{x} \mathbf{j}^2) d\mathbf{x} \quad (2.37)$$

Nous pouvons en déduire la relation (2.36) ♦.

b) Proposition 2

Posons $X = (y, \partial_t y, \mathbf{j}, \mathbf{y})$ et $H_G = H_p \times L^2(R)$. Alors, le système (2.31) peut se mettre sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = \Lambda X$; où $X \in H_G$ et Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe dont l'étude s'avère moins complexe.

Démonstration

La démonstration est basée sur le théorème de Lumer-Phillips.
 Λ est l'opérateur linéaire non borné suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -\partial_x^4 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{d}, \partial_x \cdot \rangle & -\mathbf{x} \end{array} \right]$$

où $\langle \mathbf{d}, f \rangle = f(0)$

Le domaine de l'opérateur Λ est :

$$D(\Lambda) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{J}, \mathbf{f}, \mathbf{j}, \mathbf{y})^T \in H_G, : \mathbf{J} \in H^4(0,1), \mathbf{f} \in \mathbf{H}(0,1), -\mathbf{x} \mathbf{j} + \partial \mathbf{j} \in L^2(R), -\mathbf{x} \mathbf{y} + \partial \mathbf{y} \in L^2(R) \\ \partial_x^2 y(0,t) = -\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \partial_t y(0,t) \\ \partial_x^3 y(0,t) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}) \partial_t y(0,t)) d\mathbf{x} + \partial_t \partial_x y(0,t) \end{array} \right\}$$

où $H^4 = \{ \mathbf{J} \in L^2(R), : \mathbf{J}, \partial_x \mathbf{J}, \dots, \partial_x^4 \mathbf{J} \}$

L'opérateur Λ est dissipatif (proposition 1) et l'application $(\lambda I - \Lambda)$ est surjective pour $\lambda > 0$ (voir [48])♦.

c) Proposition 3

Le système (2.31) est asymptotiquement stable.

Démonstration

La fonctionnelle d'énergie globale est une fonction de Lyapunov.

Donc, d'après la proposition 1 et le principe d'invariance de Lasalle, la solution du système (2.31) converge vers zéro♦.

2.5 APPROXIMATION NUMERIQUE

2.5.1 Principe

L'approximation de la réponse du bras repose sur la décomposition d'une grandeur caractéristique du système et permet de substituer une équation aux dérivées partielles "EDP" par une autre aux dérivées ordinaires "EDO" de dimension infinie.

Si $y(x,t)$ est la solution de l'EDP, on peut l'écrire sous la forme :

$$y(x,t) = \mathbf{F}^T(x) \cdot q(t) \quad (2.38)$$

où $\Phi^T(x)$ est le vecteur colonne de dimension infinie regroupe les "fonctions de forme" F_i qui constituent une base orthonormée vérifiant :

$$\int_W \mathbf{F}_i(x) \cdot \mathbf{F}_j(x) dx = \mathbf{d}_{ij} \quad (2.39)$$

où \mathbf{d}_{ij} est l'opérateur de Kronecker.

En automatique, on appelle modes d'un système, les valeurs propres de sa dynamique. La particularité de ces modes est qu'ils n'ont pas, tous, la même importance pour décrire le comportement vibratoire du système. Au même titre que les modes, les composantes de l'EDO n'ont pas, toutes, les mêmes poids dans la construction de la solution. Il suffit, donc, de ne conserver que quelques valeurs propres les plus significatives

La solution devient alors :

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \cdot \mathbf{F}_i(x) \quad (2.40)$$

$$q_i(t) = \int_W y(x,t) \cdot \mathbf{F}_i(x) dx \quad (2.41)$$

où N est le nombre de modes conservés et W est le domaine de définition de x .

2.5.2 Représentation modale du Bras

Le but de cette décomposition est de chercher les modes propres de vibration du bras avec les conditions aux limites.

Pour cela, considérons l'équation du bras :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad x \in [0,1] \quad (2.42)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) + M(t) = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0,t) + F(t) = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(1,t) = 0.\end{aligned}\tag{2.43}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.42) par F_j et en intégrant, nous obtenons :

$$\left(\partial_t^2 y, F_j\right)_{L^2(0,1)} = \left(-\partial_x^4 y, F_j\right)_{L^2(0,1)}\tag{2.44}$$

En utilisant (2.01), la première expression de (2.08) s'écrit :

$$\left(\partial_t^2 y, F_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \partial_t^2 q_i \cdot F_i, F_j\right) = \partial_t^2 q_j\tag{2.45}$$

De même, la deuxième expression s'écrit :

$$\left(-\partial_x^4 y, F_j\right)_{L^2(0,1)} = \left(-\sum_{i=1}^{\infty} q_i \partial_x^4 F_i, F_j\right)_{L^2(0,1)}\tag{2.46}$$

Par intégration par partie, nous obtenons :

$$\left(-\partial_x^4 y, F_j\right)_{L^2(0,1)} = \left(-F_j''', y\right)_{L^2(0,1)} + F_j'(0)M(t) - F_j(0)F(t)\tag{2.47}$$

Introduisons la notation suivante :

$$\left(-F_i''', F_j\right) = I_j \Rightarrow F_j''' = -I_j F_j\tag{2.48}$$

Alors, l'équation (2.11) réécrite avec la notation (2.12), devient :

$$\left(-\partial_x^4 y, F_j\right) = q_j(t)I_j + F_j'(0)M(t) - F_j(0)F(t)\tag{2.49}$$

De (2.45), (2.48) et (2.49), l'équation (2.44) devient :

$$\partial_t^2 q_j(t) = I_j q_j(t) + F_j'(0)M(t) - F_j(0)F(t) \quad j=1, \dots, \infty\tag{2.50}$$

où les F_j sont les fonctions propres et les I_j sont les valeurs propres.

2.5.3 Calcul des fonctions propres du bras

Formellement, ces fonctions propres correspondent à celles de l'opérateur $-\partial_x^4$. En posant $I = -b^4$, l'équation (2.48) devient :

$$-F''' = -b^4 \cdot F \quad (2.51)$$

Nous cherchons une solution sous la forme :

$$F(x) = e^{rx} \quad (2.52)$$

En substituant cette dernière dans l'équation (2.52), nous obtenons comme valeurs propres :

$$r_1 = b, r_2 = -b, r_3 = ib \text{ et } r_4 = -ib$$

La solution de l'équation (2.51) s'écrit, alors :

$$F(x) = a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_2 x} + a_3 e^{r_3 x} + a_4 e^{r_4 x} \quad (2.53)$$

Cette solution peut se mettre sous la forme :

$$F(x) = A_1 s_1(bx) + A_2 c_1(bx) + A_3 s_2(bx) + A_4 c_2(bx) \quad (2.54)$$

où s_1, c_1, s_2 et c_2 sont les fonctions de Duncan définies par :

$$\begin{aligned} s_1(bx) &= \sin(bx) + sh(bx) \\ c_1(bx) &= \cos(bx) + ch(bx) \\ s_2(bx) &= -\sin(bx) + sh(bx) \\ c_2(bx) &= -\cos(bx) + ch(bx) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ces fonctions sont caractérisées par la propriété suivante :

$$c_2(bx) = \frac{1}{b} s_2'(bx) = \frac{1}{b^2} c_1''(bx) = \frac{1}{b^3} s_1'''(bx) \quad (2.56)$$

Les constantes A_1, A_2, A_3 et A_4 sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Les conditions aux limites dans le cas autonome s'écrivent en fonction des fonctions propres par :

$$\begin{cases} F''(0) = 0, F'''(0) = 0 \\ F''(1) = 0, F'''(1) = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

Les dérivées de la fonction propre s'écrivent :

$$F'(x) = b(A_1 c_1(bx) + A_2 s_2(bx) + A_3 c_2(bx) + A_4 s_1(bx)) \quad (2.58)$$

$$F''(x) = b^2(A_1 s_1(bx) + A_2 c_1(bx) + A_3 s_2(bx) + A_4 c_2(bx)) \quad (2.59)$$

$$F'''(x) = \mathbf{b}^3 (A_1 c_2(\mathbf{b}x) + A_2 s_1(\mathbf{b}x) + A_3 c_1(\mathbf{b}x) + A_4 s_2(\mathbf{b}x)) \quad (2.60)$$

De (2.58)-(2.60), nous obtenons le système :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\cos \mathbf{b} + \cosh \mathbf{b} & 0 & 0 & -\sin \mathbf{b} + \sinh \mathbf{b} \\ \sin \mathbf{b} + \sinh \mathbf{b} & 0 & 0 & -\cos \mathbf{b} + \cosh \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.61)$$

Une solution non triviale de A_1, A_2, A_3 et A_4 le déterminant de (2.61) doit être nul, ce qui donne l'équation aux fréquences propres :

$$(-\cos \mathbf{b} + \cosh \mathbf{b})^2 - (\sinh^2 \mathbf{b} - \sin^2 \mathbf{b}) = 0 \quad (2.62)$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$\cos \mathbf{b} \cdot \cosh \mathbf{b} = 0 \quad (2.63)$$

Les valeurs propres sont données par le tableau suivant [27]

\mathbf{b}_0	\mathbf{b}_1	\mathbf{b}_2	\mathbf{b}_3	\mathbf{b}_4	\mathbf{b}_5
0	4,730	7,853	10,99	14,137	17,279

Tableau 2.1 : Fréquences propres du bras flexible articulé avec translation de base

Une solution itérative de (2.63) est donnée par l'équation [29] :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_0 = 0, \mathbf{b}_1 = 4,730 \\ \mathbf{b}_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) \mathbf{p}, i = 2, \dots, \infty. \end{cases} \quad (2.64)$$

Les fonctions propres deviennent :

$$\begin{cases} F_0(x) = A_0 x + A_{04} \\ F_i(x) = A_1 \left(\cos \mathbf{b}_i x + \cosh \mathbf{b}_i x + \frac{A_4}{A_1} (\sin \mathbf{b}_i x + \sinh \mathbf{b}_i x) \right), i > 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

où F_0 est la fonction propre du mode rigide qui correspond à \mathbf{b}_0 et le rapport A_4 / A_1 peut être calculé à partir de (2.61)

$$\frac{A_4}{A_1} = \frac{\cos \mathbf{b} - \cos \mathbf{b}}{\sin \mathbf{b} + \sinh \mathbf{b}} = -\frac{\sin \mathbf{b} - \sinh \mathbf{b}}{\cos \mathbf{b} - \cos \mathbf{b}}$$

La normalisation des fonctions propres permet de calculer les constantes A_0 , A_{04} et A_1 .

Pour compléter l'approximation finale de la solution y , nous devons déterminer les coefficients $q_i(t)$ en résolvant le système (2.50) décrivant la dynamique du bras.

2.5.4 Résolution du système

Considérons l'équation différentielle (2.50) :

$$\partial_t^2 q_i(t) = \mathbf{I}_i q_i(t) + \mathbf{F}'_i(0)M(t) - \mathbf{F}_i(0)F(t) \quad i=1, \dots, \infty \quad (2.66)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} q_i(0) &= (y_0, \mathbf{F}_i)_{L^2} \\ \partial_t q_i(0) &= (y_1, \mathbf{F}_i)_{L^2} \end{aligned} \quad (2.67)$$

L'équation (2.66) est une équation différentielle du second ordre sous la forme $\partial_t^2 q(t) = -\mathbf{w}^2 q(t)$. On en déduit que $\mathbf{w}_i = \mathbf{b}_i^2$.

On remarque que la fréquence temporelle est égale au carré de la fréquence spatiale.

Posons :

$$\begin{cases} q_i^{(1)} = q_i \\ q_i^{(2)} = \partial_t q_i^{(1)} \end{cases}$$

Le système (2.66) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \partial_t q_i^{(1)} \\ \partial_t q_i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w}_i \\ -\mathbf{w}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^{(1)} \\ q_i^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{0}{\mathbf{F}'_i(0)} & \frac{0}{-\mathbf{F}_i(0)} \\ \frac{\mathbf{F}'_i(0)}{\mathbf{w}_i} & \frac{-\mathbf{F}_i(0)}{\mathbf{w}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

qui est de la forme :

$$\partial_t X_i = G_i X_i + S_i F_{ext} \quad (2.69)$$

avec $X_i = (q_i^{(1)}, q_i^{(2)})$.

La solution classique de ce système est :

$$X_i(t) = e^{G_i t} X_{i0} + \int_0^t e^{(t-\tau)G_i} S_i F_{ext}(\tau) d\tau \quad (2.70)$$

2.5.5 Discrétisation en temps

Le second terme de (2.70) ne peut être connu. C'est pourquoi, nous considérons

que le vecteur F_{ext} est constant par morceaux sur les intervalles $[t_n, t_n + \Delta t]$, où le pas de temps Δt est très petit.

L'état de X_i à $t_n + \Delta t$ est :

$$X_i(t_n + \mathbf{D}t) = e^{G_i \mathbf{D}t} X_i(t_n) + \int_0^{\mathbf{D}t} e^{(\mathbf{D}t-t)G_i} dt \cdot S_i F_{ext} \quad (2.71)$$

Rappelons que le vecteur du contrôle F_{ext} est constant et indépendant du temps sur l'intervalle $[t_n, t_n + \Delta t]$, alors, l'intégrale de la matrice de rotation s'écrit :

$$\int_0^{\mathbf{D}t} e^{(\mathbf{D}t-t)G_i} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} & \frac{1 - \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \\ \frac{\cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) - 1}{\mathbf{w}_i} & \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

La solution du système (2.69), est alors :

$$X_i(t_n + \mathbf{D}t) = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) & \sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) \\ -\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) & \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) \end{bmatrix} X_i(t_n) + \begin{bmatrix} \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} & \frac{1 - \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \\ \frac{\cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) - 1}{\mathbf{w}_i} & \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \end{bmatrix} S_i F_{ext} \quad (2.73)$$

avec $i=1, \dots, \infty$

La solution obtenue est à dimension infinie, ce qui rend la simulation numérique impossible.

Comme nous l'avons déjà mentionné, il est possible de limiter la dimension du vecteur d'état en modélisant cette solution avec un nombre restreint de modes les plus significatifs, avec des erreurs acceptables.

Supposons que le nombre de modes les plus significatifs est N et posons :

$$t_n = n\Delta t, X_i(t_n + \Delta t) = X_i^{n+1}, X_i(t_n) = X_i^n, M(t_n) = M^n, F(t_n) = F^n \text{ et } N_T = \frac{t}{\Delta t}$$

Alors, de (2.73) nous obtenons $2N$ équations récurrentes explicites :

$$X_i^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) & \sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) \\ -\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) & \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) \end{bmatrix} X_i^n + \begin{bmatrix} \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} & \frac{1 - \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \\ \frac{\cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) - 1}{\mathbf{w}_i} & \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \end{bmatrix} S_i F_{ext}^n \quad (2.74)$$

où $i=1, \dots, N$ et $n = 1, \dots, N_T$.

De (2.69) le système discrétisé final représenté par les variables d'états $\partial_i q_i$ et q_i s'écrit :

$$\begin{bmatrix} q_i^{n+1} \\ \partial_t q_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) & \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \\ -\mathbf{w}_i \sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) & \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^n \\ \partial_t q_i^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i^2} \mathbf{F}'_i(0) & \frac{\cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) - 1}{\mathbf{w}_i^2} \mathbf{F}_i(0) \\ \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \mathbf{F}'_i(0) & \frac{-\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \mathbf{F}_i(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^n \\ F^n \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

avec les conditions initiales $(q_i(0), \partial_t q_i(0))$ données par :

$$\begin{cases} q_i(0) = \int_0^1 y_0 \mathbf{F}_i(x) dx \\ \partial_t q_i(0) = \int_0^1 y_1 \mathbf{F}_i(x) dx \end{cases} \quad (2.76)$$

où y_0 est la position initiale et y_1 est la vitesse initiale.

2.6 SIMULATION NUMERIQUE

2.6.1 Données de la simulation

La mise en œuvre numérique a été réalisée à l'aide du logiciel Matlab

Le choix des paramètres est effectué de façon à avoir une bonne approximation et en particulier de pouvoir visualiser clairement l'effet du contrôle appliqué au bras.

Le pas du temps $\mathbf{D}t$ est choisi à partir de la fréquence des modes les plus hauts (\mathbf{b}_N) afin de visualiser la propagation des ondes la plus rapide.

Le temps de simulation T est choisi à partir de la fréquence des modes les plus bas (\mathbf{b}_1) afin de visualiser la propagation des ondes la plus lente.

Le choix des conditions initiales est arbitraire, du fait que le contrôle doit être efficace pour n'importe quelle position initiale du bras.

2.6.2 Interprétation des Résultats

Les figures (2.7.a et b) montrent l'évolution du bras dans le cas autonome Elles mettent en évidence le comportement vibratoire complexe du bras.

D'autre part, nous constatons que le temps de vibration verticale du bras est le même que celui de la propagation des ondes élastiques. Cela prouve que le système est conservatif.

La représentation en 2D montre clairement la propagation des ondes élastiques avec des vitesses non constantes ainsi que leurs réflexions sur les bords.

Les figures (2.8.a et b) illustrent la déflexion du bras avec contrôle diffusif. Elles montrent clairement l'effet du contrôle utilisé sur le bras. La propagation des ondes est très nette au début de l'évolution mais presque il n'y a aucune réflexion à la fin.

La figure (2.9) montre la forme initiale du bras ainsi que la forme finale à l'instant 1s pour les deux cas autonome et contrôlé. On remarque que dans le cas contrôlé, la forme

finale du bras est celle du mode rigide. Par contre dans l'autre cas, le bras prend une forme très différente. Cela implique que le contrôle a stabilisé le bras. La figure (2.10) présente l'évolution de l'extrémité libre (déflexion en $x=1$) dans le cas contrôlé :

Pour $0 < t < 1s$, elle reste toujours positive.

Pour $t > 1s$, elle est une sinusoïde non symétrique d'amplitude décroissante qui tend vers une valeur constante, ce qui met en évidence la stabilité de ce point.

La figure (2.11) met en évidence l'évolution décroissante dans le temps de l'énergie mécanique du bras.

On remarque que cette décroissance est très rapide au début, ce qui justifie que le contrôle est efficace aux hautes fréquences pour lesquelles les ondes se propagent rapidement et par ailleurs elles sont absorbées aussi rapidement à la frontière.

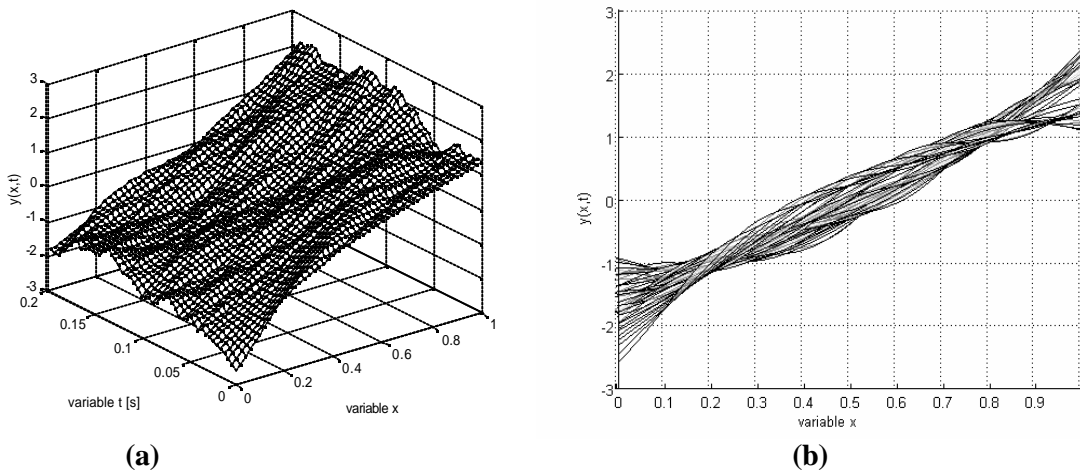


Figure 2.7 : Déflexion du bras cas autonome

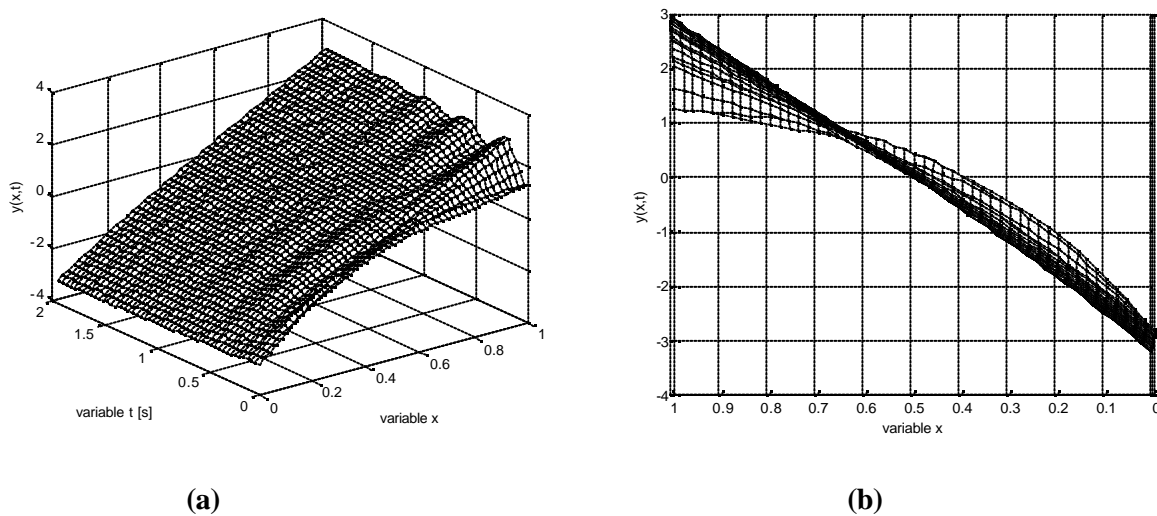


Figure 2.8 : Déflexion du bras avec contrôle

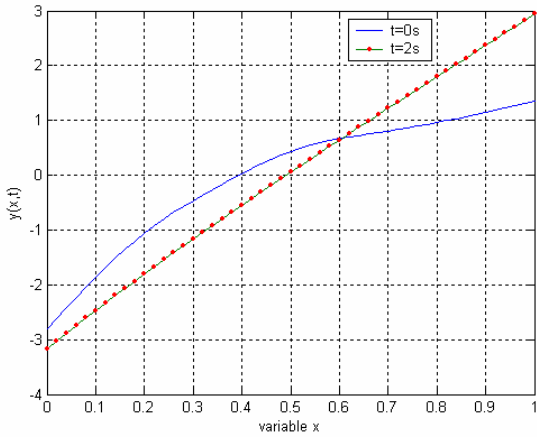


Figure 2.9 : Forme initiale et finale du bras

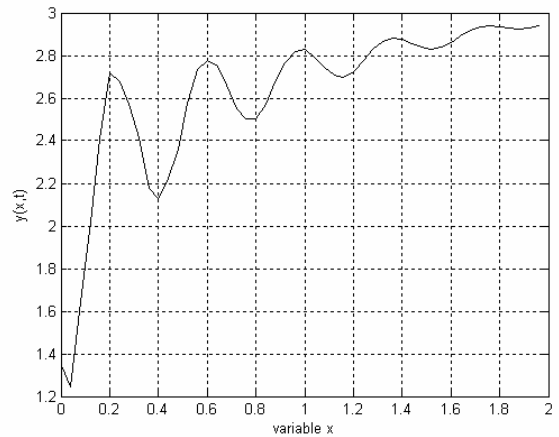


Figure 2.10 : Evolution du bout du bras avec contrôle

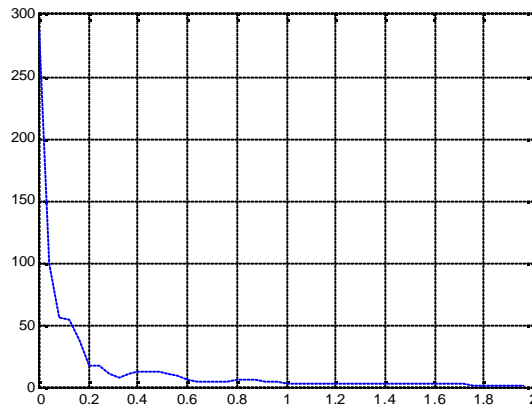


Figure 2.11 : Energie mécanique du bras flexible

2.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la stabilisation d'un bras flexible articulé avec une translation verticale de sa base d'articulation. Le principe est basé sur l'absorption des ondes par un couple et une force appliqués au point d'articulation.

La synthèse du compensateur dans le domaine fréquentielle a fait apparaître des opérateurs d'ordres fractionnaires. La réalisation diffusive de ces opérateurs a permis d'obtenir un système augmenté qui peut se mettre sous la forme abstraite $dX/dt=AX$, où A est un générateur infinitésimale d'un semi groupe.

L'énergie mécanique du bras est décroissante dans le temps et tends vers zéro, ce qui justifie la stabilisation du bras.

Les réponses du bras ont été approximées par l'approche modale. Les simulations numériques sont en accord avec les résultats théoriques et ont montré clairement l'efficacité du contrôle utilisé.

Chapitre 3

Contrôle Diffusif d'un Bras Flexible à Base Articulé

3.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente la stabilisation d'un bras flexible articulé par un couple appliqué au point d'articulation sans translation verticale du point d'articulation. Ce cas présente un grand intérêt dans les structures spatiales. La stabilisation du bras flexible est faite par des contrôleurs absorbants d'ondes.

3.2 DYNAMIQUE DU BRAS

Considérons un bras flexible articulé à une extrémité et libre à l'autre extrémité. (Fig. 3.1).

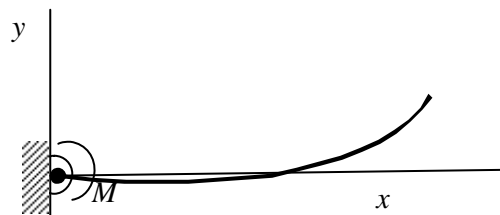


Figure 3.1 : Bras flexible articulé à base articulée

La dynamique du bras est modélisée par l'équation d'Euler Bernoulli décrite dans le chapitre 2 :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad x \in [0,1] \quad (3.01)$$

Sachant que dans ce cas le bras est seulement articulé (la base d'articulation est fixe) les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} y(0,t) = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) + M(t) = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,t) = 0, \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(1,t) = 0. \end{cases} \quad (3.02)$$

M est le couple appliqué au point d'articulation et sert à stabiliser le bras flexible.

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(x,0) = y_0(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x) \end{cases} \quad (3.03)$$

L'énergie mécanique du bras est définie par :

$$E_b(t) = \frac{1}{2} \|(y, \partial_t y)\|_{H_p} \quad (3.04)$$

ou H_p est l'espace qui a été défini dans le chapitre 2.

Dans le cas autonome où $M = 0$, le système est conservatif, c'est à dire l'énergie du système reste constante tout le temps.

3.3 CONTROLE FRACTIONNAIRE ABSORBANT D'ONDES

3.3.1 Principe

Le principe du contrôle est le même qui a été présenté dans le chapitre 2. Donc pour avoir une absorption des ondes réfléchissantes aux frontières, il faut que le contrôleur, synthétisé à partir des conditions aux limites, simule le prolongement du bras réel vers $-\infty$ par l'addition d'un bras virtuel de longueur infini (fig.3.3).

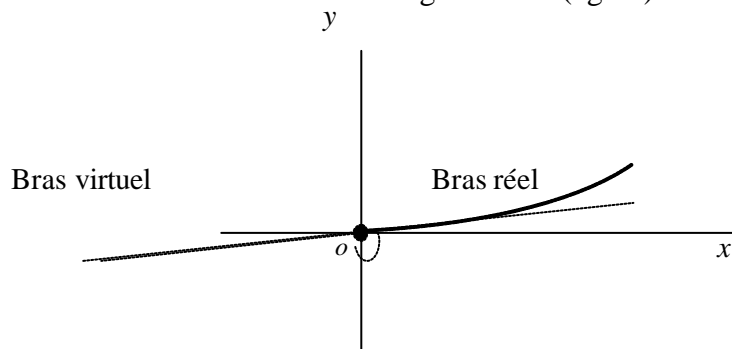


Figure 3.2 : Système bras réel et bras virtuel.

Tout d'abord, il est nécessaire de modéliser le comportement du bras par un modèle local (au niveau des frontières) qui donne la direction de propagation des ondes et leurs interférences.

Donc, nous cherchons toujours une équation reliant les ondes incidentes et les ondes réfléchissantes sous la forme :

$$b = S_{CL} a \quad (3.05)$$

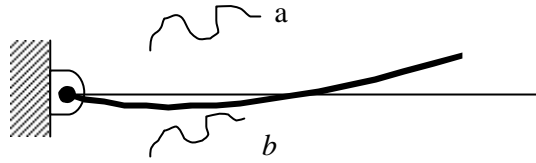


Figure 3.3 : Ondes entrantes et sortantes à l'extrémité articulée

3.3.2 Synthèse du contrôle

La démarche de la synthèse des contrôleurs absorbants d'ondes est similaire à celle présenté au chapitre 2. Signalons, tout d'abord, la remarque suivante :

Une articulation en 0 s'interprète comme un amortisseur visqueux de constante très élevée et conduit à une valeur infinie de la composante C_{21} (2^{ème} ligne et 1^{ère} colonne) de la matrice d'impédance C donnée par l'équation 2. Ce qui entraîne $\partial_t y(0, t) = 0$ et $y(0, t) = 0$, la base du bras étant fixe en $x = 0$, la force n'intervient plus dans l'équation d'état.

Nous constatons que la démarche de la synthèse du contrôle est similaire à celui présenté dans le chapitre précédent concernant le contrôle du bras flexible à translation de base.

En tenant compte de cette remarque, la matrice d'impédance adaptée (Eq.2.) en $x = 0$ et le contrôle correspondant prennent respectivement les formes suivantes :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.06)$$

Le couple appliqué au bras s'écrit :

$$M(\mathbf{w}) = C_{12} \partial_x y(x, \mathbf{w})|_{x=0} \quad (3.07)$$

La matrice de réflexion devient alors :

$$S_{CL} = \frac{1}{-i(\mathbf{w} + \sqrt{\mathbf{w}} \cdot C_{12}(i-1))} \begin{bmatrix} -(\mathbf{w} - \sqrt{\mathbf{w}} \cdot C_{12}(i+1)) & -\mathbf{w}(i-1) \\ i\mathbf{w}(i-1) & \mathbf{w} + \sqrt{\mathbf{w}} \cdot C_{12}(i+1) \end{bmatrix} \quad (3.08)$$

a/ Proposition 1

Le premier compensateur que nous proposons est décrit directement de la matrice

d'impédance adaptée.

En tenant compte des remarques précédentes, le système (2.25) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\mathbf{w} & -\sqrt{2i\mathbf{w}} \cdot (i\mathbf{w})^{-1/2} \\ \sqrt{2i\mathbf{w}} \cdot (i\mathbf{w})^{1/2} & i\mathbf{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_x y \end{bmatrix}_{x=0} \quad (3.09)$$

Ce qui donne :

$$C_{12} = -\sqrt{2} \frac{i\mathbf{w}}{\sqrt{i\mathbf{w}}} \quad (3.10)$$

Ils correspondent, dans le domaine temporel, à la forme :

$$M(t) = -\sqrt{2} I^{1/2} \partial_t \partial_x y(0, t) \quad (3.11)$$

b/ Proposition 2

Désignons par r_{pp} , r_{ps} , r_{sp} , r_{ss} les éléments de la matrice de réflexion, tels que :

$$S_{CL} = \begin{bmatrix} r_{pp} & r_{sp} \\ r_{ps} & r_{ss} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

où :

r_{pp} est le coefficient de réflexion a_1 vers b_1 ,
 r_{sp} est le coefficient de réflexion a_2 vers b_1 ,
 r_{ps} est le coefficient de réflexion a_1 vers b_2 ,
 r_{ss} est le coefficient de réflexion a_2 vers b_2 .

Nous pouvons remarquer que :

- les coefficients de la matrice de réflexion S_{CL} ne dépendent pas tous de C_{12} , donc il n'existe pas une condition qui les annule tous à la fois.
- r_{pp} est le coefficient responsable de la réflexion du mode d'ondes progressives dont l'influence est majeure sur tous les termes de la matrice de réflexion en boucle fermée.

De (3.08) nous avons :

$$r_{pp} = \frac{-\left(\mathbf{w} - \sqrt{\mathbf{w}} \cdot C_{12}(i+1)\right)}{-i\left(\mathbf{w} + \sqrt{\mathbf{w}} \cdot C_{12}(i-1)\right)} \quad (3.13)$$

Alors, pour $r_{pp} = 0$, nous avons :

$$C_{12} = \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}}(i+1)} \quad (3.14)$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$C_{12} = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i\mathbf{w}}{\sqrt{i\mathbf{w}}} \quad (3.15)$$

La réalisation de ce compensateur s'avère très difficile car Il n'en existe pas dans la littérature une réalisation possible.

c/ Proposition 3

La troisième solution que nous proposons correspond au cas dégénéré où le déterminant de la matrice de réflexion est nul.

Nous avons donc :

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} -(\mathbf{w} - \sqrt{\mathbf{w}} \cdot C_{12}(i+1)) & -\mathbf{w}(i-1) \\ i\mathbf{w}(i-1) & \mathbf{w} + \sqrt{\mathbf{w}} \cdot C_{12}(i+1) \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (3.16)$$

Ce qui donne :

$$C_{12} = \frac{-i\mathbf{w}}{\sqrt{2}\sqrt{i\mathbf{w}}} \quad (3.17)$$

ou :

$$C_{12} = \frac{i\mathbf{w}}{\sqrt{2}\sqrt{i\mathbf{w}}} \quad (3.18)$$

Ils correspondent, dans le domaine temporel, à la forme :

$$M(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} I^{1/2} \partial_t \partial_x \mathbf{q}(0, t) \quad (3.19)$$

3.3.3 Système global

A partir des expressions (3.02), (3.03) et (3.26), le système global s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^4 y = 0 \\ \partial_x^2 y(0, t) = C_r I^{1/2} \partial_t \partial_x y(0, t) \\ y(0, t) = 0 \\ \partial_x^2 y(1, t) = 0, \partial_x^3 y(1, t) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

ou C_r est un coefficient

Le schéma bloc de ce système est donné par la figure (3.4).

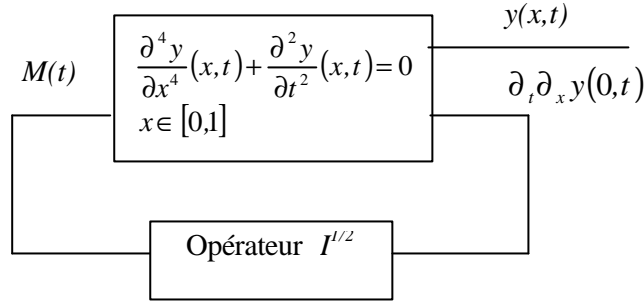


Fig. 3.4 : Contrôle par retour fractionnaire d'un bras flexible articulé sans translation de base

Nous constatons que la stabilisation du bras articulé par un absorbeur d'ondes fait l'apparition d'opérateur non standard d'intégration fractionnaire.

3.4 CONTROLE DIFFUSIF

3.4.1 Réalisation diffusive du contrôleur

Nous avons mentionné dans le chapitre 1, qu'une réalisation non héréditaire d'opérateurs fractionnaires, s'effectue par le modèle diffusif. Par conséquent, la réalisation diffusive des contrôleurs fractionnaires d'ordre 1/2 est :

$$\begin{cases} \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \partial_t \partial_x y(0, t) \\ I^{1/2} \partial_t \partial_x y(0, t) = \int_0^\infty \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.21)$$

ou μ est la représentation diffusive d'opérateurs d'intégration fractionnaires.

3.4.2 Système augmenté

En introduisant le système (3.21) dans (3.20), nous obtenons le nouveau système augmenté :

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x, t) + \partial_x^4 y(x, t) = 0 \\ \partial_x^2 y(0, t) = C_r \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{m}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \partial \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{x}\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \partial_t \partial_x y(0, t) \\ y(0, t) = 0 \\ \partial_x^2 y(1, t) = 0 \text{ et } \partial_x^3 y(1, t) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Le système (3.22) peut se mettre sous la forme $\frac{dX}{dt} = AX$, où $X = (y, \partial_t y, \mathbf{j})^T$.

3.4.3 Etude de la stabilité

Considérons la fonctionnelle «énergie globale» du système (3.22) définie par :

$$E_x(t) = E_b(t) - C_r E_j(t) \text{ où } C_r < 0 \quad (3.23)$$

où E_b est l'énergie mécanique du bras, E_j est l'énergie associée à la variable diffusive.

Alors :

$$E_b(t) = \frac{1}{2} \|\partial_t y + \partial_x^2 y\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_t y)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x^2 y)^2 dx \quad (3.24)$$

$$E_j(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{j}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{j})^2 dx \quad (3.25)$$

a) Proposition 1

Le système (3.22) est dissipatif dans le sens que $\frac{dE_x(t)}{dt} \leq 0$.

Démonstration :

On note que :

$$\frac{dE_x(t)}{dt} = \frac{dE_b(t)}{dt} - C_r \frac{dE_j(t)}{dt}$$

Avec :

$$\frac{dE_j(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \partial_t \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{x}^2 \mathbf{j}^2(t, \mathbf{x}) + 2\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \partial_t \partial_x y(0, t)) dx$$

$$\frac{dE_b(t)}{dt} = [\partial_x^2 y \cdot \partial_t \partial_x y - \partial_t y \cdot \partial_x^3 y]_0^l = \partial_x^2 y(0, t) \partial_t \partial_x y(0, t)$$

La 2^{ème} équation, avec les conditions aux limites, devient :

$$\frac{dE_b(t)}{dt} = M(t) \partial_t \partial_x y(0, t)$$

$$\frac{dE_j(t)}{dt} = C_r \partial_t \partial_x y(0, t) l^{1/2} \partial_t \partial_x y(0, t)$$

De (3.23), la dérivée de l'énergie globale devient :

$$\begin{aligned}
\frac{dE_x}{dt} &= C_r \partial_t \partial_x y(0,t) \cdot \int_x \mathbf{j}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} - C_r \int_x \mathbf{j}(\mathbf{x},t) \partial \mathbf{j}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} \\
&= C_r \partial_t \partial_x y(0,t) \cdot \int_x \mathbf{j}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} - C_r \int_x \mathbf{j}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} (-\mathbf{x}\mathbf{j} + 2\partial_t \partial_x y(0,t)) d\mathbf{x} \\
&= \frac{C_r}{2} \int_x \left(\mathbf{x}\mathbf{j}^2 - \frac{\partial \mathbf{j}^2}{2} \right) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{j}^2 \geq \frac{\partial \mathbf{j}^2}{2}$ alors $\frac{dE_x}{dt} \leq 0$ ♦.

b) Proposition 2

Posons $X = (y, \partial_t y, \mathbf{j})$ et $H_G = H_p \times L^2(R)$. Alors, le système (3.22) peut se mettre sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = LX$; où $X \in H_G$ et Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe dont l'étude s'avère moins complexe.

Démonstration

La démonstration est basée sur le théorème de Lumer-Phillipps.
 Λ est l'opérateur linéaire non borné suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\partial_x^4 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{d}, \partial_x \cdot \rangle & -\mathbf{x} \end{vmatrix}$$

où $\langle \mathbf{d}, f \rangle = f(0)$

Le domaine de l'opérateur Λ est :

$$\begin{aligned}
D(\Lambda) &= \left\{ (\mathbf{J}, \mathbf{f}, \mathbf{j})^T \in H_G, : \mathbf{J} \in H^4(0,1), \mathbf{f} \in \mathbf{H}(0,1), -\mathbf{x}\mathbf{j} + \partial \mathbf{j} \in L^2(R), \partial_x^2 y(0, \cdot) - C_r \int_x \mathbf{j} d\mathbf{x} = 0 \right\} \\
H^4 &= \left\{ \mathbf{J} \in L^2(R), : \mathbf{J}, \partial_x \mathbf{J}, \dots, \partial_x^4 \mathbf{J} \right\}
\end{aligned}$$

L'opérateur Λ est dissipatif (proposition 1) et l'application $(\lambda I - \Lambda)$ est surjective pour $\lambda > 0$ (voir [48]) ♦.

c) Proposition 3

Le système (3.22) est asymptotiquement stable.

Démonstration

La fonctionnelle d'énergie globale est une fonction de Lyapunov.

Donc, d'après la proposition 1 et le principe d'invariance de Lasalle, la solution du système (3.22) converge vers zéro ♦.

3.5 APPROXIMATION NUMERIQUE

3.5.1 Représentation modale du Bras

L'approximation de la réponse du bras est basée sur la superposition linéaire de la réponse de ses modes propres. La solution est donnée par :

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \cdot \mathbf{F}_i(x) \quad (3.26)$$

$$q_i(t) = \int_{\Omega} y(x,t) \cdot \mathbf{F}_i(x) dx \quad (3.27)$$

où N est le nombre de modes conservés et Ω est le domaine de définition de x .

Le but de cette décomposition est de chercher les modes propres de vibration du bras avec les conditions aux limites du système considéré. Pour cela, considérons l'équation du bras :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad x \in [0,1] \quad (3.28)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) + M(t) &= 0, y(0,t) = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,t) &= 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(1,t) = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (3.28) par \mathbf{F}_j et en intégrant, nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \mathbf{F}_j \right)_{L^2(0,1)} = \left(-\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \mathbf{F}_j \right)_{L^2(0,1)} \quad (3.30)$$

En utilisant (3.26), la première expression de (3.30) s'écrit :

$$(\partial_t^2 y, \mathbf{F}_i) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \partial_t^2 q_i \cdot \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \right) = \partial_t^2 q_j \quad (3.31)$$

De même, la deuxième expression s'écrit :

$$\left(-\partial_x^4 y, \mathbf{F}_j \right)_{L^2(0,1)} = \left(-\sum_{i=1}^{\infty} q_i \partial_x^4 \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \right)_{L^2(0,1)} \quad (3.32)$$

Par intégration par partie, nous obtenons :

$$\left(-\partial_x^4 y, \mathbf{F}_j \right)_{L^2(0,1)} = \left(-\mathbf{F}_j''', y \right)_{L^2(0,1)} + \mathbf{F}_j'(0)M(t) \quad (3.33)$$

Introduisons la notation suivante :

$$\left(-\mathbf{F}_i''', \mathbf{F}_j \right) = \mathbf{I}_j \Rightarrow \mathbf{F}_j''' = -\mathbf{I}_j \mathbf{F}_j \quad (3.34)$$

Alors, l'équation (3.33) réécrite avec la notation (3.34), devient :

$$\left(-\partial_x^4 y, \mathbf{F}_j \right) = q_j(t) \mathbf{I}_j + \mathbf{F}_j'(0)M(t) \quad (3.35)$$

De (3.31), (3.34) et (3.35), l'équation (3.30) devient :

$$\partial_t^2 q_j(t) = \mathbf{I}_j q_j(t) + \mathbf{F}_j'(0)M(t) \quad j=1, \dots, \infty \quad (3.36)$$

où les \mathbf{F}_j sont les fonctions propres et les \mathbf{I}_j sont les valeurs propres.

3. 5. 2 Calcul des fonctions propres du bras

La solution de (3.34) peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{F}(x) = A_1 s_1(\mathbf{b}x) + A_2 c_1(\mathbf{b}x) + A_3 s_2(\mathbf{b}x) + A_4 c_2(\mathbf{b}x) \quad (3.37)$$

Les fonctions s_1 c_1 s_2 c_2 sont définies par (2.54) et les constantes A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Les conditions aux limites dans le cas autonome s'écrivent en fonction des fonctions propres par :

$$\begin{cases} \mathbf{F}''(0) = 0, \mathbf{F}(0) = 0 \\ \mathbf{F}''(1) = 0, \mathbf{F}'''(1) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Les dérivées de la fonction propre s'écrivent :

$$\mathbf{F}'(x) = \mathbf{b}(A_1 c_1(\mathbf{b}x) + A_2 s_2(\mathbf{b}x) + A_3 c_2(\mathbf{b}x) + A_4 s_1(\mathbf{b}x)) \quad (3.39)$$

$$F''(x) = \mathbf{b}^2(A_1s_1(\mathbf{b}x) + A_2c_1(\mathbf{b}x) + A_3s_2(\mathbf{b}x) + A_4c_2(\mathbf{b}x)) \quad (3.40)$$

$$F'''(x) = \mathbf{b}^3(A_1c_2(\mathbf{b}x) + A_2s_1(\mathbf{b}x) + A_3c_1(\mathbf{b}x) + A_4s_2(\mathbf{b}x)) \quad (3.41)$$

De (2.56)-(2.58), nous obtenons le système :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -\sin \mathbf{b} + \sinh \mathbf{b} & 0 & -\sin \mathbf{b} + \sinh \mathbf{b} & 0 \\ -\cos \mathbf{b} + \cosh \mathbf{b} & 0 & \cos \mathbf{b} + \cosh \mathbf{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.42)$$

Une solution non triviale de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 est que le déterminant de (3.42) doit être nul, ce qui donne l'équation aux fréquences propres :

$$-\sin \mathbf{b} \cosh \mathbf{b} - \sinh \mathbf{b} \cos \mathbf{b} = 0 \quad (3.43)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$tg \mathbf{b} \cdot th \mathbf{b} = 0 \quad (3.44)$$

Les valeurs propres sont données par le tableau suivant [27] :

\mathbf{b}_0	\mathbf{b}_1	\mathbf{b}_2	\mathbf{b}_3	\mathbf{b}_4
0	3,927	7,068	10,210	13,351

Tableau 3.1 : Fréquences propres du bras flexible articulé sans translation de base

Une solution itérative de l'équation aux fréquences propres (3.44) est donnée par l'équation [29] :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_0 = 0, \mathbf{b}_1 = 3,927, \\ \mathbf{b}_i = (4i - 3)\frac{\mathbf{p}}{4}, i = 2, \dots, \infty. \end{cases} \quad (3.45)$$

Les fonctions propres deviennent :

$$\begin{cases} F_0(x) = A_0x \\ F_i(x) = A_1 \left((\sinh \mathbf{b}_i x - \sin \mathbf{b}_i x) + \frac{A_3}{A_1} (\sin \mathbf{b}_i x + \sinh \mathbf{b}_i x) \right), i > 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

où F_0 est la fonction propre du mode rigide qui correspond au mode rigide \mathbf{b}_0 et le rapport A_3/A_1 peut être calculé à partir de (3.42) :

$$\frac{A_4}{A_1} = -\frac{\sin \mathbf{b} + \sinh \mathbf{b}}{-\sin \mathbf{b} + \sinh \mathbf{b}} \quad (3.47)$$

La normalisation des fonctions propres permet de calculer les constantes A_0 et A_1 .

Pour compléter l'approximation finale de la solution $y(x,t)$, nous devons déterminer les coefficients q_i en résolvant le système (3.36) ; décrivant la dynamique du bras.

3.5.3 Résolution du système

Considérons l'équation différentielle (3.36) :

$$\partial_t^2 q_i(t) = \mathbf{I}_i q_i(t) + \mathbf{F}'_i(0)M(t) \quad i=1, \dots, \infty \quad (3.48)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} q_i(0) = (y_0, \mathbf{F}_i)_{L^2} \\ \partial_t q_i(0) = (y_1, \mathbf{F}_i)_{L^2} \end{cases} \quad (3.49)$$

L'équation (3.48) est une équation différentielle du second ordre sous la forme $\partial_t^2 q(t) = -\mathbf{w}^2 q(t)$. On en déduit que $\mathbf{w}_i = \mathbf{b}_i^2$.

On remarque que la fréquence temporelle est égale au carré de la fréquence spatiale.

Posons :

$$\begin{cases} q_i^{(1)} = q_i \\ q_i^{(2)} = \partial_t q_i^{(1)} \end{cases}$$

Le système (3.48) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \partial_t q_i^{(1)} \\ \partial_t q_i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w}_i \\ -\mathbf{w}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^{(1)} \\ q_i^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}'_i(0) \\ \mathbf{w}_i \end{bmatrix} M \quad (3.50)$$

qui est de la forme :

$$\partial_t X_i = G_i X_i + S_i F_{ext} \quad (3.51)$$

avec $X_i = (q_i^{(1)}, q_i^{(2)})$.

La solution classique de ce système est :

$$X_i(t) = e^{G_i t} X_{i0} + \int_0^t e^{(t-t')G_i} S_i F_{ext}(t') dt' \quad (3.52)$$

En suivant la même démarche décrite dans le chapitre 2, on trouve le système discrétisé final représenté par les variables d'états $\partial_t q_i$ et q_i suivant :

$$\begin{bmatrix} q_i^{n+1} \\ \partial_t q_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) & \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \\ -\mathbf{w}_i \sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) & \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^n \\ \partial_t q_i^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i^2} \mathbf{F}'_i(0) \\ \frac{\sin(\mathbf{w}_i \mathbf{D}t)}{\mathbf{w}_i} \mathbf{F}'_i(0) \end{bmatrix} M^n \quad (3.53)$$

avec les conditions initiales $(q_i(0), \partial_t q_i(0))$ données par :

$$\begin{cases} q_i(0) = \int_0^1 y_0 \mathbf{F}_i(x) dx \\ \partial_t q_i(0) = \int_0^1 y_1 \mathbf{F}_i(x) dx \end{cases} \quad (3.54)$$

où y_0 est la position initiale et y_1 est la vitesse initiale.

3.6 SIMULATION NUMERIQUE

Le choix des paramètres est effectué de la même façon précédente en particulier pour pouvoir visualiser clairement l'effet du contrôle appliqué au bras.

Le choix des conditions initiales est toujours arbitraire, du fait que le contrôle doit être efficace pour n'importe quelle position initiale du bras.

Les figures (3.5) et (3.6) montrent l'évolution du bras dans le cas autonome. Elles mettent en évidence le comportement vibratoire complexe du bras du aux réflexions des ondes.

La représentation en 2D montre clairement la propagation des ondes élastiques avec des vitesses non constantes ainsi que leurs réflexions sur les bords.

Les figures (3.7) et (3.8) illustrent la déflexion du bras avec contrôle diffusif. Elles montrent clairement l'effet du contrôle utilisé sur le bras. La propagation des ondes est très nette au début de l'évolution mais par la suite, nous constatons qu'elles sont absorbées.

La figure (3.9) met en évidence l'évolution décroissante dans le temps de l'énergie mécanique du bras.

On remarque que cette décroissance est très rapide au début, ce qui justifie l'efficacité du contrôle aux hautes fréquences pour lesquelles les ondes se propagent par une grande vitesse.

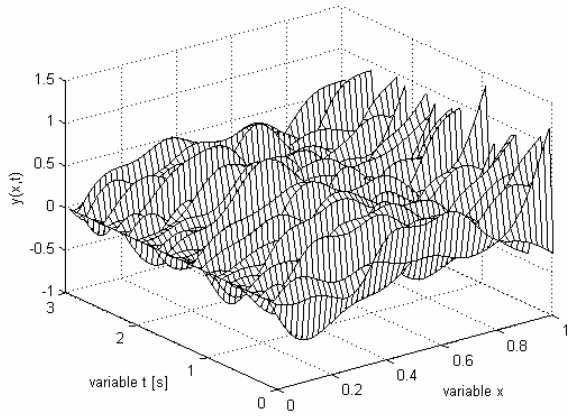


Figure 3.6 : Comportement en 3D du bras cas autonome

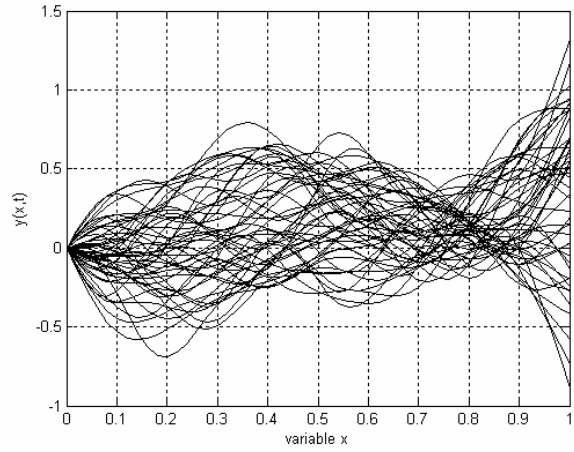


Figure 3.5 : Comportement en 2D du bras cas autonome

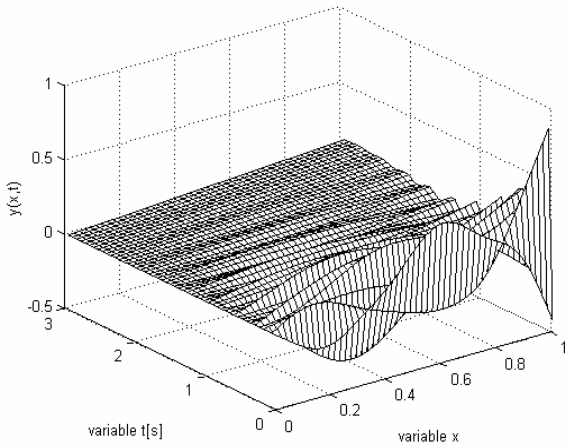


Figure 3.7 : Comportement en 3D du bras contrôlé

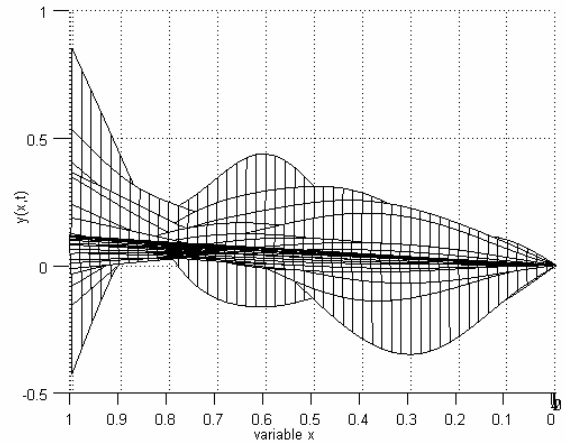


Figure 3.8 : Comportement en 2D du bras contrôlé

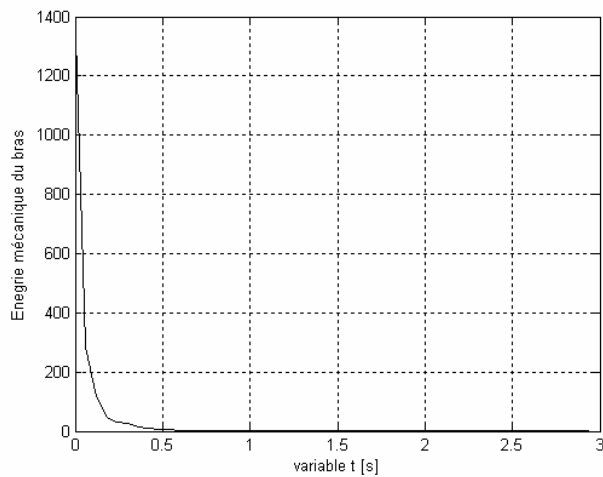


Figure 3.9 : Energie du bras dans le cas contrôlé

3.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stabilisation d'un bras flexible articulé dans le cas où sa base d'articulation est fixe. L'absorption des ondes a fait l'apparition d'un opérateur d'intégration d'ordre $\frac{1}{2}$.

Nous avons montré que le système global, obtenu par couplage avec la réalisation diffusive, est asymptotiquement stable. L'énergie mécanique du bras est décroissante dans le temps.

Les simulations numériques dans les deux cas autonome et contrôlé ont montrées que, au bout d'un temps t fini, la réponse du bras flexible est celle du mode rigide.

Chapitre 4

Contrôle Diffusif Pseudo-Invariant et Application à un Moteur à C. C.

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente la théorie d'un nouveau concept de robustesse dit "pseudo-invariant" pour la commande des systèmes dynamiques incertains et son application à la commande d'un moteur à courant continu.

La robustesse est la recherche d'insensibilité à l'incertitude, la propriété fondamentale du contrôle pseudo-invariant est de conserver autant que possible et sur tout le domaine d'incertitude, les caractéristiques dynamiques imposées par le contrôle du système nominal, à un changement de temps (ou de fréquence) près. La stabilité du système incertain est garantie par analogie au système nominal.

La formulation du problème du contrôle pseudo-invariant par la représentation diffusible présente un grand avantage notamment sur l'existence des solutions causales possibles ainsi que la mise en oeuvre numérique.

Cette théorie est appliquée à la commande d'un moteur à courant continu dont le moment d'inertie et la constante de temps de la boucle de courant peuvent varier.

4.2 THEORIE DU CONTROLE PSEUDO-INVARIANT

4.2.1 Principe

Le contrôle pseudo-invariant est un cas général et une version étendue du contrôle CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) qui est basé sur la propriété d'invariance d'un système d'ordre fractionnaire [7] et [40].

Considérons l'équation différentielle fractionnaire d'ordre \mathbf{b} :

$$1 \frac{d^b}{dt^b} s(t) + s(t) = e(t) \quad 1 \leq \mathbf{b} < 2 \quad (4.01)$$

La fonction de transfert correspondante est :

$$H_1(p) = \frac{1}{(tp)^b + 1} \quad t = I^{\frac{1}{b}} \quad (4.02)$$

En posant le changement de fréquence $\tilde{p} = tp$, le transfert (4.02) se réécrit sous la forme $H_1(p) = \frac{1}{\tilde{p} + 1}$.

Le transfert (4.02) est proche (au sens par exemple de H_2 ou H_∞) d'un transfert du second ordre amorti, l'amortissement étant en fait directement lié à b [40]. Donc, Les réponses du système incertain possèdent des dépassements égaux dans le domaine d'incertitude indépendant de I . Cette indépendance peut être interprétée comme une forme de robustesse.

Tout changement de la valeur de I est équivalent à un changement d'échelle de fréquence. Donc, pour un système défini par la fonction de transfert (4.02), la réponse fréquentielle (ou en échelon) est identique, pour tout I , à un changement d'unité de fréquence (de temps) prés.

L'obtention d'un transfert en boucle fermée compensé n'est pas toujours accessible et nous pouvons distinguer les deux cas d'invariance suivants :

- Invariance stricte ou invariance sous changement de fréquence.
- Invariance non stricte ou invariance sous groupe de transformation.

4.2.2 Invariance sous changement de fréquence

L'idée consiste à déterminer un compensateur tel que le transfert en boucle fermée du système considéré soit égal à (4.02). L'exemple ci-après éclaircie ce concept.

Soit un système incertain définit par le transfert :

$$H_1(p) = \frac{1}{Ip} \quad , \quad (4.03)$$

où λ est le paramètre incertain.

Nous pouvons remarquer que pour un compensateur de fonction de transfert :

$$K(p) = \frac{k}{p^a} \quad , \quad 0 < a < 1 \text{ et } k > 0 \quad (4.04)$$

donne la fonction de transfert en boucle fermée suivante :

$$F_k(p) = \frac{k}{k + Ip^{1+a}} \quad (4.05)$$

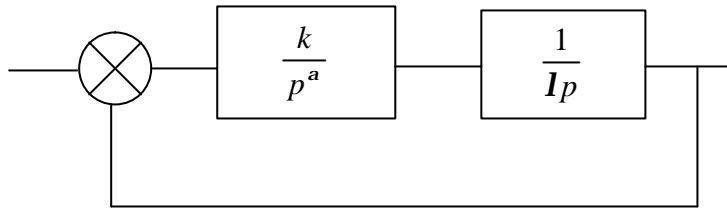


Figure 4.1 : Structure d'un contrôle pseudo-invariant sou changement de fréquence

Avec le changement de fréquence $\tilde{p} = \left(\frac{I}{k}\right)^{\frac{1}{1+a}} p$, nous obtenons un transfert en boucle fermée de la forme (4.02). Par conséquent, la réponse fréquentielle (où temporelle) du système (4.05) est invariante sous changement d'échelle de fréquence (de temps).

Nous remarquons que les compensateurs trouvés sont des systèmes d'ordre fractionnaire, leur réalisation non héréditaire est possible par la représentation diffusive présentée dans le chapitre 1.

4.2.3 Invariance sous groupe de transformation

Dans le cas général où le transfert du système incertain compensé sous la forme (4.02) est inaccessible, le problème du contrôle pseudo-invariant se formule comme un problème d'optimisation d'une fonctionnelle sous la forme :

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \mathfrak{J}(F(K), F_0) \quad (4.06)$$

où $F(K)$ est la fonction de transfert en boucle fermée du système incertain commandé par un compensateur K et F_0 est la fonction de transfert en boucle fermée désirée pour le système nominal.

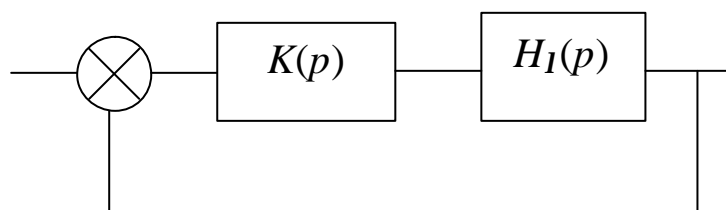


Figure 4.2 : Structure d'un contrôle pseudo-invariant sous groupe de transformation

Le transfert (4.02) présente la propriété d'invariance sous la transformation notée T_s définie par : $s_p = \left(\frac{I}{k}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$. L'ensemble des changements de fréquence définis par une fonction $s_I > 0$ est un groupe de transformations sous changement de fréquence. Nous pouvons écrire alors :

$$(T_s H_I)(p) = H_I(s_I p) = H_{I_0}(p) \quad (4.07)$$

Considérons le transfert du système incertain H_I ($I \in \mathbf{L}$, l'ensemble des paramètres incertains) et notons F la fonction qui définit le système compensé incertain en fonction du compensateur K et I . Le problème (4.06) du contrôle pseudo-invariant sous groupe de transformations s'énonce dans un cadre hilbertien comme suit ([23] et [24]) :

$$\min_{T \in \mathcal{T}, K \in \mathbf{k}} \left\{ (1-q) \|T_s F(K) - F_{I_0}(K_0)\|_{L,p}^2 + q \|T_s F(K) - F_{I_0}(K)\|_{L,p}^2 \right\} \quad (4.08)$$

avec :

- \mathbf{V} , le groupe des fonctions continues définies sur \mathbf{L} , prenant la valeur 1 en I_0 ;
- \mathbf{L} , l'ensemble des paramètres incertains y compris le paramètre nominal I_0 ;
- \mathbf{k} , l'espace de compensateurs ;
- $\|\cdot\|_{L,p}^2$, la norme (distance) hilbertienne de type H_2 ;
- $K_0 \in \mathbf{k}$, le compensateur de référence.

Cette formulation permet d'obtenir un transfert compensé réalisant au mieux les deux propriétés suivantes :

- Pseudo-invariance : $T_s F(K)$ proche de $F_{I_0}(K)$, $\forall I \in \mathbf{L}$,
- Proximité à la référence : $T_s F(K)$ le plus proche possible de $F_{I_0}(K_0)$, $\forall I \in \mathbf{L}$.

Le paramètre q établit un compromis entre l'invariance du transfert ($q \rightarrow 1$) et la proximité à la forme de référence ($q \rightarrow 0$).

Le problème (4.08) peut se poser à partir du transfert en boucle ouverte, dans le cas d'une poursuite monovariante, sur l'espace de Hilbert : $L^2(\mathbf{L}; H_2)$ par :

$$\min_{s \in \mathbf{V}, K \in \mathbf{k}} \left\{ \begin{aligned} & (1-q) \|H_I(is_I w)K(is_I w) - H_{I_0}(iw)K_0(iw)\|_{L,w}^2 \\ & + q \|H_I(is_I w)K(is_I w) - H_{I_0}(iw)K(iw)\|_{L,w}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.09)$$

où :

$$\|j\|_{L,w}^2 = \int \int_{L,R^r} |j(I, iw)|^2 \frac{1}{|1 + H_{I_0}(iw)K_0(iw)|} d\mathbf{w} dI \quad (4.10)$$

4.3 CONTROLE DIFFUSIF PSEUDO-INVARIANT

4.3.1 Formulation diffusive

La formulation (4.08) montre que le compensateur K est l'un des paramètres inconnus qui permettent d'assurer l'invariance du transfert compensé à une transformation près. La difficulté rencontrée lors de la recherche d'un compensateur optimal est l'existence de plusieurs solutions appartenant à une très large classe de compensateurs.

D'après le paragraphe 4.2.1, nous pouvons constater que les compensateurs solutions de (4.08), sont généralement de types pseudo-différentiels. Soit $K_m(p)$ la réalisation diffusive du compensateur $K(p)$, le problème de minimisation peut être posé sur le groupe de transformations T et sur la représentation diffusive \mathbf{m} [54].

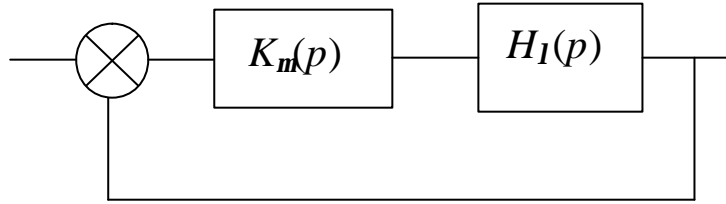


Figure 4.3 : Structure d'un contrôle diffusif pseudo-invariant

Sous formulation diffusive le problème (4.08) s'écrit :

$$\min_{T \in \mathcal{V}} \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{K}} \left\{ (1-q) \|TF(K_m) - F_{I_0}(K_0)\|_{L,w}^2 + q \|TF(K_m) - F_{I_0}(K_m)\|_{L,w}^2 \right\} \quad (4.11)$$

Le compensateur $K_m(p)$ est défini dans le chapitre 1 par :

$$K_m(p) = p \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{m}(p)}{p + \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.12)$$

Cette formulation du contrôle pseudo-invariant présente de nombreux avantages, parmi lesquels :

1. Par construction, K_m est causal ;
2. La solution \mathbf{m}^* conduit à une réalisation du compensateur dynamique directement utilisable (système dynamique linéaire de dimension finie, sous approximation) ;

3. Les facilités d'approximation numérique de la représentation et la réalisation diffusives permettent de construire des problèmes approchés de dimension réduite, numériquement applicables.

La réalisation concrète (approximation numérique) du problème (4.11) repose sur les techniques standard de l'analyse numérique et de l'optimisation Hilbertienne.

4.3.2 Algorithme de résolution [23]

Dans le cadre Hilbertien (monovariante), l'algorithme de résolution présenté ci-après est un algorithme standard pour tout problème monovariante de type poursuite, il suffit de bien choisir le groupe de transformations adapté au problème [21].

On considère le cadre $L^2(\mathbf{L}, H_2)$, le groupe \mathbf{V} étant celui des changements de fréquence définis par les fonctions \mathbf{s}_l continues strictement positives sur \mathbf{L} , telle que $\mathbf{s}_{l_0} = 1$, on note : $C = (\mathbf{L}, \mathfrak{R}^+)$ le groupe isomorphe à \mathbf{V} des σ ainsi défini en notant :

$$T(\mathbf{w}) = \frac{1}{\left|1 + H_{l_0}(i\mathbf{w}).K_0(i\mathbf{w})\right|^2} \quad (4.13)$$

Le problème s'écrit alors sous forme explicite avec $q \in [0,1]$:

$$\min_{\mathbf{s}, m} \left\{ \begin{aligned} & (1-q) \int_L \int_0^{+\infty} T(\mathbf{w}) \left| i\mathbf{s}_l \mathbf{w} H_l(i\mathbf{s}_l \mathbf{w}) \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{i\mathbf{s}_l \mathbf{w} + \mathbf{x}} - H_{l_0}(i\mathbf{w}).K_0(i\mathbf{w}) \right|^2 d\mathbf{w} d\mathbf{l} + \\ & + q \int_L \int_0^{+\infty} T(\mathbf{w}) \left| i\mathbf{s}_l \mathbf{w} H_l(i\mathbf{s}_l \mathbf{w}) \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{i\mathbf{s}_l \mathbf{w} + \mathbf{x}} - i\mathbf{w} H_{l_0}(i\mathbf{w}) \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{i\mathbf{w} + \mathbf{x}} \right|^2 d\mathbf{w} d\mathbf{l} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

La discrétisation de ce système en dimension finie s'écrit sous la forme :

$$\min_{\mathbf{s}, m} \left\{ \begin{aligned} & (1-q) \sum_l \sum_m^Q T(i\mathbf{w}_m) \left| i\mathbf{s}_{l_l} \mathbf{w}_m H_l(i\mathbf{s}_{l_l} \mathbf{w}_m) \sum_j \frac{\mathbf{m}_j D\mathbf{x}_j}{i\mathbf{s}_{l_l} \mathbf{w}_m + \mathbf{x}_j} - H_{l_0}(i\mathbf{w}_m).K_0(i\mathbf{w}_m) \right|^2 D\mathbf{w}_m D\mathbf{l}_l + \\ & + q \sum_l \sum_m^Q T(i\mathbf{w}_m) \left| i\mathbf{s}_{l_l} \mathbf{w}_m H_{m_l}(i\mathbf{s}_{l_l} \mathbf{w}_m) \sum_j \frac{\mathbf{m}_j D\mathbf{x}_j}{i\mathbf{s}_{l_l} \mathbf{w}_m + \mathbf{x}_j} - i\mathbf{w}_m H_{l_0}(i\mathbf{w}_m) \sum_j \frac{\mathbf{m}_j D\mathbf{x}_j}{i\mathbf{w}_m + \mathbf{x}_j} \right|^2 D\mathbf{w}_m D\mathbf{l}_l \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

qui s'exprime sous forme synthétique par :

$$\min_s \min_m \left\{ (1-q) \|A_s \mathbf{m} - b\|_{C^{L \times Q}}^2 + q \|B_s \mathbf{m}\|_{C^{L \times Q}}^2 \right\} \quad (4.16)$$

La résolution sur \mathbf{m} s'explique (techniques euclidiennes standard) par :

$$\mathbf{m}_s^* = \left[\text{Re}((1-q)A_s^*A_s + qB_s^*B_s) \right]^{-1} \text{Re}((1-q)A_s^*b) \quad (4.17)$$

Le problème global est résolu après réduction à une sous variété $C_N \subset C(\mathbf{L}, \mathfrak{R}^{+*})$, de dimension N , ($N \ll L$, les changements de temps optimaux étant des fonctions généralement très régulière). Ils s'expriment par :

$$\min_{\mathbf{s} \in C_N} \left\{ (1-q) \|A_s \mathbf{m}_s^* - b\|_{C^{L \times Q}}^2 + q \|B_s \mathbf{m}_s^*\|_{C^{L \times Q}}^2 \right\} \quad (4.18)$$

Sa résolution conduit à \mathbf{s}^* et $\mathbf{m}^* = \mathbf{m}_{\mathbf{s}^*}^*$, donc finalement à une approximation du compensateur optimal de transfert : $K^*(p) = p \cdot \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{m}_i^* D \mathbf{x}_i}{p + \mathbf{x}_i}$.

4.4 APPLICATION A LA COMMANDE D'UN MOTEUR À C. C.

Dans ce qui suit, nous appliquons le concept de contrôle pseudo-invariant à un moteur à courant continu dont la fonction de transfert est incertaine. L'incertitude est portée sur le moment d'inertie, la charge et la constante de temps de la boucle de courant. Le modèle du moteur à c.c est choisi de tel sort à avoir l'invariance sous changement de fréquence et l'invariance sous groupe de transformation. La comparaison avec la commande classique montre l'efficacité du contrôle pseudo-invariant notamment sa robustesse.

4.4.1 Commande classique d'un moteur à C. C.

Le modèle d'un moteur à courant continu utilisé dans cette étude est celui donné par le diagramme structurel suivant :

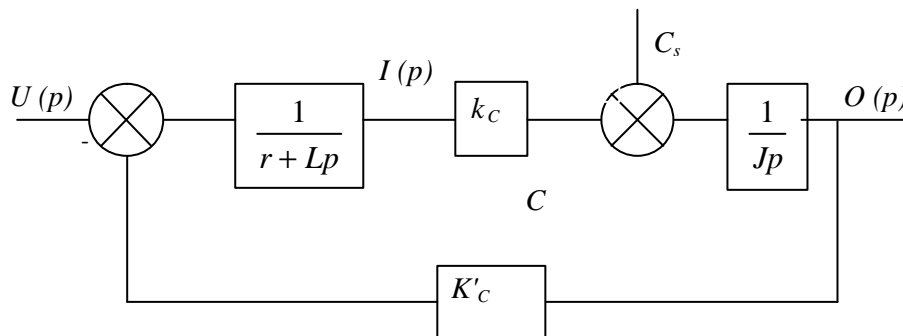


Figure 4.4 : Diagramme structurel d'un moteur à courant

La fonction de transfert du moteur en boucle ouverte est :

$$H(p) = \frac{k_c}{Jp(r + Lp)} \quad (4.19)$$

où J est l'inertie de l'ensemble moteur+charge, r et L sont respectivement la résistance et l'inductance de la bobine du rotor.

La structure des contrôleurs classiques très largement employée est constituée de deux boucles imbriquées

La première est une boucle interne de courant (figure.4.5) qui permet de contrôler le couple et rejeter l'influence de la force électromotrice donc un correcteur de type PI est suffisant. Elle peut être approchée par un système de 1^{er} ordre de constante de temps T_{bc} .

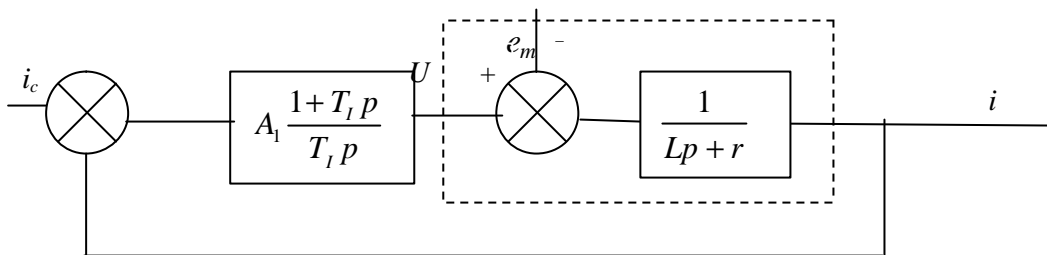


Figure 4.5 : Boucle de courant

La deuxième est la boucle extrême de vitesse, pour laquelle on utilise généralement un correcteur de type PI

$$H_{PI} = A \frac{1 + Tp}{Tp} \quad (4.20)$$

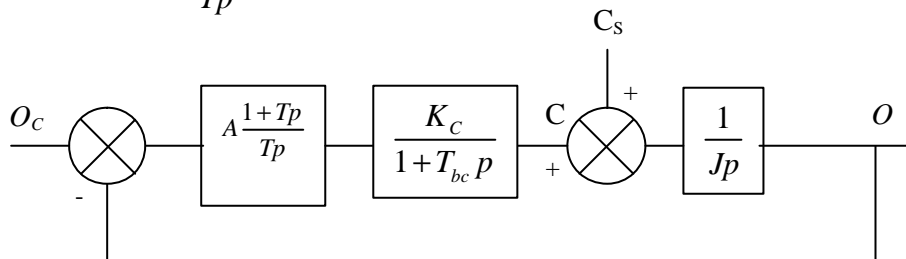


Figure 4.6 : Boucle de vitesse classique

Les paramètres du correcteur PI peuvent être déterminés par une réduction du système à un système de 2^{ième} ordre en négligeant la boucle de courant $i = i_c$.

La fonction de transfert de poursuite s'écrit :

$$H(p) = \frac{W(p)}{W_C(p)} \Big|_{C_s=0} = \frac{1 + Tp}{1 + Tp + \frac{TJ}{Ak_C} p^2} \quad (4.21)$$

La pulsation propre et le coefficient d'amortissement sont respectivement :

$$w_n = \sqrt{\frac{Ak_c}{JT}} \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Ak_c T}{J}}$$

On constate que le coefficient d'amortissement ζ est d'autant plus faible (et la stabilité d'autant plus fragile) que le moment d'inertie est grand.

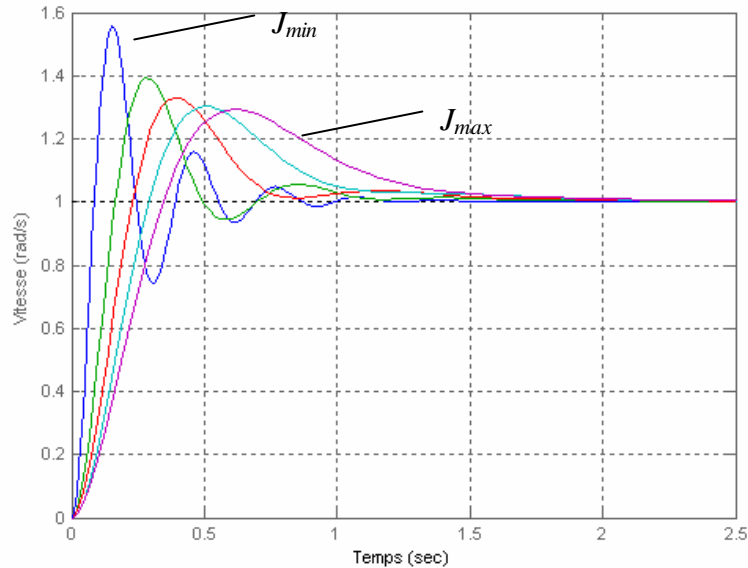


Figure 4.7 : Réponse indicielle en poursuite avec commande classique avec $l=[J, T_{bc}]$, $L=[0.1, 1] \cdot T_{bc}$

La figure 4.7 rassemble les réponses du système en boucle fermée résultantes pour différentes valeurs de J , d'un échelon d'entrée. La réponse est d'autant plus rapide que le moment d'inertie est faible avec augmentation de dépassement. Donc, le modèle où $J=J_{max}$ correspond au pire cas possible au niveau de la stabilité.

4.4.2 Commande pseudo-invariant d'un moteur à C.C

A partir de ce paragraphe, nous allons conserver la boucle de courant, seul le correcteur de la boucle de vitesse est modifié.

La fonction du transfert incertain en boucle ouverte du moteur peut s'écrire :

$$H_1(p) = \frac{1}{Jp(1+T_{bc}p)} \quad (4.22)$$

L'incertitude sur l'expression (4.22) peut se porter sur le moment d'inertie moteur+charge J , la constante de temps de la boucle de courant T_{bc} ou sur les deux en même temps.

Considérons le paramètre nominal I_0 regroupant les valeurs nominales de J et T_{bc} notées respectivement J_0 et T_{bc0} .

Trois cas de paramètres incertains I sont possibles :

- 1- $I_0 = [J]$, le moment d'inertie J est incertain et la constante de temps T_{bc} est fixée où $\Lambda = [J_{min}, J_{max}] \times [T_{bc0}]$.
- 2- $I_0 = [J_0, T_{bc}]$, T_{bc} est incertaine, J est fixé où $\Lambda = [J_0] \times [T_{bcmin}, T_{bcmax}]$.
- 3- $I_0 = [J, T_{bc}]$ J et T_{bc} sont incertains où $\Lambda = [J_{min}, J_{max}] \times [T_{bcmin}, T_{bcmax}]$.

4.4.2.1 Invariance sous changement de fréquence

Considérons le premier cas où seul J est incertain, dans ce cas l'invariance stricte est accessible. Avec un changement de fréquence adéquat, nous obtenons un transfert en boucle fermée du système incertain, compensé par un compensateur pseudo-différentiel, de même comportement que (4.02). En effet :

La solution analytique du problème pseudo-invariant dans ce cas est le compensateur de fonction de transfert :

$$K(p) = A_r \frac{1 + T_r p}{p^a} \quad 0 < a < 1 \quad (4.23)$$

où a est l'ordre d'intégration fractionnaire avec $T_r = T_{bc}$

En absence de la perturbation, la fonction de transfert en boucle ouverte du système s'écrit :

$$H_1(p) = \frac{A_r k_c}{J p^{1+a}} \quad 0 < a < 1 \quad (4.24)$$

Le diagramme fonctionnel du système (moteur et compensateur) en boucle fermée est représenté par la figure.4.8.

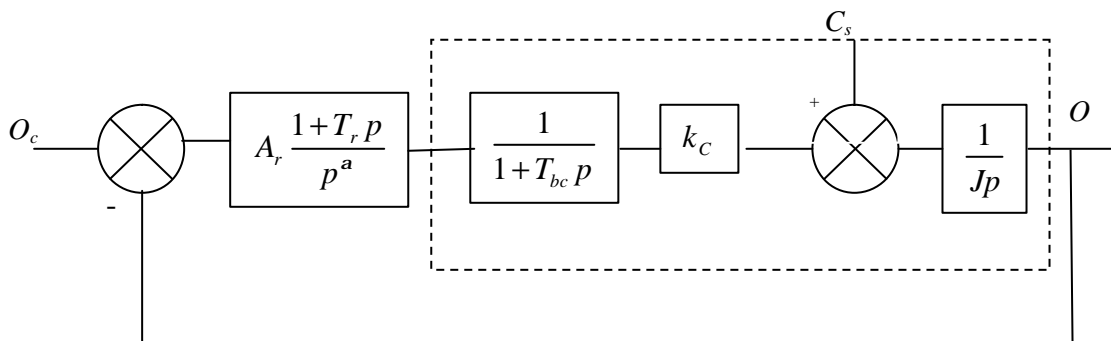


Figure 4.8 : Commande pseudo-invariant de moteur à C. C. (Invariance stricte)

La fonction de transfert en boucle fermée devient :

$$H_1(P) = \frac{1}{\frac{J}{A_r k_c} p^{a+1} + 1} \quad (4.25)$$

Il est clair que le transfert (4.25) est de même forme que celui donné par (4.02). Par conséquent, le compensateur (4.23) confère au système contrôlé en boucle fermée le même comportement que (4.02), ce qui donne des réponses du moteur invariante, indépendantes de toute variation de J , sous changement d'échelle de fréquence (du temps).

Le compensateur est de type pseudo-différentiel et sa réalisation diffusive permet de simplifier l'analyse et la mise en œuvre numérique, il suffit seulement de calculer sa représentation diffusive. En utilisant la théorie de la représentation diffusive mentionnée dans le chapitre 1, nous trouvons :

$$K_m(p) = A_r \frac{1 + T_{bc} p}{p^a} = kp \left(\frac{1}{p^a} + \frac{a}{pp^a} \right) \quad (4.26)$$

$$m(x) = -ka \frac{\sin pa}{p} pf \frac{1}{x^{1+a}} + k \frac{\sin pa}{p} \frac{1}{x} \quad (4.27)$$

D'où la fonction de transfert donnée par (4.12).

L'ajustement des paramètres du correcteur fractionnaire (l'ordre d'intégration et la valeur du gain A_r) est effectué de tel sorte que la réponse indicielle en poursuite est très proche de celle avec correcteur classique du système nominal (réponse de référence), figure (4.9), où la fonction de transfert nominale du système est celle obtenue pour $J=J_{max}$.

La figure (4.9) présente une comparaison entre la réponse en échelon avec la commande classique et celle avec la commande pseudo-invariante sous changement de fréquence pour $J=J_{max}$. Les deux réponses sont très proches pour $a=1/2$. Elle met en évidence la coïncidence de la réponse du système nominal compensé par un correcteur classique défini par J_0 avec celle du système incertain compensé par un correcteur fractionnaire d'ordre d'intégration égal à $1/2$ et $A_r=9$. D'où la fonction de transfert :

$$K_m(p) = 9 \frac{1 + T_{bc} p}{p^{1/2}} \quad (4.28)$$

D'après les résultats précédents, en considérant le transfert nominal du système en boucle fermée pour $J=J_{max}$, les réponses du système pour $J \in (J_{max}, J_{min})$, seront les plus proches possible à celle du système nominal et dans ce cas, nous garantirons des mêmes performances au système malgré les variations du J .

La figure (4.10) présente le diagramme de Bode du correcteur fractionnaire $K_m(p)$ réalisé par le modèle diffusif.

La figure (4.11) rassemble des résultats de simulation pour différentes valeurs de J , les conditions de fonctionnement ont été choisies pour demeurer dans un cadre quasi-linéaire (pas de saturation de l'alimentation ni de limitation en courant).

On remarque que la réponse est d'autant plus rapide que le moment d'inertie est faible.

On remarque aussi que la réponse en poursuite conserve, à un changement d'échelle de temps, la même forme quelque soit le moment d'inertie.

La figure (4.12) présente l'amplitude et la phase du système dans le plan de Bode, il est clair que le système est stable pour ($J=J_{max}$) et par analogie il reste stable pour les différentes valeurs de J .

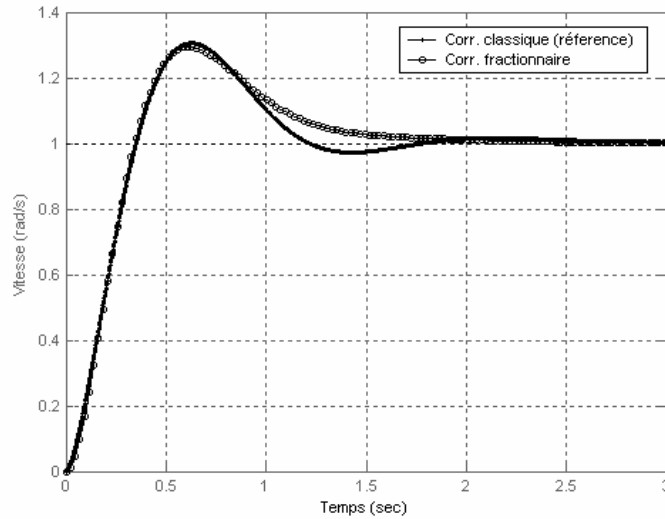


Figure 4.9 : Réponse indicielle du moteur avec un correcteur classique et un correcteur fractionnaire pour $J=J_{max}$

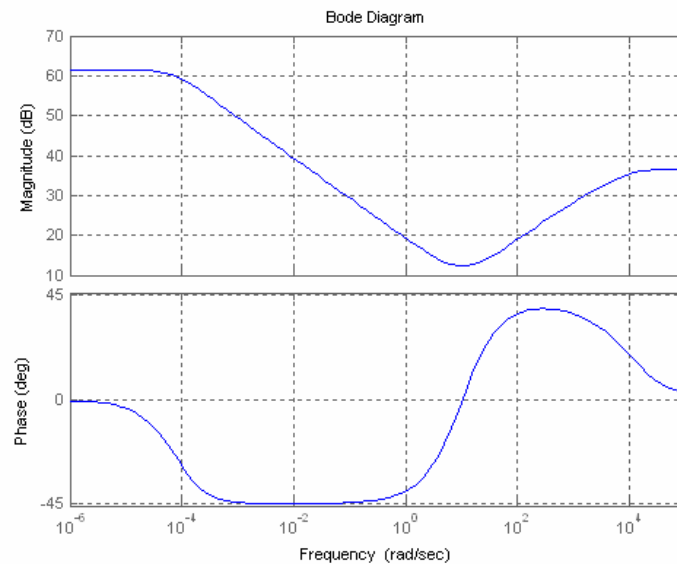


Figure 4.10 : Approximation numérique du compensateur $K_m(p)$

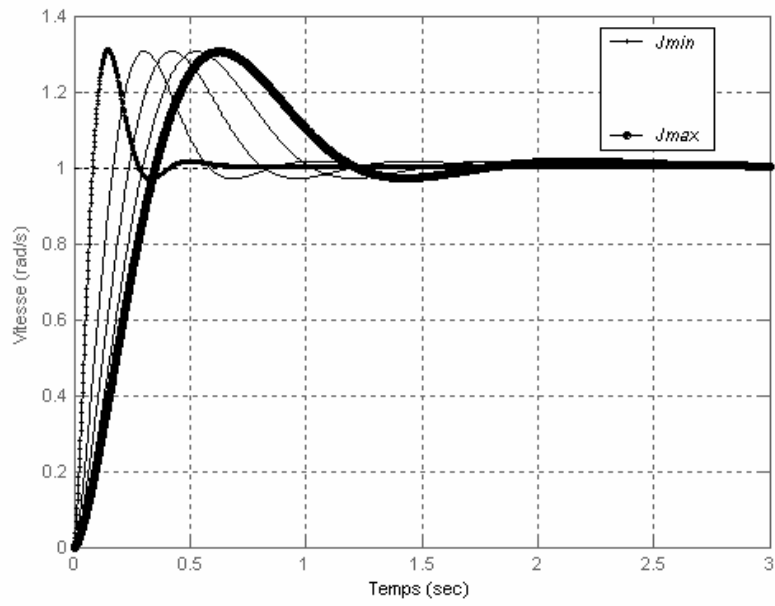


Figure 4.11 : Réponse indicielle du système avec le compensateur $K_m(p)$ avec $l=[J, T_{bc}]$ et $L=[0.1, 1] T_{bc}$

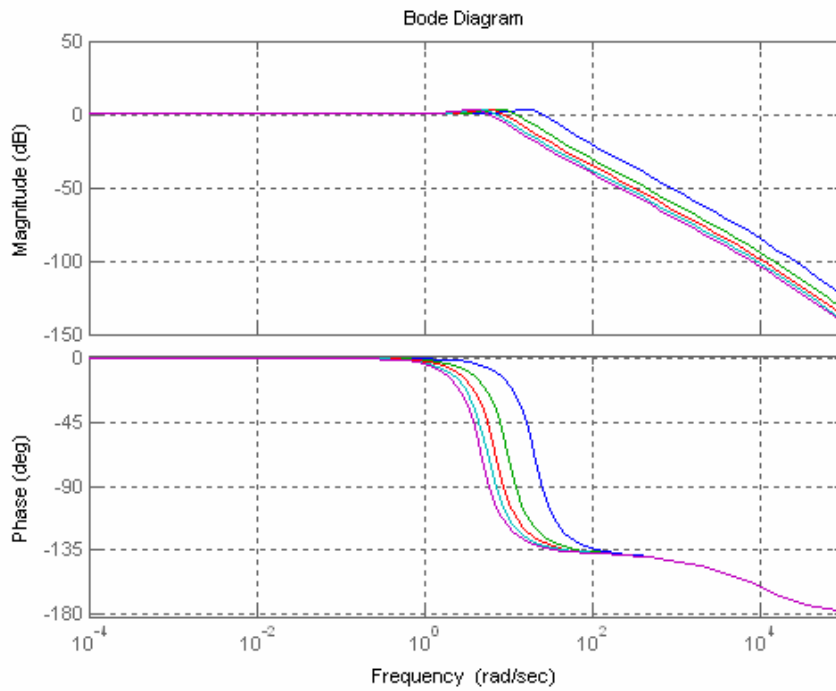


Figure 4.12 : Diagramme de Bode du système avec le correcteur fractionnaire

4.4.2.2 Invariance sous changement de groupe

Nous considérons maintenant que le moment d'inertie, la charge et la constante du temps de la boucle du courant sont tous à la fois incertains.

Dans ce cas, il est impossible de trouver un compensateur qui confère au système incertain un transfert sous la forme (4.02). Donc, selon le paragraphe (4.2.3), il faut choisir un groupe de transformations bien adapté à l'application choisie ce qui permet d'avoir des réponses invariantes.

Pour cette application, nous choisissons comme groupe de transformations :

$$\mathbf{s}_I = \left(\frac{J}{J_0} \right)^t + \mathbf{u}(T_{bc} - T_{bc0}) \quad (4.29)$$

Le problème de minimisation porte alors sur \mathbf{t} , \mathbf{u} et \mathbf{m}

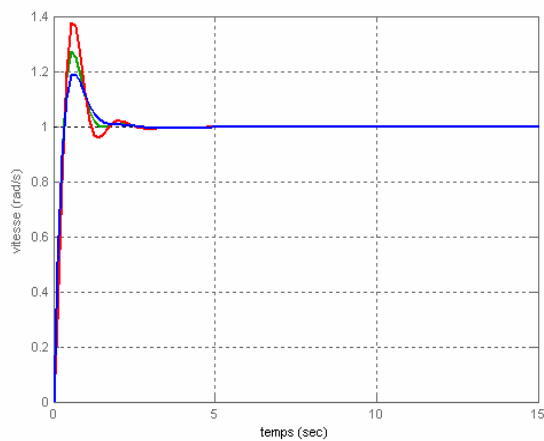
D'autres groupes de transformations peuvent être utilisés [28], nous citons par exemple :

$$\mathbf{s}_I = 1 + \mathbf{I}_1(T_{bc} - T_{bc0}) + \mathbf{I}_2(T_{bc} - T_{bc0})^2 \quad (4.30)$$

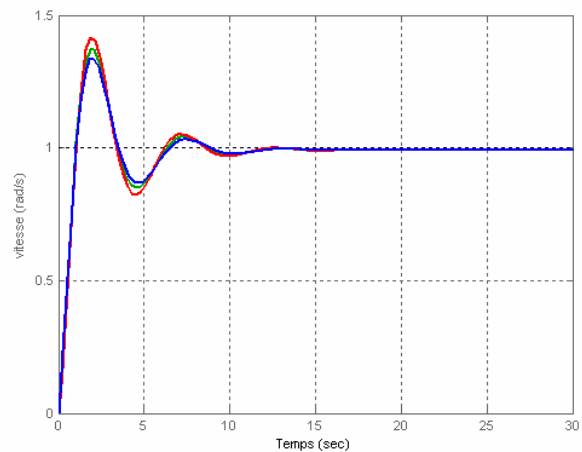
Le choix du groupe de transformations est une étape très importante qui dépend de l'application du contrôle diffusif pseudo-invariant.

D'après les figures (4.13.a, b et c), nous constatons que la forme de la réponse reste globalement conservée aux changements de fréquence prés. On note que l'algorithme de résolution influe sur la qualité du contrôle diffusif pseudo-invariant.

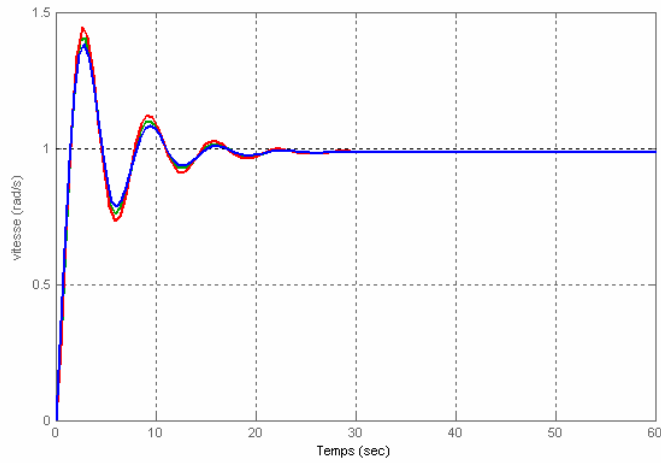
La figure (4.14) présente la réponse fréquentielle dans le plan de Bode du compensateur pseudo-invariant dont la représentation diffusive \mathbf{m}^* est solution du problème de minimisation (Eq.4.17) et celle du compensateur obtenu analytiquement.



(a)



(b)



(c)

Figure 4.13 : Réponse indicielle du système avec le compensateur $K_m(p)$ avec $l=[J, T_{bc}]$ et $L=[0.1, 1]'$ $[0.01, 0.1]$

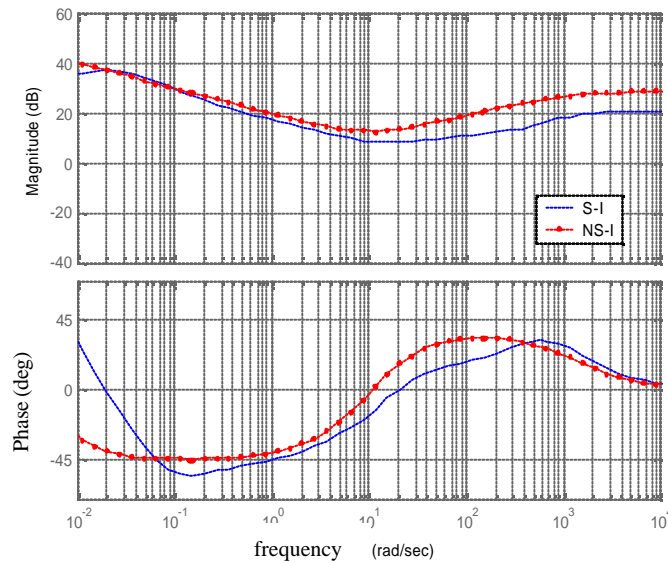


Figure 4.14 : Réponse fréquentielle du compensateur $K_m(p)$ dans le cas d'invariance stricte (S-I) et l'invariance non stricte (NS-I)

4.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau concept du contrôle robuste dit pseudo-invariant basé sur la représentation diffuse. La propriété fondamentale de ce contrôle est d'avoir, dans le domaine d'incertitude des paramètres incertains, des réponses indicielles (fréquentielles) invariantes sous changement d'échelle de temps (fréquence) ou sous changement de groupe de transformations.

Nous avons appliqué ce contrôle à la commande d'un moteur à C.C. dont l'incertitude est portée sur le moment d'inertie, la charge et la constante de temps de la boucle de courant. Le bon choix du groupe de transformations, permet d'augmenter le degré d'invariance de la réponse.

La comparaison avec la commande classique a montré l'efficacité du contrôle diffusif pseudo-invariant.

Conclusion Générale

Le but de cette étude est d'appliquer la représentation diffusive en contrôle.

La première application concerne le contrôle d'un bras flexible articulé (avec ou sans translation verticale) au niveau d'une de ses extrémités et libre au niveau de l'autre. Le principe du contrôle utilisé consiste à supprimer le comportement vibratoire du bras en absorbant les ondes réfléchissantes au niveau des frontières par une impédance convenable. Ce contrôle fait apparaître des opérateurs pseudo-différentiels ; en l'occurrence des intégrateurs et dérivateurs fractionnaires. La représentation diffusive permet de réaliser ces opérateurs de façon non héréditaire et permet d'obtenir un système augmenté sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = \Lambda X$ où Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe. Ainsi le retour fractionnaire effectué permet de réaliser les conditions absorbantes considérées, sans avoir recours à aucune expression convolutive dans l'équation d'état globale.

La fonctionnelle d'énergie globale est non croissante dans le temps. Elle présente une fonction de Lyapunov ce qui a mis en évidence la stabilité du système global. La nature globale passive du système bouclé confère aussi au contrôle une nature robuste inconditionnelle.

L'approximation numérique du système considéré a été basée sur l'approche modale qui est la plus convenable à la modélisation dynamique des structures vibrantes. Les résultats obtenus montrent que la stabilisation du bras dans les deux cas est atteinte malgré la présence des petites oscillations de basses fréquences.

La deuxième application a été consacrée au contrôle des systèmes incertains par le contrôle diffusif pseudo-invariant et son application au contrôle du moteur à courant continu. La propriété fondamentale de ce contrôle est de conserver autant que possible et sur tout le domaine d'incertitude, les caractéristiques dynamiques imposées par le contrôle du système nominal par les approches classiques, ceci à un changement de temps (ou de fréquence) près. La stabilité du système est garantie par analogie de forme avec le système nominal.

La formulation du contrôle pseudo-invariant par la représentation diffusive a permis d'avoir des transferts en boucle fermée invariants sous changement de fréquence utilisant des compensateurs pseudo-différentiels. Le problème de contrôle diffusif pseudo-invariant est alors traduit par la minimisation d'une fonctionnelle imposée à la représentation diffusive du compensateur.

La simplicité du modèle du moteur à courant continu a permis d'avoir l'invariance sous changement de fréquence dans le cas où le moment d'inertie du moteur et la charge sont incertains. Dans le cas où la constante de temps et la boucle de courant sont aussi incertaines, l'invariance est obtenue sous groupe de transformations.

La comparaison avec les résultats du contrôle par des compensateurs classiques a montré clairement l'efficacité de cette approche.

Références

- [1] P. Abry, P. Gonçalves, J. Lévy-Véhel, *Fractals et Lois d'Echelle, Volume du Traité : Information - Commande - Communication*, Hermès, 2002.
- [2] H. Aubert, D.L. Jaggard, "Continuous Wavelet Transform Analysis of Fractal Superlattices," in *Fractals: Theory and Applications in Engineering*, M. Dekking, J. Lévy Véhel, E. Lutton and C. Tricot, Editors, Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [3] J. Audounet, F.A. Devy-Vareta, G. Montseny, "Pseudo-invariant diffusive control", 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2000), Perpignan (France), 19-23 Juin 2000. Invited session Pseudo-differential operators and diffusive representations in modelling, control and signal.
- [4] J. Audounet, D. Matignon, G. Montseny, "Semi-linear diffusive representation for non-linear fractional differential systems", Nonlinear Control Network (NCN) Workshop, June 5 - 9, Paris, France, 2000.
- [5] J. Audounet, J.M. Roquejoffre, "An asymptotic fractional differential model of spherical flame", *ESAIM: Proc. Vol 5*, pp 15-27, Dec. 1998.
- [6] P. Bidan, "Commande diffusive d'une machine électrique: une introduction", *ESAIM: Proc. Vol 5*, pp 55-68, Dec. 1998.
- [7] P. Bidan, T. Lebey, "Pseudo-differential models for propagation and dissipation phenomena in electrical engines", MTNS 2000, Perpignan, 2000.
- [8] P. Bidan, T. Lebey, G. Montseny, C. Neacsu, "Modèle pseudo-différentiel d'une bobine à noyau de fer et simulation par réalisation diffusive - Application aux bobinages d'une machine tournante", *Revue Internationale de Génie Electrique*, Vol. 5 - n° 3-4, 2002.
- [9] C. Bonnet, "Approximation of infinite dimensional discrete time linear systems via balanced realizations and an application to fractional filters", *Lectures Notes in Control and Information Sciences* 185, 10th International Conference on Analysis and Optimization of Systems, p 574-584, 1993.
- [10] C. Bonnet, "Réduction de systèmes linéaires discrets de dimension infinie : étude de filtres fractionnaires", *RAIRO Auto. Prod. Inform. Ind. (Théorie des systèmes et théorie de la commande)*, Vol 26, n. 5-6, p 399-422, 1992.
- [11] B. Boudjehem, H. Tebbikh, G. Montseny, "Stabilisation d'une poutre vibrantes par approche diffusive", *Conférence Maghrébine en Génie Electrique*, 5-6 Nov. 2001, Constantine, Algérie.

- [12] B. Boudjehem, H. Tebbikh, "Commande diffusive robuste d'un moteur à courant continue", Conférence sur Génie Electrique, 25-26 Dec.2001, Ecole Militaire polytechnique, Alger, Algérie.
- [13] B. Boudjehem, G. Montseny, H. Tebbikh, "Robust wave-absorbing control of an articulated flexible arm", 4th Jordanian International Electrical and Electronics Engineering Conference sous parrainage IEEE, 16-18 April 2001, Amman, Jordan.
- [14] B. Boudjehem, G. Montseny, H. Tebbikh, "Contrôle diffusif d'un bras flexible", First International Conference on Electrical Engineering, 4-6 Nov. 2000, Boumerdes, Algeria.
- [15] N. Engheta, "Electrostatic fractional image methods for perfectly conducting wedges and cones", IEEE Trans. on Antennas and Propagation. Vol.44, no.12, p.1565-74, Dec. 1996.
- [16] G. Dauphin, D. Heleschewitz and D. Matignon. "Extended diffusive representations and application to non-standard oscillators", in Mathematical Theory of Networks and Systems symposium, June 2000, Perpignan, France,.
- [17] G. Dauphin, D. Matignon, "Premiers résultats sur les représentations diffusives à temps discret et application aux filtres ARFIMA", pages 45-48. Journées Doctorales d'Automatique, sept. 1999, GdR Automatique, Nancy, France.
- [18] L. Decreusefond and A.S. Ustunel, "Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion", Potential Analysis, 1999.
- [19] S. Duhem, "Intégration fractionnaire non héréditaire- Application aux systèmes viscoélastiques", Mémoire DESS, 1994, U. Paul Sabatier de Toulouse, France.
- [20] B. Engquist and A. Majda, "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves", Math. of Comp., pp 629-651, Vol 31, 1977.
- [21] F.A. Devy-Vareta and G. Montseny, "Pseudo-Invariant H_2 Multivariable robust control of flexible beam", European control conference, 4-7, Sept. 2001, Porto, Portugal.
- [22] F.A. Devy Vareta, D. Matignon, G. Montseny, "Pseudo-invariance by matched scaling: application to robust control of a flexible beam", Second European Conference on Structural Control, July 2000, Marne-la-Vallée, France.
- [23] F.A. Devy Vareta, P. Bidan, G. Montseny, "Pseudo-invariance by matched scaling: a new concept for multivariable robust control", Rapport LAAS.
- [24] F.A. Devy-Vareta, "Pseudo-invariant robust control", CONTROLO 2002, 5th Portuguese Conference on Automatic Control, University of Aveiro, Sept. 5-7, 2002, Portugal.
- [25] M. Fliess and R. Hotzel, "Sur les systèmes linéaires à dérivation non entière", C.R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série II b, p. 99-105, 1997.
- [26] C. Francis, O. Morgul, "On the stabilization of a flexible beam with tip mass", SIAM J.Control and optimization, Vol. 36, No.6, pp. 1962-1986, Nov. 1998.

- [27] Francis S. Tse, Ivan E. Morse Rolland T. Hinkle, Mechanical vibration, Theory and application, 2nd Ed. Allyn and Bacon, Inc
- [28] G. Garcia, J. Bernussou, "Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model", ESAIM: Proc. Vol 5, pp 87-98, Dec. 1998.
- [29] M. Géradin, D. Rixen, Théorie des vibrations- application à la dynamique des structures, Masson, 1993.
- [30] P. Gonçalves, R. Riedi. "Wavelet Analysis of Fractional Brownian Motion in Multifractal Time". Proceedings of the 17th Colloquium GRETSI, Sept. 1999, Vannes, France.
- [31] T. C. Haba, M. Martos, G. Ablart, P. Bidan, "Composants électroniques à impédance fractionnaire", ESAIM: Proc. Vol 5, pp 99-109, Dec. 1998.
- [32] D. Heleschewitz and D. Matignon, "Diffusive realisations of fractional integrodifferential operators: structural analysis under approximation", In Conference IFAC System, Structure and Control, Vol. 2, pp 243-248, July 1998, Nantes, France.
- [33] D. W. T. van Horssen, "On the weakly damped vibrations of string attached to a spring mass dashpot system", Journal of vibration and control, Vol. 9, pp. 1231-1248, 2003.
- [34] L. Laudebat, P. Bidan, G. Montseny, "Modeling and Optimal Identification of Pseudodifferential Electrical Dynamics by Means of Diffusive Representation", IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Vol.51, N°9, pp.1801-1813, Sept. 2004.
- [35] L. Laudeat, P. Bidan, G. Montseny, "Modélisation des phénomènes de relaxation par Réalisation Diffusive", Conférence Matériaux pour le Génie Electrique (MGE 2003), Grenoble, 2-3 avril 2003.
- [36] L. Laudebat, "Modélisation et identification sous représentation diffusive de comportements dynamiques non rationnels en génie électrique", Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, Déc. 2003.
- [37] F. Lavernhe, J. Solhusvik, "Fractional noises : diffusive model for CCD imager band-pass acquisition chain", ESAIM : Proc. Vol 5, pp 119-130, Dec. 1998.
- [38] F. Lavernhe, G. Monseny, J. Audounet, "Markovian diffusive représentation of 1/f-noises and application to fractional stochastic differential models", IEEE Trans. on Signal Processing. Vol.42, N°2, Feb 2001.
- [39] J.-J. Loiseau, H. Mounier, "Stabilisation de l'équation de la chaleur commandée en flux", ESAIM: Proc. Vol 5, pp 131-144, Déc. 1998.
- [40] S. Manabe, "The Non-integer integral and its applicaion to control systems ", ETJ of japan, Vol. 6, No. 3/4, pp. 83-87, 1961.
- [41] D. Matignon, "Stability properties for generalized fractional differential systems", ESAIM: Proc. 5: pp.145-158, Dec. 1998.

- [42] D. Matignon, "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing", In Computational Engineering in Systems Applications, Vol. 2, pp 963-968, July 1996. IMACS, IEEE-SMC, Lille, France.
- [43] D. Matignon, B. d'Andréa-Novel, "Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE", in Third international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena, pp 769-771. INRIA-SIAM, April 1995, Mandelieu, France.
- [44] D. Matignon, G. Montseny, Systèmes différentiels fractionnaires: modèles, méthodes et applications, Actes de Journées Thématiques ENST-LAAS, parrainées par les GdR/CNRS "automatique" et "ISIS", ESAIM: Proc. (SMAI), Vol 5, Dec. 1998, URL: <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/index.htm>.
- [45] D. Matignon, G. Montseny, "Diffusive representations for pseudo-differentially dissipative non-linear systems", to appear in Second Nonlinear Control Network (NCN) Workshop, June 5 – 9 2000, Paris, France.
- [46] K. Matsuda, H. Fujii, " H_∞ optimized wave- absorbing control : analytical and experimental results", J. of Guidance, Control and Dynamics, Vol 16, pp1146 – 1153, Nov – Déc. 1993.
- [47] K. Matsuda, Y. Kanemitsu, S. Kijimoto, "A wave-based controller design for general flexible structures", journal of sound and vibration, Vol 216 n2 pp. 269-279, 1998.
- [48] B. Mbodje, "Analyse et contrôle de certains modèles viscoélastiques via une réalisation héréditaire des opérateurs intégro-différentiels", Thèse de l'U. Paul Sabatier, 1995.
- [49] B. Mbodje, G. Montseny, "Boundary fractional derivative control of the wave equation", IEEE Trans. Aut. Cont., Vol 40, no 2, pp 378-382, Feb. 1995.
- [50] B. Mbodje, G. Montseny, J. Audounet, " Analysis of fractionnally damped flexible systems via a diffusion equation "Int. J. Syst. Sc., Vol 25, n°11, pp1775-1791, 1994.
- [51] B. Mbodje, G. Montseny, J. Audounet, and P. Benchimol, "Optimal control fractionally damped flexible systems", TE, IEEE conference, 1994.
- [52] K.S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley & Sons, 1993.
- [53] G. Montseny, "Simple approach to approximation and dynamical realization of pseudodifferential time operators such as fractional ones", IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Issue 11, Vol.51, pp.613-618, Nov. 2004.
- [54] G. Montseny, "Représentation diffusive", Mémoire d'Habilitation des recherches HDR, Mars 2004, U. Paul Sabatier, Toulouse III, France.
- [55] G. Montseny, "Diffusive representation: a new concept for complex dynamic problems involving pseudodifferential operators - First part: an introduction to general theory",

Lecture notes of the Summer School "On the links between nonlinear physics and information sciences", Les Houches Center of Physics, Sept. 8-13, 2002.

- [56] G. Montseny, "Diffusive representation: a new concept for complex dynamic problems involving pseudodifferential operators - Second part: examples of applications", Lecture notes of the Summer School "On the links between nonlinear physics and information sciences", Les Houches Center of Physics, Sept 8-13, 2002.
- [57] G. Montseny, "Diffusive representation of pseudo-differential time-operators, ESAIM: Proc. Vol 5, pp 159-175, Dec. 1998.
- [58] G. Montseny, "Contrôle diffusif pseudo-invariant : principes et exemples", Avancées récentes en commande robuste - Applications à la mécanique des structures, Ecoles CEA-EDF-INRIA "Problèmes Non Linéaires Appliqués", 18 - 22 Nov. 2002, INRIA - Rocquencourt, France.
- [59] G. Montseny, "Pseudo-invariance sous groupe de transformation : principe et application à la robustesse en automatique", Note interne.
- [60] G. Montseny, G. Salut, "A propos de la suspension CRONE", Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA02), pp 361-381, 8-10 Juillet 2002, Nantes, France.
- [61] G. Montseny, G. Salut, "A propos de la note de l'équipe l'équipe Crone : sur les nouvelles remarques formulées sur la suspension Crone", Rapport interne.
- [62] G. Montseny, J. Audounet, D. Matignon, "Fractional integrodifferential boundary control of the Euler-Bernoulli beam", 36th IEEE CDC Conference, 1997, pp 4973-4978, San Diego, USA.
- [63] G. Montseny, J. Audounet, "Modèles non héréditaire pour l'analyse et le contrôle de systèmes à mémoire longue de type fractionnaire", Journées d'étude : Les systèmes d'ordre non entier en automatique, 1995, Bordeaux, France.
- [64] G. Montseny, J. Audounet, D. Matignon, "Perfectly absorbing boundary feedback control for wave equations: a diffusive formulation", 5th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves Propagation Phenomena, July 2000 INRIA-SIAM, Santiago de Compostela, Spain.
- [65] G. Montseny, J. Audounet, B. Mbodje, "Optimal models of fractional integrators and application to systems with fading memory", IEEE SMC Conf., pp 65-70, Oct. 1993, Le Touquet, France,.
- [66] A. Oustaloup, La commande CRONE, Hermès, Paris, 1991.
- [67] A. Oustaloup, Système asservis linéaires d'ordre fractionnaire, Masson, 1983.
- [68] I. Podlubny, "Fractional-Order Systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers", IEEE Trans. on Automatic Control. Vol 44, No1, pp. 208-214, January 1999

- [69] G. Shin, "Modal analysis of beam vibration", AA Lab. Technical note no1, Jan. 2003.
- [70] J. Solhusvik, F. Lavernhe, G. Montseny, J. Farré, "A new low-noise signal acquisition method based on a commutable band-pass filter", IEEE Trans. Circ. and Syst. (II), Vol 44, no 3, pp 164-176, March 1997.
- [71] M. Sorine, D. Matignon, G. Montseny, "On a class of pseudo-differential hysteresis operators", 39th IEEE CDC, Dec. 12-15 2000, Sydney, Australia.
- [72] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, "Etude dynamique des polymères et élastomères par les dérivées fractionnaires", Mécanique industrielle et matériaux, Vol 49, no 2, pp101-103, 1996.
- [73] H. Tebbikh, G. Montseny "Stabilisation et contrôle optimal pseudo-différentiel d'un bras souple : étude préliminaire", Rapport LAAS, janvier 1999.
- [74] H. Tebbikh, G. Montseny, B. Boudjehem "Opérateurs pseudo-différentiels et stabilisation des structures vibrantes ", 2^{ième} Col.Nat.de de Mathématique 7-8-9 Mai 2000, Tebessa, Algérie.
- [75] S. Temoshenko, D. H. Young, and W. Weaver, Vibration Problems in Engineering, 4th Ed. John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [76] V. Teulière, "Réalisation diffusived'opérateurs héréditaires de type pseudo-différentiel-application à l'absorption d'ondes bidimensionnelles", DEA Automatique informatique industrielle, LAAS, France.
- [77] E. Troncet, G. Ablart and L. Allam, "Microwave Characterization and Modeling of the surface Impedance of Fractal Surface Copper", IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol 46, 434, 1998.
- [78] D.R. Vaughan, " Application of Distributed Parameter concepts to Dynamic Analysis and Control of Bending Vibration", Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, Vol.91 June 1968, pp.157-166.
- [79] A.H. von Flotow, B. Schäfer, "Wave-absorbing controllers for a flexible beam", J. of Guidance, Control and Dynamics, Vol 9, No 6, 1986.
- [80] G. Zhu, S. S. Ge, T. H. Lee, "Variable structure regulation of a flexible arm with translation base", IEEE Proc. 36th Conference on decision and control, Dec. 1997, San Diego, California USA.