The University of New South Wales

School of Electrical Engineering and Computer Science and Engineering

existence et unicité de solution d'un équation différentielle fractionnaire du type voltérra avec retard

Lalmi Abdellatif

2010

Supervisor: Dr. Laskri Yamina
Assessor: Maitre de Conférences classe-A- à l'Université de Annaba

Table des matières

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu ***Allah*** *qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

Je tiens à présenter toute ma gratitude et mes remerciements à madame ***Yamina Laskri*** *maitre de conférences à l'Université de Annaba et à monsieur* ***Nasser Eddine Tatar*** professeur à l'Université King Fahd de Dahran en Arabie Saoudite *de m'avoir proposé ce sujet de recherche et de m'avoir guidé. Leurs critiques et Leurs conseils m'ont été trés précieux.*

J'adresse aussi des remerciements spéciaux à *monsieur* ***Lamine Nisse*** *maître de conférences à l'Université de Annaba, madame* ***Rachida Amiar*** *maître de conférences à l'Université de Annaba et madame* ***Marie. Claude Néel*** *professeur à l'université d'Avignon pour la formation qu'ils m'ont donné lors de ma première année théorique de magister .*

Je remercier également madame ***Rebbani Faouzia*** *Professeur à l'Université de Annaba de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.*

De même je remercier monsieur ***Ghanem Radouène*** *maître de conférences à l'Université de Annaba et madame,* ***Diaba Ftaima*** *maître de conférences à l'Université de Annaba d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Qu'ils trouvent tous ici mon profond respect.*

Enfin j'adresse mes sincères remerciements à mes parents, mes frères, mon épouse, mes amis et à toute la famille.

Résumé

Dans ce travail nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'un problème différentiel fractionnaire non linéaire du type voltérra avec retard dans un intervalle fini $[0, \tau]$ de la forme

$$\begin{cases} \left(D_{0^+}^{\alpha} y\right)(t) = f \left[t, y_t, \int_0^t K(t, s, y_s)\, ds\right], \quad t > 0,\ 0 < \alpha < 1 \\ I_{0^+}^{1-\alpha} y\left(0^+\right) = \tau,\ \tau \in \mathbb{R} \\ y(t) = \varphi(t), \qquad t \in [-\tau, 0] \\ y_t(\theta) = y(t + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{I}$$

où f et K sont des fonctions non linéaires et $y_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ sont des fonctions définies par $y_t(\theta) = y(t + \theta)$. Ici $\theta \in [-\tau, 0]$ est la partie historique de l'état qui indique le retard du temps $-\tau$ au temps présent t. Les résultats d'existence et d'unicité sont prouvés en utilisant le théorème du point fixe de Banach. On traitera le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville et le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Mots clés : Dérivées fractionnaires ; Théorème du point fixe de Banach ; Intervalle fini.

Abstract

this work is concerned with the existence and uniqueness of solution for nonlinear fractional differential of volterra type problem on a finite interval $[0,\tau]$ of the real line $\mathbb{R}$ wich has the forme

$$\begin{cases} \left(D_{0^+}^{\alpha}y\right)(t) = f\ \left[t, y_t, \int_0^t K(t,s,y_s)\,ds\right], & t>0,\ 0<\alpha<1 \\ I_{0^+}^{1-\alpha}y\left(0^+\right) = \tau,\ \tau\in\mathbb{R} \\ y(t) = \varphi(t), & t\in[-\tau,0] \\ y_t(\theta) = y(t+\theta), & \theta\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{I}$$

where f and K are nonlinears fonctions and $y_t \in C([-\tau,0],\mathbb{R})$ are defined by $y_t(\theta) = y(t+\theta)$. here $y_t(.)$ represents the history of the state from time $-\infty$ up to the present time t. The results of existence and uniqueness are proved by using a Banach fixed point theorem. We interest in the case of Riemann-Liouville derivative and Caputo derivative.

Key words : Fractionnal derivatives ; Banach fixed point theorem ; finit Interval.

Résumé(Arabe)

Introduction

Le calcul fractionnaire : (calcul d'intégrales et dérivation de tout ordre arbitraire réel ou complexe) a vu une gande expension durant les trois dernières décennies. Du fait qu'il a plusieurs applications dans baucoup de domaines aussi bien des mathématiques, de la physique, que des sciences et de la technologie.

Baucoup de travaux dans ce domaine rentrent dans le cadre de l'existence et de l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire avec la dérivée fractionnaire au sens de Reimann-liouville. Le modèle d'une équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire α $(0 < \alpha < 1)$ dans un intervalle fini $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ se présente sous la forme suivante :

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(t) = f\ [t, y(t)], \quad t > 0, \ \ (0 < \alpha < 1) \tag{i}$$

avec la condition initiale

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)\left(a^+\right) = I_{a^+}^{1-\alpha} y\left(a^+\right) = b_1, \quad b_1 \in \mathbb{R} \tag{ii}$$

où $I_{a^+}^{\alpha}$ et $D_{a^+}^{\alpha}$ sont respectivement l'intégrale fractionnaire (à droite) et la dérivée fractionnaire (à droite) au sens de Riemann-Liouville.

La méthode utilisée pour résoudre ce type de problème consiste à reduire ce problème à une équation intégrale non linéaire de Voltérra qui s'écrit sous la forme suivante :

$$y(t) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\ [s, y(s)]\, ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \ \ (t > 0) \tag{iii}$$

Pitcher and Sewell [21] en 1938 ont considéré l'équation différentielle fractionnaire non linéaire (i) et ont montré l'équivalence de cette dèrnière avec (iii) à condition que la fonction f soit bornée dans une région $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et lipschitzienne en y (i.e) pour tout $y_1, y_2 \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, elle vérifie

$$|f\ (x, y_1) - f\ (x, y_2)| \leq A\,|y_1 - y_2| \tag{iv}$$

où A est une constante positive $A > 0$ indépendante de t.

Le même problème (i)-(ii) a été concidéré par Al-Bassam [32] mais pour un réel $0 < \alpha \leq 1$ dans l'espace des fonctions continues $C[a,b]$ sous la condition que f soit une fonction à valeurs réelles dans un domaine $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que

$$\sup_{(x,y)\in G} |f\ (x,y)| < +\infty \tag{v}$$

et que f remplit la condition de Lipschitz (iv) en y. Il a réduit le problème (i)-(ii) à l'équation intégrale (iii) et utulisera la méthode des approximations seccessives pour prouver l'existence de la solution $y(t)$ pour l'équation intégrale (iii).

Dans [4] A. Belarbi, M. Benchohra and A. Ouahab : Montrent l'existence et l'unicité de la solution d'un problème différentiel fractionnaire au limite dans un intervalle infini $[0,+\infty)$, de la forme

$$D^{\alpha}y(t) = f\ (t, y_t)\,, \quad t \in J = [0,+\infty),\ 0 < \alpha < 1 \tag{vi}$$

$$y(t) = \varphi(t)\,, \qquad t \in (-\infty, 0] \tag{vii}$$

où $f : J \times B \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donné, $\varphi \in B$ et B est un espace de Fréchet.

Dans ce travail nous etudions l'existence et l'unicité de la solution du problème différentiel fractionnaire non linéaire du type voltérra avec retard suivant

$$\left(D_{0^+}^{\alpha}y\right)(t) = f\left[t, y_t, \int_0^t K(t,s,y_s)\,ds\right],\ t > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

$$I_{0^+}^{1-\alpha}y\left(0^+\right) = \tau,\ \tau \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$y(t) = \varphi(t)\,, \qquad t \in [-\tau, 0] \tag{3}$$

$$y_t(\theta) = y(t+\theta)\,, \quad \theta \in [-\tau, 0] \tag{4}$$

avec des conditions sur f et K que l'on précisera plus tard.

La méthode consiste à montrer l'équvalence de ce problème avec une équation intégrale que l'on déterminera dans un espace que l'on définira puis on utilise le théorème du point fixe de Banach pour prouver l'existence et l'unicité de la solution.

Ce mémoire se compose d'une introduction, de trois chapitres et d'une conclusion avec quelques perspectives.

Le premier chapitre comporte quelques notions de bases ainsi que toutes les notations et définitions qui nous serons utiles. Nous introduirons le calcul fractionnaires et nous insisterons sur les définitions et les propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires. Le théoréme du points fixe de banach est aussi présenté dans cette partie comme outil essentiel permettant de prouver l'existence et l'unicité de la solution de notre problème.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution du problème fractionaire avec retard dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. On commencera par reduire ce problème à une équation intégrale non linéaire de Voltérra dans des espaces de fonctions sommables et on montre l'unicité de la solution. La méthode utilisée est basée sur le théorème du point fixe de Banach, ce chapitre contient le premier résultat originale de ce mémoire.

La résolution du problème fractionnaire avec retard dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo se trouve dans le troisième chapitre qui contient deux sections : la première section contient le deuxième résultat originale de notre travail et la deuxième section contient le troisième.

Le mémoire se termine par une conclusion et quelques problèmes ouverts.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous introduisons les espaces fonctionnels, le concept de dérivation et d'intégration fractionnaire et certaines de leurs principales propriétés. Nous rappelons ensuite quelques notions essentielles de l'analyse fonctionnelle et nous explicitons les différentes versions du théorème du point fixe.Nous commençons par un rappel sur les espaces topologiques et les ensembles convexes.

1.1 Espaces topologiques et ensembles convexes

Soit E un espace topologique et $(\vartheta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ouvert de E et A un ensemble de E.

Définition 1.1.1 On dit que $(\vartheta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de E si $E = \cup_{\lambda\in\Lambda}\vartheta_\lambda$, ce qui signifie que $\forall x \in E$, il existe au moins $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $x \in \vartheta_{\lambda_0}$

Définition 1.1.2 On dit que l'ensemble A est convexe de E si et seulement si

$$\forall x, y \in A \quad \text{et} \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{alors} \quad tx + (1-t)\, y \in A. \tag{1.1}$$

Lemme 1.1.1 Si $\{C_i\}_{i\in I}$ sont des ensembles convexes de E, alors $\cap_{i\in I}C_i$ est un ensemble convexe de E.

Proof. Si $\{C_i\}_{i\in I}$ est convexe de E, alors C_i est convexe $\forall i \in I$. Ainsi $\cap_{i\in I}C_i$ est convexe de E. ■

Définition 1.1.3 l'enveloppe convexe de E est l'intersection de tous les ensembles convexes contenues dans E, qui est le plus petit ensemble convexe dans E. On le note par conv E.

Définition 1.1.4 On dit que E est un espace topologique séparé si pour tout $x, y \in E$, il exist deux voisinages U et V de x et$y$ respectivement tels que $U \cap V = \phi$.

Supposons maintenant que E est un espace topologique séparé.

Définition 1.1.5 On dit que E est un espace topologique compacte si et seulement si quel que soit le recouvrement ouvert de E, on peut extraire un recouvrement fini.

Plus présisement, si $(\vartheta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un recouvrement ouvert de E, il existe Λ_0 partie fini de Λ telle que $E = \cup_{\lambda \in \Lambda_0} \vartheta_\lambda$.

Définition 1.1.6 Soit A une partie de E, on dit que A est relativement compacte dans E si $\overline{A}$ et compact.

Définition 1.1.7 Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|$,et $f : X \to X$.

On dit que f est lipshitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|, \quad \forall x, y \in X \tag{1.2}$$

Soit $(E, d), (F, d')$ deux espaces métriques.

Noton par $\beta_0 (E, F)$ l'ensemble des fonctions continues, bornées sur E et à valeurs dans F et H un sous ensemble de $\beta_0 (E, F)$.

Définition 1.1.8 Soit $x_0 \in E, H$ est équicontinue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ \forall x : d(x, x_0) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon, \forall f \in H. \tag{1.3}$$

L'équicontinuité en x_0 signifie que α ne dépend pas du choix de f dans H.

Définition1.1.9 On dit que H est équicontinue sur E si H est équicontinue en tout point de E.

1.2 Espaces des Fonctions Intégrables, Fonctions Continues et Absolument Continues

1.2.1 Espace L_p

Les espaces L_p sont des espace de fonctions dont la puissance *p-ième* de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue.

Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1 On note par $L_p(a, b)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ l'espace des fonctions f mesurables intégrables au sens de Lebesgue a valeurs réelles dans Ω telle que la norme $\|f\|_p < +\infty$, où

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < +\infty) \tag{1.4}$$

et pour $p = +\infty$ on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \, . \tag{1.5}$$

et $L^\infty(a, b)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur (a, b)

Proposition1.2.1 $\left(L_p(a, b), \|.\|_{L_p(a,b)} \right)$ est un espace de Banach.

En particulier, si $p = 2$ alors :

$$L_2(a, b) = \left\{ f : \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\} \tag{1.6}$$

$\left(L_2(a, b), \langle ., . \rangle_{L_2(a,b)} \right)$ est un espace de Hilbert ; où $\langle ., . \rangle_{L_2(a,b)}$ est le produit scalaire définit comme suite :

$$\langle f, g \rangle_{L_2(a,b)} = \int_a^b f(t) \, .g(t) \, dt \quad \forall f, g \in L_2(a, b) \tag{1.7}$$

1.2.2 Espaces des fonctions intégrables avec poids $X_c^p(a, b)$

Définition 1.2.2 L'espace $X_c^p(a, b)$ $(c \in \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq \infty)$ est l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs complexes f sur (a, b) telles que $\|f\|_{X_c^p} < \infty$ avec

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty) \, , \tag{1.8}$$

et

$$\|f\|_{X_c^\infty} = ess \sup_{a \leq x \leq b} [x^c |f(x)|] \tag{1.9}$$

Cas particulier : si $c = \frac{1}{p}$, l'espace $X_c^p(a, b)$ coincide avec l'espace $L_p(a, b)$ et on a $X_{\frac{1}{p}}^p(a, b) = L_p(a, b)$.

1.2.3 Espaces $C_\gamma^n [a,b]$

Définition 1.2.3 [1] Soit $\Omega = [a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ et $n \in \mathbb{N} = \{0,1,..\}$. Soit $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω, muni de la norme

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \left\|f^{(k)}\right\|_C = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} \left|f^{(k)}(x)\right|, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω, muni de la norme

$$\|f\|_C = \max_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{1.11}$$

Définition 1.2.4 [1] Soit $\Omega = [a,b]$ un intervalle fini et soit $\gamma \in \mathbb{C}$ $(0 \leq \Re(\gamma) < 1)$, on introduit $C_\gamma[a,b]$ l'espace des fonctions f définies sur $[a,b]$ telle que la fonction $(x-a)^\gamma f(x) \in C[a,b]$, et

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(x-a)^\gamma f(x)\|_C. \tag{1.12}$$

L'espace $C_\gamma[a,b]$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids.

En particulier, $C_0[a,b] = C[a,b]$.

Définition 1.2.5 [1]On note par $C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : t \in [a,b]\} \tag{1.13}$$

Définition 1.2.6 [1]Pour $n \in \mathbb{N}$ on note par $C_\gamma^n[a,b]$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues difféfentiables à l'ordre $n-1$ sur $[a,b]$ et ont la dirévée $f^n(x)$ d'ordre n, telle que $f^n(x) \in C_\gamma[a,b]$:

$$C_\gamma^n[a,b] = \left\{ f : \|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\|f^{(k)}\right\|_C + \left\|f^{(n)}\right\|_{C_\gamma} \right\}, \ C_\gamma^0[a,b] = C_\gamma[a,b]. \tag{1.14}$$

Le lemme suivant nous donne une caractérisation pour l'espace $C_\gamma^n[a,b]$

Lemme 1.2.1 [1]Soit $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ et $\gamma \in \mathbb{C}$ $(0 \leq \Re(\gamma) < 1)$.Alors $C_\gamma^n[a,b]$ est l'espace de fonctions f qui peut être écrit sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k. \tag{1.15}$$

où $\varphi(t) \in C_\gamma[a,b]$ et c_k $(k = 0, 1, ...n-1)$ sont des constantes arbitraires tel que

$$\varphi(t) = f^n(t), \; c_k = \frac{f^k(a)}{k!}, \; (k = 0, 1, ...n-1). \tag{1.16}$$

En particulier, si $\gamma = 0$ alors $C^n[a,b]$ est l'espace de fonctions f qui peut être écrit sous la forme précédante où $\varphi(t) \in C[a,b]$.

1.2.4 Espaces $AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$

Soit $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini

Définition 1.2.7 Pour $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, ..\}$ on note par $AC^n[a,b]$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ continues sur $[a,b]$ telles que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]$, c'est-à-dire

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ et } \left(D^{n-1}f\right)(x) \in AC[a,b] \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right), \right\} \tag{1.17}$$

où $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

En particulier on a $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

Défintion 1.2.8 [1] L'espace noté $AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N}, \; \mu \in \mathbb{R})$ défini par

$$AC^n_{\delta,\mu}[a,b] = \left\{ g : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1}[x^\mu g(x)] \in AC[a,b], \; \mu \in \mathbb{R}, \; \delta = x\frac{d}{dx} \right\}. \tag{1.18}$$

est appelé espace des fonctions absoluments continues avec poids.

En particulier, quand $\mu = 0$, l'espace $AC^n_\delta[a,b] := AC^n_{\delta,0}[a,b]$ et on a

$$AC^n_\delta[a,b] = \left\{ g : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1}[g(x)] \in AC[a,b], \; \delta = x\frac{d}{dx} \right\}. \tag{1.19}$$

Quand $\mu = 0$ et $n = 1$, l'espace $AC^1_\delta[a,b]$ coïncide avec $AC[a,b]$.

Définition 1.2.9 [1]On note par $AC[a,b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.

Lemme1.2.2 L'espace $AC[a,b]$ coincide avec l'espace des primitives de fonctions sommables de Lebesgue, c'est-à-dire

$$f \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad (\varphi \in L(a,b)). \tag{1.20}$$

Ainsi une fonction absolument continue $f(x)$ a une dérivée sommable $f'(x) = \varphi(x)$ dans $[a, b]$. Alors (1.20) signifie que

$$\varphi(t) = f'(t) \text{ et } c = f(a). \tag{1.21}$$

1.3 La fonction Gamma

Dans cette section on présente les définitions et quelques propriétés de la fonction gamma d'Euler et de quelques fonctions spéciales liées à cette fonction. Pour plus des détailes voir Erdélyi ([53], Vol. 1, Chapter I).

Définition 1.3.1 [53] La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \ \ (\Re(z) > 0), \tag{1.22}$$

où

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)} \tag{1.23}$$

cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ $(\Re(z) > 0)$.

Remarque 1.3.1 [53]La fonction gamma d'Euler posséde la propriété suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ \ (\Re(z) > 0) \tag{1.24}$$

On utilise cette relation pour prolonger la fonction gamma d'Euler sur le

demi-plan $\Re(z) \leq 0$, on obtient alors

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \ \ \left(\Re(z) > -n\,;\, n \in \mathbb{N}\,;\, z \notin \mathbb{Z}_0^- := \{..., -2, -1, 0\}\right). \tag{1.25}$$

Ici $(z)_n$ désigne le *symbole de Pochhammer* défini pour un complexe $z \in \mathbb{C}$ et un entier non-négatif $n \in \mathbb{N}_0$ par

$$(z)_0 = 1 \text{ et } (z)_n = z(z+1)...(z+n-1) \ \ (n \in \mathbb{N}_0). \tag{1.26}$$

Les équations (1.24) et (1.26) donnent alors

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n! \ \ (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.27}$$

avec $0! = 1$.

Propriété 1.3.1 [53] On détermine quelques propriétés de la fonction gamma.

1.
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,(z\notin\mathbb{Z}_0\,;\,0<\Re(z)<1)\,;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{1.28}$$

2. la formule de Legendre
$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\ \ (z\in\mathbb{C}). \tag{1.29}$$

3. Le théorème de multiplication de Gauss-Legendre généralisé
$$\Gamma(mz)=\frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{(m-1)/2}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right)\ \ (z\in\mathbb{C}\,;\,m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}). \tag{1.30}$$

   d'aprés (1.27) et la deuxiéme relation dans (1.28) on trouve :

4.
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!}{2^n}\sqrt{\pi},\,(2n-1)!:=1.3...(2n-1)\,(n\in\mathbb{N}), \tag{1.31}$$

Définition 1.3.2 [53] La fonction psi d'Euler est définie comme la dérivée du logarithme de la fonction gamma
$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\ \ (z\in\mathbb{C}). \tag{1.32}$$

Cette fonction a la propriété suivante
$$\psi(z+m)=\psi(z)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{z+k}\ \ (z\in\mathbb{C}\,;\,m\in\mathbb{N}), \tag{1.33}$$

Pour $m=1$, on a $\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$ $(z\in\mathbb{C})$.

Définition 1.3.3 [53] La fonction beta est définie par
$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt\ \ (\Re(z)>0\,;\,\Re(w)>0), \tag{1.34}$$

Cette fonction est reliée aux fonctions gamma par la relation suivante
$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\ \ \left(z,w\notin\mathbb{Z}_0^-\right). \tag{1.35}$$

1.4 Fonctions de Mittag-Leffler

Dans cette section on donne les définitions et quelques propriétés de deux fonctions classiques de Mittag-Leffler. Pour plus des détailes voir Erdélyi ([53], Vol. 3, Section 18.1), Dzhrbashyan ([52] Chapter III et [51]).

Définition 1.4.1 [52] La fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie par

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \quad (z \in \mathbb{C}\,;\, \Re(\alpha) > 0), \tag{1.36}$$

Cette fonction a été présenté par Mittag-Leffler [18] et porte aussi son nom. Les propriétés de base de cette fonction ont été étudiées par Mittag-Leffler ([17], [18] et [19]) et par Wiman ([24]). On présente quelques propriétés de cette fonction. En particulier, quand $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$, on a

$$E_1(z) = e^z \text{ et } E_2(z) = \cosh\left(\sqrt{z}\right). \tag{1.37}$$

Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les formules suivantes sont satisfaites pour la fonction $E_n(\lambda z^n)$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n) \quad (n \in \mathbb{N}\,;\, \lambda \in \mathbb{C}) \tag{1.38}$$

et

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-1} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right)\right] = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+1}} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right) \quad (z \neq 0,\, n \in \mathbb{N},\, \lambda \in \mathbb{C}). \tag{1.39}$$

Si $\alpha = 1/n$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$, alors

$$E_{1/n}(z) = e^{z^n}\left[1 + n\int_0^z e^{-t^n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k/n)}\right) dt\right] \quad (n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}). \tag{1.40}$$

En particulier, pour $n = 2$, on a

$$E_{1/2}(z) = e^{z^2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2} dt\right], \tag{1.41}$$

La généralisation de (1.36) donne la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ qui est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (z, \beta \in \mathbb{C}\,;\, \Re(\alpha) > 0). \tag{1.42}$$

Cette fonction estparfois appelée fonction du type Mittag-Leffler. Cette fonction est apparue pour la première fois dans un article de Wiman [24] et ses propriétés de base ont été étudiées (presque cinq décennies plus tard) par Agarwal [27], Humbert [55], Humbert et Agarwal [28], et Dzhrbashyan[52]. Quand $\beta = 1$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ elle coïncide alors avec la fonction de Mittag-Leffler (1.42)

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad (z \in \mathbb{C}\,;\, \Re(\alpha) > 0)\,. \tag{1.43}$$

On rappelle également deux autres cas particuliers de (1.42)

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^{z} - 1}{z} \tag{1.44}$$

et

$$E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \tag{1.45}$$

1.5 Théorème du point fixe

Ce théorème consiste à prouver l'existence et l'unicité d'un point fixe pour un certain opérateur. on s'intéresse au théorème du point fixe de Banach qui assure l'existence et l'unicité. Le théorème de Schauder n'assure que l'existence seulement. on présente différents théorèmes d'existence et d'unicité basés sur les théorèmes classiques qui affirment l'existence et l'unicité des points fixes de certains opérateurs. On utilisera des définitions et des notions connues de l'analyse fonctionnelle. voir, par exemple, Kolmogorov et Fomin [15].

On commence par présenter le théorème du point fixe de Brouwer, puis de Schauder qui détermine seulement l'existence d'un point fixe sans l'unicité.

1.5.1 Théorème de point fixe de Brouwer(1910)

Historique : Le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarquait, en mélangeant son café au lait, que le point centrale de la surface du liquide, au milieu du tourbillon créé par le mouvement rotatoire de la cuillère, restait immobile. Il examina le problème de cette façon :

A tout moment, il y a un point de la suface qui n'a pas changé de place.

Nous allons examiner le problème en dimension n suivant Brouwer.

Soit

$$\overline{B}_m = \{x \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } \|x\| \leq 1\} \tag{1.46}$$

la boule unité fermée de $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne usuelle, et $S^{m-1} = \partial\overline{B}_m$ la sphère qui est sa frontière.

Lemme1.5.1 Soit $T : A \to B$ un opérateur continue et compact dans A, où A est un ensemble fermé de l'espace normé B. Si l'équation

$$x = Tx \tag{1.47}$$

est résoluble approximativement dans A, alors il existe une solution dans A.

Proof. Il existe une suite (x_n) dans A avec $x_n - Tx_n \to 0$. La suite $(y_n) = (Tx_n)$ admet une sous suite convergente dans A puisque $T(A)$ est relativement compact.

Si on note encore cette sous suite par (y_n) pour simplifier la notation, alors $y_n = Tx_n \to y \in B$ et que $x_n = y_n + (x_n - Tx_n) \to y$.

Sachant que A est fermé, alors $y \in A$. Ainsi d'après la continuité de T, $Tx_n \to Ty$, pour laquelle on obtient que $y = Ty$. ■

Théorème1.5.1*(Théorème de Brouwer)*

Toute application continue f de $\overline{B}_m$ dans $\overline{B}_m$ admet au moins un point fixe.

Proof. On peut montrer, pour tout $\varepsilon > 0$, qu'il existe un polynôme P avec $\|f - P\| < \varepsilon$.

Utilisons la norme maximum sur $\overline{B}_m$ définie par $\|f\| = \max\left\{|f| : x \in \overline{B}_m\right\}$ pour

avoir $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$, alors $Q(x) = \frac{P(x)}{1+\varepsilon}$ est une application régulière de $\overline{B}_m$ dans $\overline{B}_m$. Il est clair que $\|f - Q\| \leq 2\varepsilon$.

Supposons maintenant que x est un point fixe de Q, alors x est un point fixe d'approximation de f vérifiant $|x - f(x)| = |Q(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. Ainsi, lemme 1.5.1 montre que f admet un point fixe si toute application régulière de $\overline{B}_m$ dans $\overline{B}_m$ admet un point fixe. ■

Définition 1.5.1 On dit qu'un ensemble A d'un espace de Banach a la propriété de point fixe si toute application continue de A dans A admet un point fixe.

Soit X, Y deux espaces de Banach ou bien, en générale deux espaces topologiques, et A et B sont deux ensembles tel que $A \in X$ et $B \in Y$.

Corollaire 1.5.1 Si les ensembles A et B sont homéomorphe et A a la propriété de point fixe, alors B aussi a la propriété de point fixe.

Proof. voir [62] . ■

Corollaire 1.5.2 Soit $A \in \mathbb{R}^n$ un ensemble compact. Et supposons qu'il existe une application continue $P : \mathbb{R}^n \to A$ avec $P \backslash_A = Id_A$, (i.e) $P(x) = x, \forall x \in A$. Alors l'ensemble A a la propriété de point fixe.

Proof. Soit $B \supset A$ une boule fermée et $f : A \to A$ continue, alors $F = f \circ P$ est une application continue de B dans B. Ainsi d'après le théorème de point fixe de Brouwer, F admet un point fixe ζ, et comme $F(B) \subset A$, alors ce point fixe appartient à A, d'où $\zeta = f(\zeta)$. ■

1.5.2 Théorème de point fixe de Schauder

Théorème 1.5.2 [1] Soit (X, d) un espace métrique complet et soit D un sous-ensemble convexe fermé de X. Si $T : X \to X$ est une application et D est relativement compact dans X, alors l'opérateur T admet au moins un point fixe $x^* \in D$

$$Tx^* = x^*. \tag{1.48}$$

Proof. D'après le lemme 1.5.1 de point fixe, il suffit de trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un point $x \in D$ avec $\|x - Tx\| < \varepsilon$.

Soit donc $\varepsilon > 0$. L'ensemble $B = \overline{T(D)}$ est compact par hypothèse, on peut alors prend un recouvrement fini $\{B_\varepsilon(b_i)\}_{i=1}^p$ à partir de l'ensemble de toutes les boules $B_\varepsilon(b)_{b \in B}$.

Soit $F = \{b_1, ..., b_p\} \subset B$ et $C = convF$ (l'enveloppe convexe de F), remarquons que C est compact et convexe de D.

Définissons maintenant l'application continue $\phi : B \to C$ en posant

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) b_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\mu(x)},$$

où

$$\mu_i(x) = (\varepsilon - \|x - b_i\|)_+ = \left\{ \begin{array}{lll} \mu_i(x) = 0, & \text{si} & \|x - b_i\| \geq \varepsilon \\ \mu_i(x) = \varepsilon - \|x - b_i\|, & \text{si} & \|x - b_i\| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

et

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)$$

Sachant que pour tout $x \in B$, il existe un b_k avec $\|x - b_k\| < \varepsilon$, on a $\mu(x) > 0$ pour $x \in B$, donc ϕ est continue.

Il est claire que $\lambda_i(x) \geq 0$ et que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) = 1$, donc $\phi(B) \subset C$. De plus, on peut ecrire $x = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x)\right) x$, alors

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x)(b_i - x) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) \|b_i - x\| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in B. \end{aligned} \tag{1.49}$$

ceci montre que $\|b_i - x\| < \varepsilon$

Sinon si $\|b_i - x\| \geq \varepsilon$, alors $\lambda_i = 0$.Et donc l'application $S = \phi \circ T$ est définit de D dans C, et sa restriction sur C set une application continue de C dans C.

Et comme C est convexe et compact, il existe le corollaire 1.5.1 et 1.5.2 du théorème de Brouwer, un point fixe $x^* = S(x^*) = \phi(Tx^*) \in C$, et d'après la dèrnière estimation dans la relation (1.49), on obtient

$$\|x^* - Tx^*\| = \|\phi(Tx^*) - Tx^*\| < \varepsilon \tag{1.50}$$

Et donc x^* est le point fixe cherché. ■

Les conditions nécessaires et suffisantes exigées pour que D soit un ensemble relativement compact dans l'espace des fonctions continues $C[a, b]$ sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ fini et fermé sont données par le *théorème d'Arzela-Ascoli.* Avant présenter ce théorème, rappelons les définitions des ensembles équicontinus et uniformement bornés.

Définition1.5.2 [1] On dit que G un ensemble équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall g \in G$ et $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_1 - x_2| < \delta$ on a $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.

Définition 1.5.3 [1] On dit que G un ensemble uniformement borné s'il existe une constante $M > 0$ tel que $\|g\|_\infty \leq M$ pour tout $g \in G$.

Maintenant, on peut citer le théorème d'Arzela-Ascoli.

Théorème 1.5.3 [1] Soit G un sous-ensemble de $C[a, b]$. Si $C[a, b]$ muni de la norme de Chebyshev alors G est relativement compact dans $C[a, b]$ si et seulement si G est équicontinu et uniformement borné.

Définition 1.5.4 Soit $F : E \to E$

1. On dit que F est une application Lipschitzienne s'il existe une constante $\omega \geq 0$ telle que $\forall x, y \in E$

$$d\left(F\left(x\right), F\left(y\right)\right) \leq \omega d\left(x, y\right). \tag{1.51}$$

2. Lorsque $0 \leq \omega < 1$, on dit que F est contractante, et on dit que F est strictement contractante si l'inégalité (1.51) est stricte.

Définition 1.5.5 Soit $F : E \to E$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de F si $F\left(x\right) = x$.

1.5.3 Théorème du point fixe de Banach.

Donnons à présent le théorème du point fixe de Banach classique dans un espace métrique complet. Ce théorème comme on va le voir nous assure en plus de l'existence du point fixe son unicité.

Théorème 1.5.4 [1]Soit (E, d) un espace métrique complet non vide, soit $0 \leq \omega < 1$, et soit $F : E \to E$ une application telle que pour tout $x, y \in E$, la relation suivante soit satisfaite :

$$d\left(F\left(x\right), F\left(y\right)\right) \leq \omega d\left(x, y\right), \quad (0 \leq \omega < 1) \tag{1.52}$$

Alors l'opérateur F admet un point fixe unique $x^* \in E$.

Autrement dit, si F^k $(k \in \mathbb{N})$ est une suite d'opérateur définie comme suit

$$F^1 = F \text{ et } F^k = F F^{k-1} \left(k \in \mathbb{N}\backslash \left\{1\right\}\right), \tag{1.53}$$

Alors pour tout $x_0 \in E$, la suite $\left\{F^k x_0\right\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers le point fixe x^*.

Proof. Montrons d'abord l'existence :

Soit $x_0 \in E$, on définit par récurence la suit $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = F\left(x_n\right)$ et montrons que la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans l'espace complet E afin d'obtenir que $x = \lim_{n\to+\infty} x_n \in E$. Puisque F est continue d'après (1.52) on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = F\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right), \tag{1.54}$$

c-à-d que $x = F\left(x\right)$. Soient maintenant $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$, alors

$$d\left(x_p, x_q\right) \leq d\left(x_p, x_{p+1}\right) + d\left(x_{p+1}, x_{p+2}\right) + ... + d\left(x_{q-1}, x_q\right) \tag{1.55}$$

et comme

$$\begin{aligned} d\left(x_p, x_{p+1}\right) &= d\left(F\left(x_{p-1}\right), F\left(x_p\right)\right) \leq kd\left(x_{p-1}, x_p\right) \leq k^2 d\left(x_{p-2}, x_{p-1}\right) \\ &\leq \ldots \leq k^p d\left(x_0, x_1\right) \end{aligned} \tag{1.56}$$

d'où

$$\begin{aligned} d\left(x_p, x_q\right) &\leq \left(k^p + k^{p+1} + \ldots + k^{q-1}\right) d\left(x_0, x_1\right) \\ &\leq k^p d\left(x_0, x_1\right) \sum_{p=0}^{p=+\infty} k^p = \frac{k^p}{1-k} d\left(x_0, x_1\right). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Si $d\left(x_0, x_1\right) = 0$, alors $x_0 = x_1 = F\left(x_0\right)$ et donc x_0 est un point fixe. Sinon (c-à-d) $d\left(x_0, x_1\right) > 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ un entier convenablement choisi tel que $\forall p \geq n_0$ on a $\frac{k^p}{1-k} d\left(x_0, x_1\right) \leq \varepsilon$. Ceci montre que $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans E.

Pour l'unicité :

Soient x_1, x_2 deux points fixes de F, alors $F\left(x_1\right) = x_1$ et $F\left(x_2\right) = x_2$ et donc $d\left(F\left(x_1\right), F\left(x_2\right)\right) \leq kd\left(x_1, x_2\right)$, d'où $d\left(x_1, x_2\right) \leq kd\left(x_1, x_2\right)$ et comme $0 \leq k < 1$, alors $d\left(x_1, x_2\right) = 0$, (i.e) $x_1 = x_2$. ■

On indique également une généralisation du théorème du point fixe de Banach donné par Weissinger [voir Diethelm ([48], théorème C.5)].

Théorème 1.5.5 [12] Soit (E, d) un espace métrique complet non vide, et soit $\omega_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ tel que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k$ converge. Si $T : E \to E$ est une application telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $u, v \in U$, la relation

$$d\left(T^k u, T^k v\right) \leq \omega_k d\left(u, v\right) \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{1.58}$$

est satisfaite, alors l'opérateur T admet un point fixe unique $u^* \in E$. De plus, pour tout $u_0 \in E$ la suite $\left\{T^k u_0\right\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers ce point fixe u^*.

1.6 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.6.1 Soit $f \in C\left(\Omega\right)$. On définie l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}\left(\alpha > 0\right)$ au sens de Riemann-liouville (à droite) notée $I_{a^+}^{\alpha}$ par

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_a^t \frac{f\left(s\right) ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}}, \quad (t > a, \alpha > 0) \tag{1.59}$$

ou Γ est la fonction gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \;\; (\Re(z) > 0), \tag{1.60}$$

. Si $a = 0$, en écrit $\left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) * \varphi_\alpha(t)$,telle que $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$ et $\varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$.

Définition 1.6.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville (à droite) notée $D_{a^+}^{\alpha} y$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}\,(0 < \alpha < 1)$ est définie par

$$\begin{aligned} \left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{y(s)\,ds}{(t-s)^\alpha} \\ &= \frac{d}{dt}\left(I_{a^+}^{1-\alpha} y\right)(t), \quad (t > a, 0 < \alpha < 1) \end{aligned} \tag{1.61}$$

lorsque le membre de droite existe.

Dans ce qui suit nous rappelons quelques résultats essentiels utiles pour notre étude.

Le premier est le résultat bien connu qui caractérise les fonctions absolument continues comme les fonctions qui sont primitives de fonctions sommables. On a une relation qui lie L'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire qui est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.6.1 [1]Si $f \in L^1(a,b)$ et $\left(I_{a^+}^{1-\alpha} f\right) \in AC[a,b]$ et si $0 < \alpha < 1$ alors

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \frac{\left(I_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}. \tag{1.62}$$

Le deuxième montre que $I_{a^+}^{\alpha}$ est un opérateur continue de L_p dans luis même.

Lemme 1.6.2 [1]L'opérateur $I_{a^+}^{\alpha}$ avec $\alpha > 0$ est bornée dans $L_p(a,b)$ $(0 \leq p \leq +\infty)$

$$\left\|I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_p \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_p. \tag{1.63}$$

Le troisiième affirme que $I_{a^+}^{\alpha}$ est bien l'inverse à droite de $D_{a^+}^{\alpha}$.

Lemme 1.6.3 [1]Si $\alpha > 0$ et $f \in L_p(a,b)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ alors

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) \text{ presque partout dans } [a,b]. \tag{1.64}$$

Le lemme suivant donne une loi de composition pour $I_{a^+}^{\alpha}$.

Lemme 1.6.4 [1]Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \left(I_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(x) \text{ presque partout dans } [a,b]. \quad (1.65)$$

Lemme 1.6.5 [1]Soit $0 < \alpha < 1$, et soit $I_{a^+}^{1-\alpha}$ l'intégrale fractionnaire (1.59). Si $f \in C[a,b]$ et $I_{a^+}^{1-\alpha} \in C^1[a,b]$, alors on a

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \frac{\left(I_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1} \quad (1.66)$$

Lemme 1.6.6 Si $0 < \alpha < 1$, alors l'opérateur intégrale fractionnaire $I_{a^+}^{\alpha}$ est bornée dans $C[a,b]$:

$$\left\| I_{a^+}^{\alpha} f \right\|_{C[a,b]} \leq (b-a)^{\alpha} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \|f\|_{C[a,b]}. \quad (1.67)$$

Les deux propriétés qui suivent illustrent les notions d'intégrale fractionnaire et dérivée fractionnaire sur des polynômes. La première confraie bien ce que nous savons déja sur l'intégration d'ordre n d'un monome qui consiste à augmenter la puissance d'une unité...

Propriété 1.6.1 [1] $\forall j = 1, 2, 3, ..., [\alpha] + 1, \alpha > 0$ on a

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = 0 \quad (1.68)$$

Propriété 1.6.2 [1]Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ $(\beta > 0)$ alors

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}. \quad (1.69)$$

Remarque 1.6.1 L'opérateur d'intégration fractionnaire est commutatif.

Exemple 1.6.1 Posons $f(x) = (x-a)^{\gamma}$ avec $\gamma > -1$, alors

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (x-a)^{\alpha+\gamma}$$

En effet

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\gamma} dt$$

En effectuant le changement de variable :

$$t = a + s(x-a), \quad (0 \leq s \leq 1)$$

et en utilisant la fonction Béta il en résulte :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\gamma} \int_0^1 s^\gamma (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\gamma} \beta(\alpha, \gamma+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\gamma} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \end{aligned}$$

Et donc

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (x-a)^{\alpha+\gamma}$$

dans le cas où $a = 0$ on a :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (x)^{\alpha+\gamma}$$

Chapitre 2

Équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Riemann-liouville dans l'espace des fonctions sommables

2.1 Introduction

Ce chapitre contient le premier résultat original de ce mémoire qui consiste à démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (1)-(2)-(3)-(4) avec la non linéairité de la fonction f dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans l'espace $\mathbf{L}^{\alpha}(0,\tau)$ defini pour tout $0<\alpha<1$ par

$$\mathbf{L}^{\alpha}(0,\tau)=\{y\in L(0,\tau):D_{0+}^{\alpha}y\in L(0,\tau)\} \tag{2.1}$$

ici $L(0,\tau)=L_{1}(0,\tau)$ est l'espace des fonctions sommable dans l'intervalle fini $[0,\tau]$ de l'axe réel défini par (1.4) avec $p=1$.

La famille des fonctions sommables joue un rôle important en théorie de l'intégration. Elle possède quelques propriétés communes de base avec une autre famille importante de fonctions, celles des fonctions continues. La méthode que nous utilisons consiste à reduire le problème (1)-(2)-(3)-(4) à une équation intégrale de volterra et en utulisant le théorème du point fixe de Banach nous prouvons l'unicité de la solution pour le problème (1)-(2)-(3)-(4).

On commence d'abord par énoncer les hypothèses sur f et K permettant la réduction du problème fractionnaire avec retard à une équation intégrale.

2.2 Hypothèses

(H1) Soit $f\ : (0,\tau] \times G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(.,Y,Z\right) \in L\left(0,\tau\right), \forall Y \in G$ et $\forall Z \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux fonctions $l_1\left(t\right), l_2\left(t\right)$ positives telles que

$$\begin{aligned} \left\| f\left(t,Y_1,Z_1\right) - f\left(t,Y_2,Z_2\right)\right\|_{L(0,\tau)} &\leq l_1\left(t\right)\left\|Y_1 - Y_2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\ +l_2\left(t\right)\left\|Z_1 - Z_2\right\|_{L(0,\tau)}, \forall t &\in (0,\tau], \forall Y_1, Y_2 \in G, \forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$Y_i = y_t^i \text{ et } Z_i = \int_0^t K\left(t,s,y_s^i\right) ds \quad (i = 1,2) \tag{2.3}$$

et on pose

$$l^* = \sup_{t\in(0,\tau]} \left\{l_1\left(t\right), l_2\left(t\right)\right\} \tag{2.4}$$

(H2) Soit $K : D \times G \to \mathbb{R}$ telle que $K\left(.,s,y_s\right) \in L\left(0,\tau\right), \forall 0 \leq s \leq t, \forall y_s \in C\left(\left[-\tau,0\right],\mathbb{R}\right)$ où $D = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, 0 \leq s \leq t \leq \tau\right\}$ et il existe une fonction $H\left(t,s\right) \in C\left(D,\mathbb{R}^+\right)$ telle que

$$\left\|K\left(t,s,y_s^1\right) - K\left(t,s,y_s^2\right)\right\|_{L(0,\tau)} \leq H\left(t,s\right)\left\|y_s^1 - y_s^2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}, \tag{2.5}$$

$$\forall t,s \in D, \forall y_s^1, y_s^2 \in C\left(\left[-\tau,0\right],\mathbb{R}\right) \tag{2.6}$$

et on note par

$$H^* = \sup_{t\in(0,\tau_1]} \left\{\int_0^t H\left(t,s\right) ds,\ t,s \in D\right\} < +\infty \tag{2.7}$$

(H3) Soit $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que M soit indépendant de $y\left(.\right)$ et $\forall y_1, y_2 \in L\left(0,\tau\right)$ alors $y_t^1, y_t^2 \in C\left(\left[-\tau,0\right],\mathbb{R}\right)$ et

$$\left\|y_t^1 - y_t^2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \leq M\left(t\right)\left\|y_1 - y_2\right\|_{L(0,\tau)}, \tag{2.8}$$

on pose

$$M^* = \sup_{t\in(0,\tau_1]} \left\{M\left(t\right)\right\} < +\infty \tag{2.9}$$

2.3 L'équivalence du problème fractionnaire avec son équation intégrale correspondante

Définition 2.3.1 [4] La fonction y est dite solution du problème (1)-(2)-(3)-(4) si y satisfait l'équation (1) et la condition initiale (2) dans $(0, \tau]$, et la condition (3) et (4) dans $[-\tau, 0]$.

Théorème 2.3.1 Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : (0, \tau] \times G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\tau > 0)$ une fonction telle que $f(., Y, Z\ ) \in L(0, \tau)$, pour tout $Y \in G$ et $Z \in \mathbb{R}$

Si $y \in L(0, \tau)$, alors y satisfait les relations (1)-(2) si et seulement si y satisfait l'équation intégrale suivante

$$y(t) = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s, z, y_z)\, dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \quad (t > 0) \tag{2.10}$$

Proof. D'abord nous démontrons la nécessité.

Soit $y \in L(0, \tau)$ satisfaisant les relations (1) et (2).

Puisque $f(., Y, Z) \in L(0, \tau)$, (1) signifie qu'il existe dans $[0, \tau]$ la derivée fractionnaire $D_{0+}^{\alpha} y \in L(0, \tau)$ et d'après (1.61) on a

$$\left(D_{0+}^{\alpha} y\right)(t) = \frac{d}{dt}\left(I_{0+}^{1-\alpha} y\right)(t)\ \ ,\ \left(I_{0+}^{0} y\right)(t) = y(t) \tag{2.11}$$

Il suit du lemme 1.2.2 que $\left(I_{0+}^{1-\alpha} y\right) \in AC[0, \tau]$ car

$$(1) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(I_{0+}^{1-\alpha} y\right)(t) = f(t, Y(t), Z(t)) \Rightarrow \left(I_{0+}^{1-\alpha} y\right)(t) = c + \int_0^t f(s, Y(s), Z(s))\, ds \tag{2.12}$$

où

$$c = \left(I_{0+}^{1-\alpha} y\right)(0) = \tau. \tag{2.13}$$

Alors nous pouvons appliqué le lemme 1.6.1 (avec $f(x) = y(t)$) on a

$$\left(I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} y\right)(t) = y(t) - \frac{\left(I_{0+}^{1-\alpha} y\right)(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} = y(t) - \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \tag{2.14}$$

D'après le lemme 1.6.2 l'intégrale $\left(I_{0+}^{\alpha} f\right) \in L(0, \tau)$ i.e existe dans $[0, \tau]$

Appliquons l'opérateur I_{0+}^{α} sur les deux membre de (1) et utulisons (2.14) et (1.59) on obtient l'équation (2.10) ce qui montre la nécessité.

Démontrons maintenant la suffisance.

Soit $y \in L(0,\tau)$ satisfait l'équation (2.10). Appliquons l'opérateur D_{0+}^{α} sur les deux membres de (2.10), on a d'une part

$$\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(t) = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)}\left(D_{0+}^{\alpha}s^{\alpha-1}\right)(t) + \left(D_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}f\left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]\right)(t) \tag{2.15}$$

la propriété 1.6.1 et lemme 1.6.3 (avec $f(x)$ est remplacé par $f\left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]$) nous donne l'équation (1).

D'autre part on démontre que la condition initiale (2) est satisfaite. pour ceci on applique l'opérateur $I_{0+}^{1-\alpha}$ a (2.10) on obtient

$$\left(I_{0+}^{1-\alpha}y\right)(t) = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)}\left(I_{0+}^{1-\alpha}s^{\alpha-1}\right)(t) + \left(I_{0+}^{1-\alpha}I_{0+}^{\alpha}f\left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]\right)(t) \tag{2.16}$$

on utulise le lemme 1.6.4 et la propriété 1.6.2 on trouve que

$$\left(I_{0+}^{1-\alpha}y\right)(t) = \tau + \int_0^t f\left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]ds, \tag{2.17}$$

Le passage à la limite quant $t \to 0^+$dans la dernière relation nous donne la condition initiale (2) ce qui montre la suffisance, et donc la démonstration du théorème 2.3.1 est achevée. ■

2.4 Existence et unicité de la solution pour le problème du type Cauchy (1)-(2)-(3)-(4)

Soit

$$X = \left\{y : [-\tau,\tau] \to \mathbb{R} : y\left|_{[-\tau,0]}\right. \in C([-\tau,0],\mathbb{R}),\ \text{et } y\left|_{(0,\tau]}\right. \in C((0,\tau],\mathbb{R}) \cap L(0,\tau)\right\}. \tag{2.18}$$

Théorème 2.4.1 Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Si les hypothèse (H1)-(H2)-(H3) sont satisfaites alors le problème (1)-(2)-(3)-(4) admet une solution unique dans l'espace $C([-\tau,0],\mathbb{R}) \cap C((0,\tau],\mathbb{R}) \cap L^{\alpha}(0,\tau)$

Proof. D'abord nous démontrons l'existence de la solution $y \in L(0,\tau)$. Alors suivant le théorème 2.3.1, il suffit de démontrer l'existence de la solution $y \in L(0,\tau)$ pour l'equation intégrale non linéaire de voltérra (2.10) . Pour cela on applique la méthode connue, pour démontrer le resultat dans une partie de l'intervalle $[0,\tau]$.

L'équation (2.10) a un sens dans tout intervalle $[0,\tau_1] \subset [0,\tau]$ $(0<\tau_1<\tau)$. Choisissons τ_1 tel que

$$(1+H^*)\frac{\tau_1^{\alpha}M^*l^*}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.19}$$

et démontrons l'existence de la solution $y \in L(0,\tau_1)$ pour l'équation intégrale (2.10) dans l'intervalle $[0,\tau_1]$. Pour cela on utulise le théorème du point fixe de Banach dans l'espace $L(0,\tau_1)$ dont la norme est

$$\|y\|_{L(0,\tau_1)} = \int_0^{\tau_1} |y(t)|\,dt \tag{2.20}$$

Il est clair que $L(0,\tau_1)$ est un espace métrique complet avec la distance

$$d(y_1,y_2) = \|y_1-y_2\|_{L(0,\tau_1)} = \int_0^{\tau_1} |y_1(t)-y_2(t)|\,dt. \tag{2.21}$$

Considérons l'opérateur $T : X \to X$ défini par

$$(Ty)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in [-\tau,0] \\ y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f\left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, & \text{si } t \in (0,\tau] \end{cases} \tag{2.22}$$

où

$$y_0(t) = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} \tag{2.23}$$

Soit $x(.) : [-\tau,\tau] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in [-\tau,0], \\ 0, & \text{si } t \in (0,\tau]. \end{cases} \tag{2.24}$$

Pour tout $r \in C((0,\tau],\mathbb{R})$ avec $r_0(t) = y_0(t)$ on définit la fonction $\hat{r}$ par

$$\hat{r}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [-\tau,0], \\ r(t), & \text{si } t \in (0,\tau] \end{cases} \tag{2.25}$$

Si y satisfait l'équation intégrale (2.10), on peut décomposé $y(.)$ en $y(t) = \hat{r}(t) + x(t)$, $t>0$, ce qui implique que $y_t = \hat{r}_t + x_t$, pour tout $t>0$, et la fonction $r(.)$ satisfait

$$r(t) = r_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f\left[s,(\hat{r}_t+x_t),\int_0^s K[s,z,(\hat{r}_t+x_t)]\,dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}. \tag{2.26}$$

Soit

$$C_0 = \{r \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \cap C((0, \tau], \mathbb{R})\} \tag{2.27}$$

L'espace C_0 est un espace de Banach dont la norme est

$$\|r\|_{C_0} = \sup_{t \in (0,\tau]} |r(t)| \tag{2.28}$$

Soit maintenant l'opérateur $P : C_0 \to C_0$ définit par

$$(Pr)(t) = r_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\left[s, (\hat{r}_s + x_s), \int_0^s K[s, z, (\hat{r}_z + x_z)]\, dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, \quad t \in (0, \tau]. \tag{2.29}$$

Il est clair que l'opérateur T a un point fixe équivalent à l'opérateur P et donc on applique le théorème du point fixe de Banach, (c-à-d) on va démontrer que si $r \in L(0, \tau_1)$, alors $Pr \in L(0, \tau_1)$ et pour tout $r_1, r_2 \in L(0, \tau_1)$ on a l'estimation

$$\|Pr_1 - Pr_1\|_{L(0,\tau_1)} \le \omega \|r_1 - r_2\|_{L(0,\tau_1)}, \ \omega = (1 + H^*) \frac{\tau_1^\alpha M^* l^*}{\Gamma(\alpha+1)} < 1. \tag{2.30}$$

Il suit du (2.23) que $r_0(t) \in L(0, \tau_1)$ car

$$\|r_0(t)\|_{L(0,\tau_1)} = \frac{\tau}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} \left|t^{\alpha-1}\right| dt = \frac{\tau \tau_1^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} < +\infty \tag{2.31}$$

Puisque $f(., Y, Z) \in L(0, \tau)$, alors par suite du lemme 1.6.2 avec $b = \tau_1$ et $a = 0$ l'intégrale $I_{0^+}^\alpha f \in L(0, \tau_1)$ et donc $Pr \in L(0, \tau_1)$.

Démontrons maintenant l'estimation (2.30), on a $P : L(0, \tau_1) \to L(0, \tau_1)$

Soit $r_1, r_2 \in L(0, \tau_1)$, alors

$$\|Pr_1 - Pr_2\|_{L(0,\tau_1)} \le \left\| I_{0^+}^\alpha \left(\left| \begin{array}{c} f\left[s, (\hat{r}_s^1 + x_s), \int_0^s K[s, z, (\hat{r}_z^1 + x_z)]\, dz\right] - \\ -f\left[s, (\hat{r}_s^2 + x_s), \int_0^s K[s, z, (\hat{r}_z^2 + x_z)]\, dz\right] \end{array} \right| \right) \right\|_{L(0,\tau_1)} \tag{2.32}$$

$$\le \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left\| \left(\left| \begin{array}{c} f\left[s, (\hat{r}_s^1 + x_s), \int_0^s K[s, z, (\hat{r}_z^1 + x_z)]\, dz\right] - \\ -f\left[s, (\hat{r}_s^2 + x_s), \int_0^s K[s, z, (\hat{r}_z^2 + x_z)]\, dz\right] \end{array} \right| \right) \right\|_{L(0,\tau_1)}$$

$$\le \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\begin{array}{c} l_1(s) \|\hat{r}_s^1 - \hat{r}_s^2\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} + \\ +l_2(s) \left\| \int_0^s [K[s, z, (\hat{r}_z^1 + x_z)] - K[s, z, (\hat{r}_z^2 + x_z)]]\, dz \right\|_{L(0,\tau_1)} \end{array} \right)$$

et comme

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^s \left[K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^1+x_z\right)\right] - K[s,z,\left(\hat{r}_z^2+x_z\right)]\right] dz \right\|_{L(0,\tau_1)} \leq \\
\leq\ & \int_0^s \left\| \left[K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^1+x_z\right)\right] - K[s,z,\left(\hat{r}_z^2+x_z\right)]\right] \right\|_{L(0,\tau_1)} dz \\
\leq\ & \int_0^s H\left(s,z\right) \left\| \hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} dz \\
\leq\ & \left(\sup_{s\in(0,\tau_1]} \int_0^s H\left(s,z\right) dz \right) \left\| \hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
\leq\ & H^* \left\| \hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left\| Pr_1 - Pr_2 \right\|_{L(0,\tau_1)} &\leq \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} \left(l_1\left(s\right) + l_2\left(s\right) H^*\right) \left\| \hat{r}_s^1 - \hat{r}_s^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{\tau_1^\alpha M\left(s\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} \left(l_1\left(s\right) + l_2\left(s\right) H^*\right) \left\| r_1 - r_2 \right\|_{L(0,\tau_1)} \\
&\leq \frac{\tau_1^\alpha M^* l^*}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} \left(1 + H^*\right) \left\| r_1 - r_2 \right\|_{L(0,\tau_1)}
\end{aligned}$$

Ce qui implique l'estimation (2.30) et de (2.19) on a $0 < \omega < 1$, et alors P est un opérateur contractant dans $L\left(0,\tau_1\right)$ et d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique $y^*\left(t\right) \in L\left(0,\tau_1\right)$ pour l'équation (2.10) dans l'intervalle $(0,\tau_1]$.

On considère maintenant l'intervalle $[\tau_1,\tau_2]$, où $\tau_2 = \tau_1 + h_1$, $h_1 > 0$ et $\tau_2 < \tau$.On peut écrire l'équation (2.10) sous la forme

$$\begin{aligned}
y\left(t\right) &= \frac{\tau}{\Gamma\left(\alpha\right)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^{\tau_1} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K\left(s,z,y_z\right) dz\right] ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}} \qquad (2.33) \\
&+ \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_{\tau_1}^{t} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K\left(s,z,y_z\right) dz\right] ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $y\left(t\right)$ est bien définie sur l'intervalle $(0,\tau_1]$, on peut écrire que

$$y_{01} = \frac{\tau}{\Gamma\left(\alpha\right)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^{\tau_1} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K\left(s,z,y_z\right) dz\right] ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}} \qquad (2.34)$$

et l'équation (2.33) devient

$$y\left(t\right) = y_{01} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_{\tau_1}^{t} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K\left(s,z,y_z\right) dz\right] ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}} \qquad (2.35)$$

et de la même manière on deduit qu'il existe une solution unique $y^*(t) \in L(\tau_1, \tau_2)$ pour l'équation (2.10) dans l'intervalle $[\tau_1, \tau_2]$. Si on prend l'autre intervalle $[\tau_2, \tau_3]$ où $\tau_3 = \tau_2 + h_2$, $h_2 > 0$ et $\tau_3 < \tau$, on répéte ce processus, on conclut alors qu'il existe une solution unique $y(t) = y^*(t) \in L(0, \tau)$ pour l'équation intégrale de voltérra (2.10) dans l'intervalle $(0, \tau]$ et par suite pour le problème (1)-(2)-(3)-(4) dans l'espace $C_0 \cap L(0, \tau)$.

Pour terminer la preuve du théorème 2.4.1 on doit démontrer que la solution unique $y(t)$ dans $L(0, \tau)$ appartient a l'espace $L^\alpha(0, \tau)$, pour cela d'après (2.1) il suffit de démontrer que $D_{0+}^\alpha y \in L(0, \tau)$. Alors on sait d'après le théorème du point fixe que la solution unique $y(t)$ est obtenue comme une limite d'une suite convergente $y_m(t) \in L(0, \tau)$, (i,e)

$$\lim_{m \to +\infty} \|y_m - y\|_{L(0,\tau)} = 0 \tag{2.36}$$

avec le choix de certaine y_m dans un certain intervalle $(0, \tau_1], .., [\tau_{l-1}, \tau]$. En effet. d'aprè (1) et les hypothèses (H1)-(H2)-(H3) on a

$$\begin{aligned} \|D_{0+}^\alpha y_m - D_{0+}^\alpha y\|_{L(0,\tau)} &= \left\| f\left[t, y_t^m, \int_0^t K(t, s, y_s^m)\, ds\right] - f\left[t, y_t, \int_0^t K(t, s, y_s)\, ds\right] \right\|_{L(0,\tau)} \\ &\leq l_1(t) \|y_t^m - y_t\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\ &\quad + l_2(t) \left\| \int_0^t [K(t, s, y_s^m) - K(t, s, y_s)] ds \right\|_{L(0,\tau)} \\ &\leq l_1(t) \|y_t^m - y_t\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} + l_2(t) H^* \|y_s^m - y_s\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\ &\leq l^* M^* (1 + H^*) \|y_m - y\|_{L(0,\tau)} \end{aligned}$$

la relation (2.36) affirme que

$$\lim_{m \to +\infty} \|D_{0+}^\alpha y_m - D_{0+}^\alpha y\|_{L(0,\tau)} = 0, \tag{2.37}$$

et donc $\left(D_{0+}^\alpha y\right)(t) \in L(0, \tau)$. Alors le problème (1)-(2)-(3)-(4) admet une solution unique dans l'espace $C_0 \cap L^\alpha(0, \tau)$, et la preuve du théorème 2.4.1 est terminée. ■

2.5 Le problème du type Cauchy avec poids

Considérons le problème différentiel fractionnaire non linéaire du type Cauchy avec poids à retard suivant :

$$(D_{0+}^\alpha y)(t) = f\left[t, y_t, \int_0^t K(t, s, y_s)\, ds\right], \ t > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1́}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left[t^{1-\alpha}y(t)\right]=c,\quad c\in\mathbb{R} \tag{2́}$$

$$y(t)=\Phi(t),\qquad t\in[-\tau,0] \tag{3́}$$

$$y_t(\theta)=y(t+\theta),\quad \theta\in[-\tau,0] \tag{4́}$$

pour $0<\alpha<1$ le résultat du théorème 2.4.1 reste valable pour le problème de type Cauchy avec poids (1́)-(2́)-(3́)-(4́).

Théorème 2.5.1 Soit $0<\alpha<1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Si les hypothèse (H1)-(H2)-(H3) sont satisfaites alors le problème (1́)-(2́)-(3́)-(4́) admet une solution unique dans l'espace $C([-\tau,0],\mathbb{R})\cap C((0,\tau],\mathbb{R})\cap L^\alpha(0,\tau)$

La preuve de ce théorème est basé sur le lemme suivant :

Lemme 2.5.1 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ $(0<\alpha<1)$ et soit y une fonction mesurable dans $[a,b]$

(a) S'il existe la limite :

$$\lim_{t\to a^+}\left[(t-a)^{1-\alpha}y(t)\right]=c\ \ (c\in\mathbb{R}), \tag{2.38}$$

alors on a

$$\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)\left(a^+\right)=\lim_{t\to a^+}\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)(t)=c\Gamma(\alpha) \tag{2.39}$$

(b) S'il existe la limite :

$$\lim_{t\to a^+}\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)(t)=b\quad (b\in\mathbb{R}), \tag{2.40}$$

et si la limite :

$$\lim_{t\to a^+}\left[(t-a)^{1-\alpha}y(t)\right]\ \text{existe} \tag{2.41}$$

alors on a

$$\lim_{t\to a^+}\left[(t-a)^{1-\alpha}y(t)\right]=\frac{b}{\Gamma(\alpha)}. \tag{2.42}$$

Preuve du lemme 2.5.1

Proof. -Choisissons $\varepsilon>0$, d'après (2.38) il existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tel que pour $a<t<a+\delta$ on a

$$\left|(t-a)^{1-\alpha}y(t)-c\right|<\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.43}$$

D'après la propriété 1.6.2 on a

$$\Gamma(\alpha)=\left(I_{a^+}^{1-\alpha}(s-a)^{\alpha-1}\right)(t),\quad (0<\alpha<1) \tag{2.44}$$

Utulisons cette égalité en tenant en compte de la relation (1.59), on trouve

$$\begin{aligned}
\left|\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)(t)-c\Gamma(\alpha)\right| &= \left|\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)(t)-c\left(I_{a^+}^{1-\alpha}(s-a)^{\alpha-1}\right)(t)\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}\left|y(t)-c(s-a)^{\alpha-1}\right|dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}(s-a)^{\alpha-1}\left|(s-a)^{1-\alpha}y(t)-c\right|dt
\end{aligned}$$

Si on choisit $a<t<a+\delta$, alors $a<s<t<a+\delta$, et on peut appliquer l'estimation (2.43) et la propriété1.6.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)(t)-c\Gamma(\alpha)\right| &\leq \left|(s-a)^{1-\alpha}y(t)-c\right|\left(I_{a^+}^{1-\alpha}(s-a)^{\alpha-1}\right)(t) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion (a) du lemme 2.5.1.

-Supposons que la limite dans (2.42) est égale à c (i.e)

$$\lim_{t\to a^+}\left[(t-a)^{1-\alpha}y(t)\right]=c. \tag{2.45}$$

Alors d'après l'assertion (a) du lèmme 2.5.1 et la relation (2.40) on a

$$\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)\left(a^+\right)=\lim_{t\to a^+}\left(I_{a^+}^{1-\alpha}y\right)(t)=c\Gamma(\alpha)=b \tag{2.46}$$

et alors $c=b/\Gamma(\alpha)$, ce qui prouve l'assertion (b) du lemme 2.5.1. ■

Preuve du théorème 2.5.1

Proof. Si $y(t)$ sataisfait les conditions (1́)-(2́)-(3́)-(4́), alors d'après le lèmme 2.5.1(a), $y(t)$ satisfait les conditions (1)-(2)-(3)-(4) avec $b=c\Gamma(\alpha)$ (i.e),

$$\begin{aligned}
&\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(t)=f\left[t,y_t,\int_0^t K(t,s,y_s)\,ds\right],\ t>0,\quad 0<\alpha<1 \\
&I_{0+}^{1-\alpha}y\left(0^+\right)=c\Gamma(\alpha)\in\mathbb{R} \\
&y(t)=\Phi(t), \qquad t\in[-\tau,0] \\
&y_t(\theta)=y(t+\theta),\quad \theta\in[-\tau,0]
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.4.1, ce problème admet une solution unique $y(t)\in C([-\tau,0],\mathbb{R})\cap C((0,\tau],\mathbb{R})\cap L^{\alpha}(0,\tau)$, et d'après le lemme 2.5.1(b), $y(t)$ est aussi une solution pour le problème du type Cauchy avec poids (1́)-(2́)-(3́)-(4́).

Pour assurer l'unicité de la solution $y(t)$ en effet, on supposons que le problème $(\acute{1})$-$(\acute{2})$-$(\acute{3})$-$(\acute{4})$ admet deux solutions différentes dans l'espace $C\left([-\tau,0],\mathbb{R}\right)\cap C\left((0,\tau],\mathbb{R}\right)\cap L^{\alpha}\left(0,\tau\right)$, alors d'après le lemme 2.5.1(a), le problème (1)-(2)-(3)-(4) admet aussi deux solutions différentes dans l'espace $C\left([-\tau,0],\mathbb{R}\right)\cap C\left((0,\tau],\mathbb{R}\right)\cap L^{\alpha}\left(0,\tau\right)$, ce qui contredit l'unicité de la solution du problème (1)-(2)-(3)-(4) et la démonstration du théorème 2.5.1 est achevée. ■

Chapitre 3

Équations différentielles fractionnaires avec la dérivée au sens de Caputo

Ce chapitre contient le deuxième et le troisième résultat original de ce mémoire. on va traiter le même problème que celui du chapitre 2 mais cette fois ci avec la dérivée fractionnaire au sens de caputo qui est caractérisé par quelques propriétés différentes de celles qui caractérisent la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville. Pour cela on introduit les définitions de base et les propriétés suivantes.

3.1 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Caputo

dans cette section nous présentons la définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo.

Soit $[a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 La dérivée de Caputo (à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ $(0 < \alpha < 1)$ dans $[a, b]$ est définie par

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha} y\right)(t) = D_{a^+}^{\alpha}\left[y(s) - y(a)\right](t) \tag{3.1}$$

où $D_{a^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville

Considérons le problème fractionnaire avec retard suivant

$$\left({}^{C}D_{0+}^{\alpha}y\right)(t) = f\left[t, y_t, \int_0^t K(t,s,y_s)\,ds\right],\ 0 < t < \tau,\ \ (0<\alpha<1) \tag{$\ddot{1}$}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \tag{$\ddot{2}$}$$

$$y(t) = \Phi(t), \qquad t \in [-\tau, 0] \tag{$\ddot{3}$}$$

$$y_t(\theta) = y(t+\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0] \tag{$\ddot{4}$}$$

3.2 Équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Caputo dans l'espace des fonctions sommables

3.2.1 L'équivalence du problème fractionnaire avec son équation intégrale correspondante

Définition 3.2.1 [4] La fonction y est dite solution du problème ($\ddot{1}$)-($\ddot{2}$)-($\ddot{3}$)-($\ddot{4}$) si y satisfait l'équation ($\ddot{1}$) et la condition initiale ($\ddot{2}$) dans $(0,\tau]$, et la condition ($\ddot{3}$) et ($\ddot{4}$) dans $[-\tau, 0]$.

Téorème 3.2.1 [1] Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : [0,\tau] \times G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\tau > 0)$ une fonction telle que $f(., Y, Z) \in L(0,\tau)$, pour tout $Y \in G$ et $Z \in \mathbb{R}$ et satisfait

$$\max_{(t,Y,Z)\in(0,\tau]\times\bar{G}\times\mathbb{R}} |f(t,Y,Z)| = B < +\infty \tag{3.2}$$

Si $y \in L^{\infty}(0,\tau)$, alors y satisfait les relations ($\ddot{1}$)-($\ddot{2}$) si et seulement si y satisfait l'équation intégrale suivante

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \quad (t>0) \tag{3.3}$$

Proof. D'abord nous démontrons la nécessité.

On peut écrire ($\ddot{1}$) d'après (3.1) sous la forme $D_{0+}^{\alpha}[y(s) - y(0)](t) = f\left[t, y_t, \int_0^t K(t,s,y_s)\,ds\right]$

Soit $y \in L^{\infty}(0,\tau)$ satisfaisant les relations ($\ddot{1}$) et ($\ddot{2}$).

Puisque $f(.,Y,Z) \in L(0,\tau)$, $(\overset{''}{1})$ signifie qu'il existe dans $[0,\tau]$ la derivée fractionnaire $\left({}^{C}D_{0^+}^{\alpha}y\right) \in L(0,\tau)$ et d'après (3.1) on a

$$\left({}^{C}D_{0^+}^{\alpha}y\right)(t) = D_{0^+}^{\alpha}\left[y(s) - y(0)\right](t) = \frac{d}{dt}\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s) - y_0\right]\right)(t) \tag{3.4}$$

Il suit du lemme (1.2.2) que $\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s) - y_0\right]\right) \in AC[0,\tau]$ car

$$\begin{aligned}(1) \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt}\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s) - y_0\right]\right)(t) = f(t, Y(t), Z(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s) - y_0\right]\right)(t) = c + \int_0^t f(s, Y(s), Z(s))\, ds\end{aligned}$$

où

$$c = \left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(0) - y_0\right]\right)(t) = 0 \tag{3.5}$$

Alors nous pouvon appliqué le lemme 1.6.1 on a

$$\left(I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}\left[y(s) - y_0\right]\right)(t) = y(t) - y_0 - \frac{\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s) - y_0\right]\right)(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}. \tag{3.6}$$

Le dernier membre de droite dans (3.6) est nulle en effet :

Méthode 1

On a par définition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville que

$$\left(I_{0^+}^{1-\alpha}y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{y(s)\, ds}{(t-s)^{\alpha}} \tag{3.7}$$

(i.e)

$$\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s) - y_0\right]\right)(0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\left[y(s) - y_0\right] ds}{(t-s)^{\alpha}} \tag{3.8}$$

et comme

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\left[y(s) - y_0\right] ds}{(t-s)^{\alpha}}\right| \quad & \leq \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \left|\frac{\left[y(s) - y_0\right]}{(t-s)^{\alpha}}\right| \\ & \leq \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\sup_{s\in(0,t]}\left|y(s) - y_0\right|\right]\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\alpha}} \\ & \leq \quad \left[\sup_{s\in(0,t]}\left|y(s) - y_0\right|\right]\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\ & \leq \quad \left\|y(s) - y_0\right\|_{L^\infty}\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Lorsque $t \to 0^+$ le membre de droite de la dérnière inégalité tend vers 0.

Méthode 2 :

On a

$$\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s)-y_0\right]\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\left[y(s)-y_0\right]ds}{(t-s)^{\alpha}} \tag{3.10}$$

Par changement de variable $s=tx$ on obtient

$$\begin{aligned}\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s)-y_0\right]\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{y(tx)-y_0}{(1-x)^{\alpha}t^{\alpha}}tdx \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{y(tx)-y_0}{(1-x)^{\alpha}}dx.\end{aligned} \tag{3.11}$$

cette dérnière égalité afirme que $\left(I_{0^+}^{1-\alpha}\left[y(s)-y_0\right]\right)(0)=0$

et donc

$$\left(I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}\left[y(s)-y_0\right]\right)(t)=y(t)-y_0 \tag{3.12}$$

D'après le lemme 1.6.2 l'intégrale $\left(I_{0^+}^{\alpha}f\right)\in L(0,\tau)$ i.e existe dans $[0,\tau]$

Appliquons l'opérateur $I_{0^+}^{\alpha}$ sur les deux membre de ($\H{1}$) et utulisons (3.12) et (1.59) on obtient l'équation (3.3) ce qui montre la nécessité.

Démontrons maintenant la suffisance.

Soit $y\in L^{\infty}(0,\tau)$ satisfaisant l'équation (3.3). Appliquons l'opérateur $D_{0^+}^{\alpha}$ sur les deux membres de (3.3) et utulisons le lemme 1.6.3 (avec $f(x)$ est remplacé par $f\ \left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]$) on obtient grâce à la linéarité de $D_{0^+}^{\alpha}$ que

$$\begin{aligned}\left(D_{0^+}^{\alpha}y\right)(t) &= \left(D_{0^+}^{\alpha}y_0\right)(t)+\left(D_{0^+}^{\alpha}I_{0^+}^{\alpha}f\ \left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]\right)(t) \\ \left(D_{0^+}^{\alpha}y\right)(t)-\left(D_{0^+}^{\alpha}y_0\right)(t) &= f\ \left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right] \\ D_{0^+}^{\alpha}\left[y(s)-y(0)\right](t) &= f\ \left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right] \\ \left({}^{C}D_{0^+}^{\alpha}y\right)(t) &= f\ \left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]\end{aligned}$$

Ce qui nous donne ($\H{1}$)

D'autre part on démontre que la condition initiale ($\H{2}$) est satisfaite. En effet :

$$y(t)=y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f\ \left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \tag{3.13}$$

Par changement de variable $s = tx$ on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{f\left[tx, y_{tx}, \int_0^{tx} K(tx, z, y_z)\, dz\right] t dx}{(1-x)^{\alpha} t^{\alpha}} \\ &= y_0 + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{f\left[tx, y_{tx}, \int_0^{tx} K(tx, z, y_z)\, dz\right] dx}{(1-x)^{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

A l'aide de (3.2) on trouve que $y(0) = y_0$, ce qui montre la suffisance, et donc la démonstration du théorème 3.2.1 est achevée. ■

3.2.2 Existence et unicité de la solution pour le problème du type Cauchy ($\acute{\acute{1}}$)-($\acute{\acute{2}}$)-($\acute{\acute{3}}$)-($\acute{\acute{4}}$)

Soit

$$X = \left\{ y : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R} : y\left|_{[-\tau,0]} \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}), \text{ et } y\right|_{(0,\tau]} \in C((0,\tau], \mathbb{R}) \cap L(0,\tau) \right\}. \tag{3.15}$$

Théorème 3.2.2 Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Si les hypothèse (H1)-(H2)-(H3) et la condition (3.2) du théorème 3.2.1 sont satisfaites alors le problème ($\acute{\acute{1}}$)-($\acute{\acute{2}}$)-($\acute{\acute{3}}$)-($\acute{\acute{4}}$) admet une solution unique dans l'espace $C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \cap C((0,\tau], \mathbb{R}) \cap L^{\alpha}(0,\tau)$

Proof. D'abord nous démontrons l'existence de la solution $y \in L(0,\tau)$. Alors d'aprés le théorème 3.2.1, il suffit de démontrer l'existence de la solution $y \in L(0,\tau)$ pour l'equation intégrale non linéaire de voltérra (3.3) . Pour démontrer le résultat dans une partie de l'intervalle $[0,\tau]$.

L'équation (3.2) a un sens dans tout intervalle $[0,\tau_1] \subset [0,\tau]$ $(0 < \tau_1 < \tau)$. Choisissons τ_1 tel que

$$(1 + H^*) \frac{\tau_1^{\alpha} M^* l^*}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{3.16}$$

et démontrons l'existence de la solution $y \in L(0,\tau_1)$ pour l'équation intégrale (3.3) dans l'intervalle $[0,\tau_1]$. Pour cela on utulise le théorème du point fixe de Banach dans l'espace $L(0,\tau_1)$ dont la norme est

$$\|y\|_{L(0,\tau_1)} = \int_0^{\tau_1} |y(t)|\, dt \tag{3.17}$$

Il est clair que $L(0,\tau_1)$ est un espace métrique complet avec la distance

$$d(y_1,y_2)=\|y_1-y_2\|_{L(0,\tau_1)}=\int_0^{\tau_1}|y_1(t)-y_2(t)|\,dt. \tag{3.18}$$

Considérons l'opérateur $\digamma : X \to X$ définit par

$$(\digamma y)(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{si } t\in[-\tau,0]\\ y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f\left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, & \text{si } t\in(0,\tau]\end{cases} \tag{3.19}$$

Soit $x(.) : [-\tau,\tau]\to\mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{si } t\in[-\tau,0],\\ 0, & \text{si } t\in[0,\tau].\end{cases} \tag{3.20}$$

Pour toute $r\in C([0,\tau],\mathbb{R})$ avec $r_0=y_0$ on définit la fonction $\hat{r}$ par

$$\hat{r}(t)=\begin{cases}0, & \text{si } t\in[-\tau,0],\\ r(t), & \text{si } t\in[0,\tau]\end{cases} \tag{3.21}$$

Si y satisfait l'équation intégrale (3.3) on peut décomposer $y(.)$ en $y(t)=\hat{r}(t)+x(t)$, $t\geq 0$, ce qui implique que $y_t=\hat{r}_t+x_t$, pour tout $t\geq 0$, et la fonction $r(.)$ satisfait

$$r(t)=r_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f\left[s,(\hat{r}_t+x_t),\int_0^s K[s,z,(\hat{r}_t+x_t)]\,dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}. \tag{3.22}$$

Soit

$$C_0=\{r\in C([-\tau,0],\mathbb{R})\cap C([0,\tau],\mathbb{R})\} \tag{3.23}$$

L'espace C_0 est un espace de Banach dont la norme est

$$\|r\|_{C_0}=\sup_{t\in(0,\tau]}|r(t)| \tag{3.24}$$

Soit maintenant l'opérateur $\Phi : C_0\to C_0$ définit par

$$(\Phi r)(t)=r_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f\left[s,(\hat{r}_s+x_s),\int_0^s K[s,z,(\hat{r}_z+x_z)]\,dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}},\quad t\in(0,\tau]. \tag{3.25}$$

Il est clair que l'opérateur $\digamma$ est équivalent à l'opérateur Φ et par suite comme l'opérateur $\digamma$ a un point fixe il s'ensuit que l'opérateur Φ a un point fixe et donc on applique le théorème du point fixe de Banach, (c-à-d) on va démontrer que si $r \in L(0,\tau_1)$, alors $\Phi r \in L(0,\tau_1)$; et pour tout $r_1, r_2 \in L(0,\tau_1)$ on a l'estimation

$$\|\Phi r_1 - \Phi r_1\|_{L(0,\tau_1)} \leq \omega \|r_1 - r_2\|_{L(0,\tau_1)}, \ \omega = (1+H^*)\frac{\tau_1^\alpha M^* l^*}{\Gamma(\alpha+1)} < 1. \quad (3.26)$$

Puisque $y(t) \in L(0,\tau_1)$ alors $y(0) = y_0 \in L(0,\tau_1)$ et donc $r_0 \in L(0,\tau_1)$. Puisque $f(.,Y,Z) \in L(0,\tau)$, alors par suit du lemme 1.6.2 avec $b = \tau_1$ l'intégrale $I_{0+}^\alpha f \in L(0,\tau_1)$ et donc $\Phi r \in L(0,\tau_1)$.

Démontrons maintenant l'estimation (3.26), on a $\Phi : L(0,\tau_1) \to L(0,\tau_1)$

Soit $r_1, r_2 \in L(0,\tau_1)$, alors

$$\|\Phi r_1 - \Phi r_2\|_{L(0,\tau_1)} \leq \left\| I_{0+}^\alpha \left(\left| \begin{array}{c} f\ \left[s, (\hat{r}_s^1 + x_s), \int_0^s K[s,z,(\hat{r}_z^1 + x_z)]\,dz\right] - \\ -f\ \left[s, (\hat{r}_s^2 + x_s), \int_0^s K[s,z,(\hat{r}_z^2 + x_z)]\,dz\right] \end{array} \right| \right) \right\|_{L(0,\tau_1)}$$

$$\leq \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left\| \left(\left| \begin{array}{c} f\ \left[s, (\hat{r}_s^1 + x_s), \int_0^s K[s,z,(\hat{r}_z^1 + x_z)]\,dz\right] - \\ -f\ \left[s, (\hat{r}_s^2 + x_s), \int_0^s K[s,z,(\hat{r}_z^2 + x_z)]\,dz\right] \end{array} \right| \right) \right\|_{L(0,\tau_1)}$$

$$\leq \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\begin{array}{c} l_1(s)\left\|\hat{r}_s^1 - \hat{r}_s^2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} + \\ +l_2(s)\left\|\int_0^s [K[s,z,(\hat{r}_z^1 + x_z)] - K[s,z,(\hat{r}_z^2 + x_z)]]\,dz\right\|_{L(0,\tau_1)} \end{array} \right)$$

et comme

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^s \left[K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^1 + x_z\right)\right] - K[s,z,\left(\hat{r}_z^2 + x_z\right)]\right]dz\right\|_{L(0,\tau_1)} \leq \\
\leq\ & \int_0^s \left\|\left[K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^1 + x_z\right)\right] - K[s,z,\left(\hat{r}_z^2 + x_z\right)]\right]\right\|_{L(0,\tau_1)} dz \\
\leq\ & \int_0^s H(s,z)\left\|\hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} dz \\
\leq\ & \left(\sup_{s\in(0,\tau_1]} \int_0^s H(s,z)\,dz\right)\left\|\hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
\leq\ & H^*\left\|\hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|\Phi r_1 - \Phi r_2\|_{L(0,\tau_1)} &\leq \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(l_1(s) + l_2(s)H^*)\left\|\hat{r}_s^1 - \hat{r}_s^2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{\tau_1^\alpha M(s)}{\Gamma(\alpha+1)}(l_1(s) + l_2(s)H^*)\|r_1 - r_2\|_{L(0,\tau_1)} \\
&\leq \frac{\tau_1^\alpha M^* l^*}{\Gamma(\alpha+1)}(1+H^*)\|r_1 - r_2\|_{L(0,\tau_1)}
\end{aligned}$$

Ce qui implique l'estimation (3.26), et de (3.16) on a $0 < \omega < 1$, et alors P est un opérateur contractant dans $L(0, \tau_1)$ et d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique $y^*(t) \in L(0, \tau_1)$ pour l'équation (3.3) dans l'intervalle $(0, \tau_1]$.

On considère maintenant l'intervalle $[\tau_1, \tau_2]$, où $\tau_2 = \tau_1 + h_1$, $h_1 > 0$ et $\tau_2 < \tau$.On peut écrire l'équation (3.3) sous la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s, z, y_z)\, dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{t} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s, z, y_z)\, dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Puisque la fonction $y(t)$ est bien définie sur l'intervalle $(0, \tau_1]$, on peut la mettre comme une fonction connue :

$$y_{01} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s, z, y_z)\, dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \tag{3.28}$$

et l'équation (3.27) devient

$$y(t) = y_{01} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{t} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s, z, y_z)\, dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \tag{3.29}$$

et de la même manière on déduit qu'il existe une solution unique $y^*(t) \in L(\tau_1, \tau_2)$ pour l'équation (3.3) dans l'intervalle $[\tau_1, \tau_2]$. Si on prend l'autre intervalle $[\tau_2, \tau_3]$ où $\tau_3 = \tau_2 + h_2$, $h_2 > 0$ et $\tau_3 < \tau$, et repétons ce processus, on conclut qu'il existe une solution unique $y(t) = y^*(t) \in L(0, \tau)$ pour l'équation intégrale de voltérra (3.3) dans l'intervalle $(0, \tau]$ et donc pour le problème ($\H{1}$)-($\H{2}$)-($\H{3}$)-($\H{4}$) dans l'espace $C_0 \cap L(0, \tau)$.

Pour terminer la preuve du théorème 3.2.2 , on doit démontrer que pour une certaine solution unique $y(t)$ dans $L(0, \tau)$ elle appartient à l'espace $L^\alpha(0, \tau)$, et ceci d'après (2.1) il suffit de démontrer que ${}^C D_{0^+}^\alpha y \in L(0, \tau)$. Alors on sait d'après le théorème du point fixe que la solution unique $y(t)$ est obtenue comme une limite d'une suite convergente $y_m(t) \in L(0, \tau)$, (i,e)

$$\lim_{m \to +\infty} \|y_m - y\|_{L(0,\tau)} = 0 \tag{3.30}$$

avec le choix d'une certaine y_m dans un certain intervalle $(0,\tau_1],..,[\tau_{l-1},\tau]$. En effet. d'après (1) et les hypothèses (H1)-(H2)-(H3) on a

$$\begin{aligned}
\left\|{}^C D^\alpha_{0+} y_m - {}^C D^\alpha_{0+} y\right\|_{L(0,\tau)} &= \left\| f\ \left[t, y^m_t, \int_0^t K\left(t,s,y^m_s\right) ds\right] - f\ \left[t, y_t, \int_0^t K\left(t,s,y_s\right) ds\right]\right\|_{L(0,\tau)} \\
&\leq l_1(t)\left\|y^m_t - y_t\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
&\quad + l_2(t)\left\|\int_0^t [K\left(t,s,y^m_s\right) - K\left(t,s,y_s\right)] ds\right\|_{L(0,\tau)} \\
&\leq l_1(t)\left\|y^m_t - y_t\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} + l_2(t) H^* \left\|y^m_s - y_s\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
&\leq l^* M^* (1+H^*)\left\|y_m - y\right\|_{L(0,\tau)}
\end{aligned}$$

la relation (3.30) affirme que

$$\lim_{m\to+\infty}\left\|{}^C D^\alpha_{0+} y_m - {}^C D^\alpha_{0+} y\right\|_{L(0,\tau)} = 0, \tag{3.31}$$

et donc $\left({}^C D^\alpha_{0+} y\right)(t) \in L(0,\tau)$. Alors le problème $(\H{1})$-$(\H{2})$-$(\H{3})$-$(\H{4})$ admet une solution unique dans l'espace $C_0 \cap L^\alpha(0,\tau)$, et la preuve du théorème 3.2.2 est terminée. ■

3.3 Équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Caputo dans l'espace des fonctions continues

Cette section contient le Troisième résultat original de ce mémoire. on va traiter le même problème que celui de la section 2 du chapitre 3 mais cette fois ci dans l'espace des fonctions continues avec la dérivée fractionnaire au sens de caputo.

On commence d'abord par énoncer les hypothèses sur f et K permettant la réduction du problème fractionnaire avec retard à une équation intégrale dans l'espace de fonction continues.

3.3.1 Hypothèses

(HÍ) Soit $f\ : [0,\tau]\times G\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(.,Y,Z)\in C[0,\tau]$, $\forall Y\in G$ et $\forall Z\in\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux fonctions $l_1(t), l_2(t)$ positives telles que

$$\begin{aligned}
\left\|f(t,Y_1,Z_1) - f(t,Y_2,Z_2)\right\|_{C[0,\tau]} &\leq l_1(t)\left\|Y_1 - Y_2\right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
+l_2(t)\left\|Z_1 - Z_2\right\|_{C[0,\tau]}, \forall t &\in [0,\tau], \forall Y_1, Y_2 \in G, \forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

où

$$Y_i = y_t^i \text{ et } Z_i = \int_0^t K\left(t, s, y_s^i\right) ds \quad (i = 1, 2) \tag{3.33}$$

et on pose

$$l^* = \sup_{t \in [0,\tau]} \left\{ l_1(t), l_2(t) \right\} \tag{3.34}$$

(H$\acute{2}$) Soit $K : D \times G \to \mathbb{R}$ telle que $K(., s, y_s) \in C[0, \tau], \forall 0 \leq s \leq t, \forall y_s \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ où $D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, 0 \leq s \leq t \leq \tau\}$ et il existe une fonction $H(t, s) \in C(D, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\left\| K\left(t, s, y_s^1\right) - K\left(t, s, y_s^2\right) \right\|_{C[0,\tau]} \leq H(t, s) \left\| y_s^1 - y_s^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}, \tag{3.35}$$

$$\forall t, s \in D, \forall y_s^1, y_s^2 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \tag{3.36}$$

et on note par

$$H^* = \sup_{t \in [0,\tau_1]} \left\{ \int_0^t H(t, s) ds, \; t, s \in D \right\} < +\infty \tag{3.37}$$

(H$\acute{3}$) Soit $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que M soit indépendant de $y(.)$ et $\forall y_1, y_2 \in C[0, \tau]$ alors $y_t^1, y_t^2 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ et

$$\left\| y_t^1 - y_t^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \leq M(t) \left\| y_1 - y_2 \right\|_{C[0,\tau]}, \tag{3.38}$$

on pose

$$M^* = \sup_{t \in [0,\tau_1]} \{ M(t) \} < +\infty \tag{3.39}$$

3.3.2 L'équivalence du problème fractionnaire avec son équation intégrale correspondante

Définition 3.3.1 [4] La fonction y est dite solution du problème ($\H{1}$)-($\H{2}$)-($\H{3}$)-($\H{4}$) si y satisfait l'équation ($\H{1}$) et la condition initiale ($\H{2}$) dans $(0, \tau]$, et la condition ($\H{3}$) et ($\H{4}$) dans $[-\tau, 0]$.

Téorème 3.3.1 [1] Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : [0, \tau] \times G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\tau > 0)$ une fonction continue en $t \in C[0, \tau]$, pour tout $Y \in G$ et $Z \in \mathbb{R}$ et satisfait

$$\max_{(t,Y,Z) \in (0,\tau] \times \bar{G} \times \mathbb{R}} |f(t, Y, Z)| = B < +\infty \tag{3.40}$$

Si $y \in C[0,\tau]$, alors y satisfait les relations $(\H{1})$-$(\H{2})$ si et seulement si y satisfait l'équation intégrale suivante

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \quad (t>0) \tag{3.41}$$

Proof. D'abord nous démontrons la nécessité.

On peut écrire $(\H{1})$ d'après (3.1) sous la forme $D_{0+}^{\alpha}[y(s) - y(0)](t) = f\left[t, y_t, \int_0^t K(t,s,y_s)\,ds\right]$

Soit $y \in C[0,\tau]$ satisfaisant les relations $(\H{1})$ et $(\H{2})$.

D'après la condition (3.40), $(\H{1})$ signifie qu'il existe dans $[0,\tau]$ la derivée fractionnaire $\left({}^{C}D_{0+}^{\alpha} y\right) \in C[0,\tau]$ et d'après (3.1) on a

$$\left({}^{C}D_{0+}^{\alpha} y\right)(t) = D_{0+}^{\alpha}[y(s) - y(0)](t) = \frac{d}{dt}\left(I_{0+}^{1-\alpha}[y(s) - y_0]\right)(t) \tag{3.42}$$

Il suit du lemme (1.2.2) que $\left(I_{0+}^{1-\alpha}[y(s) - y_0]\right) \in C[0,\tau]$ car

$$\begin{aligned} (1) \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt}\left(I_{0+}^{1-\alpha}[y(s) - y_0]\right)(t) = f(t, Y(t), Z(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \left(I_{0+}^{1-\alpha}[y(s) - y_0]\right)(t) = c + \int_0^t f(s, Y(s), Z(s))\,ds \end{aligned}$$

où

$$c = \left(I_{0+}^{1-\alpha}[y(0) - y_0]\right)(t) = 0 \tag{3.43}$$

Alors nous pouvon appliqué le lemme 1.6.5 on a

$$\left(I_{0+}^{\alpha C}D_{0+}^{\alpha}[y(s) - y_0]\right)(t) = y(t) - y_0 - \frac{\left(I_{0+}^{1-\alpha}[y(s) - y_0]\right)(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}. \tag{3.44}$$

Le dernier membre de droite dans (3.44) est nulle en effet :

Méthode 1

On a par définition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville que

$$\left(I_{0+}^{1-\alpha} y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}} \tag{3.45}$$

(i.e)

$$\left(I_{0+}^{1-\alpha}[y(s) - y_0]\right)(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{[y(s) - y_0]\,ds}{(t-s)^{\alpha}} \tag{3.46}$$

et comme

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{[y(s)-y_0]\,ds}{(t-s)^\alpha}\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \left|\frac{[y(s)-y_0]}{(t-s)^\alpha}\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\sup_{s\in(0,t]}|y(s)-y_0|\right]\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\alpha} \\ &\leq \left[\sup_{s\in(0,t]}|y(s)-y_0|\right]\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\ &\leq \|y(s)-y_0\|_{C[0,\tau]}\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Lorsque $t\to 0^+$ le membre de droite de la dérnière inégalité tend vers 0.

Méthode 2 :

On a

$$\left(I_{0^+}^{1-\alpha}[y(s)-y_0]\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{[y(s)-y_0]\,ds}{(t-s)^\alpha} \tag{3.48}$$

Par changement de variable $s=tx$ on obtient

$$\begin{aligned}\left(I_{0^+}^{1-\alpha}[y(s)-y_0]\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{y(tx)-y_0}{(1-x)^\alpha t^\alpha}t\,dx \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{y(tx)-y_0}{(1-x)^\alpha}dx.\end{aligned} \tag{3.49}$$

cette dérnière égalité afirme que $\left(I_{0^+}^{1-\alpha}[y(s)-y_0]\right)(0)=0$

et donc

$$\left(I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}[y(s)-y_0]\right)(t)=y(t)-y_0 \tag{3.50}$$

D'après le lemme 1.2.2 l'intégrale $\left(I_{0^+}^{\alpha}f\right)\in C[0,\tau]$ i.e existe dans $[0,\tau]$

Appliquons l'opérateur $I_{0^+}^{\alpha}$ sur les deux membre de (1̋) et utulisons (3.50) et (1.59) on obtient l'équation (3.41) ce qui montre la nécessité.

Démontrons maintenant la suffisance.

Soit $y\in C[0,\tau]$ satisfaisant l'équation (3.41). Appliquons l'opérateur $D_{0^+}^{\alpha}$ sur les deux membres de (3.41) et utulisons le lemme 1.6.3 (avec $f(x)$ est remplacé par $f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]$) on obtient grâce à la linéarité de D_{0+}^{α} que

$$\begin{aligned}
\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(t) &= \left(D_{0+}^{\alpha}y_0\right)(t) + \left(D_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]\right)(t) \\
\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(t) - \left(D_{0+}^{\alpha}y_0\right)(t) &= f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right] \\
D_{0+}^{\alpha}\left[y(s) - y(0)\right](t) &= f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right] \\
\left({}^{C}D_{0+}^{\alpha}y\right)(t) &= f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right]
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne (1̋)

D'autre part on démontre que la condition initiale (2̋) est satisfaite. En effet :

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K(s,z,y_z)\,dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \tag{3.51}$$

Par changement de variable $s = tx$ on obtient

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{f\ \left[tx, y_{tx}, \int_0^{tx} K(tx,z,y_z)\,dz\right] tdx}{(1-x)^{\alpha}\, t^{\alpha}} \qquad (3.52) \\
&= y_0 + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{f\ \left[tx, y_{tx}, \int_0^{tx} K(tx,z,y_z)\,dz\right] dx}{(1-x)^{\alpha}}
\end{aligned}$$

A l'aide de (3.40) on trouve que $y(0) = y_0$, ce qui montre la suffisance, et donc la démonstration du théorème 3.3.1 est achevée. ■

3.3.3 Existence et unicité de la solution pour le problème du type Cauchy (1̋)-(2̋)-(3̋)

Soit

$$X = \left\{ y : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R} : y\left|_{[-\tau,0]} \in C\left([-\tau, 0], \mathbb{R}\right),\ \text{et } y\right|_{[0,\tau]} \in C\left([0,\tau], \mathbb{R}\right) \right\}. \tag{3.53}$$

Théorème 3.3.2 Soit $0 < \alpha < 1$, soit G un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Si les hypothèses (H1́)-(H2́)-(H3́) et la condition (3.40) du théorème 3.3.1 sont satisfaites alors le problème (1̋)-(2̋)-(3̋)-(4̋) admet une solution unique dans l'espace $C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \cap C([0,\tau], \mathbb{R})$

Proof. D'abord nous démontrons l'existence de la solution $y \in C[0,\tau]$. Alors d'aprés le théorème 3.3.1, il suffit de démontrer l'existence de la solution $y \in C[0,\tau]$ pour l'equation intégrale non linéaire de voltérra (3.41) . Pour démontrer le résultat dans une partie de l'intervalle $[0,\tau]$.

L'équation (3.41) a un sens dans tout intervalle $[0,\tau_1] \subset [0,\tau]$ $(0 < \tau_1 < \tau)$. Choisissons τ_1 tel que

$$(1+H^*)\frac{\tau_1^\alpha M^* l^*}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{3.54}$$

et démontrons l'existence de la solution $y \in C[0,\tau]$ pour l'équation intégrale (3.41) dans l'intervalle $[0,\tau_1]$. Pour cela on utulise le théorème du point fixe de Banach dans l'espace $C[0,\tau_1]$ dont la norme est

$$\|y\|_{C(0,\tau_1]} = \max_{t\in[0,\tau_1]} |y(t)| \tag{3.55}$$

Il est clair que $C[0,\tau_1]$ est un espace métrique complet avec la distance

$$d(y_1,y_2) = \|y_1-y_2\|_{C[0,\tau_1]} = \max_{t\in[0,\tau_1]} |y_1(t)-y_2(t)|. \tag{3.56}$$

Considérons l'opérateur $\digamma : X \to X$ définit par

$$(\digamma y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in [-\tau,0] \\ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f\left[s,y_s,\int_0^s K(s,z,y_z)dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, & \text{si } t\in[0,\tau] \end{cases} \tag{3.57}$$

Soit $x(.) : [-\tau,\tau] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } \ t\in[-\tau,0], \\ 0, & \text{si } \ t\in[0,\tau]. \end{cases} \tag{3.58}$$

Pour toute $r \in C[0,\tau]$ avec $r_0 = y_0$ on définit la fonction $\hat{r}$ par

$$\hat{r}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ t\in[-\tau,0], \\ r(t), & \text{si } \ t\in[0,\tau] \end{cases} \tag{3.59}$$

Si y satisfait l'équation intégrale (3.41) on peut décomposer $y(.)$ en $y(t) = \hat{r}(t) + x(t)$, $t \geq 0$, ce qui implique que $y_t = \hat{r}_t + x_t$, pour tout $t \geq 0$, et la fonction $r(.)$ satisfait

$$r(t) = r_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f\left[s,(\hat{r}_t+x_t),\int_0^s K\left[s,z,(\hat{r}_t+x_t)\right]dz\right]ds}{(t-s)^{1-\alpha}}. \tag{3.60}$$

Soit

$$C_0 = \{r \in C\left(\left[-\tau, 0\right], \mathbb{R}\right) \cap C\left([0,\tau], \mathbb{R}\right)\} \tag{3.61}$$

L'espace C_0 est un espace de Banach dont la norme est

$$\|r\|_{C_0} = \sup_{t\in[0,\tau]} |r(t)| \tag{3.62}$$

Soit maintenant l'opérateur $\Phi : C_0 \to C_0$ définit par

$$(\Phi r)(t) = r_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f\ \left[s, \left(\hat{r}_s + x_s\right), \int_0^s K\left[s, z, \left(\hat{r}_z + x_z\right)\right] dz\right] ds}{(t-s)^{1-\alpha}},\ t \in [0,\tau]. \tag{3.63}$$

Il est clair que l'opérateur $\mathcal{F}$ est équivalent à l'opérateur Φ et par suite comme l'opérateur $\mathcal{F}$ a un point fixe il s'ensuit que l'opérateur Φ a un point fixe et donc on applique le théorème du point fixe de Banach, (c-à-d) on va démontrer que si $r \in C[0,\tau_1]$, alors $\Phi r \in C[0,\tau_1]$; et pour tout $r_1, r_2 \in C[0,\tau_1]$ on a l'estimation

$$\|\Phi r_1 - \Phi r_1\|_{C[0,\tau_1]} \leq \omega \|r_1 - r_2\|_{C[0,\tau_1]},\ \omega = (1+H^*)\frac{\tau_1^\alpha M^* l^*}{\Gamma(\alpha+1)} < 1. \tag{3.64}$$

Puisque $y(t) \in C[0,\tau_1]$ alors $y(0) = y_0 \in C[0,\tau_1]$ et donc $r_0 \in C[0,\tau_1]$. Puisque $f(.,Y,Z) \in C[0,\tau_1]$, alors par suit du lemme 1.6.6 que l'intégrale $I_{0^+}^\alpha f$ $\in C[0,\tau_1]$ et donc $\Phi r \in C[0,\tau_1]$.

Démontrons maintenant l'estimation (3.64) en utulisant le lemme 1.6.6, on a $\Phi : C[0,\tau_1] \to C[0,\tau_1]$.Soit $r_1, r_2 \in C[0,\tau_1]$, alors :

$$\|\Phi r_1 - \Phi r_2\|_{C[0,\tau_1]} \leq \left\| I_{0^+}^\alpha \left(\left| \begin{array}{c} f\ \left[s, \left(\hat{r}_s^1 + x_s\right), \int_0^s K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^1 + x_z\right)\right] dz\right] - \\ -f\ \left[s, \left(\hat{r}_s^2 + x_s\right), \int_0^s K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^2 + x_z\right)\right] dz\right] \end{array} \right| \right) \right\|_{C[0,\tau_1]}$$

$$\leq \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left\| \left(\left| \begin{array}{c} f\ \left[s, \left(\hat{r}_s^1 + x_s\right), \int_0^s K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^1 + x_z\right)\right] dz\right] - \\ -f\ \left[s, \left(\hat{r}_s^2 + x_s\right), \int_0^s K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^2 + x_z\right)\right] dz\right] \end{array} \right| \right) \right\|_{C[0,\tau_1]}$$

$$\leq \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\begin{array}{c} l_1(s) \|\hat{r}_s^1 - \hat{r}_s^2\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} + \\ +l_2(s) \left\| \int_0^s \left[K\left[s,z,\left(\hat{r}_z^1 + x_z\right)\right] - K[s,z,\left(\hat{r}_z^2 + x_z\right)]\right] dz \right\|_{C[0,\tau_1]} \end{array} \right)$$

et comme

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^s \left[K\left[s, z, \left(\hat{r}_z^1 + x_z\right)\right] - K[s, z, \left(\hat{r}_z^2 + x_z\right)]\right] dz \right\|_{C[0,\tau_1]} \leq \\
\leq & \int_0^s \left\| \left[K\left[s, z, \left(\hat{r}_z^1 + x_z\right)\right] - K[s, z, \left(\hat{r}_z^2 + x_z\right)]\right] \right\|_{C[0,\tau_1]} dz \\
\leq & \int_0^s H\left(s, z\right) \left\| \hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} dz \\
\leq & \left(\sup_{s \in [0,\tau_1]} \int_0^s H\left(s, z\right) dz \right) \left\| \hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
\leq & H^* \left\| \hat{r}_z^1 - \hat{r}_z^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left\| \Phi r_1 - \Phi r_2 \right\|_{C[0,\tau_1]} &\leq \frac{\tau_1^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} \left(l_1\left(s\right) + l_2\left(s\right) H^*\right) \left\| \hat{r}_s^1 - \hat{r}_s^2 \right\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{\tau_1^\alpha M\left(s\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} \left(l_1\left(s\right) + l_2\left(s\right) H^*\right) \left\| r_1 - r_2 \right\|_{C[0,\tau_1]} \\
&\leq \frac{\tau_1^\alpha M^* l^*}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} \left(1 + H^*\right) \left\| r_1 - r_2 \right\|_{C[0,\tau_1]}
\end{aligned}$$

Ce qui implique l'estimation (3.64), et de (3.54) on a $0 < \omega < 1$, et alors P est un opérateur contractant dans $C[0, \tau_1]$ et d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique $y^*\left(t\right) \in C[0, \tau_1]$ pour l'équation (3.41) dans l'intervalle $[0, \tau_1]$.

On considère maintenant l'intervalle $[\tau_1, \tau_2]$, où $\tau_2 = \tau_1 + h_1$, $h_1 > 0$ et $\tau_2 < \tau$.On peut écrire l'équation (3.41) sous la forme

$$\begin{aligned}
y\left(t\right) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^{\tau_1} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K\left(s, z, y_z\right) dz\right] ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_{\tau_1}^{t} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K\left(s, z, y_z\right) dz\right] ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Puisque la fonction $y\left(t\right)$ est bien définie sur l'intervalle $[0, \tau_1]$, on peut la mettre comme une fonction connue :

$$y_{01} = y_0 + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^{\tau_1} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K\left(s, z, y_z\right) dz\right] ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}} \tag{3.66}$$

et l'équation (3.65) devient

$$y\left(t\right) = y_{01} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_{\tau_1}^{t} \frac{f\ \left[s, y_s, \int_0^s K\left(s, z, y_z\right) dz\right] ds}{\left(t-s\right)^{1-\alpha}} \tag{3.67}$$

et de la même manière on déduit qu'il existe une solution unique $y^*(t) \in C[\tau_1, \tau_2]$ pour l'équation (3.41) dans l'intervalle $[\tau_1, \tau_2]$. Si on prend l'autre intervalle $[\tau_2, \tau_3]$ où $\tau_3 = \tau_2 + h_2$, $h_2 > 0$ et $\tau_3 < \tau$, et repétons ce processus, on conclut qu'il existe une solution unique $y(t) = y^*(t) \in C[0, \tau]$ pour l'équation intégrale de voltérra (3.41) dans l'intervalle $[0, \tau]$ et donc pour le problème $(\H{1})$-$(\H{2})$-$(\H{3})$-$(\H{4})$ dans l'espace C_0.

Pour terminer la preuve du théorème 3.3.2 , on doit démontrer que ${}^C D_{0^+}^{\alpha} y \in C[0, \tau]$, pour une certaine solution unique $y(t) \in C[0, \tau]$. On sait d'après le théorème du point fixe que la solution unique $y(t)$ est obtenue comme une limite d'une suite convergente $y_m(t) \in C[0, \tau]$, (i,e) :

$$\lim_{m \to +\infty} \|y_m - y\|_{C[0,\tau]} = 0 \tag{3.68}$$

avec le choix d'une certaine y_m dans un certain intervalle $(0, \tau_1], .., [\tau_{l-1}, \tau]$. En effet. d'après (1) et les hypothèses (H$\acute{1}$)-(H$\acute{2}$)-(H$\acute{3}$) on a

$$\begin{aligned} \left\|{}^C D_{0^+}^{\alpha} y_m - {}^C D_{0^+}^{\alpha} y\right\|_{C[0,\tau]} &= \left\| f\left[t, y_t^m, \int_0^t K(t, s, y_s^m)\, ds\right] - f\left[t, y_t, \int_0^t K(t, s, y_s)\, ds\right]\right\|_{C[0,\tau]} \\ &\leq l_1(t) \|y_t^m - y_t\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\ &\quad + l_2(t) \left\| \int_0^t [K(t, s, y_s^m) - K(t, s, y_s)] ds \right\|_{C[0,\tau]} \\ &\leq l_1(t) \|y_t^m - y_t\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} + l_2(t) H^* \|y_s^m - y_s\|_{C([-\tau,0],\mathbb{R})} \\ &\leq l^* M^* (1 + H^*) \|y_m - y\|_{C[0,\tau]} \end{aligned}$$

la relation (3.68) affirme que

$$\lim_{m \to +\infty} \left\|{}^C D_{0^+}^{\alpha} y_m - {}^C D_{0^+}^{\alpha} y\right\|_{C[0,\tau]} = 0, \tag{3.69}$$

et donc $\left({}^C D_{0^+}^{\alpha} y\right)(t) \in C[0, \tau]$. Alors le problème $(\H{1})$-$(\H{2})$-$(\H{3})$-$(\H{4})$ admet une solution unique dans l'espace C_0, et la preuve du théorème 3.3.2 est terminée. ■

Conclusion

Les équations aux dérivées fractionnaires ont été introduites dans la modélisation des processus physiques, ce qui assure une prise en compte plus réaliste de l'évolution des phénomènes en général.

Notre travail consiste à prouver l'existence et l'unicité de solution d'une équation différentielle fractionnaires non linéaire du type voltérra à retard avec une condition initiale qui dépend de la nature de la dérivée fractionnaire , cette condition permet d'établir la non-linearité de l'équation intégrale équivalente du type Volterra. Pour cette raison, on a appliqué le Théorème du point fixe de Banach pour prouver l'existence et l'unicité de la solution dans deux cas :

Cas de la dérivée de Riemann-Liouville : dans ce cas nous avons traité le problème frationnaire dans l'espace de fonctions sommables. Nous avons imposé quelques hypothèses sur f et K permettant la réduction du problème fractionnaire avec retard à une équation intégrale.

Pour le cas de la dérivée fractionnaire de Caputo nous avons traité le problème frationnaire dans l'espace de fonctions sommables. Puis dans l'espace de fonctins continues, de la même manière que celles de Riemann-Liouville.

Problème ouvert

Dans ce paragraphe nous présentons un problème ouvert et nous essayerons de donner quelques conjectures ou des idées de résolution de ce problème.

Soit le problème différentiel fractionnaire non linéaire du type voltérra avec retard dans un intervalle fini $[0, \tau]$ suivant :

$$D_{0^+}^{\alpha}\left[y(t) - g(t, y_t)\right] = f\left[t, y_t, \int_0^t K(t, s, y_s)\, ds\right], \; t \in (0, \tau], \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

$$I_{0^+}^{1-\alpha} y\left(0^+\right) = \tau, \; \tau \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$y(t) = \varphi(t), \qquad t \in [-\tau, 0] \quad (3)$$

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0] \quad (4)$$

où f et K sont des fonctions non linéaires et $y_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ sont des fonctions définies par $y_t(\theta) = y(t + \theta), \; \theta \in [-\tau, 0]$. Ici l'élément $y_t(\theta)$ est la partie historique de l'état qui indique le retard du temps $-\tau$ au temps présent t.

Définition [4] La fonction y est dite solution du problème (1)-(2)-(3)-(4) si y satisfait l'équation (1), la condition initiale (2) dans $(0, \tau]$, et la condition (3) et (4) dans $[-\tau, 0]$.

Théorème de point fixe (de schauder) [1] Soit (X, d) un espace métrique complet et soit D un sous-ensemble convexe fermé de X. Si $T : X \to X$ est une application et D est relativement compact dans X, alors l'opérateur T admet au moins un point fixe $x^* \in D$

$$Tx^* = x^*.$$

Conjecture Pour étudier l' existence de la solution pour le problème posé dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville et le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo où $0 < \alpha < 1$. On va mettre quelques hypothèses et des conditions qui permettent d'appliquer le *Théorème de point fixe de schauder* et à l'aide des résultats que nous avons obtenu dans notre travail, nous essayeonsr de prouver l'existence de solutions dans un espace convenable que l'on définira.

Bibliographie

[1] **Anatoly A. Kilbas, Hari M. Srivastava and Juan J. Trujillo.,** Theory and Aplications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Stadies 204, Jan van Mill, Elsevier 2006

[2] **Khaled M. Furati and Nasser-eddine Tatar.**, An Existence Result for a Nonlocal Fracional Differential Problem, Journal of Fractional Calculus (ISSN 0918-5402) Vol. 26, November (2004), 43 - 51.

[3] **O.K. Jaradat, et al.,** Existence of the mild solution for fractional semilinear initial value problems, Nonlinear Analysis (2007), doi : 10.1016/j.na.2007.09.008.

[4] **A. Belarbi, M. Benchohra and A. Ouahab.**, Uniqueness results for functional differential equations with infinite delay in Fréchet spaces, Applicable Analysis Vol. 85, No. 12, December 2006, 1459−1470.

[5] **Wei Lin.,** Global existence theory and chaos control of fractional differentialequations, J. Math. Anal. Appl. 332 (2007) 709−726.

[6] **Cheng Yu, Guozhu Gao.**, On the solution of nonlinear fractional order differential equation, Nonlinear Analysis, 2005 Elsevier Ltd. doi : 10.1016/j.na.2005.01.008.

[7] **Maria Meehan and Donal O'regan.**, Existence theory for nonlinear volterra integrodifferential and integral equations, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 31, No. 3/4, pp. 317−341,1998 Elsevier Science Ltd.

[8] **A. A. Kilbas and S. A. Marzan.**, Nonlinear Differential Equations with the Caputo Fractional Derivative in the Space of Continuously Differentiable Funcyions, Differential Equations, Vol. 41, No. 1, 2005, pp. 84−89.

[9] **Kai Diethelm.**, Analysis of Fractional Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 265, 229−248 (2002) doi : 10.1006/jmaa.2000.7194.

[10] **N. Hayak, J. Trujillo, M. Rivero, B. Bonilla, J.C. Moreno.**, An Extention of Picard-Lindelöff Theorem to Fractional Differential Equations, Applicable Analysis. Vol. 70(3−4), pp. 347−361.

[11] **Zhang Shuqin.**, Existence of solution for a boundary value problem of fractional order, Acta Mathematica Scientia 2006,26B(2) :220−228

[12] **Dajun Guo.**, Solution of Nonlinear Integrodifferential Equations of Mixed Type in Banach Spaces., Journal of Applied Mathematics and Simulation Volume 2, Issue 1.

[13] **Kochubei, A. N.**, Cauchy problem for equations of fractional order, Differentsial'nye Uravnenija, 25(8), (1989) 1359-1368.

[14] **Kochubei, A. N.**, The Cauchy Pproblem for evolution equations of fractional order, Differ. Equat., 25(8), (1989) 967-974.

[15] **Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V.**, Elements of Theory of Functions and Functional Analysis, Bibfismat, Dover, New York, 1984.

[16] **Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V.**, Fundamentals of the Theory of Functions and Functional Analysis, Nauka, Moscow, 1968.

[17] **Mittag-Leffler, G. M.**, Sopra la funzione Ea(x), Rend. Accad. Lincei, ser. 5, 13, (1904) 3-5.

[18] **Mittag-Leffler, G. M.**, Sur la nouvelle function Ea, C.R. Acad. Sci. Paris, 137, (1903) 554-558.

[19] **Mittag-Leffler, G. M.**, Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene, Ada Math., 29, (1905) 101-182.

[20] **Nikol'Skii, S. M.**, Course of Mathematical Analysis (Russian), vol. 1-2, Nauka, Moscow, 1983.

[21] **Pitcher, E. and Sewell, W. E.**, Existence theorems for solutions of differential equations of non-integral order, Bull. Amer. Math. Soc, 44(2), (1938) 100-107.

[22] **Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I.**, Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[23] **V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov,** Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1989.

[24] **Wiman, A.**, Uberden fundamentalsatz in der theorie der funktionen Ea(x), Ada Math., 29, (1905) 191-201.

[25] **X. Z. Liu, D. J. Guo,** Initial value problems for first order impulsive integro-differential equations in Banach spaces, Comm. Appl. Nonlinear Anal. $2\,(1995)\,,\,65-83$.

[26] **Y. Rogovchenko,** Impusive evolution systems : main results and new trends, Dynamics Contin. Discrete.Impulsive Sys., $(1997)\,,\,57-88$.

[27] **Agarwal, R. P.**, A propos d'une note de M. Pierre Humbert, C. R. Acad. Sci. Paris, 236(21), (1953) 2031-2032.

[28] **Agarwal, R. and O'regan, D**.(Eds.), Integral and Integro-Differential Equations, in Nonlinear Analysis and Applications, Gordon and Breach, 1999.

[29] **Al-Abedeen, A. Z. and Arora, H. L**., A global existence and uniqueness theorem for ordinary differential equation of generalized order, Canad. Math. Bull, 21(3), (1978) 267-271.

[30] **Al-Abedeen, A. Z**., Existence theorem on differential equation of generalized order, Al-Rafidain J. Sci. Mosul University Iraq, 1, (1976) 95-104.

[31] **Al-Bassam, M. A**., On fractional analysis and its applications, in : MANOCHA, H. L. (Ed.), Modern Analysis and its Applications, Prentice-Hall, New Delhi, 1983, 269-307.

[32] **Al-Bassam, M. A.,** Some existence theorems on differential equations of generalized order, J. Reine Angew. Math., $\mathbf{218}\,(1)\,,\,(1965)\;70-78$.

[33] **Alfimov, G. L., Usero, D., and Vazques, L**., On complex singularities of solutions of the equation $HU_x - U + U^p = 0$, Physica A, 33(38), (2000) 6707-6720.

[34] **Ali, I., Kiryakova, V., and Kalla, S. L**., Solutions of fractional multi-order integral and differential equations using a Poisson-type transform, J. Math. Anal. Appl, 269(1), (2002) 172-199.

[35] **Al-Saqabi, B. N**., Solution of a class of differintegral equations by means of Riemann-Liouville operator, J. Fract. Calc, 8, (1995) 95-102.

[36] **A. M. Samoilenkp, N. A Perestyuk ;** Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1995.

[37] **Anastasio, T. J.**, The fractional-order dynamics of Brainstem Vestibulo-Oculomotor neurons, Biol. Cybernet, 72(1), (1994), 69-79.

[38] **Atanackovic, T. M. and Stankovic, B.**, Dynamics of a viscoelastic rod of fractional derivative type, Z. Angew. Math. Mech., 82(6), (2002) 377-386.

[39] **A. Zavalishchion,** Impulsive dynamic systems and applications to mathematical economic, Dynamic System Appl., 3 (1994), $443-449$.

[40] **Bagley, R. L. and Torvik, P. J.**, On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, J. Rheol., 30(1), (1986) 133-155.

[41] **Barrett, J. H.**, Differential equations of non-integer order, Canad. J. Math., 6(4), (1954) 529-541.

[42] **Bhatt, S. K.**, An existence theorem for a fractional control problem ,J. Optimization Theory Appl., 11, (1973) 378-385.

[43] **Bonilla, B., Kilbas, A. A., and Trujillo, J. J.**, Fractional order continuity and some properties about integrability and differentiability of real functions, J. Math. Anal. Appl., 231(1), (1999) 205-212.

[44] **Bonilla, B., Rivero, M., and Trujillo, J. J.**, Theory of systems of linear differential equations of fractional order. Applications (Preprint), Depto. Andlisis Matemdtico (Universidad de La Laguna), (2005).

[45] **Buckwar, E. and Luchko, Y. F.**, Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations, J. Math. Anal. AppL, 227(1), (1998) 81-97.

[46] **Campos, L. M.**, On the solution of some simple fractional differential equations, Int. J. Math. Math. Sci., 13(3), (1990) 481-496.

[47] **Carracedo, C. M. and Alix, M. S.**, The Theory of Fractional Powers of Operators, vol. 187 of North-Holland Mathematical Studies, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York, 2001.

[48] **Diethelm, K.**, Fractional differential equations. Theory and numerical treatment, 2000, (Preprint).

[49] **D. J. Guo, X.Z.Liu ;** Extremal solutions of nonlinear impulsive integro-differential equations in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 177 (1993) , $538-553$.

[50] **D.R. Smart,** Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[51] **Dzherbashyan, M. M.**, Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhauser-Verlag, Berlin, 1993.

[52] **Dzherbashyan, M. M.**, Integral Transforms and Representations of Functions in Complex Domain, Nauka, Moskow, 1966.

[53] **Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F.,** Higher Transcendental Functions, vol. I-III, Krieger Pub., Melbourne, Florida, 1981.

[54] **Erugin, N. P.**, Reading Book on General Course of Differential Equations, Naukai Tekhnika, Minsk, 1970.

[55] **Humbert, P.**, Quelques resultas relatifs a la fonction de Mittag-Leffler, C. R. Acad. Sci. Paris, 236, (1953) 1467-1468.

[56] **Humbert, P. and Agarwal, R. P.**, Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelquesunes de ses generalisations, Bull. Sci. Math., 77(2), (1953) 180-185.

[57] **J. H. Liu,** Nonlinear impulsive evolution equations, Preprint.

[58] **J.K. Hale,** Theory of Functional Differential Equations. Springer Verlag, New York, 1977.

[59] **Kempfle, S., Schaefer, L, and Beyer, H**., Functional calculus and a link to fractional calculus, Fract. Calc. Appl. Anal, 5(4), (2002) 411-426.

[60] **Kilbas, A. A**., Some problems in the theory of integral and differential equations of fractional order, in : SAMKO, S., LEBRE, A. and DOS SANTOS, A.F. (Eds.), Factorization, Singular Operators and Related Problems, Kluwer Acad. Publ., London, 2003, 131-149.

[61] **Kilbas, A. A**., Some aspects of differential equations of fractional order, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis. Nat, 98(1), (2004) 27-38.

[62] **Wolfgang Walter**, Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1998