

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI
MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des sciences de l'ingénieur
Département d'électronique

Année : 2006

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de magister

**Commande prédictive généralisée robuste
Etude et application**

Option :
Automatique industrielle

par :
Debbeh Abdesslem

Directeur du mémoire : Mr ABBASSI Hadj Ahmed Professeur UBMA

DEVANT LE JURY

Président : Djeghaba Messaoud Professeur UBMA

Rapporteur : Abbassi Hadj Ahmed Professeur UBMA

Examineurs: Labar Hocine Maître de conférences UBMA

Ahmida Zahir Maître de conférences U.Skikda

Remerciements

L'aboutissement de ce travail de mémoire a été possible grâce à la collaboration d'un groupe de personnes, auxquelles je dois exprimer mes remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier M. H.A. Abbassi pour m'avoir proposé ce sujet, aussi pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger mon travail, pour sa grande disponibilité ainsi que pour les précieux conseils qu'il a su me donner pendant ces deux années.

Ma gratitude s'adresse également à M. M.L.Saidi de m'avoir guidé tout au long de ces quelques années, aussi pour le temps précieux qu'il m'a accordé et pour m'avoir secouru quand il le fallait. J'avoue que j'ai toujours attendu avec une grande impatience ses remarques. Les nombreuses discussions que nous avons eu sur la commande prédictive et le simulateur de conduite ont été déterminantes dans ma recherche.

Je remercie les membres de jury d'avoir bien voulu être rapporteurs et examinateurs de ce travail. Leurs disponibilités ont rendu cette soutenance possible.

Je souhaite aussi remercier ici ma famille et mes amis pour leur soutien. J'adresse aussi ma sympathie à tous mes collègues du département d'automatique, à tout ceux qui m'ont apporté leur aide, à un moment ou autre : le personnel administratif et de la bibliothèque.

Résumé

Ce travail réside dans l'utilisation de spécifications temporelles pour la synthèse d'une robustification de lois de commande prédictive par la paramétrisation de Youla. Cet aspect a permis d'aboutir à une méthodologie pour laquelle le compromis robustesse/performance est facile à ajuster. Donc, On a présenté une méthode de robustification de lois de commande prédictive, notamment de la commande prédictive généralisée (GPC), basée sur la paramétrisation de Youla. Dans une première partie, on aborde la commande GPC multivariées, et GPC sous contraintes, ses caractéristiques de robustesse, la structure du régulateur polynomial RST équivalent. Dans une deuxième partie, on aborde les méthodes classiquement utilisées pour robustifier ce type de commande. Il est ensuite étudié la paramétrisation de Youla. Cet outil paramètre la classe des correcteurs stabilisants un système, et permet l'obtention de spécifications convexes en boucle fermée. Ces caractéristiques de la paramétrisation de Youla sont utilisées pour traduire le problème de robustification d'un correcteur en un problème d'optimisation convexe. Ce problème d'optimisation étant défini dans un espace de dimension infinie, en l'occurrence l'espace de l'ensemble des systèmes stables, une solution sous-optimale appartenant à un sous espace généré par une base orthornormale est obtenue de façon numérique. Des spécifications de performance nominale et de robustesse en stabilité face à des incertitudes non structurées sont utilisées. Ces spécifications peuvent être exprimées soit par des critères fréquentiels, soit par des contraintes temporelles. Les contraintes temporelles, exprimées au moyen de gabarits, permettent d'ajuster de façon visuelle le compromis entre la robustesse et la performance à obtenir lors de la robustification.

Cette méthodologie a été utilisée pour satisfaire un cahier de charge en matière de restitution de mouvement, d'un simulateur de conduite en mouvement longitudinal, comme première application.

Puis, cette méthodologie a été appliquée à la robustification du GPC qui commande la plateforme mobile d'un simulateur de conduite, contrôlée en accélération. Le régulateur GPC a été robustifié afin de diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande et de garantir une performance face à des changements de l'inertie de la charge, tout en garantissant une dynamique pour le rejet de perturbation. Les résultats sont finalement comparés à ceux obtenus avec une structure de régulation GPC standard.

Abstract

This work lies in the use of temporal specifications for the synthesis of a robust predictive control laws by the Youla parameterization. This aspect made it possible to lead to a methodology for which the compromise robustness/performance is easy to adjust.

Therefore, we were presented a methodology for enhancing the robustness of predictive control laws, particularly the Generalized Predictive Control (GPC) strategy, based on the Youla parameterization. First, the GPC, MIMO GPC and GPC with constraints, its robustness characteristic, the equivalent RST polynomial controller are presented. Second, the usual methods used to robustify SISO RST controller are presented. Then, the Youla parameterization is introduced. By means of the Youla parameterization, frequency and temporal closed loop specifications are formulated within a convex optimisation framework of all stabilising controller. This problem transformation is possible thanks to the parameterization of all stabilising controller operated by the Youla parameter. However, as this parameter belongs to an infinite dimensional space, the optimal solution can not yet be found. A sub-optimal solution belonging to a space generated by an orthonormal base is numerically deduced.

Specifications reflecting nominal performance and robustness stability using unstructured uncertainties are used. It is shown that the definition of temporal templates permits to easy adjust compromise between robustness and performance.

This methodology was used to satisfy conditions specified as regards a motion restitution, of a driving simulator in longitudinal motion, like a first application.

Then, this methodology is then applied to robustify GPC controlled motion platforme of driving simulator, including an induction motor, aiming at reducing the impact of measurement noise and inertia variation of the system while respecting a temporal template for the disturbance rejection. Comparison with the results obtained with a standard GPC structure is finally given.

Table des matières

Résumé	I
Table des matières	IV
Liste des figures	IX
Introduction	1
1 Commande prédictive GPC monovariante (algorithmique et polynomiale)	3
1.1 Le modèle	5
1.2 Le prédicteur optimal	6
1.2.1 Cas où le polynôme $C = 1$	7
1.2.2 Cas où le polynôme $C \neq 1$	8
1.2.3 Relation entre les polynômes de Diophantine pour le $C = 1$ et $C \neq 1$	10
1.3 L'algorithme de commande	10
1.3.1 Principe	10
1.3.2 Critère de performance	11
1.3.3 La loi de commande	12
1.4 Choix des paramètres de synthèse	14
1.4.1 Horizon de prédiction minimal	14
1.4.2 Horizon de prédiction maximal	14
1.4.3 Horizon de commande	15
1.4.4 Coefficient de pondération sur la commande	15
1.5 La version polynomiale de commande prédictive généralisée	16
1.5.1 La fonction de transfert de la boucle fermée	17

1.5.2 Relation entre les polynômes de régulation RST pour $C = 1$ et $C \neq 1$	18
1.6 Le rôle de polynôme C	20
1.6.1 Rôle de filtrage et d'observateur	20
1.6.2 La robustesse en stabilité	21
1.7 Application	23
1.8 Conclusion.	30
2 Commande prédictive GPC multivariable	31
2.1 Forme de représentation de modèle	32
2.2 Calcul de prédicteur optimal	33
2.3 La représentation de matrice de transfert	36
2.4 L'introduction de retard	37
2.4.1 Modèle	38
2.4.2 La matrice d'interacteur	38
2.4.3 Analyse des cas	39
2.4.3.1 Premier cas	39
2.4.3.1 Second cas.	40
2.5 Application	42
2.5.1 Généralité sur le fonctionnement	42
2.5.2 Simulation	45
2.6 Conclusion	49
3 Commande prédictive GPC sous contraintes	50
3.1 Les contraintes	51
3.2 Modélisation des contraintes	52
3.2.1 Contraintes sur l'amplitude du signal de commande.	52
3.2.2 Contrainte sur la vitesse de variation du signal de commande	53
3.2.3 Restrictions sur l'amplitude de la sortie	53
3.2.4 Restrictions sur les oscillations permises dans la sortie du système	54
3.2.5 Restrictions pour éviter des comportements de phase de non minimale	55
3.2.6 Contraintes sur l'état final atteint	55
3.3 Optimisation	55
3.3.1 La programmation quadratique	56
3.3.2 Respect des contraintes	57

3.4 Application	58
3.5 Conclusion	62
4 Les Méthodes de robustification	63
4.1 Paramétrisation de régulateur	64
4.2 Les méthodes de robustification	66
4.2.1 Approche SGPC	66
4.2.2 Approche ‘C design’	68
4.2.3 Approche ‘Q design’	69
4.2.3.1 Modèle et système stables	69
4.2.3.1 Modèle et système instables	70
4.2.4 Approche ‘ λ design’	71
4.3 Application	71
4.3.1 Généralité sur le fonctionnement	71
4.3.2 Simulation	72
4.4. Conclusion	79
5 Paramétrisation de Youla et optimisation convexe	80
5.1 La paramétrisation de Youla	81
5.2 Historique	82
5.3 Définition	83
5.3.1 Théorème 1 : Factorisation première.	83
5.3.2 Théorème 2 : Paramétrisation de Youla	84
5.4 Propriétés	84
5.5 Interprétations pour un système stable	88
5.5.1 Correcteur à un degré de liberté	88
5.5.2 Correcteur à deux degrés de liberté.	89
5.6 Introduction à l’optimisation convexe	91
5.6.1 Ensemble convexe	92
5.6.1.1 Définition	92
5.6.1.2 Interprétation géométrique	92
5.6.1.3 Propriétés	93
5.6.2 Fonction convexe	93
5.6.2.1 Définition	93

5.6.2.2	Interprétation géométrique	93
5.6.2.3	Propriétés	93
5.6.3	L'optimisation convexe	94
5.6.4	Algorithmes de résolution	95
5.7	Spécifications en boucle fermée	95
5.7.1	Motivations de la formulation des spécifications en boucle fermée.	95
5.7.2	Contraintes et critères convexes	96
5.7.3	Contrainte d'enveloppe temporelle	96
5.8	Conclusion	98
6	Commande GPC Robuste	99
6.1	Paramétrisation de régulateur RST avec deux degrés de liberté	100
6.2	Caractéristiques optimales atteignables	102
6.3	Spécifications de robustesse et performance nominale	103
6.3.1	Robustesse en stabilité - Spécifications fréquentielles	106
6.3.2	Performance nominale - Spécifications temporelles	108
6.3.3	Problème d'optimisation convexe	109
6.4	Transformation du problème en programmation linéaire	110
6.4.1	Minimisation norme H_∞	111
6.4.2	Respect d'un gabarit temporel	113
6.4.3	. Approche d'un polynôme par un transfert	114
6.5	Conclusion	116
7	Application à un simulateur de conduite	117
7.1	Description du simulateur.	118
7.1.1	La plateforme de mouvement linéaire	118
7.1.2	. Le siège	119
7.2	Validation de modèle	121
7.3	Intérêts de la restitution inertielle	
122	7.4 Recommandations pour la restitution du mouvement	
	123
7.5	Restitution de mouvement	
123		

7.5.1 Stratégie classique	124
7.5.2 Vers une structure prédictive	125
7.6 Restitution de mouvement et commande de plateforme (solution proposée)	125
7.6.1 Restitution de mouvement	125
7.6.2 Commande de la plateforme	134
7.6.2.1 Robustification face à des bruits de mesure.136
7.6.2.2 Robustification face à des bruits de mesure et à des variations de l'inertie de la charge.	141
7.7 Conclusion	151
Conclusion et Perspectives	152
Bibliographie	155

Liste des figures

Fig 1.1 : Le modèle CARIMA.	6
Fig 1.2 : La méthodologie de MPC	11
Fig 1.3 : Structure du régulateur polynomial équivalent.	17
Fig 1.4 : Système avec bruit à haute fréquence en sortie	21
Fig 1.5 : Le modèle CARIMA du système avec bruit de mesure	21
Fig 1.6 : Système bouclé pour analyse de robustesse	22
Fig 1.7 : Cas plus stable.	24
Fig 1.8 : Cas plus rapide	24
Fig 1.9 : Réponse à un échelon de consigne, à une perturbation et un bruit de mesure. . .	25
Fig 1.10 : Diagramme de Bode des transferts C/S et R/C	25
Fig 1.11 : Diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée	26
Fig 1.12 : Diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée	26
Fig 1.13 : Diagramme de Bode de transfert perturbation/sortie corrigée.	27
Fig 1.14 : Diagramme de Bode de transfert perturbation/commande corrigée	27
Fig 1.15 : Diagramme de Bode de transfert bruit /sortie (sensibilité directe) corrigée . . .	28
Fig 1.16 : Diagramme de Bode de transfert bruit /commande corrigée	28
Fig 1.17 : Diagramme de Bode de fonction de sensibilité complémentaire	29
Fig 1.18 : Diagramme de Bode de fonction de marge de robustesse	29

Fig 2.1 : Le séparateur des huiles lourdes, CV1 à CV7 sont des variables commandées, MV1 à MV3 variables de commande, MV4 et MV5 variables de commande considérées comme perturbations.	44
Fig 2.2 : Commande de Séparateur.	46
Fig 2.3 : Diminution des interactions avec un choix de Q	47
Fig 2.4 : GPC avec le prédicteur de Smith.	48
Fig 2.5 : Effet de perturbation introduit en reflux d'extrait supérieur.	48
Fig 3.1. Signal de commande avec des contraintes.	51
Fig 3.2 : Commande de séparateur avec la présence des contraintes.	59
Fig 3.3 : GPC sous contrainte avec le prédicteur de Smith.	60
Fig 3.4 : Effet de perturbation introduit en reflux d'extrait supérieur.	61
Fig 4.1 : Structure de contrôleur GPC équivalent.	64
Fig 4.2 : Le modèle pour le synthèse GPC robuste.	71
Fig 4.3 : La marge de robustesse Br pour les différentes méthodes.	72
Fig 4.4: Le module de la boucle ouverte corrigée.	73
Fig 4.5 : Le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée.	74
Fig 4.6: Réponse à un échelon de consigne, à une perturbation d'amplitude 0.1, à un bruit de mesure de variance 0.0025.	75
Fig 4.7: Le diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée.	75
Fig 4.8 : Diagramme de Bode de la marge de Robustesse et la boucle ouverte corrigée avec une dynamique négligée.	76
Fig 4.9: Réponse à un échelon de consigne, à une perturbation d'amplitude 0.1, à un bruit de mesure de variance 0.0025 avec une dynamique négligée.	77
Fig 4.10: Le diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée avec une dynamique négligée	77
Fig 4.11 : La marge de robustesse avec $W = \frac{1-0.9q^{-1}}{0.1}$	78
Fig 5.1. La Paramétrisation de Youla.	81
Fig 5.2 : Le principe de la Paramétrisation de Youla.	82
Fig 5.3 : Boucle fermée classique avec retour positif.	83
Fig 5.4 : Représentation standard paramétrisation de Youla.	85
Fig 5.5 : Représentation standard sans incertitude.	85

Fig 5.6 : Correcteur sous forme LFT.	86
Fig 5.7 : Correcteur initial modifié.	87
Fig 5.9 : Paramétrisation de Youla pour un système stable.	89
Fig 5.10 : Paramétrisation de Youla pour un système stable. Structure par modèle interne	89
Fig 5.11 : Correcteur à deux degrés de liberté	90
Fig 5.12 : Correcteur à deux degrés de liberté sous structure de bouclage standard	90
Fig 5.13 : Paramétrisation de Youla pour un système stable. Correcteur à deux degrés de liberté.	91
Fig 5.14 : Paramétrisation de Youla pour un système stable. Structure de modèle interne pour le correcteur à deux degrés de liberté.	91
Fig 5.15 : Convexité d'un ensemble.	93
Fig 5.16 : Convexité d'une fonction.	94
Fig 5.17 : Exemple de contraintes temporelles.	97
Fig 6.1 : Correcteur initial, structure modifié.	100
Fig 6.2 : Correcteur initial avec la structure du bouclage standard.	100
Fig 6.3 : Système avec régulateur RST, entrées w , d , b , et sorties ε , y , u	104
Fig 6.4 : Régulateur GPC à deux degrés de liberté avec paramétrisation de Youla	104
Fig 6.5 : Régulateur GPC à deux degrés de liberté avec Paramétrisation de Youla	105
Fig 6.6 : Formulation par blocs.	106
Fig 6.7 : Système avec incertitude additive directe.	106
Fig 6.8 : Système P bouclé par l'incertitude non structurée.	107
Tableau 6.1 : Transfert P connecté aux blocs d'incertitude non structurée.	112
Fig 6.10 : Respect de gabarit temporelle.	113
Fig 7.1 : Vue générale du simulateur de conduite de l'INRESTS –LSC.	118
Fig 7.2 : La plateforme de mouvement longitudinal.	119
Fig 7.3 : Le siège de simulateur.	120
Fig 7.4 : Validation de position.	121
Fig 7.5 : Validation de vitesse.	121
Fig 7.6 : Structure de la stratégie classique.	124

Fig 7.7 : Réponse indicielle. Les contraintes physiques en position et vitesse sont respectées127
Fig 7.8 : Consigne d'accélération qui définit pour un échelon d'accélération ($h=100$) ..	127
Fig 7.9 : Consigne d'accélération calculée par la stratégie prédictive lors d'une simulation correspondant à un démarrage.....	128
Fig 7.10 : Réponse de loi de commande prédictive : (a) sans et (b) avec l'activation de Washout.	130
Fig 7.11 : Réponse de loi de commande prédictive : (a) sans et (b) avec Washout .	131
Fig 7.12 : Réponse de la loi de commande pour un signal d'accélération en créneau ...	132
Fig 7.13 : Consigne d'accélération par la stratégie de commande lors d'un démarrage ..	133
Fig 7.14 : Réponse de la stratégie de commande lorsque la position de Washout est à 0.6m	134
Fig.7.15 : La commande en accélération de plateforme.	136
Fig 7.16 : Le rejet de perturbation obtenu avec la paramétrisation de Youla	137
Fig 7.17 : Approximation polynôme/transfert	137
Fig 7.18 : Marge de robustesse B_r	138
Fig 7.19 : Diagrammes de Bode et de Black de la boucle ouverte corrigée	139
Fig 7.20 : Réponses obtenues pour deux différents profils (b) d'accélération	140
Fig 7.21 : Signal de commande pour le deuxième profil d'accélération (détail)	140
Fig 7.22 : Simulation de correcteur initial avec variation de l'inertie de la charge	141
Fig 7.23 : Dégradation des performances nominales avec la variation de l'inertie de la charge	142
Fig 7.24 : Incertitude sur l'inertie sous forme multiplicative directe	143
Fig 7.25 : Approximation polynôme/transfert.	145
Fig 7.26 : Gabarit et rejet de perturbation obtenu avec la paramétrisation de Youla	145
Fig 7.27 : Marge de Robustesse B_r	146

Fig 7.28 : Diagramme de Bode et Black de la boucle ouverte corrigée146

Fig 7.29 : Les résultats temporels obtenus pour le premier profil147

Fig 7.30 : Les résultats temporelles obtenus pour le deuxième profil147

Fig 7.31 : Effet de bruit sur la commande pour le premier profil148

Fig 7.32 : Accélération et Position aperçus par le conducteur. 149

Fig 7.33 : Accélération et Position aperçus par le conducteur lors d'une simulation correspondant à un démarrage. 150

Introduction

Actuellement, avec les progrès observés dans le domaine des ordinateurs numériques, il est presque impossible de trouver un secteur de l'activité humaine qui ne soit touché par ce phénomène.

L'ingénierie de la commande, n'a pas échappé à ce mouvement et change rapidement avec le développement conséquent qui se produit dans le domaine numérique et, en particulier, avec la croissance de la capacité de calcul qui est accompagnée, en plus, d'une réduction de coût.

L'emploi de l'ordinateur dans les processus de commande a permis l'implantation de techniques compliquées et sophistiquées qui permettent le développement de stratégies efficaces tout en restant de coût raisonnable ce qui était pratiquement impossible d'envisager avec les mécanismes et les dispositifs précédents. Des exemples de telles techniques incluent la commande non linéaire, la commande multivariable et la commande robuste, et l'optimisation de commande.

La commande prédictive basée modèle (Spécialement Commande Prédictive Généralisée) connue plus simplement comme commande prédictive, doit aussi son origine et son développement à l'emploi de l'ordinateur dans les processus de commande.

La GPC est une des théories de commande avancée qui a été intensivement étudiée par la communauté des chercheurs, ces dernières décennies. La raison peut être attribuée au fait qu'elle permet d'inclure de manière explicite des restrictions (chapitre3) sur les variables du système dans l'étape de calcul de la loi commande ou de conception du contrôleur.

Grâce à ses concepts intuitifs et aux bons résultats obtenus, la commande prédictive a été implantée dans un grand nombre d'applications industrielles, parmi lesquelles il faut noter les processus chimiques (Chapitre 2,3), qui ont été les premiers à utiliser ce type de commande, les processus de distillation, l'industrie pétrolière et les systèmes électromécaniques tels que la commande d'axes de robot. Ces applications industrielles ont toutes un dénominateur commun : la connaissance de la trajectoire à suivre par le système dans le futur, au moins sur un certain horizon. La commande prédictive peut être appliquée aux systèmes multivariables et permet de contrôler un grand nombre de processus (instables, à retard pur, à non minimum de phase).

Pour synthétiser un correcteur satisfaisant a priori toutes les spécifications d'un cahier des charges complexe est souvent impossible. En outre, si le cahier de charge contient plusieurs contraintes et objectifs temporels et fréquentiels à vérifier (comme le notre), beaucoup de méthodes s'avèrent être peu efficace pour gérer les compromis à affecter entre ces objectifs souvent contradictoires. Certaines méthodes de synthèse assez récentes permettent de prendre en compte implicitement des spécifications lors de la phase de synthèse et de gérer certains problèmes multicritères. C'est pour cette raison que nous avons choisi de développer la méthode dite de *synthèse convexe*.

La principale originalité de ce travail réside dans l'utilisation de spécifications temporelles pour la synthèse d'une robustification de lois de commande prédictive par la paramétrisation de Youla. Cet aspect a permis d'aboutir à une méthodologie pour laquelle le compromis robustesse/performance est facile à ajuster.

Ce travail est divisé en sept chapitres qui sont décrits brièvement dans la suite. **Chapitre 1** présente la commande GPC mono-variable, algorithmique et polynomiale. **Chapitre 2** présente la commande prédictive multi variable avec un exemple illustratif connu sous le nom *heavy oil fractionator*. **Chapitre 3** présente la commande prédictive sous contraintes avec le même exemple illustratif que le chapitre 2. **Chapitre 4** présente les méthodes utilisées dans la littérature pour améliorer la robustesse des correcteurs sous une structure RST. **Chapitre 5** présente la paramétrisation de Youla, ainsi que ses principes et propriétés. **Chapitre 6** développe la méthode proposée pour la robustification d'une commande GPC. **Chapitre 7**, la méthodologie originale de robustification de la structure GPC proposée au chapitre 6, est ici appliquée un simulateur de conduite de INRESTS et LSC. Il s'agit d'évaluer l'intérêt et la possibilité d'unifier la restitution de mouvement et la commande de plateforme en se basant sur cette méthodologie dite **robuste**.

Chapitre 1

Commande prédictive GPC monovariante

(algorithmique et polynomiale)

Introduction

Les techniques de commande prédictive (MPC) (Model Predictive Control) constituent des outils puissants pour affronter le problème de commande avec restrictions. Une synthèse sur ces méthodes où sont exposées les caractéristiques les plus représentatives peut être trouvée dans Camacho et Bordons (1998) et dans Maciejowski (2002), Clarke et Mohtadi (1987).

Le MPC est une technique de commande pour systèmes à dynamique relativement lente ou, du moins, compatible avec le fait qu'à chaque temps d'échantillonnage le signal de commande découle de la résolution d'un problème d'optimisation et pour cela doit aussi son origine et son développement à l'emploi de l'ordinateur dans les processus de commande.

La commande prédictive constitue un domaine ample et varié et intègre des disciplines comme la commande optimale, la commande multivariante et la commande avec contrainte. Les avantages les plus importants que le MPC présente par rapport à d'autres méthodes sont les suivants :

- Il peut être employé pour contrôler une grande variété de processus, des systèmes avec un comportement relativement simple à d'autres qui présentent un comportement dynamique peu habituel comme ceux avec de grands retards, oscillant fortement, de phase

non minimale ou instables. Également les systèmes multivariables et non linéaires rentrent dans le domaine d'application d'une telle approche.

- Il possède intrinsèquement la compensation de retard et la compensation par anticipation (feedforward) de perturbations mesurables.
- Le traitement des restrictions peut être inclus systématiquement pendant le développement de la conception et de l'implantation du contrôleur.
- Les concepts manipulés sont intuitifs et peuvent être assimilés par un personnel sans connaissance profonde en commande.

A côté de tous ces avantages, restent quelques inconvénients associés. L'un d'eux est la charge nécessairement élevée de calcul: la résolution des algorithmes numériques en ligne nécessite un volume et un temps de calcul plus grands que ceux impliqués, par exemple, par la mise en œuvre de contrôleurs classiques de type PID. Un autre inconvénient est dû au fait qu'il est nécessaire d'avoir un modèle approprié du processus. L'approche de commande prédictive est basée sur la connaissance d'un modèle et donc, les performances obtenues dépendront des écart existant entre le vrai processus et le modèle utilisé.

Néanmoins à l'heure actuelle, nombreux sont les travaux ainsi que le nombre d'applications des contrôleurs prédictifs fonctionnant avec succès dans l'industrie des processus. Les avancées technologiques et l'utilisation de l'ordinateur a permis l'implantation de techniques plus compliquées et sophistiquées, ce qui a permis le développement de l'approche MPC. Parmi les aspects qui ont permis le développement du MPC notons :

- Les techniques de modélisation et d'identification qui sont maintenant diverses et puissantes. Il est, en particulier, possible de travailler dans des environnements défavorables avec un rapport signal sur bruit faible.
- Les techniques de commande robuste permettent l'utilisation d'algorithmes MPC où est intégré un modèle d'incertitudes.
- Les calculateurs numériques sont chaque jour plus rapides et permettent l'exécution en ligne d'algorithmes plus complexes tels que ceux abordant l'optimisation avec des contraintes.

Le MPC n'est pas une stratégie spécifique de commande mais c'est une méthodologie développée autour de certaines idées communes. Les principes qui apparaissent à un degré plus ou moins élevé dans les classes de la commande prédictive sont basiquement les suivants :

- Utilisation du modèle du système pour prévoir la sortie du système à de futurs moments du temps.
- Calcul des actions optimales de commande basé sur la minimisation d'une ou plusieurs fonctions de coût ce qui peut inclure des restrictions sur les variables du processus.
- La stratégie de l'horizon mobile, c'est-à-dire, à chaque itération et en se servant d'un modèle du processus, des futures consignes sur un certain horizon d'une fonction objectif, les futurs changements de la commande sont calculés en prenant en compte des restrictions qui agissent sur le processus. Finalement, seulement le premier signal de commande est appliqué au système, rejetant le reste et déplaçant l'horizon vers le futur, répétant les calculs dans la période suivante.

Les divers algorithmes, membres de la famille des MPC (appelée également LRPC - long range prédictive control), diffèrent seulement par le type de modèle à utiliser pour représenter le processus et les perturbations, la fonction de coût à optimiser, la prise en compte des contraintes. Ce type de commande est de nature "boucle ouverte", mais apparaît un aspect de "boucle fermée" intermittente à chaque itération de calcul.

1.1. Le modèle

Dans cette section, on présente le modèle CARIMA (Controlled Autoregressive and Integrated Moving Average) employé dans l'algorithme GPC de D.w.Clarke [DW87] et [DW89]. On considère un modèle localement linéaire défini par :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{1}{\Delta} C(q^{-1})\zeta(t) \quad (1.1)$$

Où : $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$ sont des polynômes en q^{-1} .

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

$y(t)$ est la sortie mesurée, $u(t)$ la commande, $\zeta(t)$ le signal de perturbation.

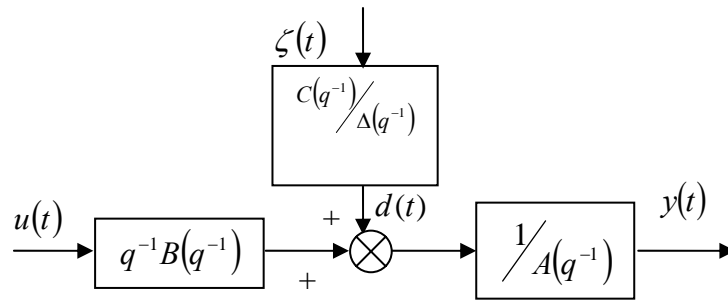


Fig 1.1 : Le modèle CARIMA

Les polynômes A , B spécifient le système à contrôler. C'est pourquoi leurs déterminations rigoureuses conditionnent directement les performances de la méthode de commande utilisée (GPC). L'introduction de $\Delta = 1 - q^{-1}$ dans le modèle de bruit assure une action intégrale dans le correcteur et permet, donc, d'annuler toute erreur statique vis-à-vis d'une entrée ou d'une perturbation en échelon. L'utilisation de ce modèle de perturbation est en fait une conséquence de la présence de perturbations de charge en échelon dans de nombreux processus industriels, celui-ci garantissant donc un comportement avec une erreur statique nulle face aux perturbations considérées. Ceci est une conséquence directe du principe du modèle interne. Ce principe dit que pour contrôler un système avec des perturbations instables, la dynamique de la perturbation doit apparaître dans la dynamique du régulateur.

Ici plusieurs interprétations de terme de perturbation ζ et du polynôme C dans le modèle CARIMA ont pu être utiles pour de futures conceptions :

- Avec $C=I$ et $\zeta(t)$ une séquence d'impulsions, la perturbation peut être considérée en tant qu'une séquence aléatoire agissant essentiellement sur l'entrée de système.
- Quand $\zeta(t)$ est une séquence des variables aléatoires indépendants.
- $C(q^{-1})$ peut être un polynôme fixé (le cas non optimale, mais bonne conception, peut assurer des bonnes propriétés telles que la robustesse face à des dynamiques non modelées). Un prédicteur basé sur ce modèle aura alors des propriétés d'optimalité.

1.2. Le prédicteur optimal

Soit à calculer des prédicteurs de la sortie du processus à contrôler, $y(t)$, avec un pas ou indice de prédiction j . La quantité $\hat{y}\left(t + \frac{j}{t}\right)$ fera référence au prédicteur de la sortie, du

processus ,calculée à l'instant courant t , depuis l'instant $t + N_1$ ($j = N_1$), jusqu'à l'instant $t + N_2$ ($j = N_2$). Donc la quantité $\hat{y}\left(\frac{t+j}{t}\right)$ représente en fait une série de $N_2 - N_1 + 1$ prédictions (ou prévisions) de la sortie y , ces prévisions étant calculées à l'instant courant t .

Sachant que le signal de commande $u(t)$ va agir sur la sortie $y(t+k)$, l'algorithme de la méthode GPC, anticipant le comportement futur du processus (par le biais du calcul de prédicteur), générera un signal de commande adéquat en vue de stabiliser le système .

La valeur de la sortie à l'instant $t + j$ est compte tenu de (1.1)

$$y(t+j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t+j-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})} \zeta(t+j) \quad (1.2)$$

Le terme $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})} \zeta(t+j)$ peut être décomposé en une partie dépendante des valeurs futures de ζ et en une deuxième partie dépendante des valeurs passées de ζ , donc pour pouvoir obtenir l'expression du prédicteur (à j pas) , on pose que :

$$C(q^{-1}) = E_j(q^{-1})A(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (1.3)$$

Cette équation (1.3) est appelée : *Equation de Diophantine*.

1.2.1. Cas où le polynôme $C = 1$

Notons que l'équation Diophantine (1.3) peut être résolue de façon itérative [PB96]. Dans la plupart des cas, afin de simplifier le calcul de la loi de commande, dans le modèle de base décrit par l'équation (1.3), le polynôme C est pris égal à l'unité ($C = 1$).

Pour obtenir la quantité $y(t+j)$, on multiplie l'équation (1.1) par la quantité $E(q^{-1})\Delta(q^{-1})q^j$ on aura :

$$A(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})y(t+j) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + E_j(q^{-1})q^j\zeta(t)$$

(1.4)

Sachant que $\zeta(t)q^j = \zeta(t+j)$, on obtient :

$$A(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})y(t+j) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (1.5)$$

Les polynômes $E_j(q^{-1})$ et $F_j(q^{-1})$ sont tels que :

- Le degré du polynôme $E_j(q^{-1})$ est égale à $j-1$, quelque soit la valeur du pas de prédiction j , $\deg E_j = j-1 \quad \forall j \in [N_1, N_2]$.

- Le degré du polynôme $F_j(q^{-1})$ est égale à celui du polynôme A , quelque soit la valeur du pas de prédiction j , $\deg F_j = na \quad \forall j \in [N_1, N_2]$.

D'après l'équation (1.3) $E_j(q^{-1})A(q^{-1})\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-j}F_j(q^{-1})$

En remplaçant la quantité $E(q^{-1})A(q^{-1})\Delta(q^{-1})$ par son expression, ci avant dans l'équation (1.5), on obtient :

$$(1 - q^{-j}F_j(q^{-1}))y(t+j) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + E_j(q^{-1})\zeta(t+j)$$

D'où

$$y(t+j) = F_j(q^{-1})y(t) + B(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (1.6)$$

En posant une autre équation Diophantine :

$$B(q^{-1})E_j(q^{-1}) = G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) \quad (1.7)$$

$G_j(q^{-1})$ et $H_j(q^{-1})$ sont donnés par la résolution de l'équation diophantienne précédente avec :

$$\deg G_j(q^{-1}) = j$$

$$\deg H_j(q^{-1}) = nb - 2$$

Donc l'équation (1.6) devient :

$$y(t+j) = F_j(q^{-1})y(t) + G_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + q^{-j}H_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (1.8)$$

Dans l'équation (1.8), le terme $\zeta(t+j)$ spécifie une séquence ($j = N_1, N_2$) de perturbations aléatoire futures. Etant donné qu'une perturbation future est imprévisible, tant par sa survenue que par son intensité, on pose que le prédicteur du terme $\zeta(t+j)$ est nul, car le prédicteur de tout variable aléatoire est nul.

Au niveau d'équation (1.8), mis à part le terme $\zeta(t+j)$ (qui est un terme aléatoire), tous les autres termes, sont des quantités déterministes. Etant donné que toute quantité déterministe est égal à la quantité déterministe en question. On déduit à partir de l'équation (1.6) que le prédicteur de la quantité $y(t)$ est tel que :

$$\hat{y}(t+j/t) = F_j(q^{-1})y(t) + G_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + H_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t-1) \quad (1.9)$$

Le prédicteur optimal est enfin défini en considérant que la meilleure prédiction de bruit dans le futur et sa moyenne sont nulles.

1.2.2. Cas où le polynôme $C \neq 1$

Quand le polynôme C de l'équation (1.1) n'est égale pas à l'unité, la prédiction change légèrement. Pour calculer le prédicteur dans cette situation, l'équation de Diophantine (1.3) est résolue. On multiplie l'équation (1.1) par la quantité $E(q^{-1})\Delta(q^{-1})q^j$ on aura :

$$A(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})y(t+j) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + C(q^{-1})E_j(q^{-1})q^j\zeta(t) \quad (1.10)$$

Sachant que $\zeta(t)q^j = \zeta(t+j)$, on obtient :

$$A(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})y(t+j) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + C(q^{-1})E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (1.11)$$

En remplaçant la quantité $E(q^{-1})A(q^{-1})\Delta(q^{-1})$ par son expression, ci avant dans l'équation (1.11), on obtient :

$$(C(q^{-1}) - q^{-j}F_j(q^{-1}))y(t+j) = B(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + C(q^{-1})E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (1.12)$$

D'où

$$C(q^{-1})y(t+j) = F_j(q^{-1})y(t) + B(q^{-1})E_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + C(q^{-1})E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (1.13)$$

En développant (1.13), on obtient :

$$y(t+j) = \frac{F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) + \frac{B(q^{-1})E_j(q^{-1})}{C(q^{-1})}\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (1.14)$$

Le terme qui multiplie la commande peut être divisé en deux parties ; de cette façon, on fait apparaître les commandes passées et futures. On a :

$$y(t+j) = \frac{F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) + G_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + \frac{H_j(q^{-1})}{C(q^{-1})}\Delta(q^{-1})u(t-1) + E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (1.15)$$

$G_j(q^{-1})$ et $H_j(q^{-1})$ sont donnés par la résolution de l'équation diophantienne suivante :

$$B(q^{-1})E_j(q^{-1}) = G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) \quad (1.16)$$

Le prédicteur optimal est enfin défini en considérant que la meilleure prédiction du bruit dans le futur et sa moyenne sont nulles, donc :

$$\hat{y}(t+j/t) = \frac{F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) + G_j(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t+j-1) + \frac{H_j(q^{-1})}{C(q^{-1})}\Delta(q^{-1})u(t-1) \quad (1.17)$$

On remarque clairement que le polynôme C joue un rôle très important qui va être abordé dans la suite de ce travail.

1.2.3. Relation entre les polynômes de Diophantine pour le $C = 1$ et $C \neq 1$

A partir des équations diophantiennes (1.3) et (1.16) pour $C = 1$ et $C \neq 1$, on déduit les

résultats suivants : (On note « E'_j, F'_j, G'_j, H'_j » les résultats pour $C = I$ et « $\bar{E}_j, \bar{F}_j, \bar{G}_j, \bar{H}_j$ » les résultats pour $C \neq I$).

Pour (1.3), on a respectivement :

$$\begin{cases} 1 = E'_j(q^{-1})A(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + q^{-j}F'_j(q^{-1}) \\ C(q^{-1}) = \bar{E}_j(q^{-1})A(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + q^{-j}\bar{F}_j(q^{-1}) \end{cases}$$

En multipliant la deuxième par la première, il vient :

$$C(E'A\Delta + q^{-j}F'_j) = \bar{E}A\Delta + q^{-j}\bar{F} \quad (1.18)$$

D'où

$$\bar{F}_j = CF'_j + A\Delta q^j(CE'_j - \bar{E}_j)$$

L'équation (1.7) procure les expressions respectives :

$$\begin{cases} E'_j(q^{-1})B(q^{-1}) = G_j(q^{-1}) + q^{-j}H'_j(q^{-1}) \\ \bar{E}'_j(q^{-1})B(q^{-1}) = G_j(q^{-1})C(q^{-1}) + q^{-j}\bar{H}_j(q^{-1}) \end{cases}$$

En isolant G_j dans la première et en la remplaçant dans la deuxième, il vient :

$$\bar{E}_j B = (E'_j B - q^{-j} H'_j) C + q^{-j} \bar{H}_j \quad (1.19)$$

d'où :

$$\bar{H}_j = H'_j C - B q^j (CE'_j - \bar{E}_j)$$

Les j premiers termes (puissances basses) de $CE'_j - \bar{E}_j$ sont nuls, car en réécrivant (1.18)

comme suit :

$$(CE'_j - \bar{E}_j)\Delta A = q^{-j}(\bar{F}_j - CF'_j) \quad (1.20)$$

On constate que la multiplication par q^{-j} du polynôme $(\bar{F}_j - CF'_j)$ indique que les premiers j termes du polynôme de droite de la relation (1.20) sont nuls, ce qui implique que les j premiers termes de $(CE'_j - \bar{E}_j)$ sont nuls. En outre, le degré du polynôme CE'_j est $n_c + j - 1$, et celui de \bar{E}_j est $j - 1$, donc le degré de $(CE'_j - \bar{E}_j)$ est $n_c + j - 1$.

1.3. L'algorithme de commande

Avant de formuler l'expression de la loi de commande de la méthode GPC, on va d'une part expliciter le principe sur lequel se base la loi de commande, et d'autre part expliciter le critère de performance que celle-ci est appelée à satisfaire.

1.3.1. Principe

Soit une séquence de référence (ou de consigne) $w(t+j)$ pour $(j = N_1, N_2)$. L'objectif de la commande GPC est de calculer à l'instant courant t (c'est-à-dire à chaque instant d'échantillonnage, une grandeur de commande $u(t)$, dont le but sera de rapprocher les sorties futures $y(t+j)$ autant que possible de la consigne $w(t+j)$. Cela est réalisé en utilisant une commande à horizon fuyant. A chaque instant t , d'échantillonnage, on doit exécuter les étapes suivantes :

1. Calcul ou lecture des référence (ou consigne) futures $w(t+j)$ pour $(j = N_1, N_2)$.
2. Calcul des prédictions de la sortie du système par l'entremise du prédicteur $\hat{y}(t+j/j)$. Cependant, ces prédictions d'après l'équation (1.17), dépendent des commandes futures $\Delta u(t+j-1)$ pour $(j = N_1, N_2)$.
3. Calcul des commandes futures $\Delta u(t+j-1)$ pour $(j = N_1, N_2)$.
4. A partir des commandes futures, prendre la quantité $u(t)$ et l'injecter au système à contrôler.

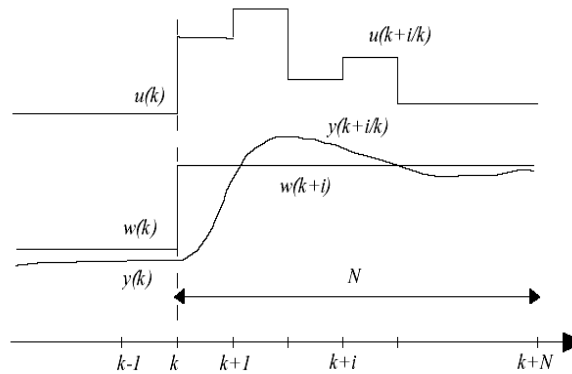


Fig 1.2 : La méthodologie de MPC

1.3.2. Critère de performance

La loi de commande est calculée de façon à minimiser le critère quadratique suivant :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} \Delta u(t+j-1)^2 \quad (1.21)$$

Où :

N_1 : Horizon de prédiction minimal.

N_2 : Horizon de prédiction maximal

N_u : Horizon de commande.

λ : Coefficient de pondération sur la commande.

w : La consigne à suivre.

\hat{y} : La prédiction de la sortie, obtenue à partir d'un prédicteur polynomial optimal.

u : La commande.

D'après l'expression, ci-dessus du critère de performance, J est constitué de deux termes :

- Le terme $\sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2$ représente la somme des erreurs entre les sorties futures $y(t+j)$ et les signaux de consignes $w(t+j)$ pour $(j = N_1, N_2)$.
- Le terme $\lambda \sum_{j=1}^{N_u} \Delta u(t+j-1)^2$ représente physiquement l'énergie dégradée (ou consommée) au niveau de l'organe de réglage (ex: électrovanne), et ceci pour que le premier terme (susmentionné) soit aussi minimal que possible.

De ce fait, il apparaît que l'objectif de la loi de commande est double. D'une part, la loi de commande s'assigne comme but de minimiser, au sens de moindre carrés la somme étendue à tout l'horizon de prédiction $(j = N_1, N_2)$ des erreurs futures, et d'autre part cet objectif sera réalisé de façon à consommer le moins d'énergie possible. La séquence de pondération $\lambda(j)$ a pour tâche de pondérer le signal de commande, et ceci par un choix à priori et judicieux, des valeurs des composantes de $\lambda(j)$. Le vecteur λ a pour dimension $N_u \times 1$.

Le rôle du coefficient de pondération λ est de modérer tout excès d'activité du signal de commande en vue d'une minimisation de l'énergie consommée pour contrôler le système. Le coefficient de pondération constitue, en plus des paramètres N_1 et N_2 , un important paramètre de conception de la méthode de commande GPC.

1.3.3. La loi de commande

Pour résoudre le problème de GPC, une séquence de signal commande $u(t), u(t+1) \dots u(t+N_u)$ doit être trouvée dont le but est de minimiser l'expression (1.21). Si on considère que le système contient un retard pur de l'ordre de d périodes d'échantillonnage, la sortie du système doit être affectée par le signal de commande $u(t)$ après la période d'échantillonnage $d+1$. Les valeurs N_1, N_2 et N_u peuvent être définies par $N_1 = d+1, N_2 = d+N$, et $N_u = N$.

Considérant maintenant le prédicteur optimal à j pas suivant [EF99]:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+d+1/t) &= G_{d+1}\Delta u(t) + F_{d+1}y(t) \\ \hat{y}(t+d+2/t) &= G_{d+2}\Delta u(t+1) + F_{d+2}y(t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \hat{y}(t+d+N/t) &= G_{d+N}\Delta u(t+N-1) + F_{d+N}y(t)\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(t+d+1/t) \\ \hat{y}(t+d+2/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+d+N/t) \end{bmatrix}}_{\hat{y}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix}}_{\hat{u}} + \\ &\underbrace{\begin{bmatrix} (G_{d+1}(q^{-1}) - g_0)q \\ (G_{d+2}(q^{-1}) - g_0 - g_1q^{-1})q^2 \\ \vdots \\ (G_{d+N}(q^{-1}) - g_0 - g_1q^{-1} - \cdots - g_{N-1}q^{-(N-1)})q^N \end{bmatrix}}_f \underbrace{\begin{bmatrix} F_{d+1}(q^{-1}) \\ F_{d+2}(q^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(q^{-1}) \end{bmatrix}}_{\end{aligned}} \quad (1.22)$$

L'équation (1.22) peut être écrite, plus simplement sous la forme vectorielle :

$$\hat{y} = G\hat{u} + f \quad (1.23)$$

La matrice est triangulaire inférieure de dimension $N \times N$, et les valeurs g_i correspondent aux coefficients de la réponse indicielle du modèle.

L'expression du critère de performance explicitée au niveau de l'équation (1.21) pourra être écrite sous forme vectorielle :

$$J = \{ [G\hat{u} + f - w]^T [G\hat{u} + f - w] + \lambda u^T u \} \quad (1.24)$$

$$w = [w(t+1), w(t+2), \dots, w(t+N)]^T$$

La loi de commande (GPC) a pour objectif de minimiser le critère J explicitée par l'équation (1.21). Autrement dit, on devra déterminer le vecteur \hat{u} qui minimise le critère J , donc, J est minimale, si :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 0 \quad (1.25)$$

Le vecteur minimisant le critère J , donc satisfaisant l'équation (1.25) a été trouvé tel que :

$$\hat{u}_{opt} = (GG^T + \lambda I)^{-1} G^T (w - f) \quad (1.26)$$

Où I représente la matrice d'identité.

Cette dernière équation constitue l'expression de la loi de commande (ou loi de contrôle) de la méthode GPC.

1.4. Choix des paramètres de synthèse

Le choix des paramètres de synthèse a pour objectif d'assurer les meilleures performances en asservissement ou/et en régulation et d'obtenir un degré de stabilité en boucle fermée, il sont souvent basés sur des constatations d'ordre expérimentale. Avec cette stratégie de réglage, portant sur le choix des paramètres de synthèse d'une commande prédictive généralisée, essentiellement, les horizons de commande, prédiction maximale, et minimale, et sur la pondération sur l'accroissement de la commande, on peut dégager les principales caractéristiques qui intéressent une large palette de procédés, qui répondent aux exigences en performances relatives aux aspects statique et dynamique, qui donnent de l'importance à l'obtention d'un bon degré de stabilité en boucle fermée et qui tiennent compte, finalement des problèmes numériques (temps et capacité de calcul, inversion matricielle).

1.4.1. Horizon de prédiction minimal

Dans le cas de la commande prédictive généralisée, le retard du système à commander peut être choisi comme horizon de prédiction minimal ($N_1 = d$). Si le retard est inconnu ou variable, le N_1 est posé égal à l'unité ($N_1 = 1$). La possibilité d'avoir un horizon d'initialisation supérieur au retard d est conditionnée par l'inégalité suivante [RB01] :

$$d \leq N_1 \leq nb + d$$

1.4.2. Horizon de prédiction maximal

Il est clair que l'horizon de prédiction maximal doit être, dans tout les cas strictement supérieur à l'horizon de prédiction minimal. il existe des règles pratique qui fixent la plage de variation de l'horizon de prédiction maximal en fonction de la stabilité du système , de la période d'échantillonnage et de temps de stabilisation à $\pm 5\%$. Cependant en absence des informations précitées, il convient de choisir le domaine de variation de l'horizon de prédiction maximal conformément à la règle suivante [RB01] :

$$N_{2\min} \leq N_2 \leq N_{2\max}$$

avec

$$N_{2\min} = 2 \sup\{nb + d, na + 1\}$$

$$N_{2\max} = 2 \sup\{nb + d, na + 1\} + 10$$

Donc, la valeur de l'horizon de prédiction maximal doit être choisie ni trop petite pour garder un bon degré de stabilité en boucle fermée, ni trop grande pour garantir la stabilité en boucle fermée d'un système instable en boucle ouverte.

1.4.3. Horizon de commande

Le choix de la plage de variation de l'horizon de commande N_u est conditionné par la stabilité du système en boucle ouverte. Cependant, le choix raisonnable qui assure un compromis entre le degré de stabilité et les performances, essentiellement en asservissement, est le suivant :

$$na \leq N_u \leq N_2 - N_1 + 1$$

L'augmentation de l'horizon de commande à l'intérieur du domaine retenu pour sa variation améliore la rapidité du système en boucle fermée, et dégrade le degré de stabilité en boucle fermée, augmente le temps de calcul.

1.4.4. Coefficient de pondération sur la commande

En présence d'un processus instable en boucle ouverte, l'augmentation exagérée de la pondération sur la commande λ peut conduire à l'instabilité du système en boucle fermée. Il est clair que même dans les conditions où le système est stable en boucle ouverte, une valeur très élevée de λ devant la trace de la matrice $G^T G$ (la loi de commande GPC) peut rendre la variation de la loi de commande $u(t)$ pratiquement nulle et indépendante des autres paramètres de synthèse. Par ailleurs, au prix d'une perte sur la rapidité, une pondération sur la commande convenable et non nulle, permet d'assurer à la fois la minimisation du coût énergétique, l'amélioration du degré de stabilité et l'inversibilité de la matrice $G^T G + \lambda I$, en présence d'une sous ou surparamétrisation du modèle estimé.

Le choix de λ proportionnel à la trace de la matrice $G^T G$ est possible. Ce critère de choix tient en compte de la condition de stabilité du système en boucle ouverte [RB01] :

$$\lambda = \frac{\text{trace}(G^T G)}{100N_u} k_1$$

avec

$k_1 \in [1, 100]$: Pour les systèmes stables.

$k_1 \in [1, 10]$: Pour les systèmes instables.

1.5. La version polynomiale de commande prédictive généralisée

L'apport essentiel de la synthèse d'une loi de commande prédictive sous forme polynomiale réside dans la possibilité d'une étude fréquentielle de la boucle corrigée. Suivant la loi de commande (1.26) :

$$\hat{u}_{opt} = -(GG^T + \lambda I)^{-1} G^T (f - w)$$

$$\hat{u}_{opt} = -N \left(\frac{1}{C(q^{-1})} \text{if } y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} ih \Delta u(t-1) - w \right)$$

Avec

$$N = [G^T G + \lambda I_{N_u}]^{-1} G^T = \begin{bmatrix} n_1^T \\ \cdot \\ \cdot \\ n_{N_u}^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_{opt} = [\Delta u(t)_{opt} \quad \cdots \quad \Delta u(t + N_u - 1)_{opt}]^T$$

En faite, comme on l'a vu depuis le début, seule la première valeur de cette séquence est appliquée au système, l'ensemble de la procédure étant effectuée de nouveau à la période d'échantillonnage suivante selon le principe de l'horizon fuyant :

$$u_{opt}(t) = u_{opt}(t-1) - n_1^T \left[\frac{1}{C(q^{-1})} \text{if } y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} ih \Delta u(t-1) - w \right] \quad (1.27)$$

Il est enfin possible, à partir de la relation ci-dessus, de déduire la représentation polynomiale du régulateur équivalent, comme indiqué Figure 1.3 Cette structure RST classique permet l'implantation de la loi de commande par une simple équation aux différences [PR03] :

$$\Delta u(t) (C(q^{-1}) + n_1^T ih (q^{-1})) = -n_1^T \text{if } y(t) + C(q^{-1}) n_1^T w$$

$$S(q^{-1}) \Delta u(t) = -R(q^{-1}) y(t) + T(q^{-1}) w(t + N_2) \quad (1.28)$$

Donc, les trois polynômes prennent la forme suivante :

$$S(q^{-1}) = C(q^{-1}) + n_1^T ih (q^{-1}) \quad \text{degré de } S(q^{-1}) = \max(n_c, n_b)$$

$$R(q^{-1}) = n_1^T \text{if} \quad \text{degré de } R(q^{-1}) = \max(n_a, n_c - N_1)$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) n_1^T [q^{-N_2+N_1} \quad q^{-N_2+N_1+1} \quad \cdots \quad 1] \quad \text{degré de } T(q^{-1}) = n_c + N_2 - N_1$$

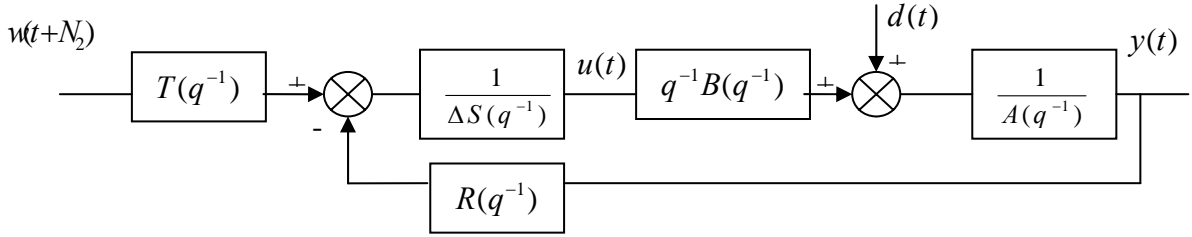


Fig 1.3 : Structure du régulateur polynomial équivalent

Remarque

En considérant ici que le signal de consigne est $w(t+N_2)$ et non $w(t)$ (T est choisi volontairement en puissance de q^{-1}).

1.5.1. La fonction de transfert de la boucle fermée

La fonction de transfert de la boucle fermée de la Figure 1.3 :

$$\begin{cases} A(q^{-1})\Delta(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})\Delta u(t-1) + C(q^{-1})\zeta(q^{-1}) \\ S(q^{-1})\Delta u(t-1) = T(q^{-1})w(t+N_2-1) - R(q^{-1})y(t-1) \end{cases}$$

On arrive à :

$$(A(q^{-1})S(q^{-1})\Delta(z^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})q^{-1})y(t) = B(q^{-1})T(q^{-1})w(t+N_2-1) + S(q^{-1})C(q^{-1})\zeta(t) \quad (1.29)$$

On note que le polynôme caractéristique de la boucle fermée est :

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})q^{-1} \quad (1.30)$$

En remplaçant R et S par les expressions trouvées en (1.28), on a :

$$S(q^{-1}) = C(q^{-1}) + n_1^T ih(q^{-1}) = C(q^{-1}) + \sum_{j=N_1}^{N_2} \alpha_j H_j(q^{-1})q^{-j}$$

$$R(q^{-1}) = n_1^T if = \sum_{j=N_1}^{N_2} \alpha_j F_j(q^{-1})$$

avec :

$$\begin{aligned}
 n_1^T &= [\alpha_{N_1} \alpha_{N_1+1} \cdots \alpha_{N_2}] \\
 P_c(q^{-1}) &= AS\Delta + BRq^{-1} = A \left(C + \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i H_i q^{-1} \right) \Delta + B \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i F_i q^{-1} \\
 &= AC\Delta + \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i (A\Delta H_i + BF_i) q^{-1} \\
 &= C \left[A\Delta + \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i \left(\frac{A\Delta H_i}{C} + \frac{BF_i}{C} \right) q^{-1} \right] \\
 &= CA_c
 \end{aligned}$$

Où A_c dépend des paramètres de réglage N_p , N_r , N_u et λ .

Le polynôme C se retrouve donc en facteur du polynôme caractéristique. En revenant sur le transfert en boucle fermée (1.29) et en décomposant $T(q^{-1})$ en deux parties [PA98], [PR03], on a :

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) n_1^T [q^{-N_2+N_1} \quad q^{-N_2+N_1+1} \quad \cdots \quad 1] = C(q^{-1}) T_1(q^{-1})$$

et la boucle fermée :

$$y(t) = \frac{B(q^{-1}) T_1(q^{-1})}{A_c(q^{-1})} w(t + N_2 - 1) + \frac{S(q^{-1})}{A_c(q^{-1})} \zeta(t) \quad (1.31)$$

On constate alors avec cette dernière expression que le transfert en boucle fermée entre l'entrée et la sortie n'est pas modifiée par le polynôme C . Il faut remarquer que cela n'est vrai que dans le cas où le modèle est parfait.

1.5.2. Relation entre les polynômes de régulation RST pour $C=1$ et $C \neq 1$:

A partir des équations diophantiennes (1.3) et (1.16) pour $C=1$ et $C \neq 1$, on déduit les résultats suivants : (On note « R', S', T' » les résultats pour $C=1$ et « $\bar{R}, \bar{S}, \bar{T}$ » les résultats pour $C \neq 1$).

On peut écrire \bar{R} sous la forme :

$$\bar{R} = \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i \bar{F}_i \quad (1.32)$$

La substitution de l'expression (1.18) dans la relation définissant \bar{R} fournit :

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i \bar{F}_i \\
 &= \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i [CF'_j + A\Delta q^j (CE'_j - \bar{E}_j)] \\
 &= \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i CF'_j + A\Delta \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i q^j (CE'_j - \bar{E}_j) \\
 &= R'C + A\Delta M
 \end{aligned}$$

Avec :

$$M(q^{-1}) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i q^i (CE'_i - \bar{E}_i) \quad \text{degré de } M(q^{-1}) = n_c - 1 \quad (1.33)$$

On peut écrire \bar{S} sous la forme :

$$\bar{S} = C + \sum_{i=N_2}^{N_2} \alpha_i \bar{H}q^{-1} \quad (1.34)$$

La substitution de l'expression (1.19) dans la relation définissant \bar{S} fournit :

$$\begin{aligned}
 \bar{S} &= C + \sum_{i=N_2}^{N_2} \alpha_i \bar{H}q^{-1} \\
 &= C + \sum_{i=N_2}^{N_2} \alpha_i (H'_i C - Bq^i (CE'_i - \bar{E}_i))q^i \\
 &= C + C \sum_{i=N_2}^{N_2} \alpha_i H'_i q^{-i} - q^{-1} B \sum_{i=N_2}^{N_2} \alpha_i q^i (CE'_i - \bar{E}_i) \\
 &= CS' - q^{-1} BM
 \end{aligned}$$

Pour le polynôme T , on a :

$$\bar{T} = CT'$$

Donc, le régulateur polynomiale RST pour $C \neq 1$ peut s'exprimer en fonction de celui pour $C = 1$ à l'aide de relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \bar{S} &= S'C - q^{-1} BM \\
 \bar{R} &= R'C + A\Delta M \\
 \bar{T} &= T'C
 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pour reconstruire l'équation de la fonction de transfert en boucle fermée pour $C \neq 1$, on remplaçant (1.35) en (1.29), il vient :

$$\begin{aligned}
 (A(S'C - q^{-1} BM)\Delta + B(R'C + A\Delta M)q^{-1})y(t) &= BT'CW(t + N_2 + 1) + SC\zeta(t) \\
 (C(AS'\Delta - BRq^{-1}))y(t) &= BT'CW(t + N_2 + 1) + SC\zeta(t) \\
 y(t) &= \frac{BT'}{A_c} w(t + N_2 - 1) + \frac{S}{A_c} \zeta(t)
 \end{aligned}$$

Finalement, on arrive à l'équation de la boucle fermée (1.31).

Remarque

Par ailleurs, le polynôme M est déterminé par (1.33). Dans cette relation, le polynôme $(CE'_j - \bar{E}_j)$ est multiplié par q^j , en sélectionnant les derniers n_c termes de ce polynôme. Cela signifie que le calcul de \bar{E} n'est pas indispensable à l'élaboration de M .

1.6. Le rôle du polynôme C

L'expression de la prédiction à j -pas (1.17) peut s'écrire :

$$\hat{y}(t+j/t) = \frac{F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + G_j(q^{-1}) \Delta(q^{-1}) u(t+j-1) + \frac{H_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta(q^{-1}) u(t-1)$$

1.6.1. Rôle de filtrage et d'observateur

Bien que le polynôme de C n'apparaisse pas dans la fonction de transfert entre la sortie et la référence, ce n'est pas le cas pour la fonction de transfert entre la sortie et la perturbation.

De l'équation précédente, on constate que la sortie $y(t)$ et l'incrément de commande $\Delta u(t)$ apparaissent dans la prédiction, et donc la loi de commande est filtrée par $\frac{1}{C(q^{-1})}$.

Ainsi, d'un point de vue pratique, il signifie que le polynôme C peut être traité comme un filtre. En s'assurant que le degré de C est assez grand, le filtre atténue les composants de l'erreur de prédiction provoqué par la disparité du modèle qui est particulièrement importante aux hautes fréquences. Noter que la perturbation de basse fréquence peut être enlevée par le terme Δ (action intégrale) qui apparaît dans la prédiction. Les perturbations à haute fréquence sont principalement dues à la présence des dynamiques non modelées de haute fréquence et des perturbations non mesurables [CM88]. S'il n'y a pas des dynamiques non modelées, l'effet du filtre C est le rejet de la perturbation, sans l'influencer sur le transfert référence/sortie. Dans ce cas, C peut être employé pour atténuer la réponse aux perturbations à haute fréquence non mesurables, en empêchant des actions excessives de commande. D'autre part, C est employé comme un paramètre de conception qui peut influencer la stabilité robuste. Dans ce cas les prédictions ne seront pas optimales mais robuste face aux incertitudes qui peut être atteindre, dans une interprétation semblable à celui employé par Ljung [BD91]. Alors ce polynôme peut être considéré comme un pré-filtre aussi bien qu'un observateur. L'utilisation efficace des observateurs est connue pour jouer un rôle essentiel dans la réalisation robuste des contrôleurs prédictifs.

Considérons un système avec bruit de mesure de mesure à haute fréquence, on peut le représenter comme suit :

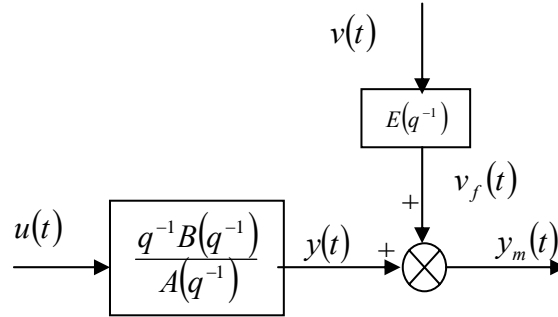


Fig 1.4 : Système avec bruit à haute fréquence en sortie

Ce qui peut être traduit par le model CARIMA suivant :

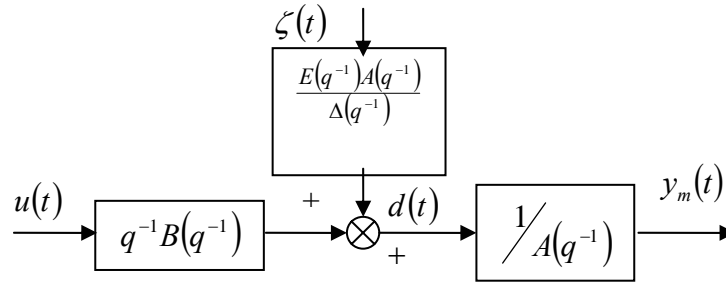


Fig 1.5 : Le modèle CARIMA du système avec bruit de mesure

La fonction de sensibilité directe S_d représente le transfert entre $v_f(t)$ et la sortie $y_m(t)$ et la fonction de sensibilité complémentaire S_c représente le transfert entre $v_f(t)$ et la sortie $y(t)$.

$$S_d(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})S(q^{-1})}{A_c(q^{-1})C(q^{-1})}$$

$$S_c(q^{-1}) = \frac{q^{-1}B(q^{-1})R(q^{-1})}{A_c(q^{-1})C(q^{-1})}$$

1.6.2 La robustesse en stabilité

Dans le but de calculer les limites de robustesse en stabilité, nous considérons $G(q^{-1})$ la transmittance modélisant le système et $G_0(q^{-1})$ le système réel, qui sont liées par l'identité suivante :

$$\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{B_o(q^{-1})}{A_o(q^{-1})} + E \quad (1.36)$$

L'outil le plus importante, dont on examine la stabilité de système, dans la présence d'une incertitude de système, est le *théorème de petit gain* basé sur le critère de stabilité de Nyquist, donne les conditions de stabilité du système bouclé.

Théorème

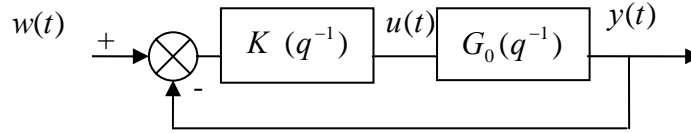


Fig 1.6 : Système bouclé pour analyse de robustesse

Le système $G_0(q^{-1})$ de la figure (1.5), est stable si ces conditions sont satisfaites :

- Le système bouclé avec $G(q^{-1})$ est stable.
- $G(q^{-1})$ et $G_0(q^{-1})$ ont le même nombre de pôles à l'extérieur du cercle unité.
- Si $G_0(q^{-1})$ a des pôles sur le cercle unité, ceux-ci sont aussi pôles de $G(q^{-1})$.
- La condition suivante est satisfaite pour $\forall \omega \in [0, \pi]$.

$$\left| \frac{G(e^{-j\omega})K(e^{-j\omega}) - G_0(e^{-j\omega})K(e^{-j\omega})}{1 + G(e^{-j\omega})K(e^{-j\omega})} \right| < 1 \quad (1.37)$$

Cet théorème fournit la condition suffisante pour la stabilité de la boucle fermée de $G_0(q^{-1})$.

L'équation (1.37) peut être écrite comme :

$$\left| \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} - \frac{B_o(q^{-1})}{A_o(q^{-1})} \right| \left| \frac{P_c(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})} \right| = B_r \quad (1.38)$$

Si l'on veut augmenter la marge de robustesse B_r à haute fréquence, il faudra que C/R soit un filtre passe-haut. Malheureusement, les caractéristiques fréquentielles de R et C ne peuvent pas être choisies facilement, car R dépend de C .

Remarque

En basses fréquences, cette quantité B_r est égale au gain du modèle. En effet :

$$\left| \frac{P_c(1)}{A(1)R(1)} \right| = \left| \frac{B(1)T(1)C(1)}{A(1)R(1)} \right| = \left| \frac{B(1)T(1)}{A(T)R(1)} \right| = \left| \frac{B(1)}{A(1)} \right|$$

Le polynôme C permet de modifier les fonctions de sensibilité directe et complémentaire, S_d et S_C , mais là encore la relation n'est pas simple, car R et S dépendent de C .

1.7. Application

Envisageons dès lors l'application de l'ensemble de la méthodologie développée ci-dessus à un système double intégrateur et constante de temps (correspondant par exemple à la fonction de transfert d'un moteur à courant continu en sortie position, pour laquelle les frottements visqueux seraient négligeables). Ce type de système a été retenu car l'obtention d'un comportement entrée/sortie sans dépassement en réponse à un échelon de consigne nécessite un choix de paramètres de réglage de la loi de commande très pénalisant en termes de temps de réponse [PR03]. Cet exemple a donc pour but d'illustrer comment, à partir d'un réglage initial pour lequel le comportement entrée/sortie présente un certain dépassement, il est possible d'élaborer des autres paramètres de synthèse permettant de respecter un comportement entrée/sortie souhaité. On arrive ainsi à un comportement entrée/sortie sans dépassement, avec la dynamique de poursuite désirée et garantir des bonnes caractéristiques de robustesse.

Ce scénario consiste à illustrer la puissance de la commande prédictive généralisée en terme de performance de poursuite, bonnes caractéristiques de robustesse face à des systèmes pénalisant, avec un choix convenable des paramètres de synthèse [ML062].

La discrétisation de ce système, avec une période d'échantillonnage de 500ms et en considérant un bloqueur d'ordre zéro à l'entrée du système, fournit la fonction de transfert discrète :

$$G(q^{-1}) = \frac{0.019q^{-1} + 0.065q^{-2} + 0.014q^{-3}}{1 - 2.61q^{-1} + 2.21q^{-2} - 0.61q^{-3}}$$

Un correcteur GPC est synthétisé avec $C(q^{-1})=1$ et les paramètres de réglage ci-dessous :

1. $N_1 = 1, N_2 = 16, N_u = 1, \lambda = 21$

Ces paramètres ont été cherchés afin de satisfaire les contraintes de stabilité et robustesse suivantes

- une marge de phase supérieure à 45°.
- une marge de gain supérieur à 6.16 dB.
- une marge de retard supérieur à une période d'échantillonnage.
- une fonction de sensibilité directe de module inférieur à 6dB.
- une fonction de sensibilité complémentaire de module inférieur à 3dB.

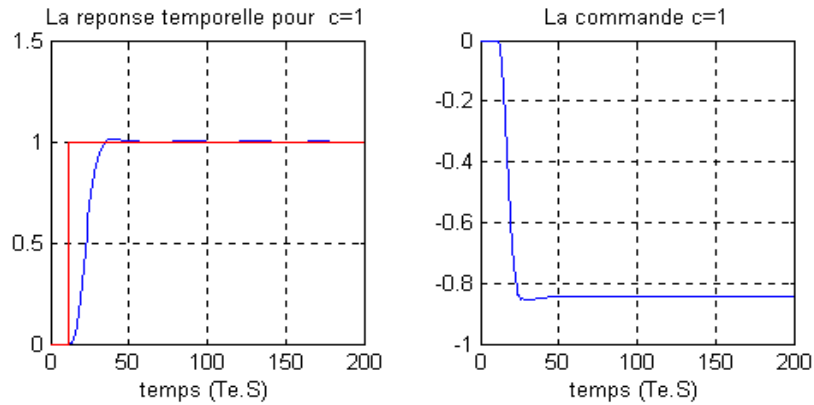


Fig 1.7 : Cas plus stable

2. $N_1 = 1, N_2 = 16, N_u = 1, \lambda = 1$

Ces paramètres ont été cherchés afin de satisfaire la contrainte de rapidité, et les contraintes de stabilité et robustesse suivantes :

- une marge de phase supérieure à 41.4° .
- une marge de gain supérieur à 5.58dB.
- une marge de retard supérieur à une période d'échantillonnage.
- une fonction de sensibilité directe de module inférieur à 6dB.
- une fonction de sensibilité complémentaire de module inférieur à 3dB.

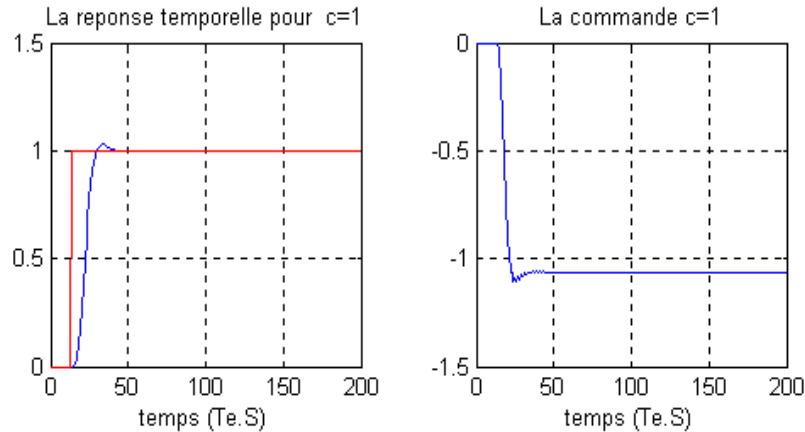


Fig 1.8 : Cas plus rapide

Un correcteur GPC est synthétisé avec $C(q^{-1}) \neq 1$, cette simulation effectuée sur le système réel correspond à un échelon en entrée appliqué à l'instant $t = 2s$, une perturbation $d(t)$ (voir Figure 1.9) en échelon d'amplitude 0,1 appliquée à l'instant $t = 7s$ et un bruit de mesure de variance 0,0025 à partir de $t = 14s$ (avec les mêmes paramètres de synthèse) :

1. Commande prédictive GPC monovariante (Algorithmique et polynomiale)

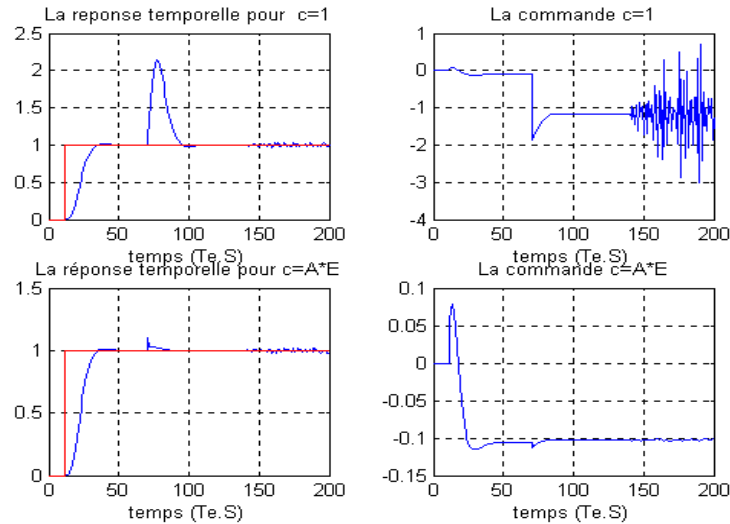


Fig 1.9 : Réponse à un échelon de consigne, à une perturbation et un bruit de mesure

Avec Le choix de polynôme E qui égale à $1 - 0.67q^{-1}$, introduit un transfert dans C/S correspond à un avance de phase dans la chaîne direct, va faire que le transfert entrée/sortie ne soit modifié.

Dans R/C introduit un filtre passe bas, va filtrer le bruit de mesure, et donc, va diminuer son effet dans le système. Les représentations fréquentielles de ces différents transferts sont visualisées dans Fig 1.10.

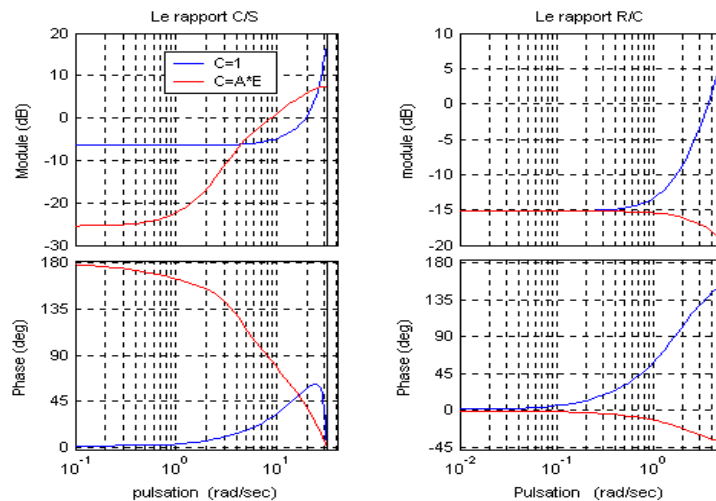


Fig 1.10 : Diagramme de Bode des transferts C/S et R/C

Effet introduit sur la marge de gain et de phase

A partir de diagramme de Black, on constate que les marges de phase et de gain on été augmentées par le choix de $C = AE$.

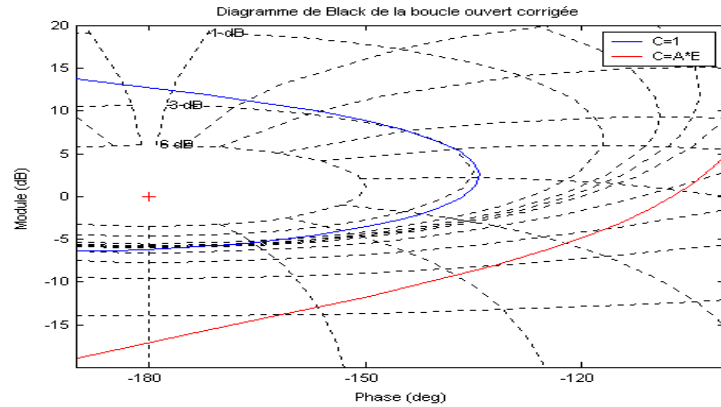


Fig 1.11 : Diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée

Le tracé de Bode montre que la dynamique de la boucle a cependant diminué, engendrant, par exemple, un rejet de perturbation plus lent. Cette perte de dynamique dans la boucle est compensée par le polynôme T au niveau du transfert entrée/sortie, de sorte que la dynamique de poursuite reste la même.

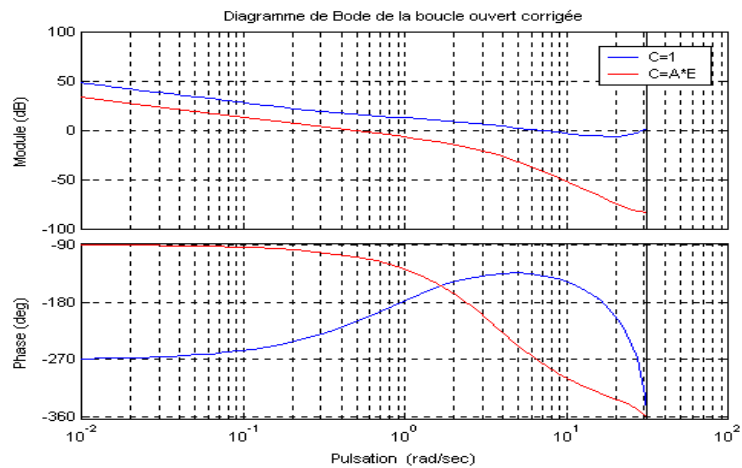


Fig 1.12 : Diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée

Effet introduit sur le rejet de perturbation

Le rejet de perturbations à basses fréquences est plus lent pour $C=1$. En revanche, à hautes fréquences, l'influence de la perturbation sur la sortie est moins importante pour $C = AE$.

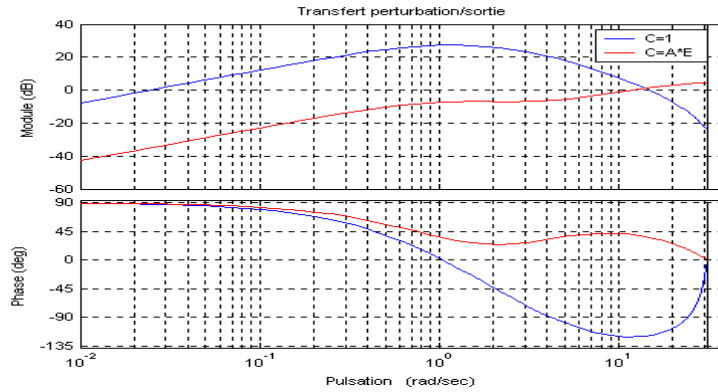


Fig 1.13 : Diagramme de Bode de transfert perturbation/sortie corrigée

En hautes fréquences, l'influence de la perturbation sur la commande est moins importante pour $C = AE$.

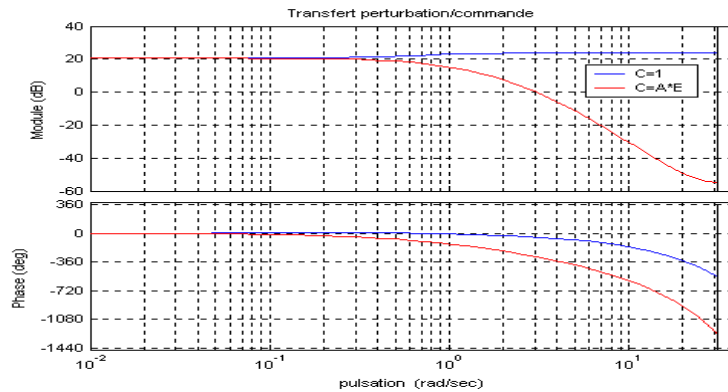


Fig 1.14 : Diagramme de Bode de transfert perturbation/commande corrigée

Effet introduit sur l'atténuation du bruit de mesure

On s'aperçoit que les mêmes remarques que lors du cas précédent demeurent. A basses fréquences, l'effet du bruit sur la sortie est plus important pour $C = 1$ et plus ou moins le même sur la commande dans les deux cas. A hautes fréquences, l'effet du bruit sur la sortie est beaucoup plus faible avec $C = AE$, et l'effet sur la commande est beaucoup moins important aussi pour $C = AE$.

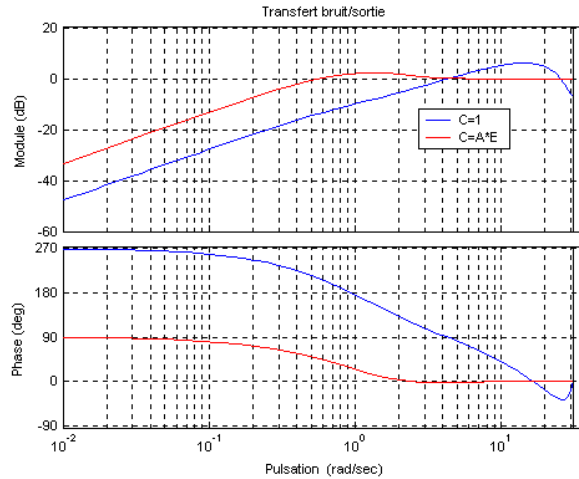


Fig 1.15 : Diagramme de Bode de transfert bruit /sortie (sensibilité directe) corrigée

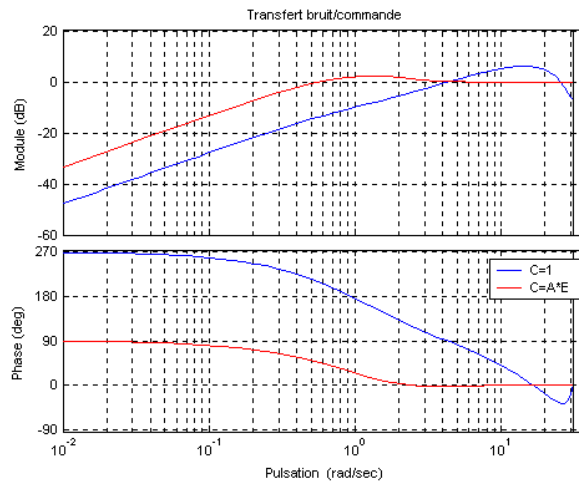


Fig 1.16 : Diagramme de Bode de transfert bruit /commande corrigée

Effet introduit sur robustesse en stabilité

Le transfert bruit/sortie correspond par ailleurs à la fonction de sensibilité directe. Il faut remarquer qu'avec un retour unitaire l'augmentation du gain de cette fonction à basses fréquences correspond à une perte de performance en suivi de consigne. Dans notre cas, cependant, cette équivalence n'existe pas, car le retour n'est pas unitaire et le préfiltrage T vient modeler la réponse. L'erreur de poursuite reste la même, car la dynamique de poursuite n'est pas modifiée par C.

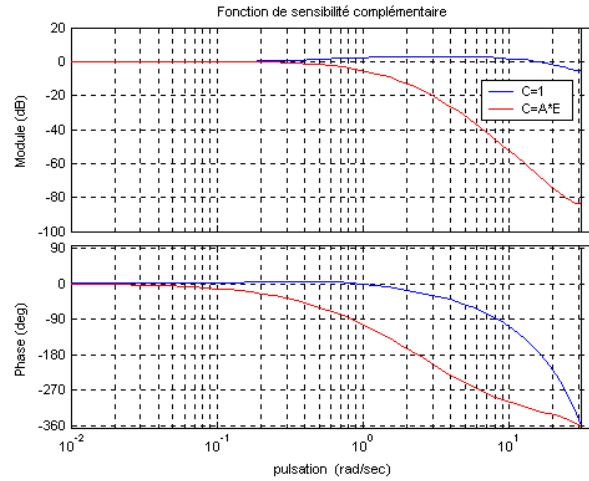


Fig 1.17 : Diagramme de Bode de fonction de sensibilité complémentaire

Les évolutions de la fonction de sensibilité complémentaire traduisent avec $C = AE$ une augmentation de la robustesse face à des incertitudes en haute fréquence.

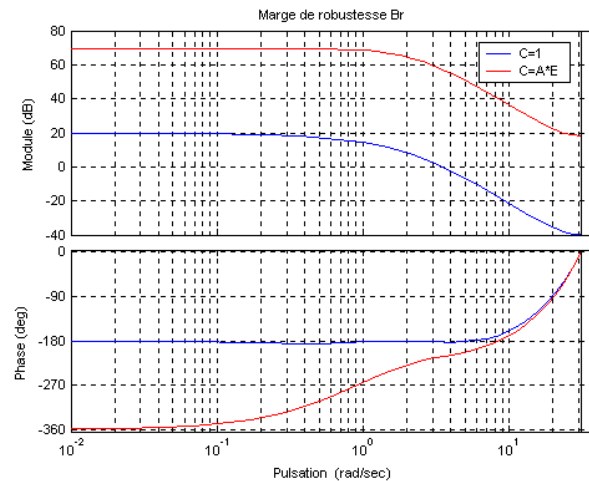


Fig 1.18 : Diagramme de Bode de fonction de marge de robustesse

Dans le deuxième cas, la marge de robustesse est plus grande, notamment à haute fréquence, comme illustré Figure 1.18.

1.8 Conclusion

La connaissance du polynôme C générateur du bruit agissant sur le système permet de faire une prédiction optimale de la sortie du système et, de cette façon, de minimiser l'effet du bruit dans la régulation. Cette minimisation est effectuée par un changement de la dynamique de régulation et sans changement dans le transfert entrée/sortie en boucle fermée. Le choix d'un polynôme C entraîne donc une modification de la dynamique de régulation mais n'a pas d'influence sur le transfert entrée/sortie en boucle fermée.

Le polynôme C peut être utilisé pour robustifier le régulateur, par exemple pour faire augmenter la taille de la plus grande incertitude additive admise sans perte de stabilité. Cette robustification est en plus effectuée sans modification du transfert entrée/sortie de la boucle fermée. Néanmoins, la relation entre le polynôme C et les transferts conférant une plus grande robustesse à la régulation n'est pas simple.

Chapitre 2

Commande prédictive GPC multivariable

Introduction

La plupart des processus industriels ont beaucoup des variables qui doivent être des variables commandées (les sorties) et beaucoup manipulées, ou variables employées pour commander le processus (les entrées). Dans certains cas, un changement d'une des variables de commande affecte principalement la variable de sortie correspondante et chacune des paires d'entrée-sortie peut être considérée comme un système mono entrée mono sortie (SISO) et peut être commandée par des boucles indépendantes.

Dans beaucoup des cas, quand une des variables de commande a changée, elle affecte non seulement les variables commandées correspondantes mais déforme également les autres variables commandées. Ces interactions entre les variables de processus ont comme conséquence, une mauvaise performance en commande ou encore de stabilité. Quand les interaction ne sont pas négligeable, le processus doit être considérée comme un processus avec des entrées multiples et des sorties multiples (MIMO) au lieu d'un ensemble de processus (SISO). La commande du processus MIMO a été intensivement traitée en littérature ; peut-être que la manière la plus populaire de commander des processus MIMO est en concevant des précompensateurs de découplage, suppriment ou diminuent les interactions et puis concevoir les contrôleurs multiples de SISO.

Ce premier exige déterminer comment accoupler les variables d'entrées et de sortie, c'est-à-dire, quelle variable de commande serait employées pour commander chacune des variables de sorties , et également le système doit avoir le même nombre de variables de commande que des variables commandées. Le découplage total est très difficile à réaliser pour des processus avec des dynamiques complexes ou des retards exhibant [SR95].

L'un des avantages de la commande prédictive généralisée est que le processus multivariable peut être effectué de façon rigoureuse [EF99][TY90]. Ce chapitre est consacré au développement de la version multivariable de la GPC.

2.1. Forme de représentation de modèle :

Un modèle CARIMA pour un processus multivariable de n sorties et m entrées, peut être exprimé comme suit :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{1}{\Delta} C(q^{-1})\zeta(t) \quad (2.1)$$

Où $A(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$ sont $n \times n$ matrice polynomiale monique et $B(q^{-1})$ est un $n \times m$ matrice polynomiale défini comme suit :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= I_{n \times n} + A_1 q^{-1} + A_2 q^{-2} + \dots + A_{na} q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= B_0 + B_1 q^{-1} + B_2 q^{-2} + \dots + A_{nb} q^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= I_{n \times n} + C_1 q^{-1} + C_2 q^{-2} + \dots + C_{nc} q^{-nc} \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur Δ est défini comme $\Delta = 1 - q^{-1}$. Les variables : $y(t)$ est un vecteur de sortie de dimension $n \times 1$, $u(t)$ est un vecteur d'entré dimension $m \times 1$ et $\zeta(t)$ est un vecteur de perturbation de dimension $n \times 1$ à l'instant t . Le vecteur de bruit est un vecteur de séquences aléatoire centrées non corrélées avec les entrées.

Considérons un critère quadratique à horizon fini :

$$J(N_1, N_2, N_3) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \left\| \hat{y}(t+j|t) - w(t+j) \right\|_R^2 + \sum_{j=N_1}^{N_3} \left\| \Delta u(t+j-1) \right\|_Q^2 \quad (2.2)$$

Où $\hat{y}(t+j|t)$ vecteur de prédiction optimale à j pas du sortie de système, ces prédictions sont calculées à l'instant courant t , c'est à dire, l'expectation de vecteur de sortie à l'instant t , si les entrées passées et le vecteur de sortie et la séquence future de commande sont connus.

N_1 et N_2 sont l'horizon minimum et maximum de prédiction, N_3 l'horizon de commande et $w(t+j)$ est une séquence future de consigne ou séquence de référence pour le vecteur de sortie, R et Q sont les matrices de pondération, définies positives.

Nous considérerons d'abord le cas le plus habituel quand la matrice $C(q^{-1}) = I_{n \times n}$. La raison de ceci est qu'il est très difficile a estimée le polynôme C avec une exactitude suffisante en

pratique, et particulièrement dans le cas multivariable. En fait, beaucoup des contrôleurs prédictifs emploient des polynômes de perturbation comme paramètres de conception. La prédiction optimale du vecteur de sortie peut être produite comme dans le cas monovariante comme suit :

2.2. Calcul de prédicteur optimal

Considérons l'équation suivante de Diophantine :

$$I_{n \times n} = E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (2.3)$$

$\tilde{A}(q^{-1}) = A(q^{-1})\Delta$, $E_j(q^{-1})$ et $F_j(q^{-1})$ sont des matrices polynomiales uniques de degré $j-1$ et na respectivement. Si (2.1) est multiplié par $\Delta E_j(q^{-1})q^j$:

$$E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1})y(t+j) = E_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(q^{-1})\zeta(t+j)$$

En employant (1.3) et après une certaine manipulation, nous obtenons [EF99] :

$$y(t+j) = F_j(q^{-1})y(t) + E_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(q^{-1})\zeta(t+j) \quad (2.4)$$

Noter que à cause de degré de $E_j(q^{-1})$ soit $j-1$, les termes de bruit de l'équation (2.4) sont tous en future. En prenant l'opérateur d'espérance et en considérant cela $E(\zeta(t)) = 0$, la valeur d'expectation de $y(t+j)$ est donnée par :

$$\hat{y}(t+j) = E(y(t+j)) = F_j(q^{-1})y(t) + E_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) \quad (2.5)$$

Noter que la prédiction peut facilement être prolongée au cas d'un bruit avec une moyenne non nulle, en ajoutant le vecteur $E(q^{-1})E(\zeta(t))$ à la prédiction $\hat{y}(t+j|t)$. Notons que l'équation Diophantine (1.3) peut être résolue de façon itérative .voir par exemple [PB96].

En faisant la matrice polynomiales :

$$E_j(q^{-1})B(q^{-1}) = G_j(q^{-1}) + q^{-j}G_{jp}(q^{-1})$$

Avec $\text{deg } G_j(q^{-1}) < j$, l'équation de prédiction peut être maintenant écrite comme suit :

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + G_{jp}(q^{-1})\Delta u(t-1) + F_j(q^{-1})y(t) \quad (2.6)$$

Noter que les deux derniers termes du côté droit de l'équation (2.6) dépend des valeurs passées des sorties et des variables entrées de processus correspondent à la **réponse libre** du processus considéré si les signaux de commande sont maintenus constants, tandis que le premier terme dépend seulement des valeurs futures du signal de commande et peut être interprétée comme une **réponse forcée**. C'est, la réponse obtenue quand les conditions initiales sont zéro $y(t-j) = 0$, $\Delta u(t-j) = 0$ pour $j=1$.

L'équation (2.6) peut être réécrite comme suit :

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + f_j$$

Avec $f_j = G_{j,p}(q^{-1})\Delta u(t-1) + F_j(q^{-1})y(t)$. Maintenant considérons un ensemble de N pas de prédiction :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1|t) &= G_1(z^{-1})\Delta u(t) + f_1 \\ \hat{y}(t+2|t) &= G_2(z^{-1})\Delta u(t+1) + f_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \hat{y}(t+N|t) &= G_N(z^{-1})\Delta u(t+N-1) + f_N \end{aligned} \quad (2.7)$$

A cause des propriétés récursives du E_j , la matrice polynomiale décrit ci-dessus,

l'expression (2.7) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(t+1|t) \\ \tilde{y}(t+2|t) \\ \vdots \\ \tilde{y}(t+j|t) \\ \vdots \\ \tilde{y}(t+N|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ G_1 & G_0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{j-1} & G_{j-2} & \cdot & G_0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ G_{N-1} & G_{N-2} & \cdot & \cdot & \cdot & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \cdot \\ \Delta u(t+j-1) \\ \cdot \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_j \\ \cdot \\ f_N \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Avec $G_j(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{j-1} G_i q^{-i}$. Les prédictions peuvent être exprimées sous la forme condensée comme :

$$y = Gu + f$$

Noter si toutes les conditions initiales sont nulles, la réponse libre f est également nulle. Si un échelon d'unité est appliqué à la première entrée au temps t , donc

$$\Delta u(t) = [1, 0, 0, \dots, 0]^T, \Delta u(t+1) = 0, \quad \Delta u(t+N-1) = 0$$

La séquence de sortie estimée $[\hat{y}(t+1)^T, \hat{y}(t+2)^T, \dots, \hat{y}(t+N)^T]^T$ est égale à la première colonne de la matrice G ou aux premières colonnes des matrices G_0, G_1, \dots, G_{N-1} . C'est-à-dire, la première colonne de la matrice G peut être calculée comme une réponse indicielle du système quand un échelon d'unité est appliqué au premier signal de commande. La colonne i peut être obtenue d'une façon semblable en s'appliquant un échelon d'unité à l'entrée de i . En général, la matrice G_k peut être obtenue comme suit :

$$(G_k)_{i,j} = y_{i,j}(t+k+1)$$

Ou $(G_k)_{i,j}$ est le (i,j) élément de la matrice G_k et $y_{i,j}(t+j+1)$ est le i^{ieme} sortie du système quand un échelon d'unité a été appliquée à l'entrée j de commande au temps t .

Noter que si la matrice $A(q^{-1})$ est diagonale, les matrices $E_j(q^{-1})$ et $F_j(q^{-1})$ sont également des matrices diagonales et le problème est réduit à une récursivité de n scalaires de Diophantine équation qui sont beaucoup plus simples pour programmer et exige moins de calcul. Le calcul de $G_j(q^{-1})$ et f_j est également considérablement simplifié.

Si le signal de commande est maintenu constant après la première N_3 commandes, l'ensemble des prédictions affectant la fonction de coût (2.2)

$y_{N_{123}} = [\hat{y}(t+N_1/t)^T \dots \hat{y}(t+N_2/t)^T]$ peut être exprimé :

$$y_{N_{12}} = G_{N_{123}} u_{N_3} f_{N_{12}}$$

Avec $u_{N_3} = [\Delta u(t)^T \dots \Delta u(t+N_3-1)^T]^T$

$$f_{N_{12}} = [f_{N_1}^T \dots f_{N_2}^T]^T$$

$G_{N_{123}}$ est la sous- matrice de G suivants :

$$G_{N_{123}} = \begin{bmatrix} G_{N_1-1} & G_{N_1-2} & \dots & G_{N_1-N_3} \\ G_{N_1} & G_{N_1-1} & \dots & G_{N_1+1-N_3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ G_{N_2-1} & G_{N_2-2} & \dots & G_{N_2-N_3} \end{bmatrix} \quad \text{avec } G_i = 0 \text{ pour } i < 0$$

L'équation (2.2) peut être écrite comme :

$$J = (G_{N_{123}} u_{N_3} + f_{N_{12}} - w)^T \bar{R} (G_{N_{123}} u_{N_3} + f_{N_{12}} - w) + u_{N_3}^T \bar{Q} u_{N_3}$$

Ou $\bar{R} = \text{diag}(R \dots R)$ and $\bar{Q} = \text{diag}(Q \dots Q)$

Si n'y a aucune contrainte, l'optimum peut être exprimé comme :

$$u_{opt} = (G_{N_{123}}^T \bar{R} G_{N_{123}} + \bar{Q})^{-1} G_{N_{123}}^T \bar{R} (w - f_{N_{12}}) \quad (2.9)$$

En raison de la stratégie de commande avec horizon fuyant, seulement $\Delta u(t)$ est nécessaire à l'instant t . Ainsi, seulement les premières m lignes de $(G_{N_{123}}^T \bar{R} G_{N_{123}} + \bar{Q})^{-1} G_{N_{123}}^T \bar{R}$, appelés K , doivent être calculés. Ceci peut être fait à l'avance pour le cas non adaptatif. La loi de commande peut être exprimée comme suivant $\Delta u(t) = K(w - f)$. C'est une matrice linéaire de gain qui multiplie les erreurs des prédictions entre les références prédites et la réponse libre prédite de système.

Dans le cas de commande adaptative, la matrice $G_{N_{123}}$ doit être calculé chaque période d'échantillonnage, les paramètres estimés changent et la manière de calculer l'incrément d'action de commande serait en résolvant l'ensemble d'équations linéaires :

$$\left(G_{N_{123}}^T \bar{R} G_{N_{123}} + \bar{Q}\right) u = G_{N_{123}}^T \bar{R} (w - f_{N_{12}})$$

Encore seulement les premiers m composants de u doivent être trouvés et car la matrice $\left(G_{N_{123}}^T \bar{R} G_{N_{123}} + \bar{Q}\right)$ est définie positif, l'algorithme des cholesky peut être employé pour trouver la solution.

2.3. La représentation de matrice de transfert

La matrice de transfert est la représentation la plus populaire pour des processus multivariables. La raison de ceci est que les matrices de transfert peuvent très facilement être obtenues par une analyse de fréquence ou en s'appliquant des impulsions ou des échelons au système. Pour la plupart des systèmes dans les processus industriels, n'importe quelle colonne de la matrice de transfert de système peut être obtenue en appliquant un échelon à l'entrée correspondante et mesurant le gain statique, le temps constant et le retard pur équivalent pour chacune des sorties. Si la procédure est répétée pour toutes les entrées, la matrice de transfert totale sera obtenue. La matrice de transfert d'entrée-sortie du modèle CARIMA multivariable décrit par équation (2.1) est donnée par la matrice rationnelle $n \times m$ suivante :

$$T(q^{-1}) = A(q^{-1})^{-1} B(q^{-1}) q^{-1} \quad (2.10)$$

Donnant une matrice rationnelle $T(q^{-1})$, le problème se consiste de trouver deux matrices polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ de sorte que l'équation (2.10) se conserve. La manière la plus simple d'accomplir cette tâche est en mettant $A(q^{-1})$ sous forme d'une matrice diagonale avec ses éléments diagonaux sont égale aux plus petits multiples communs des numérateurs des lignes correspondantes de la matrice $T(q^{-1})$. La matrice $B(q^{-1})$ est alors égal à $B(q^{-1}) = A(q^{-1}) T(q^{-1}) q$.

Les matrices $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ obtenu de cette façon ne doivent pas être laissés co-première à gauche en général. Une représentation à gauche peut être obtenue comme suivant [GC84] :

Trouver une factorisation fractionnelle à droite de la matrice $T(q^{-1}) = N_R(q^{-1}) D_R(q^{-1})^{-1}$ par la construction de $D_R(q^{-1})^{-1}$ une matrice diagonale avec ces éléments diagonaux égal

au dénominateur commun de la colonne correspondante et formé $N_R(q^{-1})$ en conséquence. Noter que ces matrices polynomiales ne doivent pas être co-premières à droite en général. Trouver une matrice uni-modulaire $U(q^{-1})$ tels que :

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_R(q^{-1}) \\ N_R(q^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(q^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Où $R(q^{-1})$ est le plus grand diviseur commun à droite de $D_R(q^{-1})^{-1}$ et $N_R(q^{-1})$. $R(q^{-1})$ est un diviseur commun à droite de $D_R(q^{-1})^{-1}$ et $N_R(q^{-1})$ implique que $D_R(q^{-1}) = D'_R(q^{-1})R(q^{-1})$, $N_R(q^{-1}) = N'_R(q^{-1})R(q^{-1})$, et s'il y a un autre diviseur à droite $R'(q^{-1})$ alors $R(q^{-1}) = W(q^{-1})R'(q^{-1})$ où $W(q^{-1})$ est une matrice polynomiale.

Le plus grand diviseur commun à droite peut être obtenu en employant l'algorithme annoncé dans [GC84].

2.4. L'introduction de retard

La plupart des installations dans l'industrie, particulièrement dans l'industrie des processus, présentent un retard d'entrées /sorties ou des temps morts. Donc, l'effet de changement des variables de commande n'agit pas sur la sortie de processus jusqu'à ce que le temps mort se soit écoulé. Les temps morts sont principalement provoqués par les retards de transport ou parfois comme résultat à des processus avec dynamique composée des retards enchaînés multiples. Les difficultés de contrôle des processus avec des temps mort significatifs sont bien connus et sont dues au fait qu'un temps mort produit un retard de phase qui détériorent la marge de phase.

En conséquence, les contrôleurs à faible gain produisent des réponses lentes (qui doivent être ajoutées au temps mort du processus) doivent être employés afin d'éviter des oscillations élevées. Il y a différentes techniques qui faire face au retard. La plus populaire est, peut-être, le prédicteur de Smith [AN05] qui se composent fondamentalement d'obtenir un retard hors la boucle fermée en générant une prédiction de la sortie de processus et en concevant un contrôleur pour le processus sans le temps mort. L'erreur entre la sortie et la prédiction de processus est rétroagie au contrôleur pour faire face à la disparité entre le système et le modèle.

Depuis les années 70, Clarke et autres ont généralisés l'approche prédictive, et proposent ' la commande prédictive généralisée ' (GPC). Cependant, la GPC multivariable confronte également avec les problèmes de couplage fort entre les boucles de commande.

Depuis que GPC, incorpore un critère quadratique de performance, elle fournit le découplage par le choix approprié des paramètres de synthèse. Ainsi un contrôleur de découplage explicite fournira une synthèse avec des degrés de liberté supplémentaires pour perfectionner l'objectif [TY90].

2.4.1. Modèle

En raison de la nature prédictive des contrôleurs prédictifs basés sur modèle, les temps de retard sont considérés inhérent par eux. Les temps morts d'entrées / sorties du processus sont reflétés dans la matrice polynomiale $B(q^{-1})$.

Le temps mort du $j^{ième}$ entrée vers la $i^{ième}$ sortie, exprimé en pas d'échantillonnage, est le grand entier d_{ij} tels que la partie $(B(q^{-1}))_{ij}$ de la matrice polynomiale $B(q^{-1})$ peut être exprimé comme $(B(q^{-1}))_{ij} = q^{d_{ij}}(B'(q^{-1}))_{ij}$.

Définissant maintenant $d_{min} = \min_{ij} d_{i,j}$ et $d_{max} = \max_{i,j} d_{i,j}$. Bien que le temps mort de processus soit implicitement considéré dans la section précédente par les premières matrices des coefficients de la matrice polynôme $B(q^{-1})$ étant nulle, le calcul ne sera pas efficace si des précautions ne sont pas prises.

La matrice d'interacteur est l'extension naturelle du temps mort au processus multivariable [GC04] qui représente la structure des retards du processus multivariable.

2.4.2. La matrice d'interacteur

La matrice d'interacteur existe toujours si :

1. Le nombre d'entrées m est égal au nombre de sorties n , et la matrice de transfert de système $T(q)$, satisfait : $\det T(q) \neq 0$ Pour tous q
2. La matrice de transfert est strictement propre.

Ainsi, la matrice d'interacteur $\Gamma(q)$, satisfait :

- (i) $\det \Gamma(q) = q^{\bar{m}}$ où \bar{m} est un nombre entier.
- (ii) $\lim_{q \rightarrow \infty} \Gamma(q)T(q) = K$ où K est une matrice non singulière.

En général, $\zeta(q)$ peut être pris pour avoir la structure suivante :

$$\Gamma(q) = M(q)D(q)$$

Avec

$$D(q) = \text{diag}[q^{f_1} \dots q^{f_n}]$$

$f_i \geq d_i = \min_{1 \leq j \leq n} d_{ij}$ et d_{ij} est le retard entre $j^{\text{ième}}$ entrée et la $i^{\text{ième}}$ sortie. $M(q)$ est une matrice unimodulaire de la forme

$$M(q) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ h_{11}(q) & & \cdot & \\ \vdots & & & \cdot \\ h_{n1}(q) & h_{n2}(q) & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

et $h_{ij}(q)$ est divisible par q (ou nulle). Pour plus au sujet de la matrice d'interacteur $\zeta(q)$, voir [GC84] [EF99].

La matrice d'interacteur peut être employée pour concevoir un précompensateur indiqué dans [GC04], en mettant le signal de commande $u(t) = \Gamma_r(q^{-1})z^{-d}v(t)$ avec $\Gamma_r(z^{-1})$ égale à la matrice d'interacteur à droite. Le vecteur de sortie est alors égal à

$$\begin{aligned} y(t) &= T(q^{-1})u(t) = T(q^{-1})\Gamma_r(q^{-1})q^{-d}v(t) \\ &= [T'(q^{-1})\Gamma_r(q^{-1})^{-1}] \Gamma_r(q^{-1})q^{-d}v(t) = T'(q^{-1})q^{-d}v(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le processus peut être maintenant interprété comme un processus avec un retard d commun pour toutes les variables. Noter que le précompensateur se consiste à ajouter un retard au processus. La commande prédictive, comme dans [EF99] précisé, n'exige pas l'utilisation de pré ou le post-compensateur et les effets non désirés provoqués en ajoutant des retards supplémentaires à l'entrée ou à la sortie sont évités.

2.4.3. Analyse des cas

Dans la plupart des cas, la matrice d'interacteur prendra une forme diagonale [GC84], une correspondant à un seul retard d_{\min} pour chaque sortie et l'autre avec retard d_i pour chaque sortie. Ces deux cas seront discutés dans la suite du chapitre.

2.4.3.1. Premier Cas :

Considérons d'abord le cas où il n'y a pas une grande différence entre d_{\max} et d_{\min} et donc, un seul retard d_{\min} est associée à toutes les variables de sortie.

La sortie du processus ne sera pas affecté par $\Delta u(t)$ jusqu'à l'instant $t + d_{\min} + 1$, les sorties précédentes seront une partie de la réponse libre, ou il n'y a aucune vision de les

considérées en tant que des parties de la fonction de critère de performance. L'horizon de prédiction minimale N_1 peut donc être rendue égale à $d_{\min} + 1$.

Noter qu'il n'y a pas d'intérêt de le rendant plus petit, et en outre si il est rendue plus grande, les premières prédiction, celles prévue avec plus grand certainement, ne sera pas considérée dans la fonction de performance.

Si la différence entre d_{\max} et d_{\min} n'est pas significative, et il n'y a pas de grande différence dans la dynamique des variables de processus, un horizon de prédiction minimale $N_1 = d_{\min} + 1$ et maximale ($N_2 = N_1 + N - 1$) peut être choisie pour la fonction objective. Le calcul peut être simplifié en considérant :

$B(q^{-1}) = q^{-d_{\min}} B'(q^{-1})$ et calculant la séquence de prédiction comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t + N_1 + j/t) &= E_{N_1+j}(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t + N_1 + j - 1) + F_{N_1+j}(q^{-1})y(t) \\ &= E_{N_1+j}(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta u(t + N_1 + j - 1 - d_{\min}) + F_{N_1+j}(q^{-1})y(t) \\ &= E_{N_1+j}(q^{-1})B'(q^{-1})\Delta u(t + j) + F_{N_1+j}(q^{-1})y(t) \end{aligned}$$

(2.13)

En faisant la matrice polynomiale

$$E_{N_1+j}(q^{-1})B'(q^{-1}) = G_{N_1+j}(q^{-1}) + q^{-(j+1)}G_{pN_1+j}(q^{-1}) \quad (2.14)$$

L'équation de prédiction peut maintenant être écrite comme :

$$\hat{y}(t + N_1 + j/t) = G_{N_1+j}(q^{-1})\Delta u(t + N_1 + j - 1) + G_{N_1+j}(q^{-1})\Delta u(t + j) + F_{N_1+j}(q^{-1})y(t) \quad (2.15)$$

Noter que les deux derniers termes du côté droit de l'équation (2.15) dépendent de la valeur de la sortie de processus et l'entrée de processus et correspondre à la réponse libre du processus quand les signaux de commande sont maintenus constant, tandis que le premier terme dépend seulement des valeurs futures du signal de commande et peut être interprétée comme une réponse forcée. C'est la réponse obtenue quand les conditions initiales sont nulles. L'équation (2.15) peut être écrite comme suit :

$$\hat{y}(t + N_1 + j/t) = G_{N_1+j}(q^{-1})\Delta u(t + j) + f_{N_1+j}(q^{-1})y(t) \quad (2.16)$$

2.4.3.1. Second Cas

S'il y a une différence significative entre d_{\max} et d_{\min} , il y aura beaucoup des zéros dans les matrices des coefficients de la matrice polynomiale $B(q^{-1})$ ayant comme résultat la basse efficacité de calcul.

Considérant maintenant la matrice polynomiale $A(q^{-1})$ diagonal (ceci peut facilement être fait de la matrice de transfert de processus et comme montré précédemment a beaucoup d'avantages).

Le retard minimum des variables d'entrée au i^{ieme} variable de sortie est donné par : $d_i = \min_j d_{ij}$. La valeur significative minimale pour la limite inférieure de l'horizon de prédiction pour la variable de sortie y_i est $N_{1i} = d_i + 1$. Les limites supérieures $N_{2i} = N_{1i} + N_i - 1$ seront principalement imposées par le polynôme $A_{ii}(q^{-1})$.

Définissons l'ensemble pertinent à j pas des prédictions optimales des sorties

$$y = [y_1^T \ y_2^T \ \dots \ y_N^T]^T \text{ avec}$$

$$y_i = [\hat{y}_i(t + N_{1i}|t) \ \hat{y}_i(t + N_{1i} + 1|t) \ \hat{y}_i(t + N_{2i}|t)]^T$$

Noter que l'ensemble de prédiction à j pas optimal de j^{ieme} variable de sortie peut être calculé en résolvant une équation de Diophantine d'une dimension :

$$1 = E_{ik}(q^{-1})\tilde{A}_{ii}(q^{-1}) + z^{-k}F_{ik}(q^{-1})$$

Tel que $\tilde{A}_{ii}(q^{-1}) = A_{ii}(q^{-1})\Delta$. La prédiction optimale du i^{ieme} composant du vecteur des variables de sortie est alors donnée tel que :

$$y_i(t + N_{1i} + k/t) = \sum_{j=1}^m E_{ijk}(q^{-1})B'_{ij} \Delta u_j(t+k) + F_{ik}(q^{-1})y_i(t) \quad (2.17)$$

Si nous pouvons mettre $B_{ij}(q^{-1}) = q^{-d_i}B'_{ij}(q^{-1})$

$$y_i(t + N_{1i} + k/t) = \sum_{j=1}^m G_{ijk}(q^{-1})\Delta u_j(t+k) + \sum_{j=1}^m G_{ijk}(q^{-1})\Delta u_j(t+j) + F_{ik}(q^{-1})y_i(t) \quad (2.18)$$

Où

$$E_{ijk}(q^{-1})B'_{ij} = G_{ijk}(q^{-1}) + q^{-(k+1)}G_{ijk}(q^{-1}) \quad (2.19)$$

Définissant f_i comme la réponse libre de $y_i(t)$.

$$f_i = [f_i(t + N_{1i}) \dots f_i(t + N_{2i})]^T$$

Avec

$$y_i(t + N_{1i} + k/t) = \sum_{j=1}^m G_{ijk}(q^{-1})\Delta u_j(t+k) + F_{ik}(q^{-1})y_i(t) \quad (2.20)$$

La prédiction de sortie affectant la fonction objective peut être exprimée

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G11 & G12 & \dots & G1m \\ G21 & G22 & \dots & G2m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Gn1 & Gn2 & \dots & Gnm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f1 \\ f2 \\ \vdots \\ fn \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Tel que $u_j = [\Delta u_j(t) \Delta u_j(t+1) \dots \Delta u_j(t+Nu_j)]^T$ et $Nu_j = \max(N_i - d_{ij} - 1)$. Le $N_i \times Nu_j$ matrice block G_{ij} a la forme suivante :

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{ij0} & 0 & & & 0 & 0 \\ g_{ij1} & g_{ij0} & & & 0 & 0 \\ & & & & \cdot & \\ g_{ijl} & g_{ijl-1} & g_{ij0} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Où le nombre des lignes dominantes des zéros de la matrice G_{ij} est $d_{ij} - N_i$ et le nombre de colonnes traînant des zéros est $Nu_j - N_i + d_{ij}$. Noter que la dimension de la matrice G est $(\sum_{i=1}^{i=n} N_i) \times (\sum_{j=1}^m \max_i(N_i - d_{ij} - 1))$, tandis que pour le cas avec un seul retard, il est $(N \times n) \times ((N - d_{\min} - 1) \times m)$ avec $N \geq N_i$ et $d_{\min} \leq d_{ij}$ en général. La réduction de la dimension de matrice, et par conséquent le calcul exigé dépend de la façon dont les termes des retards sont structurés.

2.5. Application :

Les colonnes à distillation sont les processus d'industrie pétrochimique les plus étudiés en automatique. Elles consomment une grande partie de l'énergie totale d'une usine. L'optimisation de leur conception et de leur fonctionnement est donc primordiale. Les contraintes opératoires de plus en plus sévères qui leur sont imposées rendent leur maîtrise plus délicate et nécessite des stratégies de commande performante.

2.5.1 Généralité sur le fonctionnement

Le but d'une colonne à distillation est de séparer une alimentation complexe en produits de compositions différentes ou de purifier des produits intermédiaires ou finaux. La possibilité de distillation repose sur la différence de la volatilité existant entre les différents

composant chimiques. Si l'on considère un simple ballon contenant un mélange de deux constituant (colonne à distillation binaire ou mélange binaire) et que l'on chauffe le contenu de ce ballon, il s'établit un équilibre régi par la thermodynamique entre le liquide et la vapeur qui sont alors à des compositions différentes : La vapeur est plus riche en composant le plus volatil « Léger » et le liquide est plus riche en composant le moins volatil « Lourd ». En première approximation, le composant le plus volatil est celui qui possède la masse molaire la plus faible. Notons que dans le cas d'un mélange multicomposants comme un mélange d'hydrocarbures, la prévision des volatilités relatives peut être plus délicates. On constate l'on réalise alors par cet équilibre une opération de séparation appelée *Flash*, qui peut être vue comme l'opération qui se passe au niveau de chaque plateau d'une colonne à distillation.

Lorsque la séparation par un simple flash est insuffisante, on procède donc à une séparation dans une colonne à distillation, qui permettra une meilleure séparation grâce à la succession des plateaux empilés. Une colonnes à garnissage se comporte en fait de manière analogue à une colonne à plateaux réels, mais on utilise alors la notation d'étage théorique de séparation.

La technologie des colonnes à distillation peut être complexe et l'exposé se limite au cas classique d'une colonne possède une seul alimentation, produisant le résidu au niveau du rebouilleur et de distillat au niveau du condenseur. On pourra voir le distillat comme la production de « légers » et le résidu comme la production de « lourds ». Un mélange multicomposant sera ainsi considéré comme composé majoritairement de deux composants clés, une clé légère et une clé lourde.

De nombreuses possibilités plus complexes sont utilisées. Ainsi, les colonnes de distillation peuvent posséder plusieurs soutirages latéraux, permettant de réaliser des coups (distillation pétrolière)[WL90]. Il peut existe des colonnes de distillation extractive (alimentation supplémentaire en solvant), ou de distillation réactive (avec réaction chimique). D'autre part, il existe des colonnes de distillation discontinues dans lesquelles l'alimentation est introduit dans le rebouilleur à l'instant initial, et pour lesquelles il faut définir une politique de conduite permettant de séparer de manière optimale les produits aux puretés désirées à des instants différents [JP96].

Nous nous intéressons à une colonne de distillation que nous pouvons considérer comme un modèle très compliqué, connu sous le nom de « Heavy oil fractionator », cette colonne permet de fractionnée les huiles lourdes.

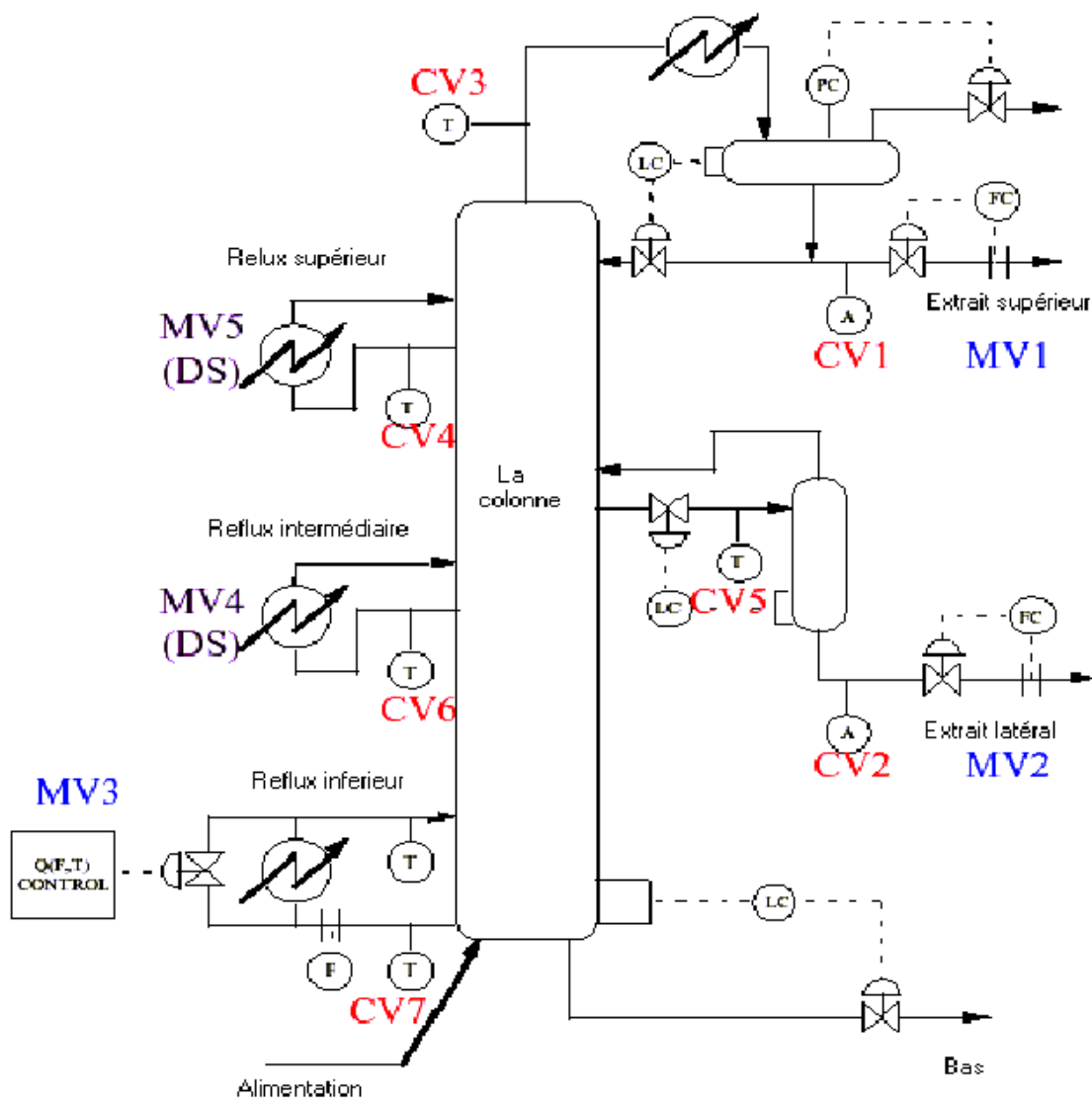


Fig 2.1 : Le séparateur des huiles lourdes, CV1 à CV7 sont des variables commandées, MV1 à MV3 variables de commande, MV4 et MV5 variables de commande considérées comme perturbations.

Le séparateur des huiles lourdes (La Figure 2.1) a deux points de vidange supérieure et latérale avec des caractéristiques de produit déterminées par des contraintes de fonctionnement et des contraintes économiques. L'extrait inférieur n'a aucune spécification de production. La chaleur entrée en séparateur comme alimentation gazeuse et la chaleur est enlevée de la colonne pour réaliser les spécifications désirées dans trois boucles de circulation.

Les deux boucles de circulation principales sont la chaleur intégrée avec d'autres parties de la colonne. Puisque les conditions de fonctionnement dans d'autres unités changent, elles peuvent être une source des perturbations sur n'importe quel séparateur. Dans tous les cas

d'essai, des perturbations d'étape dans les fonctions des deux boucles doivent être rejetées par la stratégie proposée de commande. Le déplacement de la chaleur de la boucle de circulation inférieure est réglé en ajustant la production de vapeur. Il y a une contrainte opérationnelle sur la température dans la partie plus inférieure de la colonne [AM03].

Ce modèle a été présenté, pour la première fois dans les travaux Pretti et Morari, en 1987, ou il a été proposé comme un problème de commande générique, connu sous le nom *Shell Heavy Oil Fractionator*.

Ce modèle est fortement contraint, avec des interactions très fortes et des grands temps morts. Il est clair que le problème de commande de séparateur des huiles lourdes est un problème difficile qui a besoin d'une stratégie de commande très efficace et des algorithmes capable de réaliser les différentes conditions de commande [DP87].

2.5.2 Simulation

Le modèle est sous la forme d'une matrice pleine 5x7 du premier ordre avec un temps mort :

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \\ Y_4(t) \\ Y_5(t) \\ Y_6(t) \\ Y_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-27s}}{1+50s} & \frac{1.77e^{-28s}}{1+60s} & \frac{5.88e^{-27s}}{1+50s} & \frac{1.20e^{-27s}}{1+45s} & \frac{1.44e^{-27s}}{1+40s} \\ \frac{5.39e^{-18s}}{5.39e^{-18s}} & \frac{5.72e^{-14s}}{5.72e^{-14s}} & \frac{6.90e^{-15s}}{6.90e^{-15s}} & \frac{1.52e^{-15s}}{1.52e^{-15s}} & \frac{1.83e^{-15s}}{1.83e^{-15s}} \\ \frac{1+50s}{3.66e^{-2s}} & \frac{1+60s}{1.65e^{-20s}} & \frac{1+40s}{5.53e^{-2s}} & \frac{1+25s}{1.16} & \frac{1+20s}{1.27} \\ \frac{1+9s}{5.92e^{-11s}} & \frac{1+30s}{2.54e^{-12s}} & \frac{1+40s}{8.10e^{-2s}} & \frac{1+11s}{1.73} & \frac{1+6s}{179} \\ \frac{1+12s}{4.13e^{-5s}} & \frac{1+27s}{2.38e^{-7s}} & \frac{1+20s}{6.23e^{-2s}} & \frac{1+5s}{1.31} & \frac{1+19s}{1.26} \\ \frac{1+8s}{4.06e^{-8s}} & \frac{1+19s}{4.18e^{-4s}} & \frac{1+10s}{6.53e^{-s}} & \frac{1+2s}{1.19} & \frac{1+22s}{1.17} \\ \frac{1+13s}{4.38e^{-20s}} & \frac{1+33s}{4.42e^{-22s}} & \frac{1+9s}{7.20} & \frac{1+19s}{1.14} & \frac{1+29s}{1.26} \\ \frac{1+33s}{1+33s} & \frac{1+44s}{1+44s} & \frac{1+19s}{1+19s} & \frac{1+27s}{1+27s} & \frac{1+32s}{1+32s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ U_4(t) \\ U_5(t) \end{bmatrix}$$

Où les entrées $U_1(t)$, $U_2(t)$, et $U_3(t)$ sont respectivement débit d'extrait de supérieur (Des) en (bbl/min), débit d'extrait latéral (Del) en (bbl/min), reflux d'extrait inférieur (Dei) en (Btu/h) sont considérées comme variables de commandes, $U_4(t)$, $U_5(t)$ sont respectivement le reflux d'extrait intermédiaire en (Btu/h), reflux d'extrait supérieur en (Btu/h), qui sont considérées comme perturbation.

Les sorties sont respectivement la température point finale supérieur (Pfs) en (F), point final latéral (Pfl) en (F), la température supérieure en (F), la température de reflux

supérieur en (F), la température d'aspiration latéral en (F), la température de reflux enterré en (F), la température de reflux inférieur (Tri) en (F).

Dans notre travail, nous ne considérons que un système carré 3×3 , cet choix est basé sur un découplage physique du procédé, et sur des considération apportaient sur la physique de système, ou $U_1(t), U_2(t)$, et $U_3(t)$ comme variables de commande, et $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ et $Y_3(t)$ comme variables a commandés, ça nous permet d'aboutir au système suivant :

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-27s}}{1+50s} & \frac{1.77e^{-28s}}{1+60s} & \frac{5.88e^{-27s}}{1+50s} \\ \frac{5.39e^{-18s}}{1+50s} & \frac{5.72e^{-14s}}{1+60s} & \frac{6.90e^{-15s}}{1+40s} \\ \frac{4.38e^{-20s}}{1+33s} & \frac{4.42e^{-22s}}{1+44s} & \frac{7.20}{1+19s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{bmatrix}$$

Dans ce chapitre nous n'allons pas spécifiés les contraintes physiques et économiques du système, qui vont être traité dans le chapitre suivant.

Le système est échantillonné avec une période qui égale à 4min.

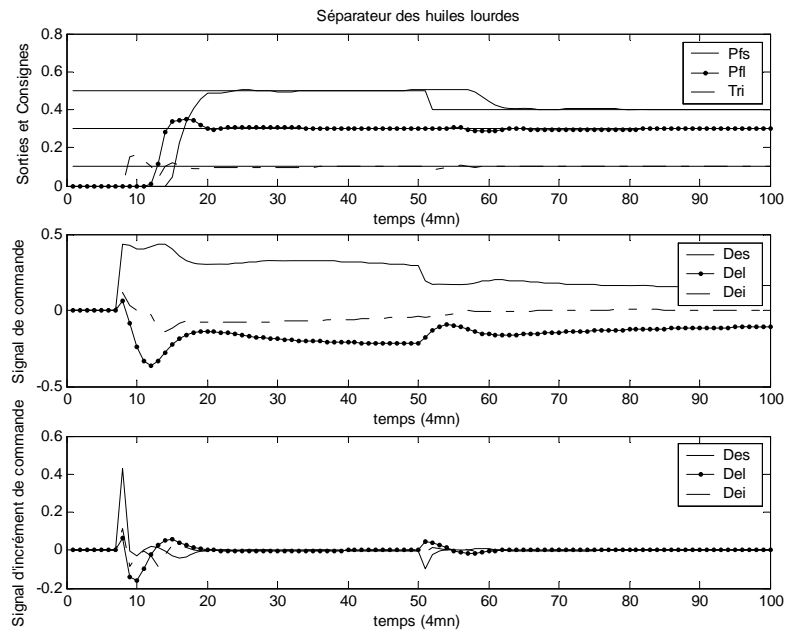


Fig 2.2 : Commande de Séparateur

Le retard pur minimal pour chaque variable de sortie, exprimé en temps d'échantillonnage est 6, 3 et 0 respectivement. Le résultat obtenu par l'application de GPC est illustré dans la figure 2.2, pour un horizon de commande commun 30, un horizon de commande 5 pour

les tous les variables, des matrices de pondération sont choisies pour être égale à $Q = I$ et $R = 2I$.

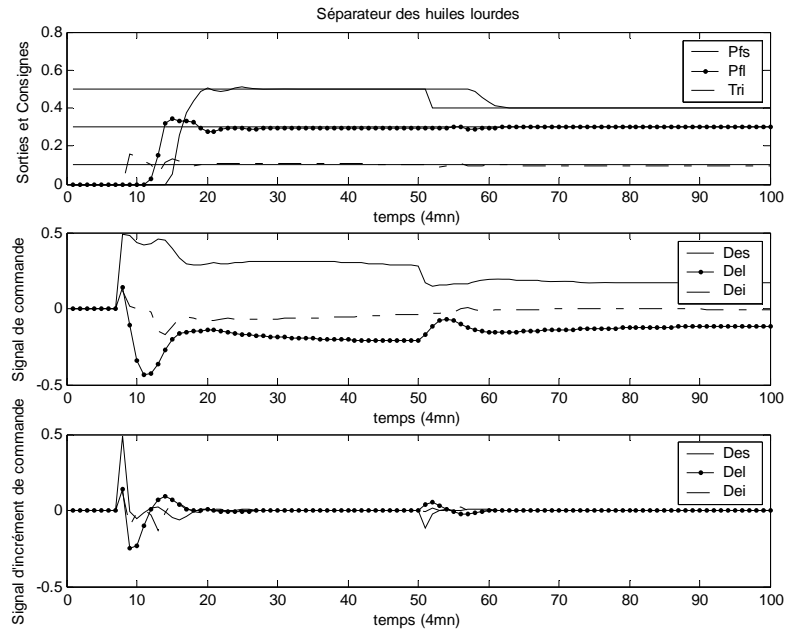


Fig 2.3 : Diminution des interactions avec un choix de Q

La figure 2.3, pour le cas d'un horizon commun de prédiction 30, un horizon de commande 5 pour toutes les variables. Les matrices de pondération choisies pour être égales à $Q = 0.5I$ et $R = 2I$. Ce choix des matrices de pondération nous permet d'avoir des perturbations produites en température de point final latéral et température de reflux inférieur due au changement de consigne de température de point final supérieur, qui sont plus petites que précédemment, désignant un degré d'interaction en boucle fermée moins, entre les variables de commandes et les variables commandées, malgré qu'elles sont hautement couplées en boucle ouverte.

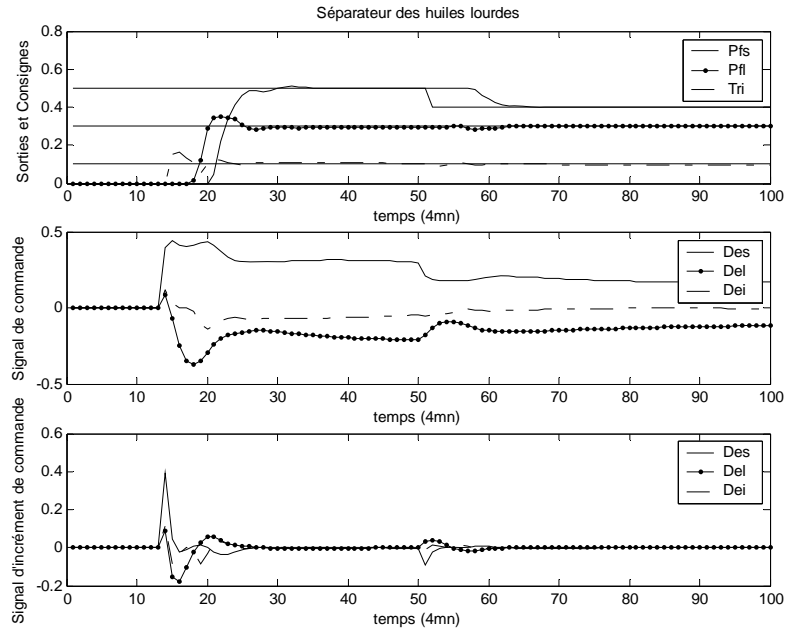


Fig 2.4 : GPC avec le prédicteur de Smith

Dans le cas d'application d'une commande GPC avec prédicteur de Smith, qui connu dans la littérature sous le nom de *Smith predictor GPC (SPGPC)*, avec les mêmes paramètres de synthèse, nous allons avoir un retard en plus pour tous les variables de sorties, qui peut être considéré comme un inconvénient pour cette approche d'hybridation.

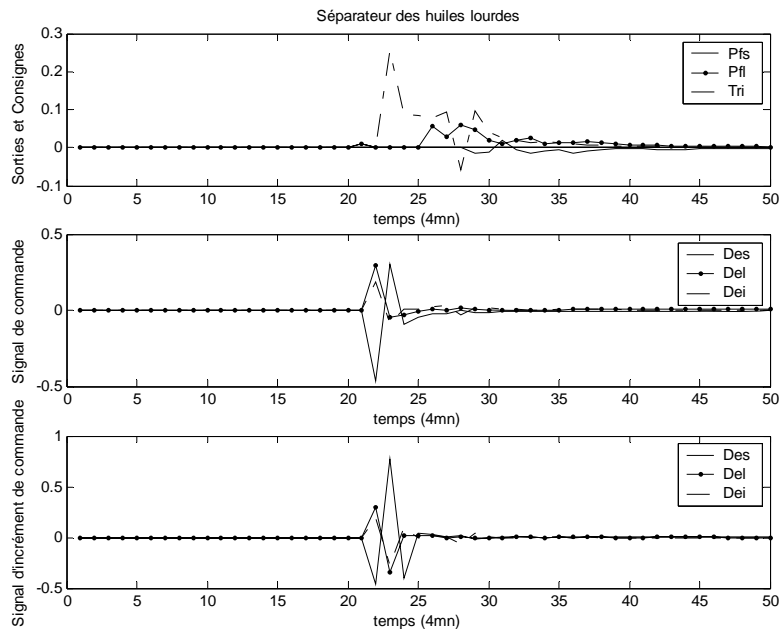


Fig 2.5 : Effet de perturbation introduit en reflux d'extrait supérieur

Un échelon de perturbation d'amplitude 0.5 est introduit en reflux d'extrait supérieur, en conservant la consigne à zéro. Les résultats obtenus quant en appliquant la GPC avec les précédent paramètres de synthèse sont illustrés da la figure (2.5).

Cette figure montre clairement que la dynamique de rejet est très rapide malgré la hausse charge de perturbation (Le gain statique pour la perturbation en point finale supérieur et latéral, est de l'ordre de 0.91).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé la version algorithmique de la Commande Prédictive Généralisée multivariable, on peut y noter une grande similitude avec les relations obtenues en monovariable, celle-ci est valable même pour la version polynomiale.

La commande prédictive généralisée assure un découplage implicite des variables à commandées par un choix convenable des matrices de pondération, mais ceci avec une perte des performances de poursuite du signal de consigne.

Mais, pour les systèmes avec couplage normal, la GPC provoque un couplage moins. Dans ces cas, l'utilisation de découplage explicite va augmenter la complexité de commande.

Chapitre 3

Commande prédictive GPC sous contraintes

Introduction

Le problème de commande qui a été formulé dans les chapitres précédents, considère que tous les signaux possèdent une gamme illimitée, malheureusement ceci, n'est pas très réaliste parce que dans la pratique tous les processus sont soumis à des contraintes.

Ces contraintes peuvent être de toutes sortes et ce pour plusieurs raisons : Limitation physique des actionneurs, spécifications de qualité d'un produit, exigence de sécurité, etc. En outre, dans la pratique, les points de fonctionnement des systèmes sont déterminés pour satisfaire des buts économiques et pour se trouver à l'intersection de certaines contraintes.

Si les contraintes ne sont pas considérées dans la conception de la commande, il résulte une dégradation des performances en boucles fermée et même un risque d'avoir un comportement indésirable.

Bien que les restrictions à l'entrée et à la sortie du processus se traitent de même manière, comme sera montré en ce chapitre, les implications de chaque type de contraintes sont différentes.

Les restrictions en sortie sont fondamentalement dues à des raisons de sécurité opérationnelles, et doivent être contrôlées à l'avance puisqu'elles peuvent endommager les équipements physiques et causer des pertes dans la production. Dans le cas des variables d'entrée, elles peuvent toujours être bornées dans leurs limites permises en fonction des

mécanismes de saturation, en coupant l'action de commande pour une valeur qui satisfait des contraintes d'amplitude et de variation.

Les techniques de la commande MPC intègrent les contraintes pendant la phase de synthèse et d'implantation du contrôleur, permettant à l'ingénieur de présenter les contraintes d'une façon directe de sorte que l'algorithme trouve automatiquement la meilleure solution admissible.

Le système de commande, particulièrement dans le cas de la commande prédictive avec de grands horizons de prédiction, doit prévoir la violation des restrictions et corriger d'une forme appropriée.

3.1 Les contraintes

En pratique il est habituel d'employer le GPC standard pour calculer le signal $u(t)$, sans contraintes, puis, de le saturer à ses limites permises. Cette façon de procéder ne garantit pas que soit obtenue l'optimalité quand les contraintes sont violées par la solution sans contraintes.

Afin d'illustrer ce fait, et pour considérer le cas de la violation des contraintes dans l'amplitude du signal d'entrée est représenté sur la figure 3.1 un problème de GPC avec vecteur de commande de valeur 2. Sont tracées les courbes de valeur constante d'une fonction objective quadratique qui dépend de deux variables $\{u_1, u_2\}$.

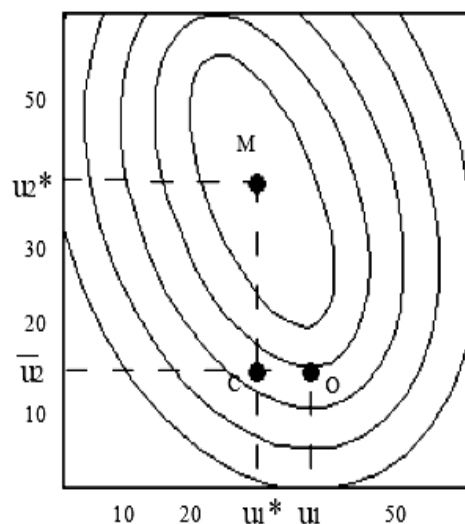


Fig 3.1. Signal de commande avec des contraintes

- Si les contraintes n'existent pas, la solution optimale de coût minimum est clairement donnée par $\{u_1^*, u_2^*\}$

- Si l'action de commande u_2 a une limite supérieure u_2 la solution appliquée par une stratégie ne prenant pas en compte des contraintes dans la minimisation sera $\{u_1^*, u_2\}$ qui correspond au point C de la figure.
- Si l'action u_2 de commande a une limite supérieure u_2 et si les contraintes sont considérées dans l'optimisation, la solution optimale correspond au point O dans la figure : u_2 se maintient à sa valeur maximum u_2 mais u_1 est déplacé de sa valeur initiale u_1^* pour compenser la saturation de u_2 .

Le fait de ne pas considérer les contraintes dans les variables manipulables peut causer une détérioration de la fonction objectif et conduire à un comportement peu désirable du système commandé.

3.2. Modélisation des contraintes

La proposition principale du GPC, qui est d'appliquer la meilleure action de commande possible en vue de minimiser la fonction objective, ne sera pas atteinte de cette façon.

Les différentes méthodologies de la commande MPC permettent d'anticiper la violation des contraintes compte tenu de leur caractère prédictif. Les prochains paragraphes se proposent d'analyser les différentes contraintes considérées habituellement dans l'industrie des processus (autant du point de vue des contraintes physiques et de la sécurité, que du point de vue du comportement désiré), et de présenter la forme dans laquelle elles doivent être formulées pour les décrire dans l'étape d'optimisation.

3.2.1. Contraintes sur l'amplitude du signal de commande

Les contraintes sur l'amplitude du signal de la commande, assez fréquentes en pratique (pour prendre en compte, par exemple, des effets de saturation à forts signaux), peuvent s'exprimer au moyen de l'inégalité suivante :

$$U_{\min} \leq u(t) \leq U_{\max} \quad (3.1)$$

Pour un processus de m entrées et de n sorties avec des contraintes sur tout l'horizon fuyant N d'optimisation

$$IU_{\min} \leq U(k) \leq IU_{\max} \quad (3.2)$$

Où $U(k) = [u(k) \ u(k+1) \dots \ u(k+N-1)]^T$. I est une $(N \times n) \times m$ matrice formé par N $m \times m$ matrices d'identités (l'écriture est faite dans le cas matricielle (ou multivariable), sa spécification au cas monovariable étant triviale).

Il convient parfois de représenter cette contrainte en fonction des accroissements successifs $\Delta u(t)$ de la commande, soit

$$IU_{\min} \leq T\Delta U(k) + Iu(k-1) \leq IU_{\max} \quad (3.3)$$

où T est une matrice $N \times N$, triangulaire inférieure, ou les blocks entiers non nulle sont $m \times m$ matrices d'identités .

3.2.2. Contrainte sur la vitesse de variation du signal de commande

Les restrictions sur l'augmentation du signal de commande prennent une forme très simple, et peuvent être exprimées au moyen de l'inégalité :

$$\Delta U_{\min} \leq u(k) - u(k-1) \leq \Delta U_{\max} \quad (3.4)$$

Ou sous la forme vectorielle, portant sur les variations $\Delta u(t)$:

$$I \Delta U_{\min} \leq \Delta U(k) \leq I \Delta U_{\max} \quad (3.5)$$

3.2.3. Restrictions sur l'amplitude de la sortie

Il est très fréquent de trouver comme spécification désirée dans les processus commandés que leur sortie se trouve dans une fourchette autour d'une trajectoire désirée, par exemple, dans les cas de poursuite d'un certain profil avec une certaine tolérance. Ce type de condition peut être introduite pour le système de commande le forçant à ce que la sortie du système soit à tout moment comprise dans la bande constituée par la trajectoire indiquée plus ou moins la tolérance ceci se traduit par une inégalité de la forme:

$$Y(t)_{\min} \leq y(t) \leq Y(t)_{\max} \quad (3.6)$$

Soit $y(k) = [y(k) \ y(k+1) \dots \ y(k+N)]$ (hypothèse y scalaire). Sur l'horizon d'optimisation la contrainte s'écrit :

$$Y(k)_{\min} \leq y(k) \leq Y(k)_{\max} \quad (3.7)$$

où, à l'évidence,

$$\begin{aligned} y(k)_{\min} &= [y_{\min}(k) \ y_{\min}(k+1) \dots \ y_{\min}(k+N)] \\ y(k)_{\max} &= [y_{\max}(k) \ y_{\max}(k+1) \dots \ y_{\max}(k+N)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Les inégalités s'entendent composantes par composantes.

Par rapport aux incréments sur la variable de commande une telle contrainte peut s'écrire :

$$Y(k)_{\min} \leq G\Delta U(k) + f(k) \leq Y(k)_{\max} \quad (3.9)$$

où $f(k)$ est la sortie de régime libre a partir de k .

$$G = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g^2 & g & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{N-1} & g^{N-2} & g^{N-3} & \dots & g \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

où g est la réponse indicielle sur une période.

Sur les accroissements de la commande, ces diverses contraintes peuvent s'exprimer sous forme condensée comme, $R\Delta u \leq c$ [EC93], avec:

$$R = \begin{bmatrix} I_{N \times N} \\ -I_{N \times N} \\ T \\ -T \\ G \\ -G \end{bmatrix}; c(k) = \begin{bmatrix} I\Delta U_{\max} \\ -I\Delta U_{\min} \\ IU_{\max} - Iu(k-1) \\ -IU_{\min} + Iu(k-1) \\ IY(k)_{\max} - f(k) \\ IY(k)_{\min} - f(k) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.2.4. Restrictions sur les oscillations permises dans la sortie du système

Dans de nombreux processus de fortes oscillations pour les variables de sortie du système ne sont pas souhaitables, c'est le cas des manipulateurs, pour lesquels une sur-oscillation peut produire des collisions avec d'autres éléments dans l'aire de travail. Il est également très facile de traiter ce type de restrictions dans le contexte prédictif. Toutes les fois qu'un changement de la référence intervient, et qui est maintenue constante sur une période suffisamment longue, les restrictions suivantes sont ajoutées au système de commande :

$$y(k+1) \leq \gamma w(k) \quad \text{Pour } i = N_{01} \dots N_{02} \quad (3.12)$$

où N_{01} et N_{02} définissent l'horizon pendant lequel la sur oscillation peut être observée (ils peuvent toujours être pris égaux à 1 et à N respectivement si cet horizon n'est pas connu) et $\gamma > 1$ est un facteur généralement près de l'unité qui permet de définir le maximum permis pour les sur-oscillations par rapport à la référence. En termes d'augmentation des variables manipulées, il est ainsi possible d'écrire [EG04] :

$$G\Delta u \leq I\gamma w(k) - f \quad (3.13)$$

3.2.5. Restrictions pour éviter des comportements de phase de non minimale

Il existe des processus qui exhibent naturellement un comportement de phase non minimale, cela se produit quand le processus sous l'effet de variation brusque de l'entrée tend à voir, aux premiers moments transitoires, la variable de sortie évoluer dans le sens contraire à sa position finale. Ce comportement peut ne pas être souhaitable dans certains cas, des restrictions de la forme suivante peuvent alors être définies :

$$\begin{aligned} y(k+j) &\leq y(k) \quad \text{si} \quad y(k) > w(k) \\ y(k+j) &\geq y(k) \quad \text{si} \quad y(k) < w(k) \end{aligned} \quad (3.14)$$

En termes de variables de commande ces contraintes peuvent être représentées par l'inégalité (choisissant par exemple les restrictions $y(k) < w(k)$):

$$G\Delta u \geq I y(k) - f \quad (3.15)$$

3.2.6. Contraintes sur l'état final atteint

Ce type de restrictions apparaît dans une série d'algorithmes de commande. Dans le cas de la méthodologie GPC elles se rencontrent dans la stratégie connue comme "commande prédictive restreinte de l'horizon glissant" CRHPC (Constrained Receding Horizon Predictive Control), où sont introduites des restrictions artificielles en vue de garantir la stabilité du système commandé [GL04]. Ceci est fait au moyen de l'imposition sur les sorties prévues à ce qu'elles suivent la référence pendant un certain nombre m de périodes après un certain horizon N .

Les restrictions terminales de l'état du système peuvent être exprimées comme des restrictions d'égalité sur les incréments de la commande future en utilisant l'équation de prédiction pour $Y_m = [y(k+N+1) \quad y(k+N+2) \dots y(k+N+m)]$, soit

$$Y_m = G\Delta u + f_m \quad (3.16)$$

où f_m étant le régime libre à partir de $k+N$.

Toutes les restrictions exposées peuvent être exprimées sous la forme $R\Delta u \leq c$ et $A\Delta u = a$. L'algorithme GPC quand sont considérées les restrictions consiste en la minimisation de la fonction objectif $J(k)$ sous l'ensemble des contraintes linéaires.

3.3. Optimisation

Auparavant, on a constaté que le problème d'optimisation (3.17) est un programme quadratique. Les références les plus récentes qui tirent profit de ce fait dans un contexte MPC est probable, bien qu'il ait été en service dans l'industrie pendant une tout à fait certaine temps avant. La programmation quadratique est un problème d'optimisation classique pour lequel existent des méthodes de solution efficace, et c'est probablement l'une des raisons pour lesquelles MPC est devenu si populaire dans la pratique.

Pour mettre le problème d'optimisation sous une forme appropriée à la programmation quadratique, nous présentons la fonction objective sous la forme appropriée :

$$J(u) = \frac{1}{2} u^T H u + bu + f_0 \quad (3.17)$$

3.3.1. La programmation quadratique

En considérant l'optimisation « programmation quadratique », comme un ensemble particulier des problèmes de programmation non linéaires, où on peut souligner quelques points. Les problèmes programmation quadratique sont définis en tant que minimisation de la fonction objective quadratique de l'équation (3.17).

L'un des résultats importants de la programmation mathématique, est d'élaborer des concepts de convexité, ainsi, si le problème de programmation non linéaire, connu sous le nom de problème de programmation convexe, aura les propriétés suivantes :

- $J(u)$ est une fonction convexe.
- Chaque contrainte d'inégalité est une fonction convexe (Les contraintes forment un ensemble convexe), lors le minimum local est également un minimum global.

Dans les problèmes de programmation linéaire la fonction objective est toujours convexe, et les contraintes forment un ensemble convexe, ainsi, l'optimum local est toujours un optimum global. Pour la programmation quadratique la fonction objective est convexe si $u^T H u$ est semi défini positif, par conséquent H doit être semi défini positif.

Supposant que le problème de programmation quadratique à une fonction objective convexe, la deuxième condition doit avoir des contraintes qui forment un ensemble convexe.

Le point faisable ou le vecteur de programmation quadratique est n'importe quel vecteur qui satisfait les contraintes d'égalité et d'inégalité. L'ensemble de tous les vecteurs qui satisfont les contraintes constitue un domaine de fonction faisable. Un optimum sous

contraint est un ensemble dans lequel l'optimum local se trouve sur la frontière de la région faisable. En relation avec juste les contraintes d'inégalité par point peuvent être classifié comme point intérieur (un point faisable) ou un point extérieur (un point non faisable). Ainsi, un point intérieur est un point pour lequel toutes les contraintes d'inégalité sont strictement respectées. L'ensemble des points pour lesquels la fonction objective a une valeur constante s'appelle *le contour de la fonction coût*.

Dans le cas de la programmation non linéaire avec des contraintes d'inégalité et d'égalité, nous définissons un point à être un minimum local si la fonction objective ne peut pas diminuer le long d'aucun arc lisse dirigé de ce point dans la région faisable. Puisque les méthodes de programmation linéaires sont appliquées avec succès à des problèmes de grand dimensionnel (contenant des contraintes linéaires d'inégalité), la linéarisation du problème non linéaire semble être une approche sensible à la résolution de tels problèmes [NB03].

3.3.2 Respect des contraintes :

Comme a été montré précédemment, les incréments de commande calculés par la stratégie GPC sont obtenus par la minimisation d'une fonction objective quadratique :

$$J = (y - w)^T (y - w) + \lambda \Delta u^T \Delta u$$

Avec w est futures références, y ordre de futures prédictions constituées par la réponse forcée et libre :

$$y = G\Delta u + f$$

Δu sont les futurs incréments de commande, G matrice contient les coefficients de la réponse indicielle de la boucle ouverte du système et f contient les termes de présent et de passé des sorties et de passé des entrées de modèle (sortie de système si les incréments de commande sont égale à zéro). Par la substitution des futures sorties dans la fonction de coût :

$$J = \frac{1}{2} \Delta u^T H \Delta u + b^T \Delta u + f_0$$

$$\text{Avec } H = 2(G^T G + \lambda I), b^T = 2(f - w)^T G,$$

La solution optimale sans contraintes est linéaire: $\Delta u = -H^{-1}b$. Quand des contraintes sont prises en considération, il n'y a aucune solution explicite et des algorithmes d'optimisation doivent être employés. Dans ce cas-ci, le problème peut être posé comme une fonction de coût quadratique avec des contraintes linéaires d'inégalité et d'égalité en incrément de

commande Δu ($R\Delta u \leq c$ et $A\Delta u = a$), c'est un problème de programmation quadratique.

Les différentes contraintes qui peuvent être prises en considération sont montrées dans les paragraphes précédentes.

3.4. Application

Dans cette paragraphe, nous allons conserver la même application que le chapitre précédent, le séparateur des huiles lourdes *Shell heavy oil fractionnator*. Dans ce problème on va examiner la capacité de cette stratégie de commande multivariable de poursuivre la consigne, respecter les restrictions, rejeter la perturbations, réunir des objectifs économiques en présence des temps morts longs, gain incertain de modèle, des contraintes multiples et des réponses rapides et lentes mélangées [SL05].

Les contraintes sont [MA03] :

- Garder les points finals supérieurs et latéraux (Pfs et Pfl) à leurs points de réglage $\pm 0.5\%$ de consigne en régime statique et $|y_i| \leq 0.5$ ($i = 1,2$).
- Maintenir la température de reflux inférieur (Tri) entre ± 0.5 .
- Contraindre tous variable de commande entre ± 0.5 , et la variation de commande entre ± 0.2 .
- Réduire au minimum le reflux d'extrait inférieur (Dei). La minimisation de (Dei) implique la maximisation de vapeur produite par cette pompe autour de leur boucle.
- Rejeter les perturbations provoquées par le reflux d'extrait intermédiaire et supérieur ($U_4(t)$ et $U_5(t)$).

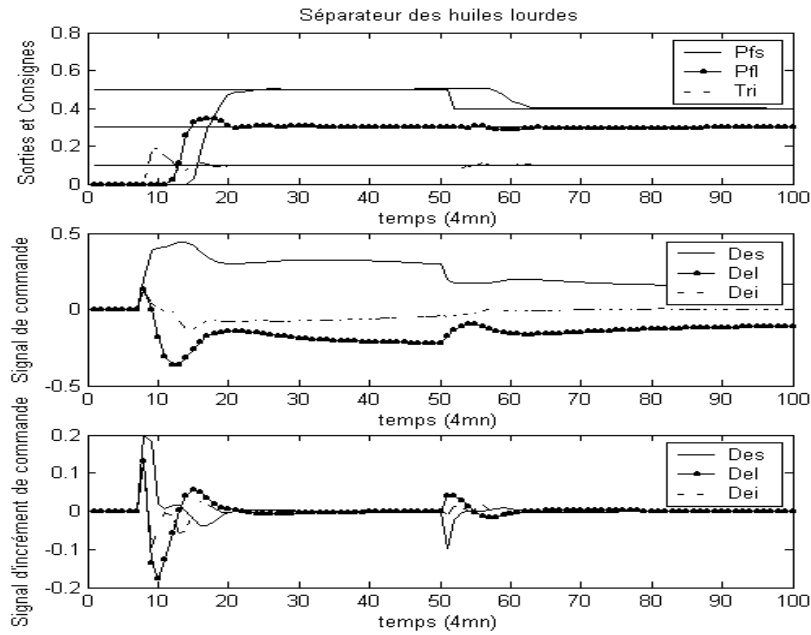


Fig 3.2 : Commande de séparateur avec la présence des contraintes

La stratégie GPC avec les paramètres de synthèse suivantes : un horizon de commande commun 30, un horizon de commande 5 pour les tous les variables, des matrices de pondération $Q = I$ et $R = 2I$, est capable de maintenir les sorties du procédé à sa valeur de consigne quelque soient les variations de consigne, malgré que ne soit pas toujours physiquement réalisable.

La variable de commande reflux d'extrait inférieur (Dei) est la quantité de chaleur apportée au bouillier. Il existe une limite inférieure sur la quantité de chaleur en dessous de cette limite, il n'y plus suffisamment de production de vapeur et le liquide ne reste pas sur les plateaux, il existe une limite supérieure : au dessus de cette limite, il y a engorgement dans la colonne.

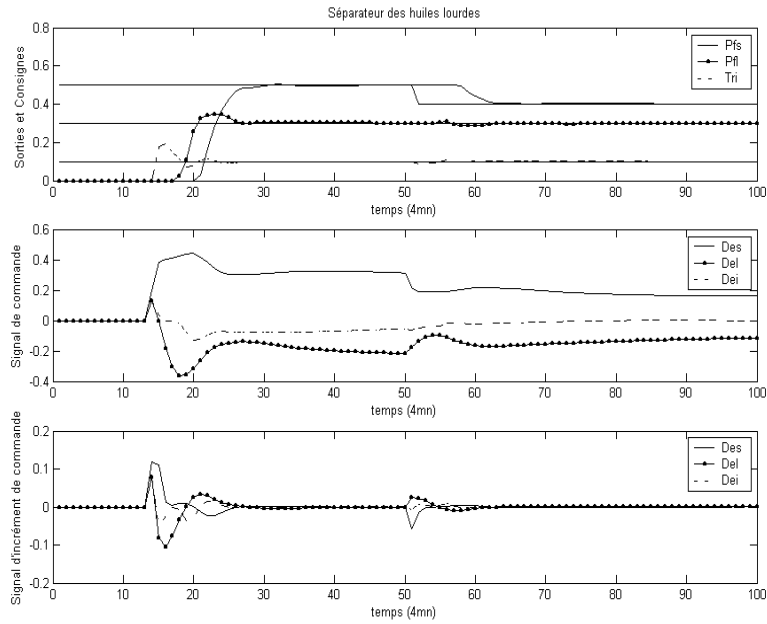


Fig 3.3 : GPC sous contrainte avec le prédicteur de Smith

Dans le cas d'application d'une commande GPC avec prédicteur de Smith, qui connu dans la littérature sous le nom de *Smith predictor GPC (SPGPC)*, avec les mêmes paramètres de synthèse, nous allons avoir un retard en plus pour tous les variables de sorties, qui peut être considéré comme un inconvénient pour cette approche d'hybridation, mais toujours avec le respect des contraintes sur les variables de sortie et de commande et de l'incrément de commande.

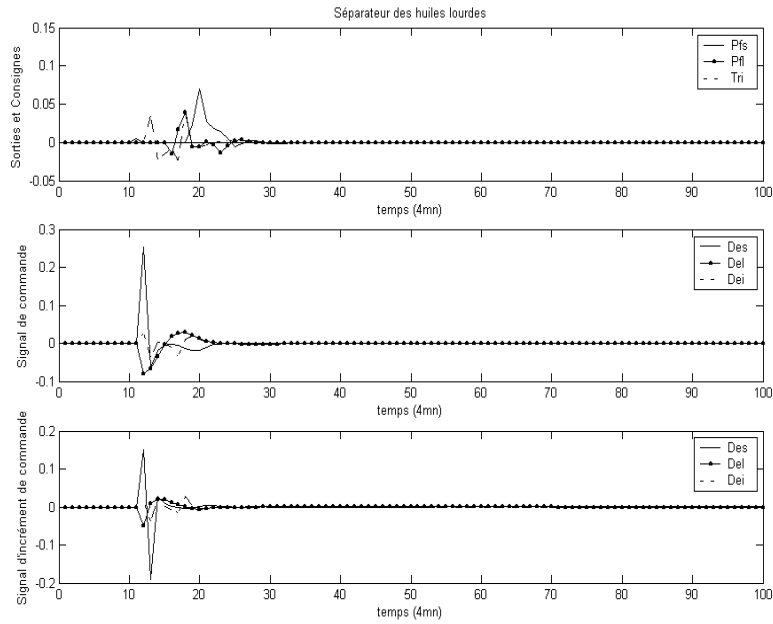


Fig 3.4 : Effet de perturbation introduit en reflux d'extrait supérieur

Un échelon de perturbation d'amplitude 0.5 est introduit en reflux d'extrait supérieur, et - 0.5 en reflux d'extrait intermédiaire, en conservant la consigne à zéro. Les résultats obtenus quant en appliquant la GPC avec les précédents paramètres de synthèse sont illustrés dans la figure (3.4).

Cette figure montre clairement que la dynamique de rejet est très rapide malgré la hausse charge de perturbation (Le gain statique pour la perturbation en point finale supérieur et latéral, est de l'ordre de 0.91), et toutes les variables de commande et de l'incrément de commande sont dans les limites des contraintes.

3.5. Conclusion

La marge opérationnelle des raffineries étant faible, améliorer leur fonctionnement constitue une nécessité vitale. En effet, optimiser conduit à utiliser au mieux les unités installées, à opérer sur les différentes limites techniques (engorgement d'une colonne à distiller par exemple) et à employer toute l'autorité de commande des actionneurs (comme l'ouverture de vanne maximale).

La régulation dynamique doit pouvoir prendre en compte, à tout instant, les *contraintes* sur les variables d'action et les variables d'état internes du processus. Nous avons vu dans ce chapitre, que la commande prédictive sait prendre en compte de façon satisfaisante et simple, plusieurs types de contraintes. La commande multivariable sous contraintes, s'attaque aux problèmes de distillation opérée par de grosses unités de production, où le temps de retour sur investissement est de ce fait très court. Cela nécessite des installateurs aux compétences particulières, avec des budgets lourds, et des algorithmes de commande très performants, pour cela nous avons choisis cet exemple illustratif.

Chapitre 4

Les méthodes de robustification

Introduction

Le travail du présent chapitre est axé sur la robustification de la commande prédictive généralisée (GPC).

D'une part, par le choix de ses paramètres de réglage, GPC permet de retrouver le comportement de bon nombre de lois de commande (placement de pôles, modèle interne, etc.). Des études sur l'ajustement des paramètres permettant d'obtenir une performance nominale et une certaine robustesse ont également été réalisées [PA98]. Des méthodes d'autoréglage sont aussi possibles, comme indiqué dans [PB96, RB01].

D'autre part, en ce qui concerne la robustification d'une commande GPC, on peut citer les travaux réalisés depuis une dizaine d'années, où l'on remarque déjà l'utilisation de l'outil fourni par la paramétrisation de Youla pour robustifier la loi de commande. Cependant, ces processus de robustification ne permettent pas toujours d'ajuster facilement le compromis entre la robustesse et la performance de la commande. Par ailleurs, la paramétrisation de Youla est un outil très général qui a déjà permis d'obtenir des résultats satisfaisants dans d'autres domaines, comme la synthèse H_∞ de correcteurs, le séquençement de gains [BC01] ou l'analyse de faisabilité d'un cahier de charges [SH02]. Tout cela incite à utiliser cet outil pour la synthèse d'une méthodologie de robustification d'une structure de commande prédictive.

Dans ce paragraphe, sont examinées trois approches développées dans la littérature, notamment par les références [PR03, PA98], pour la robustification d'une commande GPC. Ces méthodes, ainsi que la méthode développée dans ce travail, sont des méthodes à

deux pas: dans un premier pas, on cherche les paramètres GPC (N_1, N_2 et N_u) conférant au système le comportement entrée/sortie désiré, et dans un deuxième pas, on cherche à robustifier ce correcteur initial sans changement du comportement entrée/sortie fixé par l'étape initiale. On a vu, dans le paragraphe précédent, que le polynôme C permet de robustifier le correcteur initial sans changement du comportement entrée/sortie de la boucle fermée. Ce comportement peut être généralisé à une classe de contrôleurs stabilisant le système. Avant d'aborder les différentes approches de robustification, la paramétrisation permettant de paramétrer cette classe de contrôleurs stabilisant le système est préalablement développée.

4.1. Paramétrisation de régulateur

En utilisant les développements présentés dans le premier chapitre, et spécialement l'équation (1.35), à partir d'un régulateur polynomial initial $R-S-T$ synthétisé avec $C=1$. Si l'on note $R-S-T$ ce régulateur obtenu lorsque $C \neq 1$. La classe des régulateurs RST stabilisants est paramétrée par la paramétrisation antérieurement citée avec

$$\text{le paramètre } Q = \frac{M}{C}.$$

$$S = S' - q^{-1}BQ$$

$$R = R' + \Delta AQ$$

$$(4.1)$$

$$T = T'$$

Cette paramétrisation est représentée Figure 4.1 :

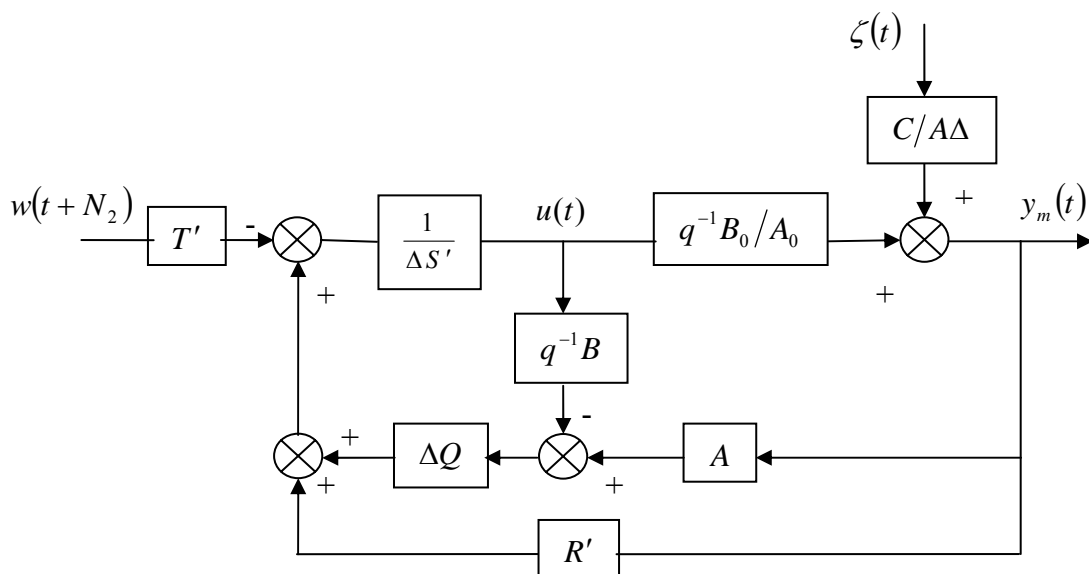


Fig 4.1 : Structure de contrôleur GPC équivalent

La boucle externe est un contrôleur (R, S, T) optimale pour un modèle déterministe $(C=I)$, tant que la boucle interne est correction destinée pour le rejet de bruit coloré, modélisé par $C/\Delta A$. Ce diagramme block montre que le contrôleur GPC a une structure d'un *contrôleur à modèle interne* (*Internal Model Controller IMC*).

IMC est synthétisé en deux étapes indépendantes : la première est de trouver un contrôleur stabilisant, et la suivante d'ajuster le filtre IMC dans l'ordre d'obtenir des performances robustes face aux perturbations et des incertitudes du modèle. Cette analogie, nous permettons de suggérer que la synthèse GPC peut être procédé juste comme une synthèse IMC.

La première étape, calculer un contrôleur stabilisant RST à partir du modèle de système pour assurer la poursuite de référence, observant que le polynôme C n'influence pas le transfert entrée/sortie. Dans la seconde étape, le polynôme C est désigné pour la robustification de commande face au modèle d'incertitude ou de perturbation, il existe de nombreuses méthodologies pour trouver le polynôme C convenable, mais ne proposent pas une conception systématique. La difficulté de sélection de polynôme C est observée dans beaucoup des travaux, à cause de la dépendance de M par rapport à C .

Dans le cas d'un rejet de perturbation, il n'est pas possible de prédire combien le polynôme C va affecter les zéros de régulation.

Remarque

Les grandeurs mentionnées dans l'équation (4.1), interviennent des transferts car Q est transfert stable. Pour retrouver des expressions polynomiales, il est nécessaire de décomposer Q en numérateur et dénominateur, sous la forme :

$$Q = \frac{Q_{num}}{Q_{den}}$$

$$S = \frac{S'Q_{den} - q^{-1}BQ_{num}}{Q_{den}} = \frac{\bar{S}}{Q_{den}}$$

$$R = \frac{R'Q_{den} + \Delta A Q_{num}}{Q_{den}} = \frac{\bar{R}}{Q_{den}}$$

$$T = T'$$

On a donc :

$$\bar{S} = S'Q_{den} - q^{-1}BQ_{num}$$

$$\bar{R} = R'Q_{den} + \Delta A Q_{num}$$

$$\bar{T} = T'$$

Les degrés des polynômes $\bar{R} \bar{S} \bar{T}$ après la paramétrisation sont :

- Degré de $\bar{R}(q^{-1})$: $\max(n_{R'} + n_{Q_{den}}, n_a + 1 + n_{Q_{num}}) = n_a + \max(n_{Q_{den}}, 1 + n_{Q_{num}})$
- Degré de $\bar{S}(q^{-1})$: $\max(n_{S'} + n_{Q_{den}}, n_b + 1 + n_{Q_{num}}) = n_b + \max(n_{Q_{den}}, 1 + n_{Q_{num}})$
- Degré de $\bar{T}(q^{-1})$: $n_c + N_2 - N_1 + n_{Q_{num}}$

On constate que si Q est stable, alors son numérateur et son dénominateur sont libres, de sorte que ce paramètre Q apporte un degré de liberté supplémentaire par rapport au polynôme C .

4.2. Les méthodes de robustification

4.2.1. Approche SGPC

Cette approche est appelée *Stable Generalized Predictive Control (SGPC)*, car elle présente une méthode basée sur le GPC pour des systèmes instables et difficilement stabilisables avec GPC. La dernière phase de cette méthode réalise une robustification de la commande obtenue à partir du paramètre Q . Il s'agit de trouver le paramètre Q qui apporte le maximum de robustesse au régulateur, en minimisant une norme pondérée.

La relation du marge de robustesse B_r , peut ici s'exprimer en fonction du régulateur R' - S' - T' obtenu pour $C=I$, et du paramètre Q compte tenu de (4.1). Pour le régulateur $R'S'T'$, on a :

$$A_c = A\Delta S' + q^{-1}BR' \quad (4.2)$$

La marge de robustesse peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} B_r &= \left| \frac{P_c}{AR} \right| = \left| \frac{A\Delta S + q^{-1}BR}{AR} \right| \\ &= \left| \frac{A\Delta(S' - q^{-1}BQ) + q^{-1}B(R' + \Delta AQ)}{A} \frac{1}{R' + \Delta AQ} \right| \\ &= \left| \frac{A_c}{A} \frac{1}{R' + \Delta AQ} \right| = \left| \frac{1}{U} \right| \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour augmenter la robustesse, on doit trouver Q tel que $1/U$ soit maximisé. En introduisant une pondération W , cette relation devient :

$$\min_Q \|W(q^{-1})U(q^{-1})\|_{\infty} = \min_Q \sup_w |W(e^{-jw})U(e^{-jw})| \quad (4.4)$$

On doit alors trouver Q tel que la norme H_{∞} soit minimisée. W permet de pondérer de façon plus importante les fréquences où les incertitudes du modèle sont les plus grandes.

Si $A(q^{-1})$ est stable, une expression pour Q_{opt} est donnée par [TW95] :

$$Q_{opt} = \frac{Qn_{opt}}{Qd_{opt}} = \frac{\left(-WAR' + \frac{W(1)A(1)R'(1)}{A_c(1)} A_c \right) / \Delta}{WA^2} \quad (4.5)$$

Preuve [TW95, JD90] : Une première étape consiste à simplifier les notations :

$$WU = W \frac{A(R' + \Delta A Q)}{A_c} = \frac{WAR'}{A_c} + \frac{W\Delta A^2}{A_c} Q = T_1 + T_2 Q$$

Il est clair que :

$$\|T_1(q^{-1}) + T_2(q^{-1})Q(q^{-1})\|_{\infty} \geq |T_1(1) + T_2(1)Q(1)|$$

Car la norme H_{∞} représentant le plus grand des modules $\forall w$ sera supérieure ou égale à $|T_1(1) + T_2(1)Q(1)|$, mais elle ne peut être plus petite. D'autre part, on a :

$$T_2(1) = \frac{W(1)\Delta(1)(A(1))^2}{A_c(1)} = 0$$

car $\Delta(1) = 0$. Donc :

$$\|T_1(q^{-1}) + T_2(q^{-1})Q(q^{-1})\|_{\infty} \geq |T_1(1)|$$

La norme la plus petite possible est donc $|T_1(1)|$. On obtient cette norme avec :

$$Q(q^{-1}) = \frac{-T_1(q^{-1}) + T_1(1)}{T_2(q^{-1})}$$

La substitution de T_1 et T_2 conduit finalement à (1.30) donnant une expression de Q_{opt} . Ce choix fait que $|T_1(q^{-1}) + T_2(q^{-1})Q(q^{-1})| = |T_1(1)|$, c'est à dire que $T_1(q^{-1}) + T_2(q^{-1})Q(q^{-1})$ est passe tout.

D'autre part, dans cette expression, on a une division par Δ . Pour que cette division soit possible, il faut que le polynôme divisé par Δ ait un zéro en $q^{-1} = 1$. Cela revient à ce que le polynôme ne soit nul pour $q^{-1} = 1$. On a :

$$-W(1)A(1)R'(1) + \frac{W(1)A(1)R'(1)}{A_c(1)} A_c(1) = 0$$

Cette division est donc toujours possible.

Si $A(q^{-1})$ est instable, la résolution conduisant à Q_{opt} peut être réalisée de façon numérique, voir [JW89].

4.2.2 Approche ‘C design’

Cette approche propose un choix simple de C pour les cas où le système est stable. Ce choix procure une robustesse équivalente à celle obtenue par l’approche précédente.

Le polynôme C proposé est :

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})(1 - \beta q^{-1})^{N_1 - \delta(p)} \quad (4.6)$$

avec les paramètres GPC recommandés suivants :

$$N_1 = N_u \geq n$$

$$N_2 = N_1 + n - 1$$

$$\rho(i) = \alpha^{-2i}$$

Pour

$$n = \text{ordre du système} \frac{q^{-1}B(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})}$$

et où :

- β doit être approximativement de l’ordre du pôle dominant de A .
- $\delta(P)$ représente le degré du polynôme P . Ce polynôme correspond à la définition d’une trajectoire de référence issue de la consigne. Dans notre cas, il n’est pas utilisé, et donc $\delta(P) = 0$.
- ρ correspond à une pondération sur la commande. La méthode propose une pondération exponentielle. Dans notre cas, ρ correspond à λ , et on réalise une pondération constante.

Le choix de cette forme pour le polynôme C vient de l’observation de deux effets, analysés en détail dans [TW95]. Pour ces deux observations, on considère le filtre passe-bas I/C .

1. Le fait que la fréquence de coupure de I/C soit plus petite n’entraîne pas toujours une commande plus robuste. De cette observation, il s’ensuit qu’une fréquence de coupure du même ordre de grandeur que le pôle dominant du système donne de bons résultats.
2. Le fait que le degré du filtre I/C soit plus grand n’implique pas toujours une commande plus robuste. De cette observation, on détermine que le degré $n_a + N_1 + \delta(p)$ donne de bons résultats. Cette approche montre que l’on peut trouver des marges de robustesse égales ou supérieures à celles obtenues par la méthode SGPC.

4.2.3. Approche ‘Q design’

Cette approche vise à trouver un paramètre Q simple qui permette de robustifier la commande sans trop dégrader les performances du système. En effet, l’objectif des deux méthodes précédentes était de maximiser la robustesse, sans trop s’inquiéter de la perte de performances que cette robustification peut engendrer.

4.2.3.1. Modèle et système stables :

Dans cette section, Nous supposons que le modèle et le système sont stables et à partir de (4.1), nous posons :

$$B_r = \left| \frac{A_c C}{A R} \right| = \left| \frac{A_c}{A} \frac{1}{R' + \Delta A Q} \right| = \left| \frac{A_c}{A_c R'} \frac{R'}{R' + \Delta A Q} \right|$$

Dans l’expression $\left| \frac{A_c C}{A R} \right|$, A_c et A sont fixés par les paramètres GPC choisis et le modèle.

Il serait possible de robustifier le système en modifiant C/R , mais le problème qui se pose est de ne pas pouvoir choisir librement la forme de C/R , car R dépend de C . Pour éviter ce problème, l’idée consiste à choisir un paramètre Q permettant de découpler les deux parties, sous la forme :

$$Q = \frac{R'}{A} \frac{M^*}{C^*} \quad (4.7)$$

On obtient alors :

$$\left| \frac{A_c}{A} \frac{R'}{R' + \Delta A Q} \right| = \left| \frac{A_c}{A} \frac{R'}{R' + \Delta A \frac{R'}{A} \frac{M^*}{C^*}} \right| = \left| \frac{A_c}{A R'} \frac{1}{1 + \frac{\Delta M^*}{C^*}} \right|$$

Dans cette expression, la première partie est donnée par les paramètres GPC choisis, et la deuxième partie est libre, car on peut fixer librement les valeurs de ΔM^* et C^* .

Le choix proposé par la méthode considère $\frac{1}{1 + \frac{\Delta M^*}{C^*}}$ sous la structure d’un filtre passe

haut, afin que le système devienne ainsi moins sensible aux incertitudes à haute fréquence.

La structure classiquement définie est la suivante :

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta M^*}{C^*}} = \frac{1 - \mu_1 q^{-1}}{(1 - \mu_2) + (\mu_2 - \mu_1) q^{-1}}$$

avec :

$$\mu_1 < 1 \text{ et } 0 < \mu_2 \leq \mu_1$$

Cela implique :

$$\frac{\Delta M^*}{C^*} = \frac{-\mu_2(1-q^{-1})}{1-\mu_1 q^{-1}} \Rightarrow \begin{cases} M^* = -\mu_2 \\ C^* = 1-\mu_1 q^{-1} \end{cases} \quad (4.8)$$

et (4.3) devient :

$$B_r = \left| \frac{A_c}{AR' (1-\mu_2) + (\mu_2 - \mu_1)q^{-1}} \right|$$

Pour régler les paramètres μ_1 et μ_2 , on commence par $\mu_1 = \mu_2$ et $0,6 \leq \mu_1 \leq 0,9$ de façon à assurer largement la stabilité du système. Une fois la valeur de μ_1 fixée, on diminue μ_2 . Cela a pour résultat de diminuer l'effet passe-haut, sans toucher à la bande passante. On joue donc avec les dynamiques négligées autorisées à haute fréquence et la performance.

4.2.3.1 Modèle et système instables :

Dans le cas où le système est instable, le choix de $Q = \frac{R^* M^*}{A C^*}$ n'est pas possible car A est instable. On divise alors A en une partie stable (A^S) et une partie instable (A^u), sous la forme : $A = A^S A^u$, et l'on choisit :

$$Q = \frac{R^* M^*}{A^S C^*} \quad (4.9)$$

Le filtre passe-haut devient un filtre d'ordre plus élevé. On a:

$$\frac{1}{1 + \frac{A^u \Delta M^*}{C^*}} = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - \mu_i q^{-1})}{\prod_{i=1}^n k(1 - \alpha_i q^{-1})}$$

k est sélectionné dans le but d'avoir un filtre de gain statique qui égale à l'unité, avec

$$n = \text{degré de } A^u \text{ et } \deg(M^*) = 0.$$

Cela implique :

$$C^* = \prod_{i=1}^{n+1} (1 - \mu_i q^{-1}) \quad (4.10)$$

$$C^* + A^u \Delta M^* = \prod_{i=1}^n k(1 - \alpha_i q^{-1}) \quad (4.11)$$

On doit choisir $n+1$ paramètres μ_i et, ensuite, à partir de (4.10), déterminer la valeur de M^* et des α_i .

4.2.4 Approche ‘ λ design’

Cette approche est une stratégie basée sur le réglage, elle est recommandée dans [MI92]. Elle est obtenue par le réglage de facteur de pondération de commande λ jusqu’à l’obtention d’une boucle fermée stable de processus réel.

4.3. Application

Ce système est largement inspiré des deux références [PR03], [PB96], que le lecteur pourra consulter pour plus de détails sur ces éléments.

4.3.1. Généralité sur le fonctionnement

L’application ici, elle s’agit d’une machine asynchrone triphasée à cage de $1,1 \text{ kW}$ ayant 2 paires de pôles, couplée en étoile et délivrant un couple nominal de 7 Nm .

La machine asynchrone est alimentée par l’intermédiaire d’un onduleur de tension triphasé fonctionnant en modulation de largeur d’impulsion (MLI) à une fréquence de $13,05 \text{ kHz}$ ($T_e = 6,76 \mu\text{s}$). L’onduleur est lui-même alimenté sous une tension de 300 V et délivre un courant maximum par phase de 10 A , ce qui permet d’obtenir un couple maximum délivré par la machine de 21 Nm . La charge de la machine est constituée par un frein à poudre. L’inertie du système tournant peut prendre deux valeurs, $7 \cdot 10^{-3}$ et $15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg}$. Le frottement de type visqueux est de $0,01 \text{ Nm (rad/s)}^{-1}$. La mesure de la position mécanique est effectuée au niveau de la machine asynchrone par l’intermédiaire d’un codeur incrémental, offrant une résolution de 14400 points par tour mécanique.

Le système de commande permet d’estimer l’état magnétique de la machine et d’effectuer la commande de la position mécanique avec une période de $153,2 \mu\text{s}$. En revanche, la commande en tension de la machine est calculée à chaque période de l’onduleur, soit $6,76 \mu\text{s}$.

Le modèle de synthèse utilisé pour le calcul des paramètres du régulateur GPC robuste. Nous montrons dans la figure suivante le modèle discret utilisé pour la synthèse du Correcteur GPC robuste, permettant notamment la prédiction la sortie :

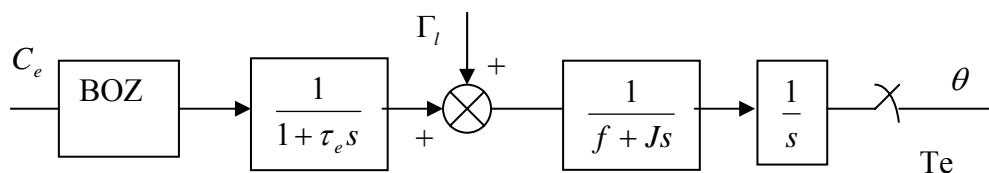


Fig 4.2 : Le modèle pour le synthèse GPC robuste

θ : Position angulaire (*rad*).

C_e : Le couple (*Nm*).

La constante électrique τ_e représente la dynamique apportée par la commande à flux orienté, les boucles de courant, la MLI et l'onduleur. La partie mécanique liée au moteur et à la charge est caractérisée par J , l'inertie du moteur et de la charge ramenée sur l'arbre moteur, f , le frottement visqueux, et Γ_l le couple de charge. La constante de temps électrique τ_e sera négligée par rapport à la constante de temps mécanique, de même le terme de frottement visqueux s'avère aussi négligeable.

4.3.2. Simulation

On obtient ainsi le modèle simplifié de la Figure 4.2. Avec l'ajout d'un bloqueur d'ordre zéro à l'entrée et d'un échantillonneur à la sortie, afin d'obtenir un modèle discret de l'ensemble. On néglige la constante de temps électrique par rapport à la constante de temps mécanique. Pour une période d'échantillonnage de $T_e=1,0724$ ms, $J=0,007$ kg m², $f=0.01$ Nm (rad/s)⁻¹, on obtient le modèle discret suivant [AD06] :

$$\frac{\theta(q^{-1})}{C_e(q^{-1})} = \frac{10^{-4}(0,821q^{-1} + 0,8206q^{-2})}{(1 - q^{-1})(1 - 0,998q^{-1})}$$

En considérant les règles de stabilité et de robustesse données dans le chapitre 1, un correcteur GPC a été synthétisé avec $N_1 = 1$, $N_2 = 16$, $N_u = 1$, $\lambda = 10^{-4}$.

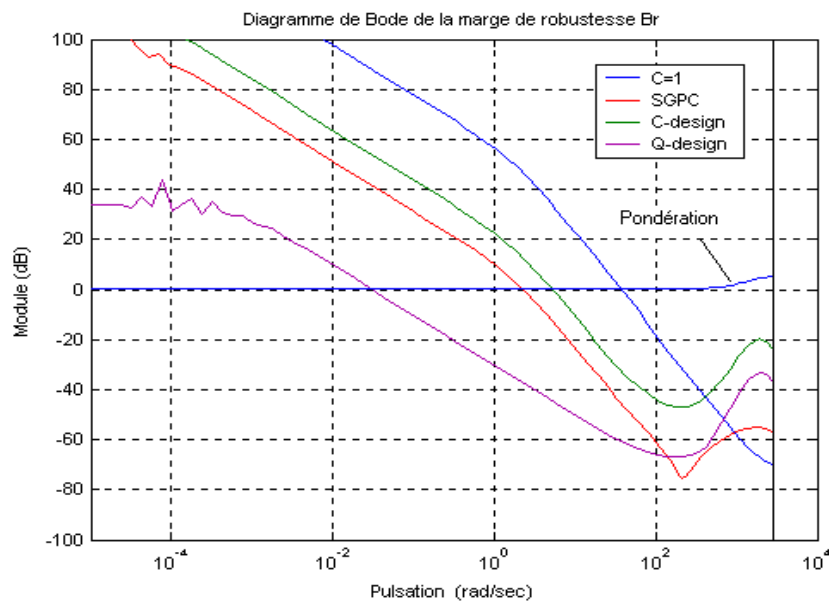


Fig 4.3 : La marge de robustesse Br pour les différentes méthodes

Les résultats obtenus pour ce système qui peut être considéré comme un système instable (à la limite de stabilité), pour chaque correcteur pour la même simulation temporelle. On y remarque pour chaque correcteur la dynamique de rejet de perturbation et l'effet de bruit de mesure sur la commande.

On remarque que la robustification a diminué la bande passante, avec comme impact une dynamique plus lente pour le rejet de perturbation. La dégradation de la marge de robustesse (4.3) aux moyennes fréquences se traduit par une marge de phase plus petite, comme il peut être observé sur le diagramme de Black. La meilleure marge à haute fréquence est obtenue pour la méthode C-design. On note cependant une dégradation de la robustesse en moyenne fréquence.

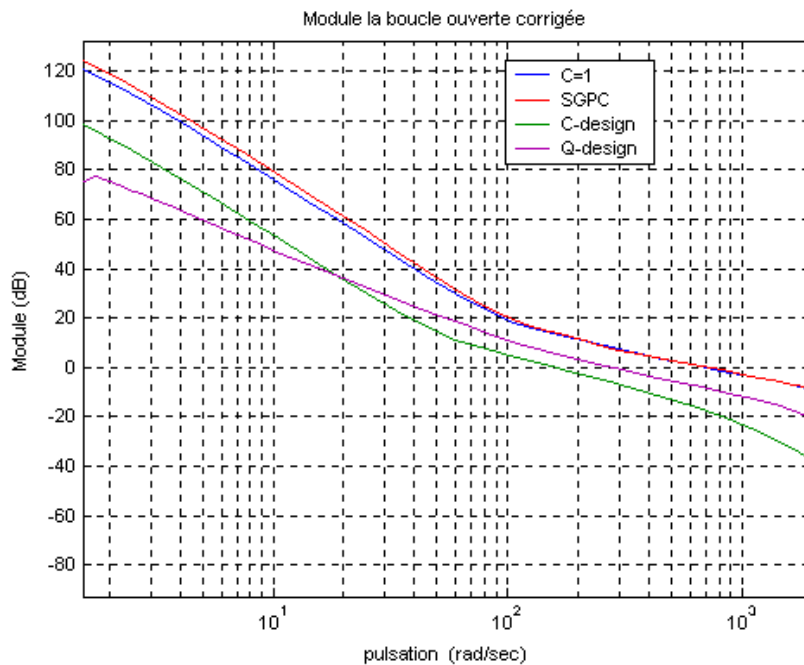


Fig 4.4: Le module de la boucle ouverte corrigée

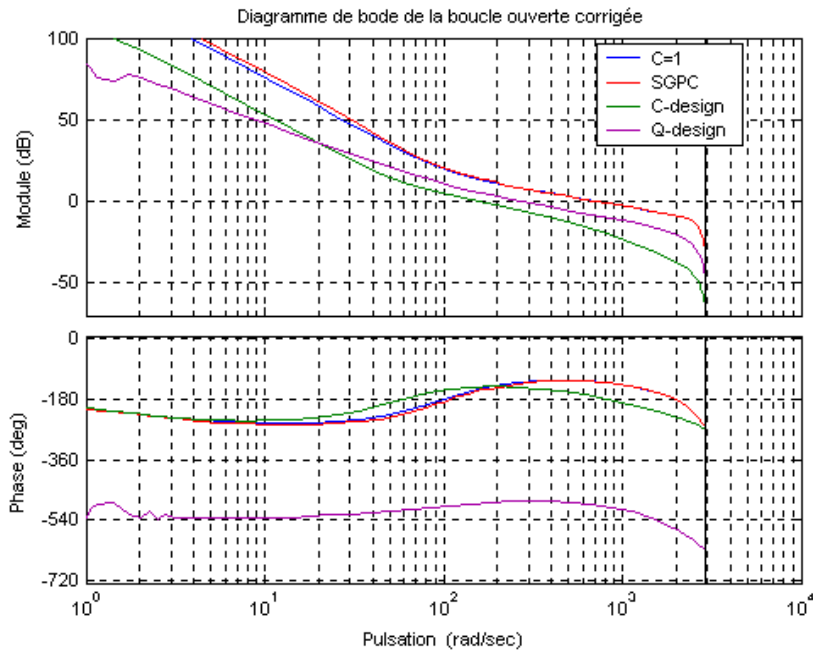


Fig 4.5 : Le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée

On robustifie le correcteur initial par les trois méthodes successivement présentées. Pour la méthode SGPC, on choisit la pondération $W = \frac{1-0.7q^{-1}}{0.3}$. Pour la méthode Cdesign, on choisit $\beta = 0.8$. Finalement, pour la méthode Qdesign, on choisit $\mu_1 = 0.8$ et $\mu_2 = 0.6$. Cette simulation effectuée sur le système réel correspond à un échelon en entrée appliqué à l'instant $t = 0.021$ une perturbation $d(t)$ en échelon d'amplitude 0.1 appliquée à l'instant $t = 0.75$ s et un bruit de mesure de variance 0.0040 à partir de $t = 1,5$ s.

La figure 4.5 montre clairement que la dynamique du rejet de perturbation et l'effet du bruit de mesure sur la commande sont différents pour chaque robustification.

Pour SGPC, on utilise l'algorithme de Lawson (système instable). On a choisi un polynôme d'ordre 25, un ordre plus élevé n'apportant pas de gain significatif, et on a itéré l'algorithme de Lawson afin de minimiser (4.4). Le polynôme obtenu est ensuite identifié à un transfert du deuxième ordre. Cette conversion d'un polynôme à un transfert est analysée dans le cadre plus vaste de l'approche développée au chapitre 5 et 6.

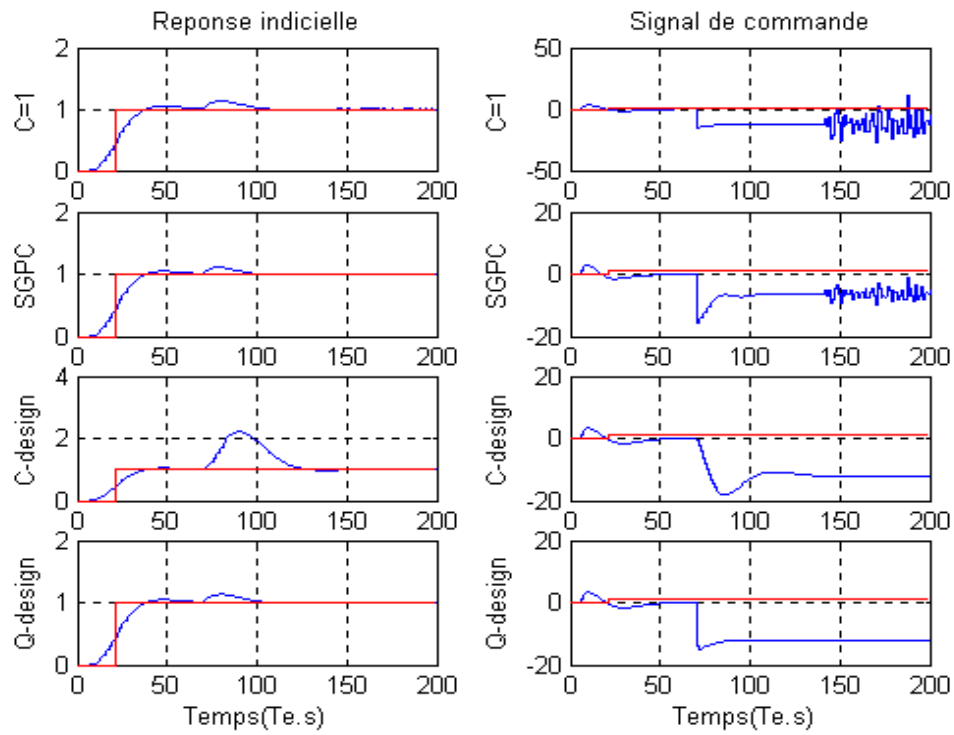


Fig 4.6: Réponse à un échelon de consigne, à une perturbation d'amplitude 0.1, à un bruit de mesure de variance 0.0040

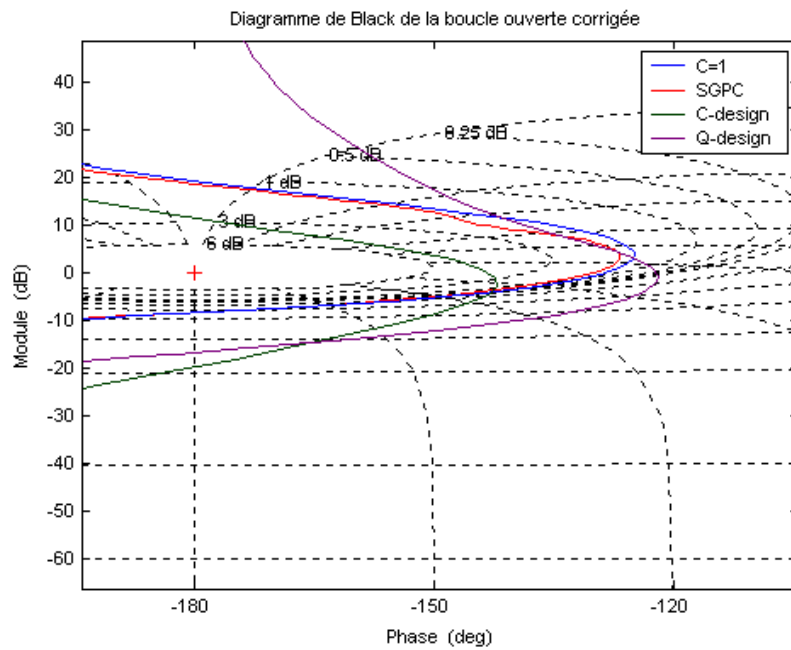


Fig 4.7: Le diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée

Si en négligeant le pôle $q = 1$, on approche le système par le modèle suivant :

$$\frac{\theta(q^{-1})}{C_e(q^{-1})} = \frac{10^{-4}(0,821q^{-1} + 0,8206q^{-2})}{(1 - 0,998q^{-1})}$$

En conservant les mêmes paramètres de synthèse et la même recommandation pour tous les méthodes de robustification.

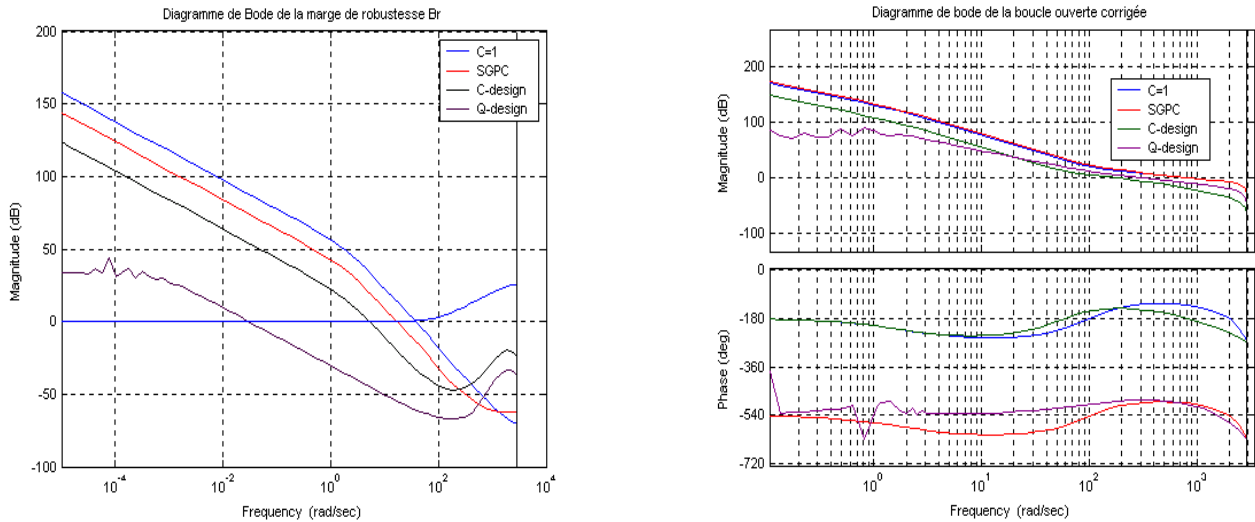


Fig 4.8 : Diagramme de Bode de la marge de Robustesse et la boucle ouverte corrigée avec une dynamique négligée

Avec ces trois robustifications, on arrive à éliminer les oscillations de sortie dues à la dynamique négligée. Ces robustifications ont aussi une influence sur la dynamique de la boucle fermée, notamment sur la dynamique du rejet de perturbation et l'effet d'un bruit de mesure sur la commande. Ces effets sont analysés Figure 4.9.

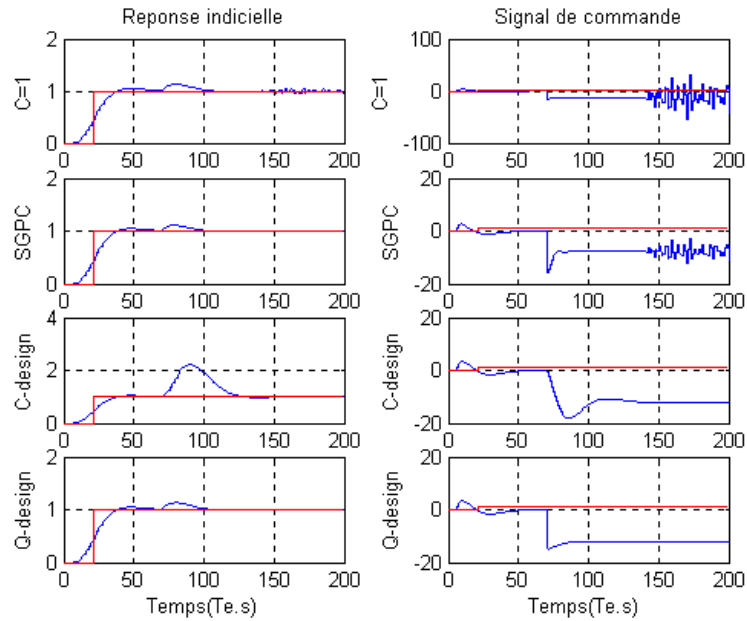


Fig 4.9: Réponse à un échelon de consigne, à une perturbation d'amplitude 0.1, à un bruit de mesure de variance 0.0040 avec une dynamique négligée

Les trois méthodes ont conservées les mêmes résultats que précédemment, où il n'y a pas une dynamique négligée, mais SGPC provoque toujours un filtrage de bruit moins.

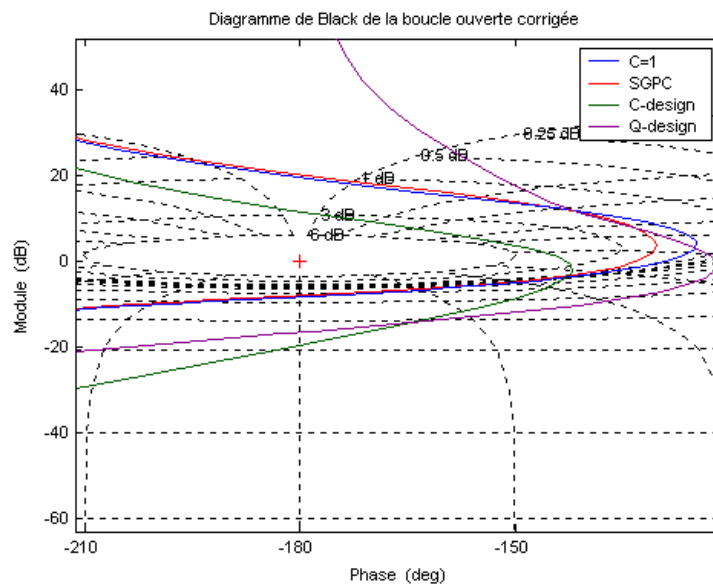


Fig 4.10: Le diagramme de Black de la boucle ouverte corrigée avec une dynamique négligée

Chaque méthode nous permet plus ou moins d'ajuster le polynôme C ou le transfert Q pour obtenir la réponse la plus proche de nos souhaits. Avec la méthode SGPC, on peut modifier

la pondération w ($w = \frac{1 - 0.9q^{-1}}{0.1}$) en gardant, par exemple, l'ordre du transfert Q à deux,

Cet changement va provoquer une amélioration en marge de robustesse et en filtrage de bruit mais le compromis entre la marge de robustesse et le rejet de perturbation est difficile à gérer.

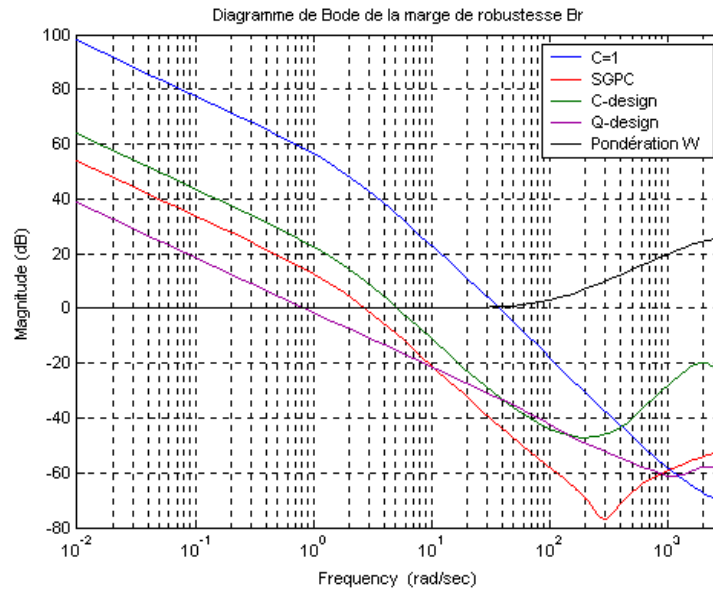


Fig 4.11 : La marge de robustesse avec $W = \frac{1 - 0.9q^{-1}}{0.1}$

Avec la méthode *C*-design, la question que l'on se pose est liée au choix du polynôme *C*. T.W. Yoon et D. Clarke dans [TW95] proposent de choisir le dénominateur du transfert *Q* obtenu par la méthode SGPC. Avec ce choix, on obtient un résultat proche de celui du SGPC, avec plus de robustesse à haute fréquence, mais une dégradation plus importante dans le rejet de perturbation et dans la robustesse en moyenne fréquence, un marge de phase moins qui a comme résultat la détérioration de la réponse transitoire.

Dans l'exemple, on propose un choix plus simple, soit $(1 - 0.8q^{-1})$, avec lequel on obtient des résultats intéressants, étant donnée la simplicité du polynôme *C* choisi. De la même façon qu'avec SGPC (résolution numérique de problème) et la performance est difficile à gérer.

La méthode *Q*-design permet de modifier les deux paramètres μ_1 et μ_2 . On ajuste ainsi la marge de robustesse et la réponse à une perturbation. En comparant avec l'exemple du système stable, on remarque que dans ce cas le système, et notamment la réponse à une perturbation, est plus sensible aux variations de μ_1 et μ_2 . Dès que l'on essaie d'augmenter légèrement la robustesse en haute fréquence, le rejet de perturbation devient très lent.

4.4 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre trois méthodes, classiquement présentées dans la littérature, de robustification d'une commande GPC basées sur le polynôme C ou le paramètre Q . On a introduit le paramètre Q qui permet de paramétrer tous les correcteurs stabilisants amenant au même transfert entrée/sortie. Ce paramètre, qui peut être utilisé pour robustifier le correcteur, introduit un degré de liberté supplémentaire par rapport au polynôme C , ce qui nous permet d'accéder à un plus grand nombre de correcteurs que ceux atteints avec le polynôme C .

La méthode SGPC permet de trouver le paramètre Q qui maximise la marge de robustesse définie. En revanche, le rejet de perturbation y est beaucoup plus lent. Avec cette méthode, il est possible de modifier la pondération des fréquences dans la minimisation du critère, mais le compromis entre la robustesse et la performance face à une perturbation est difficile à gérer.

La méthode C -design est simple et permet de trouver une marge de robustesse importante, et parfois plus grande que dans SGPC. Néanmoins, si le système est instable, le calcul de C n'est plus valable, et il est nécessaire de passer au préalable par une autre méthode, comme par exemple par SGPC, avant de choisir C comme le dénominateur du paramètre Q trouvé. Avec cette méthode, le compromis entre la robustesse et le rejet de perturbation est aussi difficile à gérer.

La méthode Q -design permet de gérer le compromis entre le rejet de perturbation et la robustesse, et la méthode peut aussi être appliquée à un système instable, bien que, dans ce cas, le compromis soit plus difficile à gérer. Néanmoins, le paramètre Q est cherché dans un espace réduit, afin que son choix soit simple, et dès lors la question de l'existence d'un meilleur paramètre Q se pose de façon naturelle. Par ailleurs, il est impossible d'imposer des contraintes relatives au rejet de perturbation.

D'une autre façon, la méthode Q -design assure une robustesse en stabilité, en agissant comme un contrôleur à avance de phase, elle augmente la phase de la boucle ouverte du système nominale, autour de la fréquence de croisement sans une grande affectation de la bande passante.

Chapitre 5

Paramétrisation de Youla et optimisation convexe

Introduction

La commande GPC conduit à un correcteur RST polynomial à deux degrés de liberté, comme il a déjà été expliqué au chapitre 1. La méthode proposée est en réalité applicable à toute loi de commande sous cette forme à deux degrés de liberté. Dès lors, elle peut aussi être vue comme une stratégie de synthèse de correcteurs à deux degrés de liberté. C'est pour cela qu'avant d'aborder le sujet qui nous intéresse, il convient d'examiner succinctement les méthodes de synthèse de correcteurs à deux degrés de liberté ainsi que les méthodes actuelles de robustification de commandes prédictives, afin de dégager les particularités de chaque méthode et de faire ressortir notre apport.

Ce problème se formule comme un problème de faisabilité (optimisation), *a priori* non convexe. Pour mettre le problème sous une forme convexe, on utilise la paramétrisation de Youla qui fasse intervenir des techniques de synthèse de type H_∞ .

Le fait d'avoir un correcteur à deux degrés de liberté permet de séparer la dynamique de poursuite et la dynamique de régulation, et l'utilisation de la paramétrisation de Youla permet de faire la synthèse de chaque dynamique séparément. On définit ainsi un problème H_∞ pour la dynamique de poursuite et un autre problème H_∞ pour la dynamique de régulation.

A l'opposé de méthode de robustification existantes, notre approche envisage une synthèse purement discrète du correcteur, avec comme point de départ, un correcteur initial

synthétisé par la technique GPC. La problématique reste néanmoins la même, et pourrait être résolue par des techniques H_∞ pour les systèmes discrets.

A ce stade, il est nécessaire de cerner notre objectif, à savoir la robustification d'une commande prédictive de façon à obtenir un régulateur invariant qui puisse faire face aux différentes incertitudes sur le système, c'est à dire, qui soit capable de garantir la stabilité et une certaine performance dans la gamme des incertitudes considérées.

Par rapport aux méthodes précitées, la principale innovation de la méthode présentée dans ce travail consiste à ajouter des contraintes temporelles dans le comportement de la boucle fermée, de sorte que certains signaux du système respectent un gabarit lorsque le système est excité par une entrée déterminée. Ce type de contrainte est convexe, ce qui permet de traduire les spécifications de robustesse et performance en un problème d'optimisation convexe. La recherche d'un régulateur invariant présente l'avantage de ne pas être soumise à des contraintes concernant le temps de calcul de l'optimisation. Cette caractéristique permet de chercher le paramètre de Youla dans un espace plus large et de trouver ainsi un meilleur compromis entre la robustesse et la performance du régulateur.

5.1. La paramétrisation de Youla

La paramétrisation de Youla est connue pour être l'outil fondamental pour représenter l'ensemble des systèmes stables. Elle permet d'établir un lien entre l'ensemble de correcteurs stabilisant un système et l'ensemble de transferts stables, voir Figure 5.1.

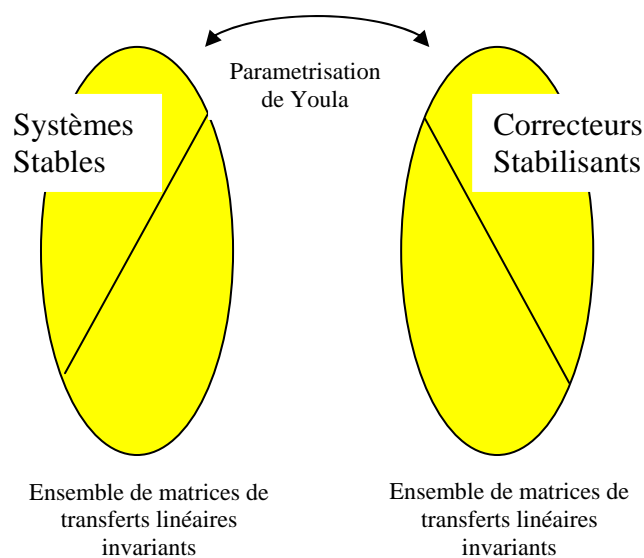


Fig 5.1. La Paramétrisation de Youla

Cette paramétrisation définit une bijection entre l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné et l'ensemble des transferts stables. A chaque transfert stable on peut donc faire correspondre un correcteur stabilisant le système et à chaque correcteur stabilisant on peut faire correspondre un transfert stable. Le transfert stable associé à chaque correcteur stabilisant, représenté par une matrice de transfert stable dans le cas d'un correcteur à plusieurs entrées/sorties, est appelé *paramètre de Youla*. Il est normalement représenté par la lettre Q . Pour certains auteurs, cette paramétrisation est aussi appelée Q -paramétrisation.

5.2. Historique :

L'idée générale de paramétrisation de l'ensemble des correcteurs stabilisant un système linéaire est née de la constatation suivante : pour un système P stable, l'interconnexion de la figure 5.2 reste stable pour tout système Q stable.

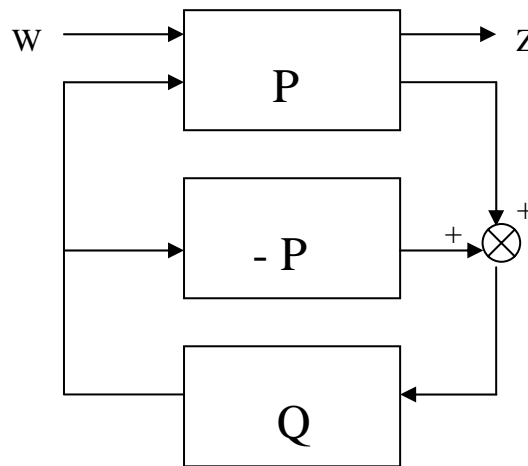


Fig 5.2 : Le principe de la Paramétrisation de Youla

Cette paramétrisation est en fait déjà utilisée dans les années 50 en commande optimale mais les implications fondamentales qui nous intéressent n'avaient pas encore été relevées. Ce n'est que dans les années 70 que ces travaux ont été repris par Kucera dans le cas discret et par Youla et co-auteurs [DC76] pour le filtrage de Wiener-Hopf, c'est le nom de Youla que l'histoire a retenu. On peut aussi remarquer que les premières utilisations ont été faites dans le cadre de la synthèse H_2 dans les années 50 alors que Zames [GZ81] a repris cette paramétrisation pour la commande H_∞ .

La forme générale de la paramétrisation a été finalement énoncée par Desoer et co-auteurs, en utilisant les représentations fractionnaires co-premières. Des interprétations avec représentation d'état ont été mises en place en 1984 par Doyle [JD90].

La définition de la paramétrisation de Youla correspond au théorème suivant dont on trouve une démonstration dans [JM89].

5.3. Définition

Il s'agit de paramétrer de manière complète la famille de correcteurs stabilisants pour un système donné. On considère le système en boucle fermée de la Figure 5.3. (Il convient de noter que le bouclage est positif, en reprenant la convention adoptée par [JM89]). L'hypothèse de départ est que G est stabilisable par u et détectable par y , et que G est strictement propre.

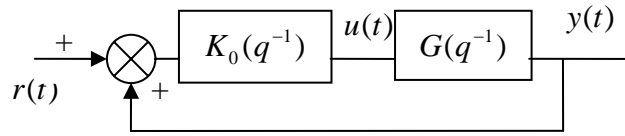


Fig 5.3 : Boucle fermée classique avec retour positif

5.3.1. Théorème 1 : Factorisation première

Pour une matrice de transfert G stable, il existe 8 matrices de transfert stables telles que :

$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (5.1)$$

est une factorisation fractionnelle co-premières de G à gauche et à droite où N, M, \tilde{N} et \tilde{M} sont des matrices des transfert stables.

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & Y \\ N & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{C'est l'équation de Bézout.}$$

$$K_0 = U_0V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1}\tilde{U}_0 \quad (5.2)$$

est une factorisation fractionnelle co-premières de K_0 à gauche et à droite où U_0, V_0, \tilde{U}_0 et \tilde{V}_0 sont des matrices des transfert stables.

Si K_0 est un correcteur stabilisant, alors $N, M, U_0, V_0, \tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{U}_0$ et \tilde{V}_0 peuvent être choisies comme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

5.3.2. Théorème 2 : Paramétrisation de Youla

En considérant (5.1) et (5.2) telles que (5.3) soit vérifiée, pour toute matrice de transfert stable Q de dimensions adéquates, on définit :

$$U = U_0 + MQ \quad V = V_0 + NQ \quad (5.4)$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + Q\tilde{M} \quad \tilde{V} = \tilde{V}_0 + Q\tilde{N} \quad (5.5)$$

Alors :

1. Tout correcteur $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$ est un correcteur stabilisant pour $G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$.
2. Tout correcteur stabilisant a une représentation fractionnelle donnée par (5.4) et (5.5).
3. Réciproquement, pour tout correcteur K stabilisant, il existe un système Q stable qui vérifie les égalités précédentes.
4. La paramétrisation de Youla n'est pas unique. Il existe en réalité une infinité de possibilités, en fonction du correcteur stabilisant initial K_0 choisi, et des représentations fractionnelles choisies pour le système G et le correcteur initial K_0 .

Remarque

- Ces représentations peuvent aussi s'exprimer par un formalisme d'espace d'état, voir [JD90, JM89].
- Dans ce chapitre on ne fera pas différence entre le cas discret et le cas continu, les concepts exposés sont parfaitement identiques [MF97].

5.4. Propriétés

On supposera dans ce paragraphe et dans toute la suite du chapitre que les interconnexions sont bien posées. Les propriétés de la paramétrisation de Youla présentées ici correspondent aux propriétés utilisées usuellement dans la littérature [JM89, BS01]. On remarquera tout de même que le formalisme par transfert est largement plus utilisé que les représentations d'état. On peut justifier cette remarque par la facilité de présentation et d'interprétation que procure la représentation par transferts.

Les propriétés 1 et 4 seront utilisées par la suite, et les propriétés 2 et 3 sont données afin d'illustrer d'autres aspects de la paramétrisation, non utilisés dans ce travail.

Propriété 1

Par définition, il existe une bijection entre l'ensemble des correcteurs stabilisant un système donné et l'ensemble des systèmes stables.

Propriété

Pour énoncer cette propriété, il nous faut donner une représentation standard du système. Cette représentation standard est donnée sous forme générale par la Figure 5.4. Si l'on ne considère pas le bloc d'incertitude ou perturbation, la boucle fermée de la Figure 5.2 peut se reformuler sous la forme standard de la Figure 5.5.

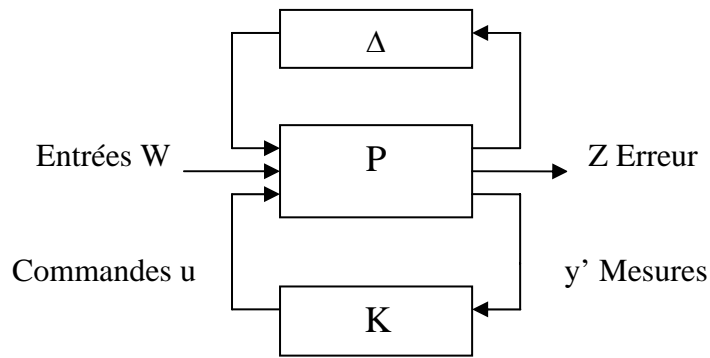


Fig 5.4 : Représentation standard paramétrisation de Youla

La Figure 5.5 est obtenue en considérant les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} z \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & G \\ I & G \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \text{ et } w = r \quad z = y' = r + y$$

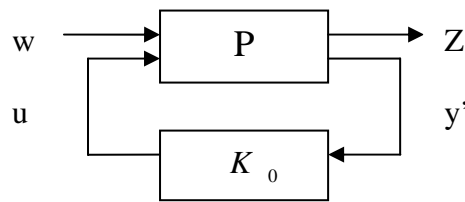


Fig 5.5 : Représentation standard sans incertitude

Tout correcteur K stabilisant P peut être représenté sous la forme LFT (*Linear Fractional Transformation*) de la figure 5.6, où le système J admet la représentation suivante, d'ordre au plus $n + n_0$

$$J = \begin{pmatrix} K_0 & \tilde{V}_0^{-1} \\ V_0^{-1} & -V_0^{-1}N \end{pmatrix}$$

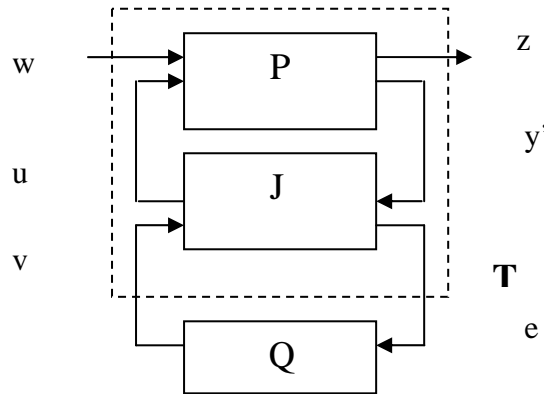


Fig 5.6 : Correcteur sous forme LFT

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \text{ Avec } T_{22} = 0 \quad (5.6)$$

Preuve : Voir [JM89, BC01] ;

Cette propriété exprime que le système T , formé par l'interconnexion de G et de J , Figure 5.6, a un transfert rigoureusement nul entre l'entrée \mathbf{e} et la sortie \mathbf{v} . Le transfert en boucle fermée entre l'entrée \mathbf{w} et la sortie \mathbf{z} peut s'écrire :

$$H_{zw} = T_{11} + T_{12}Q(I - T_{22}Q)^{-1}T_{21} \quad (5.7)$$

Cette propriété nous donne une interprétation intéressante de la paramétrisation de Youla, présentée dans [SB91] est appelée «Modified controller paradigm, chapitre 7». On la résume brièvement :

Soit K_0 , Figure 5.5, un correcteur stabilisant le système. A partir de ce correcteur, nous pouvons construire un ensemble de correcteurs stabilisant le système en procédant en deux étapes :

Nous modifions K_0 de telle sorte qu'il génère un signal auxiliaire de sortie \mathbf{e} (de même dimension que \mathbf{y}') et accepte un signal d'entrée \mathbf{v} (de même dimension que \mathbf{u}), comme indiqué Figure 5.7. Ceci est effectué de façon à assurer une matrice de transfert en boucle fermée nulle entre \mathbf{v} et \mathbf{e} , tout en conservant le transfert K_0 en boucle ouverte entre \mathbf{u} et \mathbf{y}' .

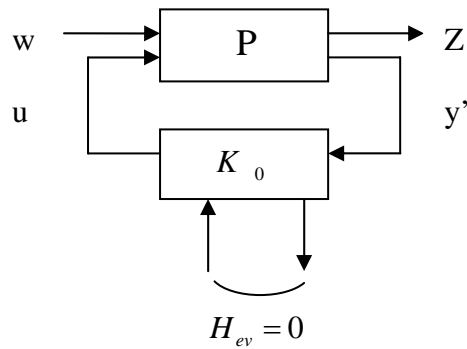


Fig 5.7 : Correcteur initial modifié

Nous connectons une matrice Q stable entre e et v , comme indiqué dans la Figure 5.8. Le correcteur K ainsi construit correspond au correcteur initial modifié par Q . Ce correcteur stabilise le système, car Q est stable et, comme $H_{ev} = 0$, on n'introduit pas de nouveau bouclage.

On arrive à la Figure 5.8, où l'on voit le système d'interconnexion J , qui correspond au correcteur K_0 modifié.

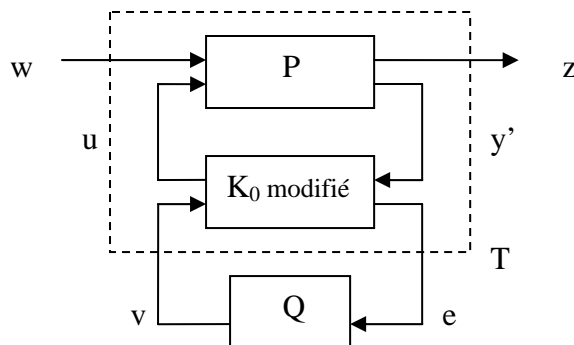


Fig 5.8 : Correcteur initial modifié avec la paramétrisation de Youla

Du fait que le transfert entre v et e est nul, le système se réécrit comme indiqué en (5.7). On obtient alors la même expression affine de la paramétrisation de Youla. Toutefois, pour que cette paramétrisation obtenue à partir du correcteur modifié soit équivalente à la paramétrisation de Youla, il faut qu'elle permette d'atteindre tous les transferts stables possibles. Dans [SB91] est présentée une méthode de modification du correcteur initial pour garantir la correspondance avec la paramétrisation de Youla.

Propriété 3

Cette propriété nous donne une interprétation de la paramétrisation dans une représentation par espace d'état. Tout correcteur stabilisant G peut être représenté par un retour d'état avec un observateur et un paramètre de Youla. Pour la démonstration, voir [JM89, BC01].

Cette propriété est intéressante dans le sens où plusieurs correcteurs stabilisants pour le système G avec des structures très différentes peuvent se mettre sous une même représentation grâce au paramètre de Youla.

Propriété 4

Cette propriété fait référence à la convexité obtenue avec la paramétrisation de Youla. On a les deux propriétés suivantes :

- L'ensemble de matrices de transfert stables est convexe.
- Le transfert de la boucle fermée est linéaire en Q .

Cette propriété nous permet de transformer le problème de synthèse de correcteur ou de robustification d'un correcteur initial en un problème de synthèse convexe. Cette transformation est étudiée au chapitre suivant.

Voyons maintenant le cas particulier de la paramétrisation de Youla quand le système G est stable. Dans ce cas, on peut simplifier la paramétrisation et obtenir une représentation par modèle interne où le paramètre de Youla a un sens « physique ».

5.5. Interprétations pour un système stable

On considère ici le cas d'un système stable, mono-entrée/mono-sortie G .

5.5.1. Correcteur à un degré de liberté

Si le système G est stable, on peut choisir [JM89] :

$$K_0 = 0$$

$$N = \tilde{N} = G \quad M = \tilde{M} = 1$$

$$U_0 = \tilde{U}_0 = 0 \quad V_0 = \tilde{V}_0 = 1$$

(5.3) est vérifiée et on obtient :

$$U = U_0 + MQ = Q$$

$$V = V_0 + NQ = 1 + GQ$$

A partir de $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$, le correcteur stabilisant s'exprime par :

$$K = Q(I + GQ)^{-1} \tag{5.8}$$

qui peut être représenté comme indiqué Figure 5.9. Dans cette figure, on a ajouté le signal extérieur d , qui représente un bruit de mesure ou une incertitude sur le modèle du système.

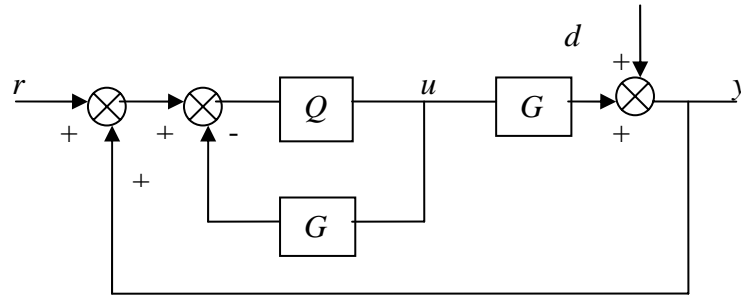


Fig 5.9 : Paramétrisation de Youla pour un système stable

Cette figure peut être modifiée pour obtenir la Figure 5.10, où l'on voit apparaître la structure d'un correcteur à modèle interne.

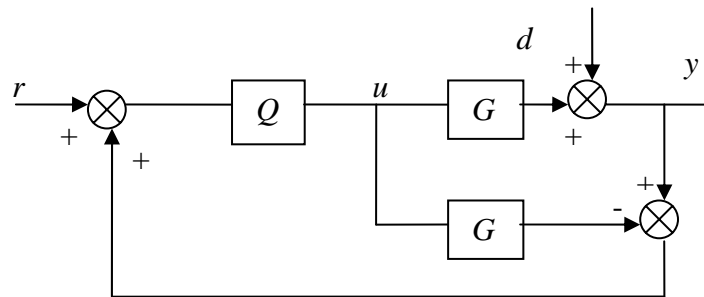


Fig 5.10 : Paramétrisation de Youla pour un système stable.
Structure par modèle interne

En cas d'absence d'incertitude ($d=0$), la sortie du système est annulée par la mise en parallèle du modèle ($-G$), et donc le retour est nul. Le tout fonctionne en boucle ouverte telle que $u = Q r$. Dans ce cas le paramètre de Youla représente le transfert du signal de référence au signal de commande. Comme Q est stable, pour un signal r stable on aura toujours un signal de commande u stable.

5.5.2. Correcteur à deux degrés de liberté

Un correcteur à deux degrés de liberté peut être représenté comme indiqué par la Figure 5.11.

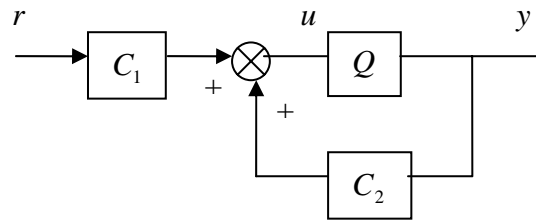


Fig 5.11 : Correcteur à deux degrés de liberté

On peut transformer cette représentation pour arriver à la Figure 5.12, équivalent à la Figure 5.11, mais avec la même structure que la Figure 5.3, avec :

$$K = (C_1 \quad C_2) \text{ et } G = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$$

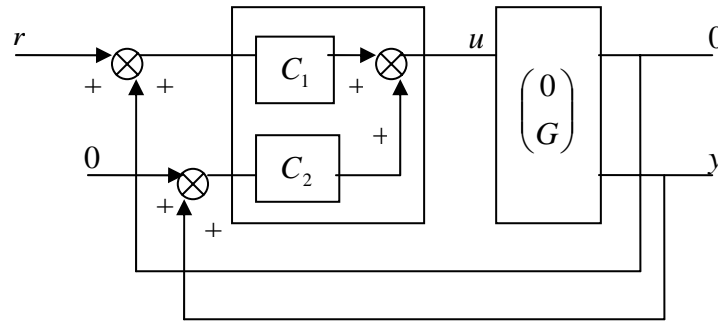


Fig 5.12 : Correcteur à deux degrés de liberté sous structure de bouclage standard

Si le système G est stable, on peut alors choisir :

$$N = \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}, \quad M = 1, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_0 = (0 \quad 0), \quad U_0 = \tilde{U}_0 = (0 \quad 0), \quad V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{V}_0 = 1$$

qui vérifiant (5.1) , (5.2) et (5.3) . Avec $Q = (Q_2 \quad Q_1)$, on obtient la famille de correcteurs suivante :

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + Q\tilde{M} = (Q_2 \quad Q_1)$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 + Q\tilde{N} = 1 + Q_1G$$

A partir de la relation $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$, il vient :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{Q_2}{1+Q_1G} & \frac{Q_1}{1+Q_1G} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Ce correcteur, représenté Figure 5.13, peut aussi être formulé selon le schéma de la Figure 5.14. Les deux figures sont équivalentes.

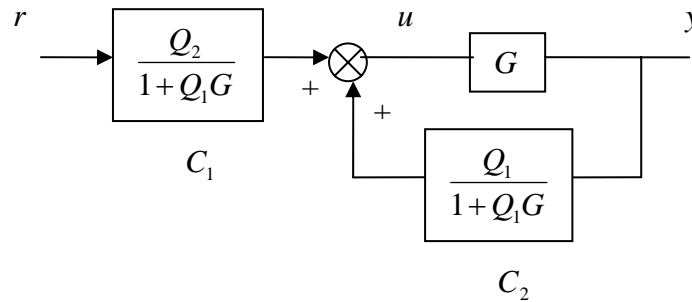


Fig 5.13 : Paramétrisation de Youla pour un système stable.
Correcteur à deux degrés de liberté

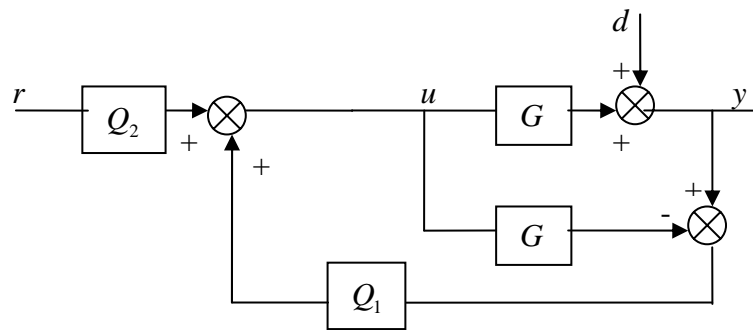


Fig 5.14 : Paramétrisation de Youla pour un système stable.
Structure de modèle interne pour le correcteur
à deux degrés de liberté

La Figure 5.14 correspond à la paramétrisation de tous les correcteurs stabilisants à deux degrés de liberté avec une structure à modèle interne, présentée dans [MM89]. On constate au travers de cette représentation, Figure 5.14, que la paramétrisation d'un régulateur à deux degrés de liberté implique un paramètre de Youla à deux composantes : Q_2 , qui a un rôle de préfiltrage, et Q_1 , qui modifie la dynamique de la boucle fermée. On remarque également que Q_1 a une influence uniquement sur la partie non modélisée par G , à savoir les perturbations qui agissent sur le système, représentées ici par le signal d .

L'intérêt de ce type de régulateur réside tout particulièrement en une séparation des dynamiques de poursuite et de régulation. Le paramètre Q_2 modifie la dynamique de

poursuite sans changer la dynamique de la boucle fermée (ou de régulation), et le paramètre Q_1 modifie la dynamique de régulation sans changer la dynamique de poursuite.

5.6. Introduction à l'optimisation convexe

La notion de convexité tient dans ce manuscrit une place importante étant données les orientations choisies. En effet les problèmes de synthèse dont il est question sont formulés en termes d'optimisation si possible. La convexité d'un problème d'optimisation à un double avantages :

- Les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables.
- Il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser ; le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

Cette approche allie donc vitesse et efficacité. Ce qui semble évidemment très séduisant. Il faut cependant faire attention aux idées reçues : si un problème n'est convexe peut parfois entraîner des conséquences non désirables.

Si la transformation non convexe /convexe se fait par des équivalences, c'est le meilleur des cas et les seuls problèmes qui peuvent en découler proviennent d'un mauvais conditionnement numérique qui empêcherait une résolution algorithmique simple.

Pour mieux comprendre ce problème, on discerne deux méthodes pour transformer le problème initial :

- Le champ de variation des variables d'optimisation est réduit ; c'est-à-dire que la recherche se fait sur un ensemble plus petit que le domaine de définition initial.
- Les contraintes sont modifiées afin de rendre convexes mais elles deviennent alors plus contraignantes.

La solution ainsi obtenue par optimisation convexe est optimale au sens du nouveau problème mais pas nécessairement au sens de problème initial. Il est donc fort possible qu'elle ne soit pas optimale pour le problème posé ! Cette mise en garde est fondamentale pour l'interprétation des résultats obtenus en synthèse par des méthodes d'optimisation.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas.

5.6.1. Ensemble convexe

5.6.1.1. Définition

Soit un ensemble $C \subset R^n$, C est convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (x_1, x_2) \in C^2, (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in C \quad (5.10)$$

5.6.1.2. Interprétation géométrique

Considérons le cas où C est inclus dans \mathfrak{R}^2 . L'équation (5.10) traduit le fait que, si C est convexe, pour tout x et y appartenant à C , le segment $[x y]$ est inclus dans cet ensemble (Figure 5.15 (a)). A contrario, si C n'est pas convexe, il existe au moins un couple de points ne vérifiant pas cette propriété (Figure 5.15 (b)).

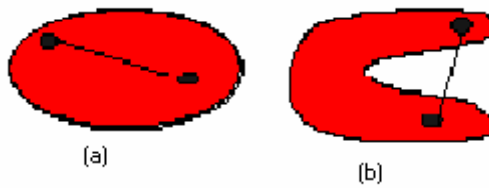


Fig 5.15 : Convexité d'un ensemble

5.6.1.3. Propriétés

- Tout ensemble affine est convexe.
- L'intersection finie d'une famille d'ensembles convexes est convexe.

5.6.2. Fonction convexe

5.6.2.1. Définition

Soit un ensemble C convexe et f une fonction définie de C dans R . On dit que la fonction f est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (x_1, x_2) \in C^2 f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (5.11)$$

5.6.2.2. Interprétation géométrique

La Figure 5.16 présente une fonction f convexe de \mathfrak{R} vers \mathfrak{R} . La convexité de f se traduit géométriquement par le fait que le segment $[(a, f(a)) (b, f(b))]$ est au-dessus de la courbe $y = f(x)$ pour tout $(a, b) \in \mathfrak{R}^2$.

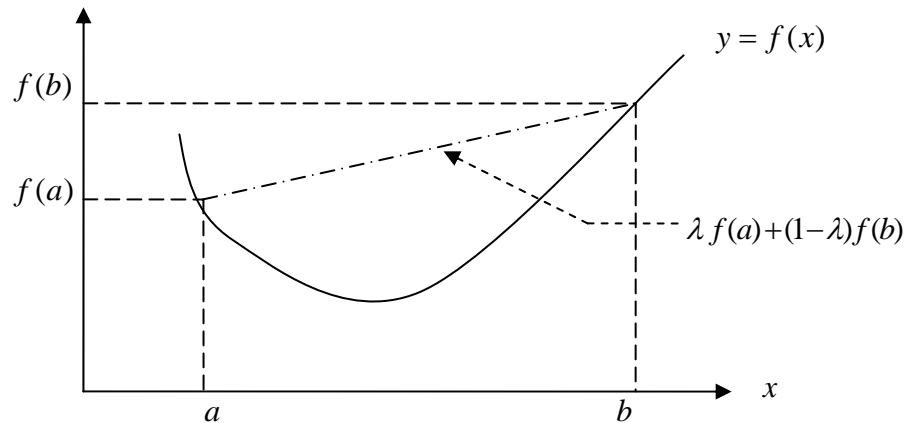


Fig 5.16 : Convexité d'une fonction

5.6.2.3. Propriétés

- ✓ Le produit d'une fonction convexe par un réel positif est convexe.
- ✓ La somme pondérée à coefficients positifs de plusieurs fonctions convexes est convexe :
- ✓ Si ϕ_1, \dots, ϕ_n sont des fonctions convexes et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n réels positifs donnés, alors $(\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n)$ est convexe.
- ✓ Le maximum de plusieurs fonctions convexes est convexe :
Si ϕ_1, \dots, ϕ_n sont des fonctions convexes et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n réels positifs donnés, alors $\max\{\lambda_1\phi_1, \dots, \lambda_n\phi_n\}$ est convexe.
- ✓ Si ϕ est une fonction convexe et α un réel donné, alors l'ensemble $\{x / \phi(x) \leq \alpha\}$ est convexe.
- ✓ Notons que la réciproque est fautive : la propriété $(\forall \alpha \in \mathfrak{R} \text{ on a } \{x / \phi(x) \leq \alpha\} \text{ est convexe})$ n'implique pas que ϕ soit convexe. On dit dans ce cas que ϕ est quasi-convexe.
- ✓ Toute norme est une fonction convexe de son argument (conséquence de l'inégalité triangulaire).
- ✓ Si f est convexe et g linéaire, alors $(f \circ g)$ est convexe.
- ✓ Si f est croissante et g convexe, alors $(f \circ g)$ est convexe.

5.6.3. L'optimisation convexe :

Soit un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Un problème d'optimisation convexe s'énonce simplement :

$$\hat{J} = \min(f(x) / x \in C)_{i=1,m} \quad (5.12)$$

Il s'agit de minimiser un critère f dépend d'un vecteur de paramètre x vérifiant une ou plusieurs contraintes ($x \in C$). Ce type de problème présente des fortes propriétés de convergence. Par exemple, la convexité de du problème garantie que le critère n'admet pas de minimums locaux. De plus, si l'ensemble C est fermé et non vide, le minimum est atteint. En ce qui concerne la mise en œuvre, sous réserve d'un bon conditionnement numérique, l'exploitation de ces propriétés permet d'obtenir la convergence d'algorithmes vers un minimum global.

Notons aussi que l'intersection de plusieurs contraintes convexe est une contrainte convexe et que les critères définis par le maximum ou par la combinaison linéaire à pondérations positives de plusieurs critères convexes sont convexes. Ainsi, un problème de commande où toutes les contraintes et tous les critères élémentaires sont convexes peut se formuler simplement en un problème d'optimisation convexe global regroupant toutes les spécifications exprimées sous forme convexe.

5.6.4. Algorithmes de résolution

Outre les garanties théoriques qui découlent de la convexité du problème, il est intéressant dans la pratique d'exploiter la géométrie du problème pour :

- obtenir un meilleur comportement numérique ;
- diminuer les temps de calcul et la place mémoire nécessaire pour la résolution.

Plusieurs algorithmes ont été développés pour des structures particulières. Ils prennent en compte la nature du critère à optimiser ainsi que celle des contraintes à respecter.

Considérons, par exemple, le cas d'un problème avec un critère linéaire et/ou des contraintes formulées par des égalités et inégalités linéaires de type :

$$\min \left(c^T x \right)_{\substack{\{a_i, x \leq b_i\}_{i=1,2,\dots,m} \\ Fx = g}} \quad (5.13)$$

où x est le vecteur d'optimisation et a_i, b_i, c, F, g sont les paramètres du problème.

La méthode dite du simplexe a été introduite par Dantzig pour résoudre ce type de problème. Ensuite, en 1984, Karmarkar a introduit l'algorithme du point intérieur pour la programmation linéaire. Plusieurs algorithmes basés sur cette technique du point intérieur

pour la résolution de problèmes linéaires ont été ainsi développés et ont prouvé leur efficacité.

5.7. Spécifications en boucle fermée

5.7.1. Motivations de la formulation des spécifications en boucle fermée

Une spécification implicite que doit vérifier tout correcteur solution du problème est d'être stabilisant. Cependant, la combinaison de deux correcteurs stabilisants n'est pas forcément stabilisante, d'où la non convexité de l'ensemble de ces correcteurs. Ce résultat nous amène ainsi à travailler non plus en boucle ouverte, mais en boucle fermée, sur l'ensemble des transferts stables, que peut présenter un système. Dans ce cas, nous avons bien défini un espace convexe : le barycentre de transferts stables est un transfert stable.

Dans notre cas, la structure du correcteur *RST* polynomial permet de ne pas avoir de contraintes au niveau de la structure du correcteur, car tout correcteur peut se mettre sous une structure de ce type. Notre contrainte sera plutôt sur l'ordre des polynômes utilisés dans la loi de commande, puisque l'implantation de polynômes d'ordre plus élevé entraîne une augmentation de la durée de calcul et aussi une augmentation des erreurs de calcul numérique.

Dans le prochain paragraphe, nous allons examiner certains critères et contraintes convexes en boucle fermée qui seront utilisés par la suite, et le fait que cette convexité soit conservée par l'ensemble de transferts stables atteignables. Cet ensemble est paramétré par la paramétrisation de Youla. On arrive finalement à exprimer le problème par un problème d'optimisation convexe.

5.7.2. Contraintes et critères convexes

Il est important de distinguer, parmi les spécifications d'un problème de commande, les deux notions de contrainte et de critère [SH02]. La première est une notion ensembliste : satisfaire une contrainte équivaut à appartenir à l'ensemble des solutions vérifiant une propriété donnée telle que « temps de réponse inférieur à une valeur fixée » ou « réponse à une entrée donnée à l'intérieur d'un gabarit imposé ». Une contrainte sera dite convexe si l'ensemble associé est convexe (cf. paragraphe 5.6.1).

La deuxième est une notion fonctionnelle : le critère est une fonction à valeurs réelles, définie sur un ensemble de correcteurs. Par exemple, un critère d'énergie de commande peut être défini par la fonction qui à tout correcteur associe la norme H_2 de la commande en réponse à un signal donné. Un critère sur la plus grande incertitude permise peut être

défini par la fonction qui à tout correcteur associe la norme H_∞ d'un certain transfert bouclé avec l'incertitude. Un critère sera dit convexe si la fonction associée, définie sur l'ensemble des correcteurs, est convexe (cf. paragraphe 5.6.2).

Il s'agit, alors, de chercher un correcteur permettant de minimiser un critère donné (lui-même étant éventuellement le résultat de la combinaison de plusieurs critères) et de satisfaire les contraintes imposées par le cahier des charges.

5.7.3. Contrainte d'enveloppe temporelle

Il s'agit de contraindre un signal du système bouclé, en réponse à une certaine excitation extérieure, à rester à l'intérieur d'une enveloppe temporelle. Par exemple, contraindre la réponse à un échelon de référence ou le rejet de perturbation à rester à l'intérieur d'un gabarit fixé au préalable.

Une enveloppe temporelle imposée à un signal z_i consiste à le contraindre à être compris entre deux valeurs, maximale $z_{i\max}(t)$ et minimale $z_{i\min}(t)$, voir Figure 5.17.

L'ensemble des signaux vérifiant cette contrainte s'écrit donc :

$$\{z_i(t) / z_{i\min}(t) \leq z_i(t) \leq z_{i\max}(t) \quad \forall t\}$$

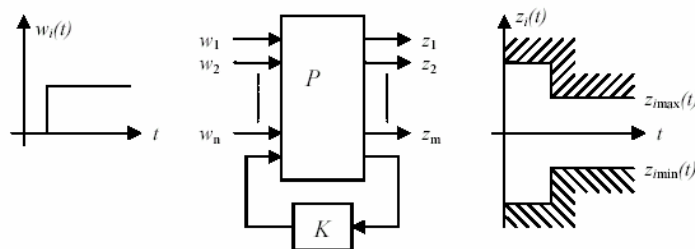


Fig 5.17 : Exemple de contraintes temporelles

Cet ensemble de signaux est un ensemble convexe, car pour deux signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$ à l'intérieur du gabarit, la combinaison $z_3(t) = \lambda z_1(t) + (1 - \lambda) z_2(t)$ (où λ est un réel compris entre 0 et 1) reste à l'intérieur du gabarit.

Pour montrer que cette contrainte est convexe, il nous faut conformer la propriété de transformation linéaire des ensembles et sous-ensembles convexes.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la paramétrisation de Youla et ses propriétés, qui permettront de mettre le problème de robustification de d'un correcteur initial sous forme convexe (qui était a priori non convexe). Les propriétés fondamentales de cette paramétrisation des correcteurs stabilisant sont :

- ✓ Lorsque l'on exprime les fonctions de transfert en boucle fermée en fonction du paramètre Q , on obtient des fonctions qui dépendent affinement de Q .
- ✓ Tout correcteur stabilisant s'écrit comme une transformation linéaire fractionnaire bien déterminée (c'est-à-dire ici une fonction rationnelle) en Q .
- ✓ L'expression des spécifications fréquentielles et temporelles en boucle fermée de façon convexe sous le paramètre de Youla [PR03]. La mauvaise nouvelle est qu'il est convexe mais de dimension infinie : la variable d'optimisation Q appartient à un ensemble de dimension infinie (ensemble des fonctions de transfert) et le nombre de contraintes d'optimisation est infini. Un autre défaut est que le correcteur obtenu peut être d'ordre important. L'idéal serait de trouver une solution sous la forme d'un problème d'optimisation convexe de dimension finie.

On abordera au chapitre suivant la problématique liée à la résolution de ce type de problème et la façon de le résoudre numériquement, conduisant cependant à une solution sous-optimale. Pour plus de détails sur ce type de problème, comme, par exemple, les types de contraintes et critères convexes, et les problématiques d'existence d'une solution, voir les références [SB91, BS01, SH02].

Chapitre 6

Commande GPC Robuste

Introduction

La plupart des méthodes que l'on trouve actuellement dans la littérature concernant la commande prédictive robuste sont sous contraintes. Dans ce type de commande, on effectue une optimisation à chaque période d'échantillonnage, afin de minimiser un critère, tout en respectant certaines contraintes au niveau de l'entrée, la sortie et l'état du système. Cela donne comme résultat un régulateur non linéaire et variant dans le temps. Pour robustifier ce type de régulateur, plusieurs solutions existent. Les principales sont résumées ci-dessous.

Il est nécessaire de cerner notre objectif, à savoir la robustification d'une commande prédictive de façon à obtenir un régulateur invariant qui puisse faire face aux différentes incertitudes sur le système, c'est à dire, qui soit capable de garantir la stabilité et une certaine performance dans la gamme des incertitudes considérées.

Par rapport aux méthodes précitées [HR92], la principale innovation de la méthode présentée dans ce travail consiste à ajouter des contraintes temporelles dans le comportement de la boucle fermée, de sorte que certains signaux du système respectent un gabarit lorsque le système est excité par une entrée déterminée. Comme il a été indiqué au chapitre 5, ce type de contrainte est convexe, ce qui permet de traduire les spécifications de robustesse et performance en un problème d'optimisation convexe. La recherche d'un régulateur invariant présente l'avantage de ne pas être soumise à des contraintes concernant le temps de calcul de l'optimisation [VI96]. Cette caractéristique permet de chercher le paramètre de Youla dans un espace plus large et de trouver ainsi un meilleur compromis entre la robustesse et la performance du régulateur.

6.1 Paramétrisation de régulateur RST avec deux degrés de liberté

Considérons un correcteur GPC initial noté $R'-S'-T'$, représenté Figure 6.1. Ce correcteur a été synthétisé avec $C(q^{-1})=1$ et les paramètres N_1, N_2, N_u et λ ajustés de façon à obtenir le comportement entrée/sortie désiré. Pour l'ajustement de ces paramètres, voir [PB96].

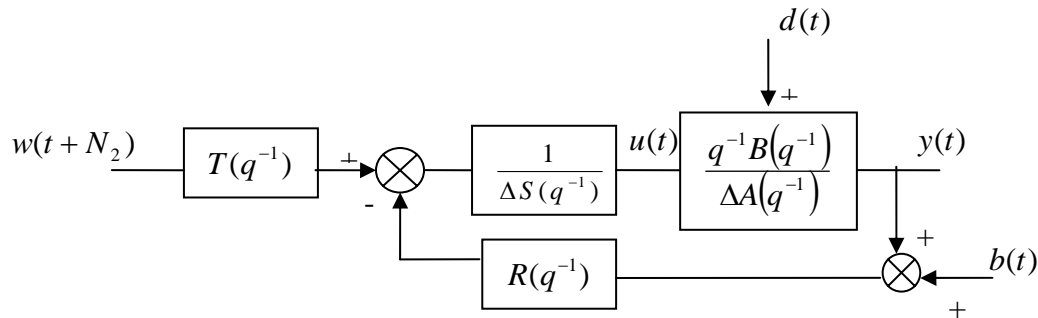


Fig 6.1 : Correcteur initial, structure modifié

Afin d'obtenir la paramétrisation de Youla de ce correcteur initial, il faut tout d'abord définir une structure de bouclage standard (cf. Figure 5.3) et appliquer le Théorème 2. Pour ce faire, modifions la Figure 1.3, pour arriver à la Figure 6.1, puis à la Figure 6.2.

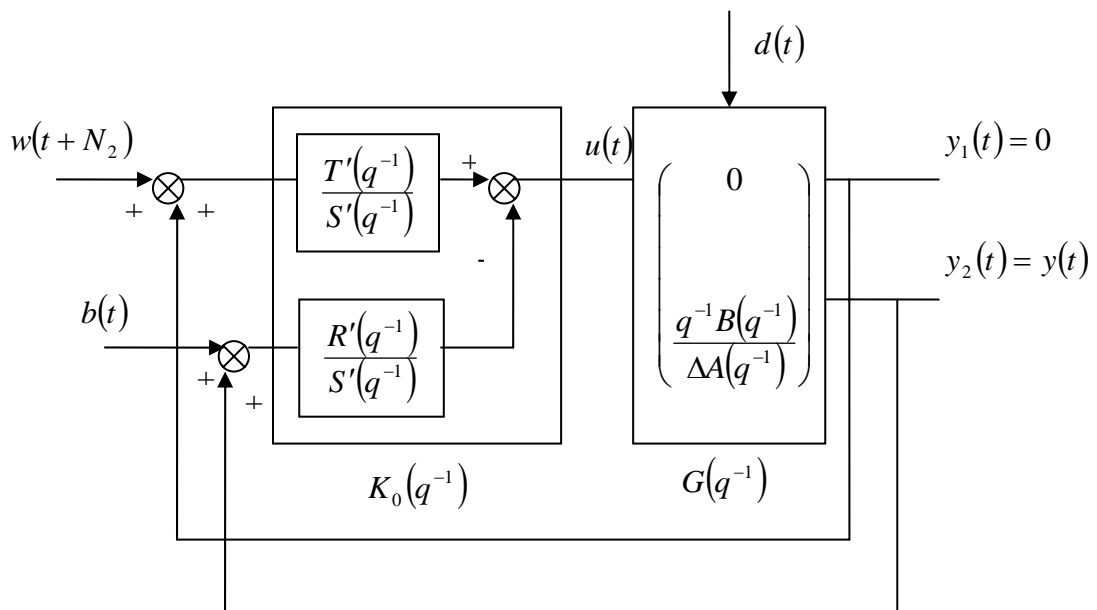


Fig 6.2 : Correcteur initial avec la structure du bouclage standard

L'action intégrale du correcteur initial est incluse dans le modèle du système, permettant ainsi de paramétrer tous les correcteurs qui conservent l'action intégrale.

En relation avec les notations de la Figure 6.1, on définit comme suit les grandeurs de la figure 6.2 :

$$G(q^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ q^{-1}B \\ \Delta A \end{pmatrix}, K_0(q^{-1}) = \begin{pmatrix} T' & R' \\ S' & S' \end{pmatrix}, \text{ avec } r = \begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Afin de pouvoir appliquer le Théorème 2, on doit maintenant effectuer des factorisations fractionnelles co-premières telles que (5.1), (5.2) et (5.3) soient vérifiées.

Ces trois relations nous donnent huit équations matricielles à huit inconnues, avec cependant deux relations redondantes parmi ces huit équations. De théorème 2 (5.3.2) :

$$\tilde{V}_0 U_0 - \tilde{U}_0 V_0 = 0 \quad (6.2)$$

De théorème 1 (5.3.1) :

$$-\tilde{N}M + \tilde{M}N = 0 \quad (6.3)$$

Donc, on arrive donc à huit inconnues, où $N, M, U_0, V_0, \tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{U}_0$ et \tilde{V}_0 sont les inconnues, et le correcteur initial K_0 et le modèle G sont inconnus.

$$\begin{cases} K_0 = U_0 V_0^{-1} \\ K_0 = \tilde{V}_0^{-1} \tilde{U}_0 \\ G = NM^{-1} \\ G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \\ \tilde{V}_0 M - \tilde{U}_0 N = I \\ -\tilde{N}U_0 + \tilde{M}V_0 = I \end{cases} \quad (6.4)$$

Dans ces six équations, fixer la valeur de M et \tilde{M} permet de déduire les autres inconnues.

On trouve alors :

$$\begin{cases} V_0 = (I - GK_0)^{-1} \tilde{M}^{-1} \\ U_0 = K_0 V_0 \\ \tilde{V}_0 = (I - K_0 G)^{-1} M^{-1} \\ \tilde{U}_0 = \tilde{V}_0 K_0 \\ N = GM \\ \tilde{N} = \tilde{M}G \end{cases} \quad (6.5)$$

La factorisation fractionnelle trouvée de cette façon sera valide si tous les transferts de $N, M, U_0, V_0, \tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{U}_0$ et \tilde{V}_0 sont stables.

On choisit :

$$M = \frac{\Delta A}{A_c}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta A}{A_0} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Où $A_0 A_c = \Delta A S' + q^{-1} B R'$ est l'équation caractéristique de la boucle fermée obtenue avec le correcteur initial K_0 de la Figure 6.1. Cette équation caractéristique est factorisée comme dans le cas d'un placement de pôles, en un polynôme A_0 correspondant à la dynamique de commande et un polynôme A_c correspondant à la dynamique de l'observateur. Les deux polynômes sont stables, toutes leurs racines étant de module inférieur à 1, car le correcteur initial est un correcteur stabilisant.

Avec ce choix pour M et \tilde{M} , il vient :

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} 0 \\ q^{-1} B \\ A_c \end{pmatrix} & \tilde{N} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -q^{-1} B \\ A_0 \end{pmatrix} & \tilde{M} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta A}{A_0} \end{pmatrix} & M &= \frac{\Delta A}{A_c} \\ U_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{\Delta A T'}{A_0 A_c} & \frac{R'}{A_c} \end{pmatrix} & \tilde{U}_0 &= \begin{pmatrix} T' & -R' \\ A_0 & -A_0 \end{pmatrix} & V_0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -q^{-1} B T' & -\frac{S'}{A_c} \end{pmatrix} & \tilde{V}_0 &= \frac{S'}{A_0} \end{aligned} \quad (6.7)$$

En utilisant le théorème 2 (5.3.2) avec la factorisation (6.7), on aboutit à un correcteur stabilisant, où tous les transferts sont stables, et $Q = [Q_1 \quad Q_2]$:

$$K(q^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{T' - A_0 Q_2}{S' - q^{-1} B Q_1} & -\frac{R' - \Delta A Q_1}{S' - q^{-1} B Q_1} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Soit

$$\begin{cases} T(q^{-1}) = T'(q^{-1}) - A_0(q^{-1}) Q_2(q^{-1}) \\ R(q^{-1}) = R'(q^{-1}) + \Delta(q^{-1}) A(q^{-1}) Q_1(q^{-1}) \\ S(q^{-1}) = S'(q^{-1}) - q^{-1} B(q^{-1}) Q_1(q^{-1}) \end{cases} \quad (6.9)$$

ou $Q_1(q^{-1})$, $Q_2(q^{-1})$ sont des transferts stables. Le transfert Q_2 modifie le comportement entrée/sortie, tandis que le paramètre Q_1 modifie la dynamique de la boucle fermée ou de régulation, sans changer le transfert entrée/sortie, voir [MM89]. Le choix de M et \tilde{M} (6.6) a été effectué de sorte qu'en faisant $Q_2 = 0$ on retrouve la paramétrisation présentée par Kouvaritakis et al, à la base des stratégies SGPC et Q -design.

6.2. Caractéristiques optimales atteignables

Cette paramétrisation permet donc de paramétrer tous les correcteurs qui stabilisent le système et qui conservent l'action intégrale. On peut alors se poser la question suivante : si pour un correcteur initial $R_1 - S_1 - T_1$ et certaines spécifications on obtient un paramètre de Youla optimal $Q_1 = (Q_2^1 \quad Q_1^1)$ qui permet de répondre aux caractéristiques optimales de

robustesse et de performance pour les spécifications considérées, serait-il possible d'atteindre ce même résultat à partir d'un autre correcteur initial noté $R_2 - S_2 - T_2$.

Pour répondre à cette question, il faut trouver le paramètre $Q_2 = \begin{pmatrix} Q_2^2 & Q_1^2 \end{pmatrix}$, tel que les deux correcteurs K_1 et K_2 suivants soient équivalents.

$$K_1(q^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{T_1 - A_0^1 Q_2^1}{S_1 - q^{-1} B Q_1^1} & - \frac{R_1 + \Delta A Q_1^1}{S_1 - q^{-1} B Q_1^2} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$K_2(q^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{T_2 - A_0^2 Q_2^2}{S_2 - q^{-1} B Q_1^2} & - \frac{R_2 + \Delta A Q_1^1}{S_2 - q^{-1} B Q_1^2} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Voir [PR03] pour la démonstration, et finalement on aboutit à :

$$Q_1^2 = \frac{R_1 S_2 - R_2 S_1}{A_c^1 A_0^1} + \frac{A_c^2 A_0^2}{A_c^1 A_0^1} Q_1^1 \quad (6.12)$$

$$Q_2^2 = \frac{T_2}{A_0^2} - \frac{(T_1 - A_0^1 Q_2^1) A_c^1}{A_c^1 A_0^1} \quad (6.13)$$

En considérant que les correcteurs initiaux $R_1 - S_1 - T_1$ et $R_2 - S_2 - T_2$ sont des correcteurs stabilisants, les polynômes A_c^1, A_0^1, A_c^2 et A_0^2 sont des polynômes stables et, donc, le paramètre $Q_2 = \begin{pmatrix} Q_2^2 & Q_1^2 \end{pmatrix}$ est un paramètre stable. En conséquence, pour n'importe quel correcteur initial, on peut toujours, grâce à la paramétrisation de Youla, trouver le correcteur optimal par rapport aux spécifications considérées.

La recherche du paramètre de Youla ne peut se faire sur la totalité de l'espace auquel celui-ci appartient, car il s'agit d'un espace de dimension infinie. La recherche s'effectue alors dans un sous-espace, élaborant ainsi une solution sous-optimale. Dans ce cas, pour atteindre la même solution optimale ou sous-optimale pour deux correcteurs initiaux différents, il faudra que le paramètre associé à chacun des correcteurs se trouve dans l'espace de recherche considéré. Ceci se produira si l'on considère que les dynamiques correspondant à chaque paramètre ne sont pas très éloignées.

6.3. Spécifications de robustesse et performance nominale

La paramétrisation de Youla paramétrant tous les correcteurs stabilisants peut s'appliquer au système décrit par la Figure 6.3.

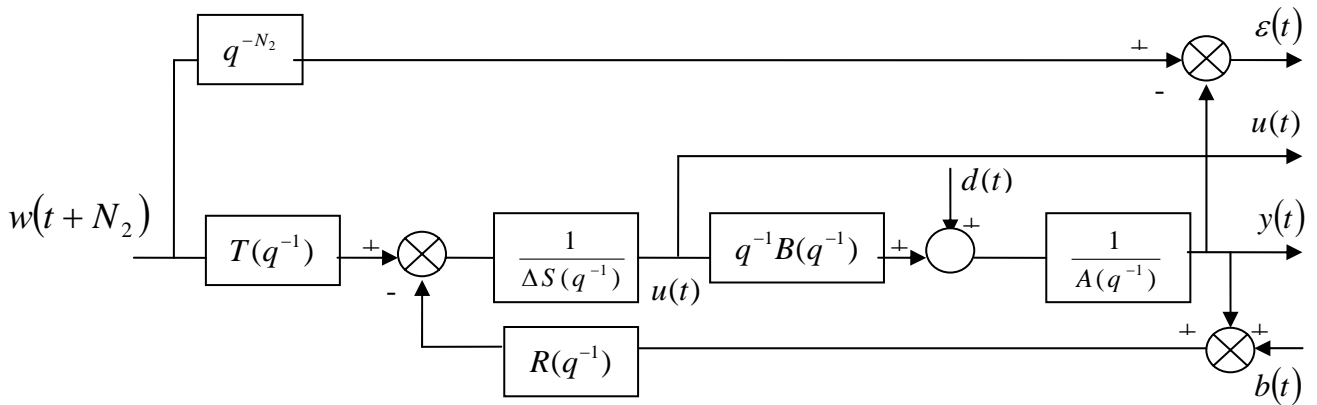


Fig 6.3 : Système avec régulateur RST,
entrées w , d , b , et sorties ε , y , u

L'application de la paramétrisation, définie par la relation (6.9), au correcteur initial conduit au correcteur représenté Figure 6.4.

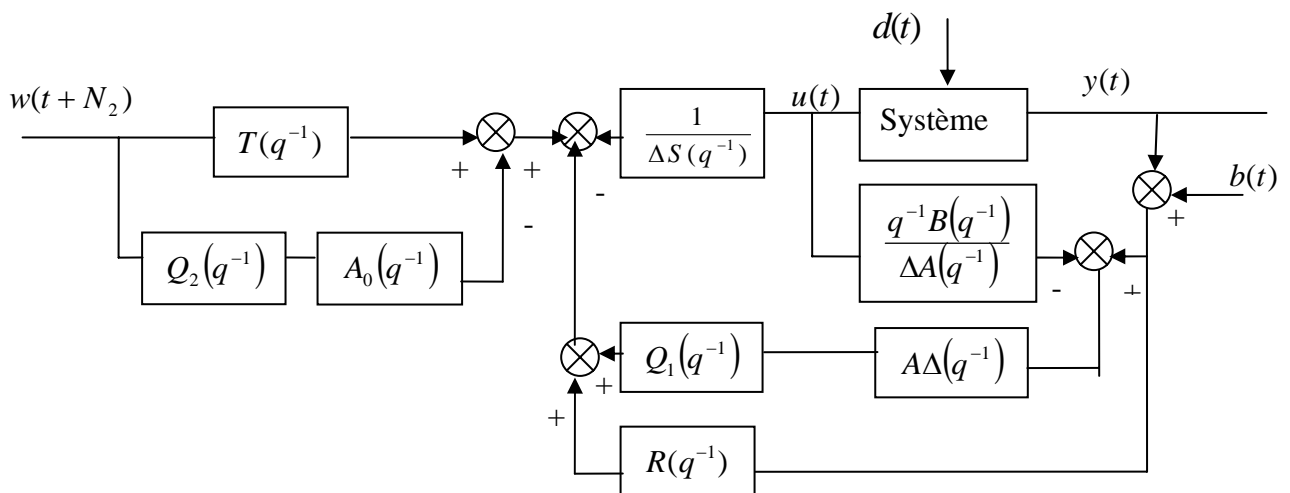


Fig 6.4 : Régulateur GPC à deux degrés de liberté
avec paramétrisation de Youla

Cette représentation peut être modifiée afin de faire apparaître les deux paramètres au sein d'un seul bloc, comme le montre la Figure 6.5.

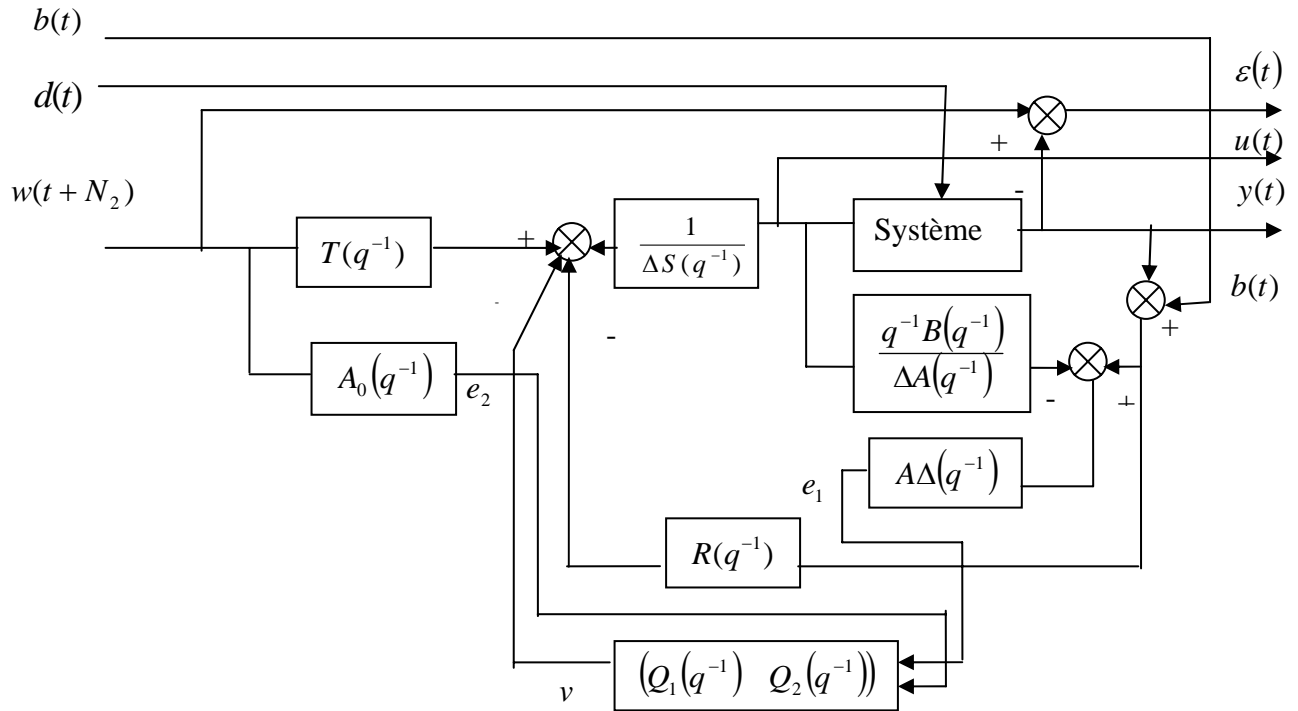


Fig 6.5 : Régulateur GPC à deux degrés de liberté avec Paramétrisation de Youla

Finalement, en prenant en compte les signaux de perturbation (d), et de bruit de mesure (b), on arrive à la structure de la figure 6.6, avec :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} b \\ d \\ w \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{q^{-1}BR' + q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} + \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & -\frac{\Delta S'}{A_0A_c} + \frac{q^{-1}B\Delta}{A_0A_c} Q_1 & \frac{A_0A_c q^{-N_2} - q^{-1}BT'}{A_0A_c} + \frac{q^{-1}BA_0}{A_0A_c} Q_2 \\ -\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{\Delta A^2}{A_0A_c} Q_1 & -\frac{R'}{A_0A_c} - \frac{\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & \frac{T'A}{A_0A_c} - \frac{AA_0}{A_0A_c} Q_2 \\ -\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & \frac{\Delta S'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta}{A_0A_c} Q_1 & \frac{T'q^{-1}B}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}BA_0}{A_0A_c} Q_2 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

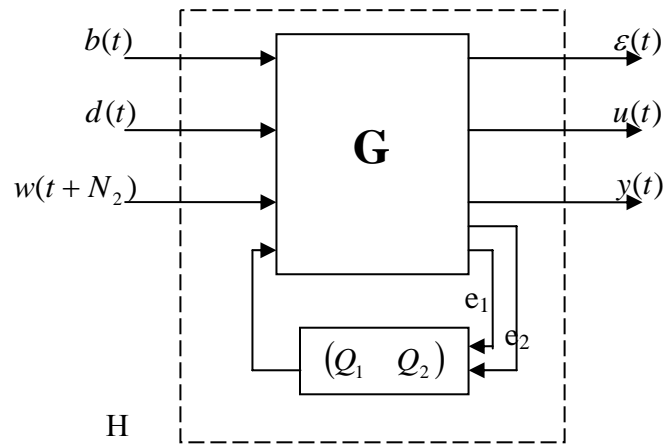


Fig 6.6 : Formulation par blocs

On constate dès lors aisément que le paramètre Q_1 modifie les fonctions de transfert associant b et d à ε , u et y , et le paramètre Q_2 modifie les fonctions de transfert reliant w à ε , u et y . En conséquence, Q_1 modifie la dynamique de la boucle fermée et Q_2 modifie la dynamique de poursuite.

On va maintenant examiner des spécifications de robustesse en stabilité face à des incertitudes non structurées, et des spécifications de performance nominale, grâce au respect de gabarits temporels.

6.3.1. Robustesse en stabilité - Spécifications fréquentielles

La prise en compte d'incertitudes non structurées additives directes conduit à représenter le système comme indiqué Figure 6.7.

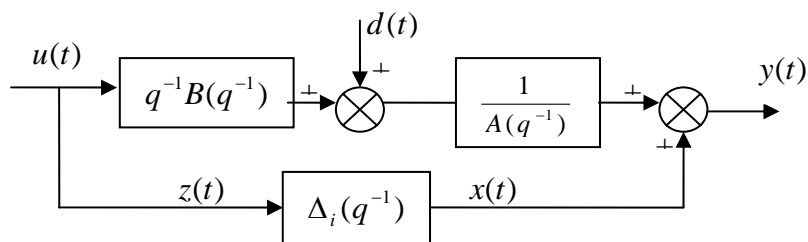
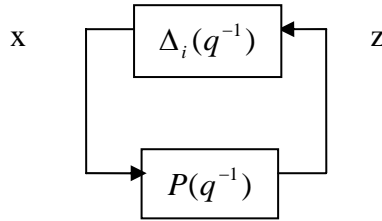


Fig 6.7 : Système avec incertitude additive directe

Avec ce système dans la structure de la Figure 6.5, on cherche à savoir quel est le système bouclé par l'incertitude, de façon à obtenir la structure de la Figure 6.8.

Fig 6.8 : Système P bouclé par l'incertitude non structurée

On obtient pour ce type d'incertitude le transfert P suivant :

$$P = -\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_0A_c}Q_1 \quad (6.15)$$

Une condition suffisante de stabilité est donnée par le théorème du petit gain, que l'on rappelle ci-après.

Théorème du petit gain

Considérons le système bouclé de la Figure 6.8 et supposons que la fonction de transfert $\Delta_i(q^{-1})$ est propre, asymptotiquement stable [GS04] et telle que :

$$|\Delta_i(q^{-1})| < \gamma \quad \text{pour tout } \omega \in [-\pi, \pi]$$

Alors le système bouclé en question est asymptotiquement stable si et seulement si la fonction de transfert $P(q^{-1})$ est propre, asymptotiquement stable et telle que :

$$|P(q^{-1})| < \frac{1}{\gamma} \quad \text{pour tout } \omega \in [-\pi, \pi]$$

A la différence du théorème basé sur le critère de stabilité de Nyquist utilisé au chapitre 1, on considère ici que Δ_i est stable. En revanche, la condition d'avoir le même nombre de pôles instables dans le modèle et dans le système disparaît.

La robustification vis-à-vis d'une incertitude additive directe non structurée est donc maximisée par la minimisation de la norme H_∞ suivante :

$$\min_{Q_1 \in RH_\infty} \|P(q^{-1})W(q^{-1})\| \quad (6.16)$$

Le transfert W sert à pondérer davantage la bande de fréquences où les incertitudes sont les plus importantes. Cette spécification est convexe en Q_1 , comme indiqué au chapitre précédent. En faisant la même chose pour les autres types d'incertitudes non structurées, telles que les incertitudes additives inverses, multiplicatives directes et inverses, on arrive au transfert P du Tableau 6.1.

Δ_i	P
Additive directe	$-\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_0A_c}Q_1 = -\sigma_c K$
Additive inverse	$\frac{q^{-1}B\Delta S'}{A_0A_c} - \frac{q^{-2}B^2\Delta}{A_0A_c}Q_1 = \sigma_d G$
Multiplicative directe	$-\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c}Q_1 = -\sigma_c$
Multiplicative inverse	$-\frac{S'\Delta A}{A_0A_c} - \frac{\Delta A q^{-1}B}{A_0A_c}Q_1 = \sigma_d$

Tableau 6.1 : Transfert P connecté aux blocs d'incertitude non structurée

Dans ce tableau, on a noté par K le rapport $R/\Delta S$ correspondant au correcteur à l'intérieur de la boucle, et par G le modèle $q^{-1}B/A$. Dans le cas des incertitudes additives directes, on remarque que le transfert P obtenu correspond au transfert obtenu par le critère de Nyquist développé au paragraphe SGPC.

6.3.2. Performance nominale - Spécifications temporelles

On considère ici la structure de la Figure 6.7 avec les transferts de \mathbf{H} définis par (6.14). On constate aisément que chaque transfert est paramétré de façon linéaire par le paramètre de Youla. Cela nous permet d'obtenir des spécifications convexes pour le respect d'un gabarit temporel, comme indiqué au paragraphe 5.7.3.

En notant la $S_{ij}(t)$ la réponse du transfert H_{ij} à une entrée déterminée, la spécification temporelle consiste en un gabarit à l'intérieur duquel doit rester la sortie $S_{ij}(t)$.

L'ensemble des paramètres \mathbf{Q} qui satisfont cette spécification est :

$$\begin{aligned} C_{env} &= \{Q / \forall t > 0 ; S_{\min}(t) \leq S_{ij}(t) \leq S_{\max}(t)\} \\ &= \{Q / \Phi_{env}(Q) \leq 0\} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Avec :

$$\Phi_{env}(Q) = \max_{t \geq 0} (\max(S_{ij}(t) - S_{\max}(t), S_{\min}(t) - S_{ij}(t))) \quad (6.18)$$

6.3.3. Problème d'optimisation convexe

Avec ces deux spécifications, fréquentielles et temporelles, le problème de robustification d'un correcteur initial est défini comme un problème de minimisation sous contraintes, où le critère à minimiser, la contrainte à satisfaire et l'espace d'appartenance du paramètre de Youla sont convexes. Il s'agit dès lors d'un problème d'optimisation convexe, comme il a été défini au chapitre 5.

Ainsi, par exemple, la robustification du régulateur initial vis-à-vis d'incertitudes additives directes, des dynamiques négligées par exemple, tout en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation, afin de ne pas trop ralentir la dynamique de régulation, se traduit par :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env}(Q_1) < 0}} \left\| \left(-\frac{R'A}{A_0 A_c} - \frac{A^2 \Delta}{A_0 A_c} Q_1 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (6.19)$$

Où définit la contrainte d'enveloppe du rejet de perturbation. Dans ce cas, seul le paramètre Q_1 du paramètre Q intervient dans l'optimisation, car il s'agit de modifier la dynamique de la boucle fermée ou de régulation.

De la même façon, on peut envisager un problème d'optimisation modifiant la dynamique de poursuite. On peut ainsi faire respecter un gabarit pour la réponse à un échelon, tout en minimisant le transfert entrée/commande, de façon à minimiser, par exemple, la commande en haute fréquence. Ceci conduit au problème décrit par (6.20).

Dans ce cas, seul le paramètre Q_2 intervient, car on cherche à modifier la dynamique entrée/sortie. définit $\Phi_{env}(Q_2)$ la contrainte d'enveloppe temporelle imposée à la réponse à un échelon.

$$\min_{\substack{Q_2 \in RH_\infty \\ \Phi_{env}(Q_2) < 0}} \left\| \left(\frac{T'A}{A_0 A_c} - \frac{AA_0}{A_0 A_c} Q_2 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (6.20)$$

De façon générale, les spécifications fréquentielles et temporelles peuvent être utilisées indistinctement pour chercher une robustesse en stabilité ou une performance nominale. Ainsi, dans le dernier exemple, la minimisation de la norme H_∞ sert à diminuer la commande en haute fréquence pour le système nominal, on cherche donc à garantir une performance nominale. De même, le critère de robustesse en stabilité face à des incertitudes additives directes peut être traduit par le respect d'un gabarit pour le transfert bruit de mesure/commande, qui est, en fait, le transfert P considéré dans ce cas.

La prise en compte de contraintes fréquentielles ou temporelles supplémentaires est aussi possible. Ainsi, si l'on souhaite robustifier vis-à-vis d'incertitudes multiplicatives directes, tout en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation, mais en considérant aussi l'effet du bruit de mesure sur la commande, on peut l'exprimer :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env1}(Q_1) < 0 \\ \Phi_{env2}(Q_1) < 0}} \left\| \left(-\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (6.21)$$

Où $\Phi_{env1}(Q_1)$ définit le gabarit à respecter par la perturbation, et $\Phi_{env2}(Q_1)$ le gabarit à respecter par l'effet du bruit de mesure sur la commande. Le même problème peut se traduire par :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env}(Q_1) < 0}} \left\| \left(-\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 \right) W_1(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (6.22)$$

$$\left\| \left(-\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_0A_c} Q_1 \right) W_2(q^{-1}) \right\|_\infty$$

Dans ce cas, on minimise les transferts P correspondant à des incertitudes multiplicatives directes et additives directes, en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation. L'équivalence entre les deux problèmes vient du fait qu'un bruit de mesure et une dynamique négligée en haute fréquence peuvent se modéliser par des incertitudes additives directes ; pour ce type d'incertitude le transfert P considéré correspond au transfert entre le bruit de mesure (b) et la commande (u).

6.4 Transformation du problème en programmation linéaire :

Considérant les contraintes fréquentielles et temporelles formulées dans la partie précédente, on en conclut qu'il est nécessaire de minimiser une norme H_∞ parmi les paramètres Q (Q_1 ou Q_2) qui satisfont la contrainte temporelle. Le problème à ce stade réside dans le fait que Q appartient à l'ensemble des systèmes stables, ensemble de dimension infinie. A l'heure actuelle, il n'existe aucune méthode permettant de résoudre ce type d'optimisation. Une solution possible consiste alors à restreindre l'espace de recherche à un sous-ensemble généré par une base de transferts stables :

$$Q = \sum_{l=0}^{n_q} \alpha_l Q_l \quad \text{avec } \alpha_l \in R \quad (6.23)$$

Ce type de base vérifie classiquement deux conditions : d'une part, les transferts sont orthogonaux et, d'autre part, à mesure que l'on augmente le nombre d'éléments considérés,

le sous-ensemble généré tend vers l'ensemble de systèmes stables. Dans le cas des systèmes discrets, une base naturelle de systèmes stables est $Q_l(q^{-1}) = q^{-l}$, ce qui revient à rechercher le transfert Q sous la forme d'un polynôme ou filtre FIR.

L'avantage lié au choix de cette base réside dans la simplicité de la mise en œuvre. Malgré tout, dans certains cas, deux types de problèmes peuvent survenir. D'une part, la réalisation de dynamiques lentes au sein du paramètre Q nécessite un polynôme d'ordre élevé ; cette configuration peut se rencontrer dans le cadre de la robustification vis-à-vis d'incertitudes en haute fréquence, où Q a pour but notamment de ralentir la boucle fermée. Dans ce cas, on peut être amené à chercher le paramètre sous une forme de transfert ou filtre IIR, en utilisant une base orthonormale de transferts stables [SH01].

D'autre part, l'implantation d'un polynôme d'ordre élevé risque d'augmenter le temps de calcul et les erreurs numériques du correcteur. Pour concilier ces deux aspects, le degré du polynôme est déterminé par essais successifs avec un ordre initial faible, 10 par exemple, et en l'augmentant progressivement. Pour pallier les inconvénients liés à l'implémentation, une solution peut consister, comme on le verra par la suite, à approcher le polynôme par un transfert d'ordre beaucoup moins élevé, dont la mise en œuvre est plus simple et fiable.

Si l'on conserve la base de transferts stables du paramètre Q fournie par la relation (6.23), il s'avère possible d'approcher les spécifications sur les contraintes fréquentielles et temporelles par des inégalités linéaires, et le problème peut ensuite être résolu par une minimisation sous contraintes de type inégalité.

6.4.1. Minimisation norme H_∞

La relation (7.16) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\min_{Q \in RH_\infty} \left\| P(q^{-1})W(q^{-1}) \right\| = \min_{Q \in RH_\infty} \max_{0 \leq \omega \leq \pi} |T_1 + T_2 Q| \quad (6.24)$$

en considérant que chaque expression P du Tableau 6.1 peut se mettre sous la forme $T_1 + T_2 Q$, soit :

$$\min_{Q \in RH_\infty} \max_{0 \leq \omega \leq \pi} |T_1(e^{-j\omega}) + T_2(e^{-j\omega})Q(e^{-j\omega})| \quad (6.25)$$

En notant γ le majorant de la relation précédente, et en discrétisant le demi-cercle unité, il vient [SH02].

$$|T_1(e^{-j\theta_k}) + T_2(e^{-j\theta_k})Q(e^{-j\theta_k})| \leq \gamma \quad \text{avec } \theta = \frac{\pi(k-1)}{N-1} \text{ pour } k = 1, \dots, N.$$

Avec Q généré par une base de transferts stables (6.23), on déduit :

$$\left| \underbrace{T_1(e^{-j\omega})}_{T_{1k}} + \underbrace{T_2(e^{-j\omega}) \left[Q_0(e^{-j\theta_k}) \dots Q_{n_q}(e^{-j\theta_k}) \right]}_{T_{2k}} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n_q} \end{bmatrix} \right| < \gamma$$

Soit, en simplifiant la notation :

$$|T_{1k} + T_{2k}\alpha| \leq \gamma \text{ pour } k = 1, \dots, N.$$

Cette inégalité portant sur le module, du type $|u| \leq \gamma$ est une contrainte quadratique. Il est possible de l'approximer par les quatre inégalités suivantes [SH02] :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u) + \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ \operatorname{Re}(u) - \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ -\operatorname{Re}(u) + \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ -\operatorname{Re}(u) - \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \end{aligned}$$

Cela revient à approcher un cercle par un polygone, comme montré Figure 6.9. On peut, comme l'indique cette figure, approcher les contraintes quadratiques par plus de quatre inégalités linéaires si l'on souhaite obtenir une meilleure approximation.

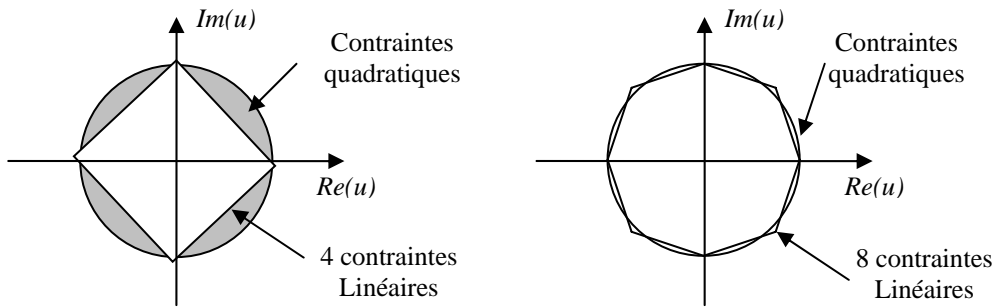


Fig 6.9 : Approximation des contraintes quadratiques

L'étape suivante consiste à réécrire chaque inégalité ci-dessus sous la forme :

$$ax - b \leq 0 \quad (6.26)$$

Ainsi, la première de ces inégalités :

$$\operatorname{Re}(T_{1k} + T_{2k}\alpha) + \operatorname{Im}(T_{1k} + T_{2k}\alpha) \leq \gamma \quad (6.27)$$

devient :

$$\left[\operatorname{Re}(T_{2k}) + \operatorname{Im}(T_{2k}) \quad -1 \right] \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} - \left[-\operatorname{Re}(T_{1k}) - \operatorname{Im}(T_{1k}) \right] \leq 0 \quad (6.28)$$

En regroupant les quatre inégalités, on obtient finalement le critère à minimiser sous forme matricielle :

$$\min_{AX-B \leq 0} CX \quad (6.29)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(T_{21}) + \operatorname{Im}(T_{21}) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -\operatorname{Re}(T_{2N}) - \operatorname{Im}(T_{2N}) & -1 \\ 0 \dots \dots 0 & -1 \end{bmatrix}_{(4N+1) \times (n_q+2)} \quad B = \begin{bmatrix} -\operatorname{Re}(T_{11}) - \operatorname{Im}(T_{11}) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(T_{21}) + \operatorname{Im}(T_{21}) \\ 0 \end{bmatrix}_{(4N+1) \times 1}$$

$$X^T = [\alpha_0 \dots \alpha_{n_q} \gamma]_{1 \times (n_q+2)} \quad C = [0 \dots 0 1]_{1 \times (n_q+2)}$$

6.4.2. Respect d'un gabarit temporel

De façon similaire à la manipulation effectuée au paragraphe précédent, un transfert H_{ij} de la relation (7.14) devient :

$$H_{ij} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 Q \quad (6.30)$$

Soit encore, si l'on conserve la base des transferts stables fournie par la relation (6.23) :

$$\frac{S_i(t)}{e_j(t)} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \sum_{l=0}^{n_q} \alpha_l Q_l \quad (6.31)$$

La réponse à $e_j(t)$ s'exprime donc par :

$$S_i(t) = \tilde{T}_1 e_j(t) + \tilde{T}_2 \alpha_0 Q_0 e_j(t) + \dots + \tilde{T}_2 \alpha_{n_q} Q_{n_q} e_j(t) \quad (6.32)$$

En notant enfin $S_1(t) = \tilde{T}_1 e_j(t)$ et $S_{2i}(t) = \tilde{T}_2 Q_i e_j(t)$, il vient :

$$S_i(t) = S_1(t) + [S_{20}(t) \ S_{21}(t) \ \dots \ S_{2n_q}(t)] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n_q} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

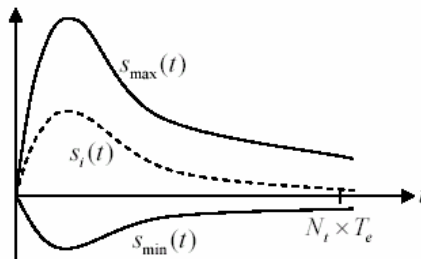


Fig 6.10 : Respect de gabarit temporelle

En considérant les $N_t + 1$ premières valeurs de la réponse $S_i(t)$ et les valeurs maximale $S_{\max}(t)$ et minimale $S_{\min}(t)$ du gabarit temporel, voir Figure 6.10, on obtient l'inégalité matricielle suivante :

$$\left. \begin{array}{l} S_i(t) - S_{\max}(t) \leq 0 \\ -S_i(t) + S_{\min}(t) \leq 0 \end{array} \right\} \text{ pour } t_0, t_1, \dots, t_{N_t} \quad (6.34)$$

Soient les contraintes supplémentaires :

$$\tilde{A}X - \tilde{B} \leq 0 \quad (6.35)$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} S_{20}(t_0) & S_{21}(t_0) & \cdots & S_{2n_q}(t_0) & 0 \\ S_{20}(t_1) & S_{21}(t_1) & \cdots & S_{2n_q}(t_1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ S_{20}(t_{N_t}) & S_{21}(t_{N_t}) & \cdots & S_{2n_q}(t_{N_t}) & 0 \\ -S_{20}(t_0) & -S_{21}(t_0) & \cdots & -S_{2n_q}(t_0) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ -S_{20}(t_{N_t}) & -S_{21}(t_{N_t}) & \cdots & -S_{2n_q}(t_{N_t}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} S_{\max}(t) - S_1(t_0) \\ \vdots \\ S_{\max}(t_{N_t}) - S_1(t_{N_t}) \\ -S_{\min}(t) + S_1(t_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ -S_{\min}(t) + S_1(t_{N_t}) \end{bmatrix}$$

Il convient alors d'ajouter ces contraintes (6.35) à celles définies par la relation (6.29).

$$\min_{\substack{CX \\ \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \leq 0}} CX$$

Le problème initial devient ainsi un problème de programmation linéaire qui peut être résolu par des algorithmes classiques. Par ailleurs, puisque le problème est convexe en Q , la convergence vers le minimum global est garantie, tout au moins dans l'espace de recherche. En cas de problèmes de conditionnement numérique lors de la résolution, il est préférable d'ajouter un terme quadratique au sein du critère, ce dernier s'exprimant par :

$$\min X^T H X + C X \quad \text{avec} \quad H \ll I$$

et de résoudre l'ensemble par un algorithme de programmation quadratique théoriquement mieux conditionné. Lorsque les solutions recherchées ne satisfont pas correctement les gabarits imposés, c'est à dire, lorsque le problème n'a pas de solution, il est nécessaire soit de relâcher les contraintes, soit d'augmenter l'espace de recherche, afin de trouver un problème solvable. A partir d'un problème solvable, on peut alors durcir les contraintes afin de s'approcher le plus possible du problème sans solution initial.

6.4.3. Approche d'un polynôme par un transfert

Dans la résolution du problème d'optimisation par programmation linéaire, le paramètre Q peut être cherché sous forme d'un polynôme ou filtre FIR. Dans ce cas, on peut arriver à des ordres élevés pour ce polynôme, afin de considérer un espace important pour la recherche du paramètre. Lors des robustifications effectuées dans ce travail, on est arrivé par exemple à des polynômes d'ordre 100 et plus. L'implantation d'un correcteur avec un paramètre Q d'ordre très élevé est très coûteuse en temps de calcul et en place mémoire. Pour cette raison, il est utile d'essayer d'approximer ce polynôme par un transfert.

Cette approximation peut être faite par deux approches :

- 1- Par la méthode des moindres carrés.
- 2- Par la synthèse de filtre RII en utilisant la méthode de Fletcher-powell.

Pour plus des détails vous pouvez consulter [PR03],[RF63], ou encore , on peut utiliser l'outil fourni par « Optimization Toolbox » de Matlab.

6.5. Conclusion :

Ce chapitre a présenté le cœur de notre travail, à savoir la méthode proposée pour la robustification des lois de commande GPC basée sur la paramétrisation de Youla. Cette paramétrisation permet, d'une part, de paramétrer tous les correcteurs stabilisant le système et, d'autre part, de formuler des spécifications convexes en boucle fermée. Ces deux caractéristiques sont utilisées de façon à traduire le problème de robustification en un problème d'optimisation convexe. Les spécifications de type fréquentiel et temporel en boucle fermée sont transformées en un problème d'optimisation convexe. L'utilisation de plusieurs spécifications en boucle fermée permet d'obtenir une synthèse mixte robustesse/performance nominale, où la relation entre les deux est facile à ajuster grâce à l'utilisation de gabarits temporels pour les spécifications temporelles en boucle fermée.

Par ailleurs, le paramètre de Youla appartient à un espace de dimension infinie. La résolution de l'optimisation convexe est effectuée dans un sous-espace, ce qui, dans le cas des systèmes discrets, conduit à rechercher le paramètre de Youla sous la forme d'un polynôme (filtre FIR) ou d'un transfert (filtre IIR).

La méthode proposée est enfin applicable à tout correcteur *RST* polynomial et peut être utilisée soit pour modifier la dynamique de régulation avec l'objectif de robustifier le correcteur initial, soit pour modifier la dynamique de poursuite. Par ailleurs, tout correcteur peut être transformé en une structure *RST* polynomiale et donc la méthode est applicable à tout correcteur initial. Cet aspect la rend particulièrement intéressante et utilisable pour tout contexte de commande numérique.

Chapitre 7

Application à un simulateur de conduite

Introduction

Il est fascinant de voir les personnes jouant à des jeux de voiture sur ordinateur déplacer leur corps tout entier lorsque le véhicule entre dans un virage. En effet, bien que l'ensemble des stimuli indique que le sujet joue dans une salle (la taille de l'écran est d'une dizaine de centimètres, le véhicule, piloté par des manettes ne suit pas une trajectoire toujours cohérente avec les actions du conducteur, . . .), celui-ci corrige sa posture comme s'il était en mouvement, soumis aux accélérations du véhicule simulé. Ce comportement témoigne d'une certaine immersion du sujet dans l'environnement virtuel.

Toutefois, les vitesses extrêmes atteintes suggèrent que cette immersion est relative. Les simulateurs de conduite utilisés dans l'industrie automobile se proposent de restituer dans un environnement limité et contrôlé, une sensation de mouvement suffisamment proche de celle perçue dans un véhicule réel pour étudier l'interaction entre le conducteur et le véhicule dans la mise au point par exemple, de systèmes d'aide à la conduite comme l'Abs ou l'Esp. À cet effet, le sujet est généralement placé dans un cockpit réel de véhicule où sont restitués les efforts présents au niveau des interfaces haptiques, comme le volant et les pédaaliers. Le « réalisme » de la situation de conduite est favorisé en affichant la scène visuelle sur un ou plusieurs écrans de sorte à offrir un large champ de vision tandis que la trajectoire du véhicule est calculée à partir d'un modèle dynamique validé sur des manœuvres réelles. En plus des stimuli visuels, haptiques et auditifs, les simulateurs dynamiques restituent une partie des stimuli

inertiels présents en conduite. Ils sont équipés de sièges vibrants, renseignant le conducteur des irrégularités de la route et/ou de mécanismes comme les plateformes de Gough-Stewart déplaçant le cockpit et le conducteur de sorte à restituer les accélérations associées à un changement de file ou une prise de virage.

L'objectif de ce chapitre est la restitution du mouvement et la commande d'une plateforme mobile d'un simulateur de conduite conçu conjointement par **INRESTS** et **LSC** (**INRESTS** : Institut National de Recherche sur le Transport et sa Sécurité de Paris, **LSC** : Laboratoire des Systèmes Complexes d'Every).

7.1. Description du simulateur:

Pour modeler le mouvement du simulateur de conduite, le système global est considéré comme étant deux systèmes indépendants, mécaniquement liés : le siège de conduite tournant et la plateforme de mouvement longitudinale. Chacun d'eux est commandé par un actionneur simple. La plateforme subit les mouvements de translation selon une direction (avant et arrière) qui correspondent à l'accélération et à la décélération du conducteur. La conception de système global laisse avoir un modèle linéaire simple du mouvement. Des améliorations mathématiques de modèles peuvent être réalisées si les performances de contrôleur ne sont pas satisfaisantes.



Fig 7.1 : Vue générale du simulateur de conduite de l'INRESTS -LSC

7.1.1. La plateforme:

La base mobile soutient la cabine comprenant le siège, le tableau de bord du véhicule et le conducteur. Puisque les rotations du siège sont lentes et basses en l'amplitude, son inertie induite est considérée négligeable par rapport à toute la masse de l'ensemble de la cabine. Le mouvement linéaire de l'ensemble de la cabine est réalisé grâce à un mécanisme de transmission vis/écrou commandé par un moteur à courant continu. La conception technologique a été faite afin de réduire, et éliminer même, les défauts mécaniques telles que le jeu de denture, statique et dynamique, frottement, et pouvoir concevoir une bonne qualité d'accélération et les contrôleurs basés sur saccades.



Fig 7.2 : La plateforme du mouvement longitudinal

7.1.2. Le siège :

Comme précédemment indiqué, le siège du conducteur peut exécuter deux genres de petits mouvements de rotation : la rotation du dossier seulement et la rotation entière du siège. Un actionneur simple avec un commutateur manuel exécute la première ou la deuxième fonctionnalité (c.-à-d. pas toutes les deux à la fois). Ce mouvement peut être couplé pour

donner cinq combinaisons linéaires possibles pour des investigations expérimentales sur la stratégie de rétroaction de mouvement pendant l'accélération et le freinage du véhicule.

En utilisant une approche de modélisation semblable à celle de la plateforme qui soutient la carcasse, l'ensemble siège peut être décomposé en trois sous-ensembles : l'actionneur, le mécanisme de transmission vis/écrou, et l'ensemble de siège (conducteur y compris). Les équations de l'actionneur et du mécanisme vis/écrou demeurent les mêmes, et les paramètres sont pris selon le type d'actionneur et du mécanisme de transmission.



Fig 7.3 : Le siège du simulateur

7.2. Validation de modèle

La modélisation et la commande de ce simulateur de conduite a fait l'objet d'une publication internationale. Pour avoir les détails de modélisation et des données techniques, vous pouvez consulter la référence [ML06].

Afin de valider la dynamique longitudinale de la plateforme en boucle ouverte. Le modèle dynamique de la plateforme a été simulé avec un échelon retardé de tension. Egalement leurs signaux de vitesse et de réponse en position ont été enregistrés. Les résultats sont comme suit :

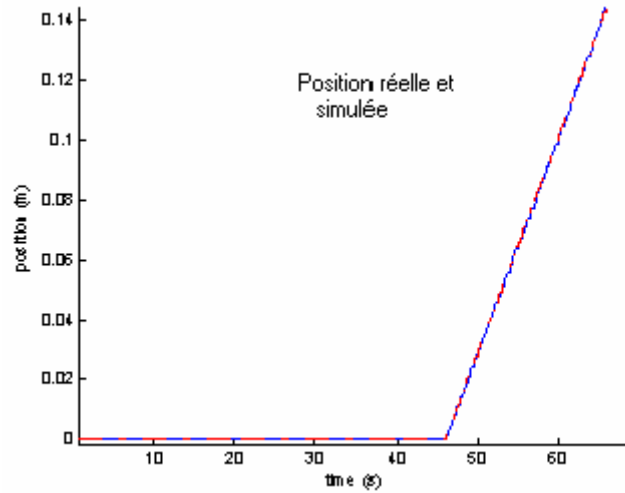


Fig 7.4 : Validation de position

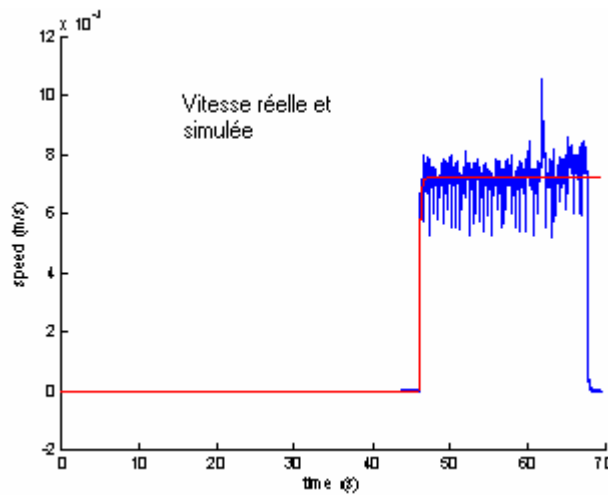


Fig 7.5 : Validation de vitesse

La réponse indicielle de stimulation des deux systèmes, simulé et réel, coïncident exactement en position. En outre, la vitesse des deux systèmes, simulé et réel coïncident en transition de sortie en vitesse et ils ont le même gain statique permanent en vitesse. Le signal de bruit du système réel apparaît en Fig 7.5, deux signaux ne recouvrent pas pendant cette phase.

7.3. Intérêts de la restitution inertielle

La conduite est une tâche réalisée principalement sur la base d'indices visuels. Néanmoins, la restitution des indices inertiels augmente la validité d'un simulateur de conduite à tous les niveaux.

En effet, Parrish et Martin (1976); Reid et Nahon (1988) ainsi que Hall (1989) rapportent que les sujets préfèrent subjectivement la conduite en simulation

lorsque des stimuli inertiels sont présents. Ces observations sont à corrélérer avec celles de Watson (2000) et de Curry et al. (2002) qui montrent qu'en simulation dynamique les personnes souffrant de malaises sont moins nombreuses (27.4% en statique contre 3.6% en dynamique selon Curry et al. et 49.5% en statique contre 4 % en dynamique selon Watson) [GR02].

La capacité des sujets à réguler leur trajectoire en présence de perturbations serait meilleure lorsque des indices inertiels sont présents. Lors d'une tâche de suivi de trajectoire en présence de vents latéraux, Repa et al. (1982) observent une diminution de 30 % de l'écart latéral maximal et une diminution de 15% de l'amplitude maximale de l'angle volant tandis que Wierwille et al. (1983) notent une diminution des temps de réaction de l'ordre de 0.12 s en moyenne. Hall (1978); Hosman et van der Vaart (1981) mesurent des influences similaires en simulation de vol, sur la capacité des pilotes à réguler l'angle de roulis de l'avion. La variance de l'angle de roulis diminuerait de 50 % en condition dynamique selon Hosman et van der Vaart et le temps de réaction de 0.2 s en moyenne lorsque des indices inertiels sont présents[MD5].

Lors d'une tâche d'arrêt en simulation de conduite, Siegler et al. (2001) observent que les amplitudes de décélération sont en moyenne plus proches des celles mesurées en réel lorsqu'une partie de la dynamique du véhicule est restituée. En effet, les auteurs mesurent une amplitude maximale de 5.4 m/s^2 en situation statique et de 4.4 m/s^2 en situation dynamique, alors que les observations de Boer et al. (2000) en conditions réelle et similaire indiquent que l'amplitude maximale est comprise entre 2 et 3.5 m/s^2 . Lors d'une prise de virage, Siegler et al. mesurent un impact de la restitution dynamique sur la trajectoire du véhicule : celle-ci est plus proche des bords de la route de 20 cm en moyenne.

Les observations de Reymond et al. (2001), mettent évidence que la stratégie de vitesse adoptée en simulation s'approche davantage de celle mise en jeu en réel lorsqu'une partie des accélérations du véhicule est restituée.

Reid et Nahon (1985) observent que la restitution d'indices inertiels en simulation de vol influence aussi la perception des retours d'effort par les interfaces haptiques (levier de direction, pédaliers) : les pilotes préfèrent subjectivement le réalisme des efforts aux manettes en simulation dynamique.

Cette influence de la restitution dynamique sur la sensation de mouvement et le comportement du conducteur n'est pas étonnante puisque ce dernier possède des

capteurs inertiels. Toutefois, pour que la restitution de la dynamique du véhicule augmente le domaine de validité d'un simulateur, elle doit répondre à certaines contraintes que nous discuterons dans la suite de chapitre.

7.4 Recommandations pour la restitution du mouvement

L'étude de ces interactions permet de dégager un certain nombre de recommandations pour la restitution des accélérations dans un simulateur de conduite :

1. L'accélération perçue en simulation doit être proche de celle perçue dans le véhicule simulé. Dans la mesure où l'accélération perçue résulte d'un filtrage en temps réel de l'accélération physique, nous conviendrons que l'écart instantané doit être minimisé.
2. Les accélérations du véhicule doivent être restituées dans toutes les directions du mouvement.
3. Les décalages temporels entre les informations visuelles et vestibulaires doivent être minimisés.
4. Si l'accélération restituée s'oppose à l'accélération de défilement de la scène visuelle, l'amplitude de l'accélération restituée doit être de l'ordre du seuil de détection afin de minimiser l'influence du conflit visio-vestibulaire résultant sur l'illusion de mouvement dans la scène visuelle.
5. Une partie de l'accélération du véhicule peut être restituée en inclinant le sujet. Si cette inclinaison ne doit pas être détectable à partir d'indices visuels et vestibulaires, sa validité dans un contexte de conduite est un sujet encore ouvert. Aussi, la mise en place d'une stratégie exploitant essentiellement cette illusion doit être évitée.

7.5. Restitution de mouvement

Les accélérations du véhicule ne pouvant être reproduites à l'identique, un compromis doit être réalisé entre la restitution des indices inertiels et le maintien de la trajectoire de la plateforme dans ses limites physiques. Ce compromis est à définir de sorte à minimiser les conflits sensoriels.

Les stratégies de commande s'articulent autour de deux principes :

Le premier consiste à déplacer le conducteur dans la direction et dans le sens du véhicule simulé. La plateforme se dirige alors vers ses limites physiques. Les indices inertiels s'annulent lorsque les limites en vitesse ou en position sont atteintes.

Le deuxième principe, dit de « Washout » ramène la plate-forme vers sa position neutre : il s'agit d'un déplacement dans la même direction que celle du véhicule mais dans le sens opposé. Ce mouvement ne doit pas être détecté par le conducteur sous risque de provoquer un conflit sensoriel fort. Le « Washout » participe à la restitution des indices inertiels dans la mesure où il permet de dégager une marge de déplacement pour que des indices inertiels puissent être suscités par le premier principe.

7.5.1. Stratégies classiques

Initialement proposée par Schmidt et Conrad (1970) pour piloter la plateforme de Gough-Stewart du simulateur de vol de la Nasa, cette stratégie de commande fut modifiée par la suite par Sinacori (1973) puis Reid et Nahon (1985) pour réaliser un « washout ». De part la simplicité de sa mise en oeuvre, elle est utilisée dans la plupart des simulateurs de vol et de conduite actuels.

L'accélération longitudinale du conducteur résulte d'un filtrage linéaire passe-haut de l'accélération longitudinale du véhicule simulé (Fig.7.6). La consigne de déplacement de la plate-forme est déterminée à partir d'un modèle dynamique ou cinétique.

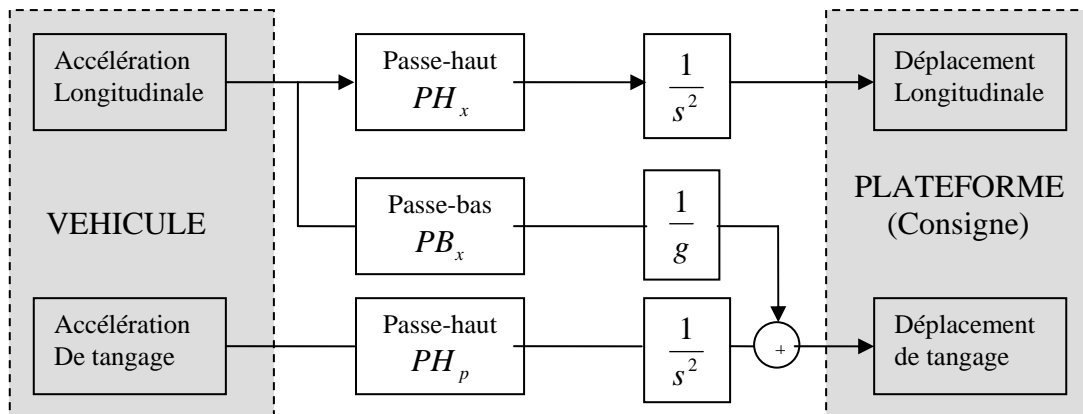


Fig 7.6 : Structure de la stratégie classique

La partie continue des accélérations longitudinales du véhicule simulé est suscitée par « tilt coordination » : l'angle d'inclinaison est obtenu par un filtrage linéaire passe-bas des accélérations du véhicule simulé. La consigne d'inclinaison de « tilt coordination » s'ajoute à celle restituant les accélérations de tangage du véhicule simulé (seule la partie transitoire des accélérations angulaires est restituée).

La plupart des stratégies de restitution publiées sont issues des travaux sur la simulation de vol, menés par le Langley Research Center (Lrc) de la Nasa et par l'Institut for Aerospace Studies de l'Université de Toronto (Utiat), ces derniers se concentrant en particulier sur la généralisation et la validation. Ces méthodes sont connues sous les noms :

- Stratégie adaptative, proposée par Parrish et al., 1975.
- Stratégie optimale, proposée par Friedland et al., 1973.
- Stratégie d'overtilt, proposée par Romano 1999.

7.5.2 Vers une structure prédictive : Nécessité d'une nouvelle stratégie :

Les stratégies de restitution de mouvement actuelles possèdent des limitations à savoir:

1. Leur réglage n'est pas intuitif pour des personnes non expérimentées : malgré leurs longues expériences, Reid & Nahon reconnaissent leur difficulté à régler les stratégies adaptative et optimale.
2. Les contraintes physiques et perceptives ne sont pas explicitement prises en compte et le respect de ces contraintes en situation de conduite n'est pas garanti.
3. Le compromis entre la minimisation de l'erreur de suivi et le maintien de la trajectoire dans les limites est réalisé en considérant une situation de conduite spécifique. La reproduction de ce compromis en situation de conduite libre n'est pas garanti.

Afin de lever ces limitations, nous nous proposons d'établir une nouvelle stratégie de commande prenant en compte explicitement les contraintes physiques et perceptives, ou bien satisfaire mieux le cahier de charge, donc la restitution de mouvement et la commande de la plateforme devient un problème **d'optimisation convexe**.

7.6 Restitution de mouvement et commande de la plateforme (solution proposée)

Pour la restitution dynamique dans notre simulateur de conduite, nous proposons deux étages de commandes : la première définit le mouvement nominale de la plateforme (sous des contraintes physiques et perceptives) tandis que la seconde corrige les éventuelles bruits et perturbations. Il s'agit d'évaluer l'intérêt et la possibilité d'unifier ces deux étages de contrôle en se basant sur une stratégie prédictive robuste.

7.6.1 Restitution de mouvement

En supposant que si $u(t)$ désigne la consigne d'accélération longitudinale, alors sa position longitudinale $p(t)$, sa vitesse longitudinale $v(t)$ et son accélération longitudinale $a(t)$ sont par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} a(t) &= u(t) \\ v(t) &= \int a(t) dt \\ p(t) &= \int v(t) dt \end{aligned} \quad (7.1)$$

La minimisation de l'erreur de suivi d'accélération augmente la validité physique de la simulation puisque l'accélération du conducteur en simulation est plus proche de l'accélération du conducteur en réel. Toutefois, les simulateurs de conduite visent à reproduire une sensation de mouvement identique à celle présente en condition réel. Aussi, afin d'augmenter la validité perceptive des simulateurs, l'erreur de perception d'accélération doit être minimisée. Nous considérerons par la suite que l'accélération perçue est un filtrage de l'accélération du véhicule par une fonction de transfert.

Nous définissons $x = [P \ v]$ et $u \in U$ et $x \in X$, où $U \in \mathbb{R}$ est un ensemble défini par les limites sur la commande et $X \in \mathbb{R}^2$, par les limites sur le mouvement de la plateforme. Nous ferons l'hypothèse que ces ensembles sont définis par des contraintes « min-max » telles que :

$$\begin{aligned} X &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2, |P| \leq P_{\max} \quad |v| \leq v_{\max} \right\} \\ U &= \left\{ u \in \mathbb{R}, |u| \leq u_{\max} \right\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Finalement, le problème de restitution de mouvement devient un problème de respect de gabarit temporelle (paragraphe 6.4.2) mais en minimisant le temps de réponse et en imposant une borne sur l'accélération, la vitesse et la position. La minimisation du temps de réponse peut se traduire par la minimisation de la norme H_∞ du transfert ε/w pondéré, soit, le transfert

$$\min_{\substack{Q_2 \in RH_\infty \\ \Phi_{env}(Q_2) \leq 0 \\ |p| \leq p_{\max} \\ |v| \leq v_{\max} \\ |a_{j+1}| \leq a_s \quad \text{pour } j=1..h}} \left\| \left(\frac{A_c q^{-N_2} - q^{-1} B T'}{A_c} - \frac{q^{-1} B}{A_c} Q_2 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (7.3)$$

Les contraintes sur la vitesse et la position lors de la réponse indicielle se traduit par le respect d'un gabarit temporel du transfert sortie/entrée, vitesse/entrée, et position/entrée, soit :

$$y(t) = a(t) = \left(\frac{T'q^{-1}B}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}BA_0}{A_0A_c} Q_2 \right) w(t)$$

(7.4)

$a(t)/w(t)$, $v(t)/w(t)$ et $P(t)/w(t)$ sont des transfert inspiré de l'équation (6.14) qui doivent être respecter en gabarit temporelle (contraintes physiques et de perception). Nous définissons h comme étant l'horizon de prédiction. Donc, les paramètres de synthèse sont $N_1 = 1$, $N_2 = h$, $N_u = 1$, $\lambda = 1$

Remarque

1. La contrainte $|a_{j+1}| \leq a_s$ maintien la consigne d'accélération en dessous du seuil de détection lors de la phase d'arrêt de sorte à minimiser les conflits sensoriels.
2. La fonction de coût étant convexe et les contraintes, linéaires et convexes, le problème est un problème d'optimisation convexe.

Réponse indicielle

Les réponses indicielles de la stratégie de commande prédictive lorsque $h = 100$ et $T = 0.01s$ (L'axe du temps est en $0.01s$); les limites physiques sont $p_{\max} = 0.6m$, $v_{\max} = 1m/s$, $a_{\max} = 5m/s^2$ et le seuil de perception a_s de $0.2m/s^2$: ce seuil est volontairement choisit supérieur aux données de la littérature afin de mettre en évidence sur les figures 7.6 à 7.9 la capacité de la stratégie à minimiser les conflits sensoriels.

On distingue trois phases dans le profil de la consigne d'accélération :

- Une restitution à l'identité de l'accélération de référence ;
- Un déplacement à la vitesse de $0.2 m/s$;
- Un freinage dont l'amplitude est de l'ordre du seuil de détection.

Le déplacement à vitesse constante résulte de la contrainte terminale. En effet, elle impose que le mouvement de la plate-forme puisse être arrêté en $hT s$ (soit $1 s$) avec une décélération de $0.2 m/s^2$. Cette contrainte se traduit par une limite de vitesse de $hT.a_s = 0.2m/s^2$. Le conflit sensoriel généré dans la phase de freinage est minimisé dans la mesure où il se réalise en dessous du seuil de détection

d'accélération. À la fin de cette phase, la plate-forme atteint sa position maximale (0.6 m).

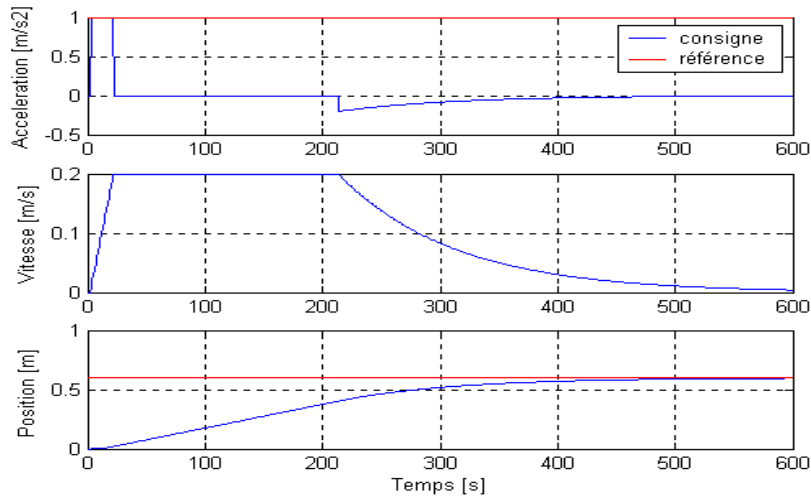


Fig 7.7 : Réponse indicielle. Les contraintes physiques en position et vitesse sont respectées

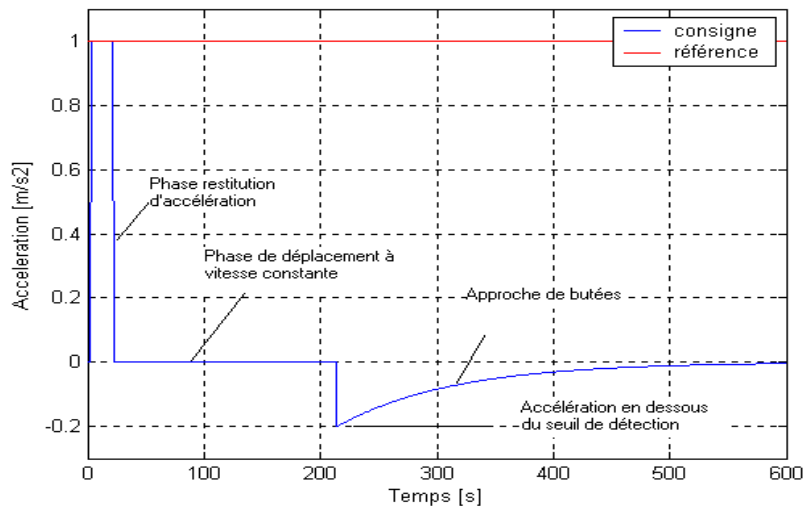


Fig 7.8 : Consigne d'accélération qui définit pour un échelon d'accélération ($h = 100$)

On distingue 3 phases : dans la première, l'accélération du véhicule est restituée à l'identité, dans la seconde phase, le déplacement se réalise à vitesse constante, dans la troisième phase, l'accélération planifiée s'oppose à la référence, avec une amplitude en dessous du seuil de détection.

Signal d'accélération réel : Le seuil de perception est pris égale à 5 m/s^2 . La figure 7.9 montre la réponse de la stratégie de commande résultante lors d'une phase de démarrage

où la vitesse du véhicule passe de 0 à 70 km/h, en utilisant successivement le 1^{er}, le 2^e et le 3^e rapport.

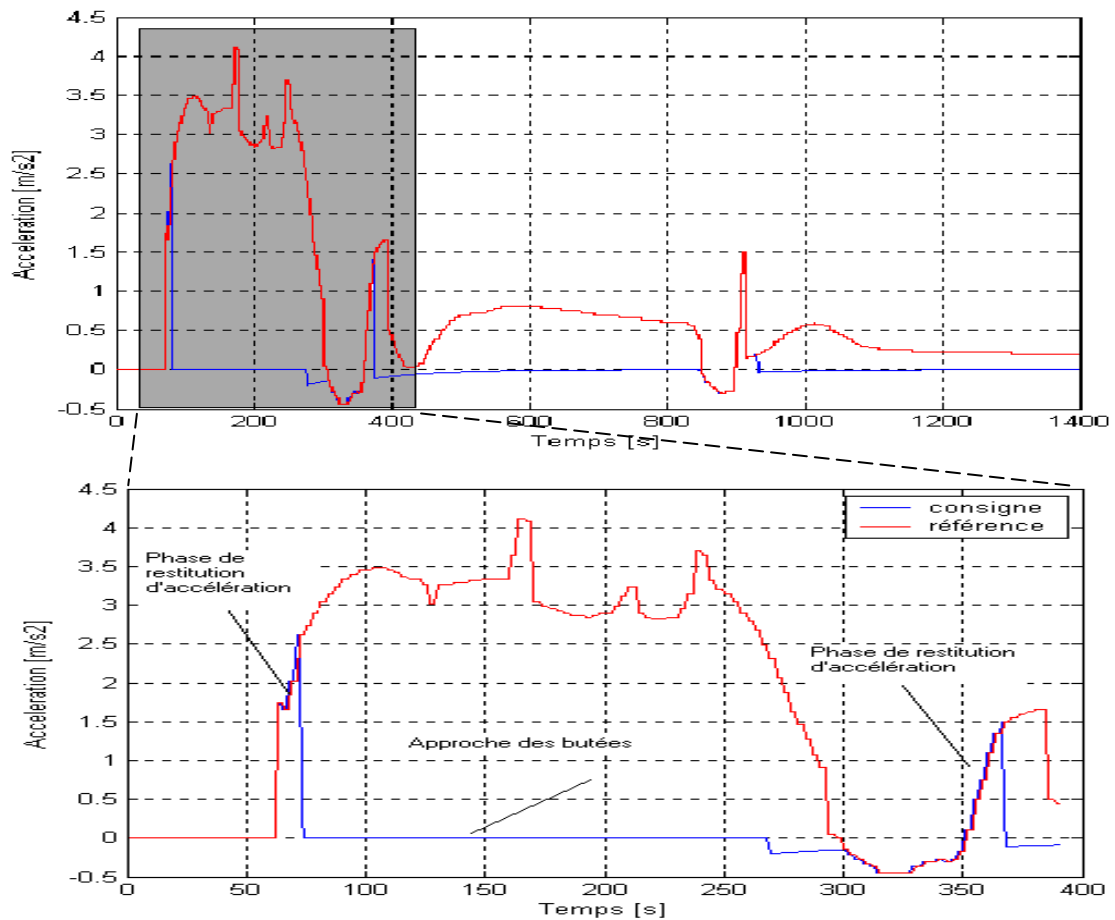


Fig 7.9 : Consigne d'accélération calculée par la stratégie prédictive lors d'une simulation correspondant à un démarrage.

Des conflits sensoriels apparaissent lorsque l'accélération perçue dans le simulateur s'oppose à l'accélération perçue en réel. On retrouve la décomposition du profil d'accélération de la plate-forme en une phase de restitution à gain unitaire et une phase provoquant un conflit sensoriel faible (ou encore nul).

Contrairement à la stratégie prédictive, la stratégie classique génère des conflits sensoriels forts : la consigne d'accélération planifiée par cette dernière s'oppose à l'accélération du véhicule avec des amplitudes au dessus du seuil de détection.

Retour à la position neutre

Dans le cadre de la stratégie de commande que nous nous proposons de définir, nous distinguerons le mouvement de la plate-forme restituant une sensation d'accélération du mouvement de « Washout » afin d'explicitier les compromis qui seront amenés à être réglés par l'utilisateur.

Le « Washout » stabilise la trajectoire de la plate-forme autour de la position neutre. Nous définirons « la loi de Washout » sur la base d'une commande temps optimal afin de déplacer la plate-forme vers la position neutre le plus vite possible. Sous les hypothèses des contraintes physique et de perception , la commande temps optimal ramenant le système vers la position neutre est une commande « bang-bang » (Bernhard, 1976), tel que :

$$u(t) = -a_s \cdot \text{sign} \left[p(t) + \text{sign}(v(t)) \frac{v^2(t)}{2a_s} \right] \quad (7.5)$$

Le « Washout » se réalise alors avec une accélération égale au seuil de détection.

Règle d'activation

Dans la mesure où la restitution des accélérations du véhicule et le mouvement de « Washout » sont planifiés par deux algorithmes distincts, des critères doivent être déterminés pour définir les instants où la plate-forme est pilotée par l'un ou l'autre des algorithmes.

Les règles d'activation et de désactivation du « Washout » que nous proposerons se basent sur deux remarques. Premièrement, la loi de commande prédictive présentée au chapitre précédant restitue les accélérations longitudinales du véhicule en déplaçant la plate-forme vers ses limites de position et de vitesse. Lorsque ces limites sont atteintes, aucun indice inertiel n'est généré tant que l'accélération du véhicule ne change pas de signe (Fig. 7.10 (b)).

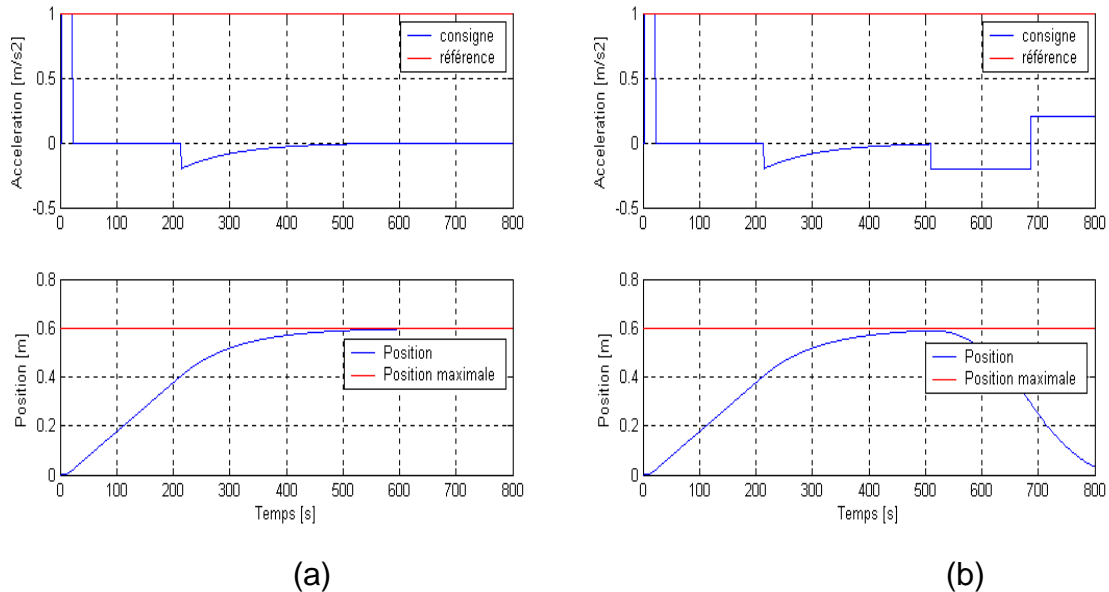


Fig 7.10 : Réponse de loi de commande prédictive : (a) sans et (b) avec l'activation de Washout

Aussi, nous proposons d'activer le « Washout » lorsque la position maximale est atteinte et l'accélération du véhicule est de signe constant (Fig. 7.11 (b)). Deuxièmement, lorsque les efforts agissant sur la dynamique du véhicule varient, les indices traduisant ces variations doivent être reproduits.

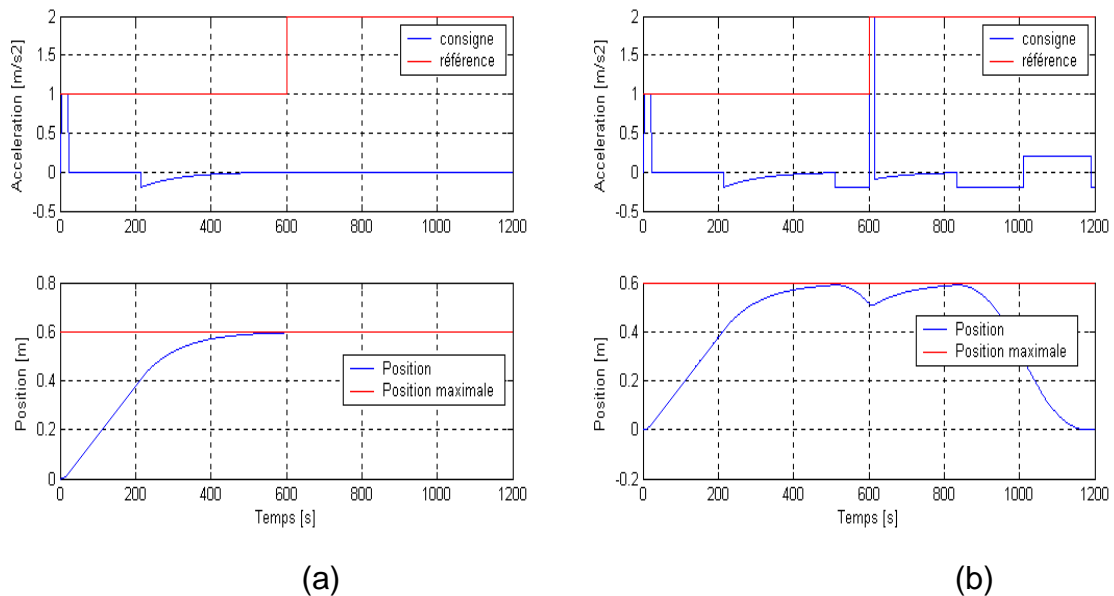


Fig 7.11 : Réponse de loi de commande prédictive : (a) sans et (b) avec Washout

(a) : réponse de la loi de commande prédictive lorsque l'accélération de référence est de 1 m/s^2 pendant 6s puis de 2 m/s^2 . Lorsque l'accélération de référence passe de 1 m/s^2 à 2 m/s^2 , la plate-forme est en sa position maximale (0.6m).

Aucun indice inertiel n'est alors restitué, renseignant le conducteur de la variation d'accélération. **(b)** : le « Washout » est activé lorsque la position maximale est atteinte (l'accélération de référence est de signe constant). Le « Washout » est désactivé lorsque l'accélération de référence passe de 1 à 2 m/s². Des indices inertiels sont générés, renseignant le conducteur de cette variation de la référence.

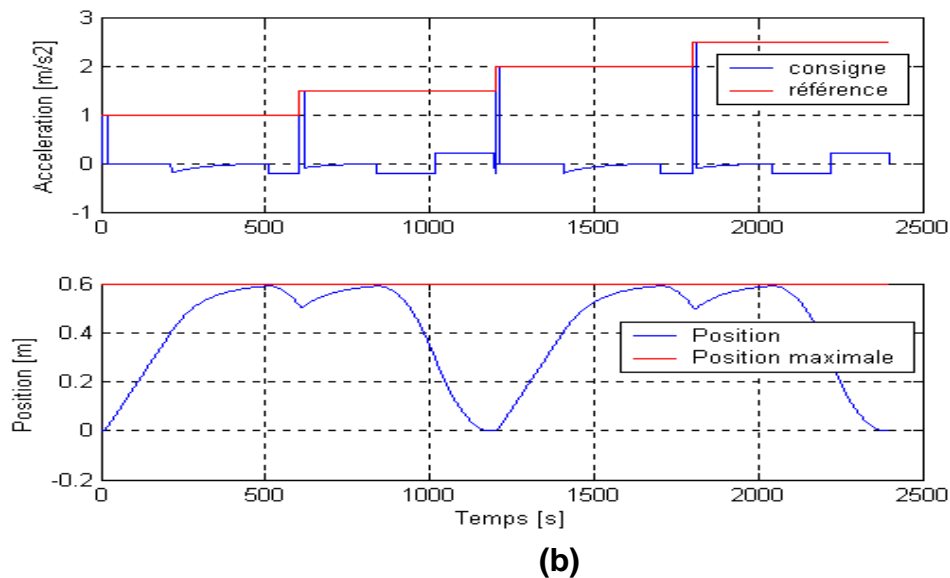
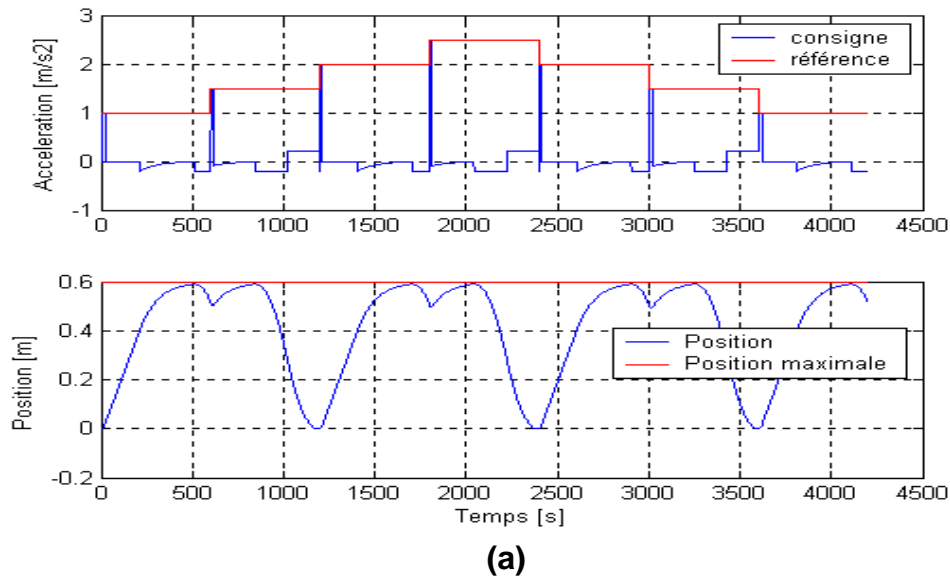


Fig 7.12 : Réponse de la loi de commande pour un signal d'accélération en créneau

Afin de valider la combinaison des deux stratégies : commande prédictive et Washout (Bang-Bang control), on a choisi un signal en créneau plus réel, **(a)**: accélération puis

décélération en palier, et **(b)**: accélération en palier. Le conflit sensoriel généré pendant cette phase de conduite est faible dans la mesure où l'amplitude de la décélération est de l'ordre du seuil de détection. Lorsque la consigne de position atteint la limite de 0.6 m, l'algorithme de « Washout » est activé, déplaçant le système vers la position neutre avec une accélération de l'ordre du seuil de détection.

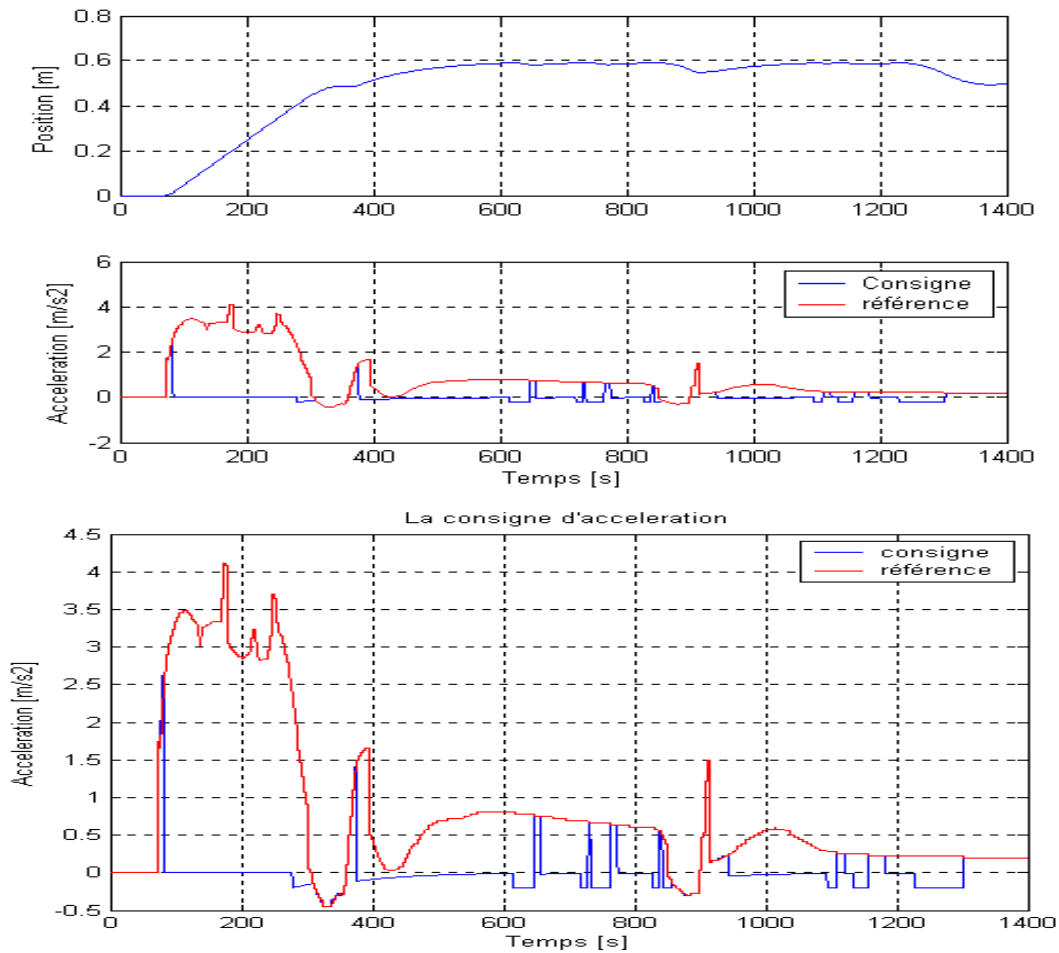


Fig 7.13 : Consigne d'accélération par la stratégie de commande lors d'un démarrage

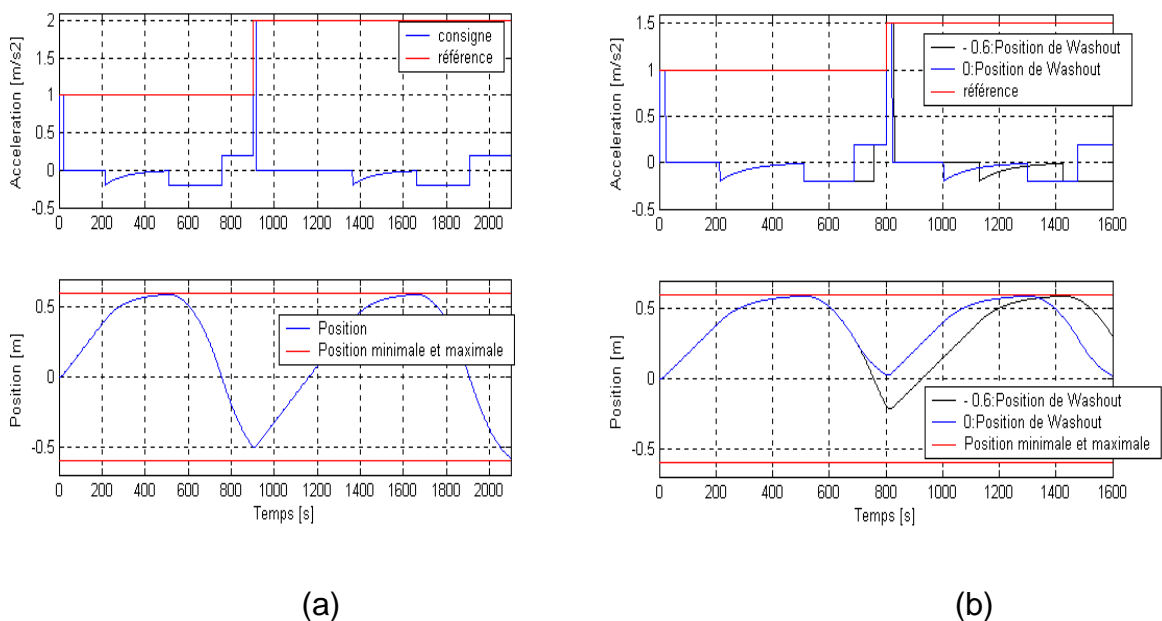
Le « Washout » permet de restituer des indices inertielles supplémentaires : sur l'intervalle [6-8]s le «Washout» est activé, dégageant une marge de déplacement utile pour la restitution d'indices inertielles sur l'intervalle [9-14] s.

Position de « Washout »

Si la position de « Washout » est généralement choisie comme étant la position neutre, ce choix n'est pas toujours celui permettant de restituer les accélérations du véhicule le plus longtemps possible. En effet, considérons le cas où l'accélération de référence est de 1 m/s^2

pendant 9s puis de 1.5 m/s^2 , et supposons que la limite de déplacement p_{\max} est de 0.6m . La figure 7.14 (a) montre que l'accélération de référence est restituée pendant une durée plus grande à partir de la 9^e s lorsque la position de « Washout » est la position $-p_{\max} = -0.6$ au lieu de la position neutre.

Le choix de la position de « Washout » doit être lié à une prédiction de l'accélération du véhicule : la position de « Washout » doit être déterminée à chaque pas de temps de sorte que l'accélération restituée en partant de ce point minimise l'erreur de perception d'accélération le plus longtemps possible. Lorsqu'une telle prédiction n'est pas disponible, cette position de « Washout » peut être déterminée à partir de la configuration de la route. En effet, lorsque le conducteur s'approche d'un panneau de stop, la position de Washout longitudinale peut être fixé à $-P_{\max}$.



(a) (b)
Fig 7.14 : Réponse de la stratégie de commande lorsque la position de Washout est à -0.6m

(b) : Réponses de la stratégie de commande lorsque l'accélération de référence est de 1 m/s^2 pendant 8s puis de 1.5 m/s^2 dans le cas où la position de « Washout » est la position neutre et dans le cas où elle est la position limite $p_{\max} = -0.6\text{m}$. L'accélération restituée dans le premier cas à partir de la 8^e s dure plus longtemps (+0.1 s), c'est-à-dire utilisation plus optimale de l'espace disponible pour restitué plus les indices inertiels.

7.6.2. Commande de la plateforme :

Après l'utilisation des relations physiques et mécaniques, pour modéliser le système, la fonction de transfert reliant l'accélération de cabine $a(s)$ et la commande en tension $U(s)$, ou s est le variable de Laplace, est la suivante :

$$\frac{a(s)}{U(s)} = \frac{K_t s}{(Js + f)(Ls + R) + \frac{2\pi}{p} NK_e K_t} \quad (7.6)$$

K_t : Constante de torsion.

K_e : Constante de force electro-motrice (moteur).

J : Inertie du système.

f : Constante de frottement visqueux.

L : Inductance de moteur.

R : Résistance de moteur.

p : Coefficient de transfert rotation/translation (vis/écrou en fonction de l'accélération en objectif).

N : Facteur de réduction (vitesse angulaire moteur /vitesse angulaire vis).

La minimisation de l'erreur de suivi d'accélération augmente la validité physique de la simulation puisque l'accélération du conducteur en simulation est plus proche de l'accélération du conducteur en réel. Toutefois, les simulateurs de conduite visent à reproduire une sensation de mouvement identique à celle présente en condition réel. Aussi, afin d'augmenter la validité perceptive des simulateurs, l'erreur de perception d'accélération doit être minimisée.

Nous considérerons par la suite que l'accélération perçue est un filtrage de l'accélération du véhicule par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{a_{sens}(s)}{a_p(s)} = 1.5 \frac{s + 0.076}{(s + 0.19)(s + 1.5)} \quad (\text{Modèle de Young et Meiry (1968)}) \quad (7.7)$$

La synthèse du correcteur GPC se divise en trois parties. Une première partie est dédiée à la synthèse des paramètres GPC N_1, N_2, N_u et λ ($N_1 = 1, N_2 = 10, N_u = 1, \lambda = 10^{-4}$) afin d'obtenir le comportement entrée/sortie désiré. La deuxième partie présente une robustification de ce correcteur initial afin de diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande (à titre d'exemple ce bruit est dû à la non linéarité de système réel, vibration de siège qui supporte la centrale inertielle (capteur d'accélération)), et la troisième partie

présente une deuxième robustification où l'on considère, en plus des spécifications de la première robustification, des variations de l'inertie de la charge (conducteur + Cabine).

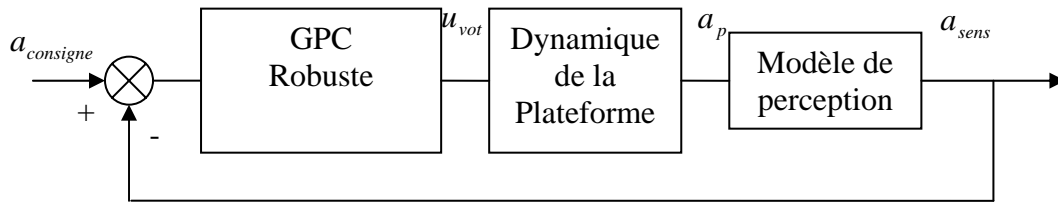


Fig.7.15 : La commande en accélération de plateforme

7.6.2.1 Robustification face à des bruits de mesure

De façon similaire à la démarche théorique développée lors des chapitres 5 et 6, l'objectif de cette robustification est de diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande, tout en garantissant le respect d'un gabarit pour le rejet de perturbation.

Robustifier pour diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande se traduit par une robustification maximisant l'incertitude additive directe tolérée sans perte de stabilité, incertitudes qui peuvent être, par exemple, des dynamiques négligées à haute fréquence. Notons que l'on fixe $Q_2 = 0$ puisque l'on souhaite conserver le comportement entrée/sortie fourni par le correcteur $C=1$.

On déduit alors le problème d'optimisation suivant (en reprenant les notations des chapitres précédents) :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env}(Q_1) < 0}} \left\| \left(-\frac{AR}{A_0 A_c} - \frac{\Delta A^2}{A_0 A_c} Q_1 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (7.8)$$

Afin de pondérer davantage les hautes fréquences, il est nécessaire de faire intervenir la pondération :

$$W = \frac{1 - 0.9q^{-1}}{0.1}$$

Concernant le gabarit pour le rejet de perturbation décrit par Φ_{env} , on a considéré ici un gabarit en relation avec le rejet de perturbation obtenu avec le correcteur $C = 1$, afin de comparer les résultats. La Figure 7.16 donne ainsi le gabarit imposé ainsi que le rejet de perturbation obtenu avec le correcteur GPC $C = 1$ et le correcteur robuste. Ce rejet correspond à une perturbation d'accélération en échelon de 0.1 m/s^2 . A la différence de la

perturbation considérée au chapitre 4, qui représentait la perturbation du modèle CARIMA, on fait intervenir ici une perturbation d'accélération afin d'être plus proche de la réalité.

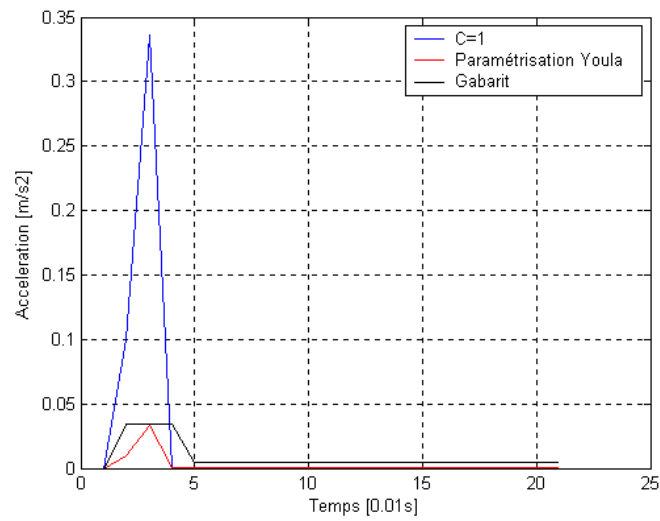


Fig 7.16 : Le rejet de perturbation obtenu avec la paramétrisation de Youla

La minimisation a été effectuée via une programmation linéaire, avec un paramètre Q_1 polynomial d'ordre 60, et 180 points de discrétisation pour la réponse fréquentielle. Ce polynôme est ensuite approché par une fonction de transfert d'ordre 3. On obtient le paramètre suivant :

$$Q_1 = \frac{5.531 - 9.385q^{-1} + 4.19q^{-2} + 0.009238q^{-3}}{1 - 2.86q^{-1} + 2.804q^{-2} - 0.9427q^{-3}}$$

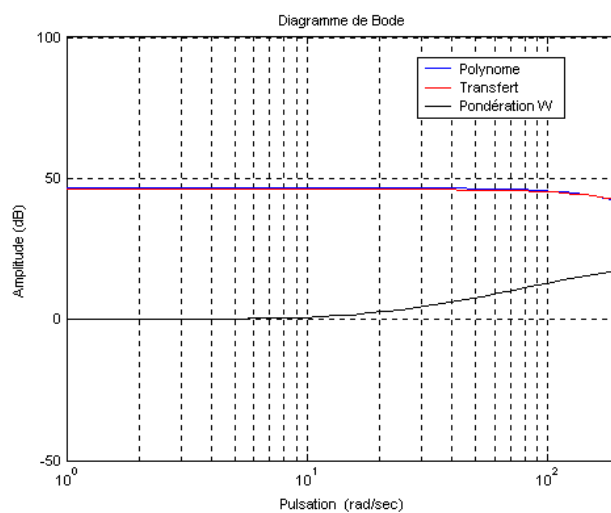


Fig 7.17 : Approximation polynôme/transfert

La Figure 7.17 montre l'approximation polynôme transfert effectuée. Dans premier temps, le polynôme est approché via l'algorithme de Fletcher-Powell décrit au chapitre 6, par un transfert d'ordre 3.

La Figure 7.16 montre le rejet de perturbation et la Figure 7.18 la marge de robustesse B_r , obtenus pour ce correcteur, que l'on nommera Youla transfert et Youla polynôme. Cette marge de robustesse correspond à l'inverse du transfert minimisé (7.8). Dans les deux cas, on a aussi superposé les résultats obtenus avec le correcteur correspondant au paramètre polynomial, afin de vérifier la validité de l'approximation du polynôme par le transfert.

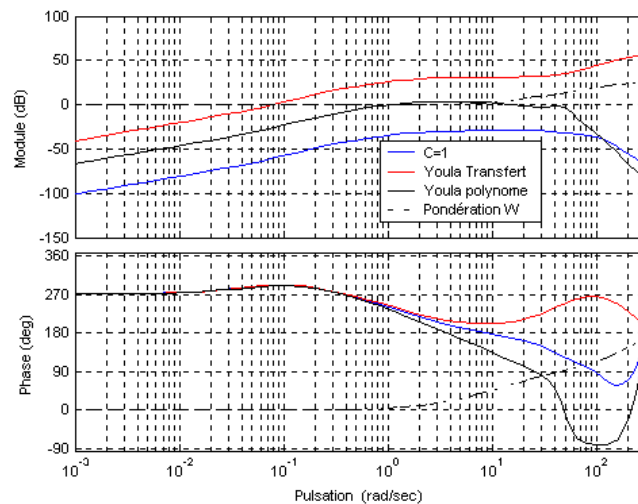


Fig 7.18 : Marge de robustesse B_r

On constate aisément que le correcteur robustifié induit au système un rejet de perturbation plus rapide et une meilleure marge de robustesse que pour le cas du correcteur $C=1$.

Considérons maintenant les caractéristiques fréquentielles en boucle ouverte obtenues avec ce correcteur. La Figure 7.19 montre les diagrammes de Bode et de Black du système corrigé par ce correcteur avec paramétrisation de Youla.

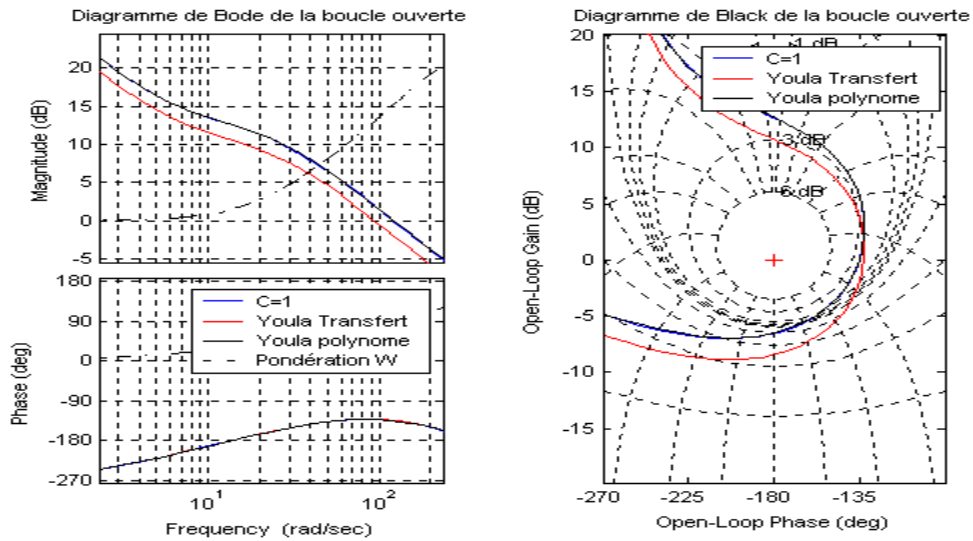
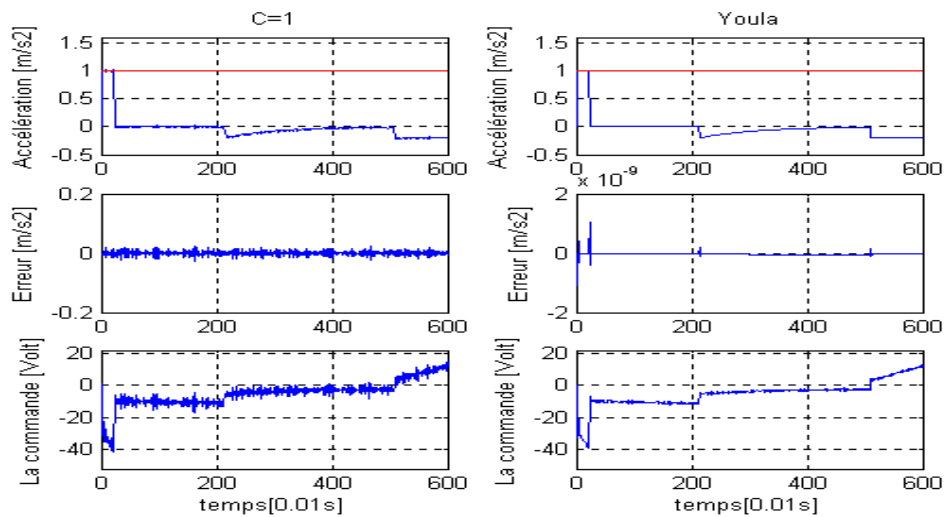


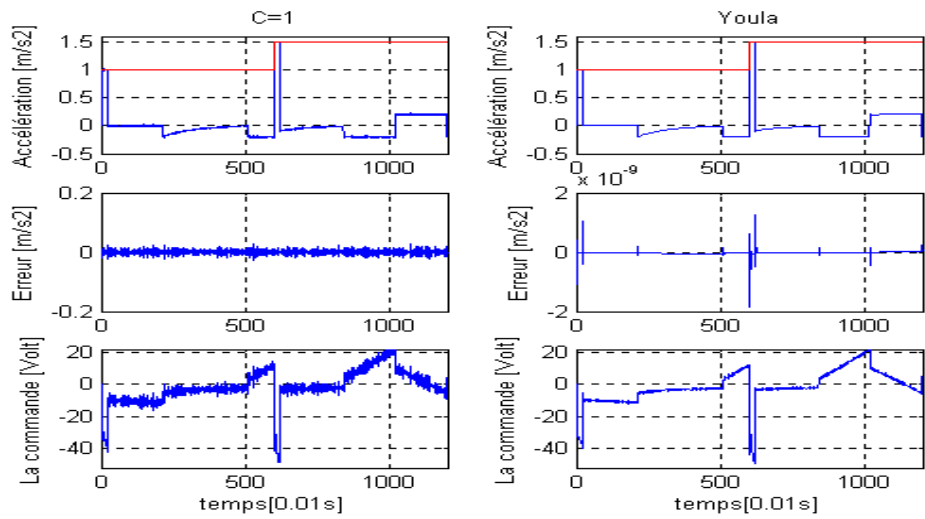
Fig 7.19 : Diagrammes de Bode et de Black de la boucle ouverte corrigée

On constate tout d'abord sur le diagramme de Bode Figure 7.19 que la bande passante de la boucle ouverte a été diminuée par la robustification. Le diagramme de Black montre alors que la marge de phase a été relativement diminuée. Le correcteur robustifié induit donc une plus grande robustesse face à des incertitudes additives à haute fréquence, comme illustré Figure 7.18, mais une moindre robustesse dans la bande passante, comme le montre le fait d'avoir une marge de phase plus petite.

La Figure 7.20 reproduit les résultats temporels obtenus pour une consigne d'accélération en échelon et une autre en deux niveaux d'accélération.



(a)



(b)

Fig 7.20 : Réponses obtenues pour deux différents profils d'accélération

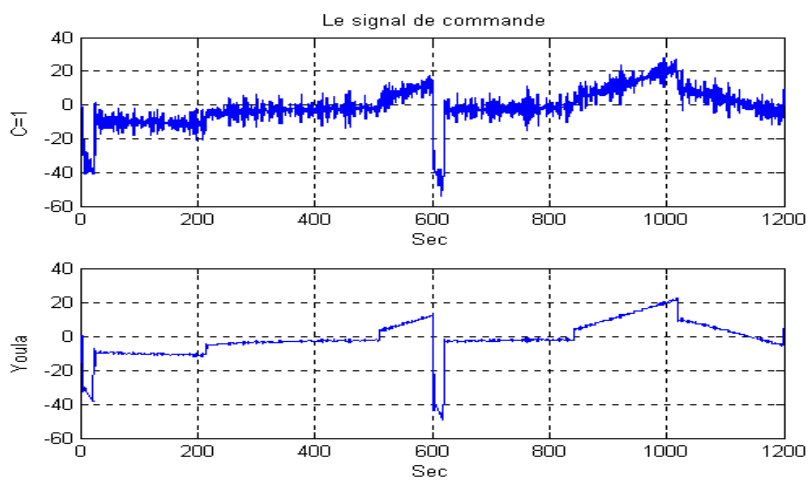


Fig 7.21 : Signal de commande pour le deuxième profil (b) d'accélération (détail)

On constate au travers de ces résultats que l'effet du bruit de mesure sur la commande a été largement diminué par rapport au correcteur initial $C=1$. Par rapport aux résultats obtenus avec le correcteur $C=1$, le correcteur GPC robustifié Youla induit un meilleur suivi de consigne, un rejet de perturbation plus rapide. En revanche, comme on l'a vu, la marge de phase est plus faible.

7.6.2.2 Robustification face à des bruits de mesure et à des variations de l'inertie de la charge

Ce paragraphe tient compte désormais d'une incertitude sur l'inertie du système. A titre d'introduction, observons l'effet qu'un changement de poids (conducteur, siège, plateforme) produit un changement d'inertie du système piloté. Nous proposons une inertie de 0.01 kgm^2 . Rappelons que celle du modèle est 0.005 kgm^2 .

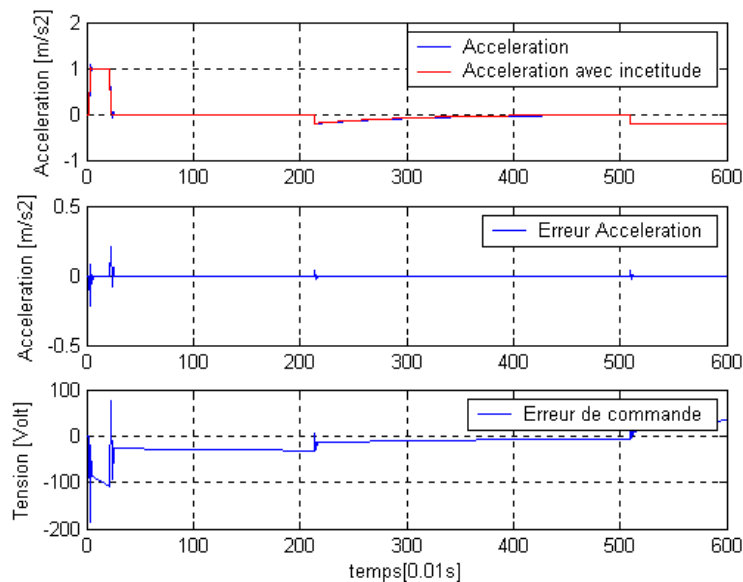


Fig 7.22 : Simulation de correcteur initial avec variation de l'inertie de la charge

On constate que la réponse du système est très oscillatoire. Afin d'améliorer la performance du système face à ce type d'incertitude, il est nécessaire d'inclure cette incertitude sur l'inertie lors du processus de robustification. On cherche en fait une robustesse en performance face à cette incertitude.

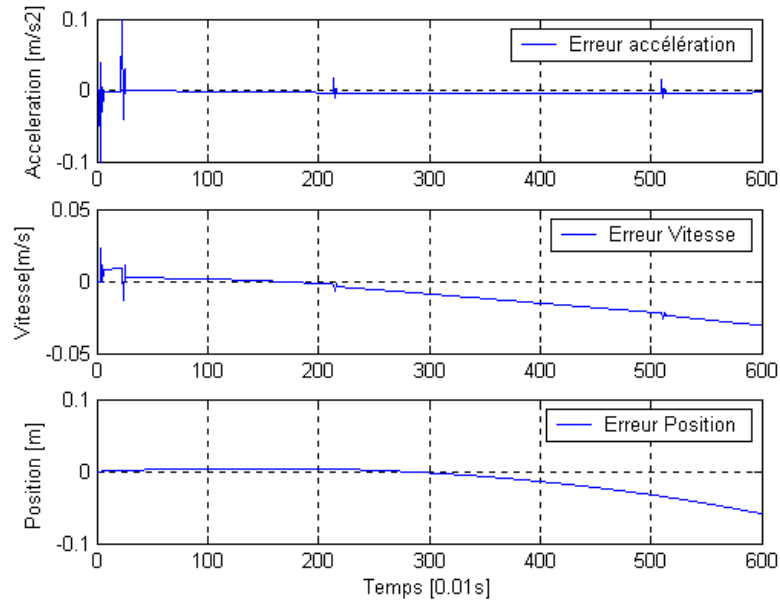


Fig 7.23 : Dégradation des performances nominales avec la variation de l'inertie de la charge

Dans la méthode de robustification développée, on considère des spécifications de robustesse en stabilité et de performance nominale. La méthode ne permet pas de prendre en compte explicitement des spécifications de robustesse en performance.

Cependant, et comme indiqué dans [MM89], dans le cas d'un système monoentrée/ mono-sortie, la robustesse en performance peut être obtenue avec une bonne performance nominale et une bonne robustesse en stabilité. On se fixe, donc, l'objectif d'améliorer la robustesse en stabilité face à une incertitude sur l'inertie et d'améliorer aussi la performance nominale, afin d'obtenir une meilleure robustesse en performance. En plus, on considère aussi une spécification concernant la diminution de l'effet du bruit de mesure sur la commande.

Concernant une incertitude sur l'inertie du système, cela peut être modélisée de plusieurs façons. Faisons intervenir ici une incertitude multiplicative directe. Le modèle obtenu avec l'incertitude sur l'inertie est alors :

$$\frac{a(s)}{U(s)} = \frac{K_t s}{((J + \delta_j)s + f)(Ls + R) + \frac{2\pi}{p} NK_e K_t} \quad (7.9)$$

Ce modèle peut être traduit par la structure de la Figure 7.24, avec :

$$\Delta(s) = \frac{-\delta_j s(Ls + R)}{((J + \delta_j)s + f)(Ls + R) + \frac{2\pi}{p} NK_e K_t} \quad (7.10)$$

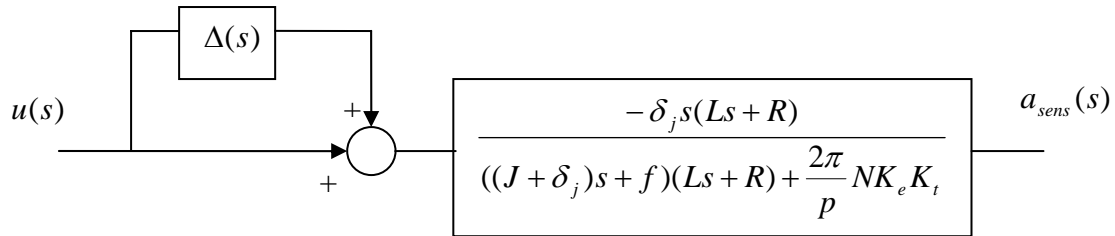


Fig 7.24 : Incertitude sur l'inertie sous forme multiplicative directe

En plus, on considère aussi une spécification concernant la diminution de l'effet du bruit de mesure sur la commande. On a donc trois spécifications : Robustesse en stabilité face à une incertitude sur l'inertie, diminution de l'effet du bruit de mesure sur la commande où on contraint l'effet de ce bruit sur la commande à rester inférieur en module à 0.01, et performance nominale.

Une robustification face à ce type d'incertitude conduit selon le Tableau 6.1 à la minimisation du transfert suivant :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env1}(Q_1) < 0.01 \\ \Phi_{env1}(Q_1) < 0}} \left\| \left(-\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (7.11)$$

La deuxième spécification porte sur l'effet du bruit de mesure sur la commande. Lors de la robustification précédente, cette spécification avait été prise en compte par un critère fréquentiel. Dans ce cas-ci, faisons intervenir une spécification temporelle (même si un critère fréquentiel pourrait toujours s'envisager). On considère pour cela un bruit de mesure de variance $25 \cdot 10^{-8}$, qui correspond approximativement au bruit de quantification produit par le capteur d'accélération (Centrale inertielle montée sur le siège). Ce bruit est coloré par un filtre passe haut de fonction de transfert :

$$W_c = \frac{1 - 0.6q^{-1}}{0.4}$$

Finalement, il est nécessaire de considérer également la spécification temporelle précédente correspondant au rejet de perturbation. Cette contrainte permette de garantir une performance nominale pour la dynamique de régulation.

L'optimisation a été effectuée via une programmation linéaire, avec un paramètre Q_1 polynomial d'ordre 100, et 180 points de discrétisation pour la réponse fréquentielle. Ce polynôme a été ensuite approché par une fonction de transfert d'ordre 4. On obtient le paramètre suivant :

$$Q_1(q^{-1}) = \frac{6293 + 951.9q^{-1} + 1674q^{-2} + 883.7q^{-3} - 271q^{-4}}{1 + 0.2671q^{-1} + 0.5278q^{-2} + 0.234q^{-3} + 0.07164q^{-4}}$$

Donc on cherche un compromis robustesse/performance. A la différence de la robustification réalisée précédemment, on adopte ici deux critères fréquents et deux contraintes temporelles. On considère la minimisation suivante :

$$\min_{\substack{Q_1 \in RH_\infty \\ \Phi_{env1}(Q_1) < 0 \\ \Phi_{env2}(Q_1) < 0}} \left\| \begin{pmatrix} -\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 \\ -\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_0A_c} Q_1 \end{pmatrix} W_1(Q^{-1}) \right\|_\infty \quad (7.12)$$

Pour laquelle, d'une part, on minimise la fonction de sensibilité complémentaire pour augmenter la robustesse en stabilité face à une incertitude sur l'inertie et, d'autre part, on minimise l'inverse de la marge de robustesse B_r afin de minimiser l'effet du bruit de mesure sur la commande. En plus, on considère les contraintes temporelles qui représentent le gabarit autorisé pour le rejet de perturbation, et une contrainte temporelle pour l'effet de bruit sur la commande. Les deux contraintes temporelles sont représentées par Φ_{env1} et Φ_{env2} . Dans ce cas, on a voulu augmenter la performance nominale par rapport au correcteur du paragraphe précédente et c'est pour cette raison que l'on a eu recours à des gabarits plus contraignants.

Afin de pondérer davantage les hautes fréquences, il est nécessaire de faire intervenir la pondération :

$$W_1 = W_2 = \frac{1 - 0.9q^{-1}}{0.1}$$

En constatant qu'une bonne approximation du polynôme aux hautes fréquences était nécessaire afin de garantir les caractéristiques du correcteur obtenues avec le paramètre polynomial. On peut aussi remarquer que cette pondération sert à compenser le caractère passe bas obtenu dans le paramètre.

On peut remarquer qu'avec cette robustification, l'ordre du polynôme synthétisé est plus grand que précédemment. Ceci peut être expliqué par le fait d'avoir considéré plus de spécifications, ce qui exige d'avoir un espace de recherche du paramètre plus étendu.

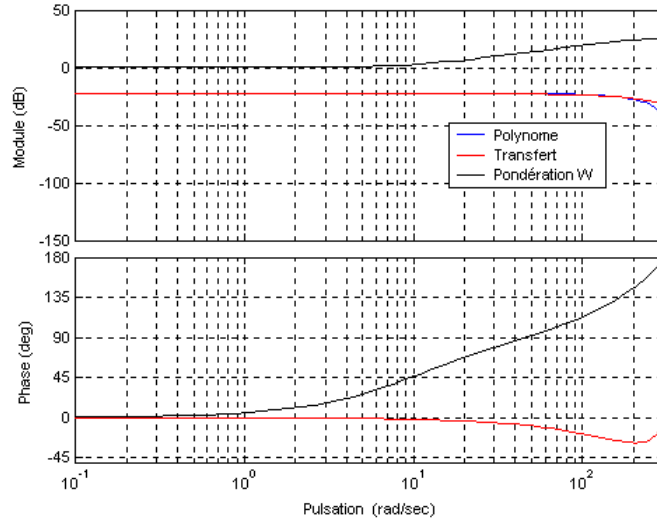


Fig 7.25 : Approximation polynôme/transfert

La Figure 7.26 montre le rejet de perturbation et la Figure 4.27 montre la marge de robustesse B_r obtenue pour ce correcteur. Dans les deux cas, on a également reproduit les résultats obtenus avec le correcteur correspondant au paramètre polynomial, afin de vérifier la validité de l'approximation du polynôme par le transfert. La marge de robustesse B_r a été augmentée par rapport au correcteur initial $C=1$.

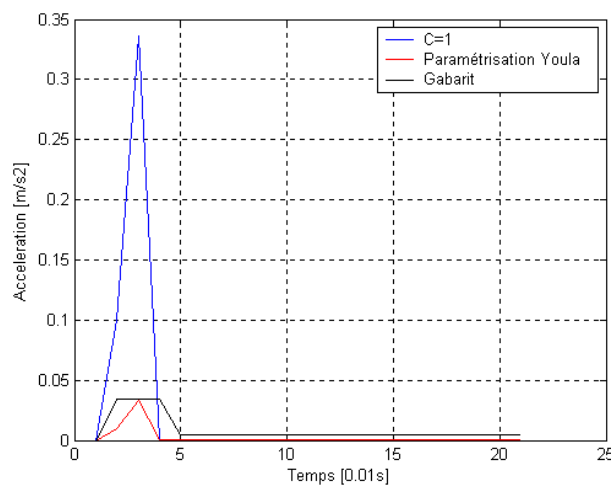
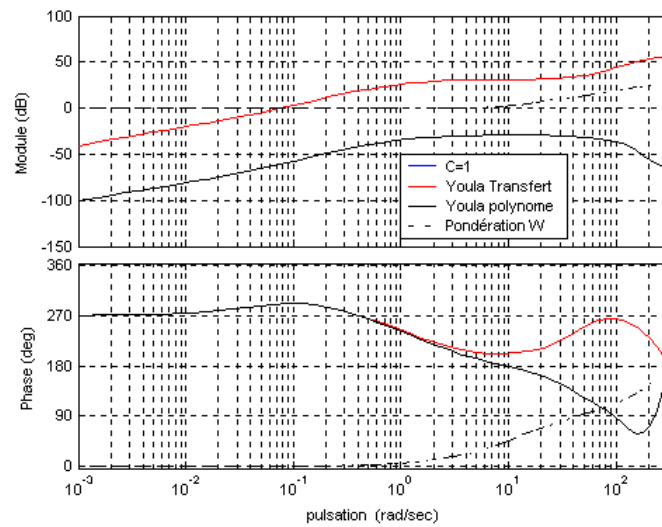


Fig 7.26 : Gabarit et rejet de perturbation obtenu avec la paramétrisation de Youla

Fig 7.27 : Marge de Robustesse B_r

Concernant les caractéristiques fréquentielles en boucle ouverte obtenues avec ce correcteur, la Figure 7.28 présente respectivement les diagrammes de Bode et de Black obtenus.

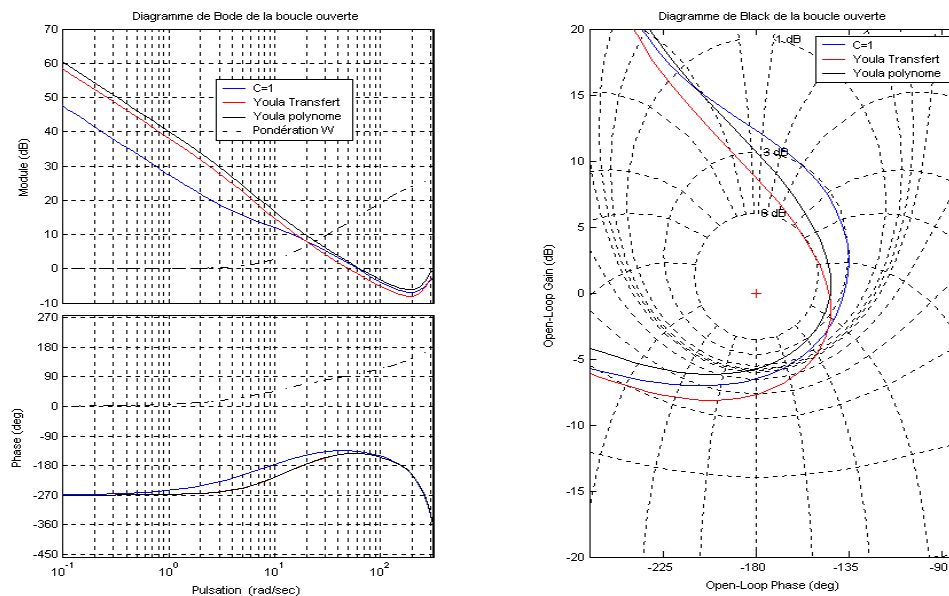


Fig 7.28 : Diagramme de Bode et Black de la boucle ouverte corrigée

On peut remarquer que la marge de gain a augmenté par rapport au correcteur $C=1$. La prise en compte d'une spécification minimisant la sensibilité complémentaire a donc eu comme effet une diminution de la marge de phase, diminuant ainsi la robustesse dans la

bande passante de l'asservissement. Cette marge de robustesse B_r va permettre de rejeter des dynamiques négligées en haute fréquence.

Les Figures 7.28 et 7.29 montrent les résultats temporels obtenus sur le système nominal pour deux profils d'accélération.

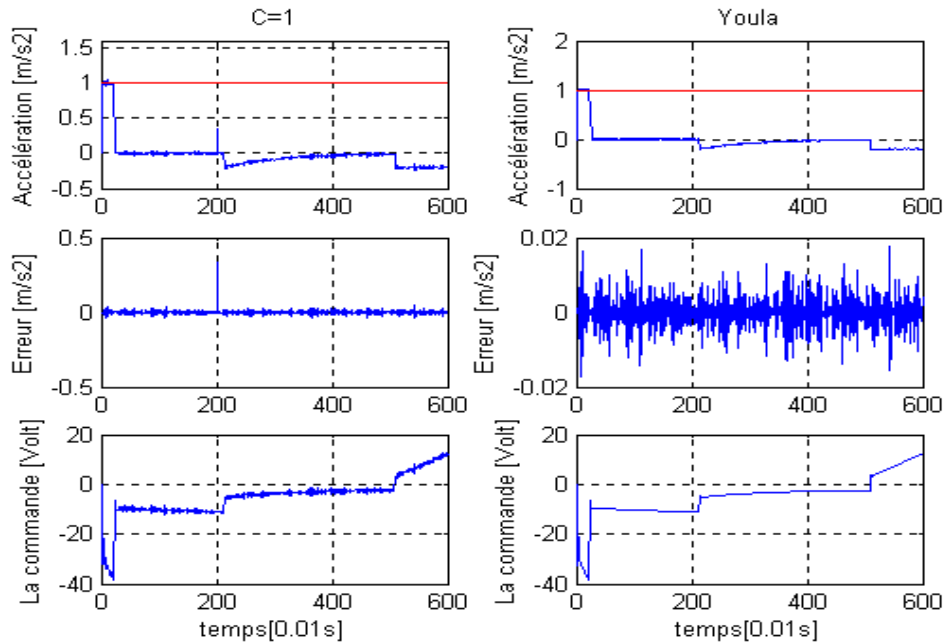


Fig 7.29 : Les résultats temporels obtenus pour le premier profil

Malgré que les résultats de paramétrisation de Youla sont meilleurs que celles obtenus pour $C=1$, la commande prédictive présente toujours un caractère de robustesse.

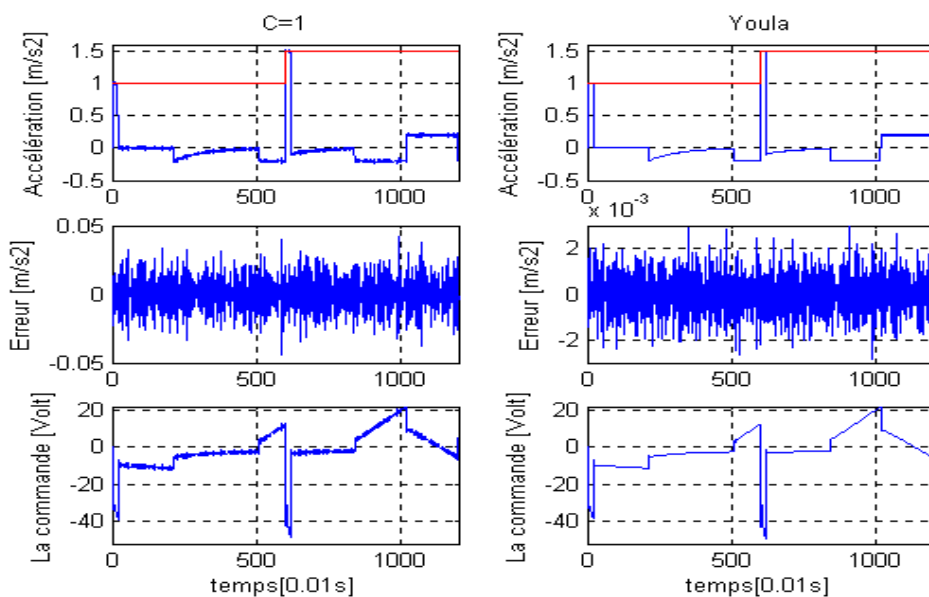


Fig 7.30 : Les résultats temporelles obtenus pour le deuxième profil

On peut y observer que le comportement du régulateur face à une incertitude sur l'inertie est meilleur que celui du correcteur $C=1$. On constate donc que la robustesse en performance face à l'incertitude sur l'inertie a été améliorée par rapport au correcteur $C=1$.

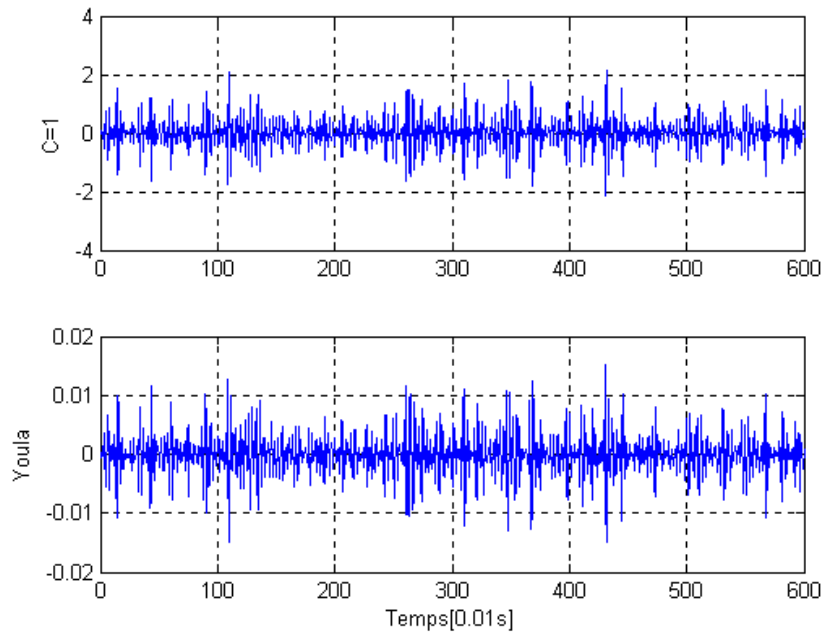


Fig 7.31 : Effet de bruit sur la commande pour le premier profil

L'hypothèse admise ici (Fig 7.32) est que l'influence des conflits sur la sensation de mouvement est minimisée lorsque l'accélération restituée est en dessous d'un seuil (seuil de détection d'accélération).

Les algorithmes restituant le mouvement de la plateforme, aussi appelés stratégies de commande s'articulent autour de deux principes. Le premier déplace la plateforme dans la même direction et dans le même sens que le véhicule simulé. Le second le ramène vers sa position neutre afin d'éviter que celui-ci reste en ses positions limites lorsque l'accélération du véhicule est soutenue (mouvement de « washout »).

La stratégie de commande résultante prend en compte explicitement les contraintes physiques du plateforme et les contraintes perceptives liées à la simulation du mouvement.

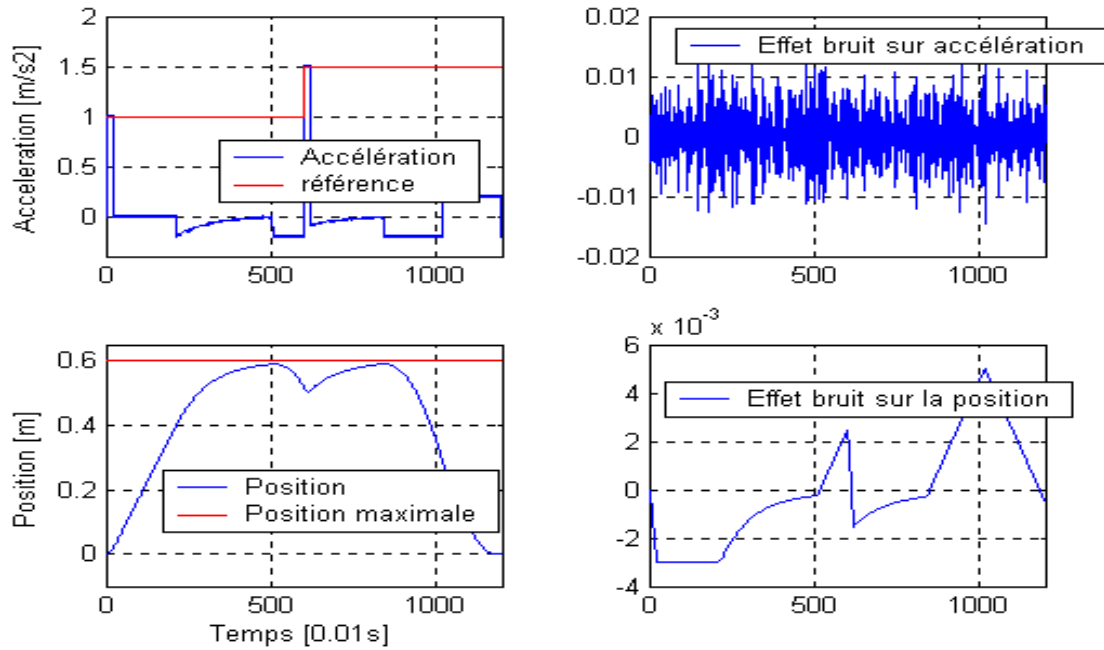


Fig 7.32 : Accélération et Position aperçus par le conducteur

Lorsque l'accélération de référence passe de 1 à 1.5 m/s^2 , quelle doit être l'amplitude de l'accélération restituée ? Si elle est de 1.5 m/s^2 , la variation de l'accélération restituée ne correspond alors pas à celle de l'accélération de référence. Si elle est de 0.5 m/s^2 , la variation de l'accélération restituée correspond bien à celle de l'accélération de référence. En revanche, l'amplitude des indices inertiels restitués ne correspond alors pas à l'amplitude de l'accélération de référence.

Pour ce cela, il faut bien étudier tout effort agissant sur le modèle dynamique de la plateforme, que soit dynamique négligée, bruit de mesure, ou perturbation, pour rester toujours sous la seuil de perception.

Une expérimentation de validation permettant de déterminer le compromis idéal en situation de conduite active peut être organisée autour d'une tâche de suivi de véhicule. Cette tâche de conduite permet « d'imposer indirectement » un profil d'accélération au véhicule suiveur. En effet, lorsque le suivi est parfait, le profil d'accélération du véhicule suiveur correspond au profil d'accélération du véhicule lièvre. La distance inter-véhicule peut être alors une variable de comparaison entre la simulation et le réel [MD05].

Enfin, dans la mesure où l'accélération du véhicule ne peut être restituée à l'identique, quels sont les indices inertiels à restituer en priorité ? Si la prédominance des informations visuelles en conduite en ligne droite rend probablement inutile la restitution des accélérations, il en est autrement lors de certaines manœuvres comme un changement de

file ou un freinage jusqu'à l'arrêt. Dans ces situations, le retour inertiel permet de réguler la trajectoire du véhicule plus vite que le retour visuel.

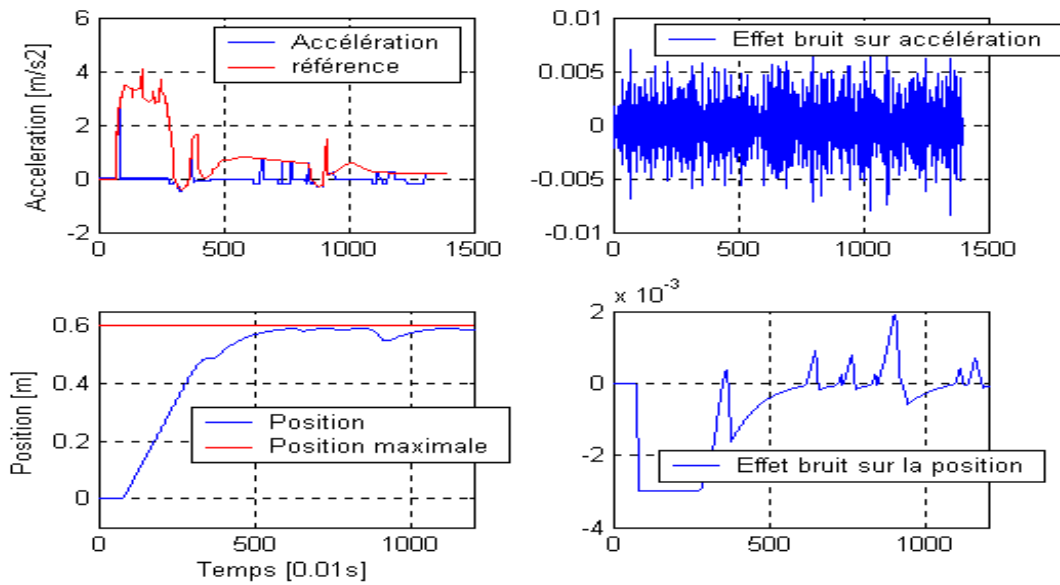


Fig 7.33 : Accélération et Position aperçus par le conducteur lors d'une simulation correspondant à un démarrage

Partant de l'hypothèse qu'une variation des efforts agissant sur le véhicule doit être perçue en simulation, nous en avons conclu que des indices inertiels doivent être suscités lorsque la dérivée de l'accélération du véhicule variait.

Afin de comparer l'influence de ce critère avec celui d'autres critères sur la validité de la simulation, la tâche de suivi de véhicule peut être reprise pour définir une expérimentation de validation.

7.7 Conclusion

Ce chapitre montre les résultats obtenus lors de l'application de notre technique de commande pour la restitution de mouvement et la commande de la plateforme.

Premièrement, Ce chapitre s'est attaché à décrire la restitution de mouvement. Contrairement aux stratégies classiques, notre stratégie propose de générer le Washout à partir de loi de commande bien détaillée connue sous le nom de *Bang-Bang control*. Cette approche impose à l'utilisateur d'explicitier l'organisation des différentes lois mises en jeu. En contre-partie, leurs influences sur la sensation de mouvement restituée est mesurables et les contraintes physiques et perceptives associées sont respectées quelque soit le profil d'accélération du véhicule.

Deuxièmement, On a pu voir que la méthode développée permet de prendre en compte plusieurs spécifications fréquentielles et temporelles afin de faire face aux bruits de mesure du capteur d'accélération et aux modifications de l'inertie de la charge. Avec la robustification proposée, on a pu robustifier un régulateur GPC initial, synthétisé avec $C = 1$, afin de diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande, et de garantir un certain niveau de performance face à des variations sur l'inertie du système.

Cette robustesse en performance est obtenue grâce à la réalisation d'un compromis entre la performance nominale et la robustesse en stabilité. La performance nominale est assurée par le respect d'un gabarit temporel pour le rejet de perturbation. En effet, la prise en compte de spécifications sous forme de respect d'un gabarit temporel permet d'ajuster le compromis robustesse/performance d'une façon visuelle simple. En outre, grâce aux deux degrés de liberté du régulateur GPC, la robustification ne modifie pas le transfert entrée/sortie, de sorte que la performance nominale de la dynamique de poursuite obtenue avec le correcteur GPC initial est conservée. On pourrait aussi par la même technique changer le comportement entrée/sortie au moyen du paramètre $Q_2(q^{-1})$ présenté au chapitre 6, utilisé ici volontairement uniquement pour la restitution de mouvement.

Conclusion et Perspectives

Ce travail part de la problématique liée à la loi de commande GPC et s'étend à la robustification de tout type de commande sous forme *RST*.

Le travail présenté propose des solutions à des problématiques autour de commande prédictive, comme le problème des temps morts des systèmes multivariables fortement couplés.

On a proposé aussi une solution à la problématique du choix du polynôme C , en trois parties :

1. On a tout d'abord étudié la commande GPC et l'impact du polynôme C sur ce type de commande. On a vu, notamment, que ce polynôme permet de robustifier la loi de commande.
2. Ensuite, on a montré que la paramétrisation de Youla produit sur la loi de commande un effet semblable à celui du polynôme C , avec l'avantage d'avoir un degré de liberté supplémentaire. Ainsi, la paramétrisation de Youla permet de robustifier la loi de commande en donnant accès par ailleurs à un plus grand nombre de correcteurs stabilisants que le polynôme C . En fait, elle permet d'accéder à tous les correcteurs stabilisants. On a donc choisi de travailler avec la paramétrisation de Youla plutôt qu'avec le polynôme C , afin d'accéder à un domaine de correcteurs plus large.
3. Enfin, on a utilisé les caractéristiques de convexité obtenues avec la paramétrisation de Youla pour traduire le problème de robustification en un problème d'optimisation convexe. Pour cela, on a exprimé les caractéristiques de robustesse désirées à partir de spécifications fréquentielles et temporelles de la boucle fermée, comme par exemple la minimisation de

la norme H_∞ d'un transfert en boucle fermée ou le respect d'un gabarit temporel par un signal. Ces spécifications permettent de prendre en compte des critères de robustesse face à des incertitudes non structurées et des critères de performance nominale. De cette façon, on a pu garantir un compromis entre la robustesse et la performance.

Cette méthodologie a été ensuite résolue numériquement. Le paramètre de Youla appartenant à un ensemble de dimension infinie, en l'occurrence l'ensemble des systèmes stables, l'obtention d'une solution optimale n'est pas possible à l'heure actuelle. On a donc cherché une solution sous-optimale dans un sous-espace généré par une base de systèmes stables, en considérant les deux possibilités qui s'offrent à nous : soit la recherche du paramètre sous forme polynomiale ou filtre FIR, soit la recherche sous forme de transfert ou filtre IIR.

Donc ce travail, on se propose de présenter une méthodologie de synthèse permettant de prendre en compte plusieurs spécifications temporelles et fréquentielle lors de phase de synthèse, simultanément et de façon exacte.

La restitution de mouvement repose sur cette dernière caractéristique de notre méthode. Contrairement aux stratégies classiques, notre stratégie propose de générer le Washout à partir de loi de commande bien détaillée (*Bang-Bang control*). Cette approche impose à l'utilisateur d'explicitier l'organisation des différentes lois mises en jeu. En contre-partie, leurs influences sur la sensation de mouvement restituée est mesurables et les contraintes physiques et perceptives associées sont respectées quelque soit le profil d'accélération du véhicule.

Enfin, la méthode a été simulée et validée sur un système réel, en l'occurrence, un simulateur de conduite, pour la restitution de mouvement et la commande de la plateforme. Cette application a permis de vérifier notre objectif théorique. La commande a été robustifiée afin de diminuer l'effet d'un bruit de mesure et l'effet d'une incertitude paramétrique dans le modèle, tout en garantissant une dynamique pour le rejet de perturbation grâce à un gabarit temporel. Ceci a permis de constater que le compromis robustesse/performance est facile à gérer avec les gabarits temporels, et que de bonnes marges de robustesse peuvent être atteintes. Les résultats obtenus en simulation sont meilleurs que ceux obtenus avec une commande plus classique, couramment utilisée dans ce type d'application.

Perspectives

Nous envisageons deux axes en perspective :

1. Stratégie de commande :

La perspective la plus directe à citer est l'extension de cette méthodologie à un système multivariable. Dans ce cas, une approche par espace d'état avec des techniques d'optimisation sous un formalisme LMI semble plus adaptée.

Il est envisageable de considérer d'autres types d'incertitudes, comme par exemple les incertitudes structurées, ou d'utiliser une approche multi modèles, tout en conservant le formalisme par paramétrisation de Youla. Dans ces cas, on arrivera à un problème d'optimisation non convexe, nécessairement plus complexe à résoudre.

2. Simulateur de conduite :

La mise en place de cette stratégie de commande a soulevé un certain nombre de questions sur les caractéristiques de la restitution du mouvement auxquelles les résultats actuels ne permettent pas (à notre connaissance) de répondre directement. Bien que les heuristiques proposées en littérature aient été réglées empiriquement, des expérimentations sont nécessaires pour guider les futurs compromis à réaliser. L'intégration des réponses que ces expérimentations apporteront dans la stratégie de commande prédictive constitue les perspectives de ce travail.

Finalement, Il est envisageable d'intégrer la commande du dossier du siège pour réaliser la perception des opérations d'accélération, décélération et de freinage, et à équiper le dessous du siège par deux vérins pour assurer les situations des virages et aussi à introduire un système vibratoire sous le siège afin de restituer le mouvement dû aux irrégularités de la chaussée. En plus, introduire et étudié des stimuli visuels, haptiques et auditifs.

Bibliographie

- [AD06] A. Debbeh, M.L. Saidi, H.A. Abbassi. Robust predictive control. Conférence internationale de commande, modélisation et diagnostique, Annaba, Mai 2006.
- [AM03] A. Mehta, W. Wojsznis, D. Thiele, T. Blevins. Constraints handling in multivariable system by managing MPC squared controller. Emerson Process Management, *ISA Conference*, Houston, 2003.
- [AN05] A.N. Reyes, J.E. Normey-Rico, C. Bordons, E.F. Camacho. A Smith predictive based MPC in a solar air conditioning plant'', *Journal of Process Control* 15, pp 1–10, 2005.
- [BC01] B. Clément Synthèse multiobjectifs et séquencement de gains : application au pilotage d'un missile. Thèse de Doctorat, Université Paris XI, Paris 2001.
- [BD91] B.D. Robinson, D.W. Clarke. Robustness effect of pre-filter in generalized predictive control. *IEEE proc-D*, vol.138, No.1, 1991.
- [BS01] B. Clément, S. Hbaïeb, G. Duc, S. Font. Paramétrisation de Youla : application à la commande robuste par optimisation convexe. *APII Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 35(1-2), pp. 33-48, 2001.
- [CM88] C. Mohtadi. On the role of préfiltering in parameter estimation and control. workshop on adaptive control strategies for industrial use, Alberta, 1988.
- [DC76] D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controller, part II : multivariable case. *IEEE Transactions on automatic control*, AC-21 pp. 319-338, 1976.
- [DP87] D. Prett, M. Morari. Shell Control Problem. Shell Process Control Workshop. Butterworth Publishers, Stoneham, MA, 355-360, 1987.
- [DW87] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs. Generalized predictive control ,Part I, Part II. *Automatica* , 23(2), pp.137-160, 1987.

- [DW89] D.W. Clarke, C. Mohtadi. Properties of generalized predictive control. *Automatica*, 25(6), pp.859-875,1989.
- [EC93] E.F. Camacho. Constrained generalized predictive control. *IEEE Transaction on automatic control*, Vol 38, NO 2, pp327-332, 1993.
- [EF99] E.F. Camacho, C. Bordons. *Model predictive control*. Springer-Verlag , London,1999.
- [EG04] E.G.Migliore. *Commande prédictive a base de programmation semi définie'*, Thèse de doctorat, CNRS, 2004.
- [GC84] G.C. Goodwin, K.S. Sin. *Adaptive filtering prediction and control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood cliffs, New jersey 07632, 1984.
- [GC04] G.C. Goodwin, M. Seron, J.D. Dona. *Constrained control and estimation, an optimisation approach*. Edition Springer, 2004.
- [GR02] Gilles Reymond, Jacques Droulez, Andras Kemeny. Visuo-vestibular perception of self-motion modeled as a dynamic optimization process. *Biol. Cybern.* 87, 301–314, Springer-Verlag, 2002.
- [GS04] G. Scorletti . *Introduction à la commande multi variable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle H_∞* . support of course, Supelec, 2004.
- [GZ81] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on automatic control*, AC-26 pp. 301-320, 1981.
- [HR92] H. Rotstein, A. Sideris. Discrete-time H_∞ control: The one-block case. *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, December 1992.
- [JD90] J. Doyle, B. Francis, A Tannenbaum. *Feedback control theory*, Macmillan publishing Co, 1990.
- [JL03] J.L. Guzmán, M. Berenguel, S. Dormido. Interactive teaching of constrained generalized predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, 2003.
- [JM89] J.M. Maciejowski. *Multivariable feedback design*. Addison-Wesley publishing company, Wokingham, England, 1989.
- [JP96] J.P. Corriou. *Commande des procédés*. Edition Lavoisier TEC & DOC ,1996.
- [JW89] J.W. Helton, A. Sideris. Frequency response algorithms for H_∞ optimization with time domain constraints. *IEEE Transactions on automatic control*, 34(4) pp. 427-434, 1989.
- [MA03] M.A. Boudreau. *Squared Model Predictive Controller Performance on the Shell Standard Control Problem*. Submitted to ISA Conference, Houston, October 2003.
- [MD05] M. Dagdelen. *Restitution des stimuli inertiels en simulation de conduite*. Thèse de doctorat, Ecole des mines de paris, Renault, 2005.

- [MF97] M. Fikar, S. Engell. Receding horizon predictive control based upon the Youla-Kuèera parametrization. *European Journal of Control*, 3(4), pp.304-316, 1997.
- [MI92] McIntosh, A.R.,S.L.Shal, D.G.Fisher. Analyse and tuning of adaptive generalized predictive control. *The Canadian journal of chemical engineering* , Vol 69, Février 1992.
- [ML97] M.L. Saidi. Commande predictive généralisée adaptative. Mémoire de magister, Département d'électronique, Université de Annaba 1997.
- [ML06] M.L. Saidi, A. Debbèh, H. Arioui, M.S. Kermiche, H.A.Abbassi. Predictive control of motion platform in driving simulator. *Asian journal of information technology*, 5(2): 133-138, 2006.
- [ML062] M.L. Saidi. Commande des systèmes dynamiques non linéaire. Thèse de doctorat , Département d'électronique, Université de Annaba 2006.
- [MM89] M. Morari, E. Zafiriou. *Robust process control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1989.
- [NB03] N. Bar. Efficient Model Predictive Control Using a Sequential Semi-Definite Programming. Master en science, L'université de Norwegian , 2003.
- [PA98] P. Ansay, M. Gevers, V. Wertz. Enhancing the robustness of GPC via the Youla parameterization. *European Journal of Control* ,4,pp.64-70,1998.
- [PB96] P. Boucher, D. Dumur. *La commande prédictive*, Edition Technip, 1996.
- [PR03] P.R. Ayerbe. Robustification de la lois de commande prédictive par la paramétrisation de Youla . PhD thèse, Paris xi Orsay university, 2003.
- [RB01] R. Benabdennour, P. Borne, M. Ksouri, F. M'salhi. *Identification et commande des procédés industriels*. Editions TECHNIP, 2001.
- [RF63] R. Fletcher, M.J.D. Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *Computer Journal*, 6(2), pp.163-168, 1963.
- [SB91] S. Boyd, C. Barratt. *Linear Controller Design: Limits of Performance*. Edition Prentice-Hall, 1991.
- [SB04] S. Boyd, L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Edition Cambridge University Press, 2004.
- [SH01] S. Hbaïeb, S. Font. Synthèse de loi de commande optimal par optimisation convexe. Journée doctorale d'automatique (JDA), Toulouse, septembre 2001.
- [SH02] S. Hbaïeb. Analyse de cahier des charges en automatique par optimisation convexe. Thèse de Doctorat, Université Paris XI, Paris 2002.
- [SL05] S. Li, Y. Zhang, Q.Zhu. Nash-optimization enhanced distributed model predictive control applied to the Shell benchmark problem. *Information Sciences* 170, pp 329–349, 2005.

- [SR95] S.R. Weller, G.C. Goodwin. Controller design for partial decoupling of linear multivariable systems. Technical Report No. EE9313, Australia, 1995.
- [TW95] T.W. Yoon, D.W. Clarke. Observer design in receding-horizon predictive control. international journal of control, 61(1), pp.171-191, 1995.
- [TY90] T.Y.Chai. Direct adaptive decoupling control for general stochastic multivariable systems. int .J. Control , pp 885-909, 1990.
- [VI96] V. Ionescu, C. Oara. La commande optimale. Conception optimisé des systèmes, Chapitre 5, Problème de Nehari en discret, Diderot, 1996.
- [WL90] W.L. Luyben. Process modelling, simulation, and control for chemical engineers. MacGraw- Hill,inc , deuxième edition , 1990.