ÉTUDE DE PROBLÈMES NON LOCAUX ET RÉGULARISATION DE PROBLÈMES MAL POSÉS EN EDP

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Par

BOUSSETILA Nadjib

Directeur de thèse : Prof. REBBANI Faouzia

ÉTUDE DE PROBLÈMES NON LOCAUX ET RÉGULARISATION DE PROBLÈMES MAL POSÉS EN EDP

Jury :

CHORFI Lahcene	**Président**	**Prof.**	**Univ. Annaba**
REBBANI Faouzia	**Rapporteur**	**Prof.**	**Univ. Annaba**
BOUZAR Chikh	**Examinateur**	**Prof.**	**Univ. Oran Es-Senia**
AIBECHE Aissa	**Examinateur**	**Prof.**	**Univ. Sétif**
NISSE Lamine	**Examinateur**	**M.C.**	**Univ. Annaba**
DEHICI Abdelkader	**Examinateur**	**M.C.**	**Univ. Guelma**

Résumé

Dans ce travail on étudie les positions correctes et incorrectes de certaines classes de problèmes non classiques. La première classe est consacrée à l'étude d'un problème non local associé à une équation du type ultra-hyperbolique. En se basant sur la méthode des estimations a priori et la technique des multiplicateurs, on démontre que ce problème est bien posé. Dans les deux autres classes, on considère deux problèmes mal posés. En utilisant la méthode de quasi-réversibilité modifiée, on construit des quasi-solutions stables et on établit des résultats de convergence et d'estimation de l'erreur.

2000 Mathematics subject classification : 35R20, 35R25, 35K90, 47D06, 47A52.

Mots clés : *problème de Cauchy rétrograde, équation ultra-hyperbolique, conditions non locales, problème mal posé, irréversibilité, quasi-solution, régularisation, méthode de quasi-réversibilité.*

Abstract

The objective of this work is the study the correct and incorrect positions of certain classes of nonclassical problems. In the first class, we study a nonlocal problem associated to an ultrahyperbolic equation. By using the method of a priori estimates and the multipliers technique, we show the well-posedness of this problem. In the other classes, we investigate two ill-posed problems. By using the modified quasi-reversibility method, we construct stable quasi-solutions. We show the convergence and we establish the error estimates of this approach.

2000 Mathematics subject classification : 35R20, 35R25, 35K90, 47D06, 47A52.

Key words : *Backward Cauchy problem, ultrahyperbolic equation, nonlocal conditions, ill-posed problem, regularization, quasi-solution, quasi-reversibility method.*

Life is good only for two things, discovering mathematics and teaching mathematics.

Siméon Denis Poisson

To my parents and my family, for their love, support, and encouragement.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse le professeur REBBANI Faouzia, qui grâce à sa disponobilité, son soutien, ses conseils et ses encouragements m'a permis de mener à bien ce travail.

J'adresse l'expression de ma gratitude à mon enseignant le professeur CHORFI Lahcene, qui me fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner ma thèse.

Ainsi qu'aux docteurs :

BOUZAR Chikh professeur à l'université Oran Es-Senia,

AIBECHE Aissa professeur à l'université Ferhat Abbas-Setif,

NISSE Lamine maître de conférences à l'université Badji Mokhtar-Annaba,

DEHICI Abdelkader maître de conférences à l'université 08 Mai 45-Guelma,

qui ont accepté d'examiner ma thèse et faire partie de ce jury.

Je remercie également tous les membres du département de Mathématiques, pour toute l'aide qui m'a été accordée.

Au cours de ces cinq années, j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées L.M.A (Annaba) pour mener à bien ce projet . Un grand merci à tous les membres du Laboratoire L.M.A.

Un remerciement particulier va au Professeur N.E. Tatar qui m'a aidé par une série d'articles au début de mon travail.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier les professeurs H. Sissaoui et S. Mazzouzi qui m'ont aidé beaucoup dans la traduction de mes travaux en anglais.

Je remercie chaleureusement mes collègues F. Zouyed, A. Nouar, R. Benrabah et S. Hamida pour leur soutien et leur aide.

Je remercie aussi tous mes collègues de L'universté 08 Mai 45-Guelma pour leur soutien moral et matériel.

Notations

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

$Im(Z)$: partie imaginaire du nombre complexe z.

$Re(z)$: partie réelle du nombre complexe z.

A : opérateur linéaire.

$\mathcal{D}(A)$: domaine de définition de l'opérateur A.

$\mathcal{G}(A)$: graphe de l'opérateur A.

$\mathcal{R}(A)$: image de l'opérateur A.

$\mathcal{N}(A)$: noyau de l'opérateur A.

$\overline{M}$: fermeture de l'ensemble M.

$M^{\perp}$: orthogonal de l'ensemble M.

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$: des espaces de Banach de normes respectives $\|.\|_{\mathcal{X}}$, $\|.\|_{\mathcal{Y}}$.

$\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, cet espace est muni de la norme $\|B\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup\limits_{u\neq 0} \dfrac{\|Bu\|_{\mathcal{Y}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}}$.

$\mathcal{H}$: espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|.|$, $(.,.)$.

$\mathscr{L}(\mathcal{H})$: espace des opérateurs linéaires continus dans $\mathcal{H}$.

$\mathscr{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: espace des opérateurs compacts de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.

$\rho(A)$: ensemble résolvant de l'opérateur A.

$\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$: spectre de l'opérateur A.

$Nr(A)$: image numérique de l'opérateur A.

$\langle ., . \rangle_{\mathscr{D}'}$: crochet de dualité.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: ouvert bourné, $\overline{\Omega}$ fermeture de Ω.

$L_2(\Omega; X)$: espace des fonctions v telles que $t \longmapsto \|v(t)\|_X$ est une fonction de $L_2(\Omega)$.

$L_\infty(\Omega; X)$: espace des fonctions v telles que $\sup\limits_{\Omega} \|v(t)\|_X$ est finie.

Table des matières

Notations **i**

Introduction **1**

0.1 Problématique . . . 1

0.1.1 Equations d'évolution multi-temporelle . . . 1

0.1.2 Problèmes bien et mal posés . . . 3

0.1.3 Problèmes inverses . . . 3

0.2 Contenu de la thèse . . . 5

1 Rappels d'analyse fonctionnelle **13**

1.1 Opérateurs linéaires . . . 13

1.1.1 Opérateurs bornés . . . 13

1.1.2 Opérateurs non-bornés . . . 15

1.2 Opérateurs dépendant d'un paramètre . . . 17

1.2.1 Continuité . . . 17

1.2.2 Différentiabilité . . . 18

1.2.3 Opérateurs de régularisation . . . 19

1.3 Eléments de la théorie spectrale . . . 19

1.4 Famille spectrale et résolution de l'identité . . . 20

1.5 Opérateurs auto-adjoints compacts . . . 22

1.6 Semi-groupes d'opérateurs linéaires . . . 23

1.6.1 Semi-groupes holomorphes 26
1.6.2 Semi-groupes compacts 30
1.7 C-Semi-groupes 30
1.8 Equations linéaires abstraites 31
1.9 Lemme de Gronwall 37

2 Equations ultra-hyperboliques avec conditions initiales non locales 40
2.1 Position du problème 40
2.2 Espaces fonctionnels 41
2.3 Estimation a priori 46
2.4 Corollaires 57
2.5 Résolubilité du problème 59
2.6 Continuité de la solution forte généralisée par rapport aux paramètres 72

3 Problèmes ultra-hyperboliques mal posés 75
3.1 Formulation du problème 75
3.2 Position incorrecte du problème (FVP) 76
3.3 Méthode de quasi-réversibilité 77
3.3.1 Description de la méthode 78
3.3.2 Position correcte des problèmes $(FVP)_\alpha$ et $(IVP)_\alpha$ 78
3.4 Analyse de la méthode 81
3.4.1 Opérateurs $\mathcal{R}(t_1, \tau_1)$ et $\mathcal{S}(t_1, \tau_1)$ 81
3.4.2 Résultats de convergence 83

4 Méthode de quasi-réversibilité modifiée pour un problème de Cauchy mal posé 98
4.1 Introduction 98
4.2 Préliminaires 99
4.3 Méthode de quasi-réversibilité modifiée 101
4.4 Analyse de la méthode 102
4.4.1 Analyse de A_α et ses conséquences 102
4.4.2 Résultats de convergence 106

Conclusion et perspectives **115**

Bibliographie **117**

Introduction

0.1 Problématique

0.1.1 Equations d'évolution multi-temporelle

Les modèles mathématiques pour un certain nombre de phénomènes naturels peuvent être formulés en termes d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.) de la forme :

$$\sum_{i=1}^{m} k_i(x,t)u_{t_i} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (E_{up})$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{s_1+s_2+\cdots+s_m} u}{\partial t_1^{s_1}\partial t_2^{s_2}\cdots\partial t_m^{s_m}} + \sum_{i=1}^{m} p_i(x,t)u_{t_i} = \\ &\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + f(x,t), \end{aligned} \qquad (E_{uh})$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est "la variable spatiale ", et $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ est "la variable temporelle ". La partie principale de l'opérateur est supposée uniformément elliptique, c'est-à-dire : $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq a_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, où a_0 est une constante positive, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et pour tout (x,t) dans un domaine.

Quand $m = 1$ l'équation (E_{up}) est dite *parabolique*, et si dans l'équation (E_{uh}) $m = 1$ et $s_1 = 2$, l'équation (E_{ph}) est dite *hyperbolique*. Dans le cas : $m \geq 2$, ces deux équations sont dites *équations d'évolution multi-temporelle* (en anglais, multi-time), et (E_{up}) (resp. (E_{uh})) est dite *ultra-parabolique* (resp. *ultra-hyperbolique*). Ainsi, dans le cas multi-temporel, il existe des temps multiples.

Les équations d'évolution multi-temporelle interviennent, par exemple dans la théorie du mouvement Brownien [15, 34, 64], la thèorie du transport [4], la biologie [65], les ondes [16, 59], ainsi que dans d'autre phénomènes physiques à échelles multiples.

La théorie des équations multi-temporelles est apparue et a commencé a se développer dans les années cinquante dans les travaux fondamentaux de V.P. Mikhailov ([78, 79], *1957*). Des résultats nouveaux sur l'existence et l'unicité des solutions de quelques problèmes ultra-paraboliques ont été établis, dans une série de travaux séparés, par A. Friedmann ([42], *1962*), T.G. Genchev ([46], *1963*), A.M. Il′in ([63], *1964*), V.S. Vladimirov *&* Yu. N. Drozhzhinov ([104], *1967*), S.G. Gindikin ([47], *1967*), R. Volevič *&* S.G. Gindikin ([105], *1969*), N.I. Brish *&* N.I. Yurchuk ([13], 1970), W. Wolfgan ([106], *1986*), S.G. Pyatkov ([88], *1990*), D.R. Akhmetov et *al* ([5], *2003*), G. Avalishvili et *al* ([56], *2005*) et d'autres auteurs.

A. Brener ([20, 21], *1995*) a écrit une monographie, où il donne une classification d'une classe très large d'équations ultra-paraboliques dans le contexte de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels.

Il est important de signaler que, récemment, par la théorie des semi-groupes (L. Lorenzi [77], *1998*) et la théorie du potentiel (S. Tersenov [102], *2001*) des résultats structurels importants ont été obtenus.

Quant au cas ultra-hyperbolique avec des conditions classiques, les principaux résultats ont été établis dans la série des travaux de N.I. Brish *&* N.I. Yurchuk ([12, 14, 107, 108], *1968*, *1969*, *1970*, *1971*), et H.O. Fattorini ([44], *1971*).

Les conditions initiales non locales associées aux équations ultra-hyperboliques ont été étudiées par F. Rebbani et *al.* [54, 94, 95].

Le cas ultra-hyperbolique d'ordre supérieur est traité par G.A. Anastassiou et *al* ([6], *2006*).

Il est important de noter qu'il n'existe pas encore, pour ce type d'équations, une théorie générale analogue à celle des équations paraboliques et hyperboliques classiques. Ceci est dû à la relative nouveauté de cette thématique d'une part et à la complexité des questions qu'elle soulève. Chaque problème nécessite donc un traitement spécifique. Ce qui souligne l'actualité du sujet que nous traitons dans cette thèse.

0.1.2 Problèmes bien et mal posés

En 1923, le mathématicien français J. Hadamard écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [57]. Cet ouvrage fût le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont : **la solution existe** ; **elle est unique** ; **elle dépend continûment des données** (stabilité). Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution sont condidérées. Dans ce même livre Hadamard laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. Petrovsky) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.
La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques (voir [40, 41, 49, 50, 99]).

0.1.3 Problèmes inverses

La définition des problèmes inverses n'est pas simple. On peut les caractériser de façon stricte par des définitions mathématiques pour chaque problème, mais bien souvent cette appellation recouvre des problèmes divers qui partagent tous le même caractère mal posé par opposition aux problèmes dits directs.
D'après J.B. Keller [69], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. On peut envisager divers problèmes inverses : par exemple, reconstituer l'état passé du système connaissant son état actuel (si ce système est irréversible), ou la détermination de paramètres du système, connaissant (une partie de) son évolution. Ce dernier problème est celui de l'identification de paramètres.
Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues. Mais une telle définition est trop vaste : en termes de mathématiques, elle conduit pratiquement à appeler problème inverse la résolution

de toute équation (algébrique, matricielle, différentielle, aux dérivées partielles, intégrale, . . .) ou la minimisation de toute fonctionnelle, y compris dans les cas les plus classiques et les mieux connus. Les problèmes inverses peuvent être répartis en deux classes : `problèmes inverses bien posés` ; `problèmes inverses mal posés`. Les problèmes inverses mal posés constituent l'un des sujets où le lien entre la théorie mathématique et la pratique est le plus fort.

Dans la pratique, les méthodes de résolution des problèmes inverses se répartissent selon Nashed [86] en trois catégories principales :

1. Les méthodes relevant de l'analyse mathématique et la théorie des fonctions se proposent de transformer un problème mal posé en problème bien posé en agissant sur le choix des espaces, qui servent à décrire les variables, et de leurs topologies, qui formalisent les notions d'écart ou d'erreur. Elles proposent également d'introduire des contraintes globales sur les classes de solutions. Les << bons >> espaces ou les << bonnes >> contraintes ne sont pas dictés par les mathématiques mais traduisent des considérations physiques.

2. La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à Tikhonov [99], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée,. .), de façon que la << solution régularisée >> obtenue par << inversion régularisée >> dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre " problème approximant" bien posé.

3. L'inversion stochastique développée par Tarantola [103].

Ces trois approches ont comme préoccupation commune de fournir un cadre permettant de neutraliser le caractère mal posé.

0.2 Contenu de la thèse

Cette thèse s'inscrit parmi les développements de ces thématiques dans le cadre abstrait. Elle est composée de quatre chapitres, un chapitre rappel et trois chapitres essentiels indépendants.

✍ Dans le Chapitre 1, on rappelle quelques résultats connus d'analyse fonctionnelle (éléments de la théorie des opérateurs et des semigroupes), quelques résultats sur la théorie des problémes mal posés et quelques lemmes techniques.

✍ Le chapitre 2 est consacré à l'étude d'un problème ultra-hyperbolique avec des conditions initiales non-locales. Le but de ce chapitre est d'étentre la méthode des inégalités énergétiques pour une classe de problèmes non-classiques et de prouver l'éfficacité de cette méthode dans l'étude de beaucoup de problèmes complexes.
Soit $D = (0, T_1) \times (0, T_2)$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$. On considère le problème ultra-hyperbolique :

$$\mathcal{L}_\lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)\left(u + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = f(t), \tag{E}$$

avec les conditions initiales non locales :

$$\begin{cases} l_{1\mu} u \equiv \mu_1 u \mid_{t_1=0} - \mu_2 u \mid_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \\ l_{2\mu} u \equiv \mu_1 u \mid_{t_2=0} - \mu_2 u \mid_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \end{cases} \tag{NC}$$

où $A(t)$ est un opérateur non-borné, λ est un paramètre réel, μ_1 et μ_2 sont deux paramètres complexes.

Les conditions initiales non locales ont été associées à des problèmes paraboliques et hyperboliques (voir par example [8, 18, 24]). Ce type de conditions non standards reflète une grande réalité dans la modélisation mathématique de quelques problèmes naturels.
Pour notre problème on établit des théorèmes d'existence, d'unicité de la solution forte généralisée, sa dépendance continue par rapport aux données (f, φ, ψ), ainsi que sa continuité par rapport aux paramètres (μ, λ).

Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode des **estimations a priori** (dite aussi, méthode des **inégalités énergétiques**) basée sur la technique des multiplicateurs. Cette méthode résulte des idées introduites par J.Leray [74], L. Garding [45], I.G. Petrovsky [87] dans leurs travaux, et de celles développées dans l'ouvrage de A.A. Dezin [32], et dans les travaux de N.I. Yurchuk [107, 108, 109] et V.I. Korzyuk [73].
Elle consiste en :
☐ d'abord écrire le problème posé sous forme opérationnelle :

$$Lu = F, \quad u \in \mathcal{D}(L), \tag{1}$$

où l'opérateur L est engendré par l'équation (E) et les conditions (NC) et est considéré de l'espace de Banach $\mathbb{B}$ dans l'espace de Hilbert $\mathbb{V}$.
☐ établir ensuite les estimations a priori pour l'opérateur L.
☐ démontrer ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace $\mathbb{V}$.
Plus précisément, on suivra le shema suivant :
On établit l'estimation a priori du type :

$$|||u|||_{\mathbb{B}} \leq c\, |||Lu|||_{\mathbb{V}}\,. \tag{2}$$

Cette estimation est obtenue en général en multipliant scalairement l'équation par u ou ses dérivées et une fonction poids, et en faisant des intégrations par parties.
En suite, on montre que l'opérateur L dans $\mathbb{B}$ admet une fermeture $\overline{L}$. La solution de l'équation opérationnelle :

$$\overline{L}u = F, \tag{3}$$

est appelée solution *forte généralisée* du problème considéré.
Par passage à la limite, l'estimations (2) est prolongée aux solutions fortes généralisées, i.e., on a

$$|||u|||_{\mathbb{B}} \leq c\, \left|\left|\left|\overline{L}u\right|\right|\right|_{\mathbb{V}}\,. \tag{4}$$

A partir de là, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (3), l'égalité des ensembles $\mathcal{R}(\overline{L})$ et $\overline{\mathcal{R}(L)}$, et l'inversibilité de $\overline{L}$, l'inverse $\left(\overline{L}\right)^{-1}$ étant défini sur l'ensemble des valeurs de l'opérateur $\overline{L}$.

La dernière étape, consiste à établir la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L)$ dans $\mathbb{V}$ et donc l'existence d'une solution forte généralisée du problème (1).

Commentaire. La méthode des estimations a priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode, on est confronté à difficultés, parmi lesquelles :

- `Le choix de l'espace des solutions.`
- `Le choix du multiplicateur.`
- `Le choix de l'opérateur de régularisation.`

✍ Dans le chapitre 3, on étudie une classe de problèmes mal-posés de type ultra-hyperbolique. Ce chapitre est motivé par le fait que depuis le papier pionnier (È. Aksen [2, 3], *1991*), les spécialistes n'ont pas pu établir un cadre mathématique adéquat pour l'étude de ces problèmes. Ceci nous a poussé à proposer une autre perturbation et à faire une étude comparative avec les résultats démontrés par È. Aksen.

Soit H un espace de Hilbert complexe, et $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$, un opératuer linéaire non borné.

Dans le rectangle $D = (0,\, T_1) \times (0,\, T_2)$. On considère le problème ultra-hyperbolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Au(t) = f(t), \quad t \in D, \\ u(t_1,\, 0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in [0,\, T_1], \\ u(0,\, t_2) = \psi(t_2), \quad t_2 \in [0,\, T_2], \end{cases} \tag{IVP}$$

où f, φ et ψ sont des fonctions H-vectorielles données.

Il est bien connu que sous des hypothèses convenables (sur les donnés et l'opérateur A), le problème (IVP) admet une solution unique dans un sens à préciser ultérieurement.

Soit $u(t) = u(t;\, f,\, \varphi,\, \psi)$ la solution du problème (IVP) et $\xi \in L_2((0,\, T_2); H)$ une fonction donnée.

Notons

$$\Phi(\psi) = \int_0^{T_2} |u(T_1,\, t_2) - \xi(t_2)|^2 \, dt_2.$$

Le problème consiste à : pour $\varepsilon > 0$ donné, déterminer ψ_ε telle que :

$$\Phi(\psi_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Une solution evidente est la suivante : choisissons ψ de façon que $\Phi(\psi) = 0$, c'est-à-dire $u(T_1, t_2) = \xi(t_2)$. Ce choix nous amène à étudier le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Au(t) = f(t), \quad t \in D, \\ u(t_1, 0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in [0, T_1], \\ u(T_1, t_2) = \xi(t_2), \quad t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \tag{FVP}$$

et prendre $u(0, t_2) = \psi(t_2)$.

Mais la solution du problème (FVP) n'existe que si ξ vérifie des conditions extrêmement restrictives, non triviales, et de nature très instable. Ce qui nous conduit à résoudre un problème mal posé de nature très complexe.

Parmi les stratégies pour traiter ce type de questions, il y a la méthode de quasi-réversibilité **(M.Q.R.)** proposée par Lions et Lattès [75], qui a été dévellopée dans les travaux de L.E. Payne [89], R. Showalter [96, 97], K. Miller [80] et d'autres. Cette méthode consiste à remplacer le problème (FVP) par un problème proche et bien posé au sens d'Hadamard et à rechercher des quasi-solutions stables vis-à-vis des faibles variations des données.

On note ici, que ce problème a été traité en *1991* par È. Aksen [2, 3] par la méthode de quasi-réversibilité, où l'opérateur $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + A$ est remplacé par $\mathcal{L}_\alpha = \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + A - \alpha A^2, \quad \alpha > 0.$

Ce qui lui a permis de construire une régularisation et de neutraliser le caractère mal posé.

Indiquons ici, que dans la littérature mathématique, cette problématique se caractérise par la rareté des résultats. Ceci est dû à la complexité de ce type de problèmes. [1]

Dans la méthode de quasi-réversibilité, on remarque que le terme correcteur (αA^2) est d'ordre deux, ce qui induit une difficulté sérieuse pour l'implémentation numérique.

[1] A notre connaissance et la recherche bibliographique qu'on a effectuée dans le cadre de cette thèse, on ne connait que deux articles dans cette thématique :

L. G. Gomboev, *An ill-posed problem for an equation of ultraparabolic type*, Some problems in differential equations and discrete mathematics, 44-51, Novosibirsk. Gos. Univ., Novosibirsk, 1986, (Russian).

È. M. Aksen, *The quasi-inversion method for some hyperbolic equations*, Diff. Uravn., **27** (1991), No. 6, 1089-1092, (Russian).

È. M. Aksen, N.I. Yurchuk, *An a priori estimate for the quasi-inversion method.* Diff. Uravn., **29** (1993), No. 8, 1447-1450, (Russian). [Translation in Differential Equations **29** (1993), No. 8, 1254-1256].

Pour toutes ces raisons, on propose dans notre thèse une autre perturbation basée sur l'approximation de Yosida, et on effectue une étude comparative entre nos résultats et ceux d'Aksen.

Le premier avantage de cette perturbation est qu'elle nous permet de passer à un problème où le coefficient opératoriel est borné, ce qui facilite l'étude qualitative du problème perturbé, et le second avantage réside dans la possibilité d'établir de meilleurs résultats de convergence sous des conditions plus faibles que celles proposées dans la première approche.

Ce choix judicieux est inspiré de la théorie des opérateurs, qui nous permet d'affirmer que l'approximation de Yosida est parmi les bons approximateurs, et le résultat de l'approximation est intéressant dans la mesure où on reste proche du modèle original.

✍ Quant au quatrième chapitre, il traite un problème de Cauchy rétrograde. La méthode proposée est basée sur une approche de quasi-réversibilité dont l'élément central dans cette analyse est une nouvelle perturbation, qui permet de donner une réponse positive à une question posée par K. Miller [80], et d'étendre beaucoup de résultats connus dans le domaine et qui réalise une optimalité entre le coefficient d'erreur et la vitesse de convergence.

Dans ce chapitre on étudie un problème inverse (time reversibility), qui consiste à restaurer l'état initial d'un phénomène physique modélisé par une équation parabolique avec condition finale. Ce type de problèmes apparaît dans un certain nombre de phénomènes physiques, comme les processus de diffusion [26, 40], l'imagerie (la déconvolution) [29], l'écologie (la pollution) [60, 98] et autres.

Le problème modèle est le suivant : *Soit $T > 0$, déterminer $u(t)$ solution du problème*

$$u_t(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad u(T) = f,$$

où f est une fonction H-vectorielle donnée.

Il est bien connu dans la littérature mathématique que ce problème est fortement mal-posé [28], même dans les deux meilleures situations : si $-A$ engendre un semi-groupe compact, ou $-A$ engendre un semi-groupe analytique. Ce problème à été largement traité par plusieurs chercheurs et par plusieurs approches : la méthode de quasi-solution **(Q.S.)** de Tikhonov [99], La méthode **(Q.R.)** de Lattès et Lions [75], La méthode **(Q.R.M.)** de Gajewski et ZACCHARIAS [48], la méthode de la **convexité logarithmique** [1, 66, 68], la **procédure itérative** de KOZLOV [71, 19], La méthode de la **valeur aux limites auxiliaire** (Quasi-Boundary-Value method) [27, 38, 97] et la méthode des semi-groupes régularisés [10, 82, 83, 84, 85].

❐ **Etat de l'art.** Ces méthodes se résument comme suit :

- **La méthode de quasi-réversibilité (M.Q.R.)**

R. LATTÈS *&* J.-L. LIONS ([75], *1967*) [`cadre hilbertien`] :

$$\mathcal{L} = \partial_t + A \curvearrowright \mathcal{L}_\alpha = \partial_t + A - \alpha A^* A, \quad \alpha > 0.$$

I.V. MELNIKOVA ([81], *1975*) [`cadre banachique`] :

$$\mathcal{L} = \partial_t + A \curvearrowright \mathcal{L}_\alpha = \partial_t + A - \alpha A^2, \quad \alpha > 0.$$

A.V. GLUSHAK ([55], *2001*) [`cadre banachique`] :

$$\mathcal{L} = \partial_t + A \curvearrowright \mathcal{L}_\alpha = \partial_t + A + (-1)^{m+1} \alpha A^m, \quad m \geq 2,\ \alpha > 0.$$

Y. HUANG *&* Q. ZHENG ([61], *2004*) [`cadre banachique`] :

$$\mathcal{L} = \partial_t + A \curvearrowright \mathcal{L}_\alpha = \partial_t + A - \alpha A^p, \quad p > 1,\ \alpha > 0$$

H. GAJEWSKI *&* K. ZACCHARIAS ([48], *1972*) [`cadre hilbertien`] :

$$L = \partial_t + A \curvearrowright L_\alpha = \partial_t + A(I + \alpha A)^{-1}, \quad \alpha > 0.$$

Y. HUANG *&* Q. ZHENG ([62], *2005*) [`cadre banachique`] :

$$L = \partial_t + A \curvearrowright L_\alpha = \partial_t + A(I + \alpha A)^{-1}, \quad \alpha > 0.$$

☞ On note ici que dans le cadre Banachique, nous n'avons que des résultats de convergence, mais l'estimation de l'erreur reste encore une question ouverte.

N. BOUSSETILA *&* F. REBBANI ([23], *2006*) [`cadre hilbertien`] :

$$L = \partial_t + A \curvearrowright L_\alpha = \partial_t - \frac{1}{pT} \ln\left(\alpha + e^{-pTA}\right), \quad p \geq 1,\ \alpha > 0.$$

R.E. Ewing ([39], *1975*) [`cadre hilbertien`] :

$$L = \partial_t + A \curvearrowright L_\alpha = \partial_t + A + \alpha A \partial_t, \quad \alpha > 0.$$

K.A. Ames ([7], *1982*) [`cadre hilbertien`] :

$$L = \partial_t + A \curvearrowright L_\alpha = \alpha \partial_t^2 + \partial_t + A, \quad \alpha > 0.$$

- **La régularisation par les conditions non locales (Q.B.V. method)**

R.E. Showalter ([97], *1982*) , G.W. Clark ([27], *1994*) [`cadre hilbertien`] :

$$\gamma(u) = u(T) \curvearrowright \gamma_\alpha(u) = u(T) + \alpha u(0), \quad \alpha > 0.$$

K.A. Ames ([9], *2005*) [`cadre hilbertien`] :

$$\gamma(u) = u(T) \curvearrowright \theta \int_0^T e^{-\theta(T-s)} u(s)\, ds, \quad \theta > 0.$$

- **La procédure iterative de Kozlov (M.I.)**

L'idée de l'algorithme proposé par V.A. Kozlov *&* V.G. Maz'ya ([71], *1991*) (voir aussi, J. Baumeister *&* A. Leitao [19], *2001*) consiste à résoudre une suite de problèmes bien posés, où l'équation originale est préservée.

Dans la première itération, $u_0(t)$ s'obtient a partir de la résolution du problème :

$$\partial_t u_0 + A u_0 = 0, \quad 0 < t < T, \quad u_0(0) = \varphi,$$

où φ est un élément arbitraire dans H. Une fois que nous avons construit u_k, l'approximation u_{k+1} est la solution du problème :

$$\begin{aligned} &\partial_t u_{k+1} + A u_{k+1} = 0, \quad 0 < t < T, \\ &u_{k+1}(0) = u_k(0) - \gamma(u_k(T) - f), \end{aligned}$$

où γ est un parametère réel.

La convergence de cette méthode est basée sur la théorie des opérateurs non-expansifs dans le cadre hilbertien.

- **La méthode des semi-groupes régularisés.**

Cette méthode s'applique aux problèmes qui sont faiblement mal posés (la définition des problèmes faiblement mal posés est donnée dans le rappel).

Les principaux résultats dans cette direction sont donnés par K.A.Ames [10], et I.V. Melnikova [82, 83, 84, 85].

- **La méthode de la convexité logarithmique.**

Cette méthode s'applique aux problèmes qui sont conditionnellement stables, c'est-à-dire, des problèmes qu'on peut rendre stables sous certaines contraintes sur la solution. Pour plus de détails, on cite [1, 30, 66, 68, 76].

Le choix d'une étude intensive des problèmes inverses est dicté par la richesse du sujet aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique (motivation physique et technologique).

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

On désigne ici par :

$\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ des espaces de Banach.

$\mathcal{X}^*$ (resp. $\mathcal{Y}^*$) le dual topologique de $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$).

$\langle ., . \rangle$ le crochet de dualité.

$\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ muni de la norme $|.|$ et le produit scalaire $(., .)$.

$\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$, que l'on munit de la norme définie par

$$\|B\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_{\mathcal{Y}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}}.$$

1.1 Opérateurs linéaires

1.1.1 Opérateurs bornés

Théorèmes de prolongement

Théorème 1.1.1 *Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{X}$. Toute application linéaire continue de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{Y}$ a un unique prolongement linéaire continue de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$.*

Théorème 1.1.2 [prolongement de la convergence]. *Soient $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{X}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|B_n\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \leq c$$

et que, pour tout élément x de $\mathcal{D}$, la suite $B_n x$ a une limite Bx quand n tend vers l'infini. Alors l'application $B : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ainsi définie est linéaire continue, et, si $\widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un prolongement de B, alors pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$B_n x \longrightarrow \widehat{B}x, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Principe de la borne uniforme

Théorème 1.1.3 [Banch-Steinhaus]. *Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs de $\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ vérifiant*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \sup_{i\in I} \|B_i x\|_{\mathcal{Y}} < \infty. \tag{a}$$

Alors (a) a lieu uniformément sur la boule unité de $\mathcal{X}$, i.e.,

$$\sup_{i\in I} \|B_i\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} < \infty. \tag{b}$$

► L'application de ce théorème apparaît bien dans les opérateurs dépendant d'un paramètre t, où le paramètre t joue le rôle de l'indice i.

Théorème de l'isomorphisme

Théorème 1.1.4 *Toute bijection linéaire continue de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$ a un inverse continu.*

Théorème du graphe fermé

Théorème 1.1.5 *Soit $B : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une application linéaire. Alors B est continue si et seulement si le graphe de B est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, c'est-à-dire : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{X}$ vérifiant $(x_n \longrightarrow x,\ n \longrightarrow \infty)$ dans $\mathcal{X}$ et $(Bx_n \longrightarrow y,\ n \longrightarrow \infty)$ dans $\mathcal{Y}$, on a $y = Bx$*

Théorème 1.1.6 *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach unitaire d'élément unité e. Si $|v| < 1$, alors $e + v$ est inversible et on a $(e+v)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k v^k$.*

► Comme application de ce théorème on prend $\mathscr{A} = \mathscr{L}(\mathcal{X})$ ou $\mathscr{A} = \mathscr{L}(H)$.

1.1.2 Opérateurs non-bornés

On appelle opérateur sur $\mathcal{X}$, la donnée d'un couple $(A, \mathcal{D}(A))$, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}$ qu'on suppose en général dense dans $\mathcal{X}$.
Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $G(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ défini par $G(A) = \{(v,\, Av), \quad v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Définition 1.1.1 On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{X}$ et $Au_n \longrightarrow v$ dans $\mathcal{Y}$, alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.

▶ L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe dans $\mathcal{X}$.

Définition 1.1.2 On dit qu'un opérateur A est fermable dans $\mathcal{X}$ s'il admet un prolongement fermé.

On vérifie aussitôt que A est fermable dans $\mathcal{X}$ si et seulement si l'adhérence $\overline{G(A)}$ de son graphe est un graphe. Autrement dit A est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow 0$ et $Au_n \longrightarrow v$, alors $v = 0$.
L'opérateur fermé $\overline{A}$ dont le graphe $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ est appelé fermeture de A.

Théorème 1.1.7 [Théorème du graphe fermé]. *Si l'opérateur fermé A est définit sur tout l'espace $\mathcal{X}$, alors A est borné*

$$(A \text{ fermé et } \mathcal{D}(A) = \mathcal{X} \Longrightarrow A \text{ borné}).$$

Définition 1.1.3 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A, comme suit :

$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{Y}^* \longrightarrow \mathcal{X}^*$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in \mathcal{Y}^* : \exists\, c > 0 \text{ tel que } |\langle v,\, Au\rangle| \leq c\,|u|_{\mathcal{X}}\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\}\,.$$

Dans ce cas la fonctionnelle $u \longmapsto g(u) = \langle v,\, Au\rangle$ elle se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c\,|u|_{\mathcal{X}}\,, \quad \forall u \in X$. Par suite $f \in \mathcal{X}^*$. On a par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^*

$$\langle v,\, Au\rangle_{\mathcal{Y}^* \times \mathcal{Y}} = \langle A^* v,\, u\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),\ \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Proposition 1.1.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné à domaine dense. Alors A^* est fermé.*

Définition 1.1.4 L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e., $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $(v,\, Au) = (Av,\, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A)$.

▶ L'adjoint d'un opérateur borné $B \in \mathscr{L}(\mathcal{X},\, \mathcal{Y})$ existe toujour et on a de plus $\|B\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \|B^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)}$.

▶ Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$, alors $\overline{A^*} = A^*$. Si de plus, $\mathcal{D}(A^*)$ est dense, alors $A^{**} = (A^*)^* = \overline{A}$.

Proposition 1.1.2 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$. L'opérateur A^{-1} existe et est borné sur $\mathcal{R}(A)$, si et seulement si pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$ on a $|Au| \geq m\,|u|$, où m est une constante positive indépendante de u.*

Théorème 1.1.8 [Caractérisation des opérateurs à image fermé].
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
Les propriétés suivantes sont equivalentes :
(i) $\mathcal{R}(A)$ est fermé,
(ii) $\mathcal{R}(A^*)$ est fermé,
(iii) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)^\perp$,
(iv) $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$.

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.1.9 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) A est surjectif, i.e., $\mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}$,
(b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

(c) $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathcal{R}(A^*)$ est fermé.

▶ En pratique si l'on cherche à établir qu'un opérateur A est surjectif, on utilise l'implication $((b) \Longrightarrow (a))$ de la manière suivante. On considère l'équation $A^*v = f$ avec $f \in \mathcal{Y}^*$ et on montre que $\|v\| \leq k\|f\|$ avec k indépendante de f. Cette technique s'appelle la méthode des *estimations a priori* : on ne se préocupe pas de savoir si l'équation $A^*v = f$ possède une solution de cette équation, et on cherche à estimer sa norme.

Théorème 1.1.10 *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *un opérateur non-borné, fermé, avec* $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) A^* *est surjectif, i.e.,* $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{X}^*$*,*

(b) il existe une constante $k > 0$ *telle que*

$$|v| \leq k|Av|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A),$$

(c) $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ *et* $\mathcal{R}(A)$ *est fermé.*

Corollaire 1.1.1 *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *un opérateur non-borné, fermé, avec* $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. *L'opérateur* A *admet un inverse borné* A^{-1} *sur* $\mathcal{X}$ *si et seulement s'il existe deux constantes* m_1 *et* m_2 *telles que*

$$|u| \leq m_1 \, |Au| \, , \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

$$|v| \leq m_2 \, |A^*v| \, , \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

1.2 Opérateurs dépendant d'un paramètre

1.2.1 Continuité

Définition 1.2.1 la fonction $[0, T] \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est simplement (resp. fortement) continue en $t_0 \in [0, T]$ si, pour tout $x \in \mathcal{X}$ la fonction $y(t) = A(t)x$ est continue en t_0, i.e., $\forall x \in \mathcal{X}$ la fonction $|y(t) - y(t_0)|_{\mathcal{Y}} = |A(t)x - A(t_0)x|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow t_0$ (resp. $\|A(t) - A(t_0)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow t_0$). Et simplement (resp. fortement) continue sur $[0, T]$ si elle l'est en tout point de $[0, T]$.

Lemme 1.2.1 *Si l'opérateur* $A(t) \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *est simplement continu sur* $[0, T]$. *Alors il est uniformément borné par rapport à* t.

Ceci est une conséquence immédiate de théorème de la borne uniforme.

1.2.2 Différentiabilité

Définition 1.2.2 L'opérateur $A(t) \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est simplement dérivable en t_0 si, pour tout $x \in X$ la fonction $y(t) = A(t)x \in \mathcal{Y}$ est dérivable en t_0, et simplement dérivable sur $[0, T]$ si elle l'est en tout point de $[0, T]$.

Remarque 1.2.1 Les notions de continuité et dérivabilité dans le cas où $A(t)$ est un opérateur non-borné, fermé, à domaine de définition dense, indépendant de t, sont analogues à celles du cas borné.

Dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}_A$ indépendant de t.

Lemme 1.2.2 *On suppose que $A(t)$ est simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}(A(t))$, et $B(t)$ est un opérateur linéaire borné, simplement continûment dérivable. Alors l'opérateur $C(t) = B(t)A(t)$ défini sur $\mathcal{D}(A(t))$ est simplement continûment dérivable, et on a*

$$C^{'}(t)u = B^{'}(t)A(t)u + B(t)A^{'}(t)u, \quad u \in \mathcal{D}(A(t)),\ t \in [0, T]\,.$$

Lemme 1.2.3 *On suppose que $A(t)$ est simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}(A(t))$, et admet un inverse borné. Alors $A(t)^{-1}$ est simplement continûment dérivable, et on a*

$$(A(t)^{-1})^{'} = -A(t)^{-1}A(t)^{'}A(t)^{-1}.$$

Pour la démonstration de ces lemmes voir (S.G. Krein [67], Chap **II**, page 176-188) et (H. Tanabe [101], Chap **I**, page 15).

Théorème 1.2.1 *Soit $A(t)$ un opérateur auto-adjoint défini positif, à domaine de définition $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}_A$ indépendant de t, et simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}_A$. Alors l'opérateur $A^{\alpha}(t)$, $0 \le \alpha \le 1$, est simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}_A$.*

▶ Pour les opérateurs fractionnaires dépendant d'un paramètre t, ($A^{\alpha}(t)$, $0 \le \alpha \le 1$) on peut consulter les livres (S.G. Krein [67], Chap **II**, page 176-188) et (H. Tanabe [101], Chap **2**, page 19-20 et Chap **4**, page 108-113).

1.2.3 Opérateurs de régularisation

Dans la pratique, les opérateurs les plus rencontrés sont des opérateurs différentiels, donc l'expression $u \in \mathcal{D}(L)$ exprime une certaine régularité. les opérateurs de régularisation (en anglais : *molification operators*) sont un outil qui permet de faire correspondre à un élément d'un espace fonctionnel donné son régularisé, i.e., un élément du même espace mais possédant des propriétés de régularité plus importantes et qui lui est en même temps proche par rapport à la norme considérée.

Définition 1.2.3 Soit $A(t) : \mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}_A \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur non-borné, fermé, à domaine de définition $\mathcal{D}_A$ indépendant de t, avec $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{X}$. Pour cet opérateur on définit la famille d'opérateurs $\{\mathcal{R}_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon>0}$ ayant les propriétés suivantes :

(1) l'opérateur $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ est fortement continu en t, et uniformément borné en ε ;

(2) pour chaque ε l'opérateur $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ applique $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{D}_A$;

(3) l'opérateur $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ commute avec A ;

(4) l'opérateur $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ converge fortement vers I, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, i.e.,
$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \|\mathcal{R}_\varepsilon(t)x - x\| \longrightarrow 0$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

(pour plus de détail, voir [73]).

► Si $A(t) = A(t)^*$ et $(A(t)u,\, u) \geq \lambda_0 |u|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A(t))$, $\lambda_0 > 0$, on définit l'pproximation de Yosida :

$$\mathcal{R}_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}.$$

On montre que la famille d'opérateurs $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ vérifie les propriétés (1)-(4). (voir [17], proposition VII.2, page 102).

1.3 Eléments de la théorie spectrale

Soit

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

un opérateur non borné que l'on suppose fermé [1] [2] [3] et à domaine dense.

[1] L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
[2] Si A n'est pas fermé, alors $\rho(A) = \emptyset$.
[3] Si $A = A^*$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

On appelle *ensemble résolvant* de A, l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$.

On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{X})$. Cet opérateur est appelé la *résolvante* de A.

L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1; A)R(\lambda_2; A).$$

Le spectre de A est donc un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus prés la structure du spectre.

- Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit *valeur propre* de A, il lui correspond un $0 \neq \vartheta \in \mathcal{D}(A)$ tel que $A_\lambda\vartheta = 0$, que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand $\mathcal{X}$ est un espace de fonctions) correspondant à λ.

- Si $\lambda \in \sigma(A)\backslash\sigma_p(A)$ donc A_λ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :

▪ Si $\mathcal{R}(A_\lambda)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre *résiduel* de A.

▪ Si $\mathcal{R}(A_\lambda)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre *continu* de A.

1.4 Famille spectrale et résolution de l'identité

Théorème 1.4.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint. Alors*

(1) $\sigma_r(A) = \emptyset$,

(2) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$,

(3) $A \geq 0 \Longleftrightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty[$.

Définition 1.4.1 Une famille $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projections orthogonales dans $\mathcal{H}$ est appelée *famille spectrale* [4] [5] ou encore *résolution de l'identité* si elle satisfait aux conditions :

$$\begin{cases} (i) \quad E_\lambda \, E_\mu = E_{\inf(\lambda, \, \mu)}, \quad \lambda, \; \mu \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I, \\ \text{où } E_{-\infty} h = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda h, \quad E_{+\infty} h = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda h, \quad h \in \mathcal{H}, \\ (iii) \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda \;\text{ où } E_{\lambda+0} h = \lim\limits_{\varepsilon > 0, \, \varepsilon \to 0} E_{\lambda+\varepsilon} h, \quad h \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

Les limites sont prises au sens de la norme de $\mathcal{H}$.

Théorème 1.4.2 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et A un opératur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$. Alors il existe une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que*

$$(Ax, \, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d(E_\lambda x, \, y), \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_\lambda x.$$

On note symboliquement $A = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_\lambda$.

Théorème 1.4.3 *Soit $\lambda \longmapsto f(\lambda)$ une fonction continnue à valeurs réelles. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ défini par :*

$$\mathcal{D} = \left\{ h \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d|E_\lambda h|^2 < \infty \right\}.$$

Alors $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et on définit un opérateur auto-adjoint S dans $\mathcal{H}$ par :

$$(Sx, \, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d(E_\lambda x, \, y), \quad x \in \mathcal{D}, \; y \in \mathcal{H},$$

de domaine $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}$. On a

$$SE_\lambda \supset E_\lambda S \;\text{ c'est-à-dire, }\; SE_\lambda \text{ est un prolongement de } E_\lambda S.$$

[4] Pour une bonne compréhension de la théorie des opérateurs auto-adjoints, on cite le joli livre de Denise Huet : Décomposition spectrale et opérateurs, PUF, (1976).

[5] Le livre de R. Dautray & J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique. Tome **5** (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). [§3. page 136-180].

Fonctions d'un opérateur auto-adjoint

Soit A un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda$, $\lambda_0 = \inf \sigma(A) > 0$, sa décomposition spectrale. On définit :

- Les puissances de A.

$$\begin{cases} A^r = \displaystyle\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r \, dE_\lambda, \quad r \in \mathbb{R}, \\ h \in \mathcal{D}(A^r) \Longleftrightarrow \displaystyle\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} \, d|E_\lambda h|^2 < \infty. \end{cases}$$

On note ici, que pour tout $r \leq 0$, $A^r \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, et si $r = 0$, $A^0 = I$.

Pour tout $r \geq 0$ et pour tout $h \in \mathcal{D}(A^r)$, on a $(A^r h, h) \geq \lambda_0^r |h|^2$.

Pour tout $r \geq 0$, $\mathcal{D}(A^r)$ muni de la norme $|h|_r^2 = |A^r h|^2, \quad h \in \mathcal{D}(A^r)$, est un espace de Hilbert.

Si $0 \leq r_1 \leq r_2$, $\mathcal{D}(A^{r_2}) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^{r_1})$ et $\mathcal{D}(A^{r_2})$ est dense dans $\mathcal{D}(A^{r_1})$.

- $f(A)$ pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f(A) = \displaystyle\int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) \, dE_\lambda, , \\ h \in \mathcal{D}(f(A)) \Longleftrightarrow \displaystyle\int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d|E_\lambda h|^2 < \infty. \end{cases}$$

1.5 Opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.5.1 On dit qu'un opérateur $\mathbb{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est *compact* si $\mathbb{T}(B_{\mathcal{X}})$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $\mathscr{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $\mathscr{K}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \mathscr{K}(\mathcal{X})$.

► Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $\mathbb{T} \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathbb{S} \in \mathscr{K}(F, G)$ (resp. $\mathbb{T} \in \mathscr{K}(E, F)$ et $\mathbb{S} \in \mathscr{L}(F, G)$), alors $\mathbb{S}\mathbb{T} \in \mathscr{K}(E, G)$.

► [Théorème de Shauder] Si $\mathbb{T}$ est compact, alors $\mathbb{T}^*$ est compact. Et réciproquement.

Théorème 1.5.1 *Soit* $\mathbb{T} \in \mathscr{K}(\mathcal{X})$ *avec* $\dim(\mathcal{X}) = \infty$. *Alors on a :*

(a) $0 \in \sigma(\mathbb{T})$,

(b) $\sigma(\mathbb{T})\backslash\{0\} = \sigma_p(\mathbb{T})\backslash\{0\}$,

(c) l'une des situations suivantes :

- *ou bien* $\sigma(\mathbb{T}) = \{0\}$,
- *ou bien* $\sigma(\mathbb{T})\backslash\{0\}$ *est fini,*
- *ou bien* $\sigma(\mathbb{T})\backslash\{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.

Théorème 1.5.2 *On suppose que* $\mathcal{H}$ *est séparable. Soit* $\mathbb{T} \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ *un opérateur auto-adjoint compact. Alors* $\mathcal{H}$ *admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de* $\mathbb{T}$ *:*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad x = x_0 + \sum_{k\geq 1}(x,\, e_k)e_k, \quad Ax = \sum_{k\geq 1}\lambda_k e_k,$$

où $x_0 \in N(A)$.

Définition 1.5.2 Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables et $\mathbb{T} \in \mathscr{K}(\mathcal{H}_1,\, \mathcal{H}_1)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur $\mathbb{T}$, le réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $\mathcal{T} = \mathbb{T}^*\mathbb{T} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$.

Théorème 1.5.3 [Décomposition en valeurs singulières (DVS)]. *Soit* $\mathbb{T} \in \mathscr{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$ *et* $\mathbb{P}$ *la projection orthogonale sur* $\mathcal{N}(\mathbb{T})$*. Alors il existe une suite de valeurs singulières* $s_1 \geq s_2 \cdots > 0$ *et deux systèmes orthonormés* $\{\varphi_1,\, \varphi_2,\, \cdots\} \subset \mathcal{H}_1$, $\{\psi_1,\, \psi_1,\, \cdots\} \subset \mathcal{H}_2$ *telles que :*

$$\mathbb{T}\varphi_k = s_k\psi_k, \quad \mathbb{T}^*\psi_k = s_k\varphi_k,$$

$$h = \sum_{k\geq 1}(h,\, \varphi_k)\varphi_k + \mathcal{P}h, \qquad \mathbb{T}h = \sum_{k\geq 1}s_k(h,\, \varphi_k)\psi_k.$$

Le système $\{(s_k,\, \varphi_k,\, \psi_k)\}_{k\geq 1}$ *est dit* ***système singulier*** *de* $\mathbb{T}$.

1.6 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Généralités

Définition 1.6.1 On appelle semi-groupe fortement continu à un paramètre une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur $\mathcal{X}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $S(0) = I$,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t \geq 0,\ s \geq 0,$

(iii) $\lim\limits_{t \searrow 0} \|S(t)u - u\| = 0, \quad \forall u \in E.$

On associe à tout semi-groupe son générateur $-A$ défini par :

$$-Au = \lim_{t \searrow 0} \left\{ \frac{S(t)u - u}{t} \right\} \tag{s_1}$$

pour tout u tel que la limite (s_1) existe dans la topologie de la norme de $\mathcal{X}$, ce qui définit le sous espace $\mathcal{D}(A)$, domaine de l'opérateur A. Les premières propriétés des semi-groupes sont rassemblées dans la proposition suivante :

Proposition 1.6.1 (W. Rudin [93], théorème 13.35) *Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs sur $\mathcal{X}$, et $-A$ son générateur. Alors :*

(a) $t \longmapsto S(t)$ est une fonction fonction fortement continue de $[0, \infty[$ dans $\mathscr{L}(\mathcal{X})$.

(b) Il existe des constantes $M_A \geq 1$ et $\gamma_A \in \mathbb{R}$ telles que

$$\|S(t)\| \leq M_A e^{\gamma_A t}. \tag{s_2}$$

(c) A est un opérateur fermé et son domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{X}$.

(d) Pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, $S(t)u$ est dérivable au sens de la norme de $\mathcal{X}$ et

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = -AS(t)u = -S(t)Au. \tag{s_3}$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Re\lambda > \gamma_A$, alors $-\lambda$ est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, et la résolvante $R(\lambda; A) = (A+\lambda)^{-1}$ de A a l'expression suivante

$$R(\lambda; A) = (A+\lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt. \tag{s_4}$$

L'intégrale (s_4) est définie au sens fort sur tout intervalle borné $[0, T]$, et converge en norme d'opérateur lorsque $T \longrightarrow \infty$. De plus par l'inégalité (s_2) on a

$$\|(A+\lambda)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{Re\lambda - \gamma_A}. \tag{s_5}$$

En fonction des valeurs des constantes M_A et γ_A, on distingue plusieurs classes de semi-groupes :

- Si $\gamma_A \leq 0$, on dit que $S(t)$ est un semi-groupe borné.
- Si $\gamma_A \leq 0$ et $M_A = 1$, on dit que $S(t)$ est un semi-groupe contractant.

Caractérisation des générateurs

Le résultat principal est le théorème de HILLE-YOSIDA (voir [33, 51, 90]).

Théorème 1.6.1 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ est le générateur d'un semi-groupe si et seulement si il existe des constantes M_A et γ_A telles que tout réel $\lambda > \gamma_A$ soit dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ et que*

$$\|(\lambda + A)^{-m}\| \leq \frac{M_A}{(\lambda - \gamma_A)^m}$$

pour tout $\lambda > \gamma_A$ et tout entier $m \geq 1$. On alors l'estimation

$$\|S(t)\| = \|e^{-tA}\| \leq M_A e^{t\gamma A}.$$

Corollaire 1.6.1 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ est le générateur d'un semi-groupe contractant si et seulement si $]0, +\infty[\subseteq \rho(-A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a l'inégalité $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$.*

On peut donner une autre caractérisation des générateurs grâce à la théorie des opérateurs accrétifs.

Définition 1.6.2 Soit A un opérateur dans un espace de Banach $\mathcal{X}$. Considérons

$$\Gamma_A = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^* : x \in \mathcal{D}(A),\ \|x\| = 1,\ \|y\| = 1,\ et\ \langle y, x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 1\}.$$

A est dit accrétif si pour tout $(x, y) \in \Gamma_A$, on a $Re\langle y, x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} \geq 0$.

Théorème 1.6.2 [Lumer-Phillips]. *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ est le générateur d'un semi-groupe si et seulement si A est accrétif et l'image $R(\lambda I + A) = \mathcal{X}$ pour tout $\lambda > 0$. Ou encore, de manière équivalente, A est fermé à domaine dense et A et A^* sont accrétifs.*

(voir E.B. DAVIES [33], théorème 2.24).

▶ Si $A = A^* \geq 0$, alors $-A$ est générateur d'un semi-groupe contractant.

Théorème 1.6.3 *On suppose que $-A$ engendre un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, alors $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de générateur $-A^*$.*

▶ Si $A = A^*$ et $-A$ engendre un semi-goupe $(S(t))_{t\geq 0}$, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est auto-adjoint.

1.6.1 Semi-groupes holomorphes

Il s'agit d'une classe de semi-groupes très importante dans les applications.

Notons $\mathbb{S}(\omega)$ pour $\omega \in]0,\, \pi/2[$ le secteur angulaire de sommet 0 :

$$\mathbb{S}(\omega) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ et } |\arg(z)| < \omega\}.$$

Définition 1.6.3 Soit $\{S(z)\}_{z\in S(\omega)}$ une famille d'opérateurs dans un espace de Banach $\mathcal{X}$. On dit que $\{S(z)\}_{z\in\mathbb{S}(\omega)}$ est un semi-groupe holomorphe dans $\mathbb{S}(\omega)$ si :

(i) $S(z_1)S(z_2) = S(z_1 + z_2), \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{S}(\omega)$,

(ii) pour tout $\theta \in]0, \omega[$ il existe M_θ telle que $\|S(z)\| \leq M_\theta, \quad z \in \mathbb{S}(\omega - \theta)$,

(iii) $S(z)$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{S}(\omega)$,

(iv) pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\lim_{z\in\mathbb{S}(\omega-\theta),\, z\to 0} \|S(z)x - x\| = 0, \quad \theta \in]0,\, \omega[$.

Afin de caractériser les générateurs de cette classe de semi-groupes, on introduit la définition suivantes :

Définition 1.6.4 Soit A un opérateur fermé à domaine dense dans $\mathcal{X}$, et soient $\theta \in]0,\, \pi[$, $M \geq 1$. L'opérateur A est dit de type $(\theta,\, M)$ si l'ensemble résolvant de A contient $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| > \theta\}$ et que l'on a les inégalités suivantes :

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda}, \quad \lambda > 0,$$

et pour tout $\theta' \in]0, \pi - \theta[$, il existe $M_{\theta'} \geq 1$ tel que

$$\|(zI + A)^{-1}\| \leq \frac{M_{\theta'}}{|z|}, \quad z \in \mathbb{S}(\theta').$$

Ainsi par exemple un opérateur A fermé à domaine dense dans $\mathcal{X}$ est de type $(\pi/2,\, 1)$ si et seulement si A et A^* sont accrétifs. On peut alors caractériser les générateurs de semi-groupes holomorphes par le résultat suivant :

Théorème 1.6.4 (voir [33, 51, 101]). *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans $\mathcal{X}$ est le générateur d'un semi-groupe holomorphe borné de demi-angle $\omega \in]0,\, \pi/2[$ si et seulement* *si A est de type $(\theta = \pi/2 - \omega,\, M)$ pour un $M \geq 1$. De plus, on a la repeésentation intégrale suivante :*

$$S(t) := e^{-tA} = \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{t\zeta}}{\zeta + A}\, d\zeta$$

où Γ est une courbe dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ allant de $\infty e^{-i(\pi/2+\varepsilon)}$ à $\infty e^{i(\pi/2+\varepsilon)}$ pour un $\varepsilon \in]0, \omega[$.

Les semi-groupes holomorphes possèdent les propriétés de regularité suivantes :

Proposition 1.6.2 [Théorème de régularité]. *Soit $S(z)$ un semi-groupe holomorphe dans $\mathbb{S}(\omega)$, soit $-A$ son générateur. Alors pour tout $z \in \mathbb{S}(\omega)$, $\mathcal{R}(S(z)) \subseteq \mathcal{D}(A)$ et pour tout $\varepsilon \in]0,\, \omega[$,*

$$\left\| \frac{d}{dz} S(z) \right\| = \|AS(z)\| \leq \frac{c_\varepsilon}{|z|}, \quad z \in \mathbb{S}(\omega - \varepsilon).$$

De plus, on en déduit :

$$\left\| \frac{d^n}{dz^n} S(z) \right\| = \|(AS(z/n))^n\| \leq \frac{n^n c_\varepsilon^n}{|z|^n}, \quad z \in \mathbb{S}(\omega - \varepsilon).$$

(voir [90]).

De manière analogue on définit les semi-groupes holomorphes contractants : un semi-groupe $\{S(z)\}$ est dit contractant si $\|S(z)\| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{S}(\omega)$.

Proposition 1.6.3 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans $\mathcal{X}$ est le générateur d'un semi-groupe holomorphe contractant si et seulement si A est sectoriel de demi-angle $\pi/2 - \omega$.*

► Si A est un opérateur de type $(\theta_A,\, 1)$, alors e^{-tA} est un semi-groupe holomorphe dans $\mathbb{S}(\pi/2 - \theta_A)$, et $\|e^{-tA}\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

Une autre propriété remarquables des semi-groupe holomorphes est relative aux espaces image et noyau de ces opérateurs.

Théorème 1.6.5 [théorème algébrique-topologique]. *Soit $\{S(z)\}_{z \in \mathbb{S}(\omega)}$ un semi-groupe holomorphe sur un espace de Banach $\mathcal{X}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{S}(\omega)$, $S(z)$ est injectif, $\mathcal{R}(S(z))$ est dense dans $\mathcal{X}$, et tout sous-espace de $\mathcal{X}$ défini par :*

$$\mathscr{X}_t(S) = \{y \in \mathcal{X},\ y = \int\limits_0^\infty F(\tau) S(\tau) x\, d\tau, \quad x \in \mathcal{X} \text{ et } F \in \mathcal{C}_0^\infty(]t,\, \infty[)\}$$

est dense dans $\mathcal{X}$.

Preuve. **(1)** Montrons que $\mathcal{N}(S(z)) = \{0\}$, $z \in \mathbb{S}(\omega)$. Soient $z_0 \in \mathbb{S}(\omega)$ et $x \in \mathcal{N}(S(z_0))$. Comme $S(z_0)x = 0$, on a $S(z)S(z_0)x = 0 = S(z+z_0)x$ pour tout $z \in \mathbb{S}(\omega)$. Or $z \longmapsto S(z)x$ est une fonction holomorphe, donc par prolongement analytique $S(z)x = 0$ pour tout $z \in \mathbb{S}(\omega)$. Or $\lim\limits_{z \to 0} S(z)x = x$, donc $x = 0$, ce qui montre que $\mathcal{N}(S(z_0)) = \{0\}$.

(2) Remarquons que $\mathscr{X}_t(S) \subseteq \mathcal{R}(S(t))$, car si $F \in \mathcal{C}_0^\infty(]t, \infty[)$, alors $t_0 = \inf\{\tau :\ F(\tau) \neq 0\} > t$ et donc $y = \int\limits_0^\infty F(\tau)S(\tau)x\, d\tau = S(t)\int\limits_t^\infty F(\tau)S(\tau - t)x\, d\tau \in \mathcal{R}(S(t))$.
Supposons qu'il existe $\phi^* \in \mathcal{X}^*$ non nulle qui s'annule sur le sou-espace $\mathscr{X}_t(S)$. Cela signifie que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour tout $F \in \mathcal{C}_0^\infty(]t, \infty[)$, $\int\limits_0^\infty F(\tau)\langle \phi^*, S(\tau)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}\, d\tau = 0$. Cela entraîne que $\langle \phi^*, S(\tau)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$ pour tout $\tau > t$ car l'application $\tau \longmapsto \langle \phi^*, S(\tau)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}$ est continue. De plus, comme $S(z)$ est un semi-groupe holomorphe, cette application se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{S}(\omega)$. Or par prolongement analytique, on obtient $\langle \phi^*, S(z)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{S}(\omega)$. Par ailleurs, on doit avoir $\lim\limits_{z \to 0}\langle \phi^*, S(z)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0 = \langle \phi^*, x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}$, donc $\langle \phi^*, x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, ce qui entraîne $\phi^* = 0$. Ce qui est contradictoire. Donc $\mathscr{X}_t(S)^\perp = \{0\}$ et on en déduit que $\mathscr{X}_t(S)$ est dense dans $\mathcal{X}$, et a fortiori $\mathcal{R}(S(t))$ qui le contient.
(3) Soient $z_0,\ z \in \mathbb{S}(\omega)$. Supposons qu'il existe $\phi^* \in \mathcal{X}^*$ telle que $\langle \phi^*, h\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$ pour tout $h \in \mathcal{R}(S(z_0))$. Puisque $S(z+z_0)(\mathcal{X}) = S(z_0)S(z)(\mathcal{X}) \subseteq S(z_0)(\mathcal{X})$, c'est-à-dire, $\mathcal{R}(S(z_0+z)) \subseteq \mathcal{R}(S(z_0))$, alors on a $\langle \phi^*, h\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$ pour tout $h \in \mathcal{R}(S(z_0 + z))$. Ce qui imlique que $\langle \phi^*, S(z_0 + z)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour tout $z \in \mathbb{S}(\omega)$, et par prolongement analytique de la fonction $F(z) = \langle \phi^*, S(z_0 + z)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$, on obtient $\langle \phi^*, S(z)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour tout $z \in \mathbb{S}(\omega)$. La continuité de $S(z)$ en 0 implique

$$\lim_{z \to 0}\langle \phi^*, S(z)x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0 = \langle \phi^*, x\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = 0$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$, alors nécessairement $\varphi^* = 0$. Ce qui montre que $\mathcal{R}(S(z))^\perp = \{0\}$, c'est-à-dire $\mathcal{R}(S(z))$ est dense dans $\mathcal{X}$. $\square$
Pour plus de détails, on cite les références (E. Hille [58], p. 307, I. Cioranescu [31], lemme 2.2).

Dans un espace de Hilbert, les notions d'opérateurs accrétifs et sectoriels possèdent des définitions plus explicites que celles dans le cas d'un espace de Banach.

Définition 1.6.5 Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On définit l'image numérique $Nr(A) \subseteq \mathbb{C}$ par :

$$Nr(A) = \{z = (u,\, Au) : u \in \mathcal{D}(A),\ \|u\| = 1\}.$$

Il est bien connu (théorème de Toeplitz-Hausdorff [6] [7] [8]) que $Nr(A)$ est une partie convexe du plan complexe.

Définition 1.6.6 Un opérateur A dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit accrétif si son image numérique est incluse dans le demi-plan droit $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 0\}$. Si de plus $\mathcal{R}(\lambda I + A)) = \mathcal{H}$ pour $\lambda > 0$, alors on dit que A est *m-accrétif*.

Un opérateur m-accrétif A est nécessairement fermé à domaine dense dans $\mathcal{H}$, et maximal au sens où il n'admet pas d'extension accrétive.

Définition 1.6.7 Un opérateur A dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit sectoriel de demi-angle $\theta_A \in]0,\, \pi/2[$ si son image numérique $Nr(A)$ est incluse dans dans le secteur fermé $\overline{\mathbb{S}(\theta_A)}$. Si de plus $\mathcal{R}(zI + A) = \mathcal{H}$ pour un $z \notin \overline{\mathbb{S}(\theta_A)}$, A est dit *m-sectoriel*.

En particulier, un opérateur A m-sectoriel est m-accrétif, donc fermé à domaine dense dans $\mathcal{H}$. La limite $\theta_A = 0$, c'est-à-dire si A est m-sectoriel de demi-angle θ pour tout $\theta > 0$ (donc $Nr(A) \subseteq \mathbb{R}^+$) équivaut à : A est auto-adjoint positif.

► A est m-accrétif si et seulement si A est de type $(\pi/2,\, 1)$.

► Si A est m-accrétif, alors A^α, $\alpha \in [0,\, 1[$, est de type $(\alpha\pi/2,\, 1)$, de plus A^α est m-sectoriel de demi-angle $\alpha\pi/2$.

► Les opérateurs auto-adjoint positifs engendrent les semi-groupes holomorphes et contractants dans le demi-plan ouvert $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$.

[6] Pour plus de détail sur le l'image numérique, on cite le joli article : D. Bridges & R. Havea, *A constructive analysis of a proof that the numerical range is convex*, London Mathematical society, J. Comput. Math., **3** (2000), 191-206.

[7] W. Auzinger, *Sectorial operators and normalized numerical range*, Applied Numerical Mathematics, **45** (2003), 367-388.

[8] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators*, Springer-Verlage (1995). [page 267, 310].

1.6.2 Semi-groupes compacts

Définition 1.6.8 Un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ est dit compact pour tout $t > t_0$ si pour $t > t_0$, $S(t)$ est un opérateur compact dans $\mathcal{X}$. Le semi-groupe est dit *compact* si $S(t)$ est compact pour tout $t > 0$.

▶ Si $S(t)$ est compact pour $t \geq 0$, alors en particulier l'identité I est un opérateur compact et $\mathcal{X}$ est nécessairement de dimension finie.

▶ Si pour $t_0 > 0$ l'opérateur $S(t)$ est compact, alors $S(t)$ est compact pour $t \geq t_0$.

▶ Si $S(t)$ est compact pour $t > t_0 > 0$, alors $t \longmapsto S(t)$ est continue dans $\mathscr{L}(\mathcal{X})$ pour $t > t_0$.

Caractérisation des semi-groupes compacts

Théorème 1.6.6 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe et $-A$ sont générateur. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{S(t)\}_{t>0}$ soit compact est que l'on ait*

(i) $t \longmapsto S(t)$ est continue dans $\mathscr{L}(\mathcal{X})$ pour $t > 0$,

et

(ii) $R(\lambda; -A) = (\lambda I + A)^{-1} \in \mathscr{K}(\mathcal{X})$ pour tout $\lambda \in \rho(-A)$.

▶ Si $R(\lambda^*; -A)$ est compacte pour un $\lambda^* \in \rho(-A)$ et si $t \longmapsto S(t)$ est continue dans $\mathscr{L}(\mathcal{X})$ pour $t > t_0$, alors $S(t)$ est compact pour $t > t_0$.

▶ Si le générateur $-A$ est borné. Alors $S(t)$ est compact si et seulement si $R(\lambda; -A)$ est compact pour tout $\lambda \in \rho(-A)$.

1.7 C-Semi-groupes

La théorie des C-semi-groupes est un outil très puissant dans l'étude des positions correctes et incorrectes de quelques classes de problèmes de Cauchy. Cette nouvelle théorie est développée par deLaubenfles [36, 37] dans le cadre de problèmes bien posés, et par Mel'nikova [82, 83, 84, 85] dans le cadre de problèmes mal posés.

Définition 1.7.1 Soit $C \in \mathscr{L}(\mathcal{X})$ un opérateur inversible et $\overline{\mathcal{R}(C)} = \mathcal{X}$. La famille d'opérateurs $\{S(t),\ t \in [0, T)\} \subset \mathscr{L}(\mathcal{X})$ est dite C-semi-groupe local si $T < \infty$ et

(C1) $S(t+s)C = S(t)S(s), \quad t, s,\ s+t \in [0, T),$

(C2) $S(0) = C$,

(C3) pour tout $x \in \mathcal{X}$, la fonction $S(t)x : [0,\, T) \longrightarrow \mathcal{X}$ est continue.

L'opérateur $A = \overline{G}$ defini par :

$$Gx = \lim_{h\to 0} h^{-1}\left(C^{-1}S(h)x - x\right),$$

$$\mathcal{D}(G) = \left\{x \in \mathcal{R}(C) : \lim_{h\to 0} h^{-1}\left(C^{-1}S(h)x - x\right) \text{ existe}\right\}$$

est le générateur du C-semi-groupe $\{S(t), \quad t \in [0, T)\}$.

► Si $T = \infty$, le C-semi-groupe local est dit simplement C-semi-groupe, et s'il existe $M > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, on dit qu'il est exponentielemnt borné.

1.8 Equations linéaires abstraites

Beaucoup de problèmes de la physique mathématique conduisent à la résolution des équations linéaires vectorielles de la forme :

$$L : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}, \quad x \longmapsto y = Lx. \qquad (\mathscr{E})$$

Pour mieux comprendre les difficultés de la résolution de ce type d'équations, on rappelle quelques notions et résultats liés à cette problématique.

Définition 1.8.1 L'équation $(\mathscr{E})$ est dite :

1. *normalement résoluble* si $\mathcal{R}(L) = \overline{\mathcal{R}(L)}$,

2. *fortement résoluble* ou admet une solution forte si $\overline{\mathcal{R}(L)} = \mathcal{Y}$,

3. *partout résoluble* si $\mathcal{R}(L) = \mathcal{Y}$,

4. *correctement résoluble* sur $\mathcal{R}(L)$ si $\|x\|_{\mathcal{X}} \leq k\|Lx\|_{\mathcal{Y}}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(L)$, où k est une constante positive indépendante de x.

Dans l'étude des équations de la forme $B : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2,\ u \longmapsto Bu = v$, la fermeture de $\mathcal{R}(B)$ joue une propriété cruciale, pour que l'inverse de B soit borné.

Les théorèmes suivants caractérisent les opérateurs à image fermée.

Théorème 1.8.1 (T. KATO [100], p. 231). *Soit $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $R(B)$ est fermé,
(ii) $\omega(B) = \inf \left\{ \|Bh\|, \quad h \in \mathcal{N}(B)^{\perp}, \ \|h\| = 1 \right\} > 0$.

Théorème 1.8.2 [72] **[Caractérisation spectrale des opérateurs à image fermée].**[9]
Soit $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{R}(B)$ est fermé dans $\mathcal{H}_2$,
(ii) 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(B^*B)$,
(iii) il existe $\gamma > 0$ tel que $\sigma(B^*B \mid_{\mathcal{N}(B)^{\perp}}) \subseteq [\gamma, \|B\|^2]$.

On donne ici un théorème fendamental qui caractérise les conditions de résolubilité des équations linéaires :

Théorème 1.8.3 [théorème de Picard].
Soit $\mathcal{K} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact, et $\{(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n), \quad n \in \mathbb{N}\}$ son système singulier. Alors l'équation :

$$\mathcal{K}f = g$$

est résoluble si et seulement si $g \in \mathcal{N}(\mathcal{K}^\star)^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{K})}$ et si la condition de PICARD *est satisfaite :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la solution est donnée par la formule :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n.$$

▶ Dans cette thèse, on se limite aux cas des problèmes bien/mal posés au sens d'HADAMRD. D'après HADAMRD, un problème est dit *bien posé* si le problème admet une solution **(Existence)**, si elle est unique **(unicité)** et si elle dépend continûment des données **(stabilité)**. Le problème est dit *mal posé* si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée.

Exemples.

[9] Ce résulat est démontré par S.H. KULKARNI *&* M.T. NAIR en 2000, voir [72].

1 Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \triangle u = 0, \quad (x,\, y) \in \mathbb{R} \times (0,\, \infty), \\ u(x,\, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x,\, 0) = \varphi_\varepsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon),\ \varepsilon > 0$. La solution du ce problème est donnée par : $u_\varepsilon(x,\, y) = \varepsilon^2 \sinh(y/\varepsilon) \sin(x/\varepsilon)$. On remarque que $(\varphi_\varepsilon \longrightarrow 0,\ \varepsilon \longrightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x,\, y) \longrightarrow \infty,\ \varepsilon \longrightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé.

► les équations elliptiques avec des conditions manquantes (lorsqu'il y a des zonnes inaccessible à la mesure) sont des problèmes instables. [10] [11] [12]

2 Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur. Trouver $u(x,\, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de temperature $u(x,\, t)$ vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,\, \pi),\ t \in (0,\, T), \\ u(x,\, T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(0,\, t) = u(\pi,\, t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \qquad (BCP)$$

où $\psi \in L_2(0,\, \pi)$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BCP) sous la forme :

$$u(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n \sin(nx),$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ : $\psi_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \psi(x) \sin(nx)\, dx$.
Soit $\varphi(x) = u_0(x,\, 0)$ la temperature initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (BCP) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} \sin(kx).$$

[10] Pour plus de détail, on cite les travaux suivants : L. Bourgeois, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **22** (2006), 413-430.

[11] L. Bourgeois, *Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **21** (2005), No. 3, 1087-1104.

[12] A. Dang Dinh, D. Duc Trong and M. Yamamoto, *A Cauchy like problem in plane elasticity : regularization by quasi-reversibility with error estimates*, Vietnam J. Math., **32** (2004), No. 2, 197-208.

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| \longrightarrow 0,\ k \longrightarrow +\infty$ mais $\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = e^{2k^2T} \longrightarrow +\infty,\ k \longrightarrow +\infty$. On voit très clair que le problème (BCP) est instable donc mal posé. C'est pour cela, on dit que les phénomènes de la chaleur sont irréversibles. [13] [14]

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initial $u(x,\, 0) = \varphi(x) \in L_2(0,\, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\varphi_n \sin(nx) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx)\sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Ainsi, u est solution du problème (BCP) ssi φ satifait l'équation du Fredholm de première espèce :

$$\int_0^{\pi} \mathcal{K}(x,\, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

où $\mathcal{K}(x,\, \xi) = \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx)\sin(n\xi)$. Ceci est un cas special de l'équation $(\mathcal{E})$, où $L = I\!K$ est un opérateur intégral ($I\!K\varphi = \psi$) de noyau $\mathcal{K}(.,.)$. Il est bien connu que $I\!K$ est compact (voir Groetsch [49], Kress [70]), d'où $I\!K^{-1}$ n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (BCP).

3 Problème de Cauchy rétrograde. On se place dans un cadre Hilbertien, et soit A un opérateur auto-adjoint positif. Considérons le problème suivant : déterminer $u(0) = g$ sachant que $u(t)$ vérifie l'équation :

$$u_t + Au = 0, \ \ 0 < t < T, \quad u(T) = f, \tag{ABCP}$$

où f est un élément de $\mathcal{H}$ donné.

On sait d'aprés la théorie des semi-groupes, que la solution du problème direct est donnée par $u(t) = e^{-tA}u(0)$. Le problème de la détermination de $u(0)$ est équivaut à :

$$Bg = e^{-TA}u(0) = f.$$

On distingue deux cas très importants :

[13] Pour une bonne explication physique des phénomènes irréversibles, on cite le livre :
Francis Fer, *L'irréversibilité : fondement de la stabilité du monde physique*, Gauthier-Villars (1980).

[14] M.V. Klibanov, A. Timonov, *On the mathematical treatment of time reversal*, Inverse Problems **19** (2003), 12991318.

(a) Si le semi-groupe $S(t) = e^{-TA}$ est compact, alors le problème est mal posé.

Remarque. Si l'opérateur A^{-1} est compact, alors A est diagonalisable, c'est-à-dire, il existe une base propre $\{e_n\}_{n\geq 1}$ telle que :

$$Ae_n = \lambda_n e_n \text{ avec } \|e_n\| = 1 \text{ et } 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \longrightarrow +\infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n) e_n,$$

alors le semi-groupe $S(t)$ engendré par $-A$ prend la forme :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n} \mathcal{P}_{e_n}, \text{ où } \mathcal{P}_{e_n} h = (h, e_n).$$

Il est clair que $\sigma(S(t)) = \sigma_p(A) \cup \{0\} = \left\{e^{-t\lambda_n}\right\}_{n\geq 1} \cup \{0\}$ et $S(t)$ est compact pour tout $t > 0$.

(b) [Effet régularisant et irrversibilité]. Comme A est auto-adjoint positif, alors le semi-groupe $S(t) = e^{-tA}$ est holomorphe, de plus, on a les proriétés suivantes :

1. $\|S(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$;
2. pour tout $r \geq 0$ et $t > 0$, l'opérateur $S(t) \in \mathscr{L}(H, \mathcal{D}(A^r))$;
3. pour tout entier $k \geq 0$ et $t > 0$, $\|S^{(k)}(t)\| = \|A^k S(t)\| \leq c(k) t^{-k}$;
4. pour tout $x \in \mathcal{D}(A^r)$, $r \geq 0$ on a $S(t)A^r x = A^r S(t) x$.

(voir Pazy [90], Chap. 2, théorème 6.13, p. 74).

On voit d'après les propriétés de $S(t)$ que le propblème de Cauchy direct ($u_t(t) + Au(t) = 0$, $u(0) = u_0$) présente le phénomène de régularisation suivant : En supposant seulement la donnée initiale dans $\mathcal{H}$, alors pour tout $t > 0$, et tout entier k, on a $u(t) \in \mathcal{D}(A^k)$ (espace plus régulier que $\mathcal{H}$). Il en résulte que, pour que le problème rétrograde $(ABCP)$ ait une solution, il faudrait que $u(T) = f \in \mathcal{D}_\infty = \cap_k \mathcal{D}(A^k)$. En fait même dans ce cas, on pourrait construire des exemples où il n'y a pas de solution sur l'intervalle $(0, T)$. On dit que le problème $(ABCP)$ est irréversible dans le sens :

$$S(T) = e^{-TA} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},$$

$$S(T)^{-1} = e^{TA} : \mathcal{R}(S(T)) \subseteq \mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

On montre (dans le chapitre 4) que $\mathcal{R}(S(T))$ est dense, mais n'est pas fermé.

4 Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, & u_t(T) = \psi, \end{cases} \tag{HCP}$$

où φ, ψ sont des fonctions données dans $\mathcal{H}$, et $A : \mathcal{D}(A) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que $A = A^*$ et $A \geq \delta > 0$.

Si $\lambda_k = (k\pi)^2/T,\ k = 1, 2, \cdots$, ne sont pas des valeurs propres de A, alors l'opérateur $\left(\sin(T\sqrt{A})\right)^{-1}$ (inverse algébrique) existe et la solution formelle du problème (HCP) est donnée par :

$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A})\right)^{-1} \psi + \sin(t\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A})\right)^{-1} \varphi.$$

Inversement, si $\lambda_k = (k\pi)^2/T,\ k = 1, 2, \cdots$, sont des valeurs propres de A, alors la solution du problème (HCP) n'est pas unique. Cependant, le problème (HCP) est mal posé au sens d'Hadamard dans les deux cas, de point de vue que les valeurs $\lambda_k = k\pi/T,\ k = 1, 2, \cdots$, peuvent être proches aux valeurs propres de A.

► On remarque d'après les exemples donnés qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1 La non unicité. Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

2 L'instabilité. Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergeant et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise le problème qui est instable par un problème proche (dans un sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de mal position (Pour une bonne référence sur les méthodes de régularisation, on cite le livre de H.W. Engel [41]).

Afin de proposer une stratégie de régularisation éfficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement mal posés ou faiblement mal posés.

On cite ici deux critères :

Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables, $\mathbb{T} \in \mathscr{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, et soit l'équation :

$$\mathbb{T} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2, \quad u \longrightarrow \mathbb{T}u = v. \tag{E}$$

On dit que le problème (E) est *faiblement* mal posé (resp. *fortement* mal posé), si les valeurs singulières s_n de $\mathbb{T}$ sont équivalentes à $\dfrac{C}{n^p}$ (resp. Ce^{-n^p}), où C et p sont des constantes positives.

Une autre définition de problèmes faiblement/fortement mal posés, pour les problèmes de Cauchy dans un cadre général, est donné a partir des propriétés sur le spectre et la résolvante de l'opérateur (voir MEL'NIKOVA [82, 83, 84]).

Soit

$$u_t(t) = Au(t) = 0, \;\; 0 \leq t < T, \quad u(0) = u_0. \tag{CP}$$

Notons

$$\mathcal{G}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \beta < \pi/4\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < \alpha < \pi/T, \; Re(z) > \omega, \; \omega \in \mathbb{R}\}.$$

On dit que l'opérateur A est de type $\mathcal{G}_1$ si $\sigma(A) \subseteq G_1$ et

$$\exists M > 0 : \quad \forall \lambda \notin \overline{\mathcal{G}_1}, \;\; \|R(\lambda; A)\| \leq M(1 + |\lambda|)^{-1}.$$

On dit que l'opérateur A est de type $\mathcal{G}_2$ si $\sigma(A) \subseteq G_2$ et

$$\exists M > 0 : \quad \forall \lambda \notin \overline{\mathcal{G}_2}, \;\; \|R(\lambda; A)\| \leq M.$$

► Si l'opérateur A est de type $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$, alors le problème (CP) est *fortement* mal posé.

► Si A engendre un C-semi-groupe avec $\mathcal{R}(C) = \mathcal{D}(A^n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on dit alors que le problème (CP) est *faiblement* mal posé.

1.9 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall et ses variantes jouent un grand rôle dans les estimations des termes intégrodifférentiels.

Lemme 1.9.1

(VG1) *Soit $w(t)$ et $g(t)$ des fonctions non négatives et intégrables sur $D =]0, T[$, et telle que la fonction $g(t)$ soit non-décroissante. Alors de l'inégalité*

$$w(t) \leq M \int_0^t w(s)ds + g(t),$$

découle l'inégalité

$$w(t) \leq \exp(Mt)g(t).$$

(VG2) *Soit $w(t)$ et $f(t)$ des fonctions non négatives et intégrables sur $D =]0, T[$, et telle que la fonction $f(t)$ soit non-croissante. Alors de l'inégalité*

$$w(t) \leq M \int_t^T w(s)ds + f(t),$$

découle l'inégalité

$$w(t) \leq \exp\left(M(T-t)\right) f(t).$$

D'autres notions et inégalités seront utilisées telle que l'ε-inégalité

$$2|Re(a,b)| \leq \varepsilon \left|a\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left|b\right|^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Méthode de prolongement par rapport au paramètre

Lemme 1.9.2 [The method of continuity] ([53], théorème 5.2, p. 75).
Soient E_1, E_2 deux espaces de Banach et L_0, L_1 deux opérateurs linéaires bornés de E_1 dans E_2. Pour tout $r \in [0, 1]$, on pose :

$$L_r = (1-r)L_0 + rL_1.$$

On suppose qu'il existe $k > 0$ telle que :

$$\|u\|_{E_1} \leq k\|L_r u\|_{E_2}$$

où $r \in [0, 1]$. Alors L_1 est un isomorphisme entre E_1 et E_2 si et seulement si L_0 est un isomorphisme entre E_1 et E_2.

N.B. On désigne par l'expression "Multiplions scalairement dans H le vecteur u par le vecteur v" la quantité $2Re(u,\, v)$.

Chapitre 2

Equations ultra-hyperboliques avec conditions initiales non locales

2.1 Position du problème

Soit $D =]0, T_1[\times]0, T_2[$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$ de variable $t = (t_1, t_2)$, et H un espace de Hilbert complexe, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|.|$ et $(.,.)$.

On considère dans H l'équation :

$$\mathcal{L}_\lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)\left(u + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = f(t), \tag{1}$$

où λ est un paramètre réel ($\lambda \geq 0$), u, f sont des fonctions de variable $t = (t_1, t_2) \in D$ et à valeurs dans H, $A(t)$ est un opérateur linéaire dans H, non-borné, à domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ indépendant de t, et partout dense dans H.

L'opérateur A est auto-adjoint et vérifie les conditions suivantes :

$$(\mathscr{A}_1) \qquad (Au, u) \geq c_0 |u|^2, \ \forall u \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t \in \overline{D},$$

où c_0 est une constante positive indépendante de u.

$$(\mathscr{A}_2) \qquad \begin{cases} A(0, t_2) = A(T_1, t_2), & t_2 \in [0, T_2], \\ A(t_1, 0) = A(t_1, T_2), & t_1 \in [0, T_1]. \end{cases}$$

A l'équation (1) on associe les conditions initiales non locales suivantes :

$$\begin{cases} l_{1_\mu} u \equiv \mu_1 u \mid_{t_1=0} - \mu_2 u \mid_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \\ l_{2_\mu} u \equiv \mu_1 u \mid_{t_2=0} - \mu_2 u \mid_{t_2=T_2} = \psi(t_1). \end{cases} \tag{2}$$

Les fonctions φ et ψ sont respectivement définies de $[0, T_2]$, $[0, T_1]$ à valeurs dans H, et vérifient la condition :

$$\mu_1 \varphi(0) - \mu_2 \varphi(T_2) = \mu_1 \psi(0) - \mu_2 \psi(T_1), \tag{3}$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2)$, où μ_1, μ_2 sont deux paramètres complexes tels que $\mu_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$, réalisant une des conditions :

$$(\mathscr{B}_1) \qquad \alpha_1(\mu) = \exp\left[3C(T_1 + T_2)\right] \left|\mu_1^{-1}\mu_2\right|^2 < 1,$$

$$(\mathscr{B}_2) \qquad \alpha_2(\mu) = \exp\left[3C(T_1 + T_2)\right] \left|\mu_2^{-1}\mu_1\right|^2 < 1.$$

2.2 Espaces fonctionnels

Tout d'abord introduisons certains espaces fonctionnels nécessaires pour l'étude du problème considéré.

On définit sur l'ensemble $\mathcal{D}(A)$ la norme hermitienne suivante :

$$|u|_1 = |A(0)\, u|,$$

on otient l'espace de Hilbert W^1.

De manière analogue, on définit sur l'ensemble $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ la norme

$$|u|_{\frac{1}{2}} = \left|A^{\frac{1}{2}}(0)u\right|,$$

on obtient ainsi l'espace de Hilbert $W^{1/2}$.

Remarque.

- Les opérateurs $A(0)$ et $A^{\frac{1}{2}}(0)$ sont bornés de W^1 et $W^{1/2}$ respectivement dans H.
- D'après les propriétés de l'opérateur A on a les inclusions topologiques suivantes :

$$W^1 \subset W^{1/2} \subset H.$$

- W^1 est partout dense dans $W^{1/2}$ et dans H.
- De plus, par définition de L_2, on a les inclusions topologiques suivantes :

$$L_2(D; W^1) \subset L_2(D; W^{1/2}) \subset L_2(D; H).$$

Proposition 2.2.1 *L' opérateur $A(t)^{-1}$ (resp. $A(t)^{-\frac{1}{2}}$) est borné de H dans H.*

Preuve. Voir le théorème 1.1.1 (Rappels) □

Proposition 2.2.2 *L'opérateur $A(t)$ (resp. $A(t)^{\frac{1}{2}}$) est borné de W^1 (resp. $W^{\frac{1}{2}}$) dans H.*

Preuve. Posons

$$B(t) = A(t)A(0)^{-1} \text{ et } C(t) = A(t)^{\frac{1}{2}}A(0)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'après la proposition 2.2.1 et le théorème du graphe fermé on a $B(t) \in \mathscr{L}(H)$.
Pour chaque $t \in \overline{D}$, on peut écrire

$$|A(t)u| = \left|A(t)A(0)^{-1}A(0)u\right| = |B(t)A(0)u| \leq \|B(t)\|_{\mathscr{L}(H)} |A(0)u| = \|B(t)\|_{\mathscr{L}(H)} |u|_1 ,$$

ce qui permet d'affirmer que $A(t) \in \mathscr{L}(W^1; H)$. De manière analogue on démontre aussi que $A(t)^{\frac{1}{2}} \in \mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}}; H)$. □

Proposition 2.2.3 [14] *Si la fonction $\overline{D} \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1, H)$ est continue par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1; H)$, alors il existe des constantes positives c_1 et c_2 telles que*

$$c_1 |u|_1 \leq |A(t)u| \leq c_2 |u|_1 , \quad \forall u \in W^1, \tag{4}$$

$$\sqrt{c_1} |u|_{\frac{1}{2}} \leq \left|A(t)^{\frac{1}{2}}u\right| \leq \sqrt{c_2} |u|_{\frac{1}{2}} , \quad \forall u \in W^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Lemme 2.2.1 ([67], Lemme 1.9, page 186). *Si la fonction $D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1, H)$ admet des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2, par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1, H)$. Alors on a les estimations*

$$\left\|\left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_1} A(t)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq K \left\|A(t)'_{t_1}A(t)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)}, \tag{6}$$

$$\left\|\left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_2} A(t)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq K \left\|A(t)'_{t_2}A(t)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)}, \tag{7}$$

où K est donné par $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{(1+s)^2} ds$ *et* $\left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} = \dfrac{\partial A(t)^{\frac{1}{2}}}{\partial t_i}$, $A(t)'_{t_i} = \dfrac{\partial A(t)}{\partial t_i}$, $(i = 1, 2)$.

Proposition 2.2.4 *Les opérateurs* $A(t)'_{t_i}A(t)^{-1}$, $\left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \in L_\infty(\overline{D}; \mathscr{L}(H))$.

Preuve. Montrons que

$$\sup_{\overline{D}} \left\| A(t)'_{t_i}A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \text{ et } \sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \quad \text{sont finies, } (i = 1, 2).$$

D'après le théorème de la borne uniforme on a l'estimation

$$\sup_{\overline{D}} \left\| A(t)'_{t_i} \right\|_{\mathscr{L}(W^1, H)} \leq c_i^*, \quad (i = 1, 2). \tag{8}$$

En utilisant l'estimation (8) et (4), on obtient

$$\left| A(t)'_{t_i} u \right| \leq c_i^* c_1^{-1} \left| A(t)u \right|, \quad (i = 1, 2), \tag{9}$$

en remplaçant u par $A(t)^{-1}v$ dans (9), on obtient

$$\left| A(t)'_{t_i} A(t)^{-1} v \right| \leq c_i^* c_1^{-1} \left| v \right|, \quad \forall v \in H, \quad (i = 1, 2), \tag{10}$$

ce qui implique que

$$\left\| A(t)'_{t_i} A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq c_i^* c_1^{-1}, \quad \forall t \in \overline{D}, \quad (i = 1, 2),$$

d'où

$$\sup_{\overline{D}} \left\| A(t)'_{t_i} A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq c_i^* c_1^{-1} = p_i < +\infty, \quad (i = 1, 2). \tag{11}$$

La fonction $D \ni t \longmapsto A(t)^{\frac{1}{2}} \in \mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}}, H)$ admet aussi des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2, et on a l'estimation

$$\sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} \right\|_{\mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}}, H)} \leq b_i^*, \ (i = 1, 2). \tag{12}$$

Pour démontrer cela, on utilise les estimations (6), (7), les inégalités (5) et (11), on obtient

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} u \right| \leq K \left\| A(t)'_{t_i} A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \left| u \right| \leq K p_i \left| u \right|, \quad (i = 1, 2). \tag{13}$$

posons $u = A(t)^{\frac{1}{2}} v$, (13) devient alors

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} v \right| \leq K p_i \left| A(t)^{\frac{1}{2}} v \right| \leq K p_i \sqrt{c_2} \left| v \right|_{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in W^{\frac{1}{2}}, \quad (i = 1, 2), \tag{14}$$

d'où on déduit

$$\left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} \right\|_{\mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}},H)} \leq b_i^*, \quad \forall t \in \overline{D}, \quad (i=1,2),$$

ou encore

$$\sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} \right\|_{\mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}},H)} \leq b_i^* \leq +\infty, \ (i=1,2), \tag{15}$$

où $b_i^* = Kp_i\sqrt{c_2}$.

Il reste à vérifier que $\sup\limits_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\mathscr{L}(H)}$, $(i=1,2)$ est finie.

On a

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} u \right| \leq b_i^* \, |u|_{\frac{1}{2}} \, , \qquad (i=1,2), \tag{16}$$

en utilisant l'estimation (5) et (16), on obtient

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} u \right| \leq b_i^* \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left| A(t)^{\frac{1}{2}} u \right|, \qquad (i=1,2), \tag{17}$$

en remplaçant u par $A(t)^{-\frac{1}{2}}v$ dans (17), on obtient

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} v \right| \leq b_i^* \frac{1}{\sqrt{c_1}} |v| \, , \quad \forall v \in H, \quad \forall t \in \overline{D} \qquad (i=1,2),$$

ce qui entraîne

$$\left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq b_i^* \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \quad \forall t \in \overline{D}, \quad (i=1,2),$$

et donc

$$\sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq b_i^* \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \qquad (i=1,2). \tag{18}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2.4. □

Soit

$$d_i \ = \ 2(K+1) \left\| \frac{\partial(\, A(t)\,)}{\partial t_i} A^{-1}(t) \right\|_{\mathscr{L}(H),\infty}, \quad (i=1,2), \ \ C = \max(d_1,d_2)$$

et

$$\mathscr{M} = \left\{ \mu = (\mu_1,\, \mu_2) \in \mathbb{C}^2 : \ \ (\mathscr{B}_1) \text{ ou } (\mathscr{B}_2) \text{ soit réalisée} \right\}.$$

Notons par $H^{1,1}(D;W^1)$ l'espace obtenu en complétant $\mathscr{C}^\infty(\overline{D};W^1)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{1,1}^2 = \int\limits_D \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial\, u}{\partial t_2} \right|_1^2 + |u|_1^2 \right\} dt.$$

Soit $H^1([0,\, T_2]\,; W^{1/2})$ l'espace obtenu par complétion de l'espace $\mathscr{C}^\infty([0,\, T_2]\,; W^{1/2}\,)$ par rapport à la norme

$$\| \,\varphi\, \|_1^2 = \int\limits_0^{T_2} \left\{ |\varphi'|^2 + |\varphi|_{\frac{1}{2}}^2 + 2\lambda\, |\varphi'|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda\, |\varphi|_1^2 + \lambda^2\, |\varphi'|_1^2 \right\} dt_2.$$

De manière analogue on construit l'espace $H^1([0,\, T_1]\,; W^{1/2})$ muni de la norme

$$\| \,\psi\, \|_1^2 = \int\limits_0^{T_1} \left\{ |\psi'|^2 + |\psi|_{\frac{1}{2}}^2 + 2\lambda\, |\psi'|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda\, |\psi|_1^2 + \lambda^2\, |\psi'|_1^2 \right\} dt_1.$$

En complétant l'espace $\mathscr{C}^\infty(\overline{D}; W^1)$ par rapport à la norme

$$\begin{aligned} |||u|||_1^2 \;\; = \;\; & \frac{\sigma_i(\mu)}{\lambda+1} \left(\int\limits_D \left\{ \lambda \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|^2 + \lambda^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda^3 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 \right\} dt \right. \\ & \left. \qquad + \sup_{\tau \in D} \left(\|u(\tau_1, .)\|_1^2 + \|u(., \tau_2)\|_1^2 \right) \right) , \end{aligned}$$

où $\sigma_i(\mu) = \dfrac{\left(\alpha_i(1-\alpha_i)\right)^2}{(1+\alpha_i)^4 (1+\left|\mu_i^{-1}\right|^2)}$, $(i=1,2)$, selon que soit réalisée la condition $(\mathscr{B}_1)$ où $(\mathscr{B}_2)$.
On obtient l'espace de Banach $E^1_{\lambda,\mu}$.
Notons par E l'espace de Hilbert

$$L_2(D; H) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_1]\,; W^{1/2}\right),$$

composé des éléments $F = (f,\, \varphi,\, \psi)$ telle que la norme

$$|||F|||^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_1^2 \text{ est finie.}$$

Le symbole $\|.\|$ désigne la norme de $L_2(D; H)$ espace des fonctions à carré intégrables définies de D dans H.

$$\widetilde{H^1}\left([0,\, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_1]\,; W^{1/2}\right)$$

est le sous espace fermé de $H^1\left([0,\, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times H^1\left([0,\, T_1]\,; W^{1/2}\right)$ composé des éléments $(\varphi,\, \psi)$ tels que

$$\mu_1 \varphi\,(0) - \mu_2 \varphi\,(T_1) = \mu_1 \psi\,(0) - \mu_2 \psi\,(T_2)\,.$$

2.3 Estimation a priori

Soit l'opérateur $L_{\lambda,\mu} = (\mathcal{L}_\lambda,\, l_{1\mu},\, l_{2\mu})$ engendré par l'équation (1) et les conditions aux limites (2), agissant de $E^1_{\lambda,\mu}$ dans E, et à domaine de définition

$$\mathcal{D}(L_{\lambda,\,\mu}) = H^{1,1}(D; W^1) \subset E^1_{\lambda,\,\mu}.$$

On introduit l'hypothèse suivante :

($\mathscr{H}_1$) On suppose que la fonction $D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1,\, H)$ admet des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2 par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1; H)$.

Pour l'opérateur $L_{\lambda,\,\mu}$ on établit le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 [Estimation a priori]. *Si les conditions ($\mathscr{H}_1$) et ($\mathscr{B}_1$) (ou ($\mathscr{B}_2$)) sont vérifiées. Alors on a l'estimation*

$$|||\, u\, |||_1^2 \leq \; S\, |||\, L_{\lambda,\,\mu} u|||^2\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}\,(L_{\lambda,\,\mu}), \tag{19}$$

où S est une constante positive indépendante de λ, μ et u.

Pour la démonstration du Théorème 2.3.1, introduisons les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1 *Soit $|\,.|_m$ la norme dans W^m, $(m = 0,\, \frac{1}{2},\, 1)$. soit g une fonction de variable $t \in [0,\, T]$ à valeurs dans H, et soit*

$$h = \mu_1\, g(0) - \mu_2\, g(T). \tag{a}$$

Alors si la condition ($\mathscr{B}_1$) est vérifiée on a

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\, |g(0)|_m^2 - \left|\mu_1^{-1}\mu_2\right|^2 |g(T)|_m^2 \leq \frac{(1+\alpha_1)\left|\mu_1^{-1}\right|^2}{(1-\alpha_1)}\, |h|_m^2\,, \tag{b}$$

et si la condition ($\mathscr{B}_2$) est vérifiée on a

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_2)\, |g(T)|_m^2 - \left|\mu_2^{-1}\mu_1\right|^2 |g(0)|_m^2 \leq \frac{(1+\alpha_2)\left|\mu_2^{-1}\right|^2}{(1-\alpha_2)}\, |h|_m^2\,. \tag{c}$$

Preuve.

Si ($\mathscr{B}_1$) est vérifiée, de (a) on a

$$|g(0)|_m^2 \leq (1+\varepsilon)\left|\mu_1^{-1}\mu_2\right|^2 |g(T)|_m^2 + (1+\varepsilon^{-1})\left|\mu_1^{-1}\right|^2 |h|_m^2\,,$$

en prenant $\varepsilon = \dfrac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1}$ on obtient l'inégalité (b). Si $(\mathscr{B}_2)$ est vérifiée, de (a) on a

$$|g(T)|_m^2 \leq (1+\varepsilon)\left|\mu_2^{-1}\mu_1\right|^2 |g(0)|_m^2 + \left(1+\varepsilon^{-1}\right)\left|\mu_2^{-1}\right|^2 |h|_m^2 ,$$

en prenant $\varepsilon = \dfrac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}$ on obtient l'inégalité (c). □

Lemme 2.3.2 [14, 11] **[Lemme de Gronwall généralisé].**

$(VG1)$ *Soient $w(t_1,\, t_2)$ et $g(t_1,\, t_2)$ des fonctions non négatives et intégrables sur D, et telle que la fonction $g(t_1,\, t_2)$ soit non décroissante par rapport aux variables t_1 et t_2. Alors de l'inégalité*

$$w(t_1,\, t_2) \leq k\left\{\int_0^{t_1} w(s_1,\, t_2)\, ds_1 + \int_0^{t_2} w(t_1,\, s_2)\, ds_2\right\} + g\left(t_1,\, t_2\right),$$

découle l'inégalité

$$w(t_1,\, t_2) \leq \exp\left(2k(t_1+t_2)\right) g(t_1,\, t_2).$$

$(VG2)$ *Soient $w(t_1,\, t_2)$ et $g(t_1,\, t_2)$ des fonctions non négatives et intégrables sur D, et telle que la fonction $g(t_1,\, t_2)$ soit non croissante par rapport aux variables t_1 et t_2. Alors de l'inégalité*

$$w(t_1,\, t_2) \leq k\left\{\int_{t_1}^{T_1} w(s_1,\, t_2)\, ds_1 + \int_{t_2}^{T_2} w(t_1,\, s_2)\, ds_2\right\} + g\left(t_1,\, t_2\right),$$

découle l'inégalité

$$w(t_1,\, t_2) \leq \exp\left(2k(T_1+T_2-t_1-t_2)\right) g(t_1,\, t_2).$$

Démonstration du théorème 2.3.1. Multiplions scalairement dans H l'équation (1) par

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} + \lambda A(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right),$$

on obtient l'identité

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + \left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2 + 2\lambda\left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + \lambda\left|Au\right|^2 + \lambda^2\left|A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial t_2}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2 + 2\lambda\left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \lambda\left|Au\right|^2 + \lambda^2\left|A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\right\} =$$

$$\begin{aligned}
&2Re\left(\mathcal{L}_\lambda u,\, 2Mu\right)\\
&+4\lambda Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\, A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)+2Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_1}u,\, A^{\frac{1}{2}}u\right)\\
&+2\lambda Re\left(A'_{t_1}u,\, Au\right)+2\lambda^2 Re\left(A'_{t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\, A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\\
&+4\lambda Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\, A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)+2Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_2}u,\, A^{\frac{1}{2}}u\right)\\
&+2\lambda Re\left(A'_{t_2}u,\, Au\right)+2\lambda^2 Re\left(A'_{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\, A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Posons

$$F_2(t)=\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2+2\lambda\left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\lambda\left|Au\right|^2+\lambda^2\left|A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right\},$$

$$F_1(t)=\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2+2\lambda\left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\lambda\left|Au\right|^2+\lambda^2\left|A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\right\},$$

$$\begin{aligned}
G(t)=\;&2Re\left(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu\right)\\
&+4\lambda Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\, A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)+2Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_1}u,\, A^{\frac{1}{2}}u\right)\\
&+2\lambda Re\left(A'_{t_1}u,\, Au\right)+2\lambda^2 Re\left(A'_{t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\, A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\\
&+4\lambda Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\, A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)+2Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_2}u,\, A^{\frac{1}{2}}u\right)\\
&+2\lambda Re\left(A'_{t_2}u,\, Au\right)+2\lambda^2 Re\left(A'_{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\, A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right).
\end{aligned}$$

L'identité (20) devient

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(F(t_2)\right)+\frac{\partial}{\partial t_2}\left(F(t_1)\right)=G(t). \tag{21}$$

Intégrons l'identité (21) dans le rectangle $D_\tau=\,]0,\,\tau_1[\,\times\,]0,\,\tau_2[\,\subset D$, on obtient

$$\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2=\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}G(t)dt+\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\,0)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(0,\,t_2)\,dt_2. \tag{22}$$

En utilisant les estimations (6) et (7) du lemme 2.2.1 et quelques inégalités élémentaires, on obtient

$$\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\leq$$

$$\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt+C\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(F_1(t)+F_2(t)\right)dt+\int_0^{\tau_1}F_1(t_1,\,0)\,dt_1+\int_0^{\tau_2}F_2(0,\,t_2)\,dt_2. \tag{23}$$

En faisant des calculs similaires dans les rectangles $]\tau_1,\, T_1[\,\times\,]\tau_2,\, T_2[$, $]0,\, \tau_1[\,\times\,]\tau_2,\, T_2[$ et $]\tau_1,\, T_1[\,\times\,]0, \tau_2[$ respectivement, on obtient les trois inégalités suivantes :

$$-\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \leq$$

$$\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} (F_1(t) + F_2(t))\, dt - \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2, \quad (24)$$

$$\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 - \int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 \leq$$

$$\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1} (F_1(t) + F_2(t))\, dt + \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1, \quad (25)$$

$$\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 - \int_{0}^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \leq$$

$$\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + C\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} (F_1(t) + F_2(t))\, dt + \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 - \int_{0}^{\tau_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2. \quad (26)$$

Notons

$$\beta_1 = \exp(CT_1), \quad \beta_2 = \exp(CT_2), \quad \theta_1 = \exp\left(C(T_1 + T_2)\right), \quad \theta_2 = \exp\left(2C(T_1 + T_2)\right),$$

$$\delta_1 = \theta_2\beta_2\left|\mu_2\mu_1^{-1}\right|^2, \quad \delta_2 = \theta_2\beta_1\left|\mu_2\mu_1^{-1}\right|^2, \quad \alpha = \beta_1\delta_1 = \beta_2\delta_2, \quad \theta = \exp\left(3C(T_1 + T_2)\right).$$

On suppose ici que la condition $(\mathscr{B}_1)$ est réalisée.

Revenons maintenant à l'inégalité (23).

Si on pose

$$G(\tau_1,\, \tau_2) = \int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_{0}^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2,$$

et

$$H(\tau_1,\, \tau_2) = \int_{0}^{\tau_2}\int_{0}^{\tau_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + \int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 + \int_{0}^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2,$$

alors de l'inégalité (23) on tire

$$G(\tau_1,\, \tau_2) = \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \leq$$

$$C\left\{ \int\limits_0^{\tau_1} G(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_0^{\tau_2} G(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \right\} + H(\tau_1,\, \tau_2). \tag{27}$$

On remarque que l'inégalité (27) vérifie les conditions (VG2) du lemme 2.3.2 . Appliquons ce lemme à l'inégalité (27), on obtient

$$\int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \leq$$

$$\theta_2 \left\{ \int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_0^{\tau_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 + \int\limits_0^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 \right\}. \tag{28}$$

Revenons maintenant à l'inégalité (25), on peut écrire

$$\int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 + \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_{\tau_2}^{T_2} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + C\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_{\tau_2}^{T_2} (F_1(t) + F_2(t))\, dt + \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2. \tag{29}$$

Fixons la variable τ_2 et considérons la fonction

$$Y(\tau_1,\, \tau_2) = \int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 + \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1$$

comme une fonction d'une seule variable τ_1.

En appliquant à l'inégalité (29) le lemme de Gronwall (classique) et certaines estimations élémentaires, on obtient

$$\int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 - \beta_1 \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 \leq$$

$$\beta_1 \left\{ \int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{\tau_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + C\int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{\tau_1} F_1(t)dt + \int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 \right\} - \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1. \tag{30}$$

De manière similaire on déduit de l'inégalité (26), l'inégalité

$$\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 - \beta_2 \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2$$

$$\leq \beta_2 \left\{ \int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + C\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt + \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 \right\} - \int_0^{\tau_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2. \quad (31)$$

Multiplions (28) par $\frac{1}{4}(1+\alpha)^2$, (30) par $\frac{1}{2}\delta_1(1+\alpha)$, (31) par $\frac{1}{2}\delta_2(1+\alpha)$ et (24) par $\delta_1\delta_2$, puis sommons les quatres inégalités obtenues, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}(1-\alpha)(1+\alpha)\left\{\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2\right\}\\
&+\delta_1\left(\tfrac{1}{2}(1+\alpha)-\delta_2\right)\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 + \delta_2\left(\tfrac{1}{2}(1+\alpha)-\delta_1\right)\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 \leq\\
\leq &\left\{\tfrac{1}{4}\theta_2(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + \tfrac{1}{2}\delta_1\beta_1(1+\alpha)\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt\right\}\\
+&\left\{\tfrac{1}{2}\delta_2\beta_2(1+\alpha)\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + \delta_1\delta_2\int_{\tau_1}^{T_1}\int_{\tau_2}^{T_2} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt\right\}\\
+&\left\{\tfrac{1}{2}\theta_2(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 - \tfrac{1}{2}\delta_1(1+\alpha)\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1\right\}\\
+&\left\{\tfrac{1}{2}\theta_1(1+\alpha)^2\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 - \alpha^2\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1\right\}\\
+&\left\{\tfrac{1}{2}\theta_2(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \tfrac{1}{2}\delta_2(1+\alpha)\int_0^{\tau_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2\right\}\\
+&\left\{\tfrac{1}{2}\theta_1(1+\alpha)^2\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \alpha^2\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2\right\}\\
+&\left\{\tfrac{1}{2}\delta_1\beta_1(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_1}\int_{\tau_2}^{T_2} F_1(t)dt + \tfrac{1}{2}\delta_2\beta_2(1+\alpha)^2\int_{\tau_1}^{T_1}\int_0^{\tau_2} F_2(t)dt\right\}\\
+&\left\{\delta_1\delta_2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt + \delta_1\delta_2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t)dt\right\}.
\end{aligned}\quad (32)$$

On commence par minorer le membre gauche. Remarquons que

$$\beta_1 \geq 1, \quad \beta_2 \geq 1,$$

$$\left(\frac{1}{2}(1+\alpha)-\delta_2\right)\delta_1 \geq \frac{1}{2}(1-\alpha)\delta_1, \quad \left(\frac{1}{2}(1+\alpha)-\delta_1\right)\delta_2 \geq \frac{1}{2}(1-\alpha)\delta_2,$$

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\delta_1\beta_1\beta_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha\beta_2 \geq \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha,$$
$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\delta_2\beta_1\beta_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha\beta_1 \geq \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha.$$

Multiplons l'inégalité (32) par $\beta_1\beta_2$, et en tenant compte de la remarque précédente, on obtient

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\} \leq$$
$$\frac{1}{2}(1-\alpha)(1-\alpha)\beta_1\beta_2\left\{\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}$$
$$+\beta_2\left(\frac{1}{2}(1+\alpha)-\delta_2\right)\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2 + \beta_1\left(\frac{1}{2}(1+\alpha)-\delta_2\right)\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1. \tag{33}$$

Le membre droit de l'inégalité (32) est majoré par

$$\begin{aligned}
&\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right| dt\\
&+\left\{\tfrac{1}{4}\theta(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,0)\,dt_1 - \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\alpha\beta_2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,T_2)\,dt_1\right\}\\
&+\left\{\tfrac{1}{2}\theta(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_2} F_2(0,\,t_2)\,dt_2 - \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\alpha\beta_1\int_0^{\tau_2} F_2(T_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\\
&+\left\{\tfrac{1}{2}\theta_1\alpha(1+\alpha)^2\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\,0)\,dt_1 - \alpha^2\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\,T_2)\,dt_1\right\}\\
&+\left\{\tfrac{1}{2}\theta_1(1+\alpha)^2\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\,t_2)\,dt_2 - \alpha^2\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\\
&+C\left\{\tfrac{1}{2}\theta_1\alpha(1+\alpha)^2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1} F_1(t)dt + \tfrac{1}{2}\theta_1\alpha(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt\right\}\\
&+\left\{\alpha^2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt + \alpha^2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t)dt\right\}.
\end{aligned}\tag{34}$$

Majorons séparément les intégrales se trouvant dans l'expression (34). En utilisant le lemme 2.3.1 et la condition ($\mathscr{A}_2$), on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\theta(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,0)\,dt_1 - \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\alpha\beta_2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,T_2)\,dt_1\\
&\leq\ \tfrac{1}{2}\theta_1^4\tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\int_0^{\tau_1} N(\psi)dt_1,
\end{aligned}\tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\theta(1+\alpha)^2 \int\limits_0^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\alpha\beta_1 \int\limits_0^{\tau_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2 \\
&\leq\ \tfrac{1}{2}\theta_1^4 \tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)} \left|\mu_1^{-1}\right|^2 \int\limits_0^{\tau_2} N(\varphi) dt_2,
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\theta_1\alpha(1+\alpha)^2 \int\limits_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 - \alpha^2 \int\limits_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1 \\
&\leq\ \tfrac{1}{2}\theta_1^4 \tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)} \left|\mu_1^{-1}\right|^2 \int\limits_{\tau_1}^{T_1} N(\psi) dt_1,
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\theta_1(1+\alpha)^2 \int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \alpha^2 \int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2 \\
&\leq\ \tfrac{1}{2}\theta_1^4 \tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)} \left|\mu_1^{-1}\right|^2 \int\limits_{\tau_2}^{T_2} N(\varphi) dt_2,
\end{aligned} \tag{38}$$

où

$$N(\varphi) = |\varphi'|^2 + \left|A(0,\, t_2)^{\frac{1}{2}}\varphi\right|^2 + 2\lambda \left|A(0,\, t_2)^{\frac{1}{2}}\varphi'\right|^2 + \lambda \left|A(0,\, t_2)\varphi\right|^2 + \lambda^2 \left|A(0,\, t_2)^{\frac{1}{2}}\varphi\right|^2,$$

$$N(\psi) = |\psi'|^2 + \left|A(t_1,\, 0)^{\frac{1}{2}}\psi\right|^2 + 2\lambda \left|A(t_1,\, 0)^{\frac{1}{2}}\psi'\right|^2 + \lambda \left|A(t_1,\, 0)\psi\right|^2 + \lambda^2 \left|A(t_1,\, 0)^{\frac{1}{2}}\psi\right|^2.$$

En combinant les inégalités (35), (36), (37), (38) et (33), on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(1-\alpha)\alpha \left\{ \int\limits_0^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_0^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \right\} \leq \\
&\theta(1+\alpha)^2 \int\limits_0^{T_2}\int\limits_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt \\
&+2\theta_1^4 \tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)} \left|\mu_1^{-1}\right|^2 \left\{ \int\limits_0^{T_1} N(\psi) dt_1 + \int\limits_0^{T_2} N(\varphi) dt_2 \right\} \\
&+\tfrac{1}{2}C(1+\alpha)\alpha\theta_1 \left\{ \int\limits_0^{T_2}\int\limits_{\tau_1}^{T_1} F_2(t) dt + \int\limits_{\tau_2}^{T_2}\int\limits_0^{T_1} F_1(t) dt \right\}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Pour qu'on se place dans les conditions du lemme 2.3.2, on considère premièrement le cas $\left(0 < \alpha < \frac{1}{3}\right)$. Lorsque $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, on a alors

$$\frac{1}{2}(1+\alpha) \leq 2(1-\alpha) \text{ et } \alpha \leq (1-\alpha),$$

et l'inégalité (39) devient

$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\leq\\
&2\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt\\
&+4\theta_1^4\tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\left\{\int_0^{T_1} N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2} N(\varphi)dt_2\right\}\\
&+C^*(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt+\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{T_1} F_1(t)dt\right\},
\end{aligned}
\tag{40}
$$

où $C^*=4C\theta_1$.

Si on pose

$$
G(\tau_1,\,\tau_2)=(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\},
$$

$$
\begin{aligned}
H(\tau_1,\,\tau_2) &= 2\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt\\
&\quad+4\theta_1^4\frac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\left\{\int_0^{T_1} N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2} N(\varphi)dt_2\right\},
\end{aligned}
$$

alors de l'négalité (40) on tire

$$
\begin{aligned}
G(\tau_1,\,\tau_2)&=(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\\
&\leq C^*\left\{\int_{\tau_1}^{T_1} G(t_1,\,\tau_2)dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2} G(\tau_1,\,t_2)dt_2\right\}+H(\tau_1,\,\tau_2).
\end{aligned}
\tag{41}
$$

On remarque que l'inégalité (41) vérifie les conditions (VG2) du lemme 2.3.2 . En vertu de ce lemme, on obtient

$$
(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}
$$

$$
\leq\gamma\left\{2\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt\right\}
$$

$$+\,4\theta_1^4\frac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\left\{\int_0^{T_1}N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}N(\varphi)dt_2\right\},\tag{42}$$

où $\gamma=\exp\left(2C^*(T_1+T_2)\right)$. En appliquant à l'inégalité (42) quelques estimations élémentaires, on obtient

$$(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1}F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\leq$$

$$\begin{array}{l}2\gamma^2(1+\alpha)^2\left\{(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1})\left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2+\varepsilon_2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}F_2(t)dt+\varepsilon_1\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}F_1(t)dt\right\}\\ +\frac{2\left|\mu_1^{-1}\right|^2}{(1-\alpha)}\left\{\int_0^{T_1}N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}N(\varphi)dt_2\right\}.\end{array}\tag{43}$$

Prenons $\varepsilon_i=\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{4\gamma^2(1+\alpha)^2T_{3-i}}$, $(i=1,2)$, puis intégrant l'inégalité (43) par rapport à τ_i de 0 à T_i $(i=1,2)$, on obtient

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1}F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}$$

$$\leq\frac{\gamma^2(1+\alpha)^2T_1T_2}{(1-\alpha)}\left\{\frac{8\gamma^2}{\alpha}(T_1+T_2)\left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2+4\left|\mu_1^{-1}\right|^2\left(\int_0^{T_1}N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}N(\varphi)dt_2\right)\right\}.\tag{44}$$

En utilisant quelques estimations élémentaires sur (44), on obtient

$$(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1}F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}$$

$$\leq\frac{16\gamma^4(1+\alpha)^4(T_1+T_2)^2}{(1-\alpha)\alpha}(1+\left|\mu_1^{-1}\right|^2)\left\{\left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2+\int_0^{T_1}N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}N(\varphi)dt_2\right\}.\tag{45}$$

De l'inégalité (45), vient

$$\sigma_1(\mu)\left\{\int_0^{T_1}F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2}F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}$$

$$\leq S_1\left\{\left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2+\int_0^{T_1}N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2}N(\varphi)dt_2\right\},\tag{46}$$

où $S_1=16\exp\left(32C\exp\left(C(T_1+T_2)\right)(T_1+T_2)\right)$.

En vertu de (4) et (5), on obtient les inégalités suivantes :

$$\int_0^{T_1} N(\psi)dt_1 + \int_0^{T_2} N(\varphi)dt_2 \le \max(1, c_2^2)\left\{\|l_{1\mu}u\|_1^2 + \|l_{2\mu}u\|_1^2\right\}, \tag{47}$$

$$\min(1,\, c_1^2)\left(\|u(.,\, \tau_2)\|_1^2 + \|u(\tau_1,\, .)\|_1^2\right) \le \int_0^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2, \tag{48}$$

$$\min(1,\, c_1^2)\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_1^2 dt\right\} dt$$

$$\le \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 dt\right\} dt. \tag{49}$$

Pour majorer le terme

$$\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2\right\} dt,$$

on multiplie (1) par $\sqrt{\lambda}$, et en faisant des estimations par rapport à la norme de H, on obtient

$$\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2\right\} dt$$

$$\le 2\lambda \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{|Au|^2\, dt + 2\lambda|\mathcal{L}_\lambda u|^2\right\} dt. \tag{50}$$

On majore le premier terme du second membre de l'inégalité (50) grâce au second membre de l'inégalité (46). En combinant (47), (48), (49) et (50), on obtient

$$\frac{\sigma_1(\mu)}{(1+\lambda)}\left(\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_1^2\right\} dt + \|u(.,\, \tau_2)\|_1^2 + \|u(\tau_1,\, .)\|_1^2\right)$$

$$\le S_2\left\{\|\mathcal{L}_\lambda u\|^2 + \|l_{1\mu}u\|_1^2 + \|l_{2\mu}u\|_1^2\right\}, \tag{51}$$

où $S_2 = 32\exp\left(32C\exp\left(C(T_1+T_2)\right)(T_1+T_2)\right)\dfrac{\max(1,\, c_2^2)}{\min(1,\, c_1^2)}$.

Le membre droit de (51) ne dépend pas de τ. Passons au *sup* par rapport à $\tau \in D$, on obtient l'estimation a priori (19).

Considérons maintenant le cas $\left(\frac{1}{3} < \alpha < 1\right)$. Puisque l'inégalité (19) est vraie pour les μ telle que la fonction $\alpha(\mu) \leq \frac{1}{3}$. En faisant le changement de variable suivant :

$$\mu \longrightarrow \eta(\mu) = \frac{(1 - \alpha(\mu))}{2}.$$

Avec ce changement on se ramène au cas $\left(0 < \eta(\mu) \leq \frac{1}{3}\right)$. Ce qui entraîne $\forall \alpha : 0 < \alpha < 1$,

$$|||u|||_1^2 \leq S\, |||L_{\lambda,\,\mu}u|||^2\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\,\mu}), \tag{52}$$

où $S = 128 \exp\left(32C \exp\left(C(T_1 + T_2)\right)(T_1 + T_2)\right).$

Le cas où la condition $(\mathscr{B}_2)$ est réalisée se traite par la même méthodologie. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.3.1. $\square$

2.4 Corollaires

Passons maintenant aux corollaires qui découlent du théorème 2.3.1.

Fermeture de l'opérateur $L_{\lambda,\,\mu}$.

Proposition 2.4.1 *L'opérateur $L_{\lambda,\,\mu}$ admet une fermeture de domaine de définition $\mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = \overline{\mathcal{D}(L_{\lambda,\,\mu})}$.*

Preuve. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{D}(L_{\lambda,\,\mu})$ telle que

$$u_n \longrightarrow 0 \text{ dans } E^1_{\lambda,\,\mu} \text{ et } L_{\lambda,\,\mu}u_n \longrightarrow F \text{ dans } E, \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Montrons que $F = (v,\, v_1,\, v_2) = (0,\, 0,\, 0)$. Puisque les opérateurs $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont continus, on a alors

$$l_{1\mu}u_n \longrightarrow 0 \text{ et } l_{2\mu}u_n \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

ce qui entraîne que $v_1 = v_2 = 0$.

Il reste à démontrer que $v = 0$. Soit z un élément de $C_0^\infty(D; W^1)$, on a

$$\langle v,\, z\rangle_{\mathscr{D}'} = \int_D (v,\, z)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_D (v_n,\, z)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_D (u_n,\, \mathcal{L}_\lambda z)dt = 0.$$

Donc $\langle v,\, z\rangle_{D'} = 0$ pour tout $z \in C_0^\infty(D; W^1)$, qui est dense dans $L_2(D; H)$, ce qui entraîne que $v = 0$. D'où $L_{\lambda,\,\mu}$ est fermable.

Soit $\overline{L_{\lambda,\mu}}$ la fermeture de l'opérateur $L_{\lambda,\mu}$, alors toute solution de l'équation

$$\overline{L_{\lambda,\mu}}u = F,$$

est appelée solution forte généralisée du problème (1)-(2).

Comme les fonctions $u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\mu}})$ sont des limites des fonctions $u_n \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$, alors on peut prolonger l'inégalité (52) en passant à la limite, soit

$$|||u|||_1^2 \leq S \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda,\mu}}u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\mu}}u). \tag{53}$$

Corollaire 2.4.1 *La solution forte généralisée du problème (1)-(2) quand elle existe est unique et dépend continûment du second membre $F \in E$.*

Preuve. L'unicité est dûe à l'inégalité (53), pour la dépendance continue par rapport à $F \in E$, on suppose qu'il existe une solution forte $u = (\overline{L_{\lambda,\mu}})^{-1}F$ de $\overline{L_{\lambda,\mu}} = F$, et si de plus $v = (\overline{L_{\lambda,\mu}})^{-1}G$ est une autre solution du même problème avec second membre G. On a

$$|||u-v|||_1^2 \leq S \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda,\mu}}(u-v)\right|\right|\right|^2 = S\,|||F-G|||^2.$$

Ce qui signifie qu'une faible variation du second membre F n'entraîne qu'une faible variation de la solution.

Corollaire 2.4.2 *L'inégalité (53) assure l'existence de l'inverse de l'opérateur $\overline{L_{\lambda,\mu}}$ sur son image $R(\overline{L_{\lambda,\mu}})$, et cet inverse est borné.*

Corollaire 2.4.3 *L'ensemble $R(\overline{L_{\lambda,\mu}})$ est fermé dans E et $R(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \overline{R(L_{\lambda,\mu})}$.*

Preuve. D'après la définition de $R(\overline{L_{\lambda,\mu}})$, on a $R(\overline{L_{\lambda,\mu}}) \subset \overline{R(L_{\lambda,\mu})}$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $F \in \overline{R(L_{\lambda,\mu})}$, alors il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$ telle que $|||L_{\lambda,\mu}\, u_n - F||| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow 0$. On a $|||u_p - u_q|||_1^2 \leq S\,|||L_{\lambda,\mu}\, u_p - L_{\lambda,\mu}u_q|||^2 \longrightarrow 0$, quand $p,\, q \longrightarrow 0$, donc (u_n) converge vers un élément $u \in E^1_{\lambda,\mu}$ et $\overline{L_{\lambda,\mu}}u = F$.

On déduit du corollaire 2.4.3 que pour démontrer l'existence de la solution forte généralisée du problème (1)-(2), il suffit de démontrer la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})$ dans E.

2.5 Résolubilité du problème

Commençons par introduire la structure Hilbertienne suivante :

$H^{1,1}(D;H)$:= l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathscr{C}^{\infty}(\overline{D};H)$ par rapport à la norme

$$\| u \|_{1,1}^2 = \int_D \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + |u|^2 \right\} dt.$$

$H^1([0,\,T_2];H)$:= l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathscr{C}^{\infty}([0,\,T_2];H)$ par rapport à la norme

$$\|\varphi\|_1^2 = \|\varphi\|^2 + \|\varphi'\|^2,$$

où $\|.\|$ est la norme dans $L_2(D;H)$.

De manière analogue on construit l'espace $H^1([0,\,T_1];H)$.

Notons par E_0 l'espace de Hilbert

$$L_2(D;H) \times \widetilde{H^1}([0,\,T_2];H) \times \widetilde{H^1}([0,\,T_1];H)$$

composé des éléments $F = (f,\,\varphi,\,\psi)$ telle que

$$|||F|||^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_1^2 \text{ est finie.}$$

$\widetilde{H^1}([0,\,T_2];H) \times \widetilde{H^1}([0,\,T_1];H)$ est le sous-espace fermé de

$$H^1([0,\,T_2];H) \times H^1([0,\,T_1];H)$$

composé des éléments $(\varphi,\,\psi)$ tels que $\overline{\mu_2}\psi(0) - \overline{\mu_1}\psi(T_1) = \overline{\mu_2}\varphi(0) - \overline{\mu_1}\varphi(T_2)$.

$H_0^{1,1}(D;W^1)$:= le sous-espace fermé de $H^{1,1}(D;H)$ défini par

$$H_0^{1,1}\left(D;W^1\right) = \left\{ u \in H^{1,1}\left(D;W^1\right) \,:\, \mu_1 u\,|_{t_1=0} - \mu_2 u\,|_{t_1=T_1} = \mu_1 u\,|_{t_2=0} - \mu_2\, u\,|_{t_2=T_2} \right\},$$

$\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$:= le sous-espace fermé de $H^{1,1}(D;H)$ défini par

$$\left\{ u \in H^{1,1}(D;H) : \overline{\mu_2}\,\varphi(0) - \overline{\mu_1}\,\varphi(T_2) = \overline{\mu_2}\,\psi(0) - \overline{\mu_1}\,\psi(T_1) \right\},$$

où $\overline{\mu_i}$ est le conjugué de μ_i.

Opérateurs de régularisation (Approximation de Yosida) (Brezis [17], proposition VII.2, p. 102).

On définit $A_\varepsilon = I + \varepsilon A$. L'opérateur A_ε possède les propriétés suivantes :

$\mathscr{P}_\varepsilon 1$: A_ε est auto-adjoint;

$\mathscr{P}_\varepsilon 2$: A_ε est uniformément positif : $(A_\varepsilon u, u) \geq (1 + \varepsilon c_0)\, |u|^2$, $\forall u \in \mathcal{D}(A)$, $\quad \forall t \in \overline{D}$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 3$: A_ε admet un inverse borné et on a $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq \dfrac{1}{(1+\varepsilon c_0)} \leq 1$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 4$: $\|\varepsilon\, A A_\varepsilon^{-1} v\| = \|(I - A_\varepsilon^{-1})\, v\| \longrightarrow 0, \ \ \varepsilon \longrightarrow 0, \quad \forall v \in H$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 5$: A_ε^{-1} est auto-adjoint et commute ave A $(AA_\varepsilon^{-1} = A_\varepsilon^{-1} A)$.

Etablissons maintenant la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L_{\lambda,\,\mu})$ dans E. Dans ce but introduisons la condition suivante :

$(\mathscr{H}_2)$ La fonction $D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1,\, H)$ admet des dérivées mixtes

$$A''_{t_1 t_2}(t) = \frac{\partial^2(A(t))}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad A''_{t_2 t_1}(t) = \frac{\partial^2(A(t))}{\partial t_2 \partial t_1}$$

par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1,\, H)$, et telles que

$$A''_{t_1 t_2}(t) A^{-1}(t), \quad A''_{t_2 t_1}(t) A^{-1}(t) \in L_2(D; \mathscr{L}(H)).$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.5.1 *Sous les conditions du théorème 2.3.1 et la condition* $(\mathscr{H}_2)$*, l'ensemble* $\mathcal{R}(L_{\lambda,\,\mu})$ *est dense dans* E.

Démonstration. Nous décomposons la démonstration en deux étapes :

1ère étape Nous commençons par le cas $\lambda = 0$.

Soit alors $\mathcal{L}_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + A$ l'opérateur correspondant à la valeur $\lambda = 0$.

Soit $V = (v,\, v_1,\, v_2)$ un élément orthogonal à $R(L_{0,\,\mu})$, alors pour tout $u \in H^{1,1}(D; W^1)$ on a

$$\langle L_{0,\,\mu}\, u,\, V \rangle_E = \langle \mathcal{L}_0\, u,\, v \rangle + \langle l_{1\mu} u,\, v_1 \rangle + \langle l_{2\mu} u,\, v_2 \rangle = 0. \qquad (54)_a$$

Démontrons que $V = (0,\, 0,\, 0)$.

Comme $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont indépendants et les images des opérateurs $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont partout denses dans les espaces correspondants, alors pour démontrer que $V = (0,\, 0,\, 0)$, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.5.1 *Si pour tout $v \in L_2(D;H)$, on a*

$$\langle \mathcal{L}_0 u,\, v\rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D;W^1) = \left\{u \in H^{1,1}(D;W^1) : l_{1\mu}u = 0,\ l_{2\mu}u = 0\right\}.$$

Alors $v = 0$.

Preuve. On a

$$\langle \mathcal{L}_0 u,\, v\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + Au,\, v \right\rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D;W^1). \tag{54$_b$}$$

A partir de l'équation $(54)_b$, on a

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},\, v \right\rangle = -\langle Au,\, v\rangle. \tag{55}$$

Posons

$$w = A_\varepsilon^{-1} v \text{ et } h = A_\varepsilon u, \tag{56}$$

$$B_{1\varepsilon}^* = \varepsilon A'_{t_2} A_\varepsilon^{-1}, \quad B_{2\varepsilon}^* = \varepsilon A'_{t_1} A_\varepsilon^{-1}, \quad B_{0\varepsilon}^* = \varepsilon A''_{t_2 t_1} A_\varepsilon^{-1}, \quad C_{0\varepsilon}^* = \varepsilon A''_{t_1 t_2} A_\varepsilon^{-1}, \tag{57}$$

"$*$" désigne le symbole de l'adjoint. Ici h peut être considérée comme une fonction arbitraire de $H_0^{1,1}(D;H)$.

D'après les relations :

$$(i) \quad \frac{\partial^2 (A_\varepsilon u)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\varepsilon A'_{t_2} u + A_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t_2}\right) = \varepsilon A''_{t_1 t_2} u + \varepsilon A'_{t_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} + \varepsilon A'_{t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} + A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},$$

$$(ii) \quad \frac{\partial (\varepsilon A'_{t_2} u)}{\partial t_1} = \varepsilon A''_{t_1 t_2} u + \varepsilon A'_2 \frac{\partial u}{\partial t_1},$$

$$(iii) \quad \frac{\partial (\varepsilon A'_{t_1} u)}{\partial t_2} = \varepsilon A''_{t_2 t_1} u + \varepsilon A'_{t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2},$$

on a

$$A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 (A_\varepsilon u)}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial (\varepsilon A'_{t_2} u)}{\partial t_1} - \frac{\partial (\varepsilon A'_{t_1} u)}{\partial t_2} + \varepsilon A''_{t_2 t_1} u. \tag{58}$$

En remplaçant u par $A_\varepsilon^{-1} h$ dans (58), on obtient

$$A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial (B_{1\varepsilon}^* h)}{\partial t_1} - \frac{\partial (B_{2\varepsilon}^* h)}{\partial t_2} + B_{0\varepsilon}^* h. \tag{59}$$

L'équation (55) s'écrit alors

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},\, v \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},\, A_\varepsilon A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle = \left\langle A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},\, A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle$$

$$= \left\langle A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},\, w \right\rangle = \left\langle A_\varepsilon u,\, -AA_\varepsilon^{-1} v \right\rangle = \left\langle h,\, -AA_\varepsilon^{-1} v \right\rangle. \tag{60}$$

En remplaçant $A_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}$ par l'expression (59) dans (60), on obtient

$$\left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* h\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* h\right) + B_{0\varepsilon}^* h,\, w \right\rangle = \left\langle h,\, -AA_\varepsilon^{-1} v \right\rangle, \tag{61}$$

d'où on déduit

$$\left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* h\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* h\right),\, w \right\rangle = \left\langle h,\, -\left(AA_\varepsilon^{-1} + B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1}\right) v \right\rangle. \tag{62}$$

Puisque l'équation (62) est vraie pour toute fonction $h \in H_0^{1,1}(D;H)$, elle reste vraie pour $h \in C_0^\infty(D;H)$. Ce qui donne en language distributionnel

$$\begin{gathered} \left\langle h,\, \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial t_2} \right\rangle_{\mathscr{D}'} \\ = \left\langle h,\, -\left(AA_\varepsilon^{-1} + B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1}\right) v \right\rangle, \quad \forall h \in C_0^\infty(D;H). \end{gathered} \tag{63}$$

Considérons les opérateurs $\widetilde{\mathcal{L}}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}'$ définis par

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(\widetilde{\mathcal{L}}\right) = \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H) \subset L_2(D;H) \\ \widetilde{\mathcal{L}} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} \dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \end{cases} \tag{64}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(\widetilde{\mathcal{L}}'\right) = H_0^{1,1}(D;H) \subset L_2(D;H) \\ \widetilde{\mathcal{L}}' u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \dfrac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* u\right) - \dfrac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* u\right). \end{cases} \tag{65}$$

Montrons que $\widetilde{\mathcal{L}}'$ est l'adjoint de $\widetilde{\mathcal{L}}$.

En effet, d'après les relations :

- $$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2},\, u\right) = \left(v,\, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial v}{\partial t_2},\, u\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1}\right),$$
- $$-\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(B_{1\varepsilon}^* v),\, u\right) = \left(v,\, B_{1\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right),$$
- $$-\left(\frac{\partial}{\partial t_2}(B_{2\varepsilon}^* v),\, u\right) = \left(v,\, B_{2\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t_2}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* v,\, u\right),$$

pour tout $v \in H_0^{1,1}(D;H)$ et $u \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$, on a

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}' v,\, u \right\rangle = \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* v\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* v\right),\, u\right) dt =$$

$$\left\langle v,\, \widetilde{\mathcal{L}}u\right\rangle + \int_0^{T_2} \left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right) \Big|_{t_1=0}^{t_1=T_1} dt_2 - \int_0^{T_1} \left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}u\right) \Big|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_1. \quad (66)$$

D'après la définition de $H_0^{1,1}(D;H)$ et $\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$, on a

$$\mu_1 v\,|_{t_1=0}= \mu_2 v\,|_{t_1=T_1}, \quad \mu_1 v\,|_{t_2=0}= \mu_2 v\,|_{t_2=T_2}, \quad \mu_1 \frac{\partial v}{\partial t_2}\,|_{t_1=0}= \mu_2 \frac{\partial v}{\partial t_2}\,|_{t_1=T_1},$$

$$\overline{\mu_2} u\,|_{t_1=0}= \overline{\mu_1} u\,|_{t_1=T_1}, \quad \overline{\mu_2} u\,|_{t_2=0}= \overline{\mu_1}\,|_{t_2=T_2}, \quad \overline{\mu_2} \frac{\partial u}{\partial t_2}\,|_{t_2=0}= \overline{\mu_1} \frac{\partial u}{\partial t_2}\,|_{t_2=T_2}\,. \quad (67)$$

En injectant les expressions (67) dans les intégrales se trouvant dans (66), on trouve

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right)_{t_1=0}^{t_1=T_1} = 0, \quad \left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} u\right)_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0.$$

On obtient alors

$$\left(\widetilde{\mathcal{L}}' v,\, u\right) = \left(v,\, \widetilde{\mathcal{L}}u\right), \quad \forall v \in H_0^{1,1}(D;H), \quad \forall u \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H). \quad (68)$$

Revenons à l'équation (62). D'après la relation (68), l'équation (62) signifie que pour tout $\varepsilon \neq 0$, w est la solution faible du problème

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} = -(B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1} + AA_\varepsilon^{-1}v), \\ \widetilde{l_{1\mu}}w = \overline{\mu_2}w\,|_{t_1=0} - \overline{\mu_1}w\,|_{t_1=T_1}= 0, \\ \widetilde{l_{2\mu}}w = \overline{\mu_2}w\,|_{t_2=0} - \overline{\mu_1}w\,|_{t_2=T_2}= 0, \end{cases} \quad (69)$$

avec $v \in L_2(D;H)$, $\quad B_{j\varepsilon} \in \mathscr{L}(H) \quad (j = 0,1,2)$.

Considérons l'opérateur $\widetilde{L} = (\widetilde{\mathcal{L}},\, \widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}})$ agissant de $H^{1,1}(D;H)$ dans E_0.

Etudions les propriétés de cet opérateur.

Proposition 2.5.2 *L'opérateur $\widetilde{L}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ dans E_0 pour tout $\mu \in \mathscr{M}$.*

Preuve. Il faut démontrer que

$$(a) \quad \left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2 \leq K_1 \left\|u\right\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H),$$

$$(b) \quad \left\|u\right\|_{1,1}^2 \leq K_2 \left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H),$$

$$(c) \quad R(\widetilde{L}) = E_0,$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes positives indépendantes de u.

(a) D'après les estimations du lemme 2.2.1 et compte tenu du fait que

$$B_{j\varepsilon} \in \mathscr{L}(H), \quad \left\|1 - A_\varepsilon^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 2,$$

on obtient

$$\|B_{j\varepsilon}\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|B_{j\varepsilon}^*\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|\varepsilon A_{t_j}^{'} A_\varepsilon^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|A_{t_j}^{'} A^{-1}(I - A_\varepsilon^{-1})\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq$$

$$\left\|A_{t_j}^{'} A^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \left\|(I - A_\varepsilon^{-1})\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C, \quad (j = 1,\, 2).$$

Une estimation de $\left|\widetilde{\mathcal{L}}u\right|$ donne

$$\left|\widetilde{\mathcal{L}}u\right|^2 = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 \leq \left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| + \left|B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right| + \left|B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|\right\}^2$$

$$\leq \left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| + \|B_{1\varepsilon}\|_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right| + \|B_{2\varepsilon}\|_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|\right\}^2$$

$$\leq 4(1+C)\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2\right\},$$

d'où on déduit

$$\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|^2 \leq 4(1+C)\,\|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{70}$$

En vertu de la continuité des opérateurs $\widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}}$ de $H^{1,1}(D;H)$ dans les espaces $H^1([0,\, T_2]\,;H)$, $H^1([0,\, T_1]\,;H)$ respectivement et l'inégalité (70), on obtient

$$\left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2 \leq K_1\,\|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{71}$$

Par des techniques similaires à celles utilisées pour établir l'estimation (19), on démontre

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2 \leq K_3\left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2, \tag{72}$$

où $K_3 = \dfrac{64(T_1+T_2+1)^2}{\sigma_i(\mu)}\exp\left(32C\left(\exp(C(T_1+T_2))\,(T_1+T_2)\right)\right), \quad (i = 1, 2).$

D'autre part, de l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial t_1}|u|^2 + \frac{\partial}{\partial t_2}|u|^2 = 2Re\left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2},\, u\right),$$

découle l'inégalité

$$\|u\|^2 \leq K_4\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2 + \left\|\widetilde{l_{1\mu}}u\right\|^2 + \left\|\widetilde{l_{2\mu}}u\right\|^2\right\}, \tag{73}$$

où $K_4 = \dfrac{2(T_1+T_2)^2\left(1+\left|\mu_{3-i}\mu_i^{-1}\right|^2\right)^2\left(1+\left|\mu_i^{-1}\right|^2\right)}{\left(1-\left|\mu_{3-i}\mu_i^{-1}\right|^2\right)^2}$.

Sachant que

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right\|^2 \leq 2\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|^2 + 4C^2\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2\right\}, \tag{74}$$

et en combinant les inégalités (72)-(74), on otient

$$\|u\|_{1,1}^2 \leq K_2 \left\|\left|\widetilde{L}u\right|\right\|^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H), \tag{75}$$

où $K_2 = 2(2+C^2)(1+K_3)(1+K_4)$.

De la continuité de l'opérateur $\widetilde{L}$ et l'inégalité (75), on conclut que l'opérateur $\widetilde{L}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ sur le sous-espace fermé $\mathcal{R}(\widetilde{L}) = \widetilde{L}\left(H^{1,1}(D;H)\right)$. Il reste à vérifie que $R(\widetilde{L}) = E_0$.

Pour cela introduisons la famille d'opérateurs $\left\{\widetilde{L_s}\right\}_{s\in[0,\,1]}$, définie par

$$\begin{cases} \widetilde{L_s} = (\widetilde{\mathcal{L}_s},\, \widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}}), \quad s \in [0,\,1]\,, \\ \widetilde{\mathcal{L}_s}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + sBu, \quad Bu = B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \\ D(\widetilde{L_s}) = H^{1,1}(D,\,H). \end{cases} \tag{76}$$

On va procéder ici par la méthode de prolongement par rapport au paramètre s.

Par une procédure d'intégration simple, on montre que la solution de l'équation opérationnelle $\widetilde{L_0}u = F, \quad F = (f,\, v,\, w) \in E_0$ est donnée par l'expression

$$\int_0^{t_2}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau + \frac{1}{(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})}\left\{v(t_2)+w(t_1)-\overline{\mu_2}w(0)+\overline{\mu_1}w(T_1)\right\}$$

$$+\frac{\overline{\mu_1}}{(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})}\left\{\int_0^{t_2}\int_0^{T_1} f(\tau)d\tau + \int_0^{T_2}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau + \frac{\overline{\mu_1}}{(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} f(\tau)d\tau\right\}. \tag{77}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{R}(\widetilde{L_0}) = E_0$. Puisque les inégalités (71) et (75) sont vraies pour l'opérateur $\widetilde{L_0}$, on déduit que l'opérateur $\widetilde{L_0}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ sur E_0.

Pour tout $s_0,\, s \in [0,\,1]$, on peut écrire

$$\widetilde{L_s} = \widetilde{L_{s_0}} + (s-s_0)(\widetilde{L_1}-\widetilde{L_0}) \text{ avec } (\widetilde{L_1}-\widetilde{L_0}) = (B,\, \widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}}).$$

En appliquant des estimations élémentaires sur Bu, on obtient

$$\|Bu\|^2 \leq 2C^2 \|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D; H). \tag{78}$$

A partir de cette inégalité et la continuité des opérateurs $\widetilde{l_{1\mu}}$, $\widetilde{l_{2\mu}}$ de $H^{1,1}(D; H)$ dans les espaces $H^1([0, T_2]; H)$, $H^1([0, T_1]; H)$ respectivement, on obtient

$$\left|\left|\left|(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u\right|\right|\right|^2 \leq K_5 \|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D; H). \tag{79}$$

Montrons maintenant que

$$\|u\|_{1,1} \leq K_6 \left|\left|\left|\widetilde{L_s} u\right|\right|\right|, \quad \forall u \in H^{1,1}(D; H), \tag{80}$$

où K_6 est une constante positive indépendante de u.
En effet, d'après l'inégalité (75) on a

$$\forall s \in [0, 1], \quad \exists C(s) > 0 \quad \text{telle que} \quad \|u\|_{1,1}^2 \leq C(s) \left|\left|\left|\widetilde{L_s} u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D; H).$$

Posons $h(s) = \inf\limits_{u \in H^{1,1}(D;H)} \dfrac{\left|\left|\left|\widetilde{L_s} u\right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}}$, et montrons que h est continue sur $[0, 1]$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{K_5}}$, alors pour tout s_0, $s \in [0, 1]$ et tel que $|s_0 - s| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|\left|\widetilde{L_s} u\right|\right|\right| - \left|\left|\left|\widetilde{L_{s_0}} u\right|\right|\right|\right| &\leq \left|\left|\left|\widetilde{L_s} u - \widetilde{L_{s_0}} u\right|\right|\right| = |s_0 - s| \left|\left|\left|\widetilde{L_1} u - \widetilde{L_0} u\right|\right|\right| \leq \\ \delta \left|\left|\left|\widetilde{L_1} u - \widetilde{L_0} u\right|\right|\right| &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{K_5}} \sqrt{K_5} \|u\|_{1,1}^2 = \varepsilon \|u\|_{1,1}^2. \end{aligned} \tag{81}$$

A partir de l'inégalié (81), on a

$$\frac{\left|\left|\left|\widetilde{L_{s_0}} u\right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}} - \varepsilon \leq \frac{\left|\left|\left|\widetilde{L_s} u\right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}} \leq \frac{\left|\left|\left|\widetilde{L_{s_0}} u\right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}} + \varepsilon,$$

passons à l'infinimum sur $H^{1,1}(D; H)$, on obtient $|h(s) - h(s_0)| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve la continuité de h sur $[0, 1]$. Donc la fonction h admet une borne *inf*, désignons cette borne *inf* par $\dfrac{1}{K_6}$ on trouve alors l'inégalité (80).
Revenons maintenant à l'équation $\widetilde{L_s} u = F$, cette équation s'écrit sous la forme

$$\widetilde{L_s} u = \widetilde{L_{s_0}} u + (s - s_0)(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u = F. \tag{82}$$

Supposons qu'on a démontré que $\mathcal{R}(\widetilde{L_{s_0}}) = E_0$ (le cas $s_0 = 0$), on va montrer que $R(\widetilde{L_s}) = E_0$ pour certains s au voisinage de s_0.
L'équation (82) est équivalente à

$$u + (s - s_0)\left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1}(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u = \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} F. \tag{83}$$

A partir des inégalités (79) et (80), on a

$$\left\| \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} F \right\|_{1,1} \leq K_6 \left|\left|\left| F \right|\right|\right|,$$

$$\left\| \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1}(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u \right\|_{1,1} \leq K_6 \left|\left|\left|(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u\right|\right|\right| \leq K_6\sqrt{K_5}\, \|u\|_{1,1} = K_7 \|u\|_{1,1}. \tag{84}$$

Soit $s \in [0,\, 1]$ tel que $|s_0 - s| \leq \rho < \frac{1}{K_7}$, et notons par

$$\Lambda = (s - s_0)\left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1}(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}), \quad g = \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} F.$$

L'équation (83) devient

$$u + \Lambda u = g. \tag{84}$$

Calculons la norme de Λ,

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|u\|_{1,1} \leq 1} \|\Lambda u\|_{1,1} = |s - s_0| \left\| \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1}(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u \right\|_{1,1} \leq |s - s_0|\, K_7 < 1,$$

dans ce cas l'opérateur $(I + \Lambda)$ avec $\|\Lambda\| < 1$ est inversible, et la solution de l'équation (84) est donnée par la série de Neumman

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Lambda^n g, \tag{85}$$

ce qui prouve que $\mathcal{R}(\widetilde{L_s}) = E_0, \quad \forall s : |s_0 - s| \leq \rho < \dfrac{1}{K_7}$.
Comme on a démontré que $\mathcal{R}(\widetilde{L_0}) = E_0$, on aura donc $R(\widetilde{L_s}) = E_0, \quad \forall s : 0 < s \leq \rho$.
En suite on pose $s_0 = \rho$ et on procède de la même manière, on obtient $\mathcal{R}(\widetilde{L_s}) = E_0$ pout tout s tel que $0 < s \leq 2\rho$. On continue ce procédé pas à pas, on obtient $\mathcal{R}(\widetilde{L_s}) = E_0, \quad \forall s \in [0,\, 1]$.
Pour le cas $s = 1$, on trouve $\mathcal{R}(\widetilde{L_1}) = R(\widetilde{L}) = E_0$, d'où le résultat recherché. Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.5.2

Proposition 2.5.3 *L'opérateur $\widetilde{L} = \widetilde{\mathcal{L}}$ donné par l'expression (64) est fermé dans la topologie de $L_2(D; H)$.*

Preuve. Soit $(u_n) \subset \mathcal{D}(\widetilde{L}) = \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L_2(D;H), \quad \widetilde{L}u_n \longrightarrow f \text{ dans } L_2(D;H), \quad n \longrightarrow \infty.$$

Montrons que $u \in \mathcal{D}(\widetilde{L})$ et $\widetilde{L}u = f$. D'après l'inégalité (75) la suite (u_n) est une suite de Cauchy dans $H^{1,1}(D;H)$, d'où $u_n \longrightarrow v$ dans $H^{1,1}(D;H)$. Comme $\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$ est un sous-espace fermé dans $H^{1,1}(D;H)$, donc $v \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$. La convergence $u_n \longrightarrow v$ dans $H^{1,1}(D;H)$ entraîne la convergence $u_n \longrightarrow v$ dans $L_2(D;H)$, mais comme par hypothèse $u_n \longrightarrow u$ dans $L_2(D;H)$ et $\widetilde{L}$ est borné, on a alors $\widetilde{L}u = f$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.5.3. □

Etudions maintenant quelques propriétés de l'opérateur

$$\widetilde{L}' = \widetilde{\mathcal{L}}' : H_0^{1,1}(D;H) \subset L_2(D;H) \longrightarrow L_2(D;H).$$

On a

$$\widetilde{L}'u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}(B_{1\varepsilon}^* u) - \frac{\partial}{\partial t_2}(B_{2\varepsilon}^* u) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* \frac{\partial u}{\partial t_1} - B_{2\varepsilon}^* \frac{\partial u}{\partial t_2} - \left(\varepsilon A''_{t_1 t_2} A_\varepsilon^{-1} + \varepsilon A''_{t_2 t_1} A_\varepsilon^{-1} - B_{1\varepsilon}^* B_{2\varepsilon}^* - B_{2\varepsilon}^* B_{1\varepsilon}^* \right) u.$$

Une estimation en norme de $L_2(D;H)$ donne

$$\left\| \widetilde{\mathcal{L}}' u \right\|^2 \leq 64 \max \left\{ 1,\, C^4,\, \int_D \left\| A''_{t_1 t_2} A^{-1} \right\|^2_{\mathscr{L}(H)} dt,\, \int_D \left\| A''_{t_2 t_1} A^{-1} \right\|^2_{\mathscr{L}(H)} dt \right\} \|u\|^2_{1,1}, \tag{86}$$

d'où la continuité de $\widetilde{L}'$ de $H_0^{1,1}(D;H)$ dans $L_2(D;H)$.

D'après les proposition 2.5.2, 2.5.3 et l'inégalité (86) il résulte que l'opérateur $\widetilde{L}'$ est un isomorphisme de $H_0^{1,1}(D;H)$ dans $L_2(D;H)$. Cette assertion découle du théorème des opérateurs à image fermée :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L} \text{ est fermé}, \\
&\mathcal{R}(\widetilde{L}) = L_2(D;H), \\
&\mathcal{N}(\widetilde{L}') = \overline{\mathcal{R}(\widetilde{L})}^{\perp} = \{0\}, \\
&\mathcal{R}(\widetilde{L}') = \overline{\mathcal{R}(\widetilde{L}')} = \mathcal{N}(\widetilde{L})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = L_2(D;H).
\end{aligned}$$

Remarque. L'opérateur $\widetilde{L}\,'$ est fermé dans la topologie de $L_2(D;H)$.

Définition 2.5.1 On note par $\hat{\mathcal{L}}$ le prolongement faible de l'opérteur $\widetilde{\mathcal{L}}$ défini par

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}' u,\, v \right\rangle = \left\langle u,\, \hat{\mathcal{L}} v \right\rangle = \langle u,\, f \rangle, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D,H) \text{ et } \hat{\mathcal{L}} v = f \in L_2(D;H). \tag{87}$$

Proposition 2.5.4 *Le prolongement faible $\hat{\mathcal{L}}$ coincide avec le prolongement fort, i.e.,*

$$\left(\hat{\mathcal{L}}\right)' = \widetilde{\mathcal{L}}'.$$

Preuve. Il est clair que $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) \subset \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$. Montrons que

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}) \text{ et } \widetilde{\mathcal{L}}u = \hat{\mathcal{L}}u, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}).$$

D'après ce qui précède l'opérateur $\widetilde{\mathcal{L}}'$ est fermé et $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{L}}') = L_2(D; H)$, alors d'après le théorème de Banach sur les opérateurs à image fermée, l'opérateur $\left(\hat{\mathcal{L}}\right)^{-1}$ est défini sur le sous-espace fermé $\mathcal{R}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{L}}')^{\perp}$ et est continu. On a

$$(i) \quad \mathcal{N}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{L}}')^{\perp} = \{0\}, \quad (ii) \quad \mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{L}}') = \{0\}, \text{ d'où } \mathcal{R}(\hat{\mathcal{L}}) = L_2(D; H),$$

d'après (ii) $\forall f \in L_2(D, H)$, il existe une solution de l'équation $\hat{\mathcal{L}}u = f$. Fixons f et soit v la solution de l'équation $\widetilde{\mathcal{L}}u = f$. Montrons que $u = v$.
En effet, d'après les relations (68) et (87), on a

$$\begin{aligned} \left\langle z, \hat{\mathcal{L}}u \right\rangle &= \left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z, u \right\rangle = \langle z, f \rangle, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D; H), \\ \langle z, \mathcal{L}v \rangle &= \left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z, v \right\rangle = \langle z, f \rangle, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D; H). \end{aligned}$$

A partir de là on obtient $\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z, v - u \right\rangle = 0, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D; H)$, ce qui signifie que $w = v - u$ est la solution faible de l'équation homogène $\widetilde{L}u = 0$. Mais d'après l'unicité de la solution faible, on obtient $u = v$. D'où $u = v \in H_0^{1,1}(D; H)$ et $\widetilde{\mathcal{L}}u = \hat{\mathcal{L}}u = f$.
Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.5.4. □
La proposition 2.5.4 affirme que la solution du problème $(\mathscr{P})$ coïncide avec la solution forte.
D'où $w \in H^{1,1}(D; H) \cap L_2(D; W^1)$ et vérifie (69) au sens fort, i.e.,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} + B_{0\varepsilon}w + Aw = 0, \\ \overline{\mu_2}w \mid_{t_1=0} = \overline{\mu_1}w \mid_{t_1=T_1}, \\ \overline{\mu_2}w \mid_{t_2=0} = \overline{\mu_1}w \mid_{t_2=T_2} = 0. \end{cases} \tag{88}$$

Le problème (88) est équivalent à l'équation opérationnelle :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \overset{0}{H}{}^{1,1}(D; H), \\ \mathcal{L}u = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} + Aw = -B_{0\varepsilon}w = f. \end{cases} \tag{89}$$

Proposition 2.5.5 *Sous les conditions du théorème 2.3.1, on a l'estimation*

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}w\right\|^2 \leq K_8 \left\|\mathcal{L}w\right\|^2, \ \forall w \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H). \tag{90}$$

où $K_8 = K_8(\alpha_1, T_1, T_2)$.

Preuve. On procède par la même méthodologie que celle utilisée pour établir le théorème 2.3.1, on démontre l'estimation (90). □

A partir de l'inégalié (90), en tenant compte des conditions ($\mathscr{H}_2$) et ($\mathscr{A}_1$), on a la majoration

$$\|w\|^2 \leq \frac{1}{c_0}\left\|A^{\frac{1}{2}}w\right\|^2 \leq \frac{K_8}{c_0}\left\|B_{0\varepsilon}w\right\|^2. \tag{91}$$

En remplaçant w par $A_\varepsilon^{-1}v$ dans (91), il vient

$$\left\|A_\varepsilon^{-1}v\right\|^2 \leq \frac{K_8}{c_0}\left\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\right\|^2 \tag{92}$$

D'après $\mathscr{P}_\varepsilon 4$ on a $\|A_\varepsilon^{-1}v\|^2 \longrightarrow \|v\|^2$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Montrons que $\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\|^2 \longrightarrow 0$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

En effet, on a

$$B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v = \left(\varepsilon A''_{t_2t_1}A_\varepsilon^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v = \left(\varepsilon A''_{t_2t_1}A^{-1}AA_\varepsilon^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v$$

$$= \left(\varepsilon AA_\varepsilon^{-1}\right)^* \left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v = \left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v,$$

d'où

$$\left\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\right\| \leq \left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v + v\right)\right\| \leq$$

$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| + \left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* v\right\|,$$

or

$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| \leq$$

$$2\left\|A''_{t_2t_1}A^{-1}\right\|_{L_2(D,\mathscr{L}(H))}\left\|\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| \longrightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

et

$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* v\right\| \longrightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

En passant dans (92) à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient $v = 0$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.5.1. □

Donc on a établit $\overline{\mathcal{R}\ (L_{\lambda,\,\mu})} = E$ dans le cas $\lambda = 0$.

2ème étape Considérons maintenant le cas $\lambda \neq 0$.

Par la méthode de prolongement par rapport au paramètre λ, on démontre que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = \overline{\mathcal{R}(L_{\lambda,\,\mu})} = E$. En effet, écrivons l'opérateur $L_{\lambda,\,\mu} = (\,\mathcal{L}_\lambda,\, l_{1_\mu},\, l_{2_\mu})$ sous la forme

$$\begin{aligned} &L_{\lambda,\,\mu} = L_{\lambda_0,\,\mu} + (\lambda - \lambda_0)(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu}), \\ &\text{avec } \ (L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu}) = (B,\, l_{1\mu},\, l_{2\mu}), \quad B \equiv A\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}. \end{aligned} \tag{93}$$

On remarque que l'opérateur $A\dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}$ est continu de $\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$ dans $L_2(D; H)$ (ceci découle de (4) et la définition de $|||.|||_1$).
A partir de cette remarque et la continuité des opérateurs $l_{1\mu},\ l_{2\mu}$ de $\mathcal{D}(L_{\lambda,\,\mu})$ dans $H^1([0,\ T_2]\,; H)$, $H^1([0,\ T_1]\,; H)$ respectivement, on obtient

$$|||(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})u||| \leq K_9\, |||u|||_{1,1}\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu}). \tag{94}$$

L'équation $\overline{L_{\lambda,\,\mu}}u = F$ s'écrit sous la forme

$$\overline{L_{\lambda,\,\mu}}u = \overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}u + (\lambda - \lambda_0)\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u = F. \tag{95}$$

Supposons qu'on a démontré que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$ (le cas $\lambda_0 = 0$). On va démontrer que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$ pour les λ au voisinage de λ_0.
L'équation (95) est équivalente à

$$u + (\lambda - \lambda_0)\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u = \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1} F. \tag{96}$$

D'après l'estimation (53) et l'inégalité (94), on a

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1} F\right|\right|\right|_1 \leq \sqrt{S}\, |||F|||\,,$$

et

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u\right|\right|\right|_1 &\leq \sqrt{S}\left|\left|\left|\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u\right|\right|\right| \\ &\leq \sqrt{S}K_9\, |||u|||_1 = K_{10}\, |||u|||_1\,. \end{aligned} \tag{97}$$

Soit λ : $|\lambda-\lambda_0| \leq \rho < \dfrac{1}{K_{10}}$. Notons par $\Lambda = (\lambda-\lambda_0)\left(\overline{L_{\lambda_0,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\mu}-L_{0,\mu})}$ et $g = \left(\overline{L_{\lambda_0,\mu}}\right)^{-1}F$. L'équation (96) devient

$$u + \Lambda u = g. \tag{98}$$

On a $||\Lambda|| = \sup\limits_{D\left(\overline{L_{\lambda,\mu}}\right)} \dfrac{||\Lambda u||_1}{||u||_1} < 1$, d'où l'opérateur $(I+\Lambda)$ est inversible, et la solution de l'équation (98) est donnée par la série de Neumman $u = \sum_{n=0}^{\infty}(-\Lambda)^n g$. Ce qui prouve que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = E$, $\forall \lambda : |\lambda-\lambda_0| \leq \rho < \dfrac{1}{K_{10}}$.

En suite on pose $\lambda = \rho$ et on procède de la même manière, on obtient $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = E$, $\forall \lambda : 0 < \lambda \leq 2\rho$. En procédant de la même manière pas à pas, on obtient $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = E$ pour tout $\lambda \geq 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.5.1. $\square$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.5.2 *Pour tout élément $F = (f,\varphi,\psi) \in E$ il existe une et une seule solution forte généralisée $u = \left(\overline{L}_{\lambda,\mu}\right)^{-1}F = \overline{\left(L^{-1}_{\lambda,\mu}\right)}F$ du problème (1)-(2) et on a*

$$|||u|||_1^2 \leq \; S\,|||F|||^2,$$

où S est une constante positive indépendante de μ, λ, u et F.

2.6 Continuité de la solution forte généralisée par rapport aux paramètres

Nous étudions ici le comportement de l'opérateur donnant la solution.

Soit (μ_n,λ_n) une suite convergente vers $(\overset{0}{\mu},\lambda_0)$ telle que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda_0, \quad \mu_n = (\mu_{1,n},\mu_{2,n}) \longrightarrow (\overset{0}{\mu}_1,\overset{0}{\mu}_2), \quad n \longrightarrow \infty.$$

On définit l'espace E^1 obtenu en complétant $\mathscr{C}^\infty(\overline{D};W^1)$ par rapport à la norme

$$|||u|||_{E^1} = \sup_{\tau\in D}\left[\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|_1^2\right)_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|_1^2\right)_{t_1=\tau_1} dt_2\right],$$

si $\lambda_0 \neq 0$, et

$$|||u|||_{E^1} = \sup_{\tau\in D}\left[\int_0^{T_1}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|_{\frac{1}{2}}^2\right)_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_0^{T_2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|_{\frac{1}{2}}^2\right)_{t_1=\tau_1} dt_2\right],$$

si $\lambda_0 = 0$.

Comme E on prend l'espace de Hilbert composé des éléments $F = (f,\, \varphi,\, \psi)$ telle que

$$|||F|||_2^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_1^2 \text{ est finie,}$$

où

$$\|\varphi\|_1^2 = \int\limits_0^{T_2} \left\{ |\varphi|_1^2 + |\varphi'|_1^2 \right\} dt_2, \quad \|\psi\|_1^2 = \int\limits_0^{T_1} \left\{ |\psi|_1^2 + |\psi'|_1^2 \right\} dt_1.$$

Remarque. Comme la suite $(\mu_n,\, \lambda_n)$ est convergente, on peut choisir des constantes positives

$$a_0 = a_0(\overset{0}{\mu},\, \lambda_0), \quad a_1 = a_1(\lambda_0), \quad a_2 = a_2(\lambda_0),$$

telles que

$$a_0 \, |||u|||_{E^1} \leq |||u|||_1 \,, \quad \forall u \in \mathcal{D}\left(\overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}}\right),$$

$$a_2 \, |||F||| \leq |||F|||_2 \leq a_1 \, |||F||| \,, \quad \forall F \in E,$$

autrement dit $|||F||| \approx |||F|||_2$.

On désigne par $\mathscr{L}(E,\, E^1)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans E^1 muni de la topologie de la convergence simple.

Théorème 2.6.1 *Soient réalisées les conditions du théorème 2.5.1, et* $(\mu_n,\, \lambda_n) \longrightarrow (\overset{0}{\mu},\, \lambda_0)$. *Alors*

$$\left(\overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}}\right)^{-1} \longrightarrow \left(\overline{L_{\lambda_0,\, \overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}$$

au sense de la convergence simple.

Preuve. Pour démontrer ce théorème il suffit d'établir :

(i) $\quad \sup\limits_n \left\| \left(\overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}}\right)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(E,\, E^1)} < +\infty,$

(ii) $\quad \left(\overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}}\right)^{-1} \longrightarrow \left(\overline{L_{\lambda_0,\, \overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}$ dans un sous-espace X dense dans E.

D'après l'estimation (53), pour l'opérateur $\overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}}$ on a

$$|||u|||_1^2 \leq S \left|\left|\left| \overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}} u \right|\right|\right|, \quad \forall u \in \mathcal{D}\left(\overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}}\right). \tag{99}$$

Comme la constante S ne dépend pas de μ_n et λ_n, alors a partir de (99) et la remarque précédente, on obtient

$$|||u|||_{E^1}^2 \leq \frac{S}{a_0} \left|\left|\left| \overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}} u \right|\right|\right| = M_0 \left|\left|\left| \overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}} u \right|\right|\right|, \quad \forall u \in \mathcal{D}\left(\overline{L_{\lambda_n,\, \mu_n}}\right). \tag{100}$$

Posons $X = R\left(L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}\right)$ qui est un sous-espace dense dans E.

Pour $F \in X$, ona $\left(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \in \mathcal{D}\left(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}\right)$. De l'inégalité (100), il vient

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F\right|\right|\right|^2_{E^1}$$

$$\leq M_0 \left|\left|\left|F - \left(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}\right)\left(\overline{L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F\right|\right|\right|^2$$

$$\leq M_1 \left|\left|\left|F - \left(\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}\right)\left(\overline{L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F\right|\right|\right|^2_2, \tag{101}$$

où $M_1 = \dfrac{M_0}{a_2}$.

Posons $\left(\overline{L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F = h, \quad F = \left(\overline{L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}}\right) h$, alors

$$\left|\left|\left|\overline{L_{\lambda_n,\mu_n}}\, h - \overline{L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}} h\right|\right|\right|^2_2 \leq$$

$$|\lambda_n - \lambda_0|^2 \left\|\frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2}\right\|^2$$

$$+2\left(\left|\mu_{1,n} - \overset{0}{\mu}_1\right|^2 \|h\|_1^2\ |_{t_1=0} + \left|\mu_{2,n} - \overset{0}{\mu}_2\right|^2 \|h\|_1^2\ |_{t_1=T_1}\right)$$

$$+\,2\left(\left|\mu_{1,n} - \overset{0}{\mu}_1\right|^2 \|h\|_1^2\ |_{t_2=0} + \left|\mu_{2,n} - \overset{0}{\mu}_2\right|^2 \|h\|_1^2\ |_{t_2=T_2}\right). \tag{102}$$

On voit que le membre droit de (102) tend vers zéro lorsque $n \longrightarrow +\infty, \quad \forall F \in X$.

Ce qui achève la démontration du théorème 2.6.1. □

N.B. *Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Biélorussie* [95].

Chapitre 3

Problèmes ultra-hyperboliques mal posés

3.1 Formulation du problème

Soit $D =]0,\, T_1[\, \times\,]0,\, T_2[$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$ de variable $(t_1,\, t_2)$, et H un espace de Hilbert complexe, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|.|$ et $\langle .,. \rangle$. On considère dans H l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Au(t) = f(t), \quad t \in D, \\ u(t_1,\, 0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in [0,\, T_1], \\ u(0,\, t_2) = \psi(t_2), \quad t_2 \in [0,\, T_2], \end{cases} \tag{IVP}$$

où u et f sont des fonctions de variable t et à valeurs dans H, φ (resp. ψ) est une fonction définie de $[0,\, T_1]$ (resp. $[0,\, T_2]$) à valeurs dans H et

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est linéaire, non-borné, avec

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = H, \quad A^* = A, \quad \exists \gamma > 0,\ \langle Au,\, u \rangle \geq \gamma \|u\|^2, \ \ \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Pour $\xi \in L_2((0,\, T_2); H)$ vérifiant

$$\xi(0) = \varphi(T_1),$$

on considère le problème de minimisation suivant : pour $\varepsilon > 0$ donné, déterminer ψ_ε telle que :

$$\Phi(\psi) = \int_0^{T_2} |u(T_1,\, t_2) - \xi(t_2)|^2 \, dt_2 \leq \varepsilon, \tag{M}$$

où $u(t_1, t_2) = u(t_1, t_2; \varphi, \psi)$ est la solution du problème (IVP).

Une solution evidente du problème (M) est la suivante : choisir ψ de façon que $\Phi(\psi) = 0$, i.e., $u(T_1, t_2) = \xi(t_2)$. Ce choix nous amène à étudier le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Av(t) = f(t), \quad t \in D, \\ v(t_1, 0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in [0, T_1], \\ v(T_1, t_2) = \xi(t_2), \quad t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \tag{FVP}$$

et prendre $v(0, t_2) = \psi(t_2)$.

3.2 Position incorrecte du problème (FVP)

Dans cette section on montre que le problème (FVP) n'est pas bien posé au sens d'HADAMARD.

Il est bien connu que sous certaines conditions raisonables sur φ, ψ et f, le problème (IVP) est bien posé, et sa solution est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2) = \Big\{ & \mathscr{R}(t_1, t_2)\varphi(0) + \int_0^{t_1} \mathscr{R}(t_1 - s_1, t_2)\varphi'(s_1)\, ds_1 \\ & + \int_0^{t_2} \mathscr{R}(t_1, t_2 - s_2)\psi'(s_2)\, ds_2 + \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} \mathscr{R}(t_1 - s_1, t_2 - s_2) f(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 \Big\}, \end{aligned} \tag{$S1$}$$

où

$$\mathscr{R}(t_1, t_2) = \mathscr{R}(t_1, t_2; A) = J_0\left(2\sqrt{t_1 t_2 A}\right) \in \mathscr{L}(H)$$

est la *fonction de Riemann* definie par la représentation spectrale

$$\mathscr{R}(t_1, t_2) = \int_\gamma^\infty J_0\left(2\sqrt{t_1 t_2 \lambda}\right)\, dE_\lambda,$$

et $J_0(.)$ est la fonction de Bessel

$$J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2},$$

(voir [44, 91]).

Grâce à $(S1)$ et après un changement de variables, on montre que la solution formelle du problème (FVP) est donnée par :

$$\begin{aligned} v(t_1, t_2) = \Big\{ & \widetilde{\mathscr{R}}(T_1 - t_1, t_2)\varphi(T_1) - \int_{t_1}^{T_1} \widetilde{\mathscr{R}}(s_1 - t_1, t_2)\varphi'(s_1)\, ds_1 \\ & + \int_0^{t_2} \widetilde{\mathscr{R}}(T_1 - t_1, t_2 - s_2)\xi'(s_2)\, ds_2 - \int_0^{t_2}\int_{t_1}^{T_1} \widetilde{\mathscr{R}}(s_1 - t_1, t_2 - s_2) f(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 \Big\}, \end{aligned} \tag{$S2$}$$

où $\widetilde{\mathscr{R}}(t_1,\, t_2) = \mathscr{R}(t_1,\, t_2; -A)$. En utilisant la représentation spectrale de A et la relation $J_0(is) = I_0(s)$, où $I_0(.)$ est la fonction de Bessel modifiée, on peut écrire

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{R}}(s_1 - t_1,\, t_2 - s_2) &= J_0\left(2\sqrt{-(s_1 - t_1)(t_2 - s_2)A}\right)\\ &= \int\limits_{\gamma}^{\infty} I_0\left(2\sqrt{(s_1 - t_1)(t_2 - s_2)\lambda}\right)\, dE_\lambda.\end{aligned}$$

On sait que

$$I_0(s) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{s\cos(\tau)}\, d\tau \geq c_1 e^{\eta s}, \quad s > 0, \;\; 0 < \eta \leq 1, \;\; c_1 > 0.$$

Ce qui nous permet d'écrire que pour $0 \leq t_1 < s_1 \leq T_1$, $0 \leq s_2 < t_2 \leq T_2$,

$$I_0\left(2\sqrt{(s_1 - t_1)(t_2 - s_2)\lambda}\right) \geq c_1 e^{2\eta\sqrt{(s_1-t_1)(t_2-s_2)\lambda}} \geq c_2\lambda, \quad (c_2 > 0).$$

A partir de cette remarque, on conclut que l'opérateur

$$\widetilde{\mathscr{R}}(s_1 - t_1,\, t_2 - s_2) = J_0\left(2\sqrt{-A(s_1 - t_1)(t_2 - s_2)}\right) = I_0\left(2\sqrt{A(s_1 - t_1)(t_2 - s_2)}\right)$$

est non-borné. Ce qui montre que la solution v si elle existe, elle ne dépend pas countinûment des données. Par conséquent, le problème (FVP) est mal posé (instable).

3.3 Méthode de quasi-réversibilité

L'objectif de cette section est de proposer une stratégie de régularisation permettant de donner une approximation stable du problème (FVP).

On adapte l'approche $(M.Q.R.)$ [75] pour construire une approximation généralisée du problème (FVP). Par approximation généralisée nous entendrons une fonction v_α vérifiant :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_\alpha(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Av_\alpha(t) = f(t), \quad t \in D,\\ v_\alpha(t_1,\, 0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in [0,\, T_1],\\ \int\limits_0^{T_2} |v_\alpha(T_1,\, t_2) - \xi(t_2)|\, dt_2 \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0.\end{cases} \qquad \text{(Approximation généralisée)}$$

3.3.1 Description de la méthode

$\boxed{1}$ Soit w_α la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_\alpha(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A_\alpha w_\alpha(t) = f(t), \quad t \in D, \\ w_\alpha(t_1,\, 0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in [0,\, T_1], \\ w_\alpha(T_1,\, t_2) = \xi(t_2), \quad t_2 \in [0,\, T_2], \end{cases} \tag{$(FVP)_\alpha$}$$

où l'opérateur A est remplacé par la perturbation :

$$A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1} = AJ_\alpha, \;\; \alpha > 0.$$

$\boxed{2}$ On injecte la condition initiale $v_\alpha(0,\, t_2) = w_\alpha(0,\, t_2) = \psi_\alpha(t_2)$ dans le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_\alpha(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A v_\alpha(t) = f(t), \quad t \in D, \\ v_\alpha(t_1,\, 0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in [0,\, T_1], \\ v_\alpha(0,\, t_2) = \psi_\alpha(t_2), \quad t_2 \in [0,\, T_2], \end{cases} \tag{$(IVP)_\alpha$}$$

$\boxed{3}$ Enfin, on montre que :

$$\Phi(\psi_\alpha) = \int_0^{T_2} |v_\varepsilon(T_1,\, t_2) - \xi(t_2)|^2 \, dt_2 \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0. \tag{$(M)_\alpha$}$$

3.3.2 Position correcte des problèmes $(FVP)_\alpha$ et $(IVP)_\alpha$

Pour analyser les problèmes $(FVP)_\alpha$ et $(IVP)_\alpha$, on fera l'hypothèse suivante :

On suppose que :

$$(\mathscr{H}_1) \qquad \begin{aligned} & f \in L_2(D; H), \;\; \varphi,\; \varphi' \in L_2((0,\, T_1); H), \\ & \xi,\; \xi' \in L_2((0,\, T_2); H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0). \end{aligned}$$

On définit :

$$\begin{aligned} w_\alpha(t_1,\, t_2) = \Bigg\{ & \widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(T_1 - t_1,\, t_2)\varphi(T_1) - \int_{t_1}^{T_1} \widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(s_1 - t_1,\, t_2)\varphi'(s_1)\, ds_1 \\ & + \int_0^{t_2} \widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(T_1 - t_1,\, t_2 - s_2)\xi'(s_2)\, ds_2 - \int_0^{t_2}\int_{t_1}^{T_1} \widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(s_1 - t_1,\, t_2 - s_2) f(s_1,\, s_2)\, ds_1 ds_2 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{$S3$}$$

où $\widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(t_1,\, t_2) = \mathscr{R}(t_1,\, t_2; -A_\alpha)$.

Théorème 3.3.1 *Si la condition $(\mathscr{H}_1)$ est vérifiée. Alors, la fonction w_α donnée par $(S3)$ est l'unique solution du problème $(FVP)_\alpha$ et elle dépend continûment de f, φ et ξ.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} w_\alpha(0,\, t_2) = \psi_\alpha(t_2) = \Bigg\{ &\widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(T_1,\, t_2)\varphi(T_1) - \int_0^{T_1} \widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(s_1,\, t_2)\varphi'(s_1)\, ds_1 \\ + \int_0^{t_2} \widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(T_1,\, t_2 - s_2)\xi'(s_2)\, ds_2 &- \int_0^{t_2}\int_0^{T_1} \widetilde{\mathscr{R}}_\alpha(s_1,\, t_2 - s_2) f(s_1,\, s_2)\, ds_1 ds_2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Considérons le problème direct suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W_\alpha(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A_\alpha W_\alpha(t) = f(t), \quad t \in D, \\ W_\alpha(t_1,\, 0) = \varphi(t_1), \quad t_1 \in [0,\, T_1], \\ W_\alpha(0,\, t_2) = \psi_\alpha(t_2), \quad t_2 \in [0,\, T_2]. \end{cases} \tag{2}$$

Le problème (2) est bien posé et admet la solution W_α donnée par :

$$\begin{aligned} W_\alpha(t_1,\, t_2) = \Bigg\{ &\mathscr{R}(T_1 - t_1,\, t_2; -A_\alpha)\varphi(T_1) + \int_0^{t_2} \mathscr{R}(T_1 - t_1,\, t_2 - s_2; -A_\alpha)\xi'(s_2)\, ds_2 \\ &+ \int_0^{t_1} \mathscr{R}(t_1 - s_1,\, t_2; A_\alpha)\varphi'(s_1)\, ds_1 - \int_0^{T_1} \mathscr{R}(s_1 - t_1,\, t_2; -A_\alpha)\varphi'(s_1)\, ds_1 \\ &+ \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} \mathscr{R}(t_1 - s_1,\, t_2 - s_2; A_\alpha) f(s_1,\, s_2)\, ds_1 ds_2 \\ &- \int_0^{t_2}\int_0^{T_1} \mathscr{R}(s_1 - t_1,\, t_2 - s_2; -A_\alpha) f(s_1,\, s_2)\, ds_1 ds_2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3}$$

De la définition de $\mathscr{R}(t_1,\, t_2)$ on a

$$\mathscr{R}(0,\, t_2; -A_\alpha) = I, \quad \mathscr{R}(s_1 - T_1,\, t_2; -A_\alpha) = \mathscr{R}(T_1 - s_1,\, t_2; A_\alpha).$$

Ce qui donne

$$W_\alpha(T_1,\, t_2) = \varphi(T_1) + \int_0^{t_2} \xi'\, ds_2 = \varphi(T_1) + \xi(t_2) - \xi(0) = \xi(t_2). \tag{4}$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{R}(t_1,\, t_2; -A_\alpha)\|_{\mathscr{L}(H)} &= \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \left| J_0\left(2\sqrt{-t_1t_2\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}}\right)\right| \\
&= \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k}{(k!)^2}(t_1t_2)^k \right) \\
&\leq \exp\left(\frac{T_1T_2}{\alpha}\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Grâce à (4) et l'unicité de la solution du problème (2), on en déduit que le problème $(FVP)_\alpha$ admet une solution unique w_α donnée par $(S3)$. La dépendance continue de w_α de (f, φ, ξ) résulte directement de l'estimation (5). $\square$

Théorème 3.3.2 *Sous la condition $(\mathscr{H}_1)$, la fonction*

$$
\begin{aligned}
v_\alpha(t_1,\, t_2) = \Bigg\{ &\int_0^{t_2}\int_0^{t_1} J_0\left(2\sqrt{A(t_1-s_1)(t_2-s_2)}\right) f(s_1,\, s_2)\, ds_1 ds_2 \\
&- \int_0^{t_2}\int_0^{T_1} J_0\left(2\sqrt{(-A_\alpha s_1 + At_1)(t_2-s_2)}\right) f(s_1,\, s_2)\, ds_1 ds_2 \\
&+ \int_0^{t_1} J_0\left(2\sqrt{A(t_1-s_1)t_2}\right) \varphi'(s_1)\, ds_1 \\
&- \int_0^{T_1} J_0\left(2\sqrt{(-A_\alpha s_1 + At_1)t_2}\right) \varphi'(s_1)\, ds_1 \\
&+ \int_0^{t_2} J_0\left(2\sqrt{(-A_\alpha T_1 + At_1)(t_2-s_2)}\right) \xi'(s_2)\, ds_2 \\
&+ J_0\left(2\sqrt{(-A_\alpha T_1 + At_1)t_2}\right) \varphi(T_1) \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{S4}
$$

est l'unique solution du problème $(IVP)_\alpha$ et elle dépend continûment de $(f,\, \varphi,\, \xi)$.

Preuve. Par la méthode des inégalités énergétiques, on établit l'unicité et la dépendance continue, la formule $(S4)$ résulte de $(S1)$ et (3) et une série de manipulations de la fonction de Bessel.

3.4 Analyse de la méthode

3.4.1 Opérateurs $\mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)$ et $\mathcal{S}(t_1,\, \tau_1)$

Pour établir la convergence de cette approche, on adapte les techniques développées par Aksen dans [2, 3]. On introduit les problèmes auxiliaires suivants :

Pour $h : [0,\, T_2] \to H$, $x \in \mathcal{D}(A)$ et $t \in D_{\tau_1} = (\tau_1,\, T_1) \times (0,\, T_2)$ $(0 \leq \tau_1 < T_1)$, on définit les opérateurs linéaires $\mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)$ et $\mathcal{S}(t_1,\, \tau_1)$ comme étant les résolvantes des problèmes suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Ay(t) = 0, \\ y(t_1,\, 0) = h(0), \\ y(\tau_1,\, t_2) = h(t_2), \end{cases} \tag{$\mathcal{R}$}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Az(t) = 0, \\ z(t_1,\, 0) = (t_1 - \tau_1)Ax, \\ z(\tau_1,\, t_2) = 0. \end{cases} \tag{$\mathcal{S}$}$$

La solution $y(t)$ (resp. $z(t)$) du problème $(\mathcal{R})$ (resp. $(\mathcal{S})$) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)h(t_2) \quad &= \quad J_0\left(2\sqrt{A(t_1 - \tau_1)t_2}\right)\, h(0) \\ &\quad + \int_0^{t_2} J_0\left(2\sqrt{A(t_1 - \tau_1)(t_2 - s_2)}\right)\, h'(s_2)\, ds_2, \end{aligned} \tag{6}$$

$$z(t) = \mathcal{S}(t_1,\, \tau_1)x = \int_{\tau_1}^{T_1} J_0\left(2\sqrt{A(t_1 - s_1)t_2)}\right)\, Ax\, ds_1. \tag{7}$$

Quelques propriétés de base de $\mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)$ et $\mathcal{S}(t_1,\, \tau_1)$ sont rassemblées dans le lemme suivant :

Lemme 3.4.1 [3] *On a :*

$(\mathfrak{p}_1)$ $\quad \mathcal{R}(\tau_1,\, \tau_1)h(t_2) = h(t_2), \quad 0 \leq \tau_1 \leq T_1;$

$(\mathfrak{p}_2)$ $\quad \mathcal{R}(t_1,\, s_1)\mathcal{R}(s_1,\, \tau_1)h(t_2) = \mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)h(t_2),\ 0 \leq \tau_1 \leq s_1 \leq t_1 \leq T_1;$

$(\mathfrak{p}_3)$ $\quad \dfrac{\partial}{\partial \tau_1}\left(\mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)h(t_2)\right) = -\mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)\dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\mathcal{R}(s_1,\, \tau_1)h(t_2)\right)_{s_1=\tau_1};$

$(\mathfrak{p}_4)$ $\quad \dfrac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)h(t_2)\right) = \mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)h'(t_2) - \mathcal{S}(t_1,\, \tau_1)h(0);$

(e_1) $\int_0^{T_2} |\mathcal{R}(t_1,\, \tau_1)h(t_2)|^2\, dt_2 \le \int_0^{T_2} |h(t_2)|^2\, dt_2;$

(e_2) $\int_0^{T_2} |\mathcal{S}(t_1,\, \tau_1)x|^2\, dt_2 \le (t_1 - \tau_1)\left|A^{1/2}x\right|^2, \quad x \in \mathcal{D}(A^{1/2}).$

Proposition 3.4.1 *On suppose que $z(t_1,\, t_2)$ est la solution du problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Az(t) = f(t), \quad t \in D, \\ z(t_1,\, 0) = \zeta(t_1), \quad t_1 \in [0,\, T_1]. \end{cases}$$

Alors on a la transformation suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)z(t)\Big) = \mathcal{R}(T_1,\, t_1)f(t) - \mathcal{S}(T_1,\, t_1)\zeta'(t_1). \tag{$\mathscr{T}$}$$

Preuve. On a

$$\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial^2 z(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + \mathcal{R}(T_1,\, t_1)Az(t) = \mathcal{R}(T_1,\, t_1)f(t). \tag{$a1$}$$

D'après $(\mathfrak{p}_4)$, on peut écrire

$$\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial^2 z(t)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial z(t)}{\partial t_1}\right) + \mathcal{S}(T_1,\, t_1)\zeta'(t_1), \tag{$a2$}$$

et la propriété $(\mathfrak{p}_3)$ donne

$$\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial z(t)}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_1}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)z(t)\Big) + \mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\Big(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\Big)_{s_1=t_1}. \tag{$a3$}$$

De $(a1)$, $(a2)$ et $(a3)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial^2 z(t)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)z(t)\Big) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\Big(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\Big)_{s_1=t_1}\right) + \mathcal{S}(T_1,\, t_1)\zeta'(t_1). \end{aligned} \tag{$a4$}$$

D'après l'identité $(\mathfrak{p}_3)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\Big(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\Big)_{s_1=t_1}\right) = \\ &\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial}{\partial s_1 \partial t_2}\left(\Big(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\Big)_{s_1=t_1}\right) \\ &-\mathcal{S}(T_1,\, t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\Big(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\Big)_{s_1=t_1,\, t_2=0}. \end{aligned} \tag{$a5$}$$

En tenant compte de

$$\Big(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\Big)_{t_2=0} = z(t_1,\, 0), \quad \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\Big(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\Big)_{t_2=0}\right) = 0,$$

l'identité ($a5$) devient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\right)_{s_1=t_1}\right) = \\ &\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial}{\partial s_1\partial t_2}\left(\left(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\right)_{s_1=t_1}\right).\end{aligned} \tag{$a6$}$$

En substituant ($a6$) dans ($a4$), on obtient

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial^2 z(t)}{\partial t_1\partial t_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)z(t)\right) \\ &+\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial t_2}\left(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\right)_{s_1=t_1} + \mathcal{S}(T_1,\, t_1)\zeta'(t_1).\end{aligned} \tag{$a7$}$$

On a

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial t_2}\left(\mathcal{R}(s_1,\, t_1)z(t)\right)_{s_1=t_1} = -Az(t). \tag{$a8$}$$

De ($a7$) et ($a8$), il vient

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\frac{\partial^2 z(t)}{\partial t_1\partial t_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)z(t)\right) \\ &-\mathcal{R}(T_1,\, t_1)Az(t) + \mathcal{S}(T_1,\, t_1)\zeta'(t_1).\end{aligned} \tag{$a9$}$$

En combinant ($a1$) et ($a9$), on trouve la transformation ($\mathscr{T}$). Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.4.1. □

3.4.2 Résultats de convergence

On suppose que :

$$(\mathscr{H}_2) \qquad \begin{aligned}&A^{1/2}f \in L_2(D;H), \;\; A\varphi,\; A\varphi' \in L_2((0,\, T_1);H), \\ &A^{1/2}\xi,\; A^{1/2}\xi' \in L_2((0,\, T_2);H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0).\end{aligned}$$

Théorème 3.4.1 *Sous la condition ($\mathscr{H}_2$), on a :*

$$\left\|\frac{\partial v_\alpha(T_1,\, .)}{\partial t_2} - \xi'\right\|_{L_2((0,\, T_2);H)} \longrightarrow 0 \;\text{ quand }\; \alpha \longrightarrow 0. \tag{8}$$

Si de plus

$$(\mathscr{H}_3) \qquad \begin{aligned}&Af \in L_2(D;H), \;\; A^{3/2}\varphi,\; A^{3/2}\varphi' \in L_2((0,\, T_1);H), \\ &A\xi,\; A\xi' \in L_2((0,\, T_2);H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0),\end{aligned}$$

alors on l'estimation :

$$\left\| \frac{\partial u_\alpha(T_1,\,.)}{\partial t_2} - \xi' \right\|_{L_2((0,T_2);H)} \leq \alpha\, C_1(T_1,\,T_2) \Big\{ \|Af\|_{L_2(D;H)} + \|A\xi'\|_{L_2((0,T_2);H)} + \left\|A^{3/2}\varphi\right\|_{L_2((0,T_1);H)} + \left\|A^{3/2}\varphi'\right\|_{L_2((0,T_1);H)} \Big\}. \tag{9}$$

Preuve. On a

$$\frac{\partial^2 w_\alpha(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A_\alpha w_\alpha(t) = f(t), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 v_\alpha(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A v_\alpha(t) = f(t). \tag{11}$$

En appliquant l'opérateur $\mathcal{R}(T_1,\,t_1)$ à l'équation (10) (resp. (11)) et par l'utilisation de la transformation ($\mathscr{T}$), l'équation (10) (resp. (11)) se transforme comme suit :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1) v_\alpha \Big) = \mathcal{R}(T_1,\,t_1) f - \mathcal{S}(T_1,\,t_1)\varphi', \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1) w_\alpha \Big) + \mathcal{R}(T_1,\,t_1)\,(A_\alpha - A)\, w_\alpha = \mathcal{R}(T_1,\,t_1) f - \mathcal{S}(T_1,\,t_1)\varphi'. \tag{13}$$

On a

$$(A_\alpha - A) = -\alpha J_\alpha A^2. \tag{14}$$

Substituant (14) dans (13), on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1) w_\alpha \Big) - \alpha \mathcal{R}(T_1,\,t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha = \mathcal{R}(T_1,\,t_1) f - \mathcal{S}(T_1,\,t_1)\varphi'. \tag{15}$$

Si on pose $\vartheta_\alpha = w_\alpha - v_\alpha$, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1) \vartheta_\alpha \Big) = \alpha \mathcal{R}(T_1,\,t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha. \tag{16}$$

Multiplions scalairement dans H l'équation (16) par $2\dfrac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,t_1)\vartheta_\alpha\Big)$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)\vartheta_\alpha \Big) \right|^2 = 2Re \left\langle \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)\vartheta_\alpha \Big)\ ,\ \alpha \mathcal{R}(T_1,\,t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha \right\rangle. \tag{17}$$

Une intégration de l'équation (17) dans $Q_1 = (0, \tau_1) \times (0, T_2) \subseteq D$ donne

$$\int_0^{T_2} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)\vartheta_\alpha(\tau_1, t_2) \Big) \right|^2 - \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)\vartheta_\alpha(0,\,t_2) \Big) \right|^2 \right\} dt_2 = \int_{Q_1} 2Re \left\langle \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)\vartheta_\alpha \Big)\ ,\ \alpha \mathcal{R}(T_1,\,t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha \right\rangle dt. \tag{18}$$

En tenant compte de

$$\vartheta_\alpha(0,\, t_2) = w_\alpha(0,\, t_2) - v_\alpha(0,\, t_2) = 0,$$

l'équation (18) devient

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1)\vartheta_\alpha(\tau_1,\, t_2) \Big) \right|^2 dt_2 = \\ &\int_{Q_1} 2Re \left\langle \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)\vartheta_\alpha \Big) \,,\, \alpha \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha \right\rangle dt. \end{aligned} \tag{19}$$

Par une application directe de l'ε-inégalité, de l'équation (19) on tire l'estimation

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1)\vartheta_\alpha(\tau_1,\, .) \Big) \right\|_{L_2((0,\,T_2);H)} \leq \\ &T_1 \left\| \alpha \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha \right\|^2_{L_2(D;H)} \\ &+\frac{1}{2} \sup_{0 \leq t_1 \leq T_1} \left\| \alpha \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha(t_1,\, .) \right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} . \end{aligned} \tag{20}$$

Puisque le côté droit de l'inégalité (20) ne dépend pas de $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, alors on prend le *sup* du côté gauche, on obtient

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq \tau_1 \leq T_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1)\vartheta_\alpha(\tau_1,\, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} \leq \\ &4T_1 \left\| \alpha \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha \right\|^2_{L_2(D;H)} , \end{aligned} \tag{21}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1)\vartheta_\alpha(\tau_1,\, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} \leq \\ &4T_1 \left\| \alpha \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha \right\|^2_{L_2(D;H)} . \end{aligned} \tag{22}$$

Remplaçons τ_1 par T_1 dans (22) et utilisons

$$\mathcal{R}(T_1,\, T_1)\vartheta_\alpha(T_1,\, t_2) = \vartheta_\alpha(T_1,\, t_2) = w_\alpha(T_1,\, t_2) - v_\alpha(T_1,\, t_2) = \xi(t_2) - v_\alpha(T_1,\, t_2),$$

on obtient

$$\left\| \frac{\partial v_\alpha(T_1,\, .)}{\partial t_2} - \xi' \right\|^2_{L_2((0,T_2);H)} \leq 4T_1 \left\| \alpha \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A^2 w_\alpha \right\|^2_{L_2(D;H)} . \tag{23}$$

Pour estimer le côté droit de (23), on multiple scalairement dans H l'équation (15) par $\alpha J_\alpha A^2 \frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)$, on obtient

$$E_1 = E_2 + E_3 + E_4,$$

où

$$E_1 = 2Re\left\langle \alpha\mathcal{R}(T_1,\, t_1)J_\alpha A^2 w_\alpha,\ \alpha J_\alpha A^2\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right\rangle$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_2}\left|\alpha J_\alpha A^2\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\right|^2,$$

$$E_2 = 2Re\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big),\ \alpha J_\alpha A^2\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right\rangle =$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\left|\sqrt{\alpha}J_\alpha A\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right|^2 + \left|\alpha J_\alpha A^{3/2}\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right|^2\right\},$$

$$E_3 = 2Re\left\langle \mathcal{R}(T_1,\, t_1)f, \alpha J_\alpha A^2\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right\rangle =$$

$$-2Re\left\langle \sqrt{\alpha}J_\alpha A\mathcal{R}(T_1,\, t_1)f,\ \sqrt{\alpha}J_\alpha A\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right\rangle$$

$$-2Re\left\langle \alpha J_\alpha A^{3/2}\mathcal{R}(T_1,\, t_1)f,\ \alpha J_\alpha A^{3/2}\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right\rangle,$$

$$E_4 = 2Re\left\langle \mathcal{S}(T_1,\, t_1)\frac{d\varphi}{dt_1},\ \alpha J_\alpha A^2\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right\rangle =$$

$$2Re\left\langle \sqrt{\alpha}J_\alpha AS(T_1,\, t_1)\varphi',\ \sqrt{\alpha}J_\alpha A\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha\Big)\right\rangle$$

$$+2Re\left\langle \alpha J_\alpha A^{3/2}S(T_1,\, t_1)\varphi',\ \alpha J_\alpha A^{3/2}\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1\Big)\ w_\alpha)\right\rangle.$$

En intégrant l'identité $E_1 = E_2 + E_3 + E_4$ dans $Q_2 = (\tau_1,\, T_1)\times(0,\, \tau_2)$ et en utilisant

$$\mathcal{R}(T_1,\, T_1)w_\alpha(T_1,\, t_2) = w_\alpha(T_1,\, t_2) = \xi(t_2), \quad (\mathcal{R}(T_1,\, t_1)w_\alpha)_{t_2=0} = \varphi(t_1),$$

on obtient

$$\mathscr{K}_1(\tau_1,\, \tau_2) = \mathscr{K}_2(\tau_1,\, \tau_2) + \int\limits_{Q_2} E_3 dt + \int\limits_{Q_2} E_4 dt, \tag{24}$$

où

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_1(\tau_1,\,\tau_2) &= \int\limits_{\tau_1}^{T_1} \left|\alpha J_\alpha A^2 \mathcal{R}(T_1,\,t_1) w_\alpha(t_1,\,\tau_2)\right|^2 dt_1\\ &+ \int\limits_{0}^{\tau_2} \left|\alpha J_\alpha A^{3/2} \frac{\partial}{\partial t_2}\,\Big(\mathcal{R}(T_1,\,\tau_1) w_\alpha(\tau_1,\,t_2)\Big)\right|^2 dt_2\\ &+ \int\limits_{0}^{\tau_2} \left|\sqrt{\alpha} J_\alpha A \frac{\partial}{\partial t_2}\,\Big(\mathcal{R}(T_1,\,\tau_1) w_\alpha(\tau_1, t_2)\Big)\right|^2 dt_2,\end{aligned}$$

et

$$\mathscr{K}_2(\tau_1,\,\tau_2) = \int\limits_{0}^{\tau_2} \left|\sqrt{\alpha} J_\alpha A \xi'\right|^2 dt_2 + \int\limits_{0}^{\tau_2} \left|\alpha J_\alpha A^{3/2} \xi'\right|^2 dt_2 + \int\limits_{\tau_1}^{T_1} \left|\alpha J_\alpha A^2 \varphi\right|^2 dt_1.$$

Une application directe de l'ε-inégalité donne

$$\begin{aligned}&|\int\limits_{Q_2} E_3 dt| + |\int\limits_{Q_2} E_4 dt| \le \frac{1}{2} \sup_{0\le t_1\le T_1} \left\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A \frac{\partial}{\partial t_2}\,\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1) w_\alpha(t_1,\,.)\Big)\right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)}\\ &+\frac{1}{2} \sup_{0\le t_1\le T_1} \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2} \frac{\partial}{\partial t_2}\,\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1) w_\alpha(t_1,\,.)\Big)\right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} + \mathscr{K}_3(f,\,\varphi'),\end{aligned} \tag{25}$$

où

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_3(f,\,\varphi') &= 4T_1 \left\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A \mathcal{R}(T_1,\,t_1) f\right\|^2_{L_2(D;H)} + 4T_1 \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2} \mathcal{R}(T_1,\,t_1) f\right\|^2_{L_2(D;H)}\\ &+4T_1 \left\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A S(T_1,\,t_1)\varphi'\right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + 4T_1 \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2} S(T_1,\,t_1)\varphi'\right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)}.\end{aligned}$$

En vertu de e_1 et e_2 (voir lemme 3.4.1), la quantité $\mathscr{K}_3(f,\,\varphi')$ est dominée par

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_3(f,\,\varphi') \le \mathscr{K}_3^* &= 4T_1 \left\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A f\right\|^2_{L_2(D;H)} + 4T_1 \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2} f\right\|^2_{L_2(D;H)}\\ &+4T_1^2 \left\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A^{3/2}\varphi'\right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + 4T_1^2 \left\|\alpha J_\alpha A^2\varphi'\right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)}.\end{aligned} \tag{26}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}&\mathscr{K}_2(\tau_1,\,\tau_2) \le\\ &\left\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A \xi'\right\|^2_{L_2((0,T_2);H)} + \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2}\xi'\right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} + \left\|\alpha J_\alpha A^2\varphi\right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} = \mathscr{K}_2^*.\end{aligned} \tag{27}$$

En combinant (24), (25), (26) et (27), on tire

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in\overline{D}} \mathscr{K}_1(\tau_1,\,\tau_2) \;\le&\\ &+\frac{1}{2} \sup_{0\le t_1\le T_1} \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2} \frac{\partial}{\partial t_2}\,\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1) w_\alpha(t_1,\,.)\Big)\right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)}\\ &+\frac{1}{2} \sup_{0\le t_1\le T_1} \left\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A \frac{\partial}{\partial t_2}\,\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1) w_\alpha(t_1,\,.)\Big)\right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)}\\ &+\mathscr{K}_2^* + \mathscr{K}_3^*.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité donne

$$\int_0^{T_1} \left|\alpha J_\alpha A^2 \mathcal{R}(T_1,\, t_1) w_\alpha(t_1,\, \tau_2)\right|^2 dt_1 \leq \mathscr{K}_2^* + \mathscr{K}_3^*. \tag{28}$$

En intégrant l'inégalité (28) par rapport à $\tau_2 \in (0,\, T_2)$, on obtient

$$\left\|\alpha J_\alpha A^2 \mathcal{R}(T_1,\, t_1) w_\alpha(t_1, \tau_2)\right\|^2_{L_2(D;H)} \leq T_2 \left(\mathscr{K}_2^* + \mathscr{K}_3^*\right). \tag{29}$$

En combinant (23) et (29), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial v_\alpha(T_1,\, .)}{\partial t_2} - \xi'\right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \leq \\
&C_1(T_1,\, T_2)\Big\{\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A f\|^2_{L_2(D;H)} + \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2} f\right\|^2_{L_2(D;H)} \\
&\quad + \left\|\sqrt{\alpha} J_\alpha A^{3/2}\varphi'\right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} + \|\alpha J_\alpha A^2 \varphi'\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} \\
&\quad + \|\sqrt{\alpha} J_\alpha A \xi'\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} + \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2}\xi'\right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \\
&\quad + \|\alpha J_\alpha A^2 \varphi\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)}\Big\},
\end{aligned} \tag{30}$$

où $C_1(T_1,\, T_2) = 16 T_1 T_2 \max(1,\, T_1,\, T_1^2)$.

En utilisant

$$|A^s h|^2 = |J_\alpha A^s h|^2 + 2\alpha \left|J_\alpha A^{s+1/2} h\right|^2 + \alpha^2 \left|J_\alpha A^{s+1} h\right|^2, \quad (s = 0,\, 1/2,\, 1), \tag{I_s}$$

et les propriétés de l'approximation de Yosida, on a

$$\begin{aligned}
\triangle_1(\alpha) &= \|\sqrt{\alpha} J_\alpha A \xi'\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} + \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2}\xi'\right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \leq \\
\triangle_1^*(\alpha) &= \left\|A^{1/2}\xi'\right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} - \left\|J_\alpha A^{1/2}\xi'\right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \longrightarrow 0, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_2(\alpha) &= \|\sqrt{\alpha} J_\alpha A f\|^2_{L_2(D;H)} + \left\|\alpha J_\alpha A^{3/2} f\right\|^2_{L_2(D;H)} \leq \\
\triangle_2^*(\alpha) &= \left\|A^{1/2} f\right\|^2_{L_2(D;H)} - \left\|J_\alpha A^{1/2} f\right\|^2_{L_2(D;H)} \longrightarrow 0, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_3(\alpha) &= \|\alpha J_\alpha A^2 \varphi\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} \leq \\
\triangle_3^*(\alpha)(\alpha) &= \|A\varphi\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} - \|J_\alpha A \varphi\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } \ \alpha \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \triangle_4(\alpha) &= \left\|\sqrt{\alpha}J_\alpha A^{3/2}\varphi'\right\|^2_{L_2((0,T_1);H)} + \|\alpha J_\alpha A^2\varphi'\|^2_{L_2((0,T_1);H)} \leq \\ \triangle^*_4(\alpha) &= \|A\varphi'\|^2_{L_2((0,T_1);H)} - \|J_\alpha A\varphi'\|^2_{L_2((0,T_1);H)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad \alpha \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{34}$$

En combinant $(31) - (34)$, on conclut que

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\partial v_\alpha(T_1,\,.)}{\partial t_2} - \xi'\right\|^2_{L_2((0,T_2);H)} \leq \\ &\qquad C(T_1,\,T_2)\left(\triangle^*_1 + \triangle^*_2 + \triangle^*_3 + \triangle^*_4\right) \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad \alpha \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{35}$$

On suppose que la condition $(\mathscr{H}_3)$ est vérifiée. En vertu de (I_s), on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \triangle_1 &\leq \alpha\,\|A\xi'\|^2_{L_2((0,T_2);H)}\,, \\ \triangle_2 &\leq \alpha\,\|Af\|^2_{L_2(D;H)}\,, \\ \triangle_3 &\leq \alpha\,\left\|A^{3/2}\varphi\right\|^2_{L_2((0,T_1);H)}\,, \\ \triangle_4 &\leq \alpha\,\left\|A^{3/2}\varphi'\right\|^2_{L_2((0,T_1);H)}\,. \end{aligned} \tag{36}$$

En combinant (30) et (36), on obtient l'estimation recherchée. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.4.1. □

Proposition 3.4.2 *Soit v_α la solution du problème $(IVP)_\alpha$, alors on a*

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\partial v_\alpha(T_1,\,.)}{\partial t_2}\right\|_{L_2((0,T_2);H)} \leq \\ &\qquad C_2(T_1)\left\{\|f\|^2_{L_2(D;H)} + \left\|A^{1/2}\varphi\right\|_{((0,T_1);H)} + \left\|A^{1/2}\varphi'\right\|_{((0,T_1);H)}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \|\xi\|_{((0,T_2);H)} + \|\xi'\|_{((0,T_2);H)}\right\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Preuve. Multiplions scalairement dans H l'équation (12) par $\dfrac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)v_\alpha\Big)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_1 &= \frac{\partial}{\partial t_1}\left|\frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)v_\alpha\Big)\right|^2 \\ &= 2Re\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)v_\alpha\Big)\,, \frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)v_\alpha\Big)\right\rangle \\ &= 2Re\left\langle \mathcal{R}(T_1,\,t_1)f - \mathcal{S}(T_1,\,t_1)\varphi', \frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\mathcal{R}(T_1,\,t_1)v_\alpha\Big)\right\rangle = \mathscr{E}_2. \end{aligned}$$

En intégrant l'identité $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$ dans $Q_3 = (0, \tau_1) \times (0, T_2)$, on obtient

$$\int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1) v_\alpha(\tau_1,\, t_2) \Big) \right|^2 dt_2 = \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, 0) v_\alpha(0,\, t_2) \Big) \right|^2 dt_2 + \int_{Q_3} \mathscr{E}_2 \, dt. \quad (38)$$

Une application directe de l'ε-inégalité donne

$$\begin{aligned} |\int_{Q_3} \mathscr{E}_2 \, dt| \leq 4T_1 \|f\|^2_{L_2(D;H)} + 4T_1^2 \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} \\ + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t_1 \leq T_1} \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1) v_\alpha(t_1,\, t_2) \Big) \right|^2 dt_2. \end{aligned} \quad (39)$$

A partir de (38) et (39), il vient

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq \tau_1 \leq T_1} \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1) v_\alpha(\tau_1,\, t_2) \Big) \right|^2 dt_2 \leq \\ &8T_1 \|f\|^2_{L_2(D;H)} + 8T_1^2 \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + 2 \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, 0) v_\alpha(0,\, t_2) \Big) \right|^2 dt_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Remplaçons τ_1 par T_1 dans (40) et tenant en compte $\mathcal{R}(T_1,\, T_1) v_\alpha(T_1,\, t_2) = v_\alpha(T_1,\, t_2)$, il vient

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial}{\partial t_2} v_\alpha(T_1,\, .) \right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} \leq \\ &8T_1 \|f\|^2_{L_2(D;H)} + 8T_1^2 \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, 0) v_\alpha(0,\, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)}. \end{aligned} \quad (41)$$

En utilisant l'identité

$$\mathcal{R}(T_1,\, 0) v_\alpha(0,\, t_2) = \mathcal{R}(T_1,\, 0) w_\alpha(0,\, t_2),$$

l'inégalité (41) devient

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial v_\alpha(T_1,\, .)}{\partial t_2} \right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} \leq \\ &8T_1 \|f\|^2_{L_2(D;H)} + 8T_1^2 \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, 0) w_\alpha(0, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Pour estimer $\left\| \dfrac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, 0) w_\alpha(0,\, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)}$, multiplions scalairement dans H l'équation (13) par $\dfrac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1) w_\alpha \Big)$, et intégrons le résultat obtenu dans $Q_4 = (\tau_1,\, T_1) \times (0,\, \tau_2)$ et utilisons

$$\mathcal{R}(T_1,\, T_1) w_\alpha(T_1,\, t_2) = w_\alpha(T_1,\, t_2) = \xi(t_2), \;\; w_\alpha(t_1,\, 0) = \varphi(t_1),$$

on obtient

$$\mathscr{K}_4 = \mathscr{K}_5 + \mathscr{K}_6, \tag{43}$$

où

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_4(\tau_1,\, \tau_2) = & \int_0^{\tau_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1) w_\alpha(\tau_1,\, t_2) \Big) \right|^2 dt_2 + \int_{\tau_1}^{T_1} \left| \sqrt{\alpha} \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A w_\alpha(t_1,\, \tau_2) \right|^2 dt_1 \\ & + \int_{\tau_1}^{T_1} \left| \alpha \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A^{3/2} w_\alpha(t_1,\, \tau_2) \right|^2 dt_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_5(\tau_1,\, \tau_2) = & \int_0^{\tau_2} \left| \frac{d\xi}{dt_2} \right|^2 dt_2 + \int_{\tau_1}^{T_1} \left| \sqrt{\alpha} \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A \varphi(t_1) \right|^2 dt_1 \\ & + \int_{\tau_1}^{T_1} \left| \alpha \mathcal{R}(T_1,\, t_1) J_\alpha A^{3/2} \varphi(t_1) \right|^2 dt_1, \end{aligned}$$

et

$$\mathscr{K}_6(\tau_1,\, \tau_2) = - \int_{Q_4} 2Re \left\langle \mathcal{R}(T_1,\, t_1) f - \mathcal{S}(T_1,\, t_1) \varphi',\, \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, t_1) w_\alpha \Big) \right\rangle dt.$$

En utilisant quelques estimations élémentaires et le lemme 3.4.1, on tire les inégalités suivantes :

$$\mathscr{K}_5(\tau_1,\, \tau_2) \le \mathscr{K}_5^* = \int_0^{T_2} |\xi'|^2 \, dt_2 + \int_0^{T_1} |\sqrt{\alpha} J_\alpha A \varphi(t_1)|^2 \, dt_1 + \int_0^{T_1} \left| \alpha J_\alpha A^{3/2} \varphi(t_1) \right|^2 dt_1,$$

$$\begin{aligned} |\mathscr{K}_6(\tau_1,\, \tau_2)| \;\; \le \;\; & 4T_1 \, \|f\|^2_{L_2(D;H)} + 4T_1^2 \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,T_1);H)} \\ & + \frac{1}{2} \sup_{0 \le t_1 \le T_1 1} \left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1) w_\alpha(t_1,\, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} = \mathscr{K}_6^*. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\int_0^{\tau_2} \left| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1) w_\alpha(\tau_1,\, t_2) \Big) \right|^2 dt_2 \leq \mathscr{K}_4(\tau_1,\, \tau_2) \leq \mathscr{K}_5^* + \mathscr{K}_6^*. \tag{44}$$

Puisque le côté droit de (44) ne dépend pas de $\tau = (\tau_1,\, \tau_2)$, alors on prend le *sup* du côté gauche, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \tau_1 \leq T_1 1} \left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, \tau_1) w_\alpha(\tau_1,\, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \leq \\ 2 \int_0^{T_2} |\xi'|^2 \, dt_2 + 2 \int_0^{T_1} |\sqrt{\alpha} J_\alpha A \varphi(t_1)|^2 \, dt_1 \\ +2 \int_0^{T_1} \left| \alpha J_\alpha A^{3/2} \varphi(t_1) \right|^2 dt_1 + 8T_1 \left\| f \right\|^2_{L_2(D;H)} + 8T_1^2 \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} . \end{aligned} \tag{45}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, 0) w_\alpha(0,\, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \leq \\ 2 \left\| \xi' \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} + 2 \left\| \sqrt{\alpha} J_\alpha A \varphi \right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} \\ +2 \left\| \alpha J_\alpha A^{3/2} \varphi \right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} + 8T_1 \left\| f \right\|^2_{L_2(D;H)} + 8T_1^2 \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} . \end{aligned} \tag{46}$$

En vertu de (I_s), on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t_2} \Big(\mathcal{R}(T_1,\, 0) w_\alpha(0,\, .) \Big) \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \leq \\ 2 \left\| \xi' \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} + 2 \left\| A^{1/2} \varphi \right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} \\ +8T_1 \left\| f \right\|^2_{L_2(D;H)} + 8T_1^2 \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H))} . \end{aligned} \tag{47}$$

En combinant (47) et (41), on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v_\alpha(T_1,\, .)}{\partial t_2} \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \leq \\ C_2(T_1) \Big\{ \left\| f \right\|^2_{L_2(D;H)} + \left\| \xi' \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} + \left\| \xi \right\|^2_{L_2((0,\, T_2);H)} \\ + \left\| A^{1/2} \varphi \right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} + \left\| A^{1/2} \varphi' \right\|^2_{L_2((0,\, T_1);H)} \Big\} , \end{aligned} \tag{48}$$

où $C_2(T_1) = 16\max(1,\, T_1,\, T_1^2)$. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.4.2. $\square$

On introduit les espaces suivants :

$$\mathcal{W} = \big\{F = (f,\, \varphi,\, \psi) : Af \in L_2(D;H),\;\; A^{3/2}\varphi,\; A^{3/2}\varphi' \in L_2((0,T_1);H),\\ A\psi,\; A\psi' \in L_2((0,T_2);H)\big\}\,,$$

avec la norme

$$\|F\|^2_{\mathcal{W}} = \|Af\|^2_{L_2(D;H)} + \left\|A^{3/2}\varphi\right\|^2_{L_2((0,T_1);H)} \left\|A^{3/2}\varphi'\right\|^2_{L_2((0,T_1);H)}\\ + \|A\psi\|^2_{L_2((0,T_2);H)} + \|A\psi'\|^2_{L_2((0,T_2);H)}\,,$$

et

$$\mathcal{V} = \big\{F = (f,\, \varphi,\, \psi) : f \in L_2(D;H),\;\; A^{1/2}\varphi,\; A^{1/2}\varphi' \in L_2((0,\, T_1);H),\\ \psi,\; \psi' \in L_2((0,\, T_2);H)\big\}\,,$$

avec la norme

$$\|F\|^2_{\mathcal{V}} = \|f\|^2_{L_2(D;H)} + \left\|A^{1/2}\varphi\right\|^2_{L_2((0,T_1);H)} + \left\|A^{1/2}\varphi'\right\|^2_{L_2((0,T_1);H)}\\ + \|\psi\|^2_{L_2((0,T_2);H)} + \|\psi'\|^2_{L_2((0,T_2);H)}\,.$$

Théorème 3.4.2 *On suppose que :*

$$(\mathscr{H}_4) \qquad \begin{array}{l} f \in L_2(D;H),\;\; A^{1/2}\varphi,\; A^{1/2}\varphi' \in L_2((0,\, T_1);H), \\ \xi,\; \xi' \in L_2((0,\, T_2);H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0). \end{array}$$

Alors on a :

$$\left\|\frac{\partial v_\alpha(T_1,\, .)}{\partial t_2} - \xi'\right\|_{L_2((0,T_2);H)} \longrightarrow 0,\; \text{quand } \alpha \longrightarrow 0. \tag{49}$$

Preuve. Considérons l'opérateur linéaire G_α défini de $\mathcal{V}$ dans $L_2((0,\, T_2);H)$,
$F = (f,\, \varphi,\, \psi) \to G_\alpha F = \dfrac{\partial v_\alpha(T_1,\, t_2)}{\partial t_2}$, où v_α résout le problème $(IVP)_\alpha$.
De la définition de G_α, l'inégalité (48) peut s'écrire sous la forme :

$$\|G_\alpha F\|^2_{L_2((0,T_2);H)} \leq C_2(T_1)\, \|F\|^2_{\mathcal{W}}\,, \tag{50}$$

ce qui montre que l'opérateur G_α est borné.

De l'inégalité (35) on a $\|G_\alpha F - \psi'\|_{L_2((0,T_2);H)} \longrightarrow 0$, $\alpha \longrightarrow 0$, pour tout F satisfaisant la condition $(\mathscr{H}_3)$. Grâce à la densité de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{V}$, on déduit que

$$\|G_\alpha F - \psi'\|_{L_2((0,T_2);H)} \longrightarrow 0,\; \text{quand }\; \alpha \longrightarrow 0,$$

pour tout $F \in \mathcal{V}$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.4.2. $\square$

On définit :

$$w_\alpha^*(t_1,\, t_2) = \int_0^{t_2} w_\alpha(t_1,\, s_2)ds_2, \quad v_\alpha^*(t_1,\, t_2) = \int_0^{t_2} v_\alpha(t_1,\, s_2)ds_2,$$

$$\xi^* = \int_0^{t_2} \xi(s_2)ds_2, \quad f^*(t_1,\, t_2) = \int_0^{t_2} f(t_1,\, s_2)ds_2 + \varphi'(t_1),$$

où $w_\alpha(t_1,\, t_2)$ (resp. $v_\alpha(t_1,\, t_2)$) résout le problème $(FVP)_\alpha$ (resp. $(IVP)_\alpha$).

Il est clair que les fonctions $w_\alpha^*(t_1,\, t_2)$ et $v_\alpha^*(t_1,\, t_2)$ résolvent les problème suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_\alpha^*(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A_\alpha w_\alpha^*(t) = f^*(t), \\ w_\alpha^*(t_1,\, 0) = 0 \\ w_\alpha^*(T_1,\, t_2) = \xi^*(t_2), \end{cases} \qquad (FVP)_\alpha^*$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_\alpha^*(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A v_\alpha^*(t) = f^*(t), \\ v_\alpha^*(t_1,\, 0) = 0, \\ v_\alpha^*(0,\, t_2) = w_\alpha^*(0,\, t_2) = \psi_\alpha^*(t_2) \end{cases} \qquad (IVP)_\alpha^*$$

Remarque 3.4.1 Le problème $(FVP)_\alpha^*$ (resp. $(IVP)_\alpha^*$) est un cas particulier de $(FVP)_\alpha$ (resp. $(IVP)_\alpha$).

Grâce au théorème 3.4.2 on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.4.3 *On suppopse que :*

$$(\mathscr{H}_5) \qquad \begin{array}{l} f^* \in L_2(D; H), \;\; \varphi,\; \varphi' \in L_2((0,\, T_1); H), \\ \xi,\; \xi' \in L_2((0,\, T_2); H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0). \end{array}$$

Alors on a :

$$\left\| \frac{\partial v_\alpha^*(T_1,\, .)}{\partial t_2} - \frac{d\xi^*}{dt_2} \right\|_{L_2((0,\, T_2); H)} = \|v_\alpha(T_1,\, .) - \xi\|_{L_2((0,\, T_2); H)} \longrightarrow 0, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0. \qquad (51)$$

Si de plus

$$(\mathscr{H}_6) \qquad \begin{array}{l} Af^* \in L_2(D; H), \;\; A\varphi,\; A\varphi' \in L_2((0,\, T_1); H), \\ A\xi,\; A\xi' \in L_2((0,\, T_2); H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0), \end{array}$$

alors on a l'estimation :

$$\|v_\alpha(T_1,\,.) - \xi\|_{L_2((0,T_2);H)} \leq$$

$$\alpha C_3(T_1,\,T_2)\Big\{\|Af^*\|^2_{L_2(D;H)} + \|A\varphi\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + \|A\varphi'\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + \|A\xi\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} + \|A\xi'\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)}\Big\}, \tag{52}$$

où $C_3(T_1,\,T_2) = 32\max(1,\,T_1,\,T_1^2)\times\max(1,\,T_1T_2^2)$.

Conclusion

On donne ici une comparaison entre les résultats obtenus en utilisant la méthode $Q.R.$, et ceux obtenus en utilisant la méthode $Q.R.M.$:

• **La méthode Q.R.**

Théorème 1.

On suppose que :

$$(\mathscr{H}_1(Q.R.)) \qquad \begin{array}{l} Af \in L_2(D; H), \;\; A^2\varphi,\; A^{3/2}\varphi' \in L_2((0,\, T_1); H), \\ A\xi,\; A\xi' \in L_2((0,\, T_2); H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0). \end{array}$$

Sous la condition $(\mathscr{H}_1(Q.R.))$, on a l'estimation d'erreur :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v_\alpha(T_1,\, .)}{\partial t_2} - \xi' \right\|_{L_2((0,T_2);H)} \leq\; & \alpha\, C_1(T_1,\, T_2) \Big\{ \|Af\|_{L_2(D;H)} + \|A\xi'\|_{L_2((0,\,T_2);H)} \\ & + \|A^2\varphi\|_{L_2((0,\,T_1);H)} + \left\|A^{3/2}\varphi'\right\|_{L_2((0,\,T_1);H)} \Big\}. \end{aligned}$$

Théorème 2.

On suppopse que :

$$(\mathscr{H}_2(Q.R.)) \qquad \begin{array}{l} Af^* \in L_2(D; H), \;\; A\varphi,\; A\varphi' \in L_2((0,\, T_1); H), \\ A\xi,\; A\xi' \in L_2((0,\, T_2); H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0), \end{array}$$

Sous la condition $(\mathscr{H}_2(Q.R.))$, on a l'estimation d'erreur :

$$\begin{aligned} & \|v_\alpha(T_1,\, .) - \xi\|_{L_2((0,T_2);H)} \leq \\ & \quad \alpha C_2(T_1,\, T_2) \Big\{ \|Af^*\|^2_{L_2(D;H)} + \|A\varphi\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + \|A\varphi'\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} \\ & \qquad + \|A\xi\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} + \|A\xi'\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} \Big\}. \end{aligned}$$

• **La méthode Q.R.M.**

Théorème 1.

On suppose que :

$$(\mathscr{H}_1(Q.R.M.)) \qquad \begin{array}{l} Af \in L_2(D; H), \;\; A^{3/2}\varphi,\; A^{3/2}\varphi' \in L_2((0,\, T_1); H), \\ A\xi,\; A\xi' \in L_2((0,\, T_2); H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0). \end{array}$$

Sous la condition $(\mathscr{H}_1(Q.R.M.))$, on a l'estimation d'erreur :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v_\alpha(T_1,\, .)}{\partial t_2} - \xi' \right\|_{L_2((0,T_2);H)} \leq\; & \alpha\, C_3(T_1,\, T_2) \Big\{ \|Af\|_{L_2(D;H)} + \|A\xi'\|_{L_2((0,\,T_2);H)} \\ & + \|A^2\varphi\|_{L_2((0,\,T_1);H)} + \left\|A^{3/2}\varphi'\right\|_{L_2((0,\,T_1);H)} \Big\}. \end{aligned}$$

Théorème 2.

On suppose que :

$$(\mathscr{H}_2(Q.R.M.)) \qquad \begin{array}{l} Af^* \in L_2(D;H), \;\; A\varphi, \; A\varphi' \in L_2((0,\,T_1);H), \\ A\xi, \; A\xi' \in L_2((0,\,T_2);H) \;\text{ et }\; \varphi(T_1) = \xi(0), \end{array}$$

Sous la condition $(\mathscr{H}_2(Q.R.M.))$, on a l'estimation d'erreur :

$$\begin{aligned} &\|v_\alpha(T_1,\,.) - \xi\|_{L_2((0,T_2);H)} \leq \\ &\qquad \alpha C_4(T_1,\,T_2)\Big\{\|Af^*\|^2_{L_2(D;H)} + \|A\varphi\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} + \|A\varphi'\|^2_{L_2((0,\,T_1);H)} \\ &\qquad\qquad + \|A\xi\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)} + \|A\xi'\|^2_{L_2((0,\,T_2);H)}\Big\}. \end{aligned}$$

Où $C_i(T_1,\,T_2),\; i = \overline{1,4}$ sont des constantes positive indépendante de v_α.

▶ On remarque que l'hypothèse $(\mathscr{H}_1(Q.R.M.))$ est plus faible que l'hypothèse $(\mathscr{H}_1(Q.R.))$. Ce qui montre que la méthode $(Q.R.M.)$ possède un effet régularisant meilleur par rapport à la méthode $(Q.R.)$.

▶ Problème ouvert

On note par $\mathscr{C}_{_{FVP}}(f,\,\varphi,\,\xi)$ la classe des fonctions pour laquelle le problème (FVP) admet une solution, c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions $F = (f,\,\varphi,\,\xi)$ telles que $v = \mathscr{R}_{_{FVP}}F \in L_2(D;H)$, où $\mathscr{R}_{_{FVP}}$ est la résolvante du problème (FVP).

La question qu'on se pose est la suivante : caractériser l'ensemble $\mathscr{C}_{_{FVP}}(f,\,\varphi,\,\xi)$ et construire une famille d'opérateurs régularisante $\mathscr{B}_\alpha(t_1,\,t_2) \in \mathscr{L}(H)$ dans le sens :

$$\forall F \in \mathscr{C}_{_{FVP}}(f,\,\varphi,\,\xi), \quad \|\mathscr{B}_\alpha F - v\|_{L_2(D;H)} \longrightarrow 0, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0,$$

et trouver les conditions de régularité sur F, pour qu'on puisse estimer l'erreur et la vitesse de convergence. Cette question est très délicate, mais elle mérite d'être étudiée.

N.B. *Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans un proceeding d'articles sélectionnés édité par Cambridge Scientific Pulishers* [22].

Chapitre 4

Méthode de quasi-réversibilité modifiée pour un problème de Cauchy mal posé

4.1 Introduction

Soit H un espace de Hilbert complexe, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $\|.\|$ et $\langle .,. \rangle$.

On considère le problème de Cauchy rétrograde suivant :

$$u'(t) + Au(t) = 0, \;\; 0 < t < T, \quad u(T) = f, \qquad (FVP)$$

où $A : \mathcal{D}(A) : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire, non-borné, avec

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = H, \quad A^* = A, \quad \exists \gamma > 0, \; \langle Au, \, u \rangle \geq \gamma \|u\|^2, \;\; \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Le problème consiste à déterminer $u(t)$ pour $0 \leq t < T$ à partir de la connaissance de la condition finale $u(T) = f$.

Il est bien connu que ce type de problèmes est fortement mal posé au sens d'HADAMARD [57], c'est-à-dire : même si la solution existe et unique, elle ne dépend pas continûment de f. Puisque le semigroupe $S(t) = e^{-tA}$ est irréversible, on souhaite trouver un opérateur $S_\alpha(t)$, $\alpha > 0$ "proche" de $S(t)$ dans un certain sens, de façon que le problème (FVP) soit bien posé.

Parmi les stratégies d'approche de ce type de questions, on peut citer la méthode de quasi-réversibilité proposée par LIONS & LATTÈS [75]. L'idée principale de cette méthode consiste à remplacer l'opérateur A dans l'équation (FVP) par $A_\alpha = g_\alpha(A)$.

Dans la méthode originale [75] Lattès & Lions proposent $g_\alpha(A) = A - \alpha A^2$, pour obtenir un problème bien -posé dans le sens inverse du temps, et dans la méthode de quasi-réversibilité modifiée [48], Gajewski & Zaccharias Gajewski proposent $g_\alpha(A) = A(I + \alpha A)^{-1}$.
On indique que lorsque en utilisant cette méthode, on est confronté à certaines difficultés. La première résulte du terme correcteur ($\alpha \mathbf{A^2}$) (opérateur d'ordre deux) ce qui induit une difficulté sérieuse pour l'implémentation numérique, et la seconde consiste dans le fait que le coefficient d'erreur ($e(\alpha)$) résultant d'une petite perturbation de la donnée f est de l'ordre $\mathbf{e}^{\frac{1}{\alpha}}$. Pour toutes ces raisons, on propose une modification de cette méthode, en introduisant une nouvelle perturbation :

$$A_\alpha = g_\alpha(A) = -\frac{1}{pT} \ln \left(\alpha + e^{-pTA}\right), \quad \alpha > 0,\ p \geq 1.$$

Le premier avantage de cette perturbation résulte du fait que ($A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$), ce qui implique une position correcte du problème perturbé dans les deux directions du temps. Le deuxième avantage réside dans la possibilité d'établir des résultats meilleurs (optimalité de la méthode) par rapport aux résultats obtenus précédement.

4.2 Préliminaires

Dans cette section nous présentons les notations et le cadre fonctionnel qui seront utilisés dans notre analyse.
On note par $\{E_\lambda,\ \lambda \geq \gamma > 0\}$ la résolution de l'identité associée à l'opérateur A.
Soit $S(t) := e^{-tA} = \int\limits_\gamma^\infty e^{-t\lambda}\, dE_\lambda \in \mathscr{L}(H)$, $t \geq 0$, le semi-groupe engendré $-A$. Quelques propriétés de base de $S(t)$ sont données par le théorème suivant :

Théorème 4.2.1 (see [90], Chap. 2, théorème 6.13, p. 74) *Pour cette famille d'opérateurs on a :*

1. $\|S(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$;
2. *la fonction* $t \longmapsto S(t),\ t > 0$, *est analytique ;*
3. *pour tout* $r \geq 0$ *et* $t > 0$, *l'opérateur* $S(t) \in \mathscr{L}(H, \mathcal{D}(A^r))$;
4. *pour tout entier* $k \geq 0$ *et* $t > 0$, $\|S^{(k)}(t)\| = \|A^k S(t)\| \leq c(k) t^{-k}$;

5. *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A^r)$, $r \geq 0$ *on a* $S(t)A^r x = A^r S(t)x$.

Théorème 4.2.2 *Pour* $t > 0$, $S(t)$ *est auto-adjoint, injectif et à image dense*

$$(S(t) = S(t)^*, \ \ \overline{\mathcal{R}(S(t))} = H).$$

Preuve. Le cas $t = 0$ est trivial. On suppose que $t > 0$.
A étant auto-adjoint, donc $S(t)^* = (e^{-tA})^* = e^{-tA^*} = e^{-tA}$, d'où $S(t)^* = S(t)$. Soient $t_0 > 0$ et $h \in \mathcal{N}(S(t_0))$. L'identité $S(t_0)h = 0$ implique $S(t)S(t_0)h = 0 = S(t_0+t)h$ pour tout $t > 0$. Or la fonction $F(t) = S(t_0+t)h$ est analytique, donc par prolongement analytique $S(t)h = 0$ pour tout $t > 0$. De la représentation $R(\lambda; A)h = (A+\lambda)^{-1}h = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA} h \, dt = 0$ découle $h = 0$ (car $R(\lambda; A)$ est bijective). D'où $\mathcal{N}(S(t_0) = \{0\}$. Puisque $t_0 > 0$ est arbitraire, on a alors $\mathcal{N}(S(t)) = \{0\}$ pour tout $t > 0$.
D'après la relation

$$\overline{\mathcal{R}(S(t))} = \mathcal{N}(S(t))^\perp = \{0\}^\perp = H,$$

on conclut que $\mathcal{R}(S(t))$ est dense dans H. □

► On note ici que ce résultat est un cas particulier du théorème 1.6.5 (voir rappels).

► Par un calcul direct moyennant le caractère auto-adjoint et la positivité de l'opérateur A on montre l'injectivité de $S(t) = e^{-tA}$. En effet, notons $A_\alpha = A(I+\alpha A)^{-1}$, $S_\alpha(t) = e^{tA_\alpha}$, $G_\alpha = \alpha A^2 (I+\alpha A)^{-1}$, $B_\alpha(t) = e^{-tG_\alpha}$, $\alpha > 0$. Il est clair que A_α, $G_\alpha^{-1} \in \mathscr{L}(H)$. Soient $t_0 > 0$ et $h \in \mathcal{N}(S(t_0))$. On a $S(t_0)h = 0$, ce qui implique $S_\alpha(t_0)S(t_0)h = B_\alpha(t_0)h = 0$ pour tout $\alpha > 0$. Par passage à la limite quand α tend vers zéro, on obtient $\lim\limits_{\alpha \to 0} B_\alpha(t_0)h = h = 0$. Ce qui montre que $\mathcal{N}(S(t_0)) = \{0\}$. En conclusion, pour tout $t > 0$, $S(t)$ est injectif et $\mathcal{R}(S(t))$ est dense dans H. □

Remarque 1 Si on remplace A par $B = pA$ dans le théorème 4.2.2, on obtient alors $\mathcal{N}(S(pt)) = \{0\}$ et $\overline{\mathcal{R}(S(pt))} = H$, $p > 0$, $t > 0$.
On définit :

$$\mathcal{C}_\theta(A) = \{\phi \in H : \ \|\phi\|_\theta^2 = \int\limits_\gamma^{+\infty} e^{2T\theta\lambda} \, d\|E_\lambda \phi\|^2 < +\infty\}, \quad \theta \geq 0.$$

De la définition de $\mathcal{C}_\theta(A)$ on a les inclusions topologiques suivantes :

$$\mathcal{C}_{\theta_2}(A) \subseteq \mathcal{C}_{\theta_1}(A), \quad \theta_2 \geq \theta_1.$$

On aura besoin aussi de ce lemme technique :

Lemme 4.2.1 *Pour* $x \geq 0$ *et* $\tau \in [0,1]$, *on a*

$$(1+x)^{\tau} - 1 \leq \tau x (1+x)^{\tau} (1+\tau x)^{-1}.$$

La preuve est basée sur un simple calcul différentiel.

Remarque 2 Le calcul fonctionnel pour les opérateurs auto-adjoints et le lemme 4.2.1 jouent un grand rôle dans les calculs utitlisés dans cette analyse.

4.3 Méthode de quasi-réversibilité modifiée

On introduit maintenant la méthode de quasi-réversibilité modifée pour régulariser le problème (FVP).

Description de la méthode :

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit v_α la solution du problème perturbé suivant :

$$v'_\alpha(t) + A_\alpha v_\alpha(t) = 0, \;\; 0 \leq t < T, \quad v_\alpha(T) = f, \qquad (FVP)_\alpha$$

où l'opérateur A est remplacé par A_α.

$\boxed{\mathbf{2}}$ On injecte la condition initiale

$$v_\alpha(0) = \varphi_\alpha$$

dans le problème :

$$u'_\alpha(t) + A u_\alpha(t) = 0, \;\; 0 < t \leq T, \quad u_\alpha(0) = \varphi_\alpha, \qquad (IVP)_\alpha$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Enfin, on montre que

$$\Phi_\alpha(f) = \|u_\alpha(T) - f\| \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

4.4 Analyse de la méthode

4.4.1 Analyse de A_α et ses conséquences

On commence notre analyse par une étude qualitative de la perturbation A_α et ses conséquences. Pour $0 < \alpha \leq \alpha_* = 1 - e^{-\gamma T},\ p \geq 1$, on définit :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= g_\alpha(A) = -\frac{1}{pT} \ln \left(\alpha + e^{-pTA}\right) \\ &= \int_\gamma^\infty -\frac{1}{pT} \ln \left(\alpha + e^{-pT\lambda}\right) dE_\lambda. \end{aligned}$$

Proposition 4.4.1 *On a*

1. $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$ *et* $\|A_\alpha\| \leq \dfrac{1}{pT} \ln \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$;
2. $A_\alpha = A_\alpha^* \geq 0$ *et* $A_\alpha A^\theta v = A^\theta A_\alpha v,\ v \in \mathcal{D}(A^\theta),\ \theta \geq 0$;
3. $\forall v \in \mathcal{D}(A),\ \lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \|A_\alpha v - Av\| = 0$;
4. $\forall v \in H$, $S_\alpha(t)v = e^{-tA_\alpha}v \longrightarrow S(t)v, \quad \alpha \longrightarrow 0.$

Preuve.

1. La propriété $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$ découle directement des propriétés de la fonction $g_\alpha(\lambda),\ \lambda \geq \gamma$. En effet, le choix de α nous permet d'écrire

$$\alpha + e^{-pT\gamma} \leq \alpha + e^{-T\gamma} \leq 1,$$

ce qui implique que

$$\underline{g_\alpha} := g_\alpha(\gamma) = -\frac{1}{pT} \ln \left(\alpha + e^{-pT\gamma}\right) \geq 0.$$

D'autre part

$$\overline{g_\alpha} := \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} g_\alpha(\lambda) = -\frac{1}{pT} \ln(\alpha) > 0.$$

On remarque que $g'_\alpha(\lambda) > 0$, ce qui montre que $g_\alpha \nearrow$ et $\sup\limits_{\lambda \geq \gamma} g_\alpha(\lambda) = \overline{g_\alpha}$. D'après La représentation spectrale de $g_\alpha(A)$ et les propriétés de $g_\alpha(\lambda),\ \lambda \geq \gamma$, on conclut que $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$.

2. La propriété (2) résulte directemet du calcul fonctionnel et les propriétés de A.

3. Soit $v \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$A_\alpha v = -\frac{1}{pT} \ln \left(\alpha + e^{-pTA} \right) A^{-1} A v.$$

Notons

$$B_\alpha = -\frac{1}{pT} \ln \left(\alpha + e^{-pTA} \right) A^{-1} = \int_\gamma^{+\infty} M_\alpha(\lambda)\, dE_\lambda,$$

où $M_\alpha(\lambda) = -\frac{1}{pT} \ln \left(\alpha + e^{-pT\lambda} \right) \lambda^{-1}$. De la définition de α, on remarque que $M_\alpha(\lambda) \geq 0$, pour tout $\lambda \geq \gamma$. De plus

$$M_\alpha(\lambda) = 1 - \frac{1}{pT} \ln \left(1 + \alpha e^{pT\lambda} \right) \lambda^{-1} \geq 0.$$

Ce qui implique que $M_\alpha(\lambda) \leq 1$, pour tout $\lambda \geq \gamma$. Par conséquent, l'opérateur B_α est uniformément borné, i.e., $\|B_\alpha\| \leq 1$, $\forall\, 0 < \alpha \leq 1 - e^{-\gamma T}$.
Soit $v = e^{-pTA}h$, $h \in H$. On calcule

$$\|(B_\alpha - I)v\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} \left(\frac{1}{pT} \ln(1 + \alpha e^{pT\lambda})\lambda^{-1} \right)^2 e^{-2pT\lambda}\, d\|E_\lambda h\|^2. \qquad (a_\alpha)$$

En vertu de " $\ln(1 + x) \leq x,\ x \geq 0$ " la quantité (a_α) peut être domineé comme suit :

$$\|(B_\alpha - I)v\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p\gamma T} \right)^2 \|h\|^2 \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0,$$

ce qui montre que $B_\alpha v \longrightarrow v$ dans H, quand $\alpha \longrightarrow 0$, $\forall v \in \mathcal{R}(S(pT))$. Mais $\mathcal{R}(S(pT))$ est dense dans H et B_α est uniformément borné sur H. Ainsi, par le théorème du prolongement par continuité, on a

$$\forall\, v \in H, \quad B_\alpha v \longrightarrow v, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

En particulier pour $v \in \mathcal{D}(A)$, on obtient

$$A_\alpha v = B_\alpha A v \longrightarrow Av, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

4. Puisque $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$, alors on peut définir

$$S_\alpha(t) = e^{-tA_\alpha} = \left(\alpha + e^{-pTA} \right)^{\frac{t}{pT}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} A_\alpha^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $\|S_\alpha(t)\| \leq 1,\ t \geq 0$. D'où $S_\alpha(t),\ t \geq 0$ est un semi-groupe de contraction sur H.

On a

$$\frac{d}{dt} S_\alpha(t) = -A_\alpha(t) S_\alpha(t)$$

et

$$\begin{aligned} S_\alpha(t) - S_\beta(t) &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\Big(S_\beta(t-\tau)S_\alpha(\tau)\Big)\,d\tau \\ &= \int_0^t \Big(S_\beta(t-\tau)S_\alpha(\tau)(A_\beta - A_\alpha)\Big)\,d\tau. \end{aligned}$$

D'où, $\forall t \geq 0,\ \ 0 < \alpha,\ \beta \leq 1 - e^{-\gamma T},\ \ h \in \mathcal{D}(A)$, on obtient l'estimation

$$\|S_\alpha(t)h - S_\beta(t)h\| \leq t\|A_\beta h - A_\alpha h\|,$$

ce qui montre que $\{S_\alpha(t)h\}$ est une suite de Cauchy dans H, uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ (voir (3) dans la proposition 4.4.1).

Comme $S_\alpha(t)$ est une contraction et $\mathcal{D}(A)$ est dense H, alors la limite

$$S_\alpha(t)h \longrightarrow \widetilde{S}(t)h,\ \ \alpha \longrightarrow 0,\quad t \geq 0$$

se prolonge pour tout $h \in H$ et uniformément par rapport à $t \in [0, T]$. Il est clair que $\widetilde{S}(t) \in \mathscr{L}(H)$ est un semi-groupe de contraction sur H.

Soit $h \in \mathcal{D}(A)$, $t > 0$, alors

$$\begin{aligned} \|S(t)h - S_\alpha(t)h\| &= \left\| \int_0^t \frac{d}{d\tau}\Big(S(\tau)S_\alpha(t-\tau)h\Big)\,d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|S_\alpha(t-\tau)(A - A_\alpha)S(\tau)h\|\,d\tau \\ &\leq \int_0^t \|(A - A_\alpha)S(\tau)h\|\,d\tau. \end{aligned}$$

De l'inégalité

$$\|A_\alpha S(\tau)h\| = \|B_\alpha A S(\tau)h\| \leq \|S(\tau)Ah\|$$

vient

$$\|(A_\alpha - A)S(\tau)h\| \leq 2\|S(\tau)Ah\|.$$

Puisque $\|S(\tau)Ah\|$ est continue comme fonction de t, une application du théorème de Lebesgue de la convergence dominée donne

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0}\|S(t)h-S_\alpha(t)h\|\leq\int_0^t\lim_{\alpha\longrightarrow 0}\|(A-A_\alpha)S(\tau)h\|\,d\tau=0.$$

Ce qui implique que $S_\alpha(t)\longrightarrow S(t)=\widetilde{S}(t)$ sur $\mathcal{D}(A)$, quand $\alpha\longrightarrow 0$. Grâce à la densité de $\mathcal{D}(A)$ dans H, on conclut que $S_\alpha(t)\longrightarrow S(t)=\widetilde{S}(t)$ sur H, quand $\alpha\longrightarrow 0$.

Remarque 3 Par un calcul direct et en utilisant le lemme 4.2.1, on peut montrer que

$$\forall h\in H,\quad S_\alpha(t)h\longrightarrow S(t)h,\ \ \alpha\longrightarrow 0.$$

En effet, soit $v=e^{-ptA}h,\ h\in H$, on calcule

$$\|S_\alpha(t)v-S(t)v\|^2=\int_\gamma^{+\infty}\left(\left(\alpha+e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{t}{pT}}-e^{-t\lambda}\right)^2e^{-2pT\lambda}\,d\|E_\lambda h\|^2.$$

En vertu du lemme 4.2.1 et $\alpha+e^{-pT\lambda}\leq 1$, la fonction

$$M_\alpha(\lambda)=\left(\alpha+e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{t}{pT}}-e^{-t\lambda}=e^{-t\lambda}\,\left(\left(1+\alpha e^{pT\lambda}\right)^{\frac{t}{pT}}-1\right)$$

peut être domineé comme suit :

$$M_\alpha(\lambda)\leq\frac{\frac{t}{pT}\alpha e^{pT\lambda}\left(\alpha+e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{t}{pT}}}{\left(1+\frac{t}{pT}\alpha e^{pT\lambda}\right)}\leq\frac{\alpha}{p}e^{pT\lambda}.$$

Ce qui implique

$$\|S_\alpha(t)v-S(t)v\|^2=\int_\gamma^{+\infty}M_\alpha(\lambda)^2e^{-2pT\lambda}\,d\|E_\lambda h\|^2\leq\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2\|h\|^2\longrightarrow 0,\ \ \alpha\longrightarrow 0.$$

En vertu de la densité de $\mathcal{R}(S(pT))$ et $\|S_\alpha(t)\|\leq 1$, $t\geq 0$, on conclut que

$$\forall h\in H,\quad S_\alpha(t)h\longrightarrow S(t)h,\ \ \alpha\longrightarrow 0.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 4.4.1. $\square$

Remarque 4 Dans la proposition 4.4.1, on a justifié que la perturbation proposée donne une bonne approximation de A. Ainsi, on peut espérer que cette perturbation produira un effet régularisant significatif.

4.4.2 Résultats de convergence

Il est important de caractériser la classe admissible pour laquelle le problème (FVP) admet une solution. La réponse à cette question est donnée par le lemme suivant :

Lemme 4.4.1 *Le problème (FVP) admet une solution unique, si et seulement si $f \in \mathcal{C}_1(A)$. Dans ce cas, elle est donnée par :*

$$u(t) = e^{(T-t)A} f. \tag{1}$$

Preuve. Si $f \in \mathcal{C}_1(A)$, i.e., $\int\limits_{\gamma}^{+\infty} e^{2T\lambda}\, d\|E_\lambda f\|^2$ est finie, alors on définit $u(t) = e^{(T-t)A} f = e^{-tA} e^{TA} f$. On voit que $u(t)$ donnée par cette expréssion vérifie l'équation (FVP). Maintenant, si on suppose que $u(t) = e^{(T-t)} f$ est solution de l'équation (FVP), alors $u(0) = e^{TA} f \in H$ si et seulement si $\|u(0)\| = e^{TA} f = \int\limits_{\gamma}^{+\infty} e^{2T\lambda}\, d\|E_\lambda f\|^2$ est finie. $\square$

Remarque 5 On donne une autre démonstration du lemme 4.4.1 en utilisant le théorème de Picard dans sa version continue (voir rappels, théorème 1.8.3).

En utilisant le cadre théorique des semi-groupes et les propriétés de $S_\alpha(t)$, on montre le théorème suivant :

Théorème 4.4.1 *Pour tout $f \in H$, la fonction*

$$v_\alpha = e^{(T-t)A_\alpha} f = \Big(\alpha + e^{-pTA}\Big)^{-\frac{(T-t)}{pT}} f \tag{2}$$

est l'unique solution du problème $(FVP)_\alpha$ et elle dépend continûment de f.

Pour montrer la dépendance continue de v_α de f, on calcule

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t)\| &= \left\| \Big(\alpha + e^{-pTA}\Big)^{-\frac{(T-t)}{pT}} f \right\| \\ &\leq \left(\tfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{T-t}{pT}} \|f\| \leq \left(\tfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\| = e(\alpha)\|f\|. \end{aligned} \tag{3}$$

A partir de (2) on construit

$$\varphi_\alpha = v_\alpha(0) = \Big(\alpha + e^{-pTA}\Big)^{-\frac{1}{p}} f.$$

Théorème 4.4.2 *Le problème $(IVP)_\alpha$ est bien posé, et sa solution est donnée par :*

$$u_\alpha(t) = S(t)\varphi_\alpha = e^{-tA}\left(\alpha + e^{-pTA}\right)^{-\frac{1}{p}} f. \tag{4}$$

Théorème 4.4.3 *Pour tout $f \in H$, $\|u_\alpha(T) - f\| \longrightarrow 0$, quand $\alpha \longrightarrow 0$.*

Preuve. On calcule

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} H_\alpha(\lambda)^2 \, d\|E_\lambda f\|^2, \tag{5}$$

où

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda) &= \frac{\left((\alpha + e^{-pT\lambda})^{\frac{1}{p}} - e^{-T\lambda}\right)}{\left(\alpha + e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{e^{-T\lambda}\left((\alpha e^{pT\lambda} + 1)^{\frac{1}{p}} - 1\right)}{\left(\alpha + e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Si on pose $x = \alpha e^{pT\lambda}$, $\tau = \frac{1}{p}$, alors d'après le lemme 2.1, on peut estimer la fonction $H_\alpha(\lambda)$ comme suit :

$$H_\alpha(\lambda) \leq \frac{\alpha}{\alpha + pe^{-pT\lambda}}. \tag{6}$$

De (6), on déduit que

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \int_\gamma^{+\infty} \left\{\frac{\alpha}{\alpha + pe^{-pT\lambda}}\right\}^2 d\|E_\lambda f\|^2. \tag{7}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons N tel que $\int_N^{+\infty} d\|E_\lambda f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 \;\leq\; & \int_\gamma^{N} \left\{\frac{\alpha}{\alpha + pe^{-pT\lambda}}\right\}^2 d\|E_\lambda f\|^2 \\ & + \int_N^{+\infty} \left\{\frac{\alpha}{\alpha + pe^{-pT\lambda}}\right\}^2 d\|E_\lambda f\|^2. \end{aligned} \tag{8}$$

De (8) on tire

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 e^{2pTN}\|f\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

En prenant α tel que $\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 e^{2pTN}\|f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$, on achève la démonstration. $\square$

► Si $\alpha < p^2T\gamma$ et $f \in \mathcal{D}(A)$, alors on a l'estimation suivante :

$$\|u_\alpha(T) - f\| \leq \left(\frac{pT}{1 + \ln\left(\frac{p^2T\gamma}{\alpha}\right)} \right) \|Af\|.$$

En effet, de l'inégalité (7), on a

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \int_\gamma^{+\infty} \left\{ \frac{\alpha}{(\alpha + pe^{-pT\lambda})\lambda} \right\}^2 \lambda^2 \, d\|E_\lambda f\|^2.$$

D'autre part

$$\left\{ \frac{\alpha}{\alpha\lambda + \lambda pe^{-pT\lambda}\lambda} \right\} \leq \left\{ \frac{\alpha}{\alpha\lambda + \gamma pe^{-pT\lambda}} \right\} = \Delta_\alpha(\lambda).$$

La fonction $\Delta_\alpha(\lambda)$ est positive, $\Delta_\alpha(\lambda) \longrightarrow 0$ quand $\lambda \longrightarrow +\infty$ et atteint son maximum en $\lambda^* = -1/pT \ln\left(\alpha/p^2T\gamma\right)$. Donc $\Delta_\alpha(\lambda) \leq \Delta_\alpha(\lambda^*) = \dfrac{pT}{1 + \ln\left(\frac{p^2T\gamma}{\alpha}\right)}$. □

Théorème 4.4.4 *Si $f \in \mathcal{C}_\theta(A)$, $p \geq 1$, $0 < \theta < 1$, alors $\|u_\alpha(T) - f\|$ tend vers zéro, avec l'ordre de convergence $\alpha^{\frac{\theta}{p}}$.*

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &= \int_\gamma^{+\infty} \left\{ \frac{H_\alpha(\lambda)}{e^{\theta T\lambda}} \right\}^2 e^{2\theta T\lambda} \, d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \int_\gamma^{+\infty} G_\alpha(\lambda)^2 e^{2\theta T\lambda} \, d\|E_\lambda f\|^2, \end{aligned} \tag{10}$$

où

$$G_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha}{\left(\alpha + pe^{-pT\lambda}\right) e^{\theta T\lambda}} > 0.$$

Une dérivation simple par rapport à λ donne

$$G'_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha T e^{\theta T\lambda} \left(p(p-\theta)e^{-pT\lambda} - \theta\alpha \right)}{\left((\alpha + pe^{-pT\lambda})e^{\theta T\lambda} \right)^2}.$$

D'où $G'_\alpha(\lambda) = 0$ si $\lambda = \lambda^* = \dfrac{1}{pT} \ln\left(\dfrac{p(p-\theta)}{\theta\alpha}\right)$. Puisque $G'_\alpha(\lambda) > 0$ si $\lambda < \lambda^*$, $G'_\alpha(\lambda) < 0$ si $\lambda > \lambda^*$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} G_\alpha(\lambda) = 0$, alors λ^* est un point critique qui réalise le maximum de G_α. Ainsi, on a l'inégalité

$$G_\alpha(\lambda) \leq G_\alpha(\lambda^*) = c(p, \theta)\alpha^{\frac{\theta}{p}}, \tag{11}$$

où $c(p,\theta)=\left(\dfrac{1}{p}\right)^{\frac{p+\theta}{p}}(p-\theta)^{\frac{p-\theta}{p}}\theta^{\frac{\theta}{p}}\leq 1.$
En combinant (10) et (11), on obtient

$$\|u_\alpha(T)-f\|\leq c(p,\theta)\alpha^{\frac{\theta}{p}}\|f\|_\theta. \tag{12}$$

Notons que dans le cas $1\leq p\leq\theta$, on a l'estimation suivante :

$$\|u_\alpha(T)-f\|\leq \alpha\|f\|_\theta. \tag{13}$$

Théorème 4.4.5 *Pour tout $f\in H$, le problème (FVP) admet une solution u si et seulement si la suite $\varphi_\alpha=u_\alpha(0)$ converge dans H. Dans ce cas, on a $u_\alpha(t)$ converge uniformément vers $u(t)$ quand $\alpha\longrightarrow 0$.*

Preuve. On suppose que $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi_\alpha=\varphi_0$. Posons $w(t)=S(t)\varphi_0$. On calcule

$$\begin{aligned}\|w(t)-u_\alpha(t)\| &= \|S(t)\varphi_0-S(t)\varphi_\alpha\|\\ &= \|S(t)(\varphi_0-\varphi_\alpha)\|\\ &\leq \|\varphi_0-\varphi_\alpha\|.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|w(t)-u_\alpha(t)\|\leq\|\varphi_0-\varphi_\alpha\|\longrightarrow 0,\ \text{quand}\ \alpha\longrightarrow 0.$$

Puisque $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0}u_\alpha(T)=f$ et $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0}u_\alpha(T)=w(T)$, alors de l'unicité de la limite, on déduit $w(T)=f$. Ainsi, $w(t)=S(t)\varphi_0$ résout le problème (FVP) et vérifie la condition $w(T)=f$. On suppose maintenant que le problème (FVP) est résoluble, et soit $u(t)$ sa solution. D'après le lemme 4.4.1 on a $u(0)=S(-T)f\in H$, i.e., $\|u(0)\|^2=\|f\|_1^2=\int\limits_\gamma^{+\infty}e^{2T\lambda}\,d\|E_\lambda f\|^2<\infty$.
Soient $N>0$ et $\varepsilon>0$ tels que $\int\limits_N^{+\infty}e^{2T\lambda}\,d\|E_\lambda f\|^2<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
On calcule

$$\|u_\alpha(0)-u(0)\|^2=\int_\gamma^{+\infty}F_\alpha^2(\lambda)\,d\|E_\lambda f\|^2,$$

où

$$F_\alpha(\lambda)=e^{T\lambda}-\left(\alpha+e^{-pT\lambda}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

En vertu du lemme 4.2.1 et par un calcul simple, on peut estimer la quantité $F_\alpha(\lambda)$ comme suit :

$$F_\alpha(\lambda) \leq \left(\frac{\alpha e^{pT\lambda}}{p + \alpha e^{pT\lambda}} \right) e^{T\lambda} = K_\alpha(\lambda) e^{T\lambda}.$$

D'où

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \int_\gamma^{+\infty} K_\alpha^2(\lambda) e^{2T\lambda}\, d\|E_\lambda f\|^2 \leq I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_\gamma^{N} K_\alpha^2(\lambda) e^{2T\lambda}\, d\|E_\lambda f\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 e^{2(p+1)TN} \|f\|^2,$$

$$I_2 = \int_N^{+\infty} K_\alpha^2(\lambda) e^{2T\lambda}\, d\|E_\lambda f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on choisit α telle que $\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 e^{2(p+1)TN} \|f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 < \varepsilon.$$

Ce qui montre que

$$u_\alpha(0) \longrightarrow u(0), \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0.$$

□

Théorème 4.4.6 *Si $f \in \mathcal{C}_{1+\theta}(A)$, $p \geq 1$, $0 < \theta < 1$, alors $\|u_\alpha(0) - u(0)\|$ tend vers zéro, avec l'ordre $\alpha^{\frac{\theta}{p}}$.*

Preuve. Par des calculs similaires à ceux utilisés pour établir les théorèmes 4.4.4 et 4.4.5, on a

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &\leq \int_\gamma^{+\infty} K_\alpha(\lambda)^2 e^{-2\theta T\lambda} e^{2(1+\theta)T\lambda}\, d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \int_\gamma^{+\infty} G_\alpha(\lambda)^2 e^{2(1+\theta)T\lambda}\, d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq (G_\alpha^\infty)^2 \|f\|_{1+\theta}^2, \end{aligned}$$

avec $G_\alpha^\infty = \sup_{\lambda \geq \gamma} G_\alpha(\lambda) \leq c(p, \theta) \alpha^{\frac{\theta}{p}}$ (voir l'estimation (11)). □

A partir des théorèmes 4.4.5-4.4.6, il s'en suit

Corollaire 4.4.1 *Si $f \in \mathcal{C}_{1+\theta}(A)$, $\theta > 0$, alors $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\|$ converge vers zéro, avec l'ordre $\alpha^{\frac{\theta}{p}}$*

On termine ce travail par la construction d'une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (FVP).

Définition 4.4.1 [83] Une famille d'opérateurs $\{R_\alpha(t),\ \alpha > 0,\ t \in [0, T]\} \subset \mathscr{L}(H)$ est dite famille d'opérateurs régularisante pour le problème (FVP) si pour toute solution $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ du problème (FVP) avec la condition finale f, et pour tout $\delta > 0$, il existe un choix $\alpha(\delta) > 0$, tel que

$$\alpha(\delta) \longrightarrow 0,\ \delta \longrightarrow 0, \tag{$\mathscr{R}_1$}$$

$$\|R_{\alpha(\delta)}(t) f_\delta - u(t)\| \longrightarrow 0,\ \delta \longrightarrow 0, \tag{$\mathscr{R}_2$}$$

pour tout $t \in [0, T]$ dés que f_δ satisfait $\|f_\delta - f\| \leq \delta$.

On définit $R_\alpha(t) = e^{-tA}\left(\alpha + e^{-pTA}\right)^{-\frac{1}{p}}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$; il est clair que $R_\alpha(t) \in \mathscr{L}(H)$.
Dans ce qui suit, on montre que $R_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (FVP).

Théorème 4.4.7 *On suppose que $f \in \mathcal{C}_1(A)$, alors $(\mathscr{R}_2)$ a lieu.*

Preuve. On a

$$H_\alpha(t) = \|R_\alpha(t) f_\delta - u(t)\| \leq \|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| + \|R_\alpha(t) f - u(t)\| = \Delta_1(t) + \Delta_2(t), \tag{14}$$

où

$$\Delta_1(t) = \|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \delta, \tag{15}$$

et

$$\Delta_2(t) = \|R_\alpha(t) f - u(t)\|. \tag{16}$$

Choisissons $\alpha = \sqrt{\delta}$, alors $\alpha(\delta) \longrightarrow 0$, $\delta \longrightarrow 0$, et

$$\Delta_1(t) \leq \delta^{\frac{2p-1}{2p}} \longrightarrow 0,\ \ \delta \longrightarrow 0. \tag{17}$$

En vertu du théorème 4.4.5, on obtient

$$\Delta_2(t) = \|u_\alpha(t) - u(t)\| \longrightarrow 0,\ \ \delta \longrightarrow 0, \tag{18}$$

uniformément par rapport à t. En combinant (17) et (18) on obtient

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|R_\alpha(t)f_\delta - f\| \longrightarrow 0, \;\; \delta \longrightarrow 0. \tag{19}$$

Ce qui montre que $R_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (FVP).$\square$
Par des calculs similaires à ceux utilisés pour établir les résultats précédents, on montre que

$$\Delta_2(t) \leq C(p,\, t,\, T)\alpha^{\frac{t}{pT}}\|f\|_1, \quad t > 0, \tag{20}$$

avec

$$C(p,\, t,\, T) = p^{-\frac{pT+t}{pT}}(pT-t)^{\frac{pT-t}{pT}}t^{\frac{t}{pT}}T^{-1} \leq 1.$$

Remarques et conclusion

Pour comparer nos résultats avec les résultats obtenus en utilisant les méthodes $Q.R.$ de Lattès & Lions, la méthode $Q.R.M.$ de Gasewski & Zaccarias, et la méthode $Q.B.V.$, on rappelle les résultats obtenus par ces trois méthodes :

- **La méthode (Q.B.V.) :**

$$u_\alpha(t) = e^{-tA}\left(\alpha + e^{-TA}\right)^{-1} f, \tag{$S_{Q.B.V.}$}$$

avec le coefficient d'erreur $e(\alpha) = 1/\alpha$.

- **La méthode (Q.R.) :**

$$u_\alpha(t) = e^{-tA}e^{T(A-\alpha A^2)}f, \tag{$S_{Q.R.}$}$$

avec le coefficient d'erreur $e(\alpha) = e^{1/\alpha}$.

- **La méthode (Q.R.M.) :**

$$u_\alpha(t) = e^{-tA}e^{TA(A+\alpha A)^{-1}}f, \tag{$S_{Q.R.M.}$}$$

avec le coefficient d'erreur $e(\alpha) = e^{1/\alpha}$.

1. A partir de l'estimation (3), on remarque que le coefficient d'erreur $e(\alpha)$ est d'ordre $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$.
2. Dans le cas $p = 1$, la représentation de $u_\alpha(.)$ coïncide avec la représentation $(S_{Q.B.V.})$ obtenue par la méthode **(Q.B.V.)** développée dans [27], avec le même coefficient d'erreur $e(\alpha)$ d'ordre $\frac{1}{\alpha}$.
3. Dans les méthodes **(Q.R.)** et **(Q.R.M.)** [48, 75]) le coefficient d'erreur $e(\alpha)$ est de l'ordre $e^{\frac{1}{\alpha}}$.
On remarque que pour $p \geq 1$, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} < e^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/p} < \frac{1}{\alpha}$ pour $p > 1$.
Cette comparaison montre que notre approche possède un effet régularisant meilleur par rapport aux résultats obtenus par les méthodes développées dans [27, 48, 75].

Généralisation

Considérons les problèmes de Cauchy suivants :

$$u_t(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad u(0) = f, \qquad (CP)_1$$

$$u_t(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad u(T) = f. \qquad (CP)_2$$

Où A est un opérateur linéaire, non-borné, auto-adjoint et changeant de signe, avec $0 \in \rho(A)$, c'est-à-dire : $\sigma(A) \subset]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
On sait, d'après la théorie des opérateurs auto-adjoints, qu'on peut écrire :

$$h = \int_{\mathbb{R}} dE_\lambda h = \int_{\mathbb{R}_-} dE_\lambda h + \int_{\mathbb{R}_+} dE_\lambda h = h_- + h_+, \quad h \in H,$$

i.e., l'espace de Hilbert H se décompose en somme directe $H = H_- \oplus H_+$, et

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_\lambda = \int_{\mathbb{R}_-} \lambda\, dE_\lambda + \int_{\mathbb{R}_+} \lambda\, dE_\lambda = A_- + A_+.$$

Il est bien connu (par symétrie) que le problème $(CP)_1$ (resp. $(CP)_2$) est mal posé. Dans le but de régulariser ces problèmes, on propose la famille d'opérateurs suivante :

$$\begin{aligned} R_\alpha(t) &= e^{(T-t)A_-} \Big(\alpha e^{pTA_-} + (1-\alpha)\Big)^{-\frac{1}{p}} \\ &= +e^{-tA_+} \Big(\alpha + (1-\alpha)e^{-pTA_+}\Big)^{-\frac{1}{p}} \\ &= R_\alpha^-(t) + R_\alpha^+(t), \quad 0 < \alpha < 1, \ \ p \geq 1. \end{aligned}$$

On clôture notre analyse par le résulat suivant :

Lemme 4.4.2 *Si $f = f_- + f_+ \in H$, alors $(CP)_1$ (resp. $(CP)_2$) admet une solution unique, si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}_-} e^{-2T\lambda}\, d\|E_\lambda f_-\|^2 < +\infty \;\; (rep. \int_{\mathbb{R}_+} e^{2T\lambda}\, d\|E_\lambda f_+\|^2 < +\infty).$$

Preuve. Si $\int_{\mathbb{R}_-} e^{-2T\lambda}\, d\|E_\lambda f_-\|^2 < +\infty$, alors on définit $u(t) = e^{-tA_-} f_- + e^{-tA_+} f_+$. On vérifie aisément que $u(t)$ résout $(CP)_1$. Inversement, soit $u(t)$ la solution du problème $(CP)_1$. Alors $u(T) = h = h_- + h_+ = e^{-TA_-} f_- + e^{-TA_+} f_+ \in H$. Ce qui implique que $h_- = e^{-TA_-} f_- \in H$, i.e., $\|h_-\|^2 = \int_{\mathbb{R}_-} e^{-2T\lambda}\, d\|E_\lambda f_-\|^2 < +\infty$. Par le même raisonnement, on montre la seconde partie. $\square$

On définit $u_\alpha(t) = R_\alpha(t) f$. Par la même méthodologie utilisée dans le cas où A est défini positif, on montre que :

$$u_\alpha(T) \longrightarrow f, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0, \tag{21}$$

$$u_\alpha(0) \longrightarrow f, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 1, \tag{22}$$

et $R_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème $(CP)_1$ (resp. $(CP)_2$).

N.B. *Les résultats obtenus dans ce chapitre ont été acceptés pour publication dans le journal GMJ* [23].

Conclusion et perspectives

• Dans ce travail, on a étudié deux classes de problèmes bien et mal posés. Dans la première classe, on a étudié un problème non local de nature très complexe, et on a montré l'éfficacité de la méthode des inégalités énergétiques pour l'étude de ce type de problèmes. Quant à la deuxième classe, elle comporte l'étude de deux problèmes mal posés. L'approche utilisée dans cette analyse repose sur la méthode de quasi-réversibilité, qui nous permet de construire des quasi-solutions stables et d'établir de meilleurs résultats.

• Notre futur objectif sera consacré aux problèmes avec des opérateurs inconnus (incertains) : Puisque le modèle physique procède d'une idéalisation de la réalité physique et repose sur des hypothèses simplificatrices, il est donc également une source d'incertitudes. Toute théorie de régularisation doit donc tenir compte du caractère éventuellement incomplet ou incertain. La stratégie idéale est donc de faire une analyse de sensibilité de toute méthode de régularisation et de mesurer le défaut induit par la modélisation, ce qui suggère d'introduire un nouveau concept de régularisation capable de nous donner une marge de confiance aux résultas de l'approximation.

• Il nous reste aussi une tache plus complexe (liée au chapitre 3) avec la question suivante : Notons $\mathscr{C}_{_{FVP}}(f,\, \varphi,\, \xi)$ la classe des fonctions pour laquelle le problème (FVP) admet une solution, c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions $F = (f,\, \varphi,\, \xi)$ telles que $v = \mathscr{R}_{_{FVP}} F \in L_2(D; H)$, où $\mathscr{R}_{_{FVP}}$ est la résolvante du problème (FVP).

La question qu'on se pose est la suivante : caractériser l'ensemble $\mathscr{C}_{_{FVP}}(f,\, \varphi,\, \xi)$ et construire une famille d'opérateurs régularisante $\mathscr{B}_\alpha(t_1,\, t_2) \in \mathscr{L}(H)$ dans le sens :

$$\forall F \in \mathscr{C}_{_{FVP}}(f,\, \varphi,\, \xi), \quad \|\mathscr{B}_\alpha F - v\|_{L_2(D;H)} \longrightarrow 0, \;\; \alpha \longrightarrow 0,$$

et trouver les conditions de régularité sur F, pour qu'on puisse estimer l'erreur et la vitesse de convergence. Cette question est très délicate, mais elle mérite d'être étudiée.

Bibliographie

[1] S. Agmon, L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), 121-139.

[2] È. M. Aksen, *The quasi-inversion method for some hyperbolic equations*, Diff. Uravn., **27** (1991), No. 6, 1089-1092, (Russian).

[3] È. M. Aksen, N.I. Yurchuk, *An a priori estimate for the quasi-inversion method*. Diff. Uravn., **29** (1993), No. 8, 1447-1450, (Russian). [Translation in Differential Equations **29** (1993), No. 8, 1254-1256].

[4] D.R. Akhmetov, M.M. Lavrentiev and Jr.R. Spigeler, *Existence and uniqueness of classical solutions to certain nonlinear integro-differential Fokker-Plank type equations*, E.J.D.E., **24** (2002), 1-17.

[5] D.R. Akhmetov, M.M. Lavrentiev and Jr.R. Spigeler, *Singular perturbations for certain partial differential equations without boundary-layers*, Asymptotic Analysis **35** (2003), 65-89.

[6] G.A. Anastassiou, G.R. Goldestein and J.A. Goldstein, *Uniqueness for evolution in multidimensional time*, Nonlinear Analysis, **64** (2006), 33-41.

[7] K. A. Ames, On the comparison of solutions of related properly and improperly posed Cauchy problems for first order operator equations. SIAM J. Math. Anal., 13 (1982), 594-606.

[8] K.A. Ames, L.E. Payne and P.W. Schaefer, *Energy and pointwise bounds in some nonstandard parabolic problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., A **134** (2004), 1-9.

[9] K.A. Ames, L.E. Payne and J.C. Song, *On two classes of nonstandard parabolic problems*, J. Math. Anal. Appl, **311** (2005), 254-267.

[10] K.A. Ames, R.J. Hughes, *Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space*, Semigroup Forum, Vol. **70** (2005), No 1, 127-145.

[11] E.F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Springer-Verlag, (1961).

[12] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *Some new boundary value problems for a class of partial differential equations. Part I*, Diff. Uravn., **4**, (1968), 1081-1101, (Russian). [English. transl-Diff. Equat., 770-775].

[13] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *A mixed problem for certain pluri-parabolic differential equations*, Diff. Uravn., **6** (1970), 1624-1630 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 1234-1239].

[14] N.I. Brich, N.I. Yurchuk, *Goursat Problem for abstract linear differential equation of second order*, Diff. Urav., Vol. **7** (1971), No. **7**, 1001-1030 (Russian). [English. transl-Diff. Equat, 770-779].

[15] A. Bensoussan, P.L. Chow and J.-L. Lions, *Filtering theory for stochastic processes with two-dimensional time parameter*, Math. Comput. Simulation **22** (1980), No. 3, 213-221.

[16] J.C. Baez, I.E. Segal and Z.-F. Zohn, *The global Goursat problem and scattering for nonlinear wave equations*, J. Funct. Anal., **93** (1990), 239-269.

[17] H. Brezis, *Analyse fonctionelle, Théorie et application*, Masson (1993).

[18] L. Byszewski, V. Lakshmikantham, *Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space*, Appl. Anal., **40** No. 1 (1991), 11-19.

[19] J. Baumeister, A. Leitao, *On iterative methods for solving ill-posed problems modled by partial differential equations*, J. Inv. Ill-Posed Problems., Vol. **9.1** (2001), 1-17.

[20] A. Brenner, *The Mixed Problems For Multidimensional Time Polyparabolic Operators*, http ://www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/95/95-322.ps.gz.

[21] A. Brenner, *Polyparabolic equations with two-dimensional time*, http ://linux46.ma.utexas.edu/mp_arc/c/95/95-105.ps.gz.

[22] N. Boussetila, F. Rebbani, *The modified quasi-reversibility method for ill-posed evolution problems with two-dimensional time*, Analytic Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE-2003), 15-23, Cambridge Scientific publishers (2005).

[23] N. Boussetila, F. Rebbani, *The modified quasi-reversibility method for a class of ill-posed Cauchy problems* (to appear in GMJ).

[24] V.I. Chesalin, *A problem with nonlocal boundary conditions for certain abstract hyperbolic equations*, Diff. Uravn., **15** (1979), No. 11, 2104-2106, (Russian).

[25] V.I. Chesalin, *A problem with nonlocal boundary conditions for abstract hyperbolic equations*, Vestn. Beloruss. Gos. Univ. Ser. **1** Fiz. Mat. Inform., (1998), No. 2, 57-60, (Russian).

[26] J.R. Cannon, *The One-Dimensional Heat Equation*, in The Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume **23**, Addison-Wesley, Reading, MA., (1984).

[27] G.W. Clark, S.F. Oppenheimer, *Quasireversibility methods for non-well posed problems*, Elect. J. Diff. Eqns., **8** (1994), 1-9.

[28] D. Colton, Analytic theory of partial differential equation, Pitman, Boston, (1980).

[29] A.S. Carraso, J. Sanderson and J. Hyman, *Digital removal of random media image degradations by solving the diffusion equation backwards in time*, SIAM J. Numer. Anal., **15** (1978), 344-367.

[30] A.S. Carraso, *Logarithmic convexity and the " slow evolution" constraint in ill-posed initial value problems*, SIAM J. Math. Anal., Vol. **30** (1999), No. 3, 479-496.

[31] I. Cioranescu, V. Keyantuo, *Entire regularizations of strongly continuous groups and products of analytic semigroups*, Proc. Math. Soc., Vol. **128** (2000), No. 12, 3587-3593.

[32] A.A. Dezin, *General questions in theory of boundary value problems*, Moscow. Nauka, English trans, Springer Verlag, (1980).

[33] E.B. Davies, *One parameter semigroups*, Academic Press, London, (1980).

[34] Yu.L. Daletskiĭ, N.D. Tsvintarnaya, *Diffusion random functions of multidimensional time*, Ukrain. Mat. Zh., **34** (1982), No. 1, 20-24, (Russian).

[35] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part **I***, Interscience, New-York, (1985).

[36] R. deLaubenfles, *C-semigroups and the abstract Cauchy problem*, J. Functional Analysis, **111** (1993), 44-61.

[37] R. deLaubenfels, *Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equation*, Springer, Berlin, (1994).

[38] M. Denche, K. Bessila, *A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems*, J. Math. Anna. Appl., **301** (2005), 419-426.

[39] R.E. Ewing, *The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations*, SIAM J. Math. Anal., Vol. **6** (1975), No. 2, 283-294.

[40] H.W. Engel, W. Rundel, eds., Inverse problems in diffusion processes, SIAM, Philadelphia, (1995).

[41] H.W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic, (2000).

[42] A. Friedmann, *The Cauchy problem in Several time variables*, Journ. of Math. and Mech., **11** (1962), 859-889.

[43] A. Friedmann, W. Littman, *Partially characteristic boundary problems for hyperbolic equations*, Journ. of Math. and Mech., **12** (1963), 213-224.

[44] H.O. Fattorini, *The abstract Goursat problem*, Pacific. J. Math., Vol. **37** (1971), No. 1, 51-83.

[45] L. Garding, *Cauchy's Problem for hyperbolic equations*, University of chicago, Lectures notes, (1957).

[46] N.S. Gencev, *On ultraparabolic equations*, Dok. Akad. Nauk SSSR., **151**, No. 2 (1963), 265-268.

[47] S.G. Gindikin, *A generalization of parabolic differential operators to the case of multidimensional time*, Dokl. Akad. Nauk SSSR., **173** (1967), 499-502, (Russian).

[48] H. Gajewski, K. Zaccharias, *Zur regularisierung einer klass nichtkorrekter probleme bei evolutiongleichungen*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **38** (1972), 784-789.

[49] C.W. Groetsch, *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Pitman, Boston, (1984).

[50] C.W. Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg, Wiesbaden, (1993).

[51] J.A. Goldestein, *Semigoups of linear operators and application*, Oxford University Press, Oxford, (1985).

[52] L. G. Gomboev, *An ill-posed problem for an equation of ultraparabolic type*, Some problems in differential equations and discrete mathematics, 44-51, Novosibirsk. Gos. Univ., Novosibirsk, 1986, (Russian).

[53] D. Gilbard, N. Trudinger, *Elliptic partial differentials equations of second order*, Springer-Classic in Mathematics, 1998.

[54] A. Guezane-Lakoud, F. Rebbani, *Strong solution for an abstract non local boundary value problem*, Int. J. Appl. Math., **4** (2000), No. 4, 469-478.

[55] A.V. Gulshak, Properties of solutions of equations containing powers of an unbounded operator, Diff. Eq., Vol. **39**, No. 10 (2003), 1428-1439.

[56] D. Gordeziani , G. Avalishvili and M. Avalishvili, *On nonclassical multi-time evolution equation in abstract spaces*, Bull. Georgian Acad. Sci., Vol. **172**, No. 3 (2005), 384-387.

[57] J. Hadamard, *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*,Yale Uni Press, New Haven, 1923.

[58] E. Hille, R.S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloquium publications, Vol. 31, (1957).

[59] P. Hillion, *The Goursat problem for the homogenous wave equation.* J. Math. Phys, **31** (1990), 1939-1941.

[60] A. Hassanov, J.L. Mueller, *A numerical method for backward parabolic problems with non-selfadjoint elliptic operator*, Applied Numerical Mathematics, **37** (2001), 55-78.

[61] Y. Huang, Q. Zheng, *Regularization for ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups*, J. Differential Equations, Vol. **203** (2004), No. 1, 38-54.

[62] Y. Huang, Q. Zheng, *Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 3005-3012.

[63] A.M. Il′in, *On certain class of ultraparabolic equation*, Dok. Akad. Nauk SSSR., **159**, No. 6 (1964), 1214-1217.

[64] A.M. Il′in, R.Z. Khas'minskiĭ, *On equations of Bownian motion*, Theory Probab.Appl., **9** (3) (1964), 421-444.

[65] M. Iannelli, *Mathematical theory of age-structured population dynamics*, Giardini Editori e Stampatori, Pisa, 1995.

[66] F. John, *Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound*, Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960), 551-585.

[67] S.G. Krein. *Linear Differential Equations in Banach Space*, American Mathematical Society, Providence, RI (1971).

[68] R.J. Knops, ed., Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Math. 316, Springer, New York, (1973).

[69] J. B. Keller. *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, **83** : 107-118, (1976).

[70] R. Kress, *Linear Integral Equations*, vol. **82** of Applied Mathematical Sciences. Springer, (1989).

[71] V.A. Kozlov, V.G. Maz′ya, *On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations*, Leningrad Math. J., **1** (1990), No. 5, 1207-1228.

[72] S.K. Kulkarni, M. T. Nair, *Characterization of closed range operators*, Indian J. Pure and Appl. Math., **31** (4), 353-361, (2000).

[73] V.I. Korzyuk, *The method of enegy inequalities and molifying operators*, Vestnik Belgosuniversiteta. Ser. **1**. Fizika, Matematika, Informatika, **3** (1996), 55-71 (Russian).

[74] J. Leray, *Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients*, Priston, Just for Adv. Study., 1952.

[75] R. Lattès, J. L. Lions, *The Method of Quasireversibility, Applications to Partial Differential Equations*, Amer. Elsevier, New-York, (1969).

[76] H. A. Levine, *Logarithmic convexity and the Cauchy problem for some abstract second-order differential inequalities.* J. Differential Equations, **8** (1970), 34-55.

[77] L. Lorenzi, *An abstract ultraparabolic integrodifferential equation*, Le Mathematiche, Vol. **LIII** (1998), Fascicolo II.

[78] V.P. Mikhailov, *The analytic solutions of Goursat problem for the system of differential equations*, Dok. Akad. Nauk SSSR., (Russian) [English transl : Soviet Math. Doklady **115** (1957), 450-453].

[79] V.P. Mikhailov, Non-analytical solutions of Goursat's problem for a system of differential equations in two independent variables, Dok. Akad. Nauk SSSR., (Russian) [English transl : Soviet Math. Doklady **117** (1957), 759-762].

[80] K. Miller, *Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non-well posed problems*, Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Mathematics, **316** (1973), Springer-Verlag, Berlin, 161-176.

[81] I.V. Mel′nikova, *The method of quasi-reversibility for abstract parabolic equations in a Banach space*, Trudy Inst. Mat. i Meh. Ural. Naučn. Centr Akad. Nauk SSSR Vyp. **17** Metody Rešenija Uslovno-korrekt. Zadač., (1975), 27-38, (Russian).

[82] I.V. Mel′nikova, S.V. Bochkareva, *C-semigroups and regularization of an ill-posed Cauchy problem*, Dok. Akad. Nauk., **329** (1993), 270-273.

[83] I.V. Mel′nikova, *General theory of ill-posed Cauchy problem*, J. Inverse Ill-posed Problems, **3** (1995), 149-171.

[84] I.V. Mel′nikova, *Semigroup, distribution, and regularization methods*, J. Math. Sci. Vol., **104**, No. 2 (2001), 941-1007.

[85] I.V. Mel′nikova, Q. Zheng and J. Zheng, *Regularization of weakly ill-posed Cauchy problem*, J. Inv. Ill-posed Problems, Vol. **10** (2002), No. 5, 385-393.

[86] Z. Nashed, *Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations*, In A. Dold, B. Eckmann (eds.), Constructive and computational methods for differential and integral equations. Springer-Verlag (1974).

[87] L.G. Petrovsky, *Über das Cauchyshe problem für system von linearen partiallen differentialgeinchungen in Gebit der nichtanalystischen funktionen.* Bull. Univ. d'état, Moskow, No. 7, (1938), 1-74.

[88] S.G. Pyatkov, *Solvability of boundary value problems for an ultraparabolic equation : in Nonclassical Equations and Equations of Mixed Type*, Sbornik Nauchnikh Trudov, Institute of Mathematics, Novosibirsk, (1990), 182-197, (Russian).

[89] L.E. Payne, *Improperely Posed Problems in Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, PA, (1975).

[90] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and application to partial differential equations*, Springer-Verlag, (1983).

[91] W.J. Roth, *Goursat problems for* $u_{rs} = Lu$, Indiana. Univ. Math. J., Vol. **2** (1973), No. 8, 779-788.

[92] H. Risken, *The Fokker-Plank Equation. Methods of solution and application*, Springer, Berlin, (1984).

[93] W. Rudin, *Functional analysis*, Mc Graw-hill Inc., New-York, (1991).

[94] F. Rebbani, F. Zouyed, *Boundary value problem for an abstract differential equation with nonlocal boundary conditions*, Maghreb Math. Rev., Vol. **8** (1999), No. 1 & 2, 141-150.

[95] F. Rebbani, N. Boussetila and F. Zouyed, *Boundary value problem for a partial differential equation with nonlocal boundary conditions*, Proceeding of Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Vol.**10** (2001), 122-125.

[96] R.E. Showalter, *The final value problem for evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 563-572.

[97] R.E. Showalter, *Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations*, Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier (1983).

[98] Todd H. Skaggs, Z.J. Kabala, *Recouvering the release history of a ground water contaminant plume : Method of quasi-reversibiliry*, Water Resources Research, Vol. **31** (1995), No. 11, 2969-2973.

[99] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solution of Ill-posed Problems*, Winston & Sons, Washington, DC, (1977).

[100] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag Berlin Heidelber, (1995).

[101] H. Tanabe, *Equations of Evolution*, Pitman, London (1979).

[102] S.A. Tersenov, *Basic boundary value problems for one ultraparabolic equation*, Sebernian Mathematical journal, Vol. **42**, No. 6 (2001), 1173-1189.

[103] A. Tarantola, *Inverse problems theory*, Elsevier, (1987).

[104] V.S. Vladimirov, Yu. N. Drozhzhinov, *Generalized Cauchy problem for an ultraparabolic equation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **31** (1967), 1341-1360, (Russian). [English transl : Math. USSR-Izvestija, **1**, 1285-1304].

[105] R. Volevič, S. G. Gindikin, *The Cauchy problem for ultraparabolic problems*, Diff. Eqs.**II**, MATH USSR SB., (1969), **7** (2), 205-226.

[106] W. Wolfgang, *Parabolic differential equations and inequalities with several time variables*, Math. Z., **191** (1986), No. 2, 319-323.

[107] N.I. Yurchuk, *The Goursat problem for second order hyperbolic equations of special kind*, Diff. Uravn., **4** (1968), (a), 1333-1345, (Russian). [English transl : Diff. Equat., 694-700].

[108] N.I. Yurchuk, *A partialy characteristic mixed boundary value problem with Goursat initial conditions for linear equations with two-dimensional time*, Diff. Uravn., **5** (1969), (b), 898-910, (Russian). [English Trans : Diff. Equat., 652-661].

[109] N.I. Yurchuk, *The method of energy inequalities in the study of operator-differential equations*, Dissertation, Moscow, (1981).