

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



جامعة باجي مختار - عنابة

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR – ANNABA

Faculté : DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

Département : D'ELECTROMECHANIQUE

Année : 2012

## MEMOIRE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER

### *CONTRIBUTION A L'ETUDE DES VIBRATIONS DANS LES MACHINES ELECTRIQUES*

Option :

ELECTROMECHANIQUE

Par

MADDI Alima

DIRECTEUR DE MEMOIRE: M. DIABLI R MCA Université Annaba

DEVANT LE JURY

PRESIDENT:	Mme GHOUL	Prof.	Université Annaba
Examineurs :	Mr. BENSACKER	Prof.	Université Annaba
	Mr. MERIDJET MC	MCA	Université Annaba
	Mr. KHELIF R.	Prof.	Université Annaba

# Remerciements

*Mes remerciements les plus vifs et ma profonde gratitude sont adressés à Mr DJABJ pour avoir bien voulu m'encadrer*

*Je remercie particulièrement Mr MOUSSAOUI pour ses conseils, son savoir, sa disponibilité et tout le temps précieux qu'il m'a généreusement accordé.*

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail:*

*À ma mère, mon mari CHARAF EDDINE,  
Mes filles HADHMJ et CHAHD.*

*À mes sœurs: SADA, NOUA, FATMA.*

*À mes frères ABD-EL-BAKI et ASSSA*

*MADDI ALMA*

## ملخص

تأثير الاهتزازات الكهربائية المنبثقة و عند تشغيل الآلات الكهربائية علي تصرف عامة و على المر دودي خاصة يكون مجحف.

لاحتواء هذا الشكل بصفة فعالة نبحت وضع العلفة بين للاهتزازات والقيم الكهربائية الخاصة التي تكون سبب الضرر ،ادن تغير عند استغلال الآلات الكهربائية عندما يكون مستوى الاهتزازات مرتفع ، مختلف أجزاء الآلة الساكن والمتحرك في اغلب الأحيان مهمة جدا (عدم النسق خروج من التلمة ). أن التصرف لهذا الأخير ناتج عن خروج التلمة لمجموعة من اللفائف و عزلها يكون محل دراستل

إننا نعرف إن أحسن ظروف الاستغلال للآلة الكهربائية ، مهما كان نظام تشغيلها ، يحصل عليها في نقطة مثالية (ظروف الحرارة العادية اذن ضياع ومرد وديج مقبولتين ) انه بديهي أن عند تغير الثغرة الهوائية الناتج عن خروج مجموعة اللفائف من التلمة ، القيم الخصوصية ،(نقصد هنا القيم الالكترومغناطيسية) تتغير

ولان مردود الآلات الكهربائية مربوط حصري ا بالضياع، هذه الأخيرة تتعلق بالتيار للجزء الساكن والجزء المتحرك ، الجهد الميكانيكي ،شكل التلمة ، توزيع الحقل المغناطيسي على دائرة الجزء الساكن الحقل الكهربائي المنبثق من توتر التغذية ، تصرف العازل ، أعمال سابقة (أنضر الفهرس ) قد تمت لأجل دراسة إمكانية تخفيض نفوذ الاهتزازات على تشغيل الآلات الكهربائية

كلمات المفتاح : الآلات الكهربائية ، الاهتزازات ، الحقول المغناطيسية، الضياع،.....

**Résumé:** l'influence des vibrations générées pendant le fonctionnement des machines électriques sur leur comportement en général et particulièrement sur leur rendement est très préjudiciable. Afin de cerner le problème d'une manière efficace, nous cherchons à établir la ou les relations entre les vibrations et les autres grandeurs caractéristiques électriques qui peuvent être influencées, donc modifiées, lors de l'exploitation des machines électriques.

Lorsque le niveau des vibrations est élevé, les différentes parties de la machine subissent des conséquences, le plus souvent, très importantes, (désalignement, sortie des sections d'enroulement etc...). Le comportement de ce dernier phénomène provoqué par une sortie de l'encoche d'une section (barre) d'enroulement et son isolation fait partie de notre étude.

On sait que les meilleures conditions d'exploitation d'une machine électrique, quelque soit son régime de fonctionnement, sont obtenues au point nominal (condition de température normale, donc pertes et rendement acceptables). IL est évident que lorsqu'il y a variation de l'entrefer due à la sortie de l'encoche d'une section ou barre d'enroulement, les grandeurs caractéristiques, (on cible ici les grandeurs électromagnétiques) changent. Comme le rendement de ces machines est strictement lié aux pertes, celles-ci dépendent des courants statorique et rotorique, des efforts mécaniques, de la forme des encoches, de la répartition du champ magnétique sur la circonférence du stator, du champ électrique engendré par la tension d'alimentation, du comportement de l'isolation, etc...).

Des travaux antérieurs (voir bibliographie) ont été entrepris pour étudier la possibilité d'atténuer l'influence des vibrations sur le fonctionnement des machines électriques.

**Mots clés :** machines électriques, vibrations, champs magnétiques, pertes.

Abstract :

The influence of the vibrations generated during the operation of the electric machines on their behavior in general and particularly on their output is very prejudicial. In order to determine the problem in an effective way, we search to establish the relations between the electric vibrations and the other characteristic sizes which can be influenced, therefore modified, at the time of the exploitation of the electric machines.

When the level of the vibrations is high, the various parts of the machine undergo consequences, generally, very significant, (misalignment, left the sections of rolling up etc...). the behavior of this last phenomenon caused by an exit of the notch of a section (bars) rolling up and its insulation belongs to our study.

It is known that the best conditions of operating of an electric machine, some is its operation, are obtained at the nominal point (condition of normal temperature, therefore acceptable losses and output). It is obvious that when there is a variation of the air-gap due to the exit of the notch of a section or bars rolling up, the characteristic sizes, (electromagnetic fields here are targeted) change. As the output of these machines is strictly related to the losses, those depend on the currents stator and rotor, the mechanical efforts, the form of the notches, the distribution of the magnetic field on the circumference of the stator, the electric field generated by the supply voltage, of the behavior of the insulation, etc...).

Former work (see bibliography) was undertaken to study the possibility of attenuating the influence of the vibrations on the operation of the electric machines.

**Key words** : electrical machines, vibrations, magnetic fields, losses.

# Sommaire

Introduction générale.....

## CHAPITRE I : Analyse Bibliographique

### I – 1 Introduction

- principe physique..... 12
- Description du banc d'essais..... 15

### I – 2 Vibration d'une machine tournante électrique

- Définition et mesure des vibrations.....16
- Origine des vibrations d'une machine tournante électrique.....17
- Analyse d'un signal vibratoire.....18
- Exemple de signal vibratoire de la machine de test..... 23

### I – 3 Modélisation physique du transfert

- Préliminaires.....26
- Effet des enroulements statoriques.....27
- Expression de la force de maxwell.....28
- Effet de la carcasse statorique.....29
- Transfert global entre les courants de commande et les vibrations engendrées.....30

### I\_ 4 Conclusion

## CHAPITRE II : Méthode classique du contrôle actif

### II – 1 Intorduction

### II – 2 Introduction au contrôle actif classique

- Généralités .....33
- Choix d'une stratégie de commande.....37
- Controlleur <<feed forward>> optimal.....39
- Algorithme classique du contrôle actif .....44

### II – 3 Résultats antérieurs

- Principe et objectifs.....46
- La compensation analogique.....47
- La compensation numérique.....48
- Résultats expérimentaux.....49

### II –4 Conclusion

## **CHAPITRE III: Etude théorique du système**

### **III – 1 Introduction**

### **III – 2 Etude des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps**

-Modèle de représentation.....	54
-Définition .....	55
-Domaine temporel.....	56
-Domaine fréquentiel.....	61
-Etude des signaux propres, notion de gain complexe .....	68
-Interprétation du gain complexe matriciel.....	73
-Analyse du gain complexe matriciel.....	78

## **CHAPITRE IV: Résultats et discussion**

### **IV – 3 Application**

-Description du système à analyser.....	88
-Echantillonnage.....	91
-Domaine temporel.....	92
-Domaine fréquentiel.....	94
-gain complexe matriciel.....	96

## **Conclusion générale**



## Introduction générale

Le but du travail consiste à étudier l'influence des vibrations générées pendant le fonctionnement des machines électriques sur leur comportement en général et particulièrement sur leur rendement. Afin de cerner le problème d'une manière efficace, nous nous sommes efforcés de chercher à établir la ou les relations entre les vibrations et les autres grandeurs caractéristiques électriques qui peuvent être influencées, donc modifiées, lors de l'exploitation des machines électriques. Lorsque le niveau des vibrations est élevé, les différentes parties de la machine subissent des conséquences, le plus souvent, très néfastes, (désalignement, sortie des sections d'enroulement etc...). Nous allons nous intéresser au comportement de ce dernier phénomène provoqué par une sortie de l'encoche d'une section (barre) d'enroulement et son isolation

Les meilleures conditions d'exploitation d'une machine électrique, quelque soit son régime de fonctionnement, sont obtenues au point nominal (condition de température normale, donc pertes et rendement acceptables). Il est évident que lorsqu'il y a variation de l'entrefer due à la sortie de l'encoche d'une section ou barre d'enroulement, les grandeurs caractéristiques (on cible ici les grandeurs électromagnétiques) changent. Comme le rendement de ces machines est strictement lié aux pertes, celles-ci dépendent des courants statorique et rotorique, des efforts mécaniques, de la forme des encoches, de la répartition du champ magnétique sur la circonférence du stator, du champ électrique engendré par la tension d'alimentation, du comportement de l'isolation, etc...).

Des travaux antérieurs (voir bibliographie) ont été entrepris pour étudier la possibilité d'atténuer l'influence des vibrations sur le fonctionnement des machines électriques. Le résultat de ces travaux a abouti à la compensation active des vibrations qui ont permis, une atténuation relative de l'effet sur le fonctionnement. Néanmoins, le comportement des grandeurs électromagnétiques affectées de l'effet vibratoire reste à analyser. Lors de l'apparition des vibrations pendant le fonctionnement, comme signalé plus haut, des courants capacitifs agissent sur l'isolation en fonction de son épaisseur. La question qui se pose: quelle épaisseur d'isolation faut-il assurer pour que l'influence soit la plus faible possible afin d'avoir des pertes relativement acceptables, donc un rendement stable. Comment sera l'influence des courants de circulation et capacitifs sur le comportement de la machine. Nous voulons essayer à travers ce travail de répondre à ces questions.

Nous étudions l'influence des vibrations qui apparaissent lors du fonctionnement du groupe de production d'énergie électrique. Nous savons que dans les centrales électriques, ce phénomène est extrêmement gênant et est à la base d'arrêt préjudiciable de la fourniture d'énergie électrique. Le problème le plus fréquent enregistré, parmi tant d'autres déjà cités, est le comportement des paliers sous l'effet des vibrations, désalignement, rupture de métal,...).

Les points de contact des tôles sur le revêtement semi conducteur peuvent être espacés et alors, une force électromotrice induite par le champ magnétique principal apparaît dans le revêtement. Un phénomène de condensateur donne naissance à une autre courante capacitive qui se superpose au courant de circulation. A des tensions différentes, selon la position de la barre dans l'encoche, ce courant prend des valeurs variables.

Comme il a été dit précédemment, nous cherchons à établir l'influence de ces courants sur le fonctionnement de la machine en service, ce qui revient à décrire ces phénomènes par des équations mathématiques dont l'analyse, puisque ces courants sont périodiques, il devrait aboutir à une estimation relativement précise de l'effet de ces courants sur le comportement global.

# *Chapitre I*

# Analyse Bibliographique

Le but de travail de recherche expose dans ce mémoire est de réaliser l'isolation vibratoire d'une machine synchrone, pour la configuration présentée sur la figure 1.1. Le niveau vibratoire global de la machine n'est donc par mis en cause, seule la transmission de ses vibrations doit être atténuée.

## **I-1: Introduction**

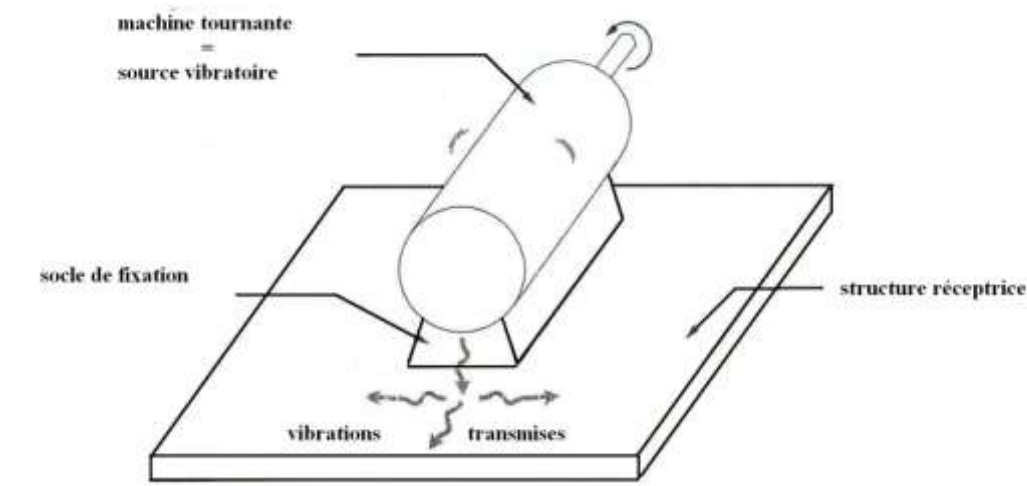
Le but de ce premier chapitre est de spécifier le travail de recherche présenté, c'est-à-dire la compensation des vibrations d'une machine tournante électrique, en utilisant les forces magnétiques comme moyen d'action.

L'objectif du travail, c'est-à-dire, une méthode d'isolation vibratoire d'une machine synchrone le principe physique employé pour atteindre ce but, ainsi que la machine sur laquelle des tests seront effectués, y sont présentés.

Nous détaillons l'origine des vibrations d'une telle machine, et ensuite pailure théorique de son spectre vibratoire à partir des méthodes d'analyse vibratoire .à partir des sources de vibrations définies précédemment, et vérifions ces hypothèses sur un signal expérimental provenant de la machine décrite à la section précédent le paragraphe 1.3.4 permet aussi de détermine les composantes les plus gênantes de ce vibratoire, qui doivent être éliminées en priorité pour atteindre le but fixé. Enfin le modèle mathématique du transfert à travers lequel les forces magnétiques agissent sur les vibrations, est établi. Il s'agit d'un système linéaire variant périodiquement dans le temps (LVPT) nécessitent l'emploi de techniques de compensation appropriées. A la fin ce chapitre, le problème physique est finalement modélisé en termes de traitement de signal, comme la génération de signaux de commande permettant d'atténuer au mieux un signal périodique à système LVPT.

Un problème fréquemment rencontré en analyse vibratoire est celui où une structure vibrante contamine son environnement direct en lui transmettant tout ou une partie de ses vibrations par l'intermédiaire de ses points de fixation. La structure vibrante constitue alors la source de vibrations, tandis que les structures recevant ces vibrations sont appelées les structures réceptrices un exemple simple est représenté sur la figure 1.1, ou les vibrations d'une machine tournante sont transmises à une structure réceptrice par l'intermédiaire du socle de fixation de cette machine.

L'action d'isoler les structures réceptrices des vibrations de la source est appelée isolation vibratoire



**Fig.1.1.** Contamination vibratoire par une machine tournante

[1] consiste à minimiser la transmission des vibrations de la source vers les structures réceptrices, même si cette minimisation peut conduire à augmenter le niveau vibratoire global (c'est à dire spatialement moyenné) de la source [2]. En ce sens, elle est à différencier de l'atténuation vibratoire globale, qui a pour but de minimiser le niveau vibratoire global de la source, mais qui peut provoquer l'augmentation de la quantité de vibrations transmises à son environnement direct. La section suivante expose le principe physique utilisé pour agir sur les vibrations de la machine et réaliser l'isolation vibratoire recherchée.

### ***1.1.1 Principe physique***

Les différentes méthodes de contrôle de vibrations, permettant de réaliser l'atténuation vibratoire globale ou l'isolation vibratoire d'un système donné, sont classées en deux catégories:

- les méthodes de contrôle passives.
- les méthodes de contrôle actives.

La première catégorie regroupe les méthodes consistant à modifier la structure du système .par exemple, dans le cadre de l'isolation vibratoire, les fixations de la source peuvent être

Constituées de matériaux absorbant les vibrations .La forme de la source vibratoire peut aussi être optimisée pour la rendre plus discrète et donc minimiser son niveau vibratoire global (ce principe a par exemple été employé dans [3] sur une machine synchrone). Les méthodes utilisant ce principe ne nécessitent aucun apport supplémentaire d'énergie au système, d'où leur dénomination de « passives ». Malheureusement, leur coût de mise en oeuvre peut rapidement devenir prohibitif (par exemple, changer les matériaux constitutifs ou la forme d'une machine existante), de plus, elles sont peu efficaces sur les vibrations situées dans les basses fréquences (typiquement en dessous de 1 à 2 kHz) [4].

Ces inconvénients peuvent être contournés en utilisant des actionneurs extérieurs au système comme moyens d'action sur les vibrations, parmi les actionneurs les plus couramment utilisés on peut considérer les électroaimants [2], les vérins hydrauliques ou pneumatiques [1], les actionneurs piézoélectriques [1], etc. Pour pouvoir être mis

en œuvre, ils nécessitent un apport d'énergie extérieure, ce qui explique la dénomination de « méthode active ». La bande passante de ces actionneurs permet un contrôle efficace pour les basses fréquences où les méthodes passives n'ont que peu d'effet, et leur coût de revient est directement lié au type et au nombre d'actionneurs utilisés.

Afin de réaliser l'isolation vibratoire d'une machine tournante électrique, on utilise une méthode active sans actionneur. Le rotor et le stator, générant chacun son propre champ d'induction. Leur somme à l'instant  $t$  et à la position angulaire  $\theta$  forme le champ radial total :

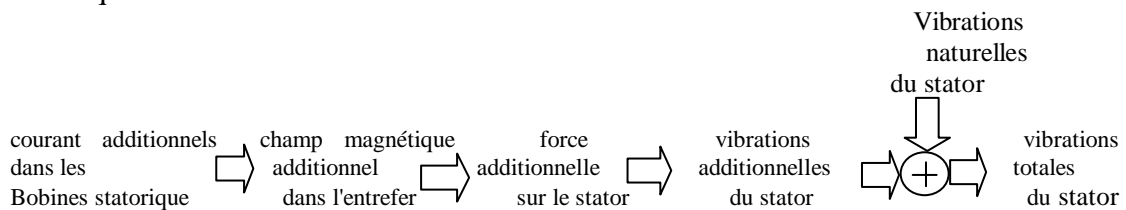
$b^{\rightarrow}(t, \theta)$  Selon [5] et [5bis] que l'élément de surface  $ds$  la carcasse statorique situé à la position angulaire  $\theta$ ,

subit à l'instant  $t$  une force  $f(t, \theta)$  de direction radiale et de module:

$$f(t, \theta) = \frac{\|b^{\rightarrow}(t, \theta)\|^2}{2\mu_0} ds \quad (1.1)$$

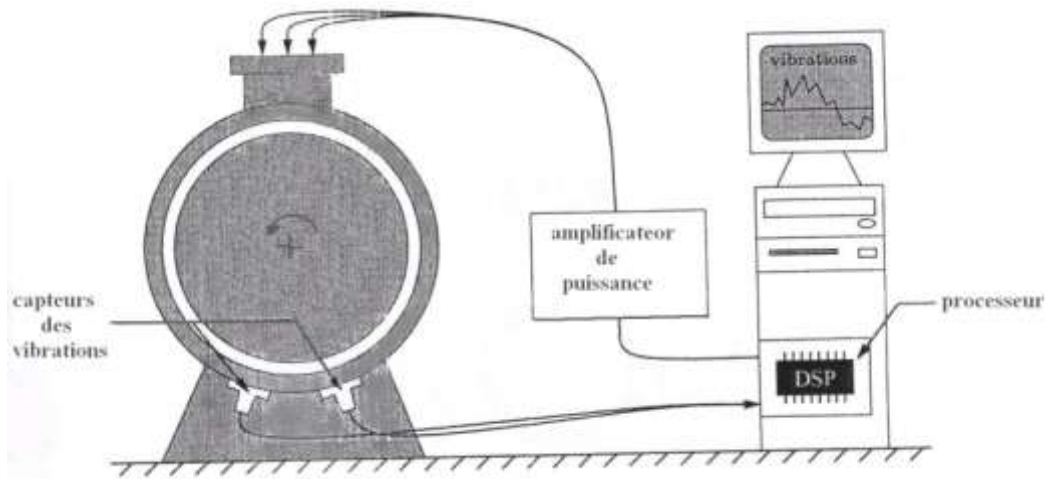
Où  $\mu_0$  est la permittivité du vide et  $\|b^{\rightarrow}(t, \theta)\|$  le module du vecteur  $b^{\rightarrow}(t, \theta)$ .

Cette force, dénommée « force de Maxwell », est donc en tout point de la surface du stator, proportionnelle au carré de l'induction magnétique. C'est en utilisant ce principe que l'on peut espérer provoquées par sa rotation. En effet, supposons que l'on alimente les bobines statoriques avec des courants additionnel appelés « courants de compensation ». Ces courants créent un champ magnétique additionnel dans l'entrefer, qui, d'après la relation (1.1), engendre une force en tout point de la surface du stator. Celui-ci réagit par des vibrations supplémentaires qui, ajoutées à celles générées par la rotation de la machine, forment les vibrations totales de la carcasse statorique. Ce principe physique est résumé par la figure 1.2. Ces vibrations additionnelles, afin de minimiser les vibrations totales du stator au voisinage d'une position angulaire donnée. On pourra alors utiliser cette zone de calme pour fixer la machine et réaliser son isolation vibratoire vis-à-vis de la structure réceptrice. Il faut toutefois garder à l'esprit que la force donnée par (1.1) suit une direction radiale. Par conséquent, les seules vibrations que l'on peut atténuer par cette méthode sont les vibrations statoriques radiales.



**Fig 1.2** Principe physique utilisé

Le principe physique décrit dans cette section permet d'avoir une idée précise de l'implantation pratique d'une telle méthode. Elle est représentée par la figure 1.3, où une coupe transversale de la machine tournante de test est située sur la gauche.



**Fig. 1.3** : Implantation pratique de la méthode

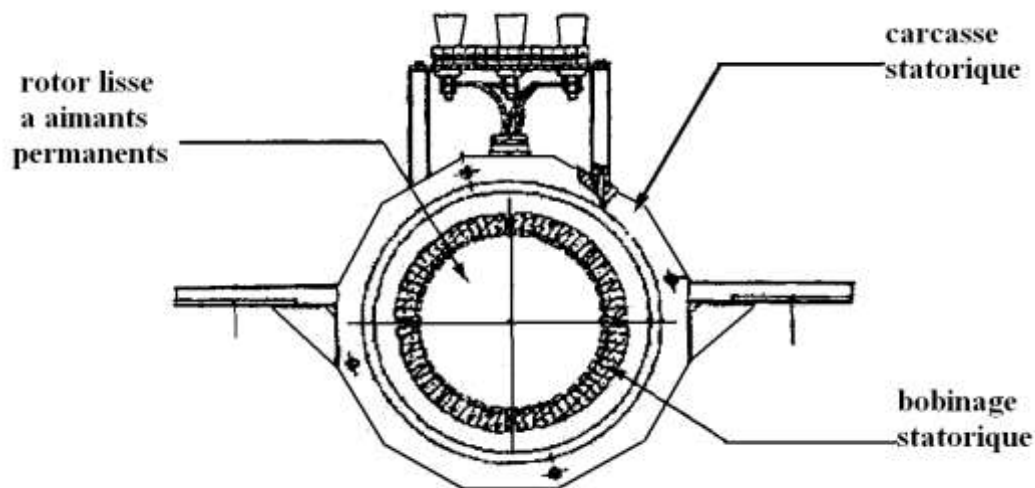
Un ou plusieurs capteurs localisés autour d'une position angulaire donnée, sont utilisés pour mesurer les vibrations statoriques à atténuer. Les signaux ainsi obtenus sont discrétisés, puis un processeur de traitement du signal est chargé d'élaborer les signaux de commande nécessaires à leur minimisation. Les sorties de ce processeur alimentent, par l'intermédiaire d'un amplificateur de puissance, une ou plusieurs des bobines statorique de la machine. Les actionneurs employés (les bobines statorique de la machine) font donc partie intégrante du système cible, ce qui constitue un intérêt économique et pratique considérable, et donne un sens à l'expression de méthode sans actionneur.

Ce principe a été employé pour la première fois dans [6] sur des machines à courant continu. Il a ensuite été adapté aux machines synchrones et implanté sous forme analogique dans [3], puis sous forme numérique dans [7]. Nous verrons dans le second chapitre, qu'un non stationnarité présente dans le transfert entre les courants de commande et les vibrations qu'ils engendrent, amoindrit considérablement les performances obtenues dans cette application. Le but de ce travail de recherche est donc d'élaborer un algorithme de commande prenant en compte ce non stationnarité, et minimisant au mieux les vibrations du stator autour d'une position angulaire donnée.

Après avoir présenté le principe physique utilisé par la méthode de compensation à élaborer, la section suivante décrit les caractéristiques et les particularités du banc d'essais sur lequel cette technique sera testée.

### ***I-1-2 Description du banc d'essais***

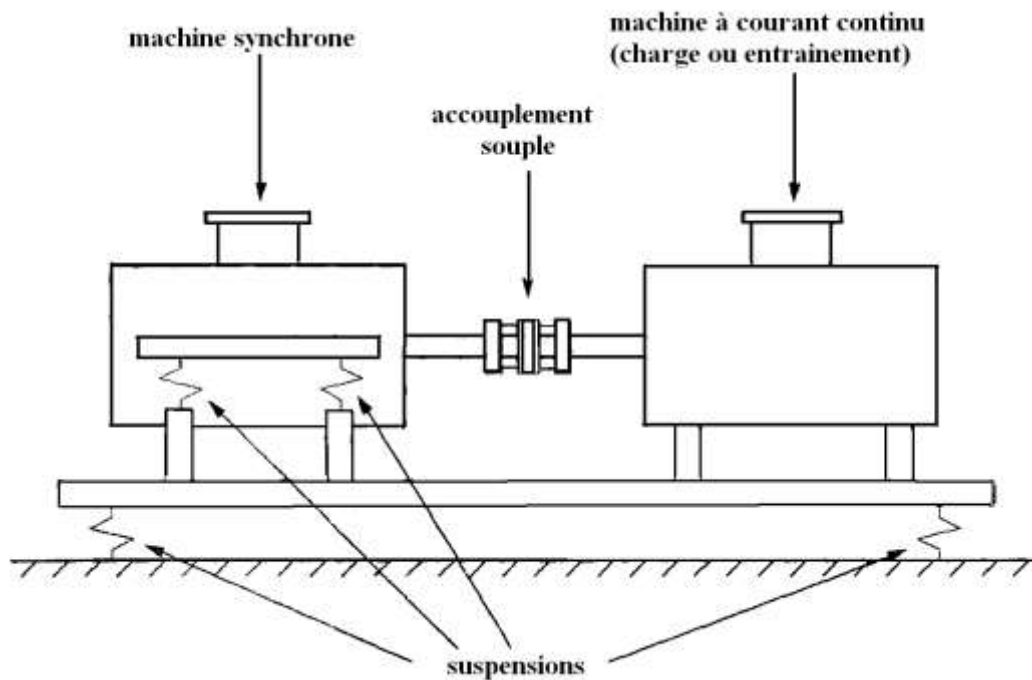
Afin de tester les performances de cette technique d'isolation vibratoire sur une machine réelle, on dispose d'un banc d'essais constitué de deux machines de test, c'est-à-dire celle sur laquelle on doit mettre en œuvre l'isolation vibratoire. C'est une machine synchrone triphasée à deux paires de pôles, d'une puissance de 10 kw. Sa structure est le résultat des travaux de recherche menés dans [4], visant à atténuer son niveau vibratoire global à l'aide de technique de contrôle passif. Sa coupe transversale est représentée sur la figure 1.4. Elle est constituée d'un stator à 36 encoches inclinées



**Fig. 1.4** Coupe transversale de la machine synchrone de test, issue de [3]

Continûment d'un pas dentaire, avec un bobinage à par diamétral. Cette inclinaison contribue fortement à la discrétion vibratoire de la machine [3]. On peut noter sur cette figure l'absence d'ailettes de refroidissement afin de pouvoir disposer les capteurs des vibrations au plus près de la carcasse statorique, et donc la forme et les aimantations ont été optimisées de manière à générer un champ d'induction quasiment sinusoïdal. Le très faible taux d'harmonique de ce champ magnétique permet de limiter les vibrations d'origine électromagnétique [3]. La deuxième machine est à courant continu, et permet d'entraîner la machine de test si celle -ci fonctionne en alternateur, ou de constituer sa charge si elle fonctionne en moteur. La figure 1.5 Montre la structure générale de ce banc d'essais. L'accouplement, ainsi que les diverses suspensions, ont pour rôle d'isoler la machine de test des vibrations du monde extérieur et de celles engendrées par la machine à courant continu.





**Fig. 1.5** Structure générale du banc d'essais

Les mesures vibratoires effectuées sur la machine synchrone ne prendront finalement en compte que ses propres vibrations, comme il a été montré dans [3]. Toute fois, les fréquences de résonance des diverses suspensions pouvant atteindre 16 Hertz [3], la fréquence de rotation des machines doit être supérieure à 20 Hertz pour ne pas exciter une résonance du banc, et risquer sa détérioration.

L'objectif de ce travail, le principe physique utilisé pour l'atteindre, ainsi que la machine de test sont maintenant connus. La section suivante cherche à mieux comprendre la nature des vibrations dont veut minimiser la transmission, c'est-à-dire celles des machines tournantes.

## **I-2 Vibrations d'une machine tournante électrique**

### ***1.2.1 Définition et mesure des vibrations***

La vibration d'une structure, même complexe, est communément définie (et mesurée) en un point de cette structure. Il s'agit alors du mouvement oscillatoire de ce point de la structure autour d'une position d'équilibre. En réponse à une ou plusieurs forces excitatrices ou les grandeurs physiques usuelles permettant de caractériser un mouvement, et donc une vibration, sont au nombre de trois:

- le déplacement
- la vitesse
- l'accélération.

De plus, le passage de l'une à l'autre s'effectue par simple dérivation ou intégration, On peut donc utiliser indifféremment une de ces trois grandeurs comme mesure représentative d'une vibration. Toutefois, l'accélération est celle qui permet de mettre

en évidence les phénomènes vibratoire dans les fréquences sont les plus élevées [8]. C'est donc cette grandeur qui est choisie pour représenter les vibrations de la machine synchrones, afin de pouvoir caractériser les effets de l'isolation vibratoire sur la page fréquentielle la plus large possible.

Pour pouvoir effectuer ce type de mesure, nous disposons d'accéléromètres piézoélectriques [9], dont la sortie fournit une quantité de charges électriques proportionnelle à l'accélération subie. Cette information est transformée en tension par un amplificateur de charge [9] dont la sortie est un signal analogique directement exploitable par un oscilloscope, un analyseur de spectre, ou tout autre appareil de mesure. La bande passante de ces capteurs s'étend de 5Hz à 12kHz, et nous verrons par la suite qu'elle est largement suffisante pour notre application.

### ***1.2.2 : Origine des vibrations d'une machine tournante électrique***

D'après la définition donnée à la section précédente, seule les forces excitatrices appliquées à une structure sont à l'origine de ses vibrations. Le transfert entre ces forces et les vibrations qu'elles engendrent est la réponse mécanique de la structure, selon le principe suivant :



Pour une machine tournante électrique, ces forces sont de trois natures différentes :

- aérodynamique
- mécanique
- électromagnétique

La contribution de chacune de ces sources est fonction du type de machine étudiée, mais quelques comportements généraux peuvent être soulignés. Les forces d'origine aérodynamique proviennent de l'écoulement du fluide de refroidissement dans les différentes parties de la machine, comme l'entrefer. Cet écoulement provoque des variations aléatoires de pression dans la machine, ce qui engendre des forces ayant surtout un caractère large bande. Elles peuvent donc exciter les résonances mécaniques de la machine, et génèrent des vibrations qui sont elles aussi aléatoires et à large bande. Toutefois, dans le cas d'une machine avec ventilateur de refroidissement, des vibrations sinusoïdales dont la fréquence est le produit du nombre d'ailettes du ventilateur par la fréquence de rotation peuvent apparaître. La machine de test décrite dans la section précédente étant refroidie à l'air et ne comportant pas de ventilateur, ses vibrations d'origine aérodynamique ont un caractère purement aléatoire à large bande.

Les forces d'origine mécanique sont dues à des défauts de fabrication, de jeu ou d'usure. On peut par exemple citer le phénomène de balourd dynamique provenant d'un mauvais équilibrage du rotor, ou l'usure de l'accouplement reliant deux machines différentes. Ces phénomènes génèrent en général des forces périodiques, dont les fréquences sont liées à la fréquence de rotation de la machine. Les vibrations qu'elles engendrent seront donc elles aussi périodiques, et leur transformée de Fourier consistera en un ensemble de raies spectrales, de fréquences harmoniques ou sous harmoniques de la fréquence de rotation. En ce qui concerne la machine utilisée pour notre application, ces vibrations se limitent principalement au balourd mécanique,

généralisant des raies spectrales de fréquence égale à la fréquence de rotation ainsi qu'à ses premiers harmoniques.

Les forces d'origine électromagnétique sont principalement des forces de Maxwell, donc directement proportionnelle au carré du champ d'induction présent dans l'entrefer de la machine (cf. équation (1.1)). Ce champ n'est jamais à répartition purement sinusoïdale, et ceci pour un grand nombre de raisons (distribution spatiale imparfaite des forces magnétomotrices créées par les enroulements et /ou les aimants entrefers non constant, courant d'alimentation non sinusoïdaux, *etc*). L'harmonique de l'induction engendre donc un grand nombre de champ de forces tournantes à répartition périodique, qui excitent la structure de la machine. À ces forces viennent aussi s'ajouter celles dues à des défauts de fabrication comme le balourd magnétique, traduisant une excentricité du champ d'induction de la machine. Pour une machine synchrone, elles génèrent toutes des vibrations périodiques, des fréquences harmoniques à la fréquence de la rotation. Une étude très complète des ces différentes fréquence est faite dans [10]. Pour la machine décrite au paragraphe 1.2.3, il a été montré [3] que l'ensemble des raies spectrales provoquées par ce phénomène est constitué de la raie encoche et de ses harmoniques. Elles ont pour origine la présence d'un entrefer denté. La variation de permanence due aux encoches provoque une variation de l'induction au droit de ces encoches. La machine de test ayant un rotor lisse et un stator à 36 encoches, la fréquence des raies vibratoires engendrés se situe autour des multiples entiers de 36 fois la fréquence de rotation.

Bien que cette soit relativement succincte, il faut être conscient de l'extrême complexité du processus de génération des vibrations d'une machine tournante électrique. Ce rapide exposé sur l'origine des vibrations d'une telle structure, traitant la question de manière plus approfondie, n'a pas la prétention d'être exhaustif. Son but est seulement de donner une idée des différents types de vibration qui peuvent être engendrées dans une machine tournante, et des différents processus physiques qui peuvent leur donner naissance. Pour la machine synchrone utilisée, on peut retenir que les vibrations mesurées seront de deux types différents:

- Les vibrations d'origine aérodynamique auront un caractère aléatoire large bande,
- Les vibrations d'origine mécanique ou électromagnétique auront un caractère périodique, donc bande étroite.

Maintenant que les caractéristiques des vibrations générées par la machine de test sont connues, la section suivante permet de faire un choix parmi les nombreuses méthodes d'analyse existant pour un tel signal.

### ***1.2.3 Analyse d'un signal vibratoire***

#### **Préliminaires**

La plupart des méthodes d'analyse étant implantées sur ordinateur numérique, le premier conditionnement à réaliser sur un signal vibratoire et son échantillonnage. De plus, beaucoup de ces méthodes font intervenir la notion de fréquence. Il est donc également nécessaire de définir la transformation permettant de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. Cette opération est réalisée, sur des signaux échantillonnés, par la transformation de Fourier en fréquence réduite (TFr). De sa définition découle la condition d'échantillonnage de Shannon. Suivant laquelle l'échantillonnage d'un signal se fait sans perte d'information. Nous allons voir

comment la TFr et cette condition s'expriment pour des signaux mono ou bidimensionnels, c'est-à-dire dépendant d'une ou de deux variable. En effet, ces derniers seront nécessaires dans le chapitre 3 pour l'étude des systèmes périodiquement dans le temps.

### Signaux monodimensionnels

Les TFr directe et inverse d'un signal discret  $s(n)$  sont respectivement définies par les relations:

$$\hat{s}(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) e^{-j2\pi\alpha n} \quad (1.2)$$

$$s(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{s}(\alpha) e^{j2\pi\alpha n} d\alpha \quad (1.3)$$

Pour que cette transformation existe, le signal étudié doit être de module Sommable. En effet, c'est une condition suffisante pour que la série exprimée en (1.2) converge absolument vers une fonction continue [11].

La fréquence réduite sans dimension  $\alpha$  est liée à la fréquence réelle  $\nu$  et à la fréquence d'échantillonnage  $\nu_e$ , exprimées toutes deux en Hertz, par:

$$\alpha = \frac{\nu}{\nu_e} \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \quad (1.4)$$

L'intervalle de définition de  $\alpha$  donné en (1.4) correspond à la période principale sur laquelle la fonction  $\hat{s}(\alpha)$ , périodique de période 1, est étudiée. Cet intervalle équivaut à la bande fréquentielle  $\left] -\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e}{2} \right]$  Hz. ceci conduit à la condition de Shannon permettant d'éviter tout recouvrement de spectre lors de l'échantillonnage: les signaux analogiques originaux ne doivent pas contenir de composantes fréquentielles supérieurs à  $\frac{\nu_e}{2}$  Hz. dans la pratique, on prendra soin de filtrer les signaux analogiques fournis par les accéléromètres à l'aide d'un filtre passe-bas correctement dimensionné, afin qu'ils vérifient cette condition. Une fois cette opération réalisée, l'échantillonnage des signaux à la fréquence  $\nu_e$  peut se faire sans problème.

L'extension du cas précédent à un signale discret bidimensionnel est immédiate:

$$\hat{s}(\alpha, \beta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(n, k) e^{-j2\pi(\alpha n + \beta k)} \quad (1.5)$$

$$s(n, k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{s}(\alpha, \beta) e^{j2\pi(\alpha n + \beta k)} d\alpha d\beta$$

La condition suffisante d'existence d'une telle transformation devient:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(n, k)| < +\infty$$

De plus, les fréquences réduites  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même intervalle qu'en (1.4). La condition de Shannon bidimensionnelle impose donc au signal de ne pas avoir de composants

fréquentielles supérieures à  $\frac{\nu_c}{2}$  Hz, et ceci suivant ses deux variables fréquentielles [12].

### **Panorama des méthodes d'analyse:**

Les différentes méthodes d'analyse d'un signal vibratoire sont classées en trois catégories différentielles.

La première regroupe les méthodes dites classiques, permettant surtout d'analyses des signaux stationnaires. Dans le domaine temporel, on retrouve par exemple l'analyse par indicateur, tels que l'amplitude maximale du signal, ou son facteur de crête [13]. Des outils statistiques tels utilisés [8]. Dans le domaine fréquentiel, la méthode la plus employée actuellement reste l'analyse spectrale, donnant accès à la répartition de la puissance ou de l'énergie d'un signal dans le domaine fréquentiel. Elle permet aussi de calculer les fonctions de transfert fréquentielles éventuelles reliant différents signaux vibratoires. Enfin, une de ses variantes, l'analyse cepstrale introduite dans [14], permet de mettre facilement en évidence les modulations d'amplitude, même aux basses fréquences [9].

Les méthodes classées dans la deuxième catégorie peuvent être qualifiées de modernes, et permettent l'analyse de signaux non -stationnaires. Les principales sont les transformées temps fréquences (spectrogramme, Wigner- ville, scalogramme, *etc*) [15]. Elles ont été utilisées plus tardivement, que les précédentes du fait de leur complexité théorique, et de la puissance de calcul qu'elles nécessitent.

Enfin, la troisième catégorie regroupe les méthodes émergentes et novatrices, d'un usage encore peu courant dans l'industrie. Ces outils concernent par exemple les techniques d'analyse cyclostationnaire [16], [17], [18], [19] comme la corrélation spectrale, représentant Les liens statistiques entre différentes fréquences d'un même signal. Récemment, des statistiques d'ordre à deux ont aussi été utilisées [20]. En effet, on a dans le domaine temporel de nouveaux indicateurs, Comme des moments d'ordre supérieur à 2 (skewness, kurtosis) qui permettent de mieux caractériser la loi de répartition de l'amplitude d'un signal. Dans le domaine fréquentiel, l'emploi des multispectres (bispectre, trispectre, etc) peut aider à la recherche de couplages non-linéaires [21]. On peut enfin noter l'emploi de modélisations non- linéaires comme les filtres de Volterra, afin de mieux approcher les transferts mécaniques complexes [22].

Pour le présent problème d'isolation vibratoire, un outil permettant non seulement de caractériser, mais aussi de quantifier les effets de la méthode employée est nécessaire. La densité spectrale de puissance répond à ces exigences, puisqu'elle permettra de localiser les fréquences des vibrations affectées, et de mesurer la variation de puissance (globale et/ou par bande de fréquence) provoquée. Le prochain paragraphe expose donc les définitions nécessaires à son utilisation.

### ***Introduction à l'analyse spectrale***

#### **Définition de la densité spectrale de puissance**

L'analyse spectrale est un ensemble d'outils théoriques permettant d'analyser un signal dans le domaine fréquentiel. Elle concerne, entre autre, le calcul des répartitions de puissance ou d'énergie en fonction de la fréquence, également appelées «densités spectrales». La section 1.3.2 a montré que les signaux vibratoires des

machines tournantes sont principalement constitués de composantes aléatoires et périodiques. Pour de tels signaux, seule la densité spectrale de puissance est définie, contrairement à celle d'énergie. Prenons par exemple un signal vibratoire à temps continu  $s(t)$ , mesuré sur une machine tournante électrique. On obtient, en l'échantillonnant à la fréquence  $\nu_e$  vérifiant la condition de Shannon, le signal discret  $s(n)$ . Ce signal contenant des composantes aléatoires et périodiques, il n'est pas de module sommable, et sa transformée de Fourier définie par (1.2) ne converge pas. Par contre, sa version tronquée sur  $N$  échantillons  $s_N(n)$  a bien une transformée de Fourier, que l'on note sur  $\hat{s}_N(\alpha)$ . La densité spectrale d'énergie de ce signal tronqué est définie par:

$$S_{s_N}(\alpha) = E\left[|\hat{s}_N(\alpha)|^2\right]$$

où  $E[.]$  représente l'opérateur espérance mathématique, et doit sa présence au caractère aléatoire du signal de vibration.

Pour prendre en compte tout le signal  $s(n)$ , il faut faire tendre le nombre d'échantillons  $N$  vers l'infini, mais nous venons de voir que la transformée de Fourier  $\hat{s}_{N \rightarrow \infty}(\alpha)$  n'est alors plus définie. Pour forcer la convergence de cette série, on la normalise par le nombre d'échantillons  $N$ , équivalent à une durée. On obtient donc:

$$\gamma_s(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{|\hat{s}_N(\alpha)|^2}{N} \right] \quad (1-6)$$

La grandeur obtenue a bien une dimension de puissance (énergie divisée par temps), et est fonction réelle de la fréquence. Il faut noter que la  $\alpha$  est une fréquence réduite sans dimension, dont l'intervalle de définition et le lien avec la fréquence réelle  $\nu$  (en Hertz) sont donnés par (1.4). En généralisant (1.6), on peut déduire la densité interspectrale de puissance entre deux signaux discrets de puissance moyenne finie  $x(n)$  et  $y(n)$ .

$$\gamma_{xy}(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \frac{\hat{x}_N(\alpha)\hat{y}_N(\alpha)^*}{N} \right] \quad (1-7)$$

Où \* symbolise le complexe conjugué.

Cette grandeur, n'est plus une quantité réelle mais devient une fonction complexe de la fréquence réduite  $\alpha$ , dont le module peut être interprété comme la répartition fréquentielle de puissance commune au niveau des deux signaux.

La relation (1.6) est une définition théorique, mais elle ouvre la voie à la méthode pratique d'estimation du spectre de puissance décrite dans le paragraphe suivant.

### ***Estimation de la densité spectrale de puissance***

Sous les hypothèses conjointes de stationnarité (invariance temporelle des propriétés statistiques) et d'ergotisme (les moyennes temporelles tendent vers des valeurs finies et certaines) que nous supposons toujours vérifiées par les signaux vibratoires analysés, l'espérance mathématique de la relation (1.6) peut être remplacée

par une moyenne temporelle. On obtient alors  $\gamma_s(\alpha)$  en découpant le signal discret  $S(n)$  en  $M$  tranches de  $L$  échantillons, et en effectuant la moyenne suivante :

$$\gamma_s(\alpha) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{|\hat{s}_{L_i}(\alpha)|^2}{L}$$

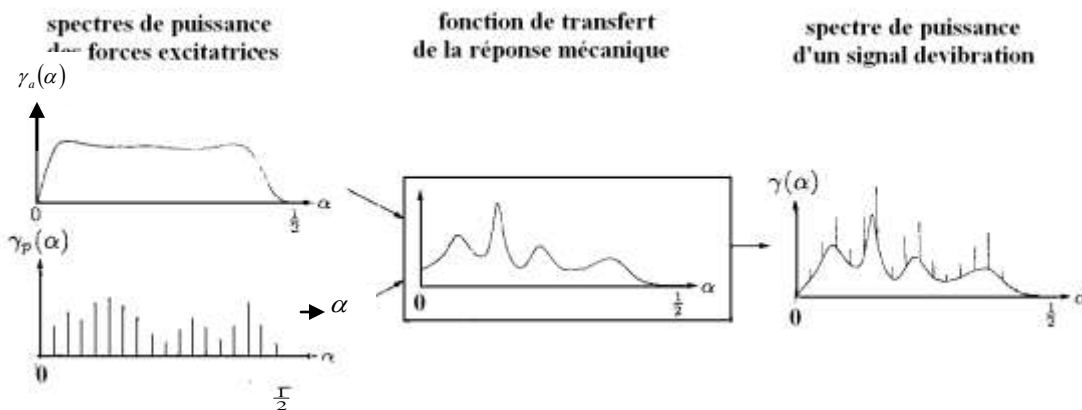
Où  $\hat{s}_{L_i}(\alpha)$  est la transformée de Fourier de la  $i^{\text{ème}}$  tranche de  $L$  échantillons notée  $s_{L_i}(n)$ . Cette relation n'est toujours pas utilisable en pratique à cause du nombre infini de tranches. On construit donc une estimée de la densité spectrale de puissance notée  $\tilde{\gamma}_s(\alpha)$  en prenant  $M$  fini mais suffisamment élevé

$$\tilde{\gamma}_s(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{|\hat{s}_{L_i}(\alpha)|^2}{L} \quad (1-8)$$

Cette méthode est appelée estimation par périodogramme moyenné, et on peut montrer que c'est un estimateur consistant. De  $\gamma_s(\alpha)$ . Les différentes densités spectrales présentées dans la suite de ce rapport ont été calculées par cette méthode.

### Allure théorique de la densité spectrale de puissance d'un signal vibratoire de machine tournante

D'après le paragraphe, sur l'origine des vibrations d'une machine tournante éclectique, les forces excitant leur structure sont soit périodiques, soit aléatoires larges bande. Les signaux de vibratoires qu'elles peuvent engendrer ont donc les mêmes caractéristiques, et l'allure générale de leur densité spectrale de puissance est montrée à la figure 1.7, duale de la figure 1.6, mais en adoptant un point de vue fréquentiel.



**Fig. 1.7 :** Allure théorique de la densité spectrale de puissance d'un signal de machine tournante électrique.

La densité spectrale de puissance  $\gamma_p(\alpha)$  des forces périodiques est un ensemble de raies d'amplitude variable. Celle  $\gamma_a(\alpha)$  des forces aléatoires a un caractère large bande. Par l'intermédiaire de la réponse mécanique dont la fonction de transfert présente plusieurs résonances et anti-résonances, ces forces génèrent un signal vibratoire dont la densité spectrale de puissance  $\gamma(\alpha)$  présente à la fois des

raies spectrales, et un caractère large bande. La section suivante est dédiée à vérifier ce résultat en estimant la densité spectrale de puissance d'un signal vibratoire mesuré sur la machine synchrone de test.

### ***1.2.4 Exemple de signal vibratoire de la machine de test:***

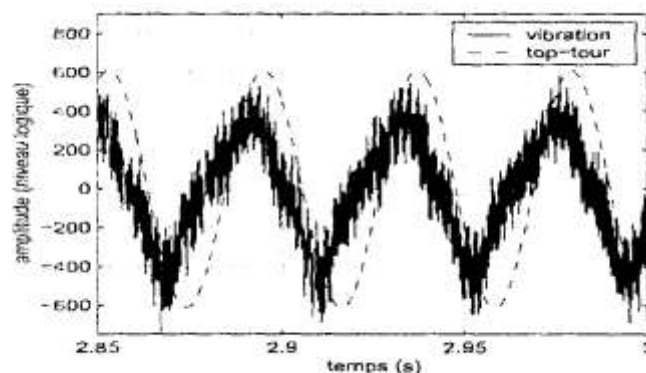
Le signal étudié dans cette section a été fourni par un accéléromètre placé sur la carcasse de la machine synchrone, afin d'en mesurer les vibrations radiales. Lors de cette acquisition, cette machine était entraînée par une machine à courant continu à une vitesse de rotation de 1428 tours par minute; ce qui correspond à une fréquence de rotation de  $\nu_r = 23,8$  Hz.

La machine synchrone, fonctionnait en alternateur à vide, afin d'éliminer l'influence vibratoire des courants statoriques. Le signal mesuré a été filtré par un filtre analogique passe-bas de fréquence de coupure égale à 3 kHz et de pente -96 dB par octave. Il a ensuite été échantillonné à  $\nu_e = 10$  kHz pendant 5 secondes. On dispose donc d'un signal vibratoire discret de 50000 points vérifiant la condition d'échantillonnage de Shannon. Enfin, un capteur angulaire monté sur l'arbre de rotation a permis l'acquisition d'un signal sinusoïdal appelé top-tour, dont la fréquence est égale à celle de rotation.

#### ***Domaine temporel.***

La figure 1.8 donne l'allure temporelle du signal de vibrations mesuré, ainsi que celle du signal de top-tour, dont une période représente une révolution complète du rotor de la machine.

On peut noter visuellement la présence d'un déphasage constant entre le top-tour et certaines composantes périodiques du signal de vibration.

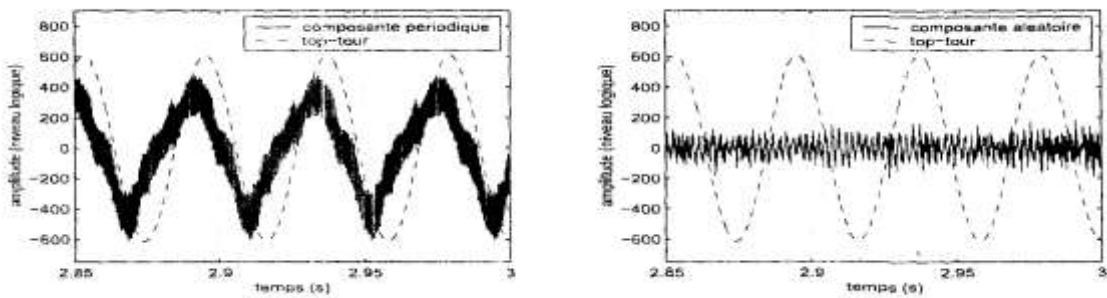


**Fig. 1.8:** Allure temporelle de signal vibratoire brut

Ceci laisse présager la présence, au sein du signal vibratoire, d'un ensemble de composantes périodiques synchrones au phénomène de rotation. Ces composantes restent des harmoniques de la fréquence de rotation, même si elle varie au cours du temps. Une manière de les extraire est d'appliquer la technique du moyennage synchrone, qui consiste à utiliser le top-tour comme signal de référence pour découper le signal de vibrations en tranches de longueur égale à une période de rotation. On effectue alors une moyenne des différentes tranches, afin d'atténuer les composantes



non synchrones à la rotation, qu'elles soient périodiques ou large bande. Afin que ce traitement soit réalisé dans les conditions optimales, il est nécessaire de rééchantillonner le signal de vibrations d'une manière synchrone au top-tour, c'est à dire avec une fréquence d'échantillonnage multiple de la fréquence de rotation. Le résultat obtenu pour 1024 échantillons par tour, c'est à dire une fréquence d'échantillonnage de  $v_e = 24371$  Hz est reporté sur la figure 1.9, où on peut vérifier la stricte périodicité des composantes synchrones (1.9(a)), par rapport au caractère plus aléatoire des composantes non synchrones (1.9(b)). L'importance relative d'un type de composantes par rapport à l'autre peut être quantifiée par le rapport de leur puissance respective. Une telle grandeur, pour un signal numérique  $s_N(n)$  de  $N$  échantillons est donnée par :



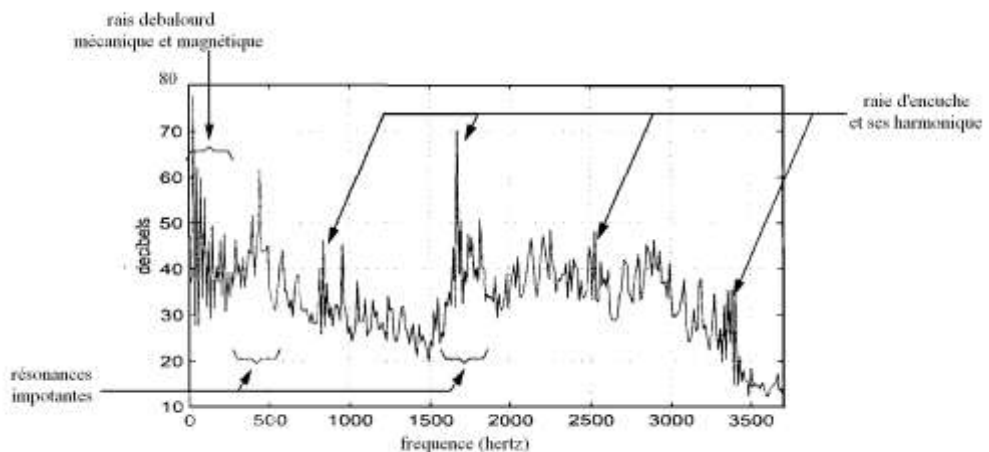
(a) composantes synchrones à rotation (b) composantes non synchrones à rotation

**Fig 1.9 :** Allure temporelle des résultats après moyennage synchrone

$$P_{s_N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |s_N(k)|^2 \quad (1-9)$$

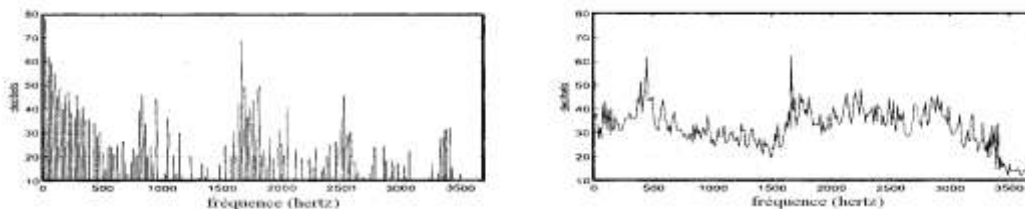
Dans le cas présent, on obtient, pour les composantes synchrones, une puissance 16 fois supérieure à celle des composantes non synchrones. Ceci montre bien leur prédominance dans ce signal vibratoire.

### Domaine fréquentiel



**Fig. 1.10:** Densité spectrale de puissance du signal vibratoire

La figure 1.10 montre la densité spectrale de puissance estimée du signal vibratoire, représentée en décibels. On obtient une densité spectrale composée à la fois d'une partie raies de balourd large bande et de raies spectrales, comme prévu par la figure 1.7. On peut clairement identifier les raies spectrales dues aux balourds mécanique et magnétique, situées aux premières fréquences harmoniques ( $v$ ). On trouve ensuite, autour de  $36 \times vr \approx 857$  Hertz, un groupe de raies d'encoche, ainsi que leurs harmoniques autour des multiples entiers de cette valeur. Pour le côté large bande, on peut noter la présence de deux résonances importantes (autour de 450 et 1700 Hertz), contribuant à l'amplification de certaines raies spectrales, dont le premier harmonique de la raie d'encoche. Les densités spectrales de puissance des composantes synchrones et non synchrones sont données respectivement par les figures 1.11(a) et 1.11(b). On retrouve, comme principaux phénomènes synchrones, les raies de balourd ainsi que les raies d'encoche, variable jusqu'à 3400 Hz, et toutes situées à des fréquences harmoniques de  $vr$ . Les phénomènes non synchrones sont, quant à eux, principalement à caractère large bande, et couvrent toute la bande du filtre passe bas utilisé dans la chaîne d'acquisition. On note la présence de deux résonances importantes repérées sur la densité spectrale (1.10) amplifiant des raies non synchrones à la rotation.



(a)composantes synchrones (b)composantes non synchrones à la rotation

**Fig 1.11** : Densités spectrales de puissance après moyennage synchrone

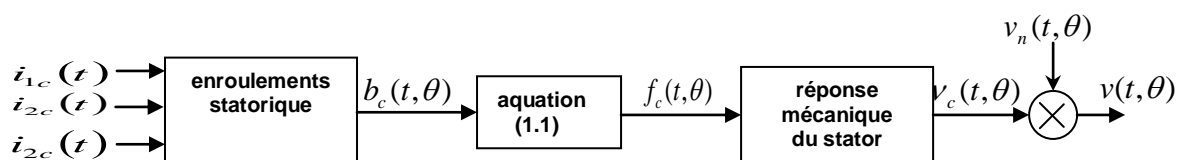
Il est évident que ces deux signaux contiennent une foule de renseignements sur l'état de la machine et sur son fonctionnement. Le signal correspondant aux composantes synchrones étant strictement périodique, l'interprétation physique de chacune des raies de son spectre serait certainement des plus fructueuses. Par' contre, le signal correspondant aux composantes non synchrones nécessite, de' par son caractère aléatoire, une analyse plus poussée. De plus, la périodicité- du phénomène de rotation qui l'engendre, incite à croire en la présence de périodicités cachées au sein de ce signal, ce qui serait vérifiable grâce aux outils cyclostationnaires. L'emploi des méthodes temps-fréquence est aussi à envisager afin de caractériser d'éventuels non stationnarités plus complexes. Enfin, les autres outils d'analyse ne sont pas à proscrire et conduiraient à des résultats intéressants, mais l'analyse vibratoire n'étant pas l'objet de ce travail de recherche, nous n'en dirons pas plus sur ce sujet.

Cette section a donc permis de donner un rapide aperçu sur l'origine et la nature des vibrations d'une machine tournante électrique, ainsi que sur les principales méthodes de traitement du signal utilisées pour les analyser. De plus, un exemple de signal vibratoire réel mesuré sur la machine de test a montré que pour cette machine, les vibrations radiales prédominantes sont synchrones à la vitesse de rotation et que la méthode d'isolation vibratoire envisagée doit atténuer en priorité leur transmission. Elles sont représentées, dans le domaine fréquentiel, par un ensemble de raies spectrales situées aux fréquences harmoniques de  $\nu r$ . Nous verrons au chapitre 4 que leur synchronisme et leur périodicité PET mettent de développer des algorithmes beaucoup plus simples que pour des vibrations à caractère aléatoire. Ce point est important dans le sens où la méthode élaborée doit être implantable dans un processeur numérique, afin de pouvoir fonctionner en temps-réel. La nature des vibrations à atténuer étant maintenant connue, le modèle du transfert grâce auquel on pourra agir sur celles-ci va être déterminé dans la section suivante.

### I.3 Modélisation physique du transfert

#### I.3.1 Préliminaires

Le principe physique utilisé pour atténuer les vibrations d'une machine tournante a été exposé à la section 1.2.2. On rappelle qu'il utilise des courants de compensation additionnels  $i_{1c}(t)$ ,  $i_{2c}(t)$  et  $i_{3c}(t)$  dans les enroulements statoriques qui génèrent, à la position angulaire  $\theta$ , un champ magnétique supplémentaire  $b_c(t, \theta)$ . Ce dernier engendre une force  $f_c(t, \theta)$  sur la carcasse statorique (voir équation (1.1)), qui répond par des vibrations supplémentaires  $v_c(t, \theta)$ . Par un choix judicieux des courants de compensation, ces contre-vibrations peuvent alors être opposées aux vibrations naturelles de la machine  $v_n(t, \theta)$ , afin de minimiser les vibrations totales du stator  $v(t, \theta)$  autour de, la position angulaire  $\theta$ . Les différents transferts intervenant entre les courants de commande  $i_{1c}(t)$ ,  $i_{2c}(t)$  et  $i_{3c}(t)$  et le signal vibratoire  $v(t, \theta)$  mesuré en sortie d'un accéléromètre placé sur la carcasse statorique en  $\theta$  sont représentés sur la figure 1.12. Le but de cette section est d'établir le modèle de chacun des transferts de cette figure, et d'énoncer les hypothèses nécessaires à leur validité.



**Fig. 1.12:** Transferts mis en jeu dans le système global

On peut d'ores et déjà poser quelques hypothèses permettant de simplifier le problème original.

On considère premièrement que les effets de bords dus à la machine sont inexistantes. Les phénomènes mis en jeu dans  $i^{\text{ème}}$  coupe transversale de la machine seront donc identiques tout le long de celle-ci. Cette remarque est très importante car elle permet de réduire le problème tridimensionnel original à un problème bidimensionnel. Dans la suite de ce mémoire, il est donc suffisant de limiter l'étude théorique à celle d'une section transversale.

La seconde hypothèse concerne la perméabilité magnétique du fer qui est supposée infinie. Ceci implique la normalité du champ magnétique par rapport aux surfaces statoriques et rotoriques délimitant l'entrefer.

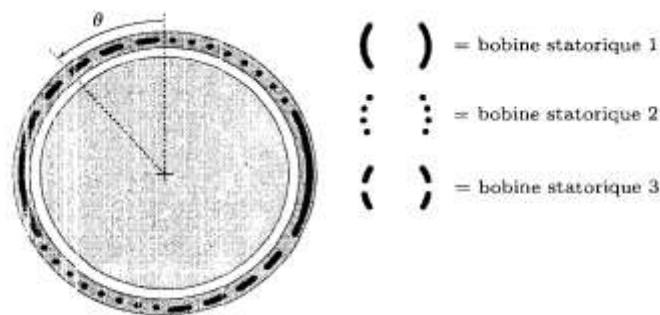
En troisième lieu, on considère qu'il n'y a pas de déformation des lignes de champ au voisinage des conducteurs contenus dans la machine. Ces deux dernières hypothèses, conjointement avec le fait que l'entrefer soit considéré lisse, permettent de supposer le champ magnétique radial en tout point de l'entrefer. On ne parlera donc plus dans la suite de ce rapport de la direction ou du module du champ magnétique, mais seulement de sa valeur. Celle-ci sera comptée positive si le champ est dirigé du centre de la machine vers l'extérieur, et négative dans le cas contraire.

Enfin, la quatrième et dernière hypothèse est la non saturation du circuit magnétique de la machine, quel que soit son état de fonctionnement. Le champ d'induction est donc toujours proportionnel au champ magnétique, quelle que soit sa valeur.

Après ces premières simplifications, nous allons progresser le long du schéma de la figure 1.12, en partant des courants de commande pour finalement en déduire l'expression de  $v_c(t, \theta)$ .

### 1.3.2 Effet des enroulements statoriques

Le premier transfert à modéliser est celui reliant les courants de compensation  $i_{1c}(t)$ ,  $i_{2c}(t)$  et  $i_{3c}(t)$  parcourant les enroulements statoriques, au champ d'induction  $b_c(t, \theta)$  qu'ils créent en . Pour ce faire, nous devons connaître les caractéristiques des trois bobines statoriques de la machine de test. Elles sont à ouverture diamétrale, géométriquement décalées de  $\frac{2\lambda}{3}$  radians, et ont chacune  $p = 2$  paires de pôles. Elles sont représentées schématiquement sur la figure 1.13, qui symbolise une coupe transversale de la machine de test. L'origine du repère lié au stator fixant la position angulaire  $\theta$  est l'axe de la bobine statorique numéro 1. En supposant ces trois enroulements identiques et idéalement répartis, et en négligeant l'effet de saillant dû aux faibles variations de l'entrefer lisse, le champ d'induction créé par les courants de commande prend la valeur suivante:



**Fig.1.13:**Enroulements statoriques de la machine synchrone de test

$$b_c(t, \theta) = K \left[ \cos(p\theta) i_{1_c}(t) + \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) i_{2_c}(t) + \cos\left(p\theta - \frac{4\pi}{3}\right) i_{3_c}(t) \right] \quad (1.10)$$

L'effet des enroulements statoriques peut donc être modélisé par un gain multiplicatif variant sinusoidalement avec: la position angulaire  $\theta$  et agissant sur chaque courant, suivi d'un additionneur trois voies.

### 1.3.3 Expression de la force de Maxwell

La seconde expression à calculer est celle de la force  $f_c(t, \theta)$  engendrée par le champ de compensation, et appliquée à la carcasse statorique en  $\theta$ .

D'après l'équation (1.1), elle ne dépend pas uniquement de  $b_c(t, \theta)$ , mais du champ d'induction total  $b(t, \theta)$ , généré à la fois par le rotor et, le stator. Afin de déterminer l'expression de  $b(t, \theta)$ , on se place dans le cas où la machine synchrone de test est en fonctionnement normal. Elle est donc utilisée en moteur alimenté par un système de courants triphasés équilibré, ou en alternateur débitant sur une charge triphasée équilibrée, sans aucun courant de compensation parcourant ses enroulements. Dans [3], la structure de cette machine a été optimisée de sorte que pour un tel fonctionnement, son champ d'induction ait une répartition temporelle et fréquentielle quasiment sinusoidale. On peut alors exprimer  $b(t, \theta)$  sous la forme :

$$b(t, \theta) = B \cos(2\pi p v_r t - p\theta + \varphi)$$

où les constantes  $B$  et  $\varphi$  dépendent des caractéristiques de la machine et du mode de fonctionnement choisi. On peut remarquer que dans le cas d'une machine synchrone quelconque, l'approximation au premier harmonique permet d'écrire la même relation.

Si les courants de compensation sont injectés, sous forme additionnelle dans les enroulements statoriques de la machine, ils vont créer le champ  $b_c(t, \theta)$  qui s'ajoutera au champ précédent en vertu de l'hypothèse de non-saturation du circuit magnétique. On obtient donc la forme générale du champ d'induction total de la machine de test :

$$b(t, \theta) = B \cos(2\pi p v_r t - p\theta + \varphi) + b_c(t, \theta) \quad (1.11)$$

où l'expression de  $b(t, \theta)$  en fonction des courants de compensation est donnée par la relation L'équation (1.1), donnant l'expression de la force due au champ d'induction de la machine et subie par l'élément de surface statorique  $ds$  situé en  $\theta$  peut s'écrire, en utilisant (1.11) :

$$f(t, \theta) = \frac{d_s}{2\mu_0} [B \cos(2\pi p v_r t - p\theta + \varphi) + b_c(t, \theta)]^2$$

$$f(t, \theta) = \frac{B^2 d_s}{2\mu_0} \cos^2(2\pi p v_r t - p\theta + \varphi) + \frac{B d_s}{\mu_0} \cos(2\pi p v_r t - p\theta + \varphi) b_c(t, \theta) + \frac{d_s}{2\mu_0} b_c^2(t, \theta)$$

Le premier terme de cette somme est engendré par le seul champ d'induction dû au fonctionnement normal de la machine! Il provoque l'apparition d'un champ de

force périodique de fréquence  $2pv_r$ , et se retrouve dans tous les cas de figure, même en l'absence des courants de compensation. Ce n'est pas le cas des deux derniers termes, qui apparaissent avec  $b_c(t, \theta)$ , et donc avec  $i_{1_c}(t), i_{2_c}(t)$  et  $i_{3_c}(t)$ .

Ils donnent l'expression de la force de compensation  $f_c(t, \theta)$  créée par ces courants, que l'on peut mettre sous la forme :

$$f_c(t, \theta) = F_1 \cos(2\pi p v_r t - p\theta + \varphi) b_c(t, \theta) + F_2 b_c(t, \theta)^2 \quad (1.12)$$

Le transfert entre le champ de compensation et la force qu'il engendre est donc, dans le cas général, à la fois non-linéaire et variant dans le temps. En effet, ce dernier caractère est contenu dans le premier terme de la somme (1.12), où l'entrée ( $b_c(t, \theta)$ ) est multipliée par un gain fonction du temps. Quant à la non linéarité, elle provient du second terme de cette somme qui est quadratique.

Une dernière hypothèse, portant sur les courants de compensation, va nous permettre de simplifier cette relation. En effet, le rôle de ces courants est d'atténuer les vibrations de la machine de test, mais ils ne doivent en aucun cas perturber son fonctionnement. En ce sens, ils doivent rester faibles devant les courants statoriques présents lorsque la machine est utilisée normalement. Il en découle que le champ de compensation  $b_c(t, \theta)$  qu'ils engendrent sera petit devant celui de la machine en fonctionnement normal. Donc pour des courants de compensation assez faibles, le terme quadratique de la relation (1.12) peut être négligé devant l'autre terme, d'où l'approximation suivante :

$$f_c(t, \theta) \simeq F \cos(2\pi p v_r t - p\theta + \varphi) b_c(t, \theta) \quad (1.13)$$

Cette relation traduit un transfert linéaire et variant périodiquement dans le temps de fréquence  $pv_r$ , entre  $b_c(t, \theta)$  et  $f_c(t, \theta)$ , la non-linéarité de la relation (1.12) ayant disparue avec le terme quadratique. Lors de l'élaboration de l'algorithme de compensation dans le chapitre 4, on prendra soin de limiter la puissance des courants de compensation, de sorte (que la relation (1.13) soit toujours valable.

### ***1.3.4 Effet de la carcasse statorique***

Le dernier transfert qu'il reste à déterminer sur la figure 1.12, relie la force de compensation appliquée à la carcasse statorique en  $\theta$ , à la vibration additionnelle  $v_c(t, \theta)$  que cette dernière donne en réponse. IL s'agit donc de la réponse mécanique du stator, qui est fonction de la position angulaire considérée. On imagine bien la complexité d'un tel transfert, c'est pourtant sur lui que nous allons faire l'hypothèse la plus forte : il est supposé linéaire et invariant dans le temps. Il peut donc être entièrement modélisé par une fonction de transfert fréquentielle au sens classique du terme, qui est à la fois fonction de la fréquence réelle  $v$  et de la position angulaire,  $\theta$  et notée  $\hat{g}(v, \theta)$ . Cette approche a déjà été adoptée dans [6] et [3], avec de bons résultats de modélisation. De plus, quelques éléments de réponse peuvent être trouvés dans [Fu196, chapitre2], où l'auteur montre qu'un cylindre de longueur finie répond à divers types de champ de force sinusoïdaux en temps, par un déplacement de même

fréquence. Ceci conforte donc l'hypothèse de linéarité et d'invariance; dans le temps pour la réponse mécanique du stator, puisque sa structure est bien celle d'un cylindre de longueur finie. Si son comportement s'avérait malgré tout plus compliqué,  $\hat{g}(v, \theta)$  permettrait tout de même de modéliser la partie linéaire, de sa réponse mécanique.

De plus, on rappelle qu'en pratique, les signaux vibratoires sont fournis par des accéléromètres, dont le transfert est linéaire et invariant dans le temps dans la bande fréquentielle considérée. Le transfert de ce capteur devrait donc apparaître sur la figure 1.12 après le signal vibratoire  $v(t, \theta)$ . On peut en fait considérer que la fonction de transfert fréquentielle du stator englobe celle du capteur, puisqu'elles sont de même type.  $\hat{g}(v, \theta)$  servira donc de modèle à la fois à la carcasse statorique et à l'accéléromètre.

### 1.3.5 Transfert global entre les courants de commande et les vibrations engendrées

Tous les transferts de la figure 1.12 ont donc été déterminés. En utilisant les équations (1.10) et (1.13) ainsi que les remarques du paragraphe précédent, on peut représenter le modèle du système global comme sur la figure 1.14.

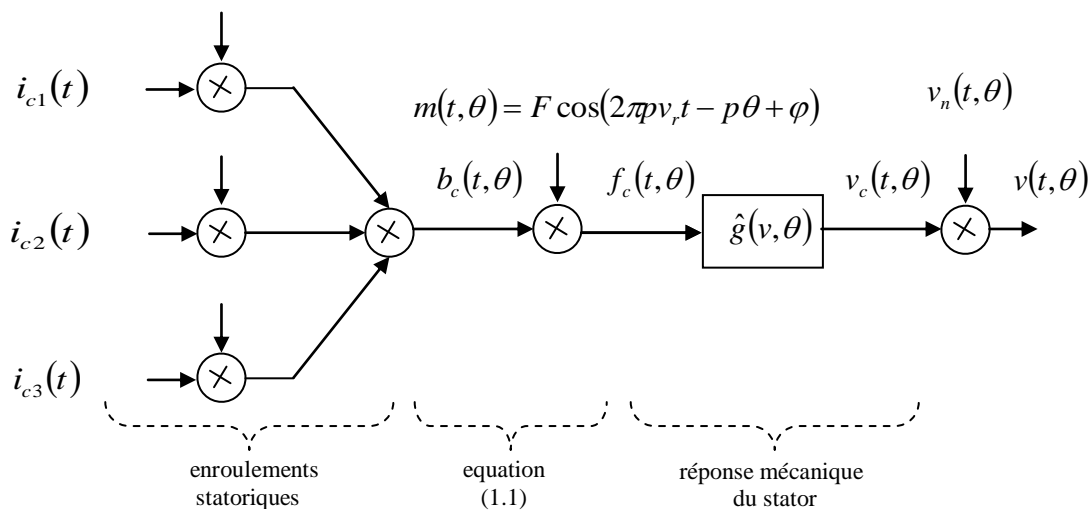


Fig. 1.14: Modèle à temps continu du système global

Le système situé entre les courants de commande et la vibration additionnelle qu'ils engendrent est bien linéaire. Toutefois, la présence du signal sinusoïdal modulant en amplitude le champ d'induction  $b_c(t, \theta)$  fait varier ses caractéristiques périodiquement dans le temps. Le terme «caractéristiques» désigne ici les grandeurs représentatives du système, comme sa réponse impulsionnelle ou sa fonction de transfert fréquentielle. Le système global peut donc être vu comme un système linéaire variant périodiquement dans le temps (LVPT), à trois entrées et une sortie. Il est à noter que ce transfert a été validé grâce à des signaux réels dans [21] à l'aide des statistiques d'ordre supérieur (bispectre et bicohérence). Il est sera donc considéré comme parfaitement valable, dans la suite de ce mémoire.

Enfin, on peut remarquer que chaque courant de commande ne peut agir sur toute la circonférence de la carcasse statorique. En effet, si on se limite au courant  $i_{c_1}(t)$ , le gain  $\cos(p\theta)$  qui lui est appliqué en entrée lui interdit de pouvoir engendrer

une quelconque vibration additionnelle pour des positions angulaires vérifiant  $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2p}$ , ou  $k \in \{0, 1, \dots, 2p - 1\}$ . Par exemple, pour la machine de test le nombre de paires de pôles  $p$  étant égal à deux, cette entrée ne peut engendrer de vibrations aux positions angulaires  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$  et  $\frac{7\pi}{4}$  radians. Par contre, les autres entrées peuvent prendre le relais puisque leurs gains respectifs ne sont alors pas nuls. On peut donc d'ores et déjà voir qu'en se limitant à un système mono-entrée, on ne peut avoir d'action sur tout le stator, contrairement à un système multi-entrées.

## 1.4 Conclusion

Ce premier chapitre a permis de bien spécifier le sujet du travail de recherche présenté dans ce mémoire.

L'objectif général de ce travail est de réaliser l'isolation vibratoire de la machine synchrone de test présentée au paragraphe 1.2.3. Il a ensuite été montré qu'une manière d'atteindre cet objectif est de minimiser les vibrations de la carcasse statorique autour d'une position angulaire, et de se servir de cette «zone de calme» comme zone de fixation. On a vu enfin que le principe d'action sur les vibrations de la machine est l'utilisation des forces radiales d'origine magnétique, générées par des courants de compensation dans les enroulements de cette machine.

Dans la seconde section, il a été montré que les vibrations synchrones au phénomène de rotation (donc périodiques et de fréquence harmonique de la fréquence de rotation  $v_r$ ) sont prédominantes dans les vibrations radiales de la machine de test. La méthode à élaborer doit donc chercher à les atténuer en priorité, et doit pouvoir couvrir tout le spectre vibratoire fréquentiel jusqu'à 3 kHz.

Enfin, la modélisation du système mis en jeu, réalisée dans la troisième et dernière section, a mis en évidence qu'il pouvait être considéré comme linéaire et variant périodiquement dans le temps, sous l'hypothèse de courants de compensation assez faibles. Le but à atteindre est donc d'atténuer au mieux un signal formé de composantes spectrales de fréquences harmoniques de  $v_r$  à travers un système linéaire et variant périodiquement dans le temps de fréquence  $p v_r$  connue, tout en gardant la possibilité de limiter le niveau des signaux de commande.

Avant d'essayer de résoudre ce problème, nous allons nous pencher, dans le prochain chapitre, sur l'étude des travaux qui ont déjà été effectués sur ce sujet.



# *Chapitre II*

# Méthodes classiques de contrôle actif

## II.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les méthodes «classiques» employées dans le domaine du contrôle actif de vibrations, et de montrer leur insuffisance pour la présente application. En effet, ces méthodes supposent la présence de transferts linéaires et invariants dans le temps au sein du système global de contrôle. Elles ne sont donc pas adaptées au système linéaire et variant périodiquement dans le temps dont le modèle a été déterminé au chapitre précédent.

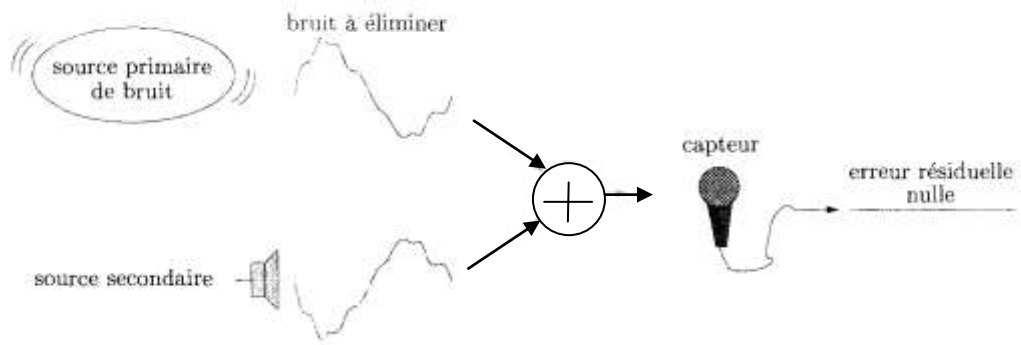
Nous verrons que cette particularité diminue fortement leurs performances, et qu'elles deviennent alors difficilement exploitables.

Introduction au concept de base du contrôle actif décrit les différentes stratégies d'implantation ainsi que les algorithmes les plus couramment utilisés. Les divers travaux de recherche dont ce sujet a précédemment fait l'objet, ainsi que les résultats obtenus y sont analysés.

## II-2 Introduction au contrôle actif classique

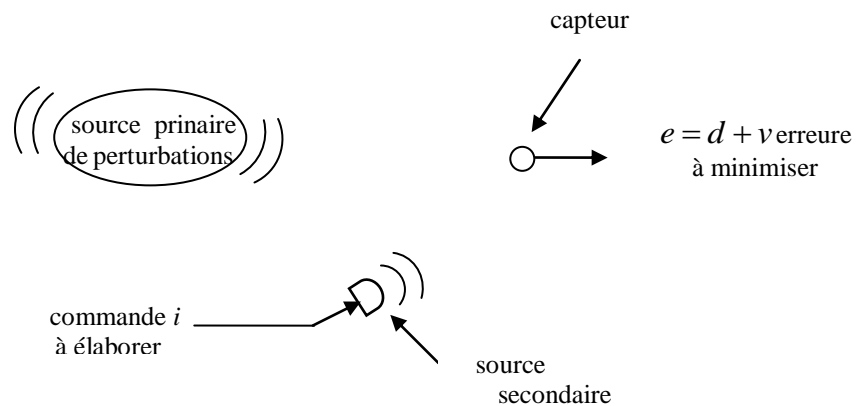
### II.2.1 Généralités

Historiquement, les techniques de contrôle actif ont été élaborées afin de lutter contre des ondes sonores indésirables [23],[ 24],[ 25]. La propriété fondamentale qu'elles utilisent est le principe de superposition. En effet, une source appelée «source primaire» est supposée générer un bruit que l'on veut éliminer. Un système de contrôle actif est chargé d'émettre, par l'intermédiaire d'une source secondaire, un son de même amplitude que ce bruit, mais de phase opposée. Idéalement, ces deux ondes s'ajoutent l'une à l'autre et forment ainsi une erreur résiduelle nulle, comme indiqué sur la figure 2.1. Toutefois, les erreurs de modélisation pouvant se produire sur les différents transferts présents dans le système, ainsi que le caractère souvent aléatoire des signaux de perturbation, font que dans le cas général, on ne peut annuler complètement l'erreur résiduelle. Par contre, on peut chercher à l'atténuer au mieux en calculant le bruit secondaire optimal qui minimise une fonction de coût dépendant de l'erreur résiduelle. Ce coût est choisi quadratique dans l'immense majorité des cas, d'une part parce que cette grandeur, homogène à une puissance sonore, caractérise bien les performances d'atténuation du système de contrôle, et d'autre part parce que ce type de coût permet une grande simplification des calculs. Il est à remarquer que le bruit élaboré par le système de contrôle actif ne sera optimal qu'au sens de cet indice de performance.



**Fig 2.1 :** Principe général du contrôle actif de son

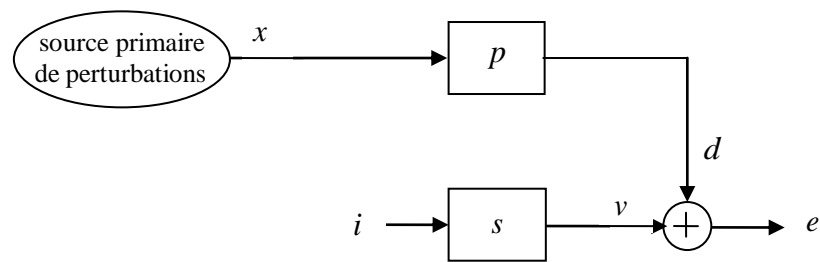
Plus généralement, le principe du contrôle actif peut être appliqué à divers types de perturbations, dont les vibrations. La figure 2.2 reprend la figure 2.1, mais dans un cadre plus général, où les perturbations peuvent être d'une nature physique quelconque. La perturbation générée uniquement par la source primaire au niveau du capteur est notée  $d$ . Celle générée au même point par la source secondaire, et donc par la commande  $i$ , est notée  $v$ , et peut être considérée comme une contre-perturbation. Le système de contrôle actif doit être capable d'élaborer la commande  $i_{opt}$ , optimale au sens où elle doit minimiser un critère quadratique dépendant de l'erreur  $e = d + v$ .



**Fig2.2:** Principe général du contrôle actif

Une fois ce minimum atteint, on peut dire que la puissance de l'erreur résiduelle a été diminuée, et la perturbation compensée grâce à l'action de la contre-perturbation générée par la commande optimale.

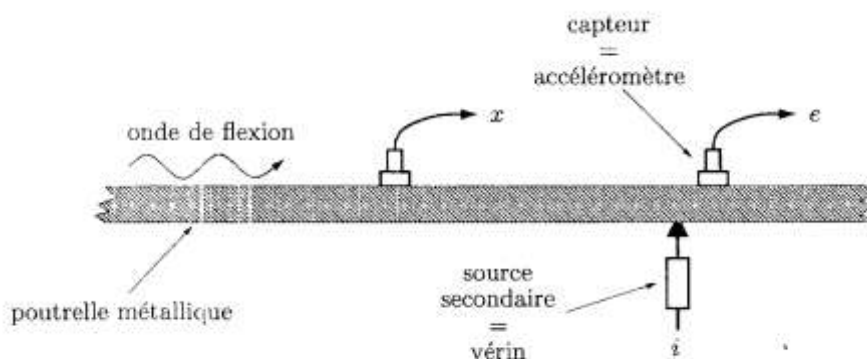
En représentant les transferts existant entre les différents signaux mis en jeu, on obtient le modèle de la figure 2.3.



**Fig 2.3:** Transferts mis en jeu dans un système de contrôle actif

On définit tout d'abord un signal  $x$ , que l'on nomme signal de référence. Il est dû exclusivement à la source primaire, et permet de modéliser le trajet parcouru par la grandeur physique perturbatrice de cette source au capteur. En effet, le transfert primaire noté  $P$ , relie la référence  $x$  à la perturbation mesurée  $d$ . Il est à noter que le signal de référence, s'il est accessible à la mesure, permettra au système de contrôle actif de prédire certaines caractéristiques des perturbations à éliminer au niveau du capteur. Ensuite, le transfert donnant le lien entre le signal de commande  $i$  de la source secondaire, et la contre-perturbation  $v$  qu'elle engendre au niveau du capteur; est noté  $S$ . Finalement, on voit qu'on ne peut atténuer que par l'intermédiaire de ce transfert secondaire. Il est donc naturel de penser que les performances du système de contrôle actif seront très dépendantes des caractéristiques de  $S$ .

Afin d'illustrer les différents signaux et systèmes de la figure 2.3, nous allons décrire quelques exemples applicatifs de contrôle actif de vibrations. Le premier exemple, dont le schéma de principe est donné par la figure 2.4, concerne le contrôle actif des vibrations d'une poutrelle métallique de longueur infinie, soumise à des ondes de flexion qui se propagent de la gauche vers la droite. Un premier accéléromètre fournit le signal de référence  $x$ , représentant les vibrations de la poutrelle en une position amont par rapport à un second accéléromètre.



**Fig 2.4 :** Contrôle actif des vibrations d'une poutrelle métallique

Ce dernier mesure le signal d'erreur à minimiser, ou, en l'absence de signal de commande  $i$ , les vibrations  $d$  à éliminer. Le transfert  $P$  de la figure 2.3 est donc celui reliant les signaux  $x$  et  $e$ , en l'absence de commande  $i$ . Cette dernière agit additivement sur  $d$  en créant la contrevibration  $v$  grâce à une source secondaire, constituée par un vérin. Le transfert  $S$  relie quant à lui la commande  $i$  du vérin, au signal d'erreur  $e$ , en l'absence des perturbations engendrées par les ondes de flexion. Pour cette application, le signal de référence peut être considéré comme une version des perturbations qui vont affecter le second accéléromètre, et peut donc être utilisé afin de les prédire:

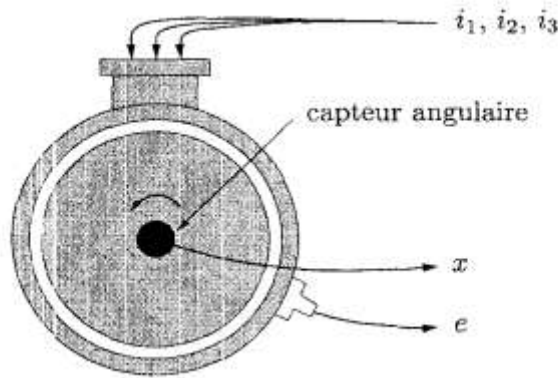
- Le second exemple auquel on peut s'intéresser est celui de l'application décrite au chapitre précédent, concernant le contrôle actif des vibrations d'une machine: tournante -électrique.

Dans ce cas, la difficulté revient à déterminer un signal de référence représentatif des vibrations à éliminer, dont. La seule source est la rotation de la machine. Intuitivement, on peut penser que le signal de sortie d'un capteur angulaire fixé sur l'arbre de rotation (signal de top-tour) peut remplir cette condition. En effet, il fournit une sinusoïde dont la fréquence est celle de rotation  $v$ . Ce point- est confirmé par les résultats obtenus à la section 1.3.4, où il a été montré que les vibrations de la machine de test étaient principalement constituées d'un ensemble de sinusoïdes; dont les fréquences sont les harmoniques de  $v$ . Dans la suite, c'est donc ce choix qui sera fait pour le signal de référence, qui fournira le fondamental des vibrations périodiques à éliminer.

Le schéma correspondant à cette configuration est celui de la figure 2.5.

Le signal d'erreur est mesuré par un accéléromètre placé sur la carcasse statorique de la machine, alors que le signal de référence est fourni par un capteur angulaire placé en bout d'arbre rotorique. Les signaux de commande sont au nombre de trois, et correspondent aux courants injectés dans chacune des bobines statoriques de la machine. Le transfert  $P$  relie le signal de top-tour  $x$  aux vibrations à éliminer  $d$ , que l'on peut mesurer en sortie de l'accéléromètre lorsqu'il n'y a aucun signal de commande. Le transfert secondaire  $S$  reliant les signaux de commande, aux contrevibrations qu'elles engendrent a déjà été étudié à la section 1.4, et sa structure est représentée à la figure 1.14. Cette fois, la référence ne représente pas une version future des perturbations à éliminer, mais permet de déterminer certaines de leurs caractéristiques, comme leurs fréquences.

Il existe beaucoup d'autres applications qui ont été étudiées dans le cadre du contrôle actif des vibrations (voir en particulier les exemples données dans ([2], [4], [20])). On peut néanmoins noter qu'elles reposent toutes sur le modèle de la figure 2.3.



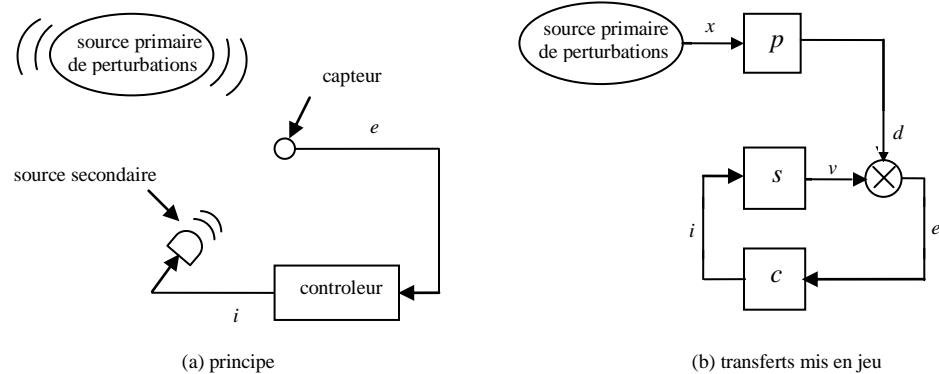
**Fig. 2.5:** Contrôle actif des vibrations d'une machine tournante électrique

Après avoir établi le modèle général d'un système de contrôle actif, nous allons déterminer celui du contrôleur à utiliser, qui est fonction de la disponibilité d'un signal de référence  $x$  représentatif des vibrations à éliminer.

### II.2.2 Choix d'une stratégie de commande

#### Stratégie «feedback»

Dans un premier temps, on suppose ne pas disposer d'un signal de référence correct. Ceci peut arriver par exemple si on ne possède pas le capteur correspondant (le capteur angulaire dans notre cas de figure), ou si ce signal est physiquement impossible à mesurer (le bruit ambiant dans une pièce contenant de nombreuses personnes, par exemple). La seule information disponible sur la perturbation à éliminer et sur l'atténuation réalisée par le système est donc le signal d'erreur. Il constitue la seule entrée du contrôleur, alors que sa sortie est le signal de commande à élaborer. On obtient une structure à boucle de rétroaction, plus communément dénommée structure feedback, dont le principe et les transferts mis en jeu sont représentés sur la figure 2.6, et où le transfert du contrôleur est noté  $C$ .



**Fig.2.6** Structure feedback

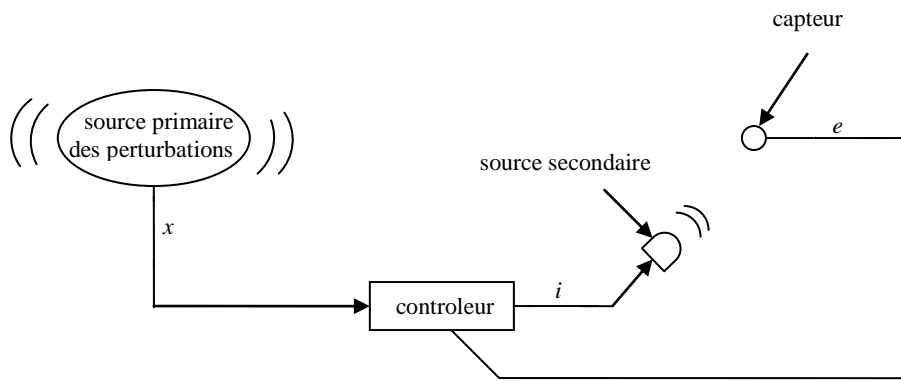
Cette structure a été intensément étudiée en automatique, et une multitude de méthodes ont été élaborées pour trouver un correcteur satisfaisant, qui ne seront pourtant pas utilisées par la suite. En effet, la plupart d'entre elles supposent le transfert  $S$  linéaire et invariant dans le temps alors qu'il a été montré linéaire et variant périodiquement dans le temps (voir section 1.4).

D'autre part, elles imposent toutes d'étudier la stabilité du système bouclé, ce qui peut devenir difficile avec un tel transfert. Enfin, nous disposons d'un signal de référence fourni par le capteur angulaire décrit précédemment.

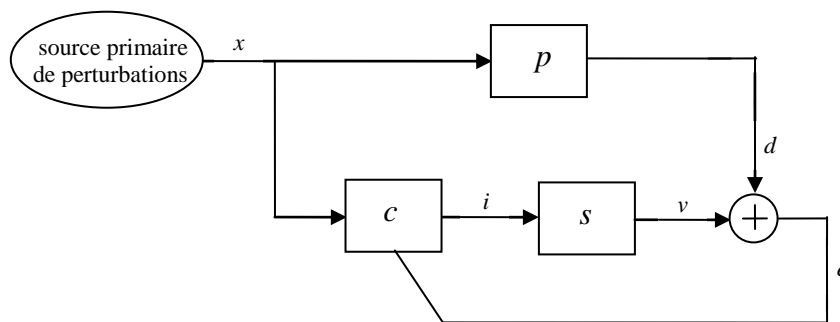
Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, la présence de ce signal permet d'adopter une structure différente pour le contrôleur.

### **Stratégie « feedforward » :**

Dans un second temps, on suppose pouvoir mesurer un signal de référence fournissant assez d'indications sur les perturbations engendrées par la source primaire. Le contrôleur bénéficie alors de deux sources d'informations pour élaborer la commande optimale et estimer le taux de compensation qu'il atteint : le signal de référence et le signal d'erreur. Il peut donc prendre la structure décrite sur la figure 2.7 appelée structure feedsorward [44]. Le signal de référence constitue sur les perturbations à éliminer pour élaborer la meilleure commande  $i$ , le signal d'erreur, quant à lui est utilisé pour mesurer les performances atteintes par le système de contrôle actif, et modifier les caractéristiques du contrôleur si elles ne sont pas satisfaisantes. Grâce à ce principe, le contrôleur et la commande  $i$ , vont converger vers leur valeur optimale, et la fonction du coût vers son minimum.



(a) principe



(b) transferts mis en jeu

**Fig 2.7 : Structure feedforward**

D'après la figure 2.5, nous disposons, pour réaliser le système de contrôle actif désiré, d'un signal de référence grâce au capteur angulaire monté sur l'arbre de rotation de la machine, le contrôleur utilisé aura donc une structure feedforward, et le prochain paragraphe à pour but d'établir sa valeur optimale permettant d'atteindre le maximum de compensation, et donc le minimum de la fonction de coût.

### **II.2.3 : Contrôleur feedforward optimal :**

Le contrôleur employé est supposé avoir une structure feedforward identique à la figure 2.7, de plus, les transferts P et S mis en jeu dans le système global de contrôle actif sont supposés linéaires.

#### **Cas général :**

On peut donner, dans le cas général de la figure 2.7 (b), l'expression du transfert optimal  $C_{opt}$  du contrôleur feedforward ne vérifiant aucune contrainte de causalité ni de stabilité. Pour cela, il faut exprimer le signal d'erreur  $e$  en fonction des signaux et



des transferts du système global. Dans un premier temps, les transferts  $P$  et  $S$  ne sont pas supposés invariants dans le temps, et le symbole mathématique «  $\circ$  » se lisant « appliqué à » doit être utilisé pour relier leur entrée à leur sortie. Par exemple, le signal  $i$  est la sortie du transfert  $C$  d'entrée  $x$ , ce qui se note :

$$i = C \circ x \quad (2-1)$$

En suivant cette notation, on obtient pour des transferts linéaires :

$$e = d + v = P \circ x + S \circ C \circ x = (P + S \circ C) \circ x \quad (2-2)$$

Pour annuler les erreurs, le transfert du contrôleur optimal doit donc vérifier l'équation :

$$S \circ C_{opt} = -P$$

On peut alors définir  $S_{inv}$ , le transfert inverse de  $S$  qui vérifie, pour un signal  $y$  quelconque :

$$S_{inv} \circ S \circ y = S \circ S_{inv} \circ y = y \quad (1-3)$$

L'expression du contrôleur optimal sans contrainte devient finalement :

$$C_{opt} = -S_{inv} \circ P \quad (1-4)$$

Cette équation montre qu'il est nécessaire d'inverser le transfert  $S$  pour obtenir une compensation parfaite de la perturbation  $d$ . Les caractéristiques de ce transfert auront donc une grande influence sur les performances obtenues par le système de contrôle actif feedforward, ce qui peut même poser des problèmes de réalisation si  $S_{inv}$  est instable ou non-causal.

Cas des systèmes linéaires et invariants dans le temps :

Si les transferts  $P$  et  $S$  sont linéaires et invariants dans le temps (LIT), ils sont entièrement décrits par leur réponse impulsionnelle ou par sa transformée de Fourier. Ce point sera étudié plus en détail dans le chapitre 3, portant sur l'étude théorique des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps. On peut toutefois définir dès maintenant les quelques notations qui nous seront nécessaires dans ce chapitre, en prenant l'exemple du transfert  $C$ . Sa réponse impulsionnelle est notée  $c(r)$ , où  $r$  représente le retard en nombre d'échantillons par rapport à celui de l'impulsion d'excitation. Dans le domaine temporel, le signal de sortie est alors donné par la convolution du signal d'entrée par  $c(r)$ . Pour des signaux représentés sous leur forme temporelle, on a donc une relation entrée-sortie équivalente à (2.1) où l'opérateur «  $\circ$  » devient l'opérateur de convolution, la transformée de Fourier  $c(\alpha)$  de  $c(r)$  est appelée gain complexe ou fonction de transfert en fréquence du système  $C$ . Elle permet quant à elle de donner la relation entrée-sortie du système dans le domaine fréquentiel, où l'opérateur «  $\circ$  » devient alors un simple produit. Pour simplifier les calculs qui vont suivre et faciliter la compréhension des résultats, on suppose que tous les signaux mis en jeu dans la figure 2.7 (b) sont déterministes et de module

sommable. Dans ce cas, on peut calculer leur transformée de fourrier et la relation générale (2.1) transposée en fréquence devient :

$$i(\alpha) = \hat{c}(\alpha)x(\alpha)$$

Où le domaine de définition de la fréquence réduite  $\alpha$  est donnée par (1.4) et la définition de la transformée par (1.2) Les fonctions complexes  $i(\alpha)$  et  $x(\alpha)$  sont respectivement les transformées de Fourier des signaux  $i$  et  $x$ .

En appliquant ce résultat à la relation générale (2.2), on obtient l'expression du signal d'erreur en fréquence :

$$\hat{e}(\alpha) = \hat{d}(\alpha) + \hat{c}(\alpha)\hat{s}(\alpha)\hat{x}(\alpha) \quad (2.5)$$

A partir de cette équation, on peut définir la fonction de coût que doit minimiser le contrôleur optimal. Le choix de son expression est primordial, car elle doit représenter à elle seule les performances que l'on attend du système de contrôle actif. Elle peut prendre une forme quelconque, mais sa minimisation sera rendue infiniment plus simple si elle ne comporte pas de minime locaux. Une forme très largement utilisée et vérifiant cette propriété est la fonction de coût des moindres carrées, ou coût quadratique. Sa forme la plus simple dans le domaine fréquentiel est le module carré de la transformée de fourrier du signal d'erreur :

$$\zeta = |\hat{e}(\pi)|^2 \quad (2.6)$$

Cette fonction de coût représente l'énergie de ce signal à la fréquence  $\alpha$ , que le contrôleur optimal minimisera sans aucune autre contrainte. A la contrainte, on peut définir des coûts quadratiques imposant diverses contraintes, comme ajouter un terme pénalisant l'énergie du signal de commande. La fonction de coût peut alors prendre la forme suivante :

$$\zeta = |\hat{e}(\alpha)|^2 + e|\hat{c}(\alpha)|^2 \quad (2.7)$$

Où la constante  $e$  est réelle positive ou nulle.

Le contrôleur minimisant (2.7) cherchera à réduire l'énergie du signal d'erreur en  $\alpha$ , tout en ayant un gain complexe de module minimum. La valeur de la constante  $e$ , permet de régler l'équilibre désiré entre la minimisation de ces deux termes. En effet, plus  $e$ , plus on favorise la minimisation du premier terme de cette somme au détriment du second.

À la limite,  $e$  est nulle et le contrôleur optimal est le même que pour le coût quadratique basique (2.6). Inversement, si  $e$  est élevée, on obtiendra alors une réduction moindre de l'énergie de l'erreur avec à la limite,  $e$  infini, un contrôleur et donc un signal de commande nul. Dans ce cas, le signal d'erreur restera inchangé. Cette technique, dénommée régularisation de la fonction de coût, est intéressante dans le cadre de notre application car elle permet de limiter le signal de commande, tout, en

-minimisant l'erreur. Or le fait que les courants de commande optimaux soient faibles est une des hypothèses nécessaires à la validité du modèle du transfert établi à la section 1.4.

Sachant que le signal d'erreur est formé par la somme de la perturbation  $d$  et de la contre-perturbation  $v$ , la fonction de coût quadratique régularisée (2.7) devient :

$$\zeta = \left| \hat{d}(\alpha) \right|^2 + \hat{d}(\alpha) \hat{v}(\alpha)^* + \hat{v}(\alpha) \hat{d}(\alpha)^* + \left| \hat{v}(\alpha) \right|^2 + \epsilon \left| \hat{c}(\alpha) \right|^2 \quad (2.8)$$

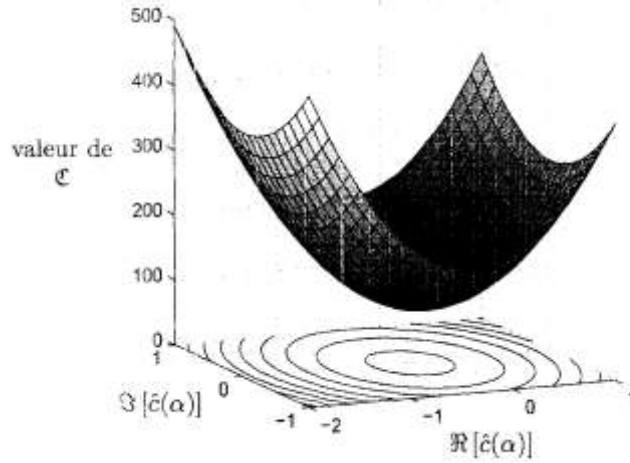
ou  $\hat{v}(\alpha) \hat{d}(\alpha)^*$  est défini comme l'interspectre d'énergie des signaux  $v$  et  $d$  à la fréquence  $\alpha$ . Cette grandeur est l'équivalent, pour les signaux de module sommable, de la densité interspectrale de puissance définie par (1.7).

sous cette forme, l'interprétation physique de  $\zeta$  est immédiate. En effet, le premier terme est l'énergie des seules perturbation  $d$ . Sans signal de commande  $I$  et donc sans contre-perturbation  $v$ , la fonction de coût reste égale à cette valeur. La troisième ligne, quant à elle, est constituée par la somme de l'énergie des contre-perturbations, ajoutée à une fraction du module carré du gain complexe du contrôleur. toutes ces valeurs étant positives, elles ne pourront pas être utilisées pour minimiser  $\zeta$ . par contre, cette tâche peut être remplie par les interspectres situés à la seconde ligne, qui peuvent prendre des valeurs négatives. Pour obtenir une minimisation effective, le contrôleur optimal doit donc faire en sorte que la contre-perturbation  $v$  générée par la commande et la perturbation  $d$  à éliminer aient un interspectre important, ou ce qui est équivalent, que ces deux signaux soient fortement corrélés.

En utilisant (2.5), l'expression (2.8) peut s'écrire:

$$\zeta = \left| \hat{d}(\alpha) \right|^2 + \hat{c}(\alpha)^* \hat{s}(\alpha) \hat{d}(\alpha) \hat{x}(\alpha)^* + \hat{c}(\alpha) \hat{s}(\alpha) \hat{x}(\alpha) \hat{d}(\alpha)^* + \left| \hat{c}(\alpha) \right|^2 \left[ \left| \hat{s}(\alpha) \right|^2 \left| \hat{x}(\alpha) \right|^2 + \epsilon \right] \quad (2.9)$$

$\zeta$  est donc bien une fonction quadratique du gain complexe du contrôleur  $\hat{c}(\alpha)$ . Si on décompose ce gain complexe en sa partie réelle  $\Re[\hat{c}(\alpha)]$  et sa partie imaginaire  $\Im[\hat{c}(\alpha)]$ , la fonction  $\zeta$  peut alors être vue comme une fonction réelle de ces deux variables réelles. Tracée dans le plan orthonormé dont l'axe des abscisses représente  $\Re[\hat{c}(\alpha)]$  et celui des ordonnées  $\Im[\hat{c}(\alpha)]$  elle forme un paraboloïde. Cette surface est convexe, et comporte donc un unique minimum seulement si la valeur réelle  $\left| \hat{s}(\alpha) \right|^2 \left| \hat{x}(\alpha) \right|^2 + \epsilon$  est positive, ce qui peut toujours être imposé grâce à  $\epsilon$ . La figure 2.8, [31], montre un exemple d'une telle surface.



**Fig. 2.8:** Exemple de fonction de coût quadratique généralisée

Les coordonnées du point minimum sont les parties réelles et imaginaires du gain complexe  $\hat{c}_{opt}(\alpha)$  du contrôleur optimal  $C_{opt}$ . Son expression analytique peut être facilement déterminée. En remarquant que pour  $\hat{c}(\alpha) = \hat{c}_{opt}(\alpha)$ , le gradient de  $\zeta$  s'annule dans toutes les directions.

On peut alors définir un gradient complexe  $\nabla_{\zeta}$  dont le module et l'argument donnent respectivement, au point  $\hat{c}(\alpha)$  de coordonnées  $(\Re[\hat{c}(\alpha)], \Im[\hat{c}(\alpha)])$ , la valeur de la plus grande pente de  $\zeta$  ainsi que sa direction [26]:

$$\nabla_{\zeta} = \nabla_{\zeta}[\hat{c}(\alpha)] = \frac{\partial \zeta}{\partial \Re[\hat{c}(\alpha)]} + j \frac{\partial \zeta}{\partial \Im[\hat{c}(\alpha)]} \quad (2.10)$$

le gain complexe optimal  $\hat{c}_{opt}(\alpha)$  minimisant la fonction de coût (2.7) est donc la valeur complexe annulant le gradient ci-dessus. En calculant (2.10) dans le cas du coût quadratique régularisé (2.9), on obtient:

$$\nabla_{\zeta} = 2\hat{s}(\alpha)^* \hat{d}(\alpha) \hat{x}(\alpha)^* + 2\hat{c}(\alpha) \left[ |\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon \right] \quad (2.11)$$

On en déduit :  $\hat{c}_{opt}(\alpha)$

$$\hat{c}_{opt}(\alpha) = - \frac{\hat{s}(\alpha)^* \hat{d}(\alpha) \hat{x}(\alpha)^*}{\left[ |\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon \right]} \quad (2.12)$$

Cette solution est souvent appelée « solution de Wiener », et on peut noter qu'elle est directement proportionnelle à l'interspectre entre les signaux  $d$  et  $x$ , donc à leur intercorrélacion.

Reportée dans l'équation (2.9), cette expression donne la valeur minimale que peut prendre la fonction de coût:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\hat{c}_{opt}(\alpha)] &= \mathcal{E}_{\min} = |\hat{d}(\alpha)|^2 - \frac{|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 |\hat{d}(\alpha)|^2}{|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon} \\ &= \frac{\epsilon |\hat{d}(\alpha)|^2}{|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon} \end{aligned} \quad (2.13)$$

La première expression de ce minimum montre que si la corrélation entre  $x$  et  $d$  est élevée,  $|\hat{x}(\alpha)|^2 |\hat{d}(\alpha)|^2$  l'est aussi, et  $\mathcal{E}_{\min}$  est alors faible. Ceci permet de quantifier la qualité d'un signal de référence dans le cas où les transferts  $P$  et  $S$  sont LIT: plus le signal de référence est corrélé avec la perturbation à éliminer, meilleurs seront les performances du système de m contrôle actif. De plus, les relations (2.12) et (2.13) permettent de caractériser l'effet de la régularisation sur les performances du système de contrôle actif. En effet, sans régularisation ( $\epsilon = 0$ ), la fonction de coût se réduit à (2.6) et sa valeur minimale est nulle lorsque le contrôleur au gain complexe suivant:

$$\hat{c}_{opt}(\alpha) = \frac{\hat{P}(\alpha)}{\hat{s}(\alpha)} \quad (2.14)$$

Cette expression, qui est un cas particulier de l'équation générale (2.4), est donc celle du contrôleur annulant complètement l'énergie du signal d'erreur à la fréquence  $\alpha$ . Toutefois, il n'y a alors aucune contrainte sur le signal de commande, dont l'énergie peut atteindre des valeurs très élevées. De plus, si la fréquence à laquelle on cherche à minimiser l'énergie de l'erreur est un zéro du transfert secondaire (c'est à dire  $\hat{s}(\alpha) = 0$ ,  $\hat{c}_{opt}(\alpha)$  ne peut alors pas être calculé. Par contre, si  $\epsilon$  est choisie positive et différente de zéro, non seulement le gain complexe optimal existe quel que soit  $\hat{s}(\alpha)$ , mais elle fournit aussi un moyen de limiter l'énergie de la commande. Malgré tout, la relation (2.13) montre que la valeur minimum de la fonction de coût croît avec  $E$ , jusqu'à ce que le contrôleur ait un gain complexe nul et que. Le coût reste figé à  $|\hat{d}(\alpha)|^2$ . Le réglage de la valeur de  $E$  est donc une tâche très délicate, où il faut déterminer le juste milieu entre un coût minimal suffisamment faible et une commande optimale d'énergie peu importante.

L'expression du correcteur optimal permettant de minimiser la fonction de coût quadratique régularisée (2.7), ainsi que ses performances sont donc connues dans le cas où les transferts primaire et secondaire sont LIT. Tout le problème revient maintenant à déterminer la manière de faire converger le contrôleur  $C$  vers cette valeur. Le paragraphe suivant donne le principe d'un algorithme classiquement utilisé en contrôle actif pour réaliser cette tâche.

### ***II.2.4 Algorithme classique du contrôle actif***

Le but de ce paragraphe est d'établir un algorithme récursif, réactualisant la valeur du gain complexe du contrôleur en vue de sa convergence vers sa valeur optimale (2.12). Cette réactualisation permettra de prendre en compte les éventuelles

variations des perturbations à éliminer, qui peuvent se produire dans tout système réel. En effet, dans le cadre de l'application décrite au chapitre 1 les vibrations d'une machine tournante peuvent varier dans le cas d'un changement de son régime de fonctionnement, d'un desserrement progressif de son socle de fixation, d'un changement du couple de charge, etc.

L'algorithme recherché doit minimiser une fonction de coût quadratique  $\zeta[\hat{c}(\alpha)]$  ne comportant qu'un seul minimum. Dans ce cas, on peut utiliser l'algorithme du gradient pour rechercher la valeur optimale de  $\hat{c}(\alpha)$ , dont la forme générale est :

$$\hat{c}(\alpha)_{l+1} = \hat{c}(\alpha)_l - \mu \nabla \zeta[\hat{c}(\alpha)_l] \quad (2.15)$$

où  $\hat{c}(\alpha)_l$  est la valeur du gain complexe à l'itération courante  $l$ , et  $\hat{c}(\alpha)_{l+1}$ , sa prédiction à l'itération suivante .

La valeur de  $\hat{c}(\alpha)_{l+1}$  est donc déduite de  $\hat{c}(\alpha)_l$  en lui enlevant une fraction du gradient de la fonction de coût calculé au point  $\hat{c}(\alpha)_l$ . Nous avons vu précédemment que ce gradient donne la valeur et la direction de la plus grande pente de la surface  $\zeta$  au point considéré. Le gain complexe va donc descendre progressivement le long de cette courbe, de sa valeur originale fixée par l'utilisateur à sa valeur optimale  $\hat{c}_{opt}(\alpha)$ , en suivant le chemin de la plus grande pente. Le coefficient réel positif fia, appelé: pas d'adaptation, et fixé par l'utilisateur, quantifie l'importance de la réactualisation, et donc le temps de convergence de cet algorithme.

Afin d'obtenir une relation itérative utilisable en pratique, on peut écrire le gradient (2.11) de la fonction de coût choisie sous la forme:

$$\nabla \zeta[\hat{c}(\alpha)] = 2\hat{s}(\alpha)^* \hat{x}(\alpha)^* \hat{e}(\alpha) + 2 \in \hat{c}(\alpha) \quad (2.16)$$

En reportant cette expression dans (2.15), on obtient:

$$\hat{c}(\alpha)_{l+1} = (1 - 2\mu\hat{s} \in) \hat{c}(\alpha)_l - 2\mu\hat{s}(\alpha)^* \hat{x}(\alpha)^* \hat{e}(\alpha)_l \quad (2.17)$$

La première propriété à étudier est celle de la convergence. Pour cela, on définit une variable  $\varepsilon$ , traduisant l'erreur entre le gain complexe courant et sa valeur optimale :

$$\varepsilon = \hat{c}(\alpha)_l - \hat{c}_{opt}(\alpha)$$

Ce vecteur utilisé conjointement avec les équations (2.12) et (2.5) permet d'écrire la relation (2.17) sous la forme:

$$\varepsilon_{l+1} = \left[ 1 - 2\mu(|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \in) \right] \varepsilon_l = \left[ 1 - 2\mu(|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \in) \right] \varepsilon_0$$

Si cette valeur tend vers 0 lorsque  $l$  tend vers l'infini, l'algorithme est dit convergent. Cette condition est réalisée quelle que soit la valeur d'initialisation  $\varepsilon_0$ , si et seulement si  $\left| 1 - 2\mu(|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \in) \right| < 1$ , ce qui est équivalent à :

$$0 < \mu < \frac{1}{|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon} \quad (2-18)$$

Donc quelle que soit la valeur d'initialisation de l'algorithme (2.17), si le pas d'adaptation vérifie cette relation, l'algorithme convergera vers le gain complexe optimal recherché.

Pour implanter d'une manière pratique l'algorithme précédent, il est nécessaire de réaliser des traitements par blocs. En effet, afin de connaître les transformées de Fourier des signaux d'erreur  $e$  et de référence  $x$  directement mesurés par les deux-captteurs présents dans le système de contrôle, la solution la plus simple est d'employer un algorithme de transformée de Fourier rapide; portant sur des blocs d'échantillons. Ce type d'implantation permet de lever l'hypothèse très contraignante suivant laquelle les signaux utilisés doivent être de module sommable pour assurer l'existence des transformées de Fourier. Cette condition est alors vérifiée quelle que soit leur nature puisqu'ils sont observés sur un intervalle de temps fini correspondant à la longueur d'un bloc. Il est aussi nécessaire de connaître la valeur du gain complexe  $\hat{s}(\alpha)$  du transfert secondaire, qui devra être estimé durant une étape préliminaire à l'étape de contrôle. En surmontant les grandeurs estimées, on obtient l'algorithme pratique suivant :

$$\hat{c}(\alpha)_{i+1} = (1 - 2\mu\epsilon)\hat{c}(\alpha)_i - 2\mu\hat{s}(\alpha)^* \hat{x}(\alpha)_i \hat{e}(\alpha)_i \quad (2.19)$$

Contrairement à (2.17), ce n'est plus le gradient théorique qui est utilisé dans cette relation mais son estimée, d'où le nom d'algorithme du gradient stochastique». Il est aussi appelé algorithme des moindres carrés  $x$  filtré pondéré [27], et constitue une variante de l'algorithme des moindres carrés  $x$  filtré (FxLMS), originellement développé dans le domaine temporel [28] pour le contrôle actif.

Cet algorithme fréquentiel a été généralisé au cas multi-entrées multi-sorties dans [29], et employé avec succès pour le contrôle de perturbations périodiques. Il faut toutefois remarquer que le traitement par bloc génère un retard dans le signal de commande proportionnel au nombre d'échantillons contenus dans un bloc, et qu'il ne peut être employé dans le cas de perturbations aléatoires. Pour ce type de perturbations, un algorithme récursif temporel réactualisant le contrôleur échantillon par échantillon est préférable. Ces algorithmes sont la plupart du temps dérivés de celui du gradient, et sont l'équivalent temporel de l'équation (2.19). Ils ne sont pas exposés dans ce mémoire, le but étant de donner leur principe général étudié à l'aide de l'exemple précédent, et non une bibliothèque de traitements déjà existante dans plusieurs ouvrages [26, [1], [30].

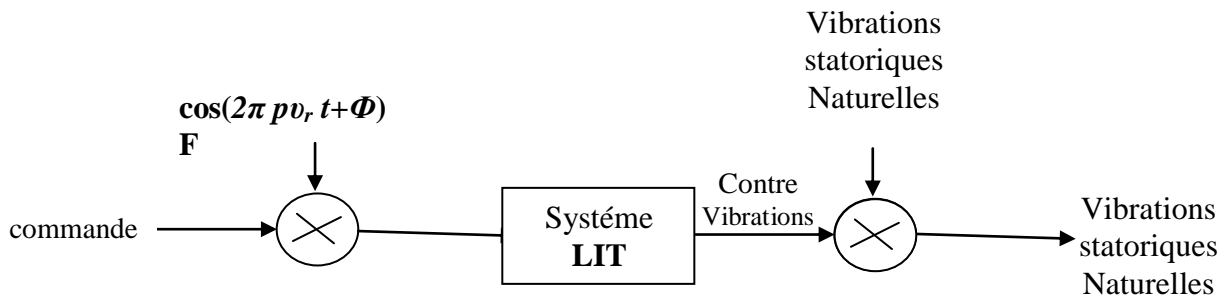
Après avoir présenté les méthodes courantes de contrôle actif, la prochaine section décrit les résultats qui ont permis d'obtenir, dans le cadre de l'application décrite au chapitre précédent.

## II.3 Résultats antérieurs

### II.3.1 Principe et objectifs

Divers travaux de recherche ont été effectués sur cette méthode de compensation active de vibrations d'une machine tournante. Les résultats obtenus

sont, résumés dans [3], [7]. Le principe utilisé est le même que celui présenté au chapitre 1, mis à part le fait qu'un environnement supplémentaire appelé « enroulement de compensation » est ajouté au stator. Il est destiné à recevoir le courant de commande nécessaire à la compensation, et permet de découpler complètement la commande des courants statoriques. Le modèle du transfert entre cette commande et les vibrations engendrées sur la carcasse statorique garde la même structure que celui de la figure 1.14 utilisant les trois enroulements statoriques, mais il ne comporte cette fois qu'une seule entrée. Il est rappelé d'une manière simplifiée sur la figure 2.9.



**Fig. 2.9:** Description simplifiée du transfert commande  $\rightarrow$  vibrations

où  $v_r$  est la fréquence de rotation et  $p$  le nombre de paires de pôles de la machine.

On retrouve en entrée une modulation d'amplitude à la fréquence  $p v_r$  suivie d'un système linéaire et invariant dans le temps, le tout formant un système linéaire et variant périodiquement dans le temps de fréquence  $p v_r$ .

Le but est, comme au chapitre 1, de minimiser les vibrations statoriques totales à l'aide de contre-vibrations engendrées par la commande à élaborer, cette dernière devant traverser le système LVPT précédent.

### **II.3.2 La compensation analogique**

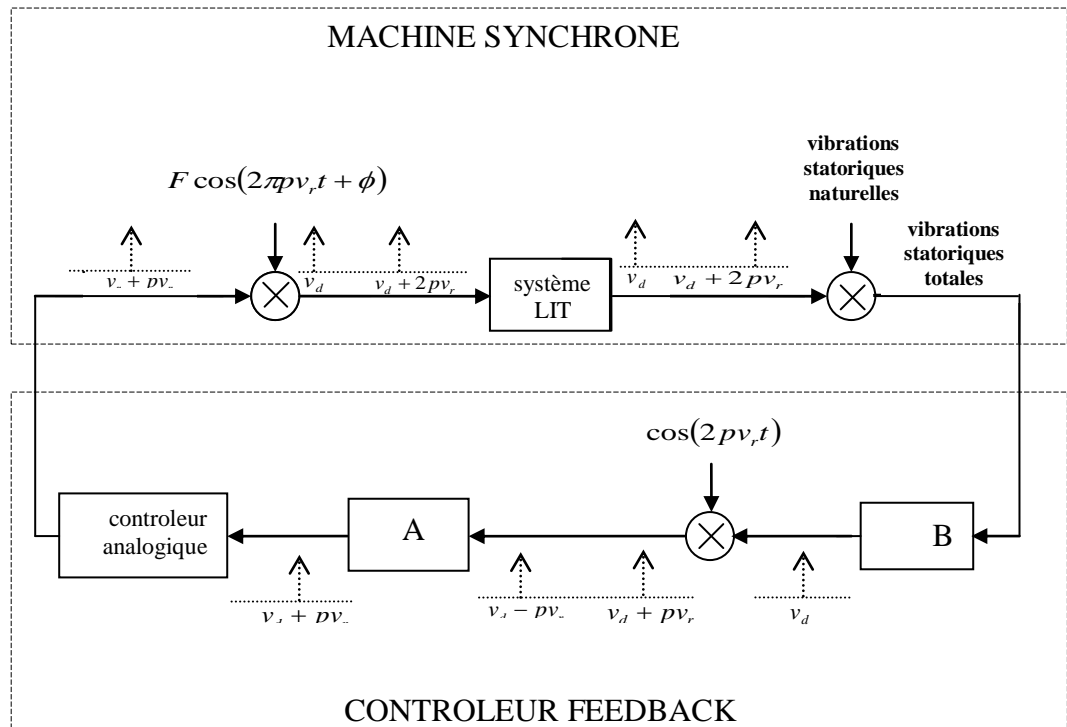
Le premier contrôleur issu des travaux décrits dans [3] est analogique. Il a pour but de minimiser les vibrations du stator à une seule fréquence et pour une seule position angulaire. Il s'agit d'un contrôleur de structure feedback, dont l'entrée est le signal de vibrations statoriques totales, correspondant à l'erreur. Son principe est décrit sur la figure 2.10, où les spectres des différents signaux sont schématisés en gris. Cette figure est à rapprocher de la figure 2.6, décrivant un tel système dans le cas général.

En sortie de l'accéléromètre mesurant les vibrations totales de la carcasse statorique, la composante spectrale vibratoire de fréquence  $vd$  est isolée par un filtre passe-bande sélectif. Ce signal bande étroite est ensuite modulé en amplitude par une sinusoïde de fréquence  $p v_r$  ce qui le décale aux fréquences  $vd \pm p v_r$ . La fréquence de cette modulation est tirée du signal de top-tour, fourni par un capteur angulaire monté en bout d'arbre rotorique. Un filtre réjecteur rejette alors la composante de plus petite fréquence. Il reste donc, à l'entrée du contrôleur, une seule composante bande étroite, de fréquence  $vd + p v_r$ .

Le contrôleur est linéaire et invariant dans le temps, et applique une amplification et un déphasage sur son entrée, que l'on peut régler manuellement.



On a donc une composante de fréquence  $v_d + pv_r$ , en entrée de l'enroulement de compensation qui, une fois modulée et filtrée par le transfert de la machine, génère des contre-vibrations à deux fréquences différentes:  $v_d$  et  $v_d + 2pv_r$ . Le déphasage et l'amplification imposée par le contrôleur permettent de minimiser la composante de fréquence



**Fig 2.10** Principe du contrôleur analogique [3]

$v_d$  contenue dans les vibrations naturelles de la machine. Malheureusement, la composante de fréquence  $v_d + 2pv_r$ , ne peut être modifiée indépendamment et s'ajoute au spectre vibratoire total, sans pouvoir minimiser les vibrations correspondant à cette fréquence.

Ce type de contrôleur permet donc d'éliminer une raie spectrale de fréquence  $v_d$  quelconque, mais il crée en contrepartie une raie parasite incontrôlable de fréquence  $v_d + 2pv_r$ , dont l'amplitude est fonction de la réponse mécanique du stator.

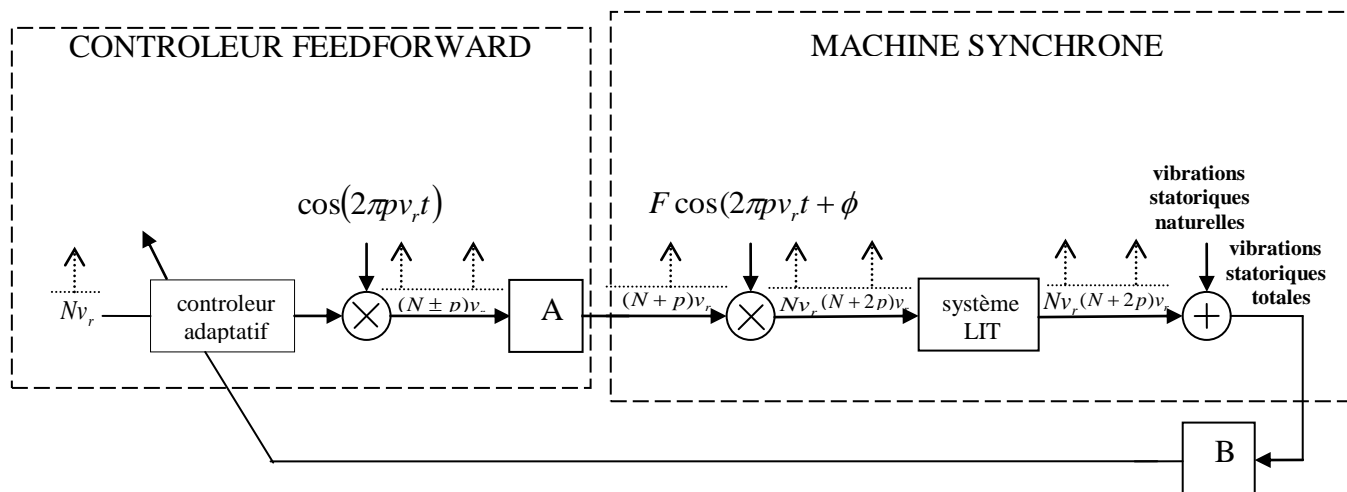
### **II.3.3 La compensation numérique**

Dans un second temps, une version numérique adaptative de ce contrôleur a été réalisée dans le but d'augmenter le nombre de composantes spectrales vibratoires touchées par ce traitement, et de suivre les éventuelles variations de vitesse de la machine [7]. Une étape importante a alors été franchie, puisque le contrôleur prend une structure feedforward afin d'éviter tout problème de stabilité. Son principe est donné sur la figure 2.11, qui est un cas particulier de la figure générale 2.7.

Le signal d'erreur est filtré par un filtre passe-bande sélectif centré sur la fréquence  $Nv_r$ . C'est donc cette composante spectrale du spectre vibratoire de la machine qui doit être atténuée et qui constitue la fonction de coût. Ce signal réactualise dans ce cas le contrôleur adaptatif en utilisant l'algorithme décrit au paragraphe 2.2.4. Le signal de référence, qui doit être de même fréquence que l'erreur, consiste en une sinusoïde dont la fréquence  $Nv_r$ , peut être déduite du signal de top-tour grâce à un multiplieur fréquentiel. Le même principe de prémodulation et de filtrage permet alors à ce contrôleur d'éliminer du spectre vibratoire de la machine la composante visée, tout en générant une raie parasite incontrôlable de fréquence  $(N+2p)v_r$ . On-obtient-donc les mêmes performances de contrôle qu'avec la méthode analogique. Toutefois, la référence étant un harmonique de la rotation, seules des raies spectrales de fréquence multiple de  $v_r$ , pourront être compensées par le contrôleur feed-forward, contrairement au cas précédent où aucune contrainte n'était imposée sur la fréquence  $vd$  visé.

L'implantation numérique apporte tout de même plusieurs avantages pratiques par rapport au cas analogique:

- Les réglages manuels fastidieux du contrôleur analogique ne son plus nécessaire.
- Le système est capable de suivre les variations de vitesse de la machine, car les différents filtres utilisés sont synchronisés sur sa fréquence de rotation.



**Fig 2.11** Principe du contrôleur numérique [7]

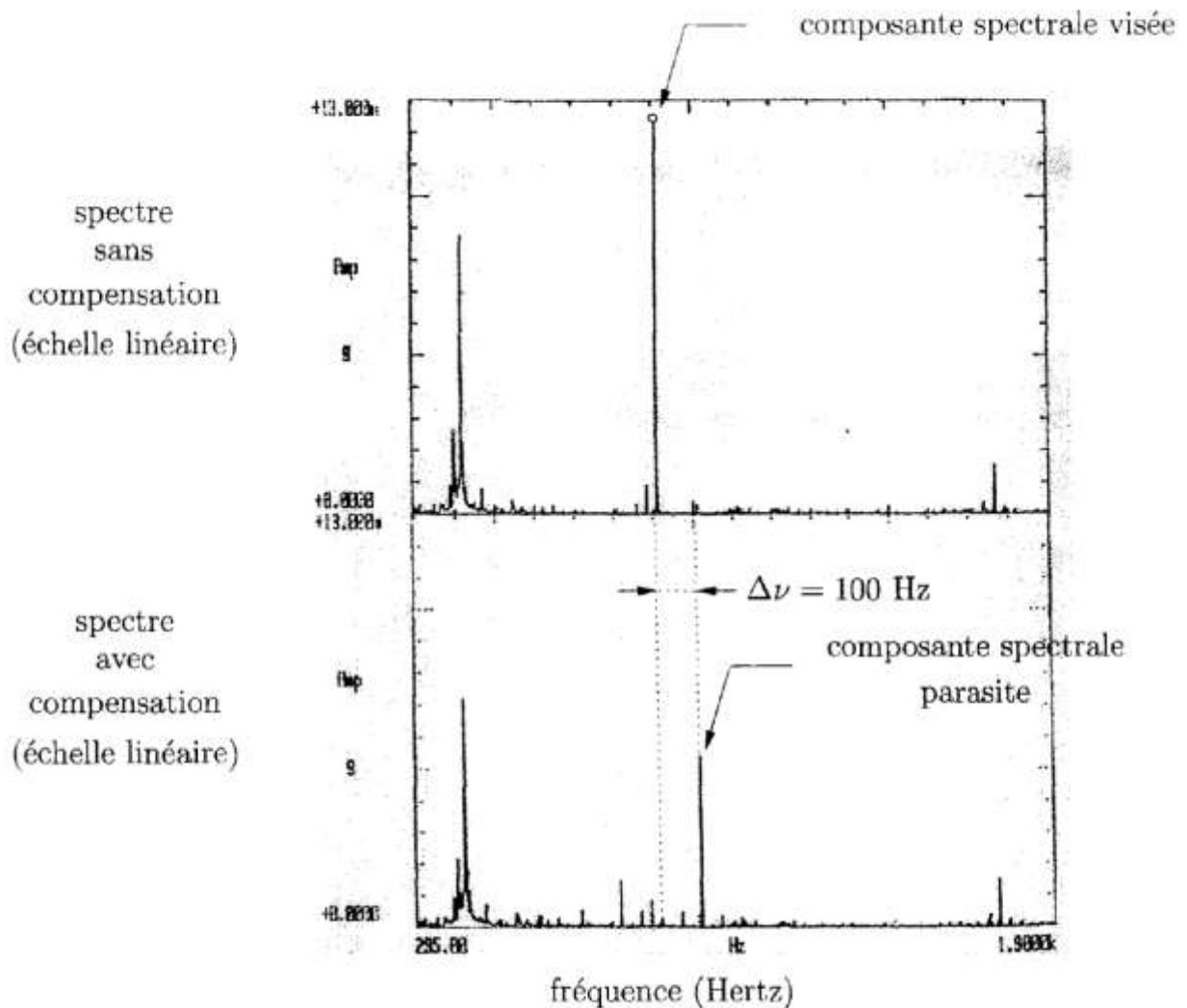
### **II.3.4 – Résultats expérimentaux**

La figure 2.12 montre un exemple de résultats obtenus par le contrôleur feedforwards précédent sur une machine réelle. Il s'agit de la machine synchrone de test décrite au paragraphe 1.2.3, qui comporte  $p=2$  paires de pôles.

Lors de cette expérimentation, sa fréquence de rotation  $v_r$  était fixée à 25 Hz, et la fréquence de sa première raie d'encoche se trouvait à  $36v_r = 900$  Hz. La fréquence du signal de référence a été réglée sur cette dernière valeur afin de l'éliminer du spectre vibratoire de la machine.

La courbe du haut représente le spectre des vibrations du stator en échelle linéaire et sans aucune compensation. Le spectre du bas est celui obtenu une fois que le contrôleur adaptatif a convergé vers sa valeur optimale. Cette seconde courbe montre bien l'élimination de la raie spectrale visée, et la création d'une composante parasite décalée de  $2p\nu_r = 100$  Hz, vers les fréquences les plus élevées.

On peut déduire de ce résultat que l'application des méthodes de contrôle actif habituellement utilisées dans le cadre des systèmes linéaires, et invariants dans le temps, ne donne pas de résultats probants pour cette application. Ceci est dû au fait que le transfert entre le courant de commande et les vibrations qu'il engendre est linéaire et varie périodiquement dans le temps. Il paraît donc nécessaire de réaliser



**Fig 2.12:** Résultat de compensation active utilisant le contrôleur feedforward [44]

Afin d'élaborer une méthode prenant en compte cette particularité.

## II.4 Conclusion

Ce chapitre, composé de deux sections, a permis de montrer l'insuffisance des méthodes classiques de contrôle actif, pour l'atténuation des vibrations d'une machine tournante en utilisant le principe décrit au chapitre 1.

La première section est une introduction aux méthodes de contrôle actif, utilisées pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps. L'étude du contrôleur de structure feedforward y est particulièrement mise en avant, puisque c'est ce choix qui sera fait pour l'application étudiée. La définition d'un coût quadratique fonction de ce contrôleur, permet de déterminer l'expression de son transfert optimal, ainsi qu'un algorithme récursif convergent vers cette solution.

Une étude des travaux de recherche déjà effectués sur cette application de contrôle actif nous permet de voir, dans la seconde section, que l'utilisation de ces méthodes ne donne pas de résultats satisfaisants dans ce cas. En effet, l'astuce de prémodulation et de filtrage sélectif mise en œuvre par ces contrôleurs permet à l'algorithme récursif de converger vers une valeur fixe.

Celle-ci supprime une composante spectrale du spectre vibratoire de la machine, mais génère également une raie spectrale parasite, dont l'amplitude est fonction de la seule réponse mécanique du stator; et reste donc non maîtrisable par l'utilisateur. Cet inconvénient est dû au transfert secondaire du système global de contrôle actif, qui a la particularité de varier périodiquement dans le temps. Il s'avère donc nécessaire d'étudier plus en détail ce type de transferts afin de prendre en compte leurs caractéristiques dans l'expression du coût, du contrôleur optimal, et dans l'algorithme récursif de contrôle actif.

# *Chapitre III*

## *Etude théorique du système*

### **III-1 Introduction**

Ce chapitre livre les outils théoriques nécessaires à l'étude du type de système rencontré dans le problème de compensation active posé au chapitre 1.

La section 3.2 est consacrée à l'étude théorique des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps. Les propriétés de leur réponse impulsionnelle, ainsi que leurs propriétés fréquentielles permettent de caractériser les effets qu'ils produisent sur le signal d'entrée. Finalement, on aboutit à la définition d'une matrice, jouant le même rôle que la fonction de transfert (les systèmes linéaires invariants dans le temps). L'étude de cette matrice peut fournir des informations importantes sur le système.

Enfin, dans la section 3.3, les outils théoriques précédemment définis sont utilisés pour analyser un système linéaire variant périodiquement dans le temps de même structure que celui exposé à la section 1.4.5. Les résultats obtenus dans cette section seront donc utilisés au chapitre suivant, et permettront d'élaborer un algorithme de contrôle actif de vibrations efficace pour ce type de système.

### **III-2 Étude des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps**

La plupart des méthodes décrites dans la littérature classique du traitement du signal et de l'automatique adoptent l'hypothèse que les systèmes mis en jeu sont linéaires, et invariant dans le temps (LIT). Tout au plus, certains domaines, comme le traitement adaptatif du signal [28], [31], permettent de prendre en compte des variations lentes de leurs caractéristiques.

Ceci vient en partie du fait que les systèmes variant dans le temps d'une manière complexe sont rarement rencontrés dans la pratique. Les résultats peu exploitables obtenus en considérant les systèmes linéaires variant dans le temps dans un cadre général, sans faire d'hypothèses sur leurs variations [32], [33] y sont également pour beaucoup.

L'étude des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps (IVPT) est beaucoup plus simple, et des résultats facilement utilisables peuvent être mis à jour. De plus, ce type de systèmes se rencontre couramment dans la pratique. En effet, un échantillonneur est typiquement un système LVPT [34], tout comme une modulation d'amplitude sinusoïdale, ou un filtré à capacités commutées [35]. Un système de sur- ou de sous-échantillonnage peut lui aussi être considéré comme un système LVPT [36]. Enfin, certains systèmes physiques sont naturellement LVPT comme celui présenté au chapitre 1. Ce type de systèmes n'est donc pas dénué d'intérêt, et leur étude détaillée va être réalisée dans cette section.

Après avoir, argumenté le choix du modèle utilisé pour représenter ces systèmes, leur étude est d'abord réalisée en temps; puis en fréquence. On aboutit alors à un opérateur de type «gain complexe» que l'on peut mettre sous une forme matricielle, et qui caractérise leur effet d'un point de vue fréquentiel. L'étude de ce gain complexe matriciel grâce à des techniques d'algèbre matricielle (décomposition en valeurs singulières et calcul de normes) fournit des informations intéressantes sur le système. Ces techniques permettent, en outre, de donner les conditions d'inversibilité d'un tel opérateur.

### III.2.1 Modèle de représentation

Deux grands types de modèles sont utilisés dans la littérature pour décrire les systèmes LVPT.

Le premier est le modèle d'état, régi par des matrices périodiques en temps [37], [38]. Son étude peut être réalisée grâce au théorème de Floquet [39]. Il montre l'existence d'une transformation linéaire variant périodiquement dans le temps, permettant de transformer le système de départ en un système invariant. Ce dernier contient beaucoup d'informations sur le système périodique original, qu'il soit continu ou discret [40]. Pour les systèmes discrets, on peut aussi utiliser une transformation par blocs permettant d'obtenir des matrices d'état invariantes [41].

Le second modèle est celui de la réponse impulsionnelle. L'étude de ce signal, dans le domaine temporel aussi bien que dans le domaine fréquentiel, permet de caractériser complètement les effets des systèmes LVPT sur leur entrée, qu'ils soient continus ou discrets.

Pour le premier modèle, il est nécessaire de choisir les variables d'état composant le vecteur d'état du système. Ce choix n'est jamais facile, et peut même poser des problèmes si ces variables ne résument pas parfaitement l'état du système à un instant donné. Par contre, la réponse impulsionnelle ne peut être choisie, puisqu'elle est fournie par le système lui-même en réponse à une impulsion. Cette deuxième solution écarte donc tout risque d'erreur de modélisation, lié au choix des variables d'état. De plus, ce modèle permet une interprétation fréquentielle quasi immédiate des effets du système étudié, puisque la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle fournit directement la fonction de transfert en fréquence. Pour ces différentes raisons, le modèle de la réponse impulsionnelle sera utilisé dans la suite de ce mémoire pour représenter et étudier les systèmes LVPT.

La dernière question à se poser sur le modèle utilisé est de savoir s'il sera discret ou continu. Le but de ce travail étant d'élaborer une stratégie de contrôle implantée, à terme, dans un

processeur numérique de signal, le système présenté au chapitre 1 à travers les perturbations qui doivent être compensées, sera vu par le processeur comme un système discret.

Seuls des systèmes LVPT discrets seront donc considérés ici. De plus, si leur réponse impulsionnelle provient de l'échantillonnage de celle d'un système continu, elle sera supposée avoir été correctement échantillonnée, et vérifier la condition de Shannon énoncée au paragraphe 1.1.3 afin d'éviter tout problème de recouvrement spectral.

### III.2.2 Définition :

Soit le système  $H$  discret, linéaire, d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  à temps discret  $n$ , représenté à la figure 3.1 où l'opérateur «  $o$  » peut se être appliqué a été défini par:

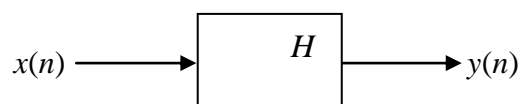


Fig 3.1 Système discret linéaire  $H$

### Paragraphe 2.2.3

Les signaux  $x(n)$  et  $y(n)$  sont discrets, et la relation d'entrée sortie qu'ils vérifient s'exprime par :

$$y(n) = Hox(n) \quad (3.1)$$

Afin de définir correctement le concept de système discret variant ou invariant dans le temps, il est nécessaire d'introduire l'opérateur retard de  $N$  échantillons noté  $R_N$  et appliqué à un signal  $s(n)$ , il vérifie:

$$R_N \circ s(n) = s(n - N) \quad (3.2)$$

Le système linéaire  $H$  est dit invariant dans le temps (LIT) si, pour une même entrée retardée de  $N$  échantillons, on obtient la même sortie, retardée de  $N$  échantillons. Sachant que (3.1) est vérifiée, ceci revient à écrire :

$$H_0[x(n - N)] = y(n - N) \quad \text{Pour tout } N \in Z \quad (3.3)$$

Pour un tel système, les opérateurs  $H$  et  $R_N$  peuvent donc commuter quelle que soit la valeur du retard. en effet, en utilisant les relations (3.2) et (3.3) on obtient:

$$H_0[R_N \circ x(n)] = R_N \circ [H \circ x(n)], \text{ pour tout } N \in Z \quad (3.4)$$

Si cette commutation n'est pas réalisée pour tout  $N$ , le système linéaire est dit variant dans le temps (LVT).

Si la relation (3.4) est vérifiée pour une valeur particulière de  $N$ , elle l'est aussi tous ses multiples entiers, le système linéaire  $H$  est alors variant périodiquement dans le temps (LVPT) et sa période, notée  $P$ , est plus petite valeur de  $N$  pour laquelle la commutation (3.4) est possible. Ce type de système est donc un cas particulier des systèmes LVT. De plus, on remarque que les système invariant dans le temps peuvent être considérés comme périodiques de période  $P = 1$ , et constituent eux-mêmes un cas particulier des systèmes LVPT.

### **III.2.3 Domaine temporel :**

#### **Système discret linéaire variant dans le temps:**

##### **Réponse impulsionnelle:**

On se place dans le cas général où le système  $H$  est **LVT**. Il n'y a donc aucune hypothèse sur la loi suivant laquelle l'équation (3.4) est vérifiée en fonction de  $N$ . Néanmoins, la propriété de linéarité de  $H$  permet à ce système d'être entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle [34]. Elle peut être exprimée en temps absolu, c'est-à-dire sans utiliser la notion de retard ou de différence entre deux instants. Elle est alors notée  $h(n, k)$  et représente la réponse du système observée à l'échantillon  $n$ , à une impulsion envoyée à l'échantillon  $k$ .

On peut définir deux autres formes de cette réponse, en introduisant par changement de variable le retard  $r = n - k$  qui est le laps de temps entre l'instant d'observation de la sortie et l'impulsion d'excitation [34], [42].



$$g(r, k) = h(r + k, k) \quad (3.5)$$

$$f(n, r) = h(n, n - r) \quad (3.6)$$

$g(r, k)$  est donc la réponse du système, observée  $r$  échantillons après l'impulsion d'excitation envoyée en  $k$ . Quant à  $f(n, r)$ , elle peut s'interpréter comme étant la réponse du système observée à l'instant  $n$ , à l'impulsion d'excitation envoyée  $r$  échantillons auparavant. L'équation reliant ces trois formes de la réponse impulsionnelle peut s'écrire, en éliminant  $r$  de (3.5) et (3.6).

$$h(n, k) = g(n - k, k) = f(n, n - k) \quad (3.7)$$

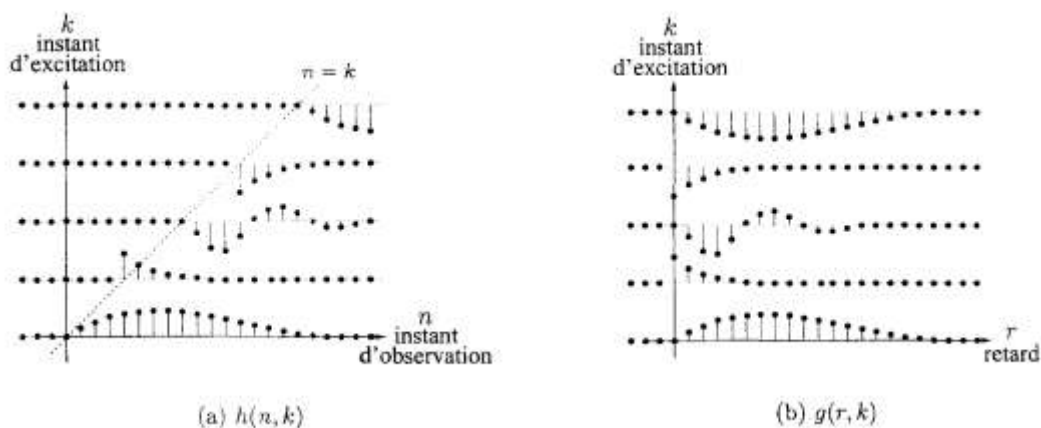
Enfin, si le système considéré est causal, sa réponse impulsionnelle est nulle pour  $r = n - k < 0$ .

La figure 3.2 donne un exemple d'allure temporelle de  $h(n, k)$  et de  $g(r, k)$  pour un système LVT causal.  $f(n, r)$  n'a pas été représentée d'une part parce qu'elle contient exactement la même information, et d'autre part parce qu'elle est moins explicite d'un point de vue visuel.

On voit que la forme du signal obtenu en sortie du système varie en fonction de l'instant d'excitation  $k$ . Si le système avait été invariant, toutes les réponses auraient de forme et d'amplitude identiques, et la réponse impulsionnelle n'aurait été fonction que du retard  $r$ .

La relation temporelle d'entrée-sortie d'un système KVT est donnée par [Hua80].

$$y(n) = Hox(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n, k)x(k) \quad (3-8)$$



**Fig 3.2** Exemple de réponse impulsionnelle d'un système LVT causal

L'équation (3.7) permet d'exprimer la sortie du système en fonction des prix deux autres formes de la réponse impulsionnelle :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n-k, k)x(k) \quad (3-9)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(n, n-k)x(k) \quad (3-10)$$

Ces équations montrent que la réponse impulsionnelle permet de relier complètement l'entrée  $x(n)$  à la sortie  $y(n)$  du système, et qu'elle résume donc bien son comportement entrée-sortie.

La définition de  $f$  et  $g$  ne simplifie en rien la notion de réponse impulsionnelle, mais elle permet de revenir rapidement au cas d'un système invariant. En effet, ces signaux discret ne sont alors plus fonction du moment d'excitation  $K$  ou d'observation  $n$ , mais seulement du retard  $r = n - k$ . Les relations (3.9) et (3.10) se simplifient donc directement en une équation de convolution, caractéristique de système LIT.

### Système discret linéaire variant périodiquement dans le temps

Le système linéaire  $H$  est maintenant supposé LVPT de période  $P$ . Il vérifie donc

$$H \circ [R_N \circ x(n)] = R_N \circ [H \circ x(n)] \quad \text{pour tout } N = m \times P \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

A partir de (3.11) et (3.8), on peut montrer que la réponse impulsionnelle de  $H$  vérifie la relation [42].

$$h(n, k) = h(n+P, k+P) \quad (3.12)$$

D'après les équations (3.5) et (3.6) ceci est équivalent à:

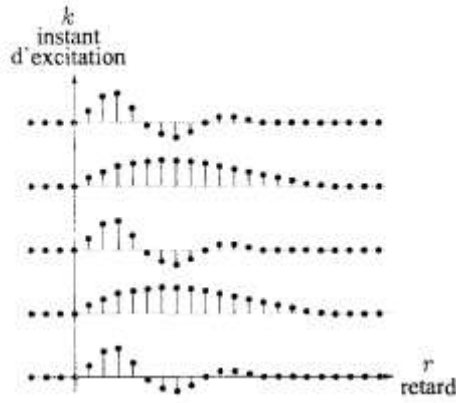
$$\mathbf{g}(r, k) = \mathbf{g}(r, k+P) = \mathbf{g}(r, k_{modP}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{f}(n, r) = \mathbf{f}(n+P, r) = \mathbf{f}(n_{modP}, r) . \quad (3.14)$$

où  $k_{mod P}$  signifie  $k$  pris modulo  $P$ .

La forme temporelle (3.5) de la réponse impulsionnelle d'un système LVPT est représentée sur la figure 3.3 avec  $P = 2$ . La périodicité apparaît suivant l'instant d'excitation du système.

Les réponses impulsionnelles du même type que celle d'un système LIT apparaissent quant à celle suivant l'axe des retards.



**Fig 3.3** Exemple de réponse impulsionnelle  $g(r, k)$  d'un système LVPT causal avec  $P = 2$ .

*Relation d'entrée-sortie*

Les relations de périodicité (3.13) et (3.14), ainsi que les relations d'entrée-sortie (3.9) et (3.10) vont nous permettre de déterminer la structure interne d'un système LVPT de période  $P$ , et nous aider ainsi à comprendre son effet sur le signal d'entrée. Par exemple, le signal bidimensionnel  $g(r, k)$  est  $P$ -périodique suivant  $k$ , et peut être développé en série de Fourier discrète ( ou d'une manière équivalente, en transformée de Fourier discrète ) suivant cette variable.

$$g(r, k) = \sum_{l=0}^{P-1} g_l(r) e^{j2\pi \frac{1}{P} k l} \quad (3.15)$$

$$g_l(r) = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} g(r, k) e^{-j2\pi \frac{1}{P} k l} \quad (3.16)$$

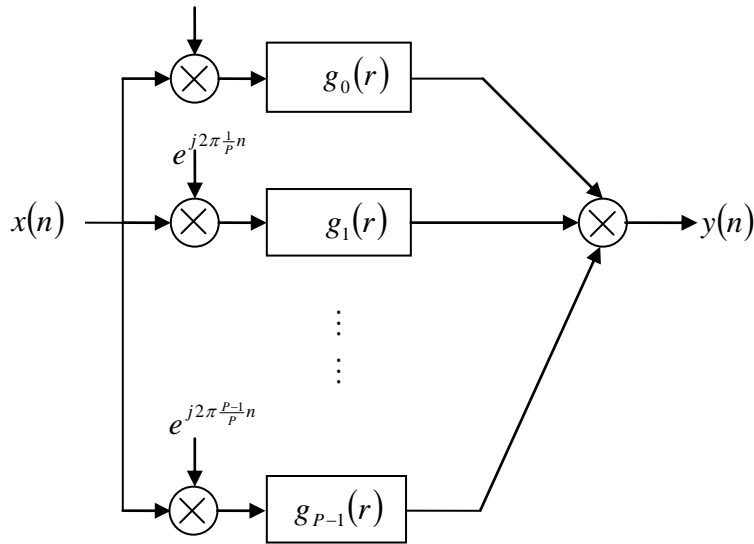
La relation d'entrée-sortie (3.9) peut donc s'écrire, en utilisant (3.15):

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{l=0}^{P-1} g_l(n-k) e^{j2\pi \frac{1}{P} k l} \right) x(k) \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_l(n-k) x(k) e^{j2\pi \frac{1}{P} k l} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

La sortie  $y(n)$  du système considéré est donc constituée d'une somme de  $P$  éléments, chacun de ces éléments est la sortie d'un système LIT de réponse impulsionnelle  $g_l(r)$  donc l'entrée est une version modulée de  $x(n)$  par une exponentielle complexe de fréquence  $\frac{l}{P}$ . En effet, on reconnaît en (3.17) la somme de

$P$  équations de convolutions entre  $g_l(n)$  et  $x(n) e^{j2\pi \frac{1}{P} n l}$ . La figure 3.4 représente la traduction graphique de l'équation (3.17), et montre qu'un système LVPT  $P$ -périodique peut être considéré comme un banc de  $P$  filtres parallèles à entrées modulées. Cette représentation est dénommée « structure à modulation d'entrée ».

$$e^0 = 1$$



**Fig 3.4** Structure à modulation d'entrée d'un système LVPT  $P$ -périodique

Une structure tout fait équivalente peut être déterminée en décomposant  $f(n, r)$   $P$ -périodique suivant  $n$  en série de Fourier discrète :

$$f(n, r) = \sum_{l=0}^{P-1} fl(r) e^{j2\pi \frac{l}{P}n} \quad (3.18)$$

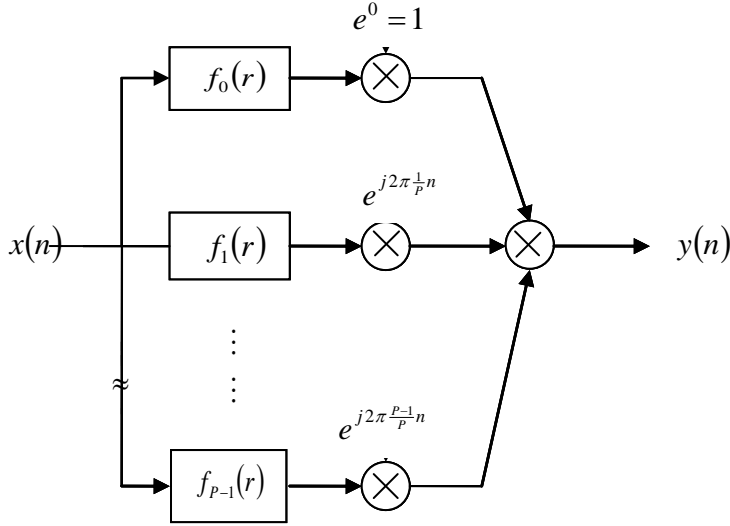
Avec

$$fl(r) = \frac{1}{P} \sum_{n=0}^{P-1} f(n, r) e^{j2\pi \frac{l}{P}n} \quad (3.19)$$

L'équation d'entrée-sortie (3.10) utilisant  $f(n, r)$  devient :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{l=0}^{P-1} f_l(n-k) e^{j2\pi \frac{l}{P}n} \right) x(k) \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} e^{j2\pi \frac{l}{P}K} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_l(n-k) x(k) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Le signal d'entrée passe donc d'abord dans  $P$  système LIT de réponse impulsionnelle  $f_l(r)$ . Les sorties de ces filtres sont ensuite modulées en amplitude par exponentielles complexes de fréquence  $1/P$ . La structure correspondante est représentée sur la figure 3.5. Par analogie avec le cas précédent. Cette représentation sera appelée structure à modulation de sortie.



**Fig3.5** structure à modulation de sortie d'un système LVPT  $P$ - périodique.

Afin d'établir un lien entre les système LIT présents dans ces deux structures, l'équation (3.17) peut s'écrire:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= e^{j2\pi \frac{1}{P} n} e^{-j2\pi \frac{1}{P} n} \sum_{l=0}^{P-1} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_l(n-k) x(k) e^{j2\pi \frac{1}{P} k} \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{P-1} e^{j2\pi \frac{1}{P} n} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_l(n-k) e^{j2\pi \frac{1}{P} (n-k)} x(k) \right) \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Par identification entre (3.20) et (3.21), la relation  $f_l(r)$  et  $g_l(r)$  est donnée par:

$$f_l(r) = g_l(r) e^{-j2\pi \frac{1}{P} r} \quad (3.22)$$

Les réponses impulsionnelles  $f_l(r)$  et  $g_l(r)$  sont donc liées par une modulation d'amplitude sinusoïdale complexe de fréquence  $1/P$ , ce qui équivaut à un décalage fréquentiel de même fréquence. Cette relation permet de confirmer l'équivalence entre les représentations à modulation d'entrée-sortie et de sortie.

La décomposition en série de Fourier de la réponse impulsionnelle d'un système LVPT  $P$ -périodique conduit donc aux structures décrites par la figure 3.4 et 3.5, qui permettent d'analyser facilement l'effet d'un tel système. Les différentes modulations provoquent des décalages fréquentiels de  $1/P$  ( $l \in \{0, \dots, P-1\}$ ), alors que le banc de  $P$  systèmes LIT à un effet de filtrage linéaire et invariant sur les signaux. On retrouve finalement en sortie  $P$  versions fréquentiellement décalées et filtrés de l'entrée. L'effet caractéristique d'un système LVPT  $P$  - périodique sera donc à la fois de filtrer, mais aussi de décaler le signal d'entrée en fréquence, ce que ne fait pas un système LIT.

Cette caractéristique permet d'ores et déjà d'affirmer que les exponentielles complexes ne sont pas les signaux propres des systèmes LVPT. En effet, si l'entrée est une exponentielle complexe, on ne retrouve pas en sortie le même exponentielle amplifiée et déphasée comme pour les systèmes LIT [43], mais une somme de P exponentielles de fréquences différentes. Cette particularité compromet donc l'existence d'un gain complexe du même type que celui des systèmes LIT.

Enfin, ces deux structures peuvent être vues comme une généralisation du cas invariant. Si le système analysé est LIT. Il peut être considéré comme LVPT de période  $P = 1$ , et seule la première branche des représentations existe.

Le système est alors caractérisé par la seule réponse impulsionnelle  $g_0(r) = f_0(r)$ , et sa relation d'entrée-sortie et donnée par:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_0(n-k)x(k) \quad (3.23)$$

Après avoir réalisé une étude temporelle des systèmes LVPT en analysant leurs effets grâce aux propriétés de leurs réponses impulsionnelles, nous allons nous attacher à les décrire d'une manière purement fréquentielle.

### **III.2.4 Domaine fréquentiel:**

#### **Système discret linéaire variant dans le temps**

##### **Réponse fréquentielle**

La réponse fréquentielle d'un système LIT, appelée aussi gain complexe, est définie comme la transformée de Fourier de sa réponse [43]. Pour de tels systèmes, une transformée de Fourier monodimensionnelle suffit, la réponse impulsionnelle étant fonction de la seule variable  $r$ , le gain complexe représente alors les effets du système sur chacune des composantes fréquentielles du signal d'entrée, en terme d'amplification et de déphasage.

Dans le cas d'un système LVT, les diverses formes de la réponse impulsionnelle sont toutes fonctions de deux variables temporelles. Il est donc nécessaire, dans ce cas, d'utiliser la transformation de Fourier bidimensionnelle.

Une telle opération, définie par (1.5) et appliquée à l'équation (3.7), permet d'écrire les relations:

$$\hat{h}(\alpha, \beta) = \hat{g}(\alpha, \beta + \alpha) = \hat{f}(\alpha + \beta, -\beta) \quad (3.24)$$

Les fonctions définies en (3.24) sont complexe, et dépendent des deux variables fréquentielles  $\alpha$  et  $\beta$ , associées respectivement aux variables temporelles  $n$  et  $k$ . Elles sont appelées réponses en fréquence bidimensionnelles ou réponses bifréquentielles. Dans la suite, on se limitera à l'étude de  $\hat{h}(\alpha, \beta)$ , puisque ces trois fonctions sont toutes équivalentes et contiennent la même information, à un changement de variable près.

Pour représenter graphiquement les caractéristiques d'une telle fonction, comme son module ou sa phase, il est nécessaire de définir un repère bidimensionnel,

nommé plan bifréquence [32], dont les abscisses et les ordonnées sont des fréquences réduites. La localisation de  $\hat{h}(\alpha, \beta)$  dans ce plan pour les systèmes linéaires, causaux et stationnaires a été étudié dans [34]. Avant d'énoncer les conclusions de cet article, il est intéressant de développer le concept de système stationnaire. Il découle du théorème de Wold [44] qui statue que toute réalisation d'un signal aléatoire peut se décomposer en deux parties:

- Une partie purement stochastique, pouvant être générée par la sortie d'un système LIT excité par un bruit blanc. Une partie purement déterministe, consistant en une somme de sinusoïdes, parfaitement définies par leur fréquence, leur amplitude et leur phase.

Un signal déterministe est alors dit stationnaire s'il est exclusivement constitué d'une somme de signaux sinusoïdaux. De même, un système est dit stationnaire si, excité par une entrée déterministe stationnaire, il délivre un signal de sortie déterministe stationnaire. Les auteurs montrent alors que pour un système linéaire, stationnaire et causal, la fonction  $\hat{h}(\alpha, \beta)$  ne peut être localisée que sur un réseau de droites parallèles, et de pente -1 dans le plan d'abscisses  $\alpha$  et d'ordonnées  $\beta$ .

Il faut remarquer l'indépendance des propriétés de stationnarité et d'invariance dans le temps.

Un exemple frappant est celui d'un système LVPT P-périodique. D'après la section 3.2.3, ses effets se limitent à des décalages fréquentiels proportionnels à  $1/P$ , et des filtrages LIT. A une entrée déterministe stationnaire, un tel système fait donc correspondre une sortie elle aussi déterministe stationnaire. En effet, même si les sinusoïdes de l'entrée sont décalées en fréquence et filtrées par des systèmes LIT, le signal de sortie reste constitué d'une somme de sinusoïdes. Un tel système est donc stationnaire, tout en étant variant dans le temps, s'il est de plus causal, sa réponse bifréquentielle restera limitée à des droites de pente -1 dans le plan bifréquence.

### ***Relation entrée-sortie***

La transposition de la relation d'entrée-sortie (3.8), dans le domaine fréquentiel permet de donner une signification précise aux réponses bifréquentielles définies en (3.24). Pour cela, il est nécessaire d'utiliser le théorème de Parseval qui s'écrit pour deux signaux  $u(k)$  et  $v(k)$  discrets :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)v^*(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\beta)\hat{v}^*(\beta)d\beta \quad (3.25)$$

Où \* représente le complexe conjugué.

En appliquant cette relation à l'équation d'entrée-sortie temporelle (3.8) suivant la variable  $k$  et en notant que la réponse impulsionnelle ainsi que les différents signaux discrets sont réels, on obtient:

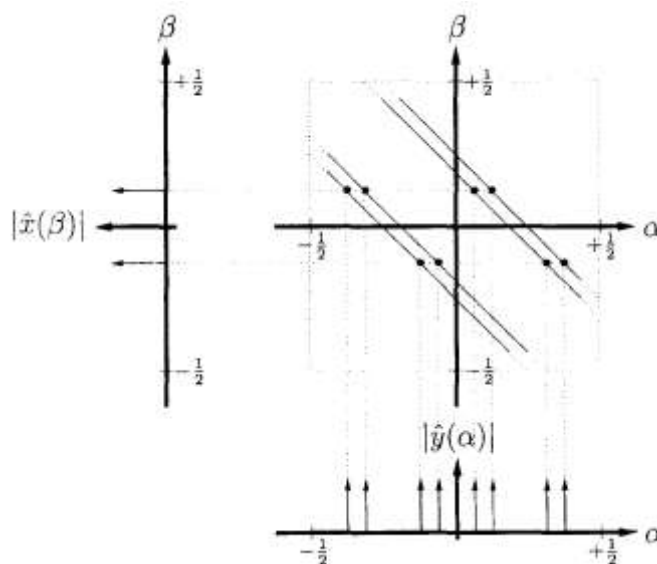
$$y(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(n, \beta)\hat{x}^*(\beta)d\beta$$

Ce qui devient, après une transformée de Fourier suivant  $n$ :

$$\hat{y}(\alpha) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\alpha, \beta) \hat{x}^*(\beta) d\beta \quad (3.26)$$

La réponse bifréquentielle  $\hat{h}(\alpha, \beta)$  est donc bien une extension bidimensionnelle du gain complexe d'un système LIT. En effet, comme le montre cette équation, elle permet de relier le spectre du signal de sortie à celui du signal d'entrée. La figure 3.6 illustre la relation (3.26) en montrant graphiquement ce lien pour un système linéaire, stationnaire et causal. La réponse bifréquentielle reste alors confinée sur des droites parallèles de pente -1, avec des ordonnées à l'origine quelconques. Le spectre d'amplitude du signal d'entrée, représenté sur la gauche de la figure, est celui d'un signal monofréquentiel réel. Ses composantes fréquentielles «traversent» le planbifréquence horizontalement pour aller se «réfléter» sur des droites constituant  $\hat{h}(\alpha, \beta)$ .

Ceci donne alors naissance à de nouvelles composantes dans le spectre d'amplitude de la sortie, représenté en bas de cette figure. À des fins de simplification, seules les droites où est localisée  $\hat{h}(\alpha, \beta)$  sont représentées, et non son module.



**Fig. 3.6:** Exemple de relation entre les spectres d'entrée et de sortie d'un système linéaire stationnaire et causal

## Système discret linéaire variant périodiquement dans le temps

### Réponse fréquentielle

Si le système considéré est LVPT de période  $P$ , les équations (3.7), (3.15) et (3.18) permettent d'écrire la réponse impulsionnelle sous deux formes:



$$h(n, k) = \sum_{l=0}^{P-1} g_l(n-k) e^{j2\pi \frac{l}{P} k} = \sum_{l=0}^{P-1} f_l(n-k) e^{j2\pi \frac{l}{P} n} \quad (3.27)$$

Avec  $g_l(\mathbf{r})$  et  $f_l(\mathbf{r})$  définies respectivement par (3.16) et (3.19)

Une transformée de Fourier bidimensionnelle de (3.27) donne l'expression de la réponse bifréquentielle pour ce type de système:

$$\hat{h}(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l(\alpha) \delta(\alpha + \beta - \frac{l}{P}) = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{f}_l(-\beta) \delta(\alpha + \beta - \frac{l}{P}) \quad (3.28)$$

Où  $\delta(x)$  est la distribution de Dirac vérifiant les relations:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^*$$

D'après (3.28), la réponse bifréquentielle d'un système LVPT reste confinée sur des droites parallèles de pente -1, comme pour un système LVT. Ceci est dû à la présence des distributions de Dirac dans l'expression de  $\hat{h}(\alpha, \beta)$ . Toutefois, la contrainte de périodicité impose à ces droites d'être régulièrement espacées de  $\frac{1}{P}$ , fréquence de variation du système. Cette propriété montre bien que les systèmes LVPT sont un cas particulier des systèmes LVT, et que la périodicité de leurs variations se retrouve directement dans le plan bifréquence à travers cette contrainte d'espacement.

Enfin, on retrouve sur chacune de ces droites les gains complexes  $\hat{g}_l(\alpha)$  ou  $\hat{f}_l(-\beta)$  correspondant aux  $P$  systèmes LIT constituant le système LVPT, et qui apparaissent sur les figures 3.4 et 3.5. On peut vérifier l'égalité entre  $\hat{g}_l(\alpha)$  et  $\hat{f}_l(-\beta)$  en appliquant une transformée de Fourier à (3.22), grâce à laquelle on obtient:

$$\hat{f}_l(\lambda) = \hat{g}_l(\lambda + \frac{l}{P}) \quad (3.29)$$

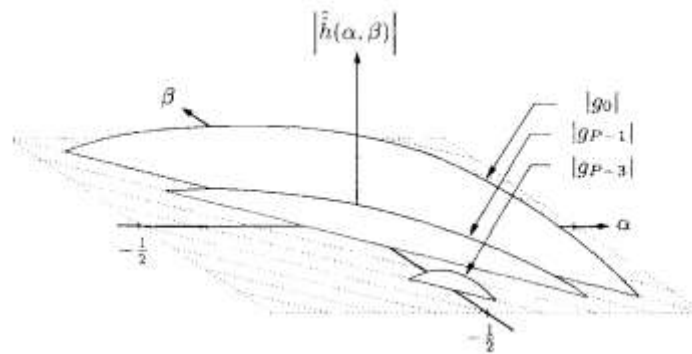
Les distributions de Dirac de l'équation (3.28) imposent à la réponse impulsionnelle, et donc aux fonctions  $\hat{g}_l(\alpha)$  et  $\hat{f}_l(-\beta)$  d'être localisées uniquement sur les droites d'équation  $-\beta + \frac{l}{P}$ . En utilisant l'équation de ces droites ainsi que (3.29), on peut écrire:

$$\hat{f}_l(-\beta) = \hat{f}_l(\alpha - \frac{l}{P}) = \hat{g}_l(\alpha) \quad (3.30)$$

Les expressions de  $\hat{h}(\alpha, \beta)$  données par (3.28) sont donc parfaitement équivalentes et contiennent la même information. Dans la suite, la réponse

bifréquentielle sera préférentiellement exprimée en fonction des gains complexes  $\hat{g}_l(\alpha)$ .

La figure 3.7 représente en perspective  $|\hat{h}(\alpha, \beta)|$  pour un système LVPT  $P$ -périodique causal. Les seuls points non nuls sont situés sur les droites de pente -1 et d'ordonnée à l'origine proportionnelle à  $\frac{1}{P}$ . Cette réponse bifréquentielle pourrait être obtenue, par exemple, par échantillonnage puis par transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle d'un système LVPT continu. Puisqu'on suppose vérifier la condition d'échantillonnage de Shannon, il est normal que  $|\hat{h}(\alpha, \beta)|$  soit nul lorsque  $|\alpha|$  ou  $|\beta|$  sont égaux à  $\frac{1}{2}$ . L'emplacement des différents gains complexes  $\hat{g}_l(\alpha)$  est déterminé grâce à la propriété de périodicité de la fonction  $\hat{h}(\alpha, \beta)$ , qui est 1-périodique suivant  $\alpha$  et  $\beta$ .



**Fig. 3.7:** Exemple de module de réponse bifréquentielle pour un système LVPT  $P$ -périodique causal.

### Relation entrée-sortie

Les équations (3.28) et (3.26) permettent d'établir la relation d'entrée-sortie d'un système LVPT  $P$ -Périodique dans le domaine fréquentiel:

$$\begin{aligned} \hat{y}(\alpha) &= \sum_{l=0}^{P-1} \left[ \hat{g}_l(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{x}^*(\beta) \delta\left(\alpha + \beta - \frac{l}{P}\right) d\beta \right] \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l(\alpha) \hat{x}^*\left(-\alpha + \frac{l}{P}\right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dans le cas de signaux réels; la symétrie hermitienne de la transformée de Fourier permet, d'écrire:

$$\hat{y}(\alpha) = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l(\alpha) \hat{x}\left(\alpha - \frac{l}{P}\right) \quad (3.32)$$

Le spectre en fréquence de la sortie est donc une somme de  $P$  spectres de l'entrée, décalés d'une fréquence multiple de  $\frac{1}{P}$  et filtrés par des systèmes LIT de gains complexes  $\hat{g}_l(a)$ . Cette équation caractérise bien le recouvrement spectral inhérent à ce type de système, et confirme le résultat obtenu dans le domaine temporel: un système LVPT produit à la fois un effet de décalage fréquentiel et de filtrage LIT sur son entrée.

L'équation (3.32) traduit aussi le fait que le contenu spectral de l'entrée aux fréquences  $\alpha - \frac{l}{P}$  (avec  $l \in \{0, \dots, P-1\}$ ) participe à l'élaboration du contenu spectral de la sortie à la fréquence  $\alpha$ . Or, pour un système LIT, il n'y a aucun décalage fréquentiel et seul  $\hat{x}(\alpha)$  (a) influe sur  $\hat{y}(\alpha)$ . En effet, on a alors  $P=1$  et (3.32) se simplifie en:

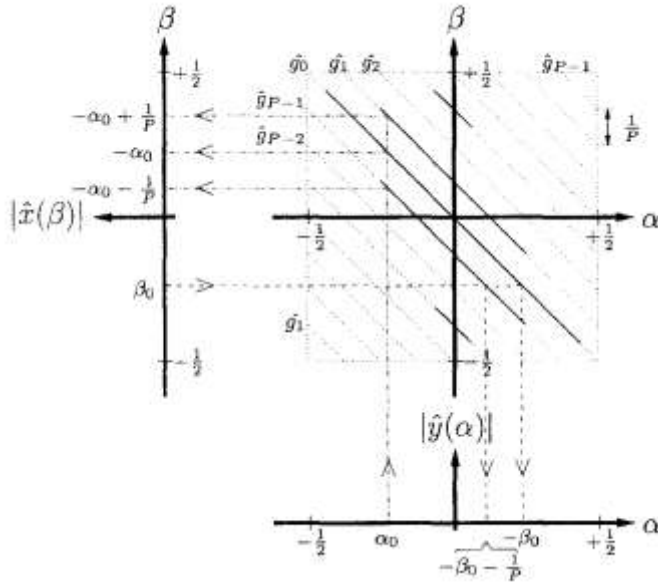
$$\hat{y}(\alpha) = g_0(\alpha)\hat{x}(\alpha) \quad (3.33)$$

Ceci montre que  $\hat{g}_0(\alpha)$  représente la partie invariante du système LVPT, alors que les gains complexes  $\hat{g}_l(\alpha)$  pour  $l \geq 1$  caractérisent sa partie variante dans le temps.

La figure 3.8 représente schématiquement, pour le même système que celui de la figure 3.7, les liens existant entre le spectre du signal d'entrée et celui du signal de sortie. Les droites de pente -1 en pointillés représentent les points de  $|\hat{h}(\alpha, \beta)|$  pouvant être non nuls, alors que les mêmes droites en traits pleins représentent les points réellement non nuls de cette fonction. Elle peut être lue de deux manières différentes:

- sens entrée  $\rightarrow$  sortie: la composante spectrale de l'entrée située en  $\beta = \beta_0$  traverse la réponse bifréquentielle horizontalement (lignes tirets). Elle peut influencer, suivant les valeurs de  $|\hat{h}(\alpha, \beta)|$ , le spectre de la sortie aux fréquences  $\alpha = \beta_0 + \frac{l}{P}$  avec  $l \in \{0, \dots, P-1\}$

- Sens sortie  $\rightarrow$  entrée: on remonté cette fois la réponse bi fréquentielle verticalement (lignes point-point-tiret). La composante spectrale de la sortie à la fréquence  $\alpha_0$  peut donc être influencée, suivent les valeurs de  $|\hat{h}(\alpha, \beta)|$ , par le spectre de l'entrée aux fréquences  $\beta = \alpha_0 - \frac{l}{P}$ , avec  $l \in \{0, \dots, P-1\}$ . C'est l'illustration directe de l'équation (3, 31):



**Fig. 3.8:** Exemple de relation entre les spectres d'entrée et de sortie pour un système LVPT P-périodique causal

Ce type de représentation illustre donc clairement à la fois le décalage fréquentiel, et les changements d'amplitude et de phase provoqués par le système LVPT sur les composantes fréquentielles de l'entrée. Elle a aussi l'avantage de séparer graphiquement les différents transferts LIT composant le système LVPT.

Finalement, on peut définir une valeur  $\Delta$  représentant la «quantité de variations» pour un système LVPT

$$\Delta = \frac{\sum_{l=0}^{P-1} \|\hat{g}_l(\alpha)\|^2 - \|\hat{g}_0(\alpha)\|^2}{\sum_{l=0}^{P-1} \|\hat{g}_l(\alpha)\|^2} \quad \text{avec:} \quad \|\hat{g}_l(\alpha)\|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{g}_l(\alpha)|^2 d\alpha \quad (3.34)$$

Si le système analysé est LIT, alors la somme  $\sum_{l=0}^{P-1} \|\hat{g}_l(\alpha)\|^2$  se réduit à  $\|\hat{g}_0(\alpha)\|^2$  Et  $\Delta$  prend la valeur 0. Au contraire, si le système ne comporte pas de partie invariante, alors  $\|\hat{g}_0(\alpha)\|^2$  devient nul et  $\Delta$  vaut 1.

Les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel confirment un résultat déjà énoncé à la section 3.2.3, où il avait été montré que les exponentielles complexes n'étaient pas les signaux propres des systèmes LVPT. En effet, une exponentielle complexe en entrée produira, suivant les valeurs de  $|\hat{h}(\alpha, \beta)|$ , non pas une, mais un ensemble d'exponentielles complexes en sortie. La notion de fonction de transfert est donc à revoir pour les systèmes LVPT, et la section suivante est dédiée à définir un opérateur du même type utilisable pour ce genre de systèmes.

### III.2.5 Etude des signaux propres, notion de gain complexe:

#### Recherche des signaux propres des systèmes LVPT

##### Systèmes LIT :

Il est bien connu que les exponentielles complexes sont les signaux propres des systèmes LIT. Cette propriété peut être démontrée à partir de leur relation d'entrée-sortie en temps, donnée par (3.23). Si le signal d'entrée  $x(k)$  est une exponentielle complexe d'amplitude unitaire, de phase nulle et de fréquence réduite  $\alpha$ , cette relation devient :

$$y(n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_0(n-k)e^{j2\pi\alpha k}$$

En effectuant le changement de variable  $u = n - k$ , on obtient:

$$y(n) = \left[ \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_0(u)e^{-j2\pi\alpha u} \right] e^{j2\pi\alpha n}$$

L'équation (1.2) permet d'identifier le terme entre crochets comme la valeur de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système LIT, à la fréquence  $\alpha$ . Cette équation peut donc s'écrire :

$$y(n) = \hat{g}_0(\alpha)e^{j2\pi\alpha n} \quad (3.35)$$

Finalement, on retrouve en sortie la même exponentielle complexe qu'en entrée pondérée par le nombre complexe  $\hat{g}_0(\alpha)$ , d'où le terme de «signaux propres». Ce nombre, dépendant de la fréquence, est appelé réponse fréquentielle ou gain complexe. Il résume, par son module et sa phase, l'effet de filtrage qu'à ce type de système sur son entrée. On comprend alors qu'il soit important de pouvoir décomposer un signal sur une base d'exponentielles complexes, ce qui est réalisé par la transformation de Fourier.

La définition des signaux propres des systèmes LIT nous a conduites à la notion de gain complexe, la même démarche va donc être adoptée pour les systèmes LVPT.

##### Systèmes LVPT:

Pour de tels systèmes, les signaux propres ne sont plus de simples exponentielles complexes. En effet, supposons que le signal d'entrée  $x(k)$  d'un système LVPT  $P$  périodique soit une exponentielle complexe d'amplitude unitaire, de phase nulle et de fréquence réduite  $a$ . La relation d'entrée-sortie temporelle, donnée par (3.17), devient alors:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_l(n-k) e^{j2\pi(\alpha + \frac{l}{P})k}$$

En effectuant le changement de variable  $u = n - k$ , on obtient:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \left( \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_l(u) e^{-j2\pi(\alpha + \frac{l}{P})u} \right) e^{j2\pi(\alpha + \frac{l}{P})n}$$

L'équation (1.2) permet d'écrire:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{l}{P} \right) e^{j2\pi(\alpha + \frac{l}{P})n}$$

Le double effet de filtrage et de décalage fréquentiel de ces systèmes, mis en évidence dans les sections précédentes, est confirmé par cette équation. En effet, on ne retrouve pas en sortie la seule exponentielle complexe d'entrée, mais la somme de  $P$  exponentielles complexes de fréquence  $\alpha + \frac{l}{P}$ , pondérées respectivement par  $\hat{g}_l(\alpha + \frac{l}{P})$  pour  $l=1, \dots, P$ .

Une exponentielle complexe en entrée engendre donc  $P$  exponentielles complexes en sortie, décalées d'un multiple de  $\frac{1}{P}$  en fréquence. La TFr étant une fonction 1-périodique, on peut espérer qu'un signal d'entrée constitué de  $P$  exponentielles régulièrement espacées de  $\frac{1}{P}$  en fréquence, redonne le même type de signal en sortie. Afin de vérifier cette proposition, prenons un signal d'entrée de la forme:

$$x(k) = \sum_{m=0}^{P-1} e^{j2\pi(\alpha + \frac{m}{P})k} \quad (3.36)$$

En appliquant le changement de variable  $u = n - k$  et en utilisant (1.2), la relation d'entrée sortie temporelle (3.17) devient :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{m=0}^{P-1} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{l+m}{P} \right) e^{j2\pi(\alpha + \frac{l+m}{P})n}$$

Un deuxième changement de variable  $q = l + m$  permet d'écrire:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \underbrace{\sum_{q=l}^{P-1+l} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) e^{j2\pi(\alpha + \frac{q}{P})n}}_{S_l} \quad (3.37)$$

$S_l$  peut être décomposé en une somme de deux termes:

$$S_l = \sum_{q=l}^{P-1} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) e^{j2\pi \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) n} + \sum_{q=P}^{P-1+l} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) e^{j2\pi \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) n}$$

Les fonctions  $\hat{g}_l \left( \alpha + \frac{q}{P} \right)$  et  $e^{j2\pi \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) n}$  n'étant 1-périodique suivant  $\alpha$ , l'indice  $q$  du deuxième terme de  $S_l$  peut être exprimé modulo  $P$ , ce qui conduit à:

$$\begin{aligned} S_l &= \sum_{q=0}^{P-1} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) e^{j2\pi \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) n} + \sum_{q=0}^{l-1} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) e^{j2\pi \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) n} \\ &= \sum_{q=0}^{P-1} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) e^{j2\pi \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) n} \end{aligned}$$

L'équation (3.37) devient alors:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{P-1} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) e^{j2\pi \left( \alpha + \frac{q}{P} \right) n}$$

En inversant l'ordre des sommations, et en changeant l'indice  $q$  en  $m$ , on obtient finalement:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{P-1} \left[ \sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l \left( \alpha + \frac{m}{P} \right) \right] e^{j2\pi \left( \alpha + \frac{m}{P} \right) n} \quad (3.38)$$

La réponse du système à une somme d'exponentielles complexes de la forme (3.36) est donc une somme pondérée des mêmes exponentielles complexes, aux mêmes fréquences. Ce résultat montre bien que ces signaux constituent les signaux propres des systèmes LVPT.

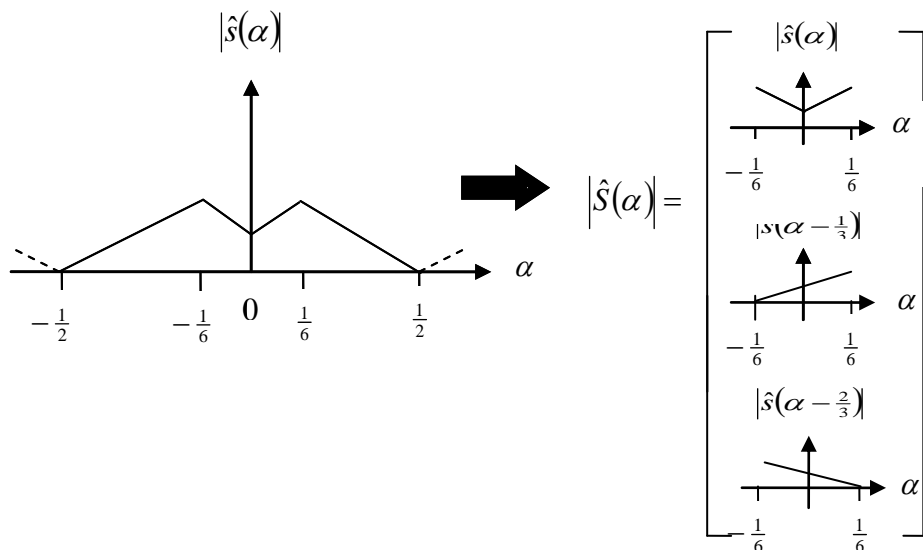
### **Décomposition des signaux**

On peut donc espérer trouver une relation d'entrée-sortie simple en décomposant les signaux sur une base de  $P$  exponentielles complexes, décalées en fréquence de  $P$ . Pour un signal  $s(n)$ , ceci revient à «éclater» sa transformée de Fourier  $\hat{s}(\alpha)$  en  $P$  intervalles fréquentiels différents de longueur  $\frac{1}{P}$ . On sélectionne alors, à un même instant, une composante, fréquentielle dans chaque intervalle. Rangées sous formes vectorielles, ces composantes forment le vecteur  $\hat{s}(\alpha)$  suivant:

$$\hat{S}(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{s}(\alpha) \\ \hat{s}(\alpha - \frac{1}{P}) \\ \vdots \\ \hat{s}(\alpha - \frac{P-1}{P}) \end{bmatrix} \quad \text{avec : } \alpha \in \left] -\frac{1}{2P}; \frac{1}{2P} \right] \quad (3.39)$$

Ceci constitue une description fréquentielle équivalente à la transformée de Fourier, mais en observant  $P$  composantes fréquentielles à la fois. Cette décomposition de la réponse fréquentielle est appelée «décomposition en composantes de recouvrement» dans [46], «réponse fréquentielle augmentée» dans [45], ou encore «décomposition à modulations» dans [47] où la même étude a été réalisée dans le domaine de la transformée en  $z$ .

Le domaine de définition adopté pour  $\alpha$  permet à  $\hat{S}(\alpha)$  de décrire sans redondance toute la transformée de Fourier du signal analysé. Un exemple graphique du lien entre la transformée de Fourier  $s(\alpha)$  et le vecteur  $\hat{S}(\alpha)$  est donné par la figure 3.9 pour  $P = 3$ . Enfin, on peut remarquer que si  $P = 1$ ,  $\hat{S}(\alpha)$  se réduit à  $\hat{s}(\alpha)$ .



**Fig. 3.9:** Représentation vectorielle de la transformée de Fourier d'un signal  $s(n)$  pour  $P = 3$



## Extension de la notion de gain complexe aux systèmes LVPT

Afin d'étendre la notion de gain complexe initialement définie pour les systèmes LIT aux systèmes LVPT  $P$ -périodiques, prenons un tel système, d'entrée  $x(k)$  réelle et de sortie  $y(k)$ . Le but étant de donner la relation liant les vecteurs  $\hat{x}(\alpha)$  et  $\hat{y}(\alpha)$ , une composante quelconque du vecteur de sortie  $\hat{y}(\alpha - \frac{m}{P})$  doit être exprimée en fonction de celles du vecteur d'entrée. La relation d'entrée-sortie fréquentielle (3.32) permet d'écrire:

$$\hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) = \sum_{l=0}^{P-1} g_l\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{l+m}{P}\right)$$

En effectuant le changement de variables  $q = l + m$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) &= \sum_{q=m}^{P-1+m} \hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right) \\ &= \sum_{q=m}^{P-1} \hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right) + \sum_{q=P}^{P-1+m} \hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right) \end{aligned}$$

La TFr étant 1-périodique, l'indice  $q$  présent dans la fonction  $\hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right)$  peut s'exprimer modulo  $P$ . Il en est de même pour la fonction  $\hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right)$  puisque l'équation (3.16) implique l'égalité des fonctions  $g_l(r)$  et  $g_{l+P}(r)$ . Le deuxième terme de cette expression peut donc être exprimé sous la forme d'une somme allant de 0 à  $m - 1$ , et la composante  $\hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right)$  devient finalement fonction de  $\hat{X}(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) &= \sum_{q=0}^{P-1} \hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right) \\ &= \left[ \hat{g}_{-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{g}_{1-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \dots \dots \hat{g}_{P-1-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \right] \cdot \hat{X}(\alpha) \end{aligned}$$

En utilisant cette dernière expression, et le fait que la fonction  $g_l(k)$  soit  $P$ -périodique suivant l'indice  $l$ , on peut lier les vecteurs  $\hat{X}(\alpha)$  et  $\hat{Y}(\alpha)$  par la relation matricielle suivante :

$$\hat{Y}(\alpha) = \hat{G}(\alpha) \cdot \hat{X}(\alpha) \quad \text{avec:} \quad \alpha \in \left] -\frac{1}{2P}; \frac{1}{2P} \right] \quad (3.40)$$

où  $\hat{G}(\alpha)$  est une matrice carrée de dimension  $P \times P$ , fonction de la fréquence et de la forme :

$$\hat{G}(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{g}_0(\alpha) & \hat{g}_1(\alpha) & \cdots & \hat{g}_{P-1}(\alpha) \\ \hat{g}_{P-1}(\alpha - \frac{1}{P}) & \hat{g}_0(\alpha - \frac{1}{P}) & \cdots & \hat{g}_{P-2}(\alpha - \frac{1}{P}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_1(\alpha - \frac{P-1}{P}) & \hat{g}_2(\alpha - \frac{P-1}{P}) & \cdots & \hat{g}_0(\alpha - \frac{P-1}{P}) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Les équations (3.40) et (3.41) fournissent donc une relation simple entre les vecteurs  $\hat{x}(\alpha)$  et  $\hat{y}(\alpha)$ , décrivant dans le domaine fréquentiel les signaux d'entrée et de sortie du système. La matrice  $\hat{G}(\alpha)$  sera appelée «gain complexe matriciel» ou «réponse fréquentielle matricielle» dans la suite de ce document. La section suivante est dédiée à son interprétation, et à l'étude de quelques unes de ses propriétés.

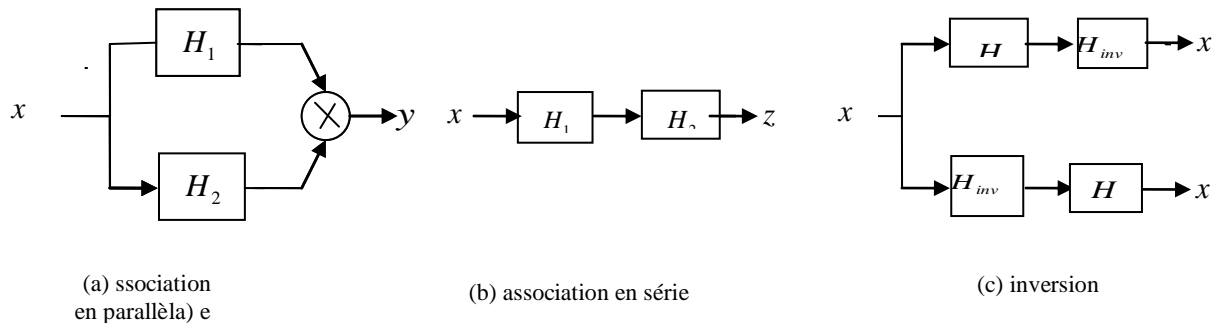
### III.2.6 *Interprétation du gain complexe matriciel*

D'après les équations (3.39), (3.40) et (3.41), l'élément situé sur la ligne  $m$  et la colonne  $n$  de la matrice  $\hat{G}(\alpha)$  représente le gain complexe existant entre la composante fréquentielle de fréquence  $\alpha - \frac{n}{P}$  du signal d'entrée, et celle de fréquence  $\alpha - \frac{m}{P}$  du signal de sortie. Le gain complexe matriciel peut donc prendre en compte les relations éventuelles existant entre les signaux d'entrée et de sortie à des fréquences différentes. De telles relations n'existant pas pour un système LIT, son gain complexe matriciel est diagonal, et seul  $\hat{g}_0(\alpha)$  peut être non nul.

De plus, un lien peut être établi entre la réponse bifréquentielle d'un système LVPT et son gain complexe matriciel.  $h(\alpha, \beta)$  Définie à la section 3.2.4, représente le lien entre la transformée de Fourier du signal d'entrée et celle du signal de sortie du système. Le gain complexe matriciel joue le même rôle entre les réponses fréquentielles augmentées de ces deux signaux. Or ce type de représentation; définie par (3.39), peut être vue comme une version échantillonnée de la transformée de Fourier du signal. La matrice  $\hat{G}(\alpha)$  n'est donc rien d'autre qu'une version échantillonnée de la réponse bifréquentielle, l'emplacement des échantillons variant avec la fréquence  $\alpha$ .

Enfin, on peut montrer que le gain complexe matriciel vérifie les mêmes propriétés de base que le gain complexe classique. Pour cela, supposons deux systèmes LVPT  $H_1$  et  $H_2$  de même fréquence. Leur association en parallèle est représentée à la figure 3.10 (a). Le signal de sortie global  $y$  est dans ce cas:

$$y = y_1 + y_2 = H_1 ox + H_0 x$$



**Fig. 3.10:** Propriétés de base du gain complexe matriciel

En représentant les signaux par leur réponse fréquentielle augmentée, et les systèmes par leur gain complexe matriciel, on obtient:

$$\hat{Y}(\alpha) = \hat{G}_1(\alpha) \cdot \hat{x}(\alpha) + \hat{G}_2(\alpha) \cdot \hat{X}(\alpha) = (\hat{G}_1(\alpha) + \hat{G}_2(\alpha)) \cdot \hat{X}(\alpha)$$

Le gain complexe matriciel global de plusieurs systèmes LVPT de même fréquence en parallèle est donc la somme des gains complexes matriciels de chaque système.

La figure 3.10 (b) représente l'association en série des deux systèmes précédents. Le signal de sortie global est cette fois donné par:

$$z = H_2 \circ H_1 \circ x$$

Dans le domaine fréquentiel, on obtient donc:

$$\hat{z}(\alpha) = \hat{G}_2(\alpha) \cdot \hat{Y}(\alpha) = \hat{G}_2(\alpha) \cdot \hat{G}_1(\alpha) \cdot \hat{X}(\alpha)$$

Le gain complexe matriciel global de plusieurs systèmes LVPT de même fréquence mis en série est donc le produit des gains complexes matriciels de chaque système. Toutefois, contrairement aux systèmes LIT, l'ordre des gains complexes matriciels ne peut être changé puisque le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet, dans le cas général, les systèmes LVT, et donc les systèmes LVPT, ne peuvent être intervertis sans changer la forme de leurs signaux de sortie. Le système inverse d'un système LVPT  $H$ , noté  $H_{inv}$ , est défini par la figure 3.10(c). Il vérifie donc les équations:

$$H \circ H_{inv} \circ x = H_{inv} \circ H \circ x = x$$

Cette équation, traduite dans le domaine fréquentiel à l'aide des outils précédemment définis, devient:

$$\hat{G}(\alpha) \cdot \hat{G}_{inv}(\alpha) \cdot \hat{X}(\alpha) = \hat{G}_{inv}(\alpha) \cdot \hat{G}(\alpha) \cdot \hat{X}(\alpha) = I_P \cdot \hat{X}(\alpha)$$

où  $I_P$  est la matrice identité de dimension  $P \times P$ . Alors, si le vecteur  $\hat{X}(\alpha)$  est différent du vecteur nul,  $\hat{G}_{inv}(\alpha)$  vérifie les équations suivantes:

$$\hat{G}(\alpha) \cdot \hat{G}_{inv}(\alpha) = \hat{G}_{inv}(\alpha) \cdot \hat{G}(\alpha) = I_P \quad (3.42)$$

Si la matrice  $\hat{G}(\alpha)$  est régulière quelle que soit la fréquence  $\alpha$  comprise entre  $-\frac{1}{2P}$  et  $\frac{1}{2P}$ , ces équations sont résolues par:

$$\hat{G}_{inv}(\alpha) = \hat{G}(\alpha)^{-1} \quad \text{avec : } \alpha \in \left] -\frac{1}{2P}; \frac{1}{2P} \right] \quad (3.43)$$

Où  $\hat{G}(\alpha)^{-1}$  est la matrice inverse de  $\hat{G}(\alpha)$ . Le gain complexe matriciel de l'inverse d'un système est donc la matrice inverse du gain complexe matriciel de ce système.

Le gain complexé matriciel associé aux systèmes LVPT vérifie donc, comme le gain complexe classique, les propriétés énoncées ci-dessus. De plus, il prend en compte d'éventuels liens entre des fréquences de valeurs différentes des signaux d'entrée et de sortie. Il peut donc être interprété comme une extension de la notion de gain complexe, appliquée aux systèmes LVPT. Des exemples de gain complexe matriciel de systèmes simple sont donnés dans la suite.

### **Système LIT**

Si nous sommes en présence d'un système LIT ( $P = 1$ ), les vecteurs et les matrices définis précédemment redeviennent tous des scalaires.  $\hat{X}(\alpha)$  et  $\hat{Y}(\alpha)$  se réduisent en  $\hat{x}(\alpha)$  et  $\hat{y}(\alpha)$  et  $\hat{G}(\alpha)$  en  $\hat{g}_0(\alpha)$ . L'équation matricielle (3.40) redevient le simple produit de fonctions (3.33), l'intervalle de définition de  $\alpha$  étant alors donné par (1.4). Malgré tout, il peut être utile de calculer le gain complexe matriciel de ce système avec une dimension supérieure à 1. En effet, cette matrice sera nécessaire s'il est associé à des systèmes LVPT de période  $P > 1$ . Comme il a été vu précédemment, les gains complexes  $\hat{g}_i(\alpha)$  d'un système LIT ne sont nuls si  $i \neq 0$ . On obtient donc, un gain complexe matriciel diagonal de la forme:

$$\hat{G}_{LIT}(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{g}_0(\alpha) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{g}_0\left(\alpha - \frac{P-1}{P}\right) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

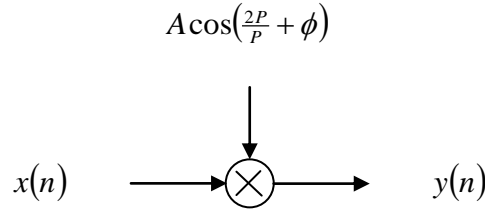
Ce résultat confirme le fait que le gain complexe matriciel est une version échantillonnée de la réponse bi fréquentielle. En effet, dans le cas d'un système LIT, les seuls points de  $h(\alpha, \beta)$  non nuls sont ceux de sa diagonale principale.

### **Modulation d'amplitude sinusoïdale**

Le deuxième exemple est une modulation d'amplitude sinusoïdale. Le système, formé d'un simple multiplieur, est donné par la figure suivante:

Le signal modulateur est un cosinus d'amplitude  $A$ , de phase  $0$  et de fréquence réduite  $1/P$ . Ce système est donc LVPT  $P$ -périodique, et son signal de sortie est donné par:

$$y(n) = A \cos\left(\frac{2\pi}{P}n + \phi\right)x(n)$$



**Fig. 3.11:** Modulation d'amplitude sinusoidale

Sa réponse impulsionnelle  $h_{\text{mod}}(n, k)$  est obtenue en réponse au signal d'entrée :

$$x(n) = \delta_{n-k}$$

Où  $\delta_n$  est la fonction de Dirac discrète vérifiant:

$$\begin{cases} \delta_0 = 1 \\ \delta_n = 0 \end{cases} \quad \text{Si } n \neq 0$$

Ce système a donc une réponse impulsionnelle de la forme:

$$h_{\text{mod}}(n, k) = A \cos\left(\frac{2\pi}{P} n + \phi\right) \delta_{n-k} = A \cos\left(\frac{2\pi}{P} k + \phi\right) \delta_{n-k} \quad (3.45)$$

La transformée de Fourier bidimensionnelle de cette fonction est, par définition, la réponse bifréquentielle du système. D'après les propriétés de la fonction de Dirac discrète, on obtient:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\text{mod}}(\alpha, \beta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \cos\left(\frac{2\pi}{P} k + \phi\right) \delta_{n-k} e^{j2\pi(\alpha n + \beta k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \cos\left(\frac{2\pi}{P} k + \phi\right) e^{-j2\pi(\alpha + \beta)k} \end{aligned}$$

La transformée de Fourier en fréquence réduite du cosinus permet finalement d'écrire:

$$\hat{h}_{\text{mod}}(\alpha, \beta) = \frac{Ae^{j\phi}}{2} \delta\left(\alpha + \beta - \frac{1}{P}\right) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2} \delta\left(\alpha + \beta + \frac{1}{P}\right)$$

Cette fonction étant 1-périodique en ce et, Q, le deuxième terme peut s'écrire

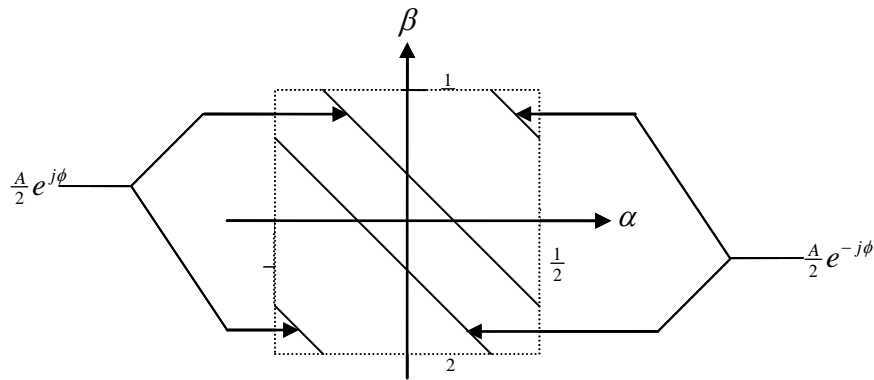
$$\hat{h}_{\text{mod}}(\alpha, \beta) = \frac{Ae^{j\phi}}{2} \delta\left(\alpha + \beta - \frac{1}{P}\right) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2} \delta\left(\alpha + \beta + \frac{P-1}{P}\right)$$

Par identification avec (3.28), on peut voir que ce système LVPT est composé de deux systèmes LIT de transformées de Fourier constantes:

$$\hat{g}_1(\alpha) = \frac{A}{2} e^{j\phi}$$

$$\hat{g}_{P-1}(\alpha) = \frac{A}{2} e^{-j\phi}$$

Cette réponse bifréquentielle est donc confinée sur deux droites différentes d'ordonnées à l'origine  $\pm \frac{1}{p}$  et de pente -1. Les deux morceaux de droite supplémentaires apparaissant dans les coins hauts droits et bas gauche de la figure 3.12



**Fig.3.12:**  $\hat{h}_{\text{mod}}(\alpha, \beta)$  correspondant au système de la figure 3.11

$$\hat{G}_{\text{mod}}(\alpha) = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{j\phi} & 0 & \dots & 0 & e^{-j\phi} \\ e^{-j\phi} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & e^{j\phi} \\ e^{j\phi} & 0 & \dots & 0 & e^{-j\phi} & 0 \end{bmatrix}$$

Appartiennent aux droites d'équation  $\alpha + \beta \pm \frac{P-1}{P}$ . Leur présence est due à la périodicité de  $\hat{h}_{\text{mod}}(\alpha, \beta)$ .

Finalement, la définition du gain complexe donnée en (3.41) montre que pour ce système, on obtient une matrice  $P \times P$  de la forme:

Sa structure est bien identique à celle de la réponse bifréquentielle de la figure 3.12.

Après avoir interprété le gain complexe matriciel comme une extension du gain complexe classique, la prochaine section est dédiée à l'emploi de techniques d'algèbre matriciel afin d'extraire des informations supplémentaires sur le système

### III.2.7 Analyse du gain complexe matriciel:

L'intérêt d'obtenir un gain complexe sous une forme matricielle est de pouvoir lui appliquer des techniques d'algèbre linéaire, susceptibles d'apporter des informations supplémentaires sur le système correspondant. Dans cette section, la décomposition en valeurs singulières, ainsi que le calcul de normes matricielles ont été employés dans ce but. Dans la suite, l'opérateur  $(.)^H$  représente le transposé complexe conjugué d'un vecteur ou d'une matrice.

#### Décomposition en valeurs singulières:

##### Définition:

La décomposition en valeur. Singulières [48] permet de décomposer une matrice sous une forme canonique. Dans le cas d'un gain complexe matriciel  $\hat{G}(\alpha)$  de dimension  $P \times P$ , on a:

$$\hat{G}(\alpha) = \hat{U}(\alpha) \cdot \hat{\Sigma}(\alpha) \cdot \hat{V}(\alpha)^H \quad (3.46)$$

Où :

-  $\hat{U}(\alpha)$  est la matrice  $P \times P$  unitaire formée des vecteurs propres de  $\hat{G}(\alpha) \cdot \hat{G}(\alpha)^H$

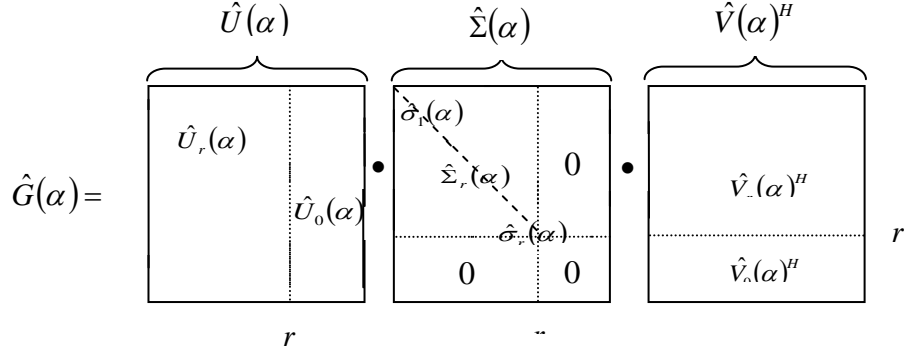
-  $\hat{V}(\alpha)$  est la matrice  $P \times P$  unitaire formée des vecteurs propres de  $\hat{G}(\alpha)^H \cdot \hat{G}(\alpha)$

-  $\hat{\Sigma}(\alpha)$  est la matrice  $P \times P$  diagonale dont la diagonale principale est formée de la racine carrée des valeurs propres  $\hat{G}(\alpha) \cdot \hat{G}(\alpha)^H$ , appelées «valeurs singulières». Elles sont notées  $\hat{\sigma}_i(\alpha)$  et rangées par ordre décroissant :

$$\hat{\sigma}_1(\alpha) \geq \hat{\sigma}_2(\alpha) \geq \dots \hat{\sigma}_r(\alpha) > \hat{\sigma}_{r+1}(\alpha) = \dots \sigma_p(\alpha) = 0$$

Seules les  $r$  premières valeurs singulières sont donc supposées non nulles,  $r$  pouvant aller de 1 à  $P$ .

La figure 3.13 représente l'équation (3.46) sous une forme graphique. De plus, elle montre



**Fig. 3.13:** Représentation graphique de la décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel  $\hat{G}(\alpha)$

Que l'on peut obtenir une expression réduite de l'équation (3.46), en négligeant les matrices  $\hat{U}_0(\alpha)$  et  $\hat{V}_0(\alpha)$ :

$$\hat{G}(\alpha) = \hat{U}_r(\alpha) \cdot \hat{\Sigma}_r(\alpha) \cdot \hat{V}_r(\alpha)^H \quad (3.47)$$

La matrice  $\hat{\Sigma}_r(\alpha)$  est alors une matrice diagonale de dimension  $r \times r$ , ne comportant aucune valeur singulière nulle sur sa diagonale principale. Les matrices  $\hat{U}_r(\alpha)$  et  $\hat{V}_r(\alpha)$  sont, quant à elles, de dimension  $P \times r$ .

**Interprétation:**

Pour un système LVPT P-périodique  $H$  ( $P$  est ici supposé supérieur à 1), d'entrée  $x$  et de sortie  $y$ , une relation d'entrée-sortie simple est donnée par l'équation (3.40). Elle relie la représentation fréquentielle augmentée  $\hat{X}(\alpha)$  de l'entrée à celle  $\hat{Y}(\alpha)$  de la sortie, grâce au gain complexe matriciel  $\hat{G}(\alpha)$ . Cette matrice n'étant pas diagonale, une composante du vecteur de l'entrée peut influencer plusieurs composantes du vecteur de sortie. Les composantes de ces vecteurs ne sont donc pas découplées. La transformation permettant d'accéder à des composantes fréquentielles découplées est la décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel. En effet, en utilisant (3.47) dans (3.40), on obtient:

$$\hat{Y}(\alpha) = \hat{U}(\alpha) \cdot \hat{\Sigma}(\alpha) \cdot \hat{V}(\alpha)^H \cdot \hat{X}(\alpha) \quad (3.48)$$

En multipliant cette expression par la matrice unitaire  $\hat{U}(\alpha)^H$ , cette relation devient:

$$\hat{U}(\alpha)^H \cdot \hat{Y}(\alpha) = \hat{\Sigma}(\alpha) \cdot \hat{V}(\alpha)^H \cdot \hat{X}(\alpha) \quad (3.49)$$

On peut alors définir les <<composantes fréquentielles principales >> de l'entrée et de sortie par:

$$\hat{X}_p(\alpha) = \hat{V}(\alpha)^H \cdot \hat{X}(\alpha) \quad (3.50)$$

$$\hat{Y}_p(\alpha) = \hat{U}(\alpha)^H \cdot \hat{Y}(\alpha) \quad (3.51)$$



ces des vecteurs peuvent être considérés comme les représentations fréquentielles augmentées des signaux temporels  $x_p(n)$  et  $y_p(n)$ . L'équation (3.49) montre que ces nouvelles coordonnées vérifient la relation:

$$\hat{Y}_p(\alpha) = \hat{\Sigma}(\alpha) \cdot \hat{X}_p(\alpha) \quad (3.52)$$

La différence entre les relations (3.40) et (3.52) vient du fait que la matrice  $\hat{\Sigma}(\alpha)$  est toujours diagonale. Une composante de  $\hat{X}_p(\alpha)$  n'agit alors plus que sur une seule composante de  $\hat{Y}_p(\alpha)$  par l'intermédiaire de la valeur singulière correspondante. Toutes les composantes de ces vecteurs sont donc bien découplées. Le même type de démarche a été effectuée dans [49] en appliquant la décomposition en valeurs singulières sur la matrice de gains complexes d'un système LIT multi-sorties, pour une fréquence fixe.

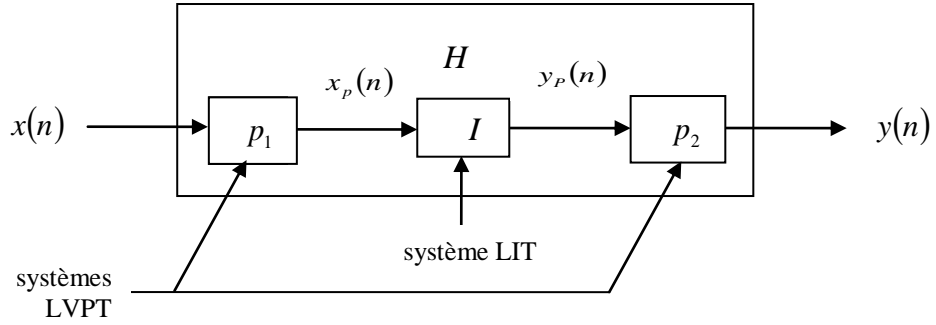
Les matrices  $\hat{U}(\alpha)$  et  $\hat{V}(\alpha)$  peuvent être vues comme des matrices de changement de base, il en est donc de même pour leur inverses  $\hat{U}(\alpha)^H$  et  $\hat{V}(\alpha)^H$ . Les transformations décrites par les équations (3.51) et (3.50) peuvent donc être vues comme deux changements de base, différents permettant de passer des composantes de départ  $\hat{X}(\alpha)$  et  $\hat{Y}(\alpha)$  aux composantes principales  $\hat{X}_p(\alpha)$  et  $\hat{Y}_p(\alpha)$ . Dans le cas présent, ces matrices peuvent aussi être vues comme les gains complexes matriciels correspondant à différents systèmes:

- le gain complexe matriciel  $\hat{V}(\alpha)^H$  correspond à un système LVPT noté  $p_1$
- le gain complexe matriciel  $\hat{U}(\alpha)$  correspond à un système LVPT noté  $p_2$
- le gain complexe matriciel  $\hat{\Sigma}(\alpha)$  étant diagonal, il correspond à un système LIT noté  $I$

l'équation (3.48) permet alors de décomposer le système LVPT d'origine  $H$  en trois systèmes associés en série, dont la sortie est reliée à l'entrée par la relation :

$$y = H \circ x = p_2 \circ I \circ p_1 \circ x$$

Comme le montre la figure 3.14,  $H$  peut donc être vu comme deux systèmes LVPT différents entourant un système LIT. Le premier système LVPT  $P_1$  permet de passer de l'entrée  $x(n)$



**Fig 3.14:** Structure interne d'un système LVPT  $H$

Au signal  $x_p(n)$ . Ce signal passe ensuite par un système LIT  $I$  qui applique, à chaque composante fréquentielle principale, un gain égal à la valeur singulière correspondante. Le deuxième système LVPT  $p_2$  permet alors de repasser de  $y_p(n)$  au signal de sortie  $y(n)$  du système global.

Ce modèle, mis à jour grâce à la décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel, permet donc de mieux comprendre la structure interne des systèmes LVPT. Nous allons voir qu'il permet aussi de donner leurs conditions d'inversion.

#### ***Inversion d'un système LVPT:***

Les équations (3.43) et (3.46) montrent que le gain complexe du système inverse de  $H$  peut s'exprimer par:

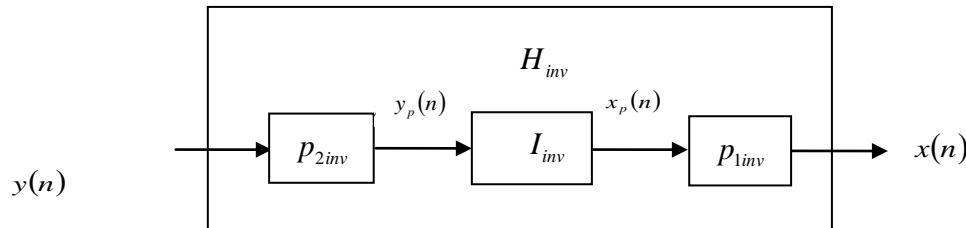
$$\hat{G}_{inv}(\alpha) = \hat{G}(\alpha)^{-1} = \hat{V}(\alpha) \cdot \hat{\Sigma}(\alpha)^{-1} \cdot \hat{U}(\alpha)^H \quad \text{Avec: } \alpha \in \left] -\frac{1}{2P}; \frac{1}{2P} \right]$$

Ce système peut donc être vu comme la mise en série des trois systèmes suivants:

- le système de gain complexe matriciel  $\hat{U}(\alpha)^H$ , inverse de  $\hat{U}(\alpha)$ , et donc noté  $P_{2inv}$ .
- le système LIT de gain complexe matriciel diagonal  $\hat{\Sigma}(\alpha)^{-1}$  inverse de  $\hat{\Sigma}(\alpha)$ , et noté  $I_{inv}$
- le système de gain complexe matriciel  $\hat{V}(\alpha)$ , inverse  $\hat{V}(\alpha)^H$  de , et noté  $P_{1inv}$ .

La figure 3.15 montre la structure interne de ce système. On peut noter qu'il est constitué de deux systèmes LVPT et d'un système LIT, qui sont les inverses de ceux décrits par la figure 3.14. L'existence des gains complexes matriciels de  $P_{1inv}$  et  $P_{2inv}$  est toujours assurée puisque ce sont les transposés hermitiens de ceux de  $P_1$  et  $P_2$ . La matrice  $\hat{\Sigma}(\alpha)^{-1}$  (a)-1, quant à elle, n'existe pas forcément. En effet, sa diagonale principale est constituée des éléments inverses de celle de  $\hat{\Sigma}(\alpha)$ , et elle ne peut être calculée si l'un d'eux est nul. Un système sera donc *non-inversible* en  $\alpha$  si une ou plusieurs des valeurs singulières de son gain complexe matriciel s'annulent pour cette fréquence.

Pour palier à ce problème et essayer d'inverser «au mieux» un système non-inversible, on peut utiliser la notion de matrice inverse généralisée [50]. Pour le gain complexe.



**Fig. 3.15:** Structure interne du système inverse  $H_{inv}$

Matriciel  $\hat{G}(\alpha)$  elle est notée  $\hat{G}(\alpha)^{-g}$  et vérifie les propriétés suivantes:

$$\hat{G}(\alpha) \cdot \hat{G}(\alpha)^{-g} \cdot \hat{G}(\alpha) = \hat{G}(\alpha) \quad (3.53)$$

$$\hat{G}(\alpha)^{-g} \cdot \hat{G}(\alpha) \cdot \hat{G}(\alpha)^{-g} = \hat{G}(\alpha)^{-g} \quad (3.54)$$

$$\hat{G}(\alpha)^{-g} \cdot \hat{G}(\alpha) \quad \text{et} \quad \hat{G}(\alpha) \cdot \hat{G}(\alpha)^{-g} \quad \text{sont hermitiennes} \quad (3.55)$$

Cette matrice est alors unique et donnée par:

$$G(\alpha)^{-g} = \hat{V}_r(\alpha) \cdot \hat{\Sigma}_r(\alpha)^{-1} \cdot \hat{U}_r(\alpha)^H \quad (3.56)$$

Où  $\hat{V}_r(\alpha)$ ,  $\hat{\Sigma}_r(\alpha)$  et  $\hat{U}_r(\alpha)$  sont définies par l'équation (3.47) et la figure 3.13. L'avantage d'utiliser l'inverse généralisée par rapport à l'inverse exacte réside dans le fait qu'elle existe toujours, même si  $\hat{G}(\alpha)$  n'est pas inversible. En effet; la matrice diagonale  $\hat{\Sigma}_r(\alpha)$  ne comporte aucun élément nul sur sa diagonale principale, de telle sorte que  $\hat{\Sigma}_r(\alpha)^{-1}$  est toujours définie. De plus, on peut remarquer que si  $\hat{G}(\alpha)$  est inversible, alors  $\hat{G}(\alpha)^{-g}$  est égale à  $\hat{G}(\alpha)^{-1}$ . Si, par contre,  $\hat{G}(\alpha)$  est singulière, alors son inverse généralisé tend à avoir le même comportement que l'inverse exact (relations (3.53), (3.54), et (3.55), sans pour autant vérifier la relation stricte (3.42). En fait; l'équation (3.56) indique que si  $\hat{G}(\alpha)$  a une valeur singulière nulle, la valeur singulière correspondante de son inverse généralisée restera nulle, alors qu'elle devrait prendre une valeur infinie pour l'inverse exact. Cette remarque peut être illustrée grâce à un exemple simple. Soit la matrice  $G$  complexe:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est singulière, et ne comporte pas d'inverse exact. Le calcul de son inverse généralisé nécessite sa décomposition en valeurs singulières:

$$\begin{aligned}
 G &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{V^H} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U_r} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Sigma_r} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V_r^H}
 \end{aligned}$$

Cette décomposition, ainsi que l'équation (3.56) donnent l'inverse généralisé recherché:

$$G^{-g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -j\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices  $G^{-g}$  et  $G^{-g}$  vérifient bien les relations (3.53), (3.54) et (3.55), et on a de plus les deux relations:

$$\begin{aligned}
 G^{-g} \cdot G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 G \cdot G^{-g} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} & 0 & 0 \\ \frac{j}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ces produits donnent donc «presque» la matrice identité, mais l'inverse généralisé ne fait qu'approcher le comportement de l'inverse exact vérifiant (3.42).

Cette méthode d'inversion, appliquée à un système LVPT  $H$  de gain complexe  $\hat{G}(\alpha)$ , donne les résultats suivants

- Si on se trouve à une fréquence  $\alpha$  pour laquelle  $\hat{G}(\alpha)$  n'a aucune valeur singulière nulle, elle est alors inversible. Le gain complexe matriciel du système inversé  $H_{inv}$  est donc, pour cette fréquence; la matrice inverse exacte de  $\hat{G}(\alpha)$ . Le gain complexe matriciel du. Système constitué par la mise en série de  $H$  et  $H_{inv}$  est alors la matrice identité.

- Si on se trouve à une fréquence  $\alpha$  pour laquelle  $\hat{G}(\alpha)$  a une ou plusieurs de ses valeurs singulières qui s'annulent, elles seront conservées dans le gain complexe matriciel du système inverse. L'association en série des deux systèmes aura alors un gain complexe matriciel global approchant «au mieux» la matrice identité. On peut montrer [50] que le critère permettant de dire que cette matrice est approchée «au mieux» est quadratique. En effet; l'inverse généralisé minimise la norme quadratique de la différence entre la matrice identité  $I_p$  et le produit  $\hat{G}(\alpha) \cdot \hat{G}(\alpha)^{-g}$ .

Ce résultat est très facilement interprétable pour un système LIT  $H_{LIT}$ . Pour les fréquences où son gain complexe  $\hat{g}_0(\alpha)$  est différent de 0, le système inverse  $H_{LITinv}$  alors comme gain complexe  $\frac{1}{\hat{g}_0(\alpha)}$ . Par contre, pour les fréquences où  $\hat{g}_0(\alpha)$  est nul, le gain complexe de  $H_{LITinv}$  l'est aussi, L'association en série de ces deux systèmes donne donc un gain complexe global égal à 1, sauf pour les zéros de  $\hat{g}_0(\alpha)$  où il est également nul.

La décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel a donc permis de préciser la structure interne générale d'un système LVPT, et d'établir-ses conditions d'inversibilité en fonction de ses valeurs singulières. Nous allons maintenant explorer quelles informations supplémentaires peut fournir le calcul de la norme de son gain complexe matriciel.

### Calcul de normes:

Afin d'introduire correctement le concept de norme, il est nécessaire de mieux définir les objets sur lesquels vont porter les calculs, c'est à dire les systèmes linéaires discrets, et les signaux présents en entrée et en sortie de ces systèmes. Afin de vérifier la condition d'existence de la transformée de Fourier (1.2) donnée au paragraphe 1.3.3, les signaux numériques qui suivent sont supposés de module sommable. Pour un tel signal  $s$ , on peut montrer que l'on a également:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2 < \infty$$

On parle alors de signal à «énergie finie», puisque la quantité  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2$  est homogène à l'énergie contenue dans  $s$ . Si, de plus, on suppose que ces signaux sont à valeurs complexes, alors ils peuvent être considérés comme les éléments d'un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$  des complexes. En ajoutant à cet ensemble la notion de distance entre deux de ses éléments, on obtient un espace vectoriel normé; que l'on peut montrer complet (il est alors appelé «espace de Banach»). Enfin, en définissant le produit scalaire entre  $s_1$  et  $s_2$  par:

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(n)^* s_2(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{s}_1(\alpha)^* \hat{s}_2(\alpha) d\alpha \quad (3.57)$$

on obtient un ensemble dénommé espace de *Hilbert* des signaux à module sommable, noté  $\mathfrak{S}_1$ . Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que tous les signaux rencontrés sont des éléments de  $\mathfrak{S}_1$ . Ils peuvent donc être vus comme des vecteurs, et représentés sous différentes formes:

- la forme temporelle, constituée de l'ensemble de leurs échantillons.
- la forme fréquentielle classique. C'est à dire leur transformée de Fourier en fréquence réduite,
- la forme fréquentielle augmentée, définie, pour le signal  $s$ , par (3.39).

Un système LVPT peut alors être vu comme un opérateur linéaire, faisant correspondre le sous-espace de hilbert des signaux d'entrée à celui des signaux de sortie. Une forme pratique pour le représenter est la forme matricielle donnée par (3.41), qui relie les représentations fréquentielles augmentées des signaux d'entrée et de sortie.

### ***Norme des signaux:***

Les signaux étant équivalents à des vecteurs, leur «mesure» va pouvoir être quantifiée grâce à une norme. Il existe une multitude de normes- vectorielles, mais la plus utilisée en traitement du signal reste la norme introduite par le produit scalaire (3.57). La norme au carré d'un élément  $s$  de  $\mathfrak{S}_1$  est alors définie par:

$$\|s\|_2^2 = \langle s, s \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{s}(\alpha)|^2 d\alpha \quad (3.58)$$

Cette valeur a une signification physique importante puisqu'elle représente l'énergie  $E_s$  contenue dans le signal. Elle peut encore s'exprimer en fonction de la représentation fréquentielle augmentée de  $s$  par:

$$\|s\|_2^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{S}(\alpha)^H \cdot \hat{S}(\alpha) d\alpha = \|\hat{S}(\alpha)\|_2^2$$

### ***Norme des systèmes:***

La norme de l'opérateur linéaire qu'est un système LVPT  $H$  est donnée par celle de son gain complexe matriciel  $\hat{G}(\alpha)$ . Une fois de plus, il existe une multitude de normes matricielles, mais les normes d'opérateurs sont le plus souvent induites par des normes vectorielles. La norme quadratique d'un système LVPT d'entrée  $x$  et de sortie  $y$ , induite par la norme vectorielle (3.58), est définie par [48]

$$\|H\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \|\hat{G}(\alpha)\|_2 = \sup_{\hat{X}(\alpha) \neq 0} \frac{\|\hat{Y}(\alpha)\|_2}{\|\hat{X}(\alpha)\|_2} = \sup_{\hat{X}(\alpha) \neq 0} \frac{\|\hat{G}(\alpha) \cdot \hat{X}(\alpha)\|_2}{\|\hat{X}(\alpha)\|_2}$$

Pour calculer cette norme; il faut donc chercher le signal d'entrée non nul, qui engendre le «gain en norme» maximal entre l'entrée et la sortie du système. La valeur de cette norme élevée au carré est équivalente au «gain en énergie» maximal que peut présenter le système. En effet, il a été vu que la norme au carré d'un signal représente l'énergie qu'il contient. Il est montré, dans [51], que cette norme matricielle est donnée par:

$$\|H\|_2 = \|\hat{G}(\alpha)\|_2 = \sup_{-\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}} \sigma_{\max}[\hat{G}(\alpha)]$$

Où  $\sigma_{\max}[\hat{G}(\alpha)]$  représente la plus grande valeur singulière de la matrice  $\hat{G}(\alpha)$ .

La norme d'un système LVPT est donc la plus grande valeur singulière que puisse avoir le gain complexe matriciel, sur l'ensemble de définition de  $a$ . Cette valeur représente l'amplification maximum que peut provoquer le système de son entrée vers sa sortie. Par exemple, pour un système LIT, cette norme est égale au maximum du module de son gain complexe  $|\hat{g}_0(\alpha)|$ .

Ce résultat permet donc de définir un gain d'entrée-sortie pour les systèmes LVPT, mais il permet aussi de donner un sens plus physique aux valeurs singulières.- En effet, leurs valeurs, élevées au carré, peuvent être vues comme de véritables gains d'entrée-sortie en énergie, appliqués sur les composantes fréquentielles principales définies au paragraphe précédent.

Les outils théoriques introduits dans cette section vont pouvoir être utilisés afin d'étudier les caractéristiques du système LVPT présent dans le transfert décrit à la fin du chapitre 1.

# *Chapitre IV*



## Résultats et Discussion

### IV Application:

Cette-section est consacrée à l'utilisation des outils théoriques précédemment définis, dans le but d'étudier un système LVPT de même structure que celui décrit au chapitre 1, situé entre les courants de commande et les vibrations qu'ils engendrent.

Tout d'abord, le paragraphe 3.3.1 rappelle la structure de ce système qui est à temps continu. Sa réponse impulsionnelle ainsi que sa réponse bifréquentielle y sont aussi étudiées. Ensuite, les contraintes que doit vérifier la fréquence d'échantillonnage, pour que l'échantillonnage de ce système permette d'obtenir un système LVPT discret sont données au paragraphe 3.3.2.

Enfin, les trois derniers paragraphes (3.3.3 à 3.3.5) sont consacrés à l'étude des caractéristiques de ce système discret, en reprenant le plan utilisé dans la section précédente: domaine temporel, domaine fréquentiel, puis détermination et analyse du gain complexe matriciel.

#### IV.1 Description du système à analyser:

Le modèle décrit à la section 1.4.5 est un système LVPT multi-entrées mono-sortie. Or, les outils développés à la section précédente permettent d'analyser un système à une entrée et une sortie. Nous allons donc nous intéresser à une seule «branche» du système global, c'est à dire au transfert entre le courant envoyé dans une des bobines statoriques de la machine; et les vibrations qu'il engendre en un seul endroit de la carcasse statorique. Les résultats obtenus au chapitre 1 permettent de donner la structure générale de ce système à temps continu, rappelée sur la figure 4.1. On rappelle que l'entrée  $i_c(t)$  du système global, équivalente au :

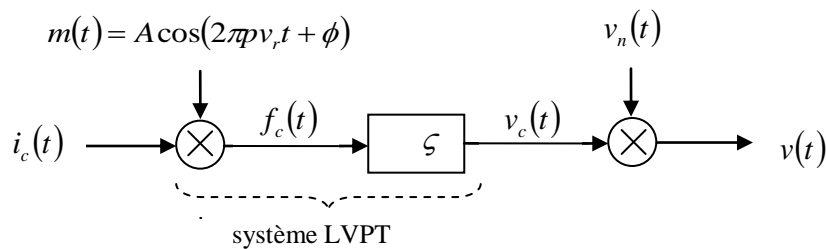


Fig. 4.1: Modèle du système LVPT à temps continu à analyser

Courant de commande. Est modulée par un signal sinusoïdal:  $m(t) = A \cos(2\pi \nu_0 t + \phi)$  de fréquence  $\nu_0 = p \nu_r$  où  $\nu_r$  est la fréquence de rotation de la machine et  $p$  son nombre de paires de pôles magnétiques. L'amplitude et la phase de  $m(t)$  dépendent de la machine et de la position angulaire spécifiant le point de mesure des vibrations. Ce point étant considéré comme fixe, ces deux grandeurs sont des constantes. Le signal obtenu  $f_c(t)$  est alors filtré par un système LIT  $\zeta$  de réponse impulsionnelle  $g(T)$ , modélisant la réponse mécanique du stator. Sa sortie  $v_c(t)$  représente les vibrations du stator engendrées par le seul courant de commande  $i_c(t)$ . La périodicité de  $m(t)$  permet à l'ensemble multiplieur-système LIT d'être vu comme un système LUPT.

La structure du système à étudier étant connue, on doit fixer les valeurs des différentes variables qu'il comporte pour détailler l'allure de sa réponse impulsionnelle. Dans un cas pratique, il faudrait donc passer par une phase d'identification afin de déterminer les caractéristiques de  $m(t)$  et la réponse impulsionnelle  $g(T)$ . Dans notre cas, nous allons fixer ces valeurs numériquement pour illustrer les caractéristiques d'un tel système:

- L'amplitude et la phase du signal de modulation sont choisies d'une manière arbitraire. Sa fréquence, quant à elle, est imposée égale à la fréquence statorique nominale de la machine de test, c'est à dire  $\nu_0 = 50$  Hz, ce qui correspond à une fréquence de rotation de  $\nu_r = 25$  Hz. Ce signal est alors donné par:

$$m(t) = 2,5 \cos\left(2\pi \times 50 \times t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.1)$$

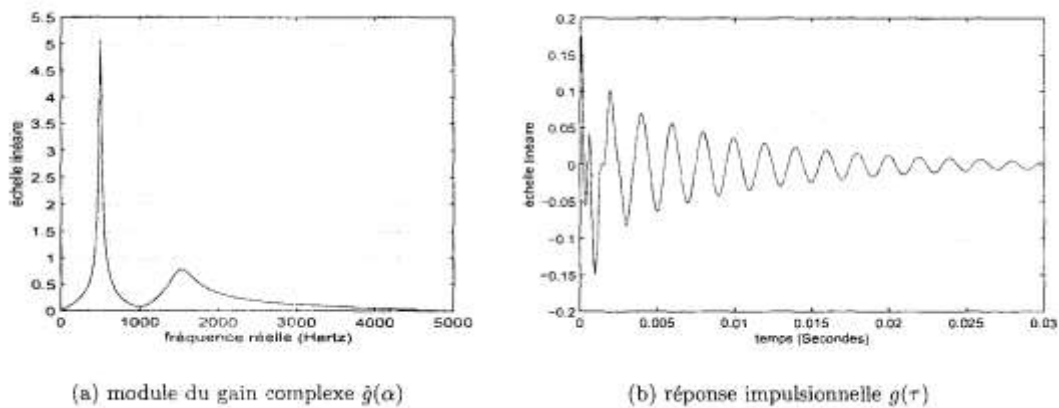
- Afin d'avoir une réponse fréquentielle réaliste, tout en étant assez simple pour faciliter l'interprétation des résultats, on choisit un système  $\zeta$  dont le module du gain complexe est représenté sur la figure 4.2(a). Sa réponse en fréquence présente deux résonances à 0,5 et 1,5 kHz, ainsi qu'une anti-résonance à 1 kHz, puis a tendance à s'annuler pour les fréquences supérieures à 4 kHz. La réponse impulsionnelle correspondante est donnée à la figure 4.2 (b).

Une grandeur intéressante à calculer afin de caractériser le système LUPT de la figure 4.1, est sa réponse impulsionnelle  $h(t, s)$ . Il faut tout d'abord noter que le modèle employé est un modèle à temps continu, ce qui impose aux variables temporelles d'être des variables continues, contrairement à ce qui a été décrit dans la section précédente. On peut néanmoins définir  $h(t, s)$  de la même manière que dans la partie 3.2.3: c'est la réponse du système observée au temps  $t$ , à une impulsion envoyée au temps  $s$ . Une impulsion à temps continu étant modélisée par une distribution de Dirac, l'entrée du système est alors:

$$i_c(t) = \delta(t - s)$$

Après modulation par  $m(t)$ , ce signal devient:

$$f_c(t) = m(t)\delta(t - s) = m(s)\delta(t - s)$$



**Fig. 4.2:** Caractéristiques du système  $\zeta$

La sortie du système LIT est donnée par l'équation de convolution suivante:

$$\begin{aligned} h(t, s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f_c(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) m(s) \delta(t - s - \tau) d\tau = m(s) g(t - s) \end{aligned}$$

En remplaçant le signal modulant par son expression générale, on obtient:

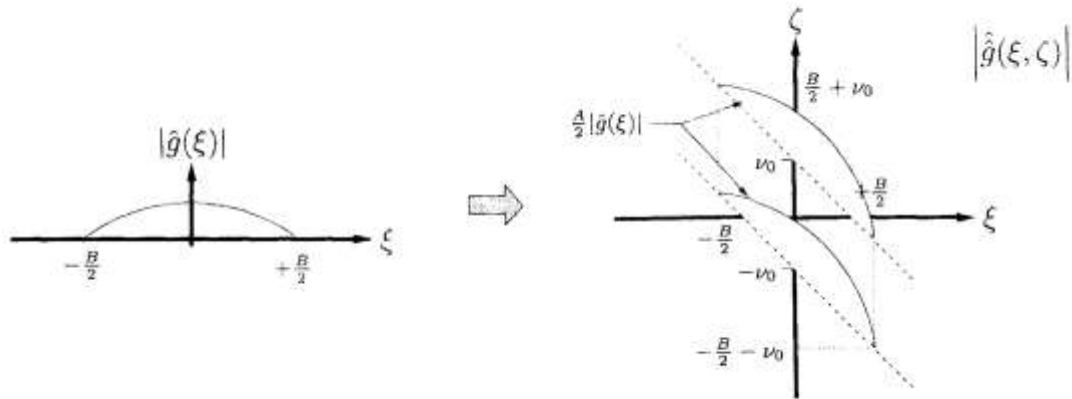
$$h(t, s) = A \cos(2\pi\nu_0 s + \phi) g(t - s) \quad (4-2)$$

Cette réponse impulsionnelle est bien celle d'un système LVPT, puisqu'elle vérifie la relation  $h(t, s) = h(t + T_0, s + T_0)$  avec  $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$  relation identique à (3.12), mais pour les systèmes continus.

À partir de cette réponse impulsionnelle, on peut définir, comme en 3.2.4, la réponse bifréquentielle  $\hat{h}(\xi, \zeta)$ , Elle correspond à la transformée de Fourier à deux dimensions de  $\mathbf{h}(t, s)$ , mais ne possède pas de propriété de périodicité, comme son homologue définie en (3.28) pour les systèmes discrets. En partant de l'équation (4-2), on obtient:

$$\hat{h}(\xi, \zeta) = \left[ \frac{A}{2} e^{-j\phi} \hat{g}(\xi) \right] \delta(\xi + \zeta + \nu_0) + \left[ \frac{A}{2} e^{j\phi} \hat{g}(\xi) \right] \delta(\xi + \zeta - \nu_0) \quad (4-3)$$

Cette fonction ne peut être non nulle que sur les deux droites de pente -1 et d'ordonnées à l'origine  $\pm\nu_0$ . Un exemple schématique est donné sur la figure 4.3. Le module du gain complexe de  $\zeta$  est représenté sur la partie gauche de la figure. Étant de largeur de bande  $B$ , il est donc nul si la fréquence est à l'extérieur de l'intervalle  $[-\frac{B}{2}; +\frac{B}{2}]$ . Le résultat obtenu pour le module de la réponse bifréquentielle est montré sur la partie droite de cette figure. On peut voir que  $|\hat{h}(\xi, \zeta)|$  s'annule si  $|\xi| > \frac{B}{2}$  ou  $|\zeta| > \frac{B}{2} + \nu_0$ . Le domaine où la réponse bifréquentielle est non nulle est donc fonction de la largeur de bande de  $\zeta$  et de la fréquence



**Fig. 4.3:** Exemple schématique de module de la réponse bifréquentielle (4-3) De modulation  $\nu_0$ .

Pour les valeurs numériques fixées précédemment, la largeur de bande du système LIT peut être estimée à  $B \simeq 8$  kHz. Le domaine où la réponse bifréquentielle peut être non nulle correspond alors à  $|\xi| \leq 4\text{kHz}$  et  $|\zeta| \leq 4,05\text{kHz}$ .

## IV.2 Échantillonnage:

Il y a deux types de contraintes d'échantillonnage à respecter. La fréquence d'échantillonnage  $\nu_e$  doit tout d'abord être assez élevée afin de vérifier le théorème de Shannon. Ceci permet d'éviter le recouvrement spectral, et autorise la reconstruction de la réponse impulsionnelle à temps continu, à partir de sa version échantillonnée. D'après la section 1.3.3, cette condition est vérifiée pour un signal bidimensionnel analogique comme  $h(t, s)$ , si  $\nu_e$  est supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le plan bifréquence, et ceci suivant les deux axes fréquentiels. Appliqué au système décrit à la figure 4.1, et donc à la réponse bifréquentielle de la figure 4.3, cette condition donne une première contrainte fixant une limite inférieure pour  $\nu_e$

$$\nu_e > B + 2\nu_0 \quad (4-4)$$

La deuxième contrainte à imposer à  $\nu_e$  vient du fait que l'échantillonnage du système LVPT continu original, doit fournir un système discret périodique pour pouvoir employer les outils d'analyse développés à la section 3.2. Si on échantillonne la réponse impulsionnelle à temps continu  $h(t, s)$  du système de la figure 4.1 avec une période d'échantillonnage  $T_e = \frac{1}{\nu_e}$  l'équation (4-2) permet d'écrire, aux instants d'échantillonnage :

$$\begin{aligned} h(nT_e, kT_e) &= A \cos(2\pi\nu_0 kT_e + \phi) g((n-k)T_e) \\ &= A \cos\left(2\pi \frac{\nu_0}{\nu_e} k + \phi\right) g((n-k)T_e) \end{aligned} \quad (4-5)$$

Pour que cette réponse impulsionnelle soit celle d'un système linéaire discret  $\wp$  périodique elle doit vérifier la relation (3.12), c'est à dire :

$$h(nT_e + \wp T_e, kT_e + \wp T_e) = h(nT_e, kT_e)$$

D'après l'expression de  $h(nT_e, kT_e)$ , ceci est équivalent à:

$$\cos\left(2\pi \frac{\nu_0}{\nu_e} (k + \wp) + \phi\right) = \cos\left(2\pi \frac{\nu_0}{\nu_e} k + \phi\right)$$

Ce qui est vérifié si la fréquence d'échantillonnage est de la forme :

$$\nu_e = \wp \nu_0 \quad (4-6)$$

Pour que le système discrétisé soit périodique, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit égale à un nombre entier de fois celle du système LVPT continu. Il est donc nécessaire de synchroniser l'échantillonnage des signaux d'entrée et de sortie dû système sur la fréquence de variation de ce système. Cette méthode est appelée «échantillonnage synchrone». Dans le cadre de l'application décrite au chapitre 1, le signal de top-tour fournit directement une sinusoïde de fréquence  $\nu_r$ . En utilisant ce signal, il est donc plus facile de synchroniser l'échantillonnage des signaux sur  $\nu_r$  plutôt que sur  $\nu_0$ . Au lieu d'utiliser la relation (4-6), on va donc partir de l'hypothèse suivant laquelle la fréquence d'échantillonnage est un multiple d'ordre  $P$  de  $\nu_r$ :

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{P}\mathbf{v}_r \quad (4-7)$$

D'après le lien existant entre  $\mathbf{v}_o$  et  $\mathbf{v}_r$  cette relation équivaut à:

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{p}} \mathbf{v}_o$$

Pour une telle fréquence d'échantillonnage, l'expression de la réponse impulsionnelle discrète (4-5) devient:

$$h(nT_e, kT_e) = A \cos\left(2\pi \frac{P}{P} k + \phi\right) g((n-k)T_e) \quad (4-8)$$

On peut alors remarquer que  $h((n+P)T_e, (k+P)T_e) = h(nT_e, kT_e)$ . Ce système est donc  $P$ -périodique, quelle que soit la valeur de  $p$ . Par contre, en examinant (4-8), on peut noter que si la valeur  $\frac{P}{p}$  est entière, le système est également  $\frac{P}{p}$ -périodique. Toutefois, même dans ce cas, il reste aussi  $P$ -périodique et sera considéré comme tel. Finalement, pour des raisons de simplicité d'écriture, les réponses impulsionnelles ne sont plus notées qu'en fonction des indices temporels  $n$  et  $k$ , leur dépendance à  $T_e$  devenant implicite. L'équation (4-8) peut donc s'écrire:

$$h(n, k) = A \cos\left(2\pi \frac{P}{P} k + \phi\right) g(n-k) \quad (4-9)$$

Les résultats précédents montrent que pour échantillonner correctement l'entrée et la sortie du système LUPT continu de réponse impulsionnelle (4-2), et obtenir un système LUPT discret  $P$ -périodique, il suffit que la fréquence d'échantillonnage  $\mathbf{v}_e$  vérifie à la fois les conditions (4-4) et (4-7). Si on prend les valeurs numériques choisies précédemment pour ce système, une valeur de 10 kHz convient parfaitement pour  $\mathbf{v}_e$ . En effet, elle est à la fois largement supérieure à sa limite inférieure  $8000 + 2 \times 50 = 8100 \text{ Hz}$  et reste un multiple entier de  $\mathbf{v}_r = 25 \text{ Hz}$ . On obtient une période de  $P = \frac{10000}{25} = 400$  et une réponse impulsionnelle de la forme:

$$h(n, k) = 2,5 \cos\left(\frac{\pi}{100} k + \frac{2\pi}{3}\right) g(n-k) \quad (4-10)$$

Les valeurs de  $g(n-k)$  sont connues par discrétisation de la réponse impulsionnelle continue donnée à la figure 4.2 (b).

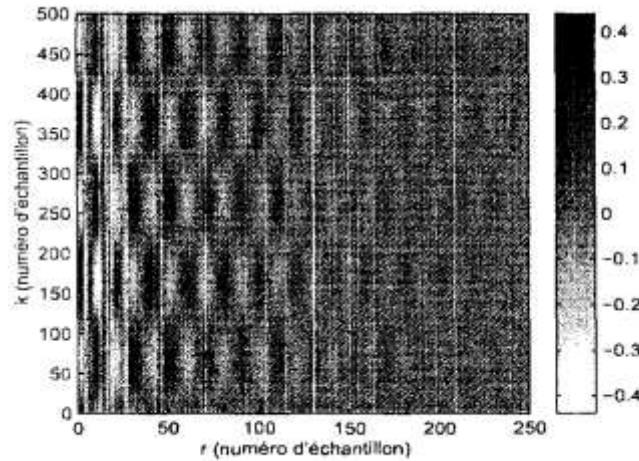
### **IV.3 Domaine temporel:**

On suppose dans cette partie que la fréquence d'échantillonnage a une valeur de 10 kHz, et que la réponse impulsionnelle du système analysé est donnée par (4-10). En utilisant la relation (3.5) et en définissant le retard  $r = n - k$ , on peut exprimer la réponse impulsionnelle sous une autre forme:

$$g(r, k) = A \cos\left(2\pi \frac{P}{P} k + \phi\right) g(r) \quad (4-11)$$

$$= 2,5 \cos\left(\frac{\pi}{100} k + \frac{2\pi}{3}\right) g(r) \quad (4-12)$$

La figure 4.4 représente une partie de cette réponse impulsionnelle, représentée en niveaux de gris. On voit apparaître une période de  $P = 400$  échantillons suivant l'axe des  $k$ , alors que:



#### 4.4: Fraction de la réponse impulsionnelle (4-12) en niveaux de gris

Les réponses impulsionnelles du type de celle de la figure 4.2 (b) sont situées suivant l'axe des retards  $r$ . La valeur  $\frac{P}{p} = \frac{400}{2} = 200$  étant un nombre entier, ce système à également, une période de 200 échantillons suivant l'axe des  $k$ , mais il reste considéré comme étant 400 périodique. Comme prévu par (3.13),  $\mathbf{g}(r, k)$  est  $P$ -périodique en  $k$ , et donc décomposable en série de Fourier discrète par (3.15) et (3.16). En écrivant le cosinus présent dans (4-11) sous sa forme exponentielle, on obtient immédiatement la série de Fourier recherchée:

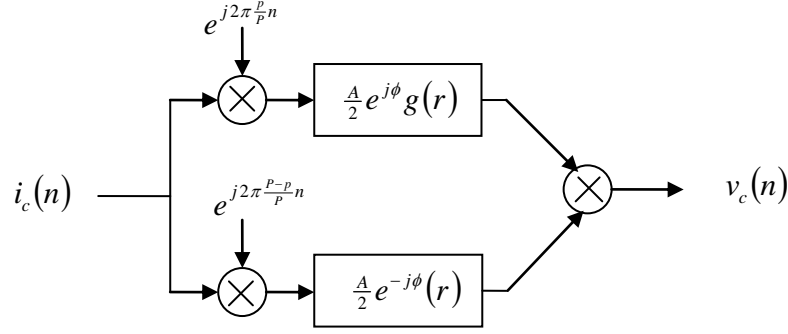
$$g(r, k) = \frac{A}{2} e^{j\phi} g(r) e^{j2\pi \frac{p}{P} k} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} g(r) e^{j2\pi \frac{P-p}{P} k}$$

Cette équation, par identification avec (3:15), permet de définir les réponses impulsionnelles des deux systèmes LIT composant le système LVPT analysé:

$$g_P(r) = \frac{A}{2} e^{j\phi} g(r) \quad (4-13)$$

$$g_{P-p}(r) = \frac{A}{2} e^{-j\phi} g(r) \quad (4-14)$$

Il peut donc être représenté par une structure à modulation d'entrée à deux branches, comme ' le montre la figure 4.5. On pourrait-en-déduire sa structure à modulation de sortie par la



**Fig. 4.5:** Structure à modulation d'entrée du système LVPT réel

relation (3.22), mais celle-ci ne sera pas utilisée par la suite.

Ce système applique sur son signal d'entrée deux modulations différentes. L'une provoque un décalage fréquentiel de  $\frac{p}{P}$  en fréquence réduite, et l'autre de  $\frac{P-p}{P}$  équivalent à  $-\frac{p}{P}$ , la fonction  $e^{j2\pi(u)k}$  étant 1-périodique en  $u$ . Ces signaux décalés sont alors filtrés par des systèmes LIT, dont les réponses impulsionnelles sont données par (4-13) et (4-14). On retrouve donc dans ce système, les effets couplés des décalages fréquentiels et des filtrages LIT, mis en évidence pour les systèmes LVPT dans la section 3.2. Nous allons voir que ce résultat se retrouve également dans le domaine fréquentiel.

#### **IV.4 Domaine fréquentiel:**

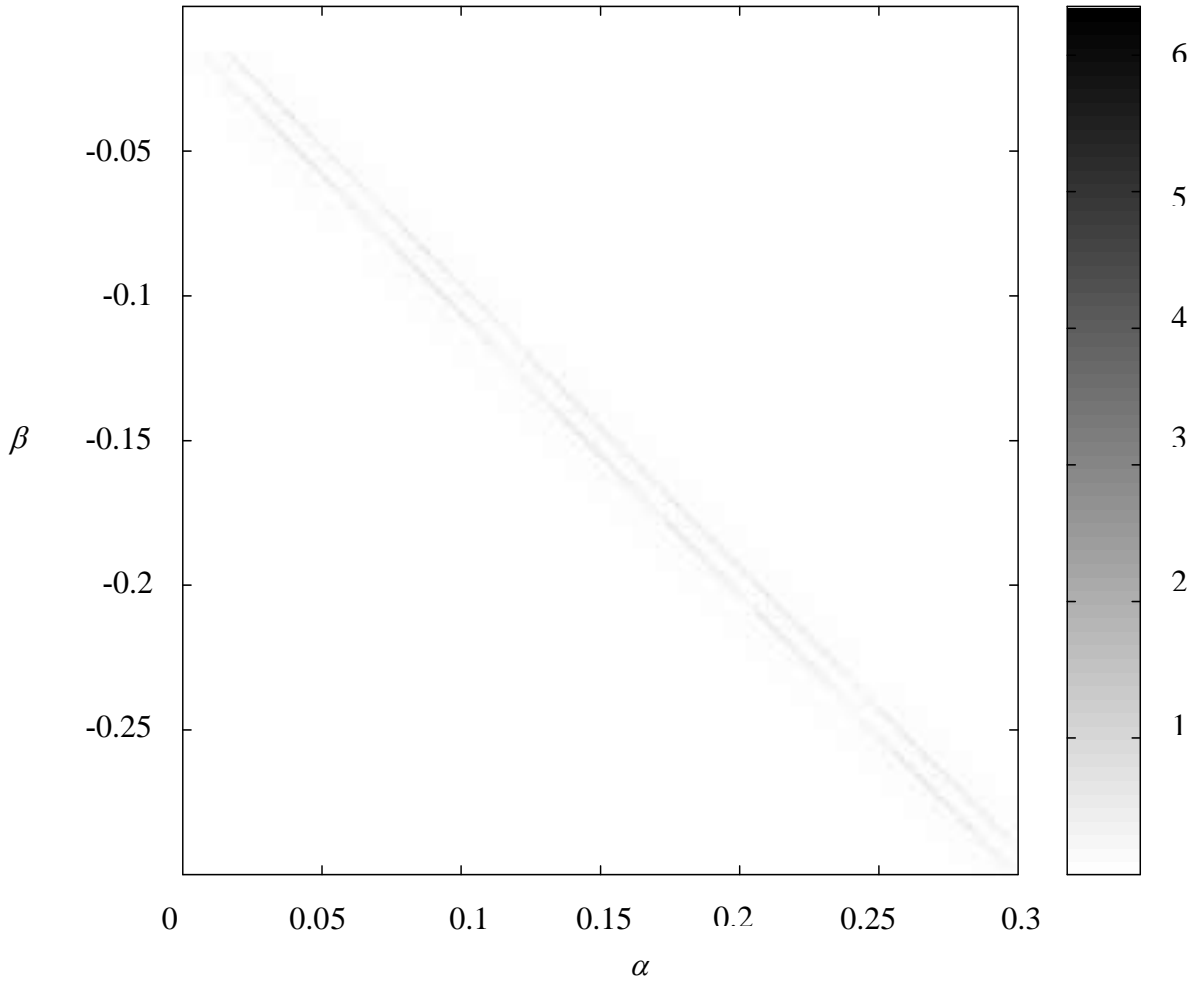
La réponse bifréquentielle de ce système LVPT peut être déterminée en prenant la transformée de Fourier à deux dimensions de sa réponse impulsionnelle (4-9), ou en utilisant les relations (4-13) et (4-14) dans la forme générale (3.28). Dans les deux cas, on obtient:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\alpha, \beta) &= \hat{g}_p(\alpha) \delta\left(\alpha + \beta - \frac{p}{P}\right) + \hat{g}_{P-p}(\alpha) \delta\left(\alpha + \beta - \frac{P-p}{P}\right) \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} \hat{g}(\alpha) \delta\left(\alpha + \beta - \frac{p}{P}\right) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \hat{g}(\alpha) \delta\left(\alpha + \beta - \frac{P-p}{P}\right) \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} \hat{g}(\alpha) \delta\left(\alpha + \beta - \frac{p}{P}\right) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \hat{g}(\alpha) \delta\left(\alpha + \beta + \frac{p}{P}\right) \end{aligned} \quad (4-15)$$

$$= 1,25 e^{j\frac{2\pi}{3}} \hat{g}(\alpha) \delta\left(\alpha + \beta - \frac{p}{200}\right) + 1,25 e^{-j\frac{2\pi}{3}} \hat{g}(\alpha) \delta\left(\alpha + \beta + \frac{p}{200}\right) \quad (4-16)$$

L'équation (4-15) est justifiée par la 1-périodicité de  $\hat{h}(\alpha, \beta)$  suivant ses deux variables. La figure 4.6 représente une partie du module de cette fonction en niveaux de gris, avec les valeurs numériques précédemment définies. La réponse bifréquentielle est bien formée des deux droites d'équation  $B = -\alpha \pm \frac{p}{P} = -\alpha \pm \frac{1}{200}$  Sur lesquelles sont situés les gains complexes:  $\frac{A}{2} e^{j\phi} \hat{g}(\alpha)$  et  $\frac{A}{2} e^{-j\phi} \hat{g}(\alpha)$ . On retrouve, sur chacune de ces droites, l'allure en niveaux de gris du module du gain complexe de la figure 4.2 (a).

Finalement, la relation entrée-sortie en fréquence dans le cas de signaux réels est déduite de:



**Fig. 4.6:** Fraction du module de la réponse biquadratique (4-16)

La forme générale (3.32):

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A}{2} e^{j\phi} \hat{g}(\alpha) \hat{x}\left(\alpha - \frac{p}{P}\right) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \hat{g}(\alpha) \hat{x}\left(\alpha - \frac{P-p}{P}\right) \\
 &= \frac{A}{2} e^{j\phi} \hat{g}(\alpha) \hat{x}\left(\alpha - \frac{p}{P}\right) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \hat{g}(\alpha) \hat{x}\left(\alpha + \frac{p}{P}\right)
 \end{aligned}$$

Cette expression montre explicitement que la transformée de Fourier de la sortie  $\hat{y}(\alpha)$  est la somme de deux versions décalées et pondérées (ou filtrées) de celle de l'entrée. Les mêmes conclusions peuvent être déduites de l'étude du module de la réponse biquadratique, en reprenant l'interprétation graphique qui a été faite à la partie 3.2.4.

De plus, la diagonale de la réponse biquadratique de ce système étant nul, il ne comporte pas de partie invariante. Le système LIT de gain complexe  $\hat{g}_0(\alpha)$  est donc nul et la quantité  $\Delta$ , définie par (3.34), et représentant le taux de variation normalisé du système est maximal et égal à 1.

Tous ces résultats auraient pu être déterminés sans représenter la réponse biquadratique qui pour un système aussi simple, ne semble pas très utiles. Elle a toutefois l'avantage de résumer groupement les effets du système LVPT analysé et prend toute son importance dans le cas de système complexes [52], [34]. Elle permet aussi de donner une première idée du gain complexe matriciel du système, dont le calcul et l'analyse sont l'objet de la partie suivante.



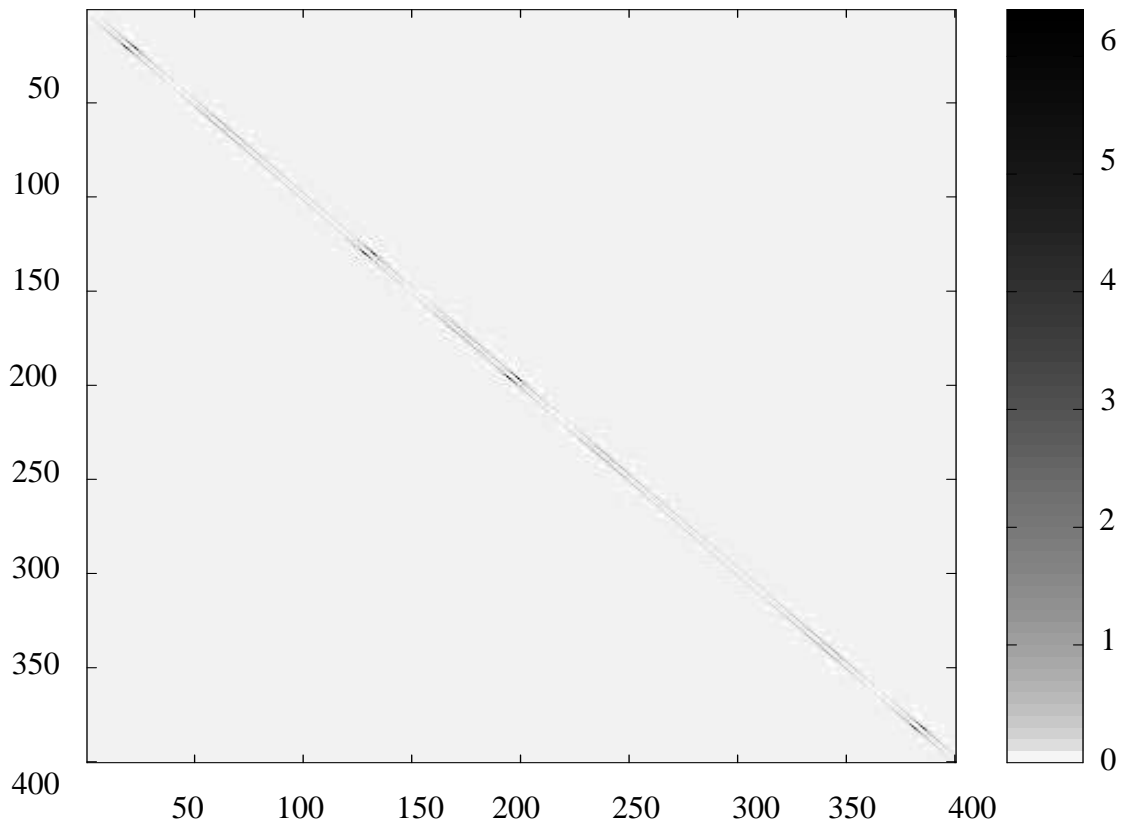


$$\hat{X}(0) = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}\left(-\frac{1}{P}\right) \\ \vdots \\ \hat{x}\left(-\frac{P-1}{P}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}\left(\frac{P-1}{P}\right) \\ \vdots \\ \hat{x}\left(\frac{1}{P}\right) \end{bmatrix}$$

Si le signal  $x$  est un signal discret  $P$ -périodique, ce vecteur regroupe les composantes non nulles de sa transformée de Fourier (ou les coefficients de sa série de Fourier discrète) et le caractérise entièrement. En effet, il permet de retrouver ses caractéristiques temporelles aussi bien que fréquentielles. L'équation (4-17) donne donc la réponse d'un système LVPT  $P$ -périodique de gain complexe matriciel  $\hat{G}(\alpha)$ , à un signal d'entrée  $x$   $P$ -périodique  $y$  est alors lui-même un signal  $P$ -périodique, caractérisé par le vecteur  $\hat{Y}(0)$ .

On retrouve exactement le même cas dans le problème de contrôle actif original. D'une part, on vient de voir que le système à travers lequel on peut agir sur les vibrations de la machine est  $P$ -périodique. D'autre part, on peut montrer (voir section 4.2) que pour atténuer le type de vibrations envisagé dans le chapitre 1, l'entrée de ce système est nécessairement  $P$ -périodique: Les résultats obtenus en analysant le gain complexe matriciel du système de la figure 3.1 pour  $\alpha = 0$  nous seront donc très utiles par la suite.

L'application numérique, à l'aide des valeurs précédemment définies, fournit une matrice  $\hat{G}(0)$  de taille  $400 \times 400$  dont le module est représenté sur la figure 4.8. Comme on pouvait s'y attendre, seules les sur- et sous-diagonales d'ordre  $p = 2$  et  $P - p = 398$  sont non nulles et portent les valeurs des gains complexes  $\hat{g}_2(\alpha)$  et  $\hat{g}_{398}(\alpha)$  à des fréquences multiples de  $\frac{1}{400}$  calculés par (4.13) et (4.14). Toutefois, les diagonales les plus éloignées de la diagonale principale ne sont pas visibles du fait de leur très faible amplitude. L'équation (4.17) et la forme du gain complexe matriciel obtenu montrent que chaque composante spectrale du signal de sortie  $y$  est fonction de deux composantes spectrales de  $x$ . Ceci est dû à la modulation d'amplitude sinusoïdale présente dans le système LVPT global, qui décale en fréquence le signal d'entrée de deux valeurs différentes. On peut remarquer que si le signal modulant  $m(t)$  avait eu une série de Fourier comprenant plus de deux coefficients, d'autres droites parallèles seraient apparues dans la réponse bifréquentielle, ainsi que dans le gain complexe matriciel. Le paragraphe suivant est consacré à l'analyse de ce gain complexe matriciel particulier, à l'aide des outils théoriques introduits 3.2.7.



**Fig. 4.8:** Module du gain complexe matriciel  $\hat{G}(0)$

**Analyse :**

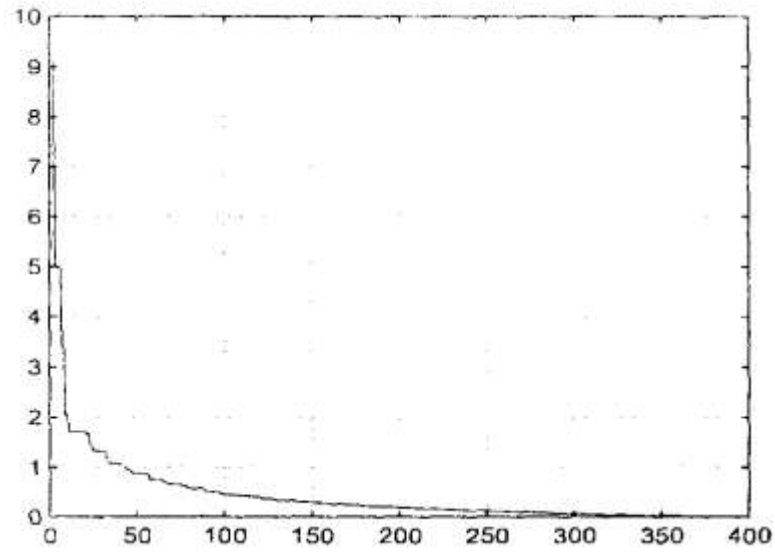
La décomposition en valeurs singulières de  $\hat{G}(0)$  donne, d'après la relation (3.46), trois matrices  $400 \times 400$  vérifiant:

$$\hat{G}(0) = \hat{U}(0) \cdot \hat{\Sigma}(0) \cdot \hat{V}(0)^H$$

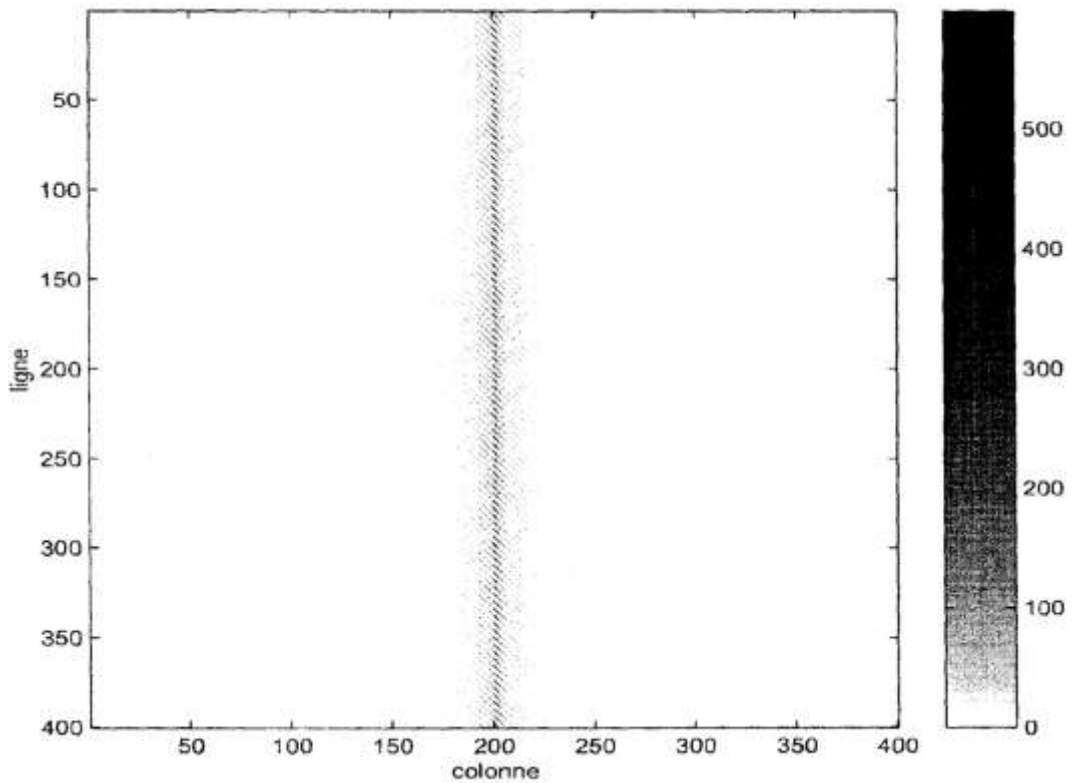
L'information la plus importante est concentrée sur la diagonale principale de  $\hat{\Sigma}(0)$  contenant les valeurs singulières du gain complexe matriciel, rangées par ordre décroissant. Elles sont représentées sur la figure 4.9, et on peut noter que la valeur singulière maximale est  $\sigma_1(0) \simeq 9,1$  alors que la minimale est de l'ordre de  $\sigma_{400}(0) \simeq 1,6 \cdot 10^{-4}$ . L'interprétation de la norme d'un gain complexe matriciel a montré que chaque valeur singulière élevée au carré, est équivalente à un gain en énergie. Ce système LVPT peut donc appliquer un gain en énergie dont l'ordre de grandeur varie de  $10^{-8}$  à 100, suivant le signal d'entrée.

**Inversion :**

Aucune valeur singulière n'étant nulle, le gain complexe matriciel du système inverse est donné par l'inverse exact de  $\hat{G}(0)$ . On obtient alors la matrice  $\hat{G}_{inv}(0) = \hat{G}(0)^{-1}$ , dont le module est représenté sur la figure 4.10. Ses valeurs singulières sont les inverses de celles de



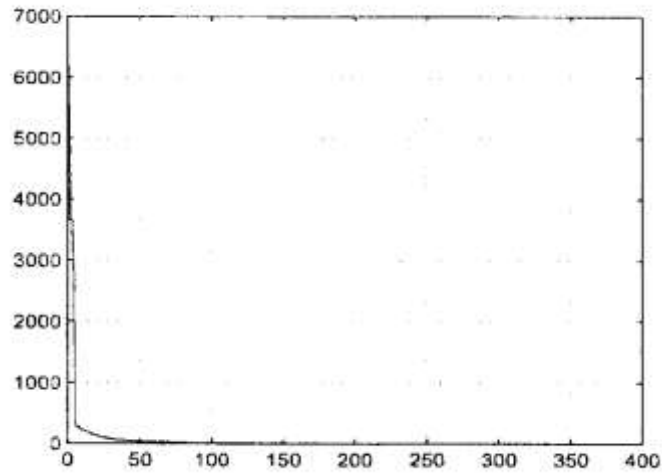
**Fig. 4.9:** Valeurs singulières du gain complexe matriciel  $\hat{G}(0)$



**Fig. 4.10:** Module du gain complexe matriciel  $\hat{G}_{inv}(0)$ .

$\hat{G}(0)$ , et sont représentées sur la figure 4.11. Certaines prennent des valeurs très élevées, tout comme le gain en énergie du système inverse, qui peut approximativement varier entre  $10^{-2}$  et  $10^8$ .

Le système inverse exact est donc susceptible de présenter des gains en énergie très élevés, ce qui peut être gênant pour certaines applications. Comme dans le cas des systèmes non inversibles, l'inverse généralisé peut fournir une solution à ce problème. En effet, le gain complexe matriciel du système inverse peut être calculé en prenant l'inverse généralisé de celui du système direct où on aura annulé les valeurs singulières situées en dessous du seuil choisi.



**Fig. 4.11:** Valeurs singulières du gain complexe matriciel  $\hat{G}_{inv}(0)$ .

On obtient alors une approximation de  $\hat{G}_{inv}(0)$  dont la valeur singulière maximum est moins élevée que celle de l'inverse exacte, ce nouveau maximum étant fixé par l'inverse du seuil précédent.

## Conclusion générale

Le but du travail est de chercher à cerner les phénomènes qui provoquent les vibrations liées au fonctionnement de la machine et les moyens de les atténuer.

Les études qui ont été faites sur ce domaine ont montré que ce phénomène reste très vaste et difficile à contenir. Néanmoins, beaucoup d'approches le plus souvent utiles, ont permis de mieux comprendre les véritables problèmes liés aux vibrations. A ce titre, nous avons pris comme moyens d'apporter notre contribution à l'atténuation des vibrations par la compensation active en injectant des signaux contradictoires qui s'opposent au signal mère généré par les vibrations provoquées lors du fonctionnement.

L'étude faite à partir des différentes bibliographies, nous a permis de comparer les différentes approches initiées par leurs auteurs.

Le problème fréquemment rencontré en analyse vibratoire est celui où une structure vibrante contamine son environnement en lui transmettant tout ou une partie de ses vibrations par l'intermédiaire de ses points de fixation.

Notre action dans ce travail tend à comprendre comment essayer d'isoler la structure réceptrice des vibrations pour que les effets soient de moindre incidence.

Nous savons que les grandeurs physiques usuelles qui caractérisent un mouvement vibratoire sont :

- le déplacement
- la vitesse
- l'accélération

Evidemment, afin de mieux évaluer ces phénomènes nous avons eu recours à l'usage des transformées de Fourier en fréquence réduite selon laquelle la condition d'échantillonnage se fait sans perte d'information.

Ces analyses ont permis de donner un aperçu sur l'origine et la nature des vibrations d'une machine tournante ainsi que certaines méthodes de traitement du signal contradictoire à utiliser pour leur atténuation.

Enfin, une meilleure compréhension de ces phénomènes permet leur élimination et assure un meilleur rendement et assure aux machines tournantes une durée de vie plus importante.

## Bibliographie

- [1] *S.J. Elliot and P.A. Nelson. Active control of vibration. Academic Press, 1996*
- [2] *E. F Berkman and E.K Bender. Perspectives on active noise and vibration control. Sound and vibration. January 1997.*
- [3] *P.S Farah. Etude des vibrations des machines synchrones. INPGrenoble 1995*
- [4] *C.R Fuller and V.H VON Flotow. Active control of sound and vibration. IEEE 1995*
- [5] *M. Jufer. Electromécanique. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1995*
- [5bis] *G. W. Carter. The electromagnetic field in its engineering aspects. Longmans 1967*
- [6] *G.F maestre. Etude des vibrations d'origine électromagnétique dans les machines à courant continu en vue de les réduire. Thèse de doctorat. Ecole centrale de Lyon, 1987.*
- [7] *A. Jarosz. Compensation active des vibrations d'une machine synchrone. Rapport deDEA, INPG, 1995.*
- [8] *J. Morel. Vibrations des machines et diagnostic de leur état mécanique. Eyrolles, 1992.*
- [9] *A. Boulenger and C. Pachaud. Surveillance des machines par analyse des vibrations. AFNOR, 1998.*
- [10] *P.L. Timar and AL. Noise and vibration of electrical machines. Elsevier, 1989.*
- [11] *M. Kunt and Al. Techniques modernes de traitement numériques des signaux. Presses polytechniques universitaires normandes, 1991*
- [12] *A.M. Tekalp. Digital video processing. Prentice Hall, 1995*
- [13] *R. Bigret and J.L. Fèron. Diagnostic-maintenance-disponibilité des machines tournantes. Masson, 1995*
- [14] *B.P. Bogert, M.J.R Healy and J.W. Tukey. The quefreny analysis of time series for echoes : cepstrum, pseudo covariance, cross cepstrum and saphe cracking. In proceedings of symposium on time series analysis, New York, 1963.*
- [15] *P. Flandrin. Temps- fréquence. Hermès, 1993*
- [16] *W. A. Gardner. Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals. IEEE, Signal Processing Magazine, 1991.*
- [17] *A.C. Mac Cormick and A.L Nandi. Cyclostationary in ratating machines vibrations. Mechanical systems and signal processing, 1998.*

- [18] R.B. Randal, J. Antoni, and S. Chobsaard. *A comparison of cyclostationary and envelope analysis in the diagnostics of rolling elements bearings*. In *Proceedings of the IEEE ICASSP 2000, Istanbul, 2000*.
- [19] C. Capdessus, M. Sidahmed, and J.L. Lacoume. *Ciclostationary processes : application in gear faults early diagnostics*. *Mechanical systems and signal processing*, May 2000.
- [20] J.L. Lacoume, P.O. Amblard and P. Comon. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*, Masson, 1997.
- [21] P. Ganjon, C. Cervière and A. Foggia. *Compensation active des vibrations d'une machine synchrone*. *Revue française de mécanique*, 1999.
- [22] K. Moi. *Etude de filtres et de processus non linéaires discrets*. Thèse de doctorat, INPG, 1996.
- [23] P. Lueg. *Processus of silencing sound oscillations*. *US Patent 1936*.
- [24] H.F Olson and E.G. May. *Electronic sound absorber*. *Journal of the acoustical society of America*, 1953.
- [25] W.B. Conover. *Fighting noise with noise*. *Noise control*, 1956.
- [26] P.A. Nelson and S.J. Elliot. *Active control and sound*. 1992.
- [27] S. J. Elliot, I. M. Stothers and P. A. Nelson. *Algorithm and its application to the active control of sound and vibration*. *IEEE Transactions on Acoustics* 1987.
- [28] B. Widrow and S.D. Stearns. *Adaptive signal processing*. Prentice-Hall, 1985.
- [29] S. J. Elliot, C. C. Boucher and P. A. Nelson. *The behavior of multiple channel active control system*. *IEEE* 1992.
- [30] N. C. Huang. *On linear shift-variant digital filters*. *IEEE*, 1980.
- [31] S. Haykin. *Adaptive filter theory, third edition*. Prentice-Hall, 1996.
- [32] T. A. C. M. Claasen and W. F.G. Mecklenbrauker. *On stationary linear time-varying systems*. *IEEE*, 1982.
- [33] L. A. Luxemburg. *Frequency analysis of time varying periodic linear systems by using p transforms and its applications*. *CSSP*, 1990.
- [34] S. Bittanti and G. Guardabassi. *Optimal periodic control and periodic systems analysis : an overview*. *25th Conference on decision and control*, Athenes, 1986.
- [35] F. L. Kitson and L. J. Griffiths. *Design and analysis of recursive periodically time-varying digital filters with highly quantized coefficients*. *IEEE* 1988.



- [36] N. M. Werely and S. R. Hall. *Frequency response of linear time periodic system*. Hawaii, 1990.
- [37] S. J. Prater and C. M. Loeffler. *Analysis and design of periodically time-varying filters with application to transmultiplexing*. IEEE 2002.
- [38] J. L. Lacoume and J. Max. *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Masson 2000.
- [39] B. Picinbono. *Random signals and systems*. Prentice-Hall, 2003
- [40] C. Zhang, J. Zhang and K. Futura. *Analysis of  $h_2$  and  $h_\infty$  performance of discrete periodically time-varying controllers*. Automatica, 2003.
- [41] R. G. Shenoy, D. Burnside and T. W. Parks. *Linear periodic systems and multirate filter design*. IEEE, 2007
- [42] M. Vetterly. *A theory of multirate filter banks*. IEEE , 2007.
- [43] R. Golub and C. Van Loan. *Matrix computations, third edition*. The Jhon Hopkins University Press, 2002.
- [44] R. H. Cabell. *A principal component algorithm for feedforward active noise and vibration control*. Journal of sound and vibration, 2005.
- [45] L. L. Scharf. *Statistical signal processing*. Prentice Hall, 2004.
- [46] D. Otte. *The use of svd for the study of multivariate noise and vibration problems*. Elsevier,2005.
- [47] P. R. Wihte and D. M. lopes. *Time-frequency methods of analyzing structural responsa data*. IEEE, ICASSP, Istanbul, 2006.