وزارةالتعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR مختار جا

ANNABA عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année : 2013

MÉMOIRE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme :MAGISTER

Option

Mathématiquesappliquées

Intitulée

Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire

---

Présentée par :

BelakroumKheireddine

Directeur de Thèse : AssiaGuezane-LakoudPr.U. B. M. Annaba

Devant le jury

Président:	**Khaldi Rabah**	**Pr.**	**U. B. M. Annaba**
Examinateurs:			
	Kelaiaia Smail	**Pr.**	**U. B. M. Annaba**
	EllagouneFateh	**M. C. A**	**Univ. Guelma**
	ChaouiAbderezak	**M. C. A**	**Univ. Guelma**

ملخص

نظرا لأهمية الدور الذي يلعبه مبدأ النقطة الثابتة في مجال التطبيقات حيث انه يتدخل في حل العديد من المعادلات التفاضلية الغير خطية خاصة في المسائل المتعلقة بإيجاد الحلول الوحيدة.
في هذه المذكرة نتناول البعض من تطبيقاته المتعددة كما ندرس بعض التعميمات لهذا المبدأ وبعضامتداداتهالتي تشارك فيحل المعادلات التفاضليةالجزئية والتي تساعدنا على اثباتوجود ووحدانية الحلولباستخداممبدأالانكماش لبناخ و نطرية النقطة الثابتة لشودير ، كما يمكننا مناقشة وجود الحلول الموجبة بالاعتماد على نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي.

<u>الكلمات المفتاحية:</u>
المشتقات الكسرية بمفهوم كابوتو، مبدأ التقليص لبناخ، المتناوبة الغير خطية لشودير، نظرية النقطة الثابتة.

Table des matières

Résumé

Le principe du point fixe a beaucoup d'applications. Il intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.

Dans ce mémoire on aborde différentes applications de ce principe ainsi que quelques-unes de ses extensions et généralisations qui s'impliquent dans la résolution des équations différentielles fractionnaires. Nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions en utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire Leray-Schauder, nous étudions la positivité de la solution via le théorème Guo-krasnosel skii du point fixe sur cône.

Mots clés : Dérivées fractionnaires aux sens de Caputo, Principe de la contraction de Banach, Alternative non linéaire type Leray-Schauder, le théorème du point fixe Guo-krasnosel skii .

Abstract

The fixed point principle plays a crucial role in the large domain of application. It gives us the main tool for a more advanced study of different non linear differential equations, particularly for problems of existence and uniqueness.

In this memory, we consider different applications of this principle and some ones of its extensions and generalizations which are implied in the resolution of fractional differential equation. we prove the existence and uniqueness of solutions by using Banach contraction principle and Leray-Schauder nonlinear alternative, we investigate the positivity of solution by using Guo-krasnosel skii fixed point theorem on cone.

Keywords : Fractional Caputo derivative, Banach contraction principal, Leary-Schauder nonlinear alternative, Guo-Krasnoselskii fixed point theorem.

Chapitre 1

Introduction générale

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même introduire la dérivée seconde. Puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être comme une dérivée d'ordre " moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle [56], l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n^{eme} dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques pures sans intérêt pour l'ingénieur, pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparait tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne.

Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommes et des cahoutchous, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement, autrement dit les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme.

De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature. Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{eme} siècle, inclut : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V.Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. L´evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erd'elyi (1939- 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949), ...ect.

Différentes approches ont été utilisés pour cette notion de dérivation :

- La limite de taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de Grunwald-Letnikov, très utile numériquement.

- L'intégration, opérateur inverse, via la formule intégrale de Liouville, mène aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo.

- Enfin les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(i\omega)^\alpha$ ou p^α avec α non entier.

Mais ces différentes définitions ont pendant longtemps semblé ne pas donner toujours les mêmes résultats. Cette incohérence apparente a pu être dissipée dans le cadre nouveau proposé par la théorie des distributions de Laurent Schwartz [61].

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle.

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie de point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans nombreux problèmes non linéaires différents.

Le développement de la théorie du point fixe, qui est la branche cardinale de l'analyse non linéaire a donné de grands effets sur l'avancement de l'analyse non linéaire, considérée comme une branche autonome des mathématiques, l'analyse non linéaire a été élaboré dans les années 1950 par des mathématiciens comme Felix Browder comme une combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

Cette méthode est associée aux noms de mathématiciens célèbres tels que Cauchy, Liouville, Lipschitz et surtout, Picard. En fait, les précurseurs de la théorie du point fixe approché sont explicites dans les travaux de Picard. Toutefois, c'est le mathématicien polonais Stefan Banach, qui est crédité sur le placement d'une idée abstraite.

Le principe de l'application contractante est l'un des rares théorèmes constructifs de l'analyse mathématique. Il constitue un outil de grande importance vue l'étendue de son champs d'applications à priori, dans l'étude des équations non linéaires qui jouent un rôle crucial aussi bien en mathématiques qu'en sciences appliquées. Le principe est le théorème du point fixe de Banach ou celui de Picard qui assure l'existence d'un unique point fixe pour une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Le point fixe est la limite d'un procédé itératif défini à partir d'une répétition d'image par cette application contractante d'un point initial arbitraire dans cet espace. Ce concept a été prouvé en premier lieu, par Banach en 1922 puis développé par plusieurs mathématiciens dont nous citons Brouwer et Schauder en 1930 ainsi que Krasnoselskii en 1955. Le théorème du point fixe de Schauder, qui est au fait, une extension de celui de Brouwer en dimension infinie est plus topologique que celui de Banach et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement, unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des majorations sur la fonction mais simplement sa continuité. Néanmoins, la mise en branle des méthodes variationnelles a focalisé ces dernières décennies, en majeur partie l'intérêt des mathématiciens au détriment des méthodes topologiques.

En effet, ces méthodes variationnelles puisent leur efficacité dans leur orientation vers les applications. Leur atout majeur est le fait qu'ils fassent intervenir des fonctions généralisées et des espaces de Sobolev réflexifs qui constituent une chaine de liaison entre les solutions faibles et les solutions classiques. Cependant il y a des situations où les méthodes variationnelles s'avèrent laborieuses voire inopérantes. Et là encore, les méthodes topologiques seront de rigueur d'où leur importance fondamentale. Le théorème du point fixe de Krasnoselskii appuie par ses grandes mesures le domaine très actif des applications. Il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité des solutions pour des opérateurs non linéaires qui sont étroitement, liés aux équations différentielles non linéaires et équations intégrales qui ont fait l'objet d'études intensives ces dernières décennies.

On peut noter ici que la plupart des travaux sur le calcul fractionnaire sont consacrés à la solvabilité des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles fractionnaires linéaires à la base des fonctions spéciales [39, 50]. Récemment, d'autres résultat traitant l'existence, l'unicité et la multiplicité des solutions ou des solutions positives des problèmes fractionnaires non linéaire par l'utilisation des techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe sont apparues.

Citant sur ce sujet le travail de Zhoujin dans [16], a considéré l'équation différentielle fractionnaire

$$^{c}D^{\alpha}u\left(t\right)+f(t,u(t),^{c}D_{a^{+}}^{\beta}u\left(t\right)) \quad =0 \qquad 0<t<1,3<\alpha\leq 4, \tag{1.1}$$

$$u(0)=u'(0)=u''\left(0\right)=0,u(1)=u(\xi) \qquad 0<\xi<1, \tag{1.2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo, $\beta>0$, $\alpha-\beta\geq 1$, les résultats d'existence sont dérivées au moyen de théorème du point fixe de Schauder.

Dans [44] Liang et Zhang ont démontré l'existence et l'unicité de la solution positive via les propriétés de la fonction de Green, le principe de méthode de la solution inférieure et supérieure ansi que le théorème du point fixe pour le problème suivant

$$D_{0^{+}}^{q}u\left(t\right)+f(t,u(t)) \quad =0 \qquad 0<t<1, \tag{1.3}$$

$$u(0)=u'(0)=0,u'(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_{i}u'(\zeta_{i}). \tag{1.4}$$

Où $2<q\leq 3$ et $D_{0^{+}}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Une autre étude dans [54] où Mujeeb a traité un résultat d'existence et de multiplicité, en utilisant le théorème de Guo-Krasnoselskii pour un problème non linéaire et non local engendré par les équations différentielles de type

$$\begin{array}{llll} ^{c}D_{0^{+}}^{q}u\left(t\right) & =\lambda a\left(t\right)f(u(t),v(t)), & ^{c}D_{0^{+}}^{q}u\left(t\right)=\mu b\left(t\right)g(u(t),v(t)), & \\ u'(0)= & u''\left(0\right)=u'''\left(0\right)=... & u^{(n-1)}\left(0\right)=0 & u(1)=\xi_{1}u(\eta_{1}), \\ v'(0)= & v''\left(0\right)=v'''\left(0\right)=... & v^{(n-1)}\left(0\right)=0 & v(1)=\xi_{2}u(\eta_{2}), \end{array} \tag{1.5}$$

avec $\lambda,\mu>0,n-1<\alpha,\beta\leq n$ pour $n\in\mathbb{N};\xi_{i},\eta_{i}\in(0,1)$, $i=1,2$ et $D_{0^{+}}^{q}$la dérivée au sens de Caputo.

Ahmad et al.[2], ont proposé l'étude d'une équation fractionnaire avec laquelle sont jointes des conditions non locales.

$$^{c}D_{0^{+}}^{q}u\left(t\right) \quad =f(t,u(t)) \qquad 0<t<1, \tag{1.6}$$

$$x(0)=x'(0)=x''\left(0\right)=...=x^{m-2}\left(0\right)=0,x\left(1\right)=ax\left(\eta\right), \tag{1.7}$$

dont $q\in\left(m-1,m\right],m\in\mathbb{N},m\geq 2$. Le résultat d'existence est basé sur l'application contractante et le théorème de Krasnoselskii.

Ainsi que dans [24] A. Guezane-Lakoud et R. Khaldi ont pu établir des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions d'un problème engendré par l'équation :

$$^{c}D_{a^{+}}^{q}u\left(t\right) \quad =f(t,u(t),^{c}D_{a^{+}}^{\sigma}u\left(t\right)) \qquad 0<t<1,$$

à la quelle la condition integrale fractionnaire suivante

$$u(0)=0,u'(1)=\alpha I_{0^{+}}^{\sigma}(1), \tag{1.8}$$

est jointe.

où $f:\ [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction donné, $1<q<2$, $0<\sigma<1$, et $^{c}D_{a^{+}}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Les mêmes auteurs dans [26] et à la base du principe de contraction de Banach, et l'alternative non linéaire de Leaury Shauder, ils ont étudié le problème :

$$^{c}D_{a^{+}}^{q}u\left(t\right) \quad =f(t,u(t)) \qquad 0<t<1, \tag{1.9}$$

$$u(0)=\alpha u'(0)=0,u'(1)=\beta u''(\eta) \tag{1.10}$$

où $f:\ [0,1]\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction donné, $1<q<2,\alpha.\beta\in\mathbb{R}$ et $^{c}D_{a^{+}}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Motivé par les travaux précédents, notre objectif et de démontrer l'existence et l'unicité de la solution positive du problème fractionnaire suivant

$$^{c}D_{a^{+}}^{q}u\left(t\right) \quad =f(t,u(t),^{c}D_{a^{+}}^{\sigma}u\left(t\right)) \qquad 0<t<1, \tag{1.11}$$

$$u(0)=u''(0)=0,u'(\eta)=\alpha u''(1), \tag{1.12}$$

où $f:\ [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction donnée, $2<q<3$, $0<\sigma<1$, $0<\eta<1$ et $^{c}D_{a^{+}}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Ce travail est réparti principalement en plus d'une introduction trois chapitres.

Le chapitre 2 est consacré à une étude succinte sur la dérivation fractionnaire.

Le chapitre 3 s'étend à rappeler quelques résultats fondamentaux sur le principe de l'application contractante ainsi que les théorèmes du point fixe.

Le chapitre 4 a pour objet l'étude de problème fractionnaire suivant :

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D_{a^+}^{q}u\,(t) &= f(t, u(t), {}^{c}D_{a^+}^{\sigma}u\,(t)), 0 < t < 1 && (1.13)\\
u(0) &= u''(0) = 0, u'(\eta) = \alpha u''(1). && (1.14)
\end{aligned}
$$

On se penche, particulièrement, sur les résultats d'existence, l'unicité et la positivité de la solution à la base des théorèmes connus du point fixe.

Enfin, cette thèse est clôturée par une bibliographie.

Chapitre 2

Introduction à la dérivation fractionnaire

Résumé

Le calcul fractionnaire a 300 ans d'existence mathématique, tout le long de ces années, connaissait les contributions de nombreux mathématiciens qui ont donné plusieurs approches et définitions.

Dans ce chapitre nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire. on se restreindre à trois approches seulement des dérivées fractionnaires les plus populaires et les plus pratiques (l'approche de Grunwald Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo) ainsi que leurs propriétés, puis nous allons essayer de donner des interprétations physiques y compris ses applications dans la modélisation rhéologique.

2.1 La dérivation fractionnaire

L'idée principale de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

2.2 Outils de base

2.2.1 Fonctions utiles

(i) **La fonction Gamma**

La fonction Gamma est en mathématiques, une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (excepté en certains points)

Définition 2.1 *Pour $\alpha \epsilon \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction suivante*

$$\Gamma : \alpha \to \int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{2.1}$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), Re(\alpha) > 0 \tag{2.2}$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \epsilon \mathbb{N} \tag{2.3}$$

(ii) **La fonction Bêta**

La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :

$$B\left(p,q\right)=\int\limits_{0}^{1}\tau^{p-1}\left(1-\tau\right)^{q-1}d\tau, Re(p)>0, Re(q)>0. \tag{2.4}$$

Liens entre la fonction Gamma et la fonction Beta

$$B\left(p,q\right)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, Re(p)>0, Re(q)>0. \tag{2.5}$$

2.2.2 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(x)=\int\limits_{a}^{x}f(t)dt \tag{2.6}$$

$$I^{(2)}f(x) \quad =\int\limits_{a}^{x}dt\int\limits_{a}^{t}f(u)du$$

En permutant l'ordre d'intégration,on obtient

$$I^{(2)}f(x) \quad =\int\limits_{a}^{x}\left(x-t\right)f(t)dt, \tag{2.7}$$

Plus généralement le $n^{i\grave{e}me}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^{(n)}f(x) \quad =\int\limits_{a}^{x}dx_1\int\limits_{a}^{x_1}dx_2...\int\limits_{a}^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n \quad =\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{a}^{x}\left(x-t\right)^{(n-1)}f(t)dt, \tag{2.8}$$

pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)!=\Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (2.8) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 2.2 *si* $f \in C[a,b], \alpha \in \mathbb{R}_+$ *l'intégrale*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \quad \textit{telle que} \quad a \in]-\infty, +\infty[\tag{2.9}$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α, *et l'intégrale*

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \quad \textit{telle que} \quad b \in]-\infty, +\infty[\tag{2.10}$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Remarque 2.1 *Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).*

Théorème 2.1 *Pour* $f \in C[a,b]$ *, l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} \left[I_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad \textit{pour} \quad \alpha > 0, \beta > 0 \tag{2.11}$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition

$$I_{a^+}^{(\alpha)} \left[I_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(s-t)^{\alpha-1}} \int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}} du. \tag{2.12}$$

Or $f \in C[a,b]$, d'après le théorème de Fubini on et par le changement $t = u + s(x-u)$ on obtient

$$I_{a^+}^{(\alpha)} \left[I_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}} du = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x). \tag{2.13}$$

Où $B(\alpha,\beta)$ désigne la fonction Beta . ■

Propriété :

Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville (2.9) pour $a = 0$ d'une fonction f qui possède la transformée de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $Re(s) > 0$ est

$$L(I^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} F(s)$$

♦ **Exemple**

On a $f(t) = (t-a)^m$.

A l'aide de changement de variable $\tau = a + x(t-a)$ on trouve :

$$\begin{aligned} I^\alpha (t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^m \, d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^m dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \beta(m+1,\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{\alpha+m}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Pour $\alpha = 0.5$, $m = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}. \tag{2.15}$$

2.3 Dérivées fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

2.3.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires, donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par la formule suivante :

$$D^p f(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh), \text{ avec } \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}. \tag{2.16}$$

La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 < p < n$) et comme

$$(-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p\,(1-p)\ldots(k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma\,(k+1)\,\Gamma(-p)}, \tag{2.17}$$

nous obtenons

$$^{G}D^{p}f(t) = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma\,(k+1)\,\Gamma(-p)} f(t-kh) \tag{2.18}$$

et

$$^{G}D^{-p}f(t) = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma\,(k+1)\,\Gamma(p)} f(t-kh). \tag{2.19}$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$^{G}D^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}\,(a)\,(t-a)^{k+p}}{\Gamma\,(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma\,(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1}\, f^{(n)}\,(\tau)\, d\tau, \tag{2.20}$$

aussi

$$^{G}D^{p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}\,(a)\,(t-a)^{k-p}}{\Gamma\,(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma\,(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}\, f^{(n)}\,(\tau)\, d\tau. \tag{2.21}$$

♦ **Exemples**

1- La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov

En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Si $f(t) = c$ et p non entier positif on a :

$$f^{(k)}(t) = 0 \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n.$$

$$
\begin{aligned}
{}^{G}D^{p}f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}.
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

2- La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Grünwald-Letnikov.

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$ alors on a :

$$
f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2.23}
$$

et

$$
f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}, \tag{2.24}
$$

d'où

$$
{}^{G}D^{p}f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{-p}\, d\tau. \tag{2.25}
$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on trouve :

$$
\begin{aligned}
{}^{G}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n}\, d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_{a}^{1} (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1) B(\alpha-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}
$$

A titre d'exemple

$$
{}^{G}D^{1/2}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}. \tag{2.26}
$$

2.3.2 Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau \\ &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(I^{n-p}f(t)\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Remarque 2.2 *Si f est de classe C^n, alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient*

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{p}f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau \\ &= {}^{G}D^{p}f(t). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

Exemples

1- La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$${}^{R}D^{p}C = \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}. \tag{2.29}$$

2-La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a :

$${}^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha}d\tau. \tag{2.30}$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{p}\left(t-a\right)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma\left(n-p\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(t-a\right)^{n+\alpha-p}\int\limits_{a}^{t}\left(1-s\right)^{n-p-1}s^{\alpha}ds \\
&= \frac{\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)B\left(n-p,\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)}\left(t-\alpha\right)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)\Gamma\left(n-p\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)}\left(t-\alpha\right)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}\left(t-\alpha\right)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

A titre d'exemple

$$^{R}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma\left(1.5\right)}{\Gamma\left(1\right)} = \Gamma\left(1.5\right). \tag{2.31}$$

♦ **Propriétés**

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

- L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$$^{R}D^{p}(I^{p}f(t)) = f(t), \tag{2.32}$$

en général on a

$$^{R}D^{p}(I^{q}f(t)) = \ ^{R}D^{p-q}f(t) \tag{2.33}$$

et si $p-q<0$, $^{R}D^{p-q}f(t) = I^{q-p}f(t)$.

- En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$^{R}D^{-p}({}_{a}^{R}D_{t}^{q}f(t)) = \ ^{R}D^{q-p}f(t) - \sum_{k=1a}^{m}\left[{}^{R}D_{t}^{q-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma\left(p-k+1\right)} \tag{2.34}$$

avec $m-1 \leq q < m$.

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(^{R}D^{p}f(t)\right) = \ ^{R}D^{n+p}f(t), \tag{2.35}$$

mais

$$ {}^RD^p(\frac{d^n}{dt^n}f(t)) = {}^RD^{n+p}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)\,(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma\,(k-p-n+1)}. \tag{2.36} $$

3. Composition avec les dérivées fractionnaires

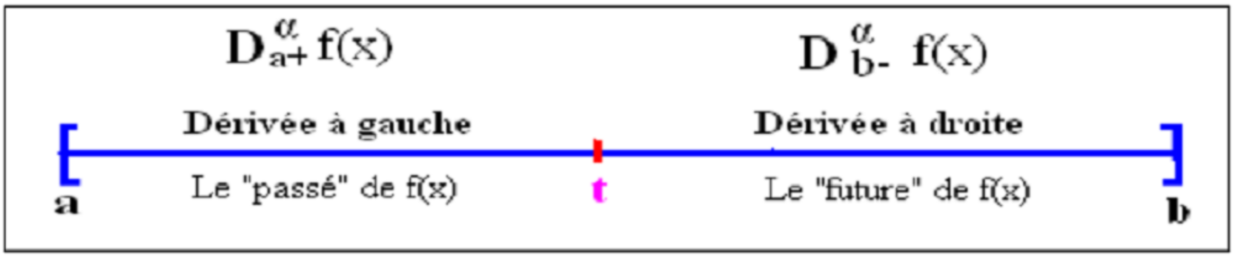
Soit $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$, alors

$$ {}^RD^p({}^RD_t^q f(t)) ={}^R D^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\left[{}^RD^{q-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma\,(p-k+1)}, \tag{2.37} $$

et

$$ {}^RD^q({}^RD^p f(t)) = {}^RD^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[{}^RD^{p-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma\,(-q-k+1)}, \tag{2.38} $$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^RD^p$ et ${}^RD^q$ $(p \neq q)$, ne commutent que si et $\left[{}^RD^{p-k}f(t)\right]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, ..., n$, et $\left[{}^RD^{q-k}f(t)\right]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, ...,$ m.



F 1— Les dérivées à droite et à gauche comme opérations sur le "passé" et le "future" de $f(t)$.

2.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonction, sommation des séries, ...). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue, De nombreux travaux sont apparus, spécialement sur la théorie de viscoélasticité et des mécaniques du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une modélisation mathématique est basée sur les modèles rhéologiques mène naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et à la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a),\ f\acute{(}a)$, etc... Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (voir par exemple solutions données dans [35]), la solution de ce problème a été proposée par M.Caputo (dans les années soixante) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélastiques [39]. Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 2.3 *Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a,b]$.*

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)\,d\tau \\ &= I^{n-p}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Propriétés

1. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), supposons que f est une fonction telle que ${}_{a}^{C}D_{t}^{p}f(t)$ et ${}_{a}^{R}D_{t}^{p}f(t)$ existent alors

$${}^{C}D^{p}f(t) = {}^{R}D^{p}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}. \tag{2.40}$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura ${}^{C}D^{p}f(t) = {}^{R}D^{p}f(t)$.

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a

$$ {}^{C}D^{p}I_{a}^{p}f = f \text{ et } I_{a}^{p\,C}D^{p}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!}, \tag{2.41}$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'operateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemples

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$ {}^{C}D^{p}C = 0. \tag{2.42}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Caputo .

Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a

$$ f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}, \tag{2.43}$$

d'où

$$ {}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\,d\tau, \tag{2.44}$$

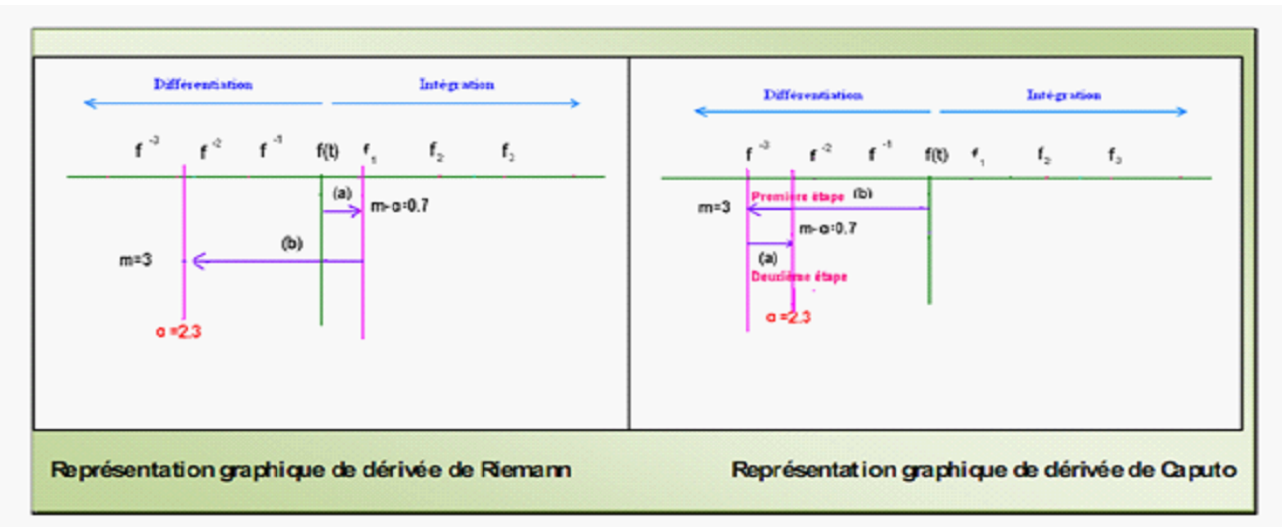
effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\,d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_{a}^{1} (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

2.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-liouville

• L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

• Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo (2.42) par contre par Riemann-Lioville elle est $\dfrac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.



• Graphiquement, on peut dire que le chemin suit pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann Liouville) comme le montre la figure, c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.

2.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

2.5.1 1. Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}\left(\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right)=\lambda D^{\alpha}f\left(t\right)+\mu D^{\alpha}g\left(t\right). \tag{2.45}$$

2.5.2 2. La règle de Leibniz

Pour n entier on a

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(f(t)g(t)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\left(t\right)g^{(n-k)}(t).$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^{p}\left(f\left(t\right)g\left(t\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}f^{(k)}\left(t\right)D^{(p-k)}g\left(t\right)+R_n^p(t), \tag{2.46}$$

où $n\geq p+1$ et

$$R_n^p(t)=\frac{1}{n!\Gamma\left(-p\right)}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{-p-1}g(\tau)d\tau\int_\tau^t f^{(n+1)}\left(\zeta\right)\left(\tau-\zeta\right)^n d\zeta,$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty}R_n^p(t)=0$.

-Si f et g sont continues dans $[a,t]$ ansi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^{p}\left(f\left(t\right)g\left(t\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}f^{(k)}\left(t\right)D^{(p-k)}g(t). \tag{2.47}$$

D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

2.6 Applications des dérivées fractionnaires

2.6.1 Champs d'application

Les applications de la dérivation fractionnaire dans les sciences physiques et les sciences de l'ingénieur relèvent des contributions scientifiques de ces dernières décennies, elle est utilisée comme outil de modélisation dans plusieurs domaines [47], en mécanique et en rhéologie. L'application des dérivées fractionnaires modélisant le comportement des matériaux, trouve une base théorique dans la théorie microstructurale de Rouse [36] qui s'appuie sur les lois de la thermodynamique Bagley et Torvik [5]. Dans ce mémoire on présente un type d'application en rhéologie.

2.6.2 Modèle viscoélastique à dérivées fractionnaires

En général, les modèles rhéologiques utilisés en viscoélasticité linéaire sont constitués de ressorts et d'amortisseurs. Les lois de comportement de ces éléments rhéologiques peuvent être généralisées à partir de l'utilisation des dérivées fractionnaires.

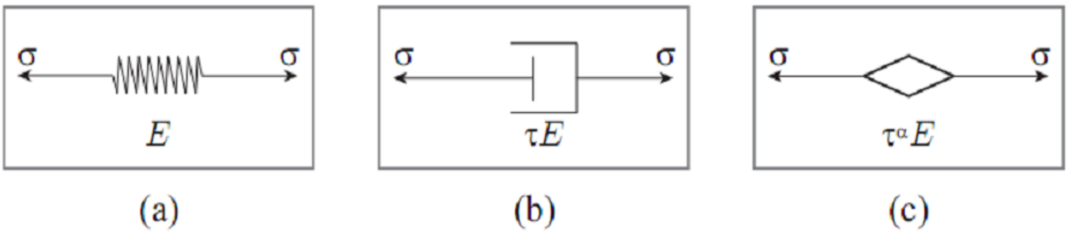


FIG. 2: Éléments rhéologiques de la viscoélasticité.

La loi de comportement associée à la réponse d'un élément élastique est décrite simplement par $\sigma = \tau^0 E\ D^0\varepsilon = E\ \varepsilon$, où τ est le temps de relaxation, E le module élastique et D^0 l'opérateur différentiel temporel d'ordre zéro. Cela caractérise le comportement d'un ressort (voir Fig.2 (a)).

La loi de comportement associée à la réponse d'un élément visqueux est donnée par $\sigma = \tau^1 E\ D^1 \varepsilon = \tau\ E\ \dot{\varepsilon}$, où τE correspond à la viscosité du matériau et D^1 à l'opérateur différentiel temporel d'ordre un. Cela caractérise le comportement d'un amortisseur (voir Fig.2 (b)).

Afin de généraliser les deux cas précédents, la loi de comportement linéaire peut s'écrire sous la forme

$$\sigma = \tau^\alpha E\ D^\alpha \varepsilon, \tag{2.48}$$

où D^α est l'opérateur différentiel temporel d'ordre fractionnaire, avec $0 \leq \alpha \leq 1$. L'élément rhéologique associé à l'équation (2.48) présente des caractéristiques intermédiaires entre celles du ressort (spring) et de l'amortisseur (dashpot), d'où la désignation de spring-pot (voir Fig. 2 (c)). Autrement dit, lorsque $\alpha = 0$, le comportement ne dépend que des caractéristiques des paramètres au temps présent tandis que pour $\alpha = 1$, il dépend des instants infiniment voisins. Pour α strictement compris entre 0 et 1, on a vu que la dérivée fractionnaire $D^\alpha \varepsilon$ d'ordre α dépend de toute l'évolution de la fonction $\varepsilon(t)$ dans le passé et on dit dans ce cas, il y a un effet de mémoire de paramètre α.

D'autre part, lorsque les solides viscoélastiques sont employés comme matériaux isolateurs ou amortisseurs de vibrations, la dérivation fractionnaire est un moyen approprié pour décrire fidèlement l'amortisseur dans les équations de mouvement. L'introduction de la dérivation fractionnaire dans la modélisation réduit le nombre de paramètres du modèle. On peut voir cela sur l'exemple du comportement contrainte-déformation d'un solide pour lequel l'equation de mouvement dans le cas d'un modèle entier est donnée par

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^{M} b_m \frac{d^m}{dt^m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^{N} E_n \frac{d^n}{dt^n} \varepsilon(t)\,,\ .....(a)$$

où σ et ε désignent respectivement la contrainte et la déformation, b_m, E_0, M, N et E_n sont des paramètres du modèle. Maintenant, en utilisant la dérivation fractionnaire, on n'a plus besoin que d'un seul terme de dérivation agissant respectivement sur la contrainte et la déformation. Ce qui produit un modèle compact à quatre ou cinq paramètres maximum, au lieu d'une dizaine dans le cas de l'équation (a)

$$(1 + bD_t^\alpha)\,\sigma(t) = (E_0 + E_1 D_t^\alpha)\,\varepsilon(t)\ ....\ (b)$$

Dans (b) les paramètres sont b, E_0, E_1 et $\alpha,$ Ce modèle reflète fidèlement les propriétés mesurées de plusieurs matériaux. Le bon comportement de cette modélisation fractionnaire s'explique notamment par le fait que les théories moléculaires "classique" produisent des relations entre contrainte et déformation contenant des puissances fractionnaires de la fréquence. des manipulations mathématiques de ces théories mettent ces relations sous forme de drivées fractionnaires (2.48).

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (commande robuste d'ordre non entier) était proposé par Oustaloup. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permet d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquence donnée, La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variante de cette commande ont vu le jour ($1^{ère}$, $2^{ème}$ et $3^{ème}$ générations). Et depuis, La commande d'ordre fractionnaire l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, l'application de la dérivation non entière est élargie à la théorie de la commande par Podlubny qui a proposé le régulateur $\beta\alpha DPI$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre α et une dérivation fractionnaire d'ordre $\beta.$

2.6.3 Interprétation physique de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture. Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse du conducteur et l'horloge qui affiche le temps τ.

Cependant le temps τ affiché par l'horloge est incorrect.

Nous supposons que la relation entre le temps incorrect τ (affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact) et le temps exact T est donnée par la fonction connue $g_t(\tau)$ telle que : $T = g_t(\tau)$ et

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)}\left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, le vrai intervalle de temps est $dT = dg_t(\tau)$.

Le conducteur A représente le conducteur de la voiture, ignorant l'erreur de l'horloge, calcule la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique :

$$S_A(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau .... (c)$$

Un observateur O, lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrect τ au temps exact, calcule la distance réellement parcourue par la voiture :

$$S_O(t) = \int_0^t v(\tau)\, dg_t(\tau) = I^\alpha v(t) ... (d)$$

avec

$$I^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} v(\tau)\, d\tau.$$

L'intégrale donnée par l'équation (c) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures :

Une mesure correcte de la vitesse et une mesure incorrecte du temps. L'intégrale factionnaire de Riemann-Liouville donnée par l'équation (d) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour lequel nous avons enregistré ses valeurs locales de la vitesse $v(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle) et la valeur local du temps τ (temps individuel), sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donné par la fonction $g_t(\tau)$.

La fonction $g_t(\tau)$ décrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de τ, mais aussi du paramètre t qui représente la dernière valeur mesuré du temps individuel de l'objet mobile. Quand t change, l'intervalle de temps cosmique change également.

La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet un corps mobile change sa position dans l'espace-temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de mouvement. Par conséquent, l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_O(t)$ parcourue par cet objet mobile.

En résumé, l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville de la vitesse individuelle $v(\tau)$, d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel τ, et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation $(*)$ représente la véritable distance $S_O(t)$ parcourue par cet objet.

2.6.4 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans la section précédente nous avons interprété l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville comme étant la vraie distance $S_O(t)$ parcourue par un objet mobile, pour lequel le rapport entre son temps individuel τ et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue $T = g_t(\tau)$.

On utilisant les propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaire, nous pouvons exprimer l'expression de la vitesse individuelle $v(t)$ à partir de la véritable distance parcourue $S_O(t)$.

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la vraie distance $S_O(t)$ parcourue par le mobile permet de donner l'expression de la vitesse $v(t)$: $v(t) = D^{\alpha} S_O(t)$ avec

$$D^{\alpha} S_O(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{S_O(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

et $0 \leq \alpha \leq 1$.

Nous pouvons aussi dériver la valeur de la véritable distance par rapport la variable de temps t qui donne la relation entre la vitesse $v_O(t) = S'_O(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant O et la vitesse individuelle $v(t)$:

$$v_O(t) = \frac{d}{dt} I^{\alpha} v(t) = D^{1-\alpha} v(t).$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $(1-\alpha)$, de la vitesse individuelle $v(t)$ est égale à la vitesse de vue de l'observateur indépendant $v_O(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \left[t^\alpha - (t - \tau)^\alpha \right].$$

Pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident : $v_O(t) = v(t)$.

Chapitre 3

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Résumé

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie) puis le théorème du point fixe de Schauder (qui est la "généralisation" en dimension infinie) Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii. .

3.1 Théorème du point fixe du type Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

3.1.1 Théorème de l'application contractante

Définition 3.1 *Soit (M, d) un espace métrique complet et l'application $T : M \to M$, On dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de M, l'inégalité*

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq k\left(d\left(x, y\right)\right). \tag{3.1}$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorème 3.1 *(Théorème du point fixe de Banach(1922))* [59]

Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus on a

$$\begin{aligned} &\text{Si } x_0 \in M \quad \text{et } x_n = T\left(x_{n-1}\right), \qquad (3.2)\\ &\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{et } d\left(x_n, x\right) \leq k^n \left(1-k\right)^{-1} d\left(x_1, x_0\right) \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

x étant le point fixe de T.

Remarque 3.1 $\star$ *Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe.*

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p\left(T\left(x\right)\right) = T\left(T^p\left(x\right)\right) = T\left(x\right)$ ce qui convient à dire que $T\left(x\right)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T\left(x\right) = x$

Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

Remarque 3.2 $\star$ *Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :*

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : B \to M$ telle que

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq kd\left(x, y\right) \quad \forall x, y \in B \quad \text{et } k < 1, \tag{3.3}$$

où

$$B = \{x \in M, d(x, z) < \varepsilon\} \quad z \in M \quad \text{et} \quad \varepsilon > 0. \tag{3.4}$$

Si $d(z, T(z)) < \varepsilon\,(1 - k)$, alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

3.1.2 Extension du principe de l'application contractante

Extension de Boyd et Wong Cette extension consiste à remplacer la contraction par la φ -contraction dont nous donnons la définition :

Définition 3.2 *Soit M un espace métrique et T une application de M dans M. On dit que T est une φ -contraction, s'il existe une application φ semi-continue supérieurement de $[0, \infty)$ dans $[0, \infty)$ avec $\varphi\left(r\right) < r$ pour $r > 0$ telle que :*

$$\forall x, y \in M \quad , \quad d(T(x), T(y)) \leq \varphi\ \left(d(x, y)\right). \tag{3.5}$$

Le résultat suivant va assurer l'existence d'un unique point fixe pour une telle application :

Théorème 3.2 [8]

Toute φ –contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Remarque 3.3 *La contraction est un cas particulier de la φ-contraction (il suffit de prendre $\varphi\left(r\right) = k\ r$ pour tout $r \geq 0, 0 \leq k < 1$).*

Si on remplace l'hypothèse que soit une contraction par l'hypothèse plus faible qui est :

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y). \tag{3.6}$$

T n'a pas de point fixe.

En compensant par d'autres hypothèses supplémentaires, Edelstein a obtenu le résultat suivant :

Extension d'Edelstein

Théorème 3.3 [19]

Soit (M, d) *un espace métrique complet et* $T : M \to M$ *une application telle que*

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad , \forall x, y \in M \quad , x \neq y. \tag{3.7}$$

Supposons qu'il existe $y \in M$ *telle que la suite* $\{x_n\}$ *définie par* $\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{cases}$,

possèdent une sous suite $\{x_{n_j}\}$ *avec* $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x \in M$*. Alors* x *est l'unique point fixe de* T*.*

- Le résultat précédent (d'Edelstein) a une importante conséquence qu'est :

Théorème 3.4 *Soit* (M, d) *un espace métrique complet et* $T : M \to M$ *une application telle que*

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad , \forall x, y \in M \quad , x \neq y. \tag{3.8}$$

En plus, supposons que $T : M \to K$ *où* K *est un sous ensemble compact de* M*, alors* T *possède un unique point fixe dans* M*.*

3.2 Théorème du point fixe du type Brouwer-Schauder

3.2.1 Le théorème du point fixe de type Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace euclidien : Toute application T continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Il peut encore être un peu plus général :

Convexe compact : Toute application T continue d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.

a) Théorème de Brouwer en dimension un : On note $[a, b]$ le domaine de définition de T. L'application T est continue et à valeurs dans le même segment. Dire que cette application admet un point fixe, revient à dire que son graphe croise celui de l'application définie sur $[a, b]$, qui a x associe x.

Une démonstration n'est pas difficile à établir. Considérons l'application continue

$$Fx = Tx - x, \tag{3.9}$$

elle est positive en a, négative en b. Le théorème de Bolzano, qui est un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'application F possède un zéro dans $[a, b]$, ce zéro de F est un point fixe de T.

En dimension deux, un raisonnement intuitif permet de montrer que le résultat est probablement vrai. La démonstration est néanmoins plus délicate.

b) Théorème de Brouwer en dimension deux Si K le domaine de définition de T est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, K est semblable à une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers K. L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire si $h = T \circ \phi, h(x) = x.$ Autrement dit, on peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact K, l'ensemble $[-1,1] \times [-1,1]$, sans perte de généralité.

Si l'on définit la fonction F comme suit :

$$\begin{aligned} F : [-1,1] \times [-1,1] \quad & \rightarrow [-1,1] \times [-1,1] \\ x \quad & \mapsto F(x) = h(x) - x \end{aligned} . \tag{3.10}$$

Cela revient à montrer que la fonction atteint le vecteur nul sur $[-1,1] \times [-1,1]$.

Si F_k, pour $k = 1,2$, sont les deux fonctions cordonnées de F, cela revient à montrer l'existence d'un point x_0, telles que F_1et F_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0.

La fonction F_1 est une fonction de $[-1,1] \times [-1,1]$ dans $[-1,1]$ Sur $\{-1\}\times$ $[-1,1]$, elle est positive, en revanche sur $\{1\} \times [-1,1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui part d'un point $[-1,1] \times \{1\}$ pour finir sur un point de $[-1,1] \times \{-1\}$.

Le même raisonnement appliqué à F_2 laisse penser que la courbe de niveauu 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point $\{-1\}$ $\times [-1,,1]$ pour terminer sur un point de $\{1\} \times [-1,1]$.

Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $T \circ \phi$.

Remarque 3.4 - *Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de K est un point fixe de l'application identité.*

- Nous allons donner un résultat de Brouwer qu'on aura besoin dans la démonstration du théorème de Schauder.

Définition 3.3 *On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \rightarrow E$ possède un point fixe. On note par B_n la boule unité fermée de E^n.*

On a le résultat suivant :

Théorème 3.5 *La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Schauder a généralisé le résultat de Brouwer en dimension infinie.

3.2.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.6 [64]

Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Preuve. Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$,

on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon, \tag{3.11}$$

de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e. $K \subset \underset{1\leq j\leq p}{\cup} B\left(x_j, \delta\right)$.

Si on désigne $L := Vec\left(T\left(x_j\right)\right)_{1\leq j\leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définie la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \dfrac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}, \tag{3.12}$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B\left(x_j, \delta\right)$ et nulle en dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$,$\sum_{j=1}^{p} \psi_j\left(x\right) > 0$, on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k\left(x\right)}, \tag{3.13}$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Posant, pour $x \in K$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j). \tag{3.14}$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^*(car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).

Si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$,(d'après théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) [T(y) - T(x_j)]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$.

On a pour tout j

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) [T(y) - T(x_j)] \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, i,e y^* est un point fixe de T sur K. ■

Remarque 3.5 *De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes précités, en réduisant le problème d'existence à un problème de point fixe citons à titre d'exemple le théorème de Peano (voir* [59], [64]*).*

Théorème 3.7 *(théorème de Peano)*

Soit (a, b) *un point de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *, et* $f(t, y)$ *une fonction continue dans le voisinage de* (a, b) *, alors le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)) \\ y(a) & = b \end{cases}, \tag{3.17}$$

admet au moins une solution dans un voisinage de a.

Ici le problème revient à étudier l'existence d'un point fixe de l'opérateur $U : K \to K$ définit par :

$$Ux(t) = b + \int_a^t f(s, x(s))\, ds, \tag{3.18}$$

où $K \subset E$ compact et E l'espace des fonctions continues définies dans un certain voisinage de a.

Théorème 3.8 *(Théorème de Rothe)*[59]

Soit X *un espace normé,* K *une partie convexe fermée de* X *. Alors toute application compacte et continue de* K *dans* K *telle que* $T(\partial K) \subset K$ *admet un point fixe.*

Le résultat suivant est une autre conséquence du théorème de Schauder qui donne lieu à de nombreuses applications dans les équations aux dérivées partielles :

Théorème 3.9 *Soit* T *un opérateur compact de l'espace de Banach* X *dans lui-même. Supposons qu'il existe un réel* $r > 0$ *tel que l'égalité* $u = \sigma T u$ *implique* $\|u\| < r$*, où* $u \in X$ *,* $\sigma \in [0, 1]$*; alors* T *admet un point fixe dans* $B(0, r)$.

- Le théorème de Schauder reste vrai dans le cas des espaces localement convexes (e.l.c), nous allons le confirmer par les théorèmes suivants (voir [18][21]) :

Théorème 3.10 *(Théorème de Tychonoff et Singball)*

Soit E *un e.l.c, et* K *un compact convexe de* E, *alors toute application* T *continue de* K *dans* K *admet un point fixe.*

Théorème 3.11 *(Schauder 1930)*

Soit K un convexe, fermé, borné et non vide, $K \subset X$ tel que X est un espace de Banach. Soit $T : K \to K$ une application compacte. Alors, T admet un point fixe.

Théorème 3.12 [17]*(Théorème de l'alternative non linéaire de Leray Schauder)*

Soit X un espace de Banach, Ω un sous ensemble ouvert borné de X, avec $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to X$ une application compact. alors

1)T a un point fixe sur $\bar{\Omega}$ ou bien

2) il existe $\lambda \in (0,1)$ et $u \in \partial\Omega$ tel que : $x = \lambda T(x)$

On a vu plus haut deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le théorème de Schauder et le principe de l'application contractante de Banach, Krasnoselskii a combiné ces deux théorème $([42], [60], [58])$.

3.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 3.13 *Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé, borné et convexe. U, V sont deux applications de D dans X telles que :*

U est une contraction (de constante k) et V est compacte et continue.$Ux + Vy \in D$ $\forall x, y \in D$, Alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Vx = x$.

Preuve. *Soit y fixé dans D, comme U est une contraction, l'équation $x = Ux + Vy$ admet une solution unique x dans D.*

On définit l'application

$$\begin{aligned} &L : D \to D \\ &Ly = x \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ &Ly = ULy + Vy \quad , \quad (y \in D) \quad (*) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Il est clair que $LD \subset D$. On va montrer que L est compacte et continue et d'après le théorème de Schauder, on pourra conclure qu'il existe $y \in D$ tel que $Ly = y$, d'où $Uy + Vy = y$.

Soit y_n un point arbitraire de D, alors d'après $(*)$:

$$\begin{array}{ll} Ly_n = ULy_n + VLy_n & \\ Ly - Ly_n = & ULy - ULy_n + Vy - Vy_n \\ \|Ly - Ly_n\| \leq & \|ULy - ULy_n\| + \|Vy - Vy_n\| \end{array}, \tag{3.20}$$

et puisque U est une contraction on a :

$$\begin{array}{ll} \|Ly - Ly_n\| \leq & k\,\|Ly - Ly_n\| + \|Vy - Vy_n\| \\ \|Ly - Ly_n\| \leq & \frac{1}{1-k}\,\|Vy - Vy_n\| \qquad (**) \end{array}, \tag{3.21}$$

d'où la continuité de L. Reste à montrer que LD est relativement compacte, en effet, comme VD est relativement compacte,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\,(1-k)\,\varepsilon \text{ réseau } Vy_1...Vy_n, \tag{3.22}$$

c'est à dire les boules

$$B\left(Vy_k, (1-k)\,\varepsilon\right)(1 \leq k \leq n), \tag{3.23}$$

telle que

$$VD \subset \bigcup_{k=1}^{n} B\left(Vy_k, (1-k)\,\varepsilon\right). \tag{3.24}$$

Alors de $(**)$ $Ly_1...Ly_n$ est un ε réseau de LD, ce qui achève la démonstration. ■

Notons que si $U = 0$, le théorème se résume au théorème de Banach, si $V = 0$ alors le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

Théorème 3.14 [42]

Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouvers de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $T : K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right) \to K$ un opérateur complètement continu tel que :

a)$\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$.ou bien

b)$\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Alors T possède un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.

Chapitre 4

Etude de l'existence et la positivité de la solution d'un problème fractionnaire

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Ils peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie tels que le contrôle, milieux poreux, électrochimie, ... Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées entières. En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, on peut voir les références $[1-4, 11, 12]$.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution positive d'un problème aux limites fractionnaire. Nous y abordons ces résultats en appliquant le théorème du point fixe.

4.1 Présentation du problème

On s'intéresse dans ce chapitre à un problème fractionnaire $(P1)$ engendré par l'équation suivante

$$^{c}D_{a+}^{q}u\left(t\right) \quad = f(t,u(t),^{c}D_{a+}^{\sigma}u\left(t\right)) \qquad 0<t<1, \tag{4.1}$$

à laquelle on associe les conditions

$$u(0)=u''(0)=0, u'(\eta)=\alpha u''(1) \tag{4.2}$$

où $^{c}D_{a+}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

$f:\ [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction donnée, $2<q<3$, $0<\sigma<1$, $0<\eta<1$.

Lemme 4.1 $[39]$. *Pour $\alpha>0$ et $g\left(t\right)\in C\left[0,1\right]$, l'équation fractionnaire homogène*

$$^{c}D_{a+}^{\alpha}g\left(t\right)=0 \tag{4.3}$$

possède une solution

$$g\left(t\right)=c_{1}+c_{2}t+c_{3}t^{2}+...+c_{n}t^{n-1}, \tag{4.4}$$

où $c_{i}\in\mathbb{R}, i=0,...,n$ et $n=[\alpha]+1$,$([\alpha]$ est la partie entière de $\alpha)$.

On note par $L^{1}\left([0,1]\,,\mathbb{R}\right)$ l'espace de Banach des fonctions Lebesgue intégrable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|y\|=\int\limits_{0}^{1}|y\left(t\right)|\,dt.$

Commençant d'abord par la résolution du problème auxiliaire

Lemme 4.2 *Soient $2<q<3$, $0<\sigma<1$ et $y\in C\left[a,b\right]$. La solution unique du problème fractionnaire suivant*

$$\begin{cases} ^{c}D_{a+}^{q}u\left(t\right)=y\left(t\right), & 0<t<1 \\ u\left(0\right)=u''(0)=0, & u'(\eta)=\alpha u''(1) \end{cases} \tag{4.5}$$

est donnée par

$$u\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(q-2\right)}\left[\int\limits_{0}^{1}G\left(t,s\right)y\left(s\right)ds-\frac{t}{q-2}\int\limits_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)^{q-2}y\left(s\right)ds\right]. \tag{4.6}$$

Où

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(t-s)^{q-1}}{(q-2)(q-1)}+\dfrac{t\alpha}{(1-s)^{3-q}}, & s\leq t\\ \dfrac{t\alpha}{(1-s)^{3-q}}, & s>t\end{cases}. \tag{4.7}$$

Preuve. Appliquant les lemmes 4.1, on trouve

$$u(t)=I_{0+}^{q}y(t)+c_1+c_2t+c_3t^2, \tag{4.8}$$

par une dérivation des deux membres de (4.8), on trouve

$$\begin{aligned} u'(t) &= I_{0+}^{q-1}y(t)+c_2+c_3t \\ u''(t) &= I_{0+}^{q-2}y(t)+c_3 \end{aligned}. \tag{4.9}$$

Or, la première condition dans (4.5) implique que $c_1=c_3=0$, tandis que la seconde ramène à

$$c_2=\alpha\ \ I_{0+}^{q-2}y(1)-I_{0+}^{q-1}y(\eta).$$

Substituant c_1,c_2,c_3 dans (4.8), on obtient

$$u(t)=I_{0+}^{q}y(t)+t\left(\alpha\ \ I_{0+}^{q-2}y(1)-I_{0+}^{q-1}y(\eta)\right), \tag{4.10}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t\frac{y(s)}{(t-s)^{1-q}}ds+\frac{t\alpha}{\Gamma(q-2)}\int_0^1\frac{y(s)}{(1-s)^{3-q}}ds \\ &-\frac{t}{\Gamma(q-1)}\int_0^\eta\frac{y(s)}{(\eta-s)^{(2-q)}}ds, \end{aligned} \tag{4.11}$$

i.e.,

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)\,y(s)\,ds-\frac{t}{q-2}\int_0^\eta(\eta-s)^{q-2}y(s)\,ds\right], \tag{4.12}$$

où G est définie par (4.7). ■

4.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section on démontre l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace de Banach E constitué pour les fonctions $u \in C[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|u\| = \max_{0\leq t\leq 1} |u| + \max_{0\leq t\leq 1} |{}^cD_{0+}^{\sigma}u|$$

On a ${}^cD_{0+}^{\sigma}u \in C[0,1]$ si $0<\sigma<1$. On note par E^+ l'ensemble défini par

$$E^+ = \{u \in E, u(t) \geq 0, t \in [0,1]\}.$$

Tout le long de cette section, on supposera que $f \in C([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on définit l'operateur intégral $T : E \to E$ par

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 G(t,s) f\left(s,u(s),{}^c D_{0+}^{\sigma}u(s)\right)ds \right. \\ &\left. -\frac{t}{q-2}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{q-2} f\left(s,u(s),{}^c D_{0+}^{\sigma}u(s)\right)ds\right]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Alors, on a le lemme suivant

Lemme 4.3 *La fonction $u \in E$ est solution du problème fractionnaire BVP $(P1)$ si et seulement si $Tu(t) = u(t)$, pour tout $t \in [0,1]$.*

Théorème 4.1 *Supposant qu'il existe des fonctions non négatives h,g $\in L^1([0,1],\mathbb{R}_+)$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a*

$$\begin{aligned} &|f(t,x,\bar{x}) - f(t,y,\bar{y})| \leq g(t)|x-y| + h(t)|\bar{x}-\bar{y}|, \\ &C_g + C_h < 1 \ \text{ et } A_g + A_h < (1-\sigma)\Gamma(1-\sigma) \end{aligned}, \tag{4.14}$$

où

$$\begin{aligned} C_g &= \left\|I_{0+}^{q-1}g\right\|_{L^1} + |\alpha| I_{0+}^{q-2}g(1) + I_{0+}^{q-1}g(\eta) \\ C_h &= \left\|I_{0+}^{q-1}h\right\|_{L^1} + |\alpha| I_{0+}^{q-2}h(1) + I_{0+}^{q-1}h(\eta) \end{aligned} \tag{4.15}$$

et

$$\begin{aligned} A_g &= I_{0^+}^{q-1}\left(g(1)+g(\eta)\right)+|\alpha|\, I_{0^+}^{q-2} g(1) \\ A_h &= I_{0^+}^{q-1}\left(h(1)+h(\eta)\right)+|\alpha|\, I_{0^+}^{q-2} h(1), \end{aligned}, \tag{4.16}$$

alors, le problème fractionnaire BVP $(P1)$ admet une solution unique $u \in E$.

Pour la preuve du théorème 4.1, on va utiliser la propriété de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Lemme 4.4 *soit $q > 0, f \in L_1([a,b], \mathbb{R}_+)$. Alors, pour tout $t \in [a,b]$ on a*

$$I_{0^+}^{q+1} f(t) \leq \left\| I_{0^+}^{q} f \right\|_{L^1}. \tag{4.17}$$

On va prouver maintenant le théorème 4.1.

Preuve. On va transformer le problème aux limites fractionnaire à un problème de point fixe. D'après le lemme 4.3, le problème fractionnaire $(P1)$ possède une solution si seulement si l'opérateur T admet un point fixe dans E.

Commençant à prouver que T est une contraction. Pour cela, soit $u, v \in E$, alors

$$\begin{aligned} Tu(t)-Tv(t) &= \frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 G(t,s)\left(f\left(s,u(s),{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(s)\right)-f\left(s,v(s),{}^c D_{0^+}^{\sigma} v(s)\right)\right) ds\right. \\ &\left.-\frac{t}{(q-2)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{q-2}\left(f\left(s,u(s),{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(s)\right)-f\left(s,v(s),{}^c D_{0^+}^{\sigma} v(s)\right)\right) ds\right] \\ &= I_{0^+}^{q}\left(\left(f\left(t,u(t),{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(t)\right)-f\left(t,v(t),{}^c D_{0^+}^{\sigma} v(t)\right)\right)\right) \\ &+t\alpha I_{0^+}^{q-2}\left(f\left(1,u(1),{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(1)\right)-f\left(1,v(1),{}^c D_{0^+}^{\sigma} v(1)\right)\right) \\ &-t I_{0^+}^{q-2}\left(f\left(\eta,u(\eta),{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(\eta)\right)-f\left(\eta,v(\eta),{}^c D_{0^+}^{\sigma} v(\eta)\right)\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

A l'aide du (4.14), on peut avoir

$$\begin{aligned} |Tu(t)-Tv(t)| &\leq \max_{0\leq t\leq 1}|u(t)-v(t)|\left[I_{0^+}^{q} g(t)+|\alpha|\, I_{0^+}^{q-2} g(1)+I_{0^+}^{q-1} g(\eta)\right] \\ &+\max_{0\leq t\leq 1}\left|{}^c D_{0^+}^{q} u(t)-{}^c D_{0^+}^{q} v(t)\right|\left[I_{0^+}^{q} h(t)+|\alpha|\, I_{0^+}^{q-2} h(1)+I_{0^+}^{q-1} h(\eta)\right], \end{aligned} \tag{4.19}$$

de plus, lemme 4.4 permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tv(t)| &\leq \|u-v\| \left[\left\| I_{0+}^{q-1} g \right\| + |\alpha| I_{0+}^{q-2} g(1) + I_{0+}^{q-1} g(\eta) \right. \\
&\left. + \left\| I_{0+}^{q-1} h \right\| + |\alpha| I_{0+}^{q-2} h(1) + I_{0+}^{q-1} h(\eta) \right] \\
&\leq \|u-v\| (C_g + C_h),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

utilisant (4.14) on arrive à écrire

$$|Tu(t) - Tv(t)| < \frac{1}{2} \|u-v\|. \tag{4.21}$$

D'autre part, on a

$${}^{c}D_{0+}^{\sigma} Tu(t) -{}^{c} D_{0+}^{\sigma} Tv(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^t \frac{(T'u)(s) - (T'v)(s)}{(t-s)^{\sigma}} ds, \tag{4.22}$$

où

$$\begin{aligned}
(T'u)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q-2)} \left[\int_0^1 G_1(t,s) f(s, u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds \right. \\
&\left. - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} f\left(s, u(s), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(s)\right) ds \right]
\end{aligned}$$

et

$$G_1(t,s) = \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{q-2}}{(q-2)} + \dfrac{\alpha}{(1-s)^{3-q}} & s \leq t \\ \dfrac{\alpha}{(1-s)^{3-q}} & t \leq s \end{cases}. \tag{4.23}$$

De plus

$$\begin{aligned}
&{}^{c}D_{0+}^{\sigma} Tu(t) - {}^{c}D_{0+}^{\sigma} Tv(t) = \frac{1}{\Gamma(q-2)\Gamma(1-\sigma)} \times \\
&\left[\int_0^t (t-s)^{-\sigma} \left(\int_0^1 G_1(s,r) \left(f\left(r, u(r), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(r)\right) - f\left(r, v(r), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} v(r)\right)\right) dr \right. \right. \\
&\left.\left. - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - r)^{q-2} \left(f(r, u(r), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u(r)) - f(r, v(r), {}^{c}D_{0+}^{\sigma} v(r)) \right) dr \right) ds \right].
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Tenant compte de (4.14), on a

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tu\left(t\right)-\ {}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tv\left(t\right)\right|\leq\frac{1}{\Gamma\left(q-2\right)\Gamma\left(1-\sigma\right)}\times\\
&\left[\left(t-s\right)^{-\sigma}\int_{0}^{t}\left(\max_{0\leq t\leq 1}\left|u-v\right|\left(\int_{0}^{1}G_{1}\left(s,r\right)g(r)dr-\int_{0}^{\eta}\frac{\left(\eta-r\right)^{q-2}}{\left(q-2\right)}g(r)dr\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\max_{0\leq t\leq 1}\left|{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u-{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}v\right|\left(\int_{0}^{1}G_{1}\left(s,r\right)h(r)dr-\int_{0}^{\eta}\frac{\left(\eta-r\right)^{q-2}}{\left(q-2\right)}h(r)dr\right)\right)\right]ds.
\end{aligned}\tag{4.25}$$

Estimant le terme

$$\left(\int_{0}^{1}G_{1}\left(s,r\right)g(r)dr-\int_{0}^{\eta}\frac{\left(\eta-r\right)^{q-2}}{\left(q-2\right)}g(r)dr\right),$$

on a,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{0}^{1}G_{1}\left(s,r\right)g(r)dr-\int_{0}^{\eta}\frac{\left(\eta-r\right)^{q-2}}{\left(q-2\right)}g(r)dr\right| &=\left|\Gamma\left(q-2\right)\left[I_{0^+}^{q-1}g(s)+\alpha I_{0^+}^{q-2}g(1)-I_{0^+}^{q-1}g(\eta)\right]\right|\\
&\leq\Gamma\left(q-2\right)\left[I_{0^+}^{q-1}g(s)+\alpha I_{0^+}^{q-2}g(1)+I_{0^+}^{q-1}g(\eta)\right]\\
&\leq\Gamma\left(q-2\right)A_{g},
\end{aligned}\tag{4.26}$$

par conséquent (4.25) devient :

$$\left|{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tu\left(t\right)-\ {}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tv\left(t\right)\right|\leq\frac{\left\|u-v\right\|}{\left(1-\sigma\right)\Gamma\left(1-\sigma\right)}\left(A_{g}+A_{h}\right),\tag{4.27}$$

et en vertu de (4.14), il s'ensuit que

$$\left|{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tu\left(t\right)-\ {}^{c}D_{0^+}^{\sigma}Tv\left(t\right)\right|<\frac{1}{2}\left\|u-v\right\|,\tag{4.28}$$

en se basant sur (4.21)-(4.28), on conclut que

$$\left\|Tu-Tv\right\|<\left\|u-v\right\|.\tag{4.29}$$

Finalement et grâce au principe de la contraction, l'unicité de la solution du problème fractionnaire $(P1)$ est assurée. ■

Donnons maintenant le résultat d'existence pour le problème fractionnaire $(P1)$.

Théorème 4.2 *Supposons que $f(t,0,0) \neq 0$ et qu'il existe trois fonctions non-négatives $k, h, g \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$, ϕ, $\psi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $r > 0$ tels que*

$$\begin{aligned} &|f(t,x,\bar{x})| \leq k(t)\psi(|x|) + h(t)\phi(|x|) + g(t), \quad a.e.\,(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \\ &(\psi(r) + \phi(r) + 1)\left(C_1 + \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)}\right) < r, \end{aligned} \tag{4.30}$$

où

$$C_1 = \max_{0 \leq t \leq 1}\{C_k, C_h, C_g\} \text{ et } C_2 = \max_{0 \leq t \leq 1}\{A_k, A_h, A_g\}.$$

Les constants C_h, C_g, A_h, A_g sont définis dans le théorème 4.1 et

$$\begin{aligned} A_k &= I_{0+}^{q-1}(k(1) + k(\eta)) + + |\alpha| I_{0+}^{q-2} k(1) \\ C_k &= \left\|I_{0+}^{q-1} k\right\|_{L^1} + |\alpha| I_{0+}^{q-2} k(1) + I_{0+}^{q-1} k(\eta). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Alors, le problème fractionnaire $(P1)$ admet au moins une solution non triviale u^* dans E.

Pour la démonstration, on va appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Shauder (le théorème 3.12).

Preuve. Premièrement on montre que T est complètement continu. Il est claire de voir que T est continu puisque f et G sont continus. Soit $B_r = \{u \in E, \|u\| \leq r\}$ un sous ensemble de E.

on a $T(B_r)$ est relativement compact, en effet

(i) Pour $u \in B_r$, utilisant (4.30), on trouve

$$\begin{aligned} |Tu(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 |G(t,s)| \left[k(s)\psi(|u(s)|) + h(s)\phi\left(\left|{}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)\right|\right) + g(s)\right] ds \right. \\ & \left. + \frac{t}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} \left[k(s)\psi(|u(s)|) + h(s)\phi\left(\left|{}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)\right|\right)\right]\right]. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Comme ϕ et ψ sont croissantes, alors (4.32) implique que

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 |G(t,s)|\left[k(s)\psi(\|u\|)+h(s)\phi(\|u\|)+g(s)\right]ds\right. \\ &\left.+\frac{t}{(q-2)}\int_0^\eta (\eta-s)^{q-2}\left[k(s)\psi(\|u\|)+h(s)\phi(\|u\|)\right]\right] \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q-2)}\left[\int_0^1 |G(t,s)|\left[k(s)\psi(r)+h(s)\phi(r)+g(s)\right]ds\right. \\ &\left.+\frac{t}{(q-2)}\int_0^\eta (\eta-s)^{q-2}\left[k(s)\psi(r)+h(s)\phi(r)\right]ds\right], \end{aligned} \tag{4.33}$$

par une technique sémilaire pour avoir (4.21), on obtient

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq \psi(r)\left[\left\|I_{0^+}^{q-1}k\right\|_{L^1}+|\alpha|\,I_{0^+}^{q-2}k(1)+I_{0^+}^{q-1}k(\eta)\right] \\ &+\phi(r)\left[\left\|I_{0^+}^{q-1}h\right\|_{L^1}+|\alpha|\,I_{0^+}^{q-2}h(1)+I_{0^+}^{q-1}h(\eta)\right] \\ &+\left\|I_{0^+}^{q-1}g\right\|_{L^1}+|\alpha|\,I_{0^+}^{q-2}g(1)+I_{0^+}^{q-1}g(\eta) \\ &\leq C_k\psi(r)+C_h\phi(r)+C_g \end{aligned} \tag{4.34}$$

donc

$$|Tu(t)| \leq C_1(\psi(r)+\phi(r)+1). \tag{4.35}$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
|T'u(t)| \quad &= \left| \frac{1}{\Gamma(q-2)} \left[\int_0^1 G_1(t,s) f(s,u(s),{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(s)) ds \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} f\left(s,u(s),{}^c D_{0^+}^{\sigma} u(s)\right) ds \right] \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q-2)} \times \left| \int_0^1 G_1(t,s) \left[k(s) \psi(r) + h(s) \phi(r) + g(s) \right] ds \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} \left[k(s) \psi(r) + h(s) \phi(r) \right] ds \right| \qquad (4.36) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q-2)} \left[\psi(r) \left| \int_0^1 G_1(t,s) k(s) ds - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} k(s) ds \right| \right. \\
&\qquad + \phi(r) \left| \int_0^1 G_1(t,s) h(s) ds - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} h(s) ds \right| \\
&\qquad \left. + \left| \int_0^1 G_1(t,s) g(s) ds - \frac{1}{(q-2)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{q-2} g(s) ds \right| \right],
\end{aligned}
$$

$$
|Tu(t)'| \leq A_k \psi(r) + A_h \phi(r) + A_g, \tag{4.37}
$$

$$
|T'u(t)| \leq C_2 \left(\psi(r) + \phi(r) + 1 \right). \tag{4.38}
$$

Utilisant ensuite (4.26), on voit que

$$
\begin{aligned}
\left| {}^c D_{0^+}^{q} Tu(t) \right| \quad &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^t \frac{A_k \psi(r) + A_h \phi(r) + A_g}{(t-s)^{\sigma}} ds \\
&\leq \frac{C_2}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^t \frac{\psi(r) + \phi(r) + 1}{(t-s)^{\sigma}} ds \qquad (4.39) \\
&\leq \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \left(\psi(r) + \phi(r) + 1 \right).
\end{aligned}
$$

En combinant (4.35) et (4.39) on obtient

$$
\|Tu\| = \left(\left(\psi(r) + \phi(r) + 1 \right) \right) \left(C_1 + \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \right). \tag{4.40}
$$

Par la suite $T(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T\left(B_r\right)$ est équicontinu pour tout $t_1, t_2 \in [0,1]\,, t_1 < t_2, u \in B_r$.

$$\begin{aligned} |Tu(t_1) - Tu(t_2)| &= \int_{t_1}^{t_2} |T'u(t)|\,dt \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(A_k\psi\left(r\right) + A_h\phi\left(r\right) + A_g\right)dt \\ &\leq \left(t_1 - t_2\right)\left(A_k\psi\left(r\right) + A_h\phi\left(r\right) + A_g\right). \end{aligned} \tag{4.41}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left|{}^cD^{\sigma}_{0^+}Tu\left(t_1\right) -{}^c D^{\sigma}_{0^+}Tu\left(t_2\right)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma\left(1-\sigma\right)}\int_0^{t_1}\frac{T'u\left(s\right)}{\left(t_1-s\right)^{\sigma}}ds - \frac{1}{\Gamma\left(1-\sigma\right)}\int_0^{t_2}\frac{T'u\left(s\right)}{\left(t_2-s\right)^{\sigma}}ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma\left(1-\sigma\right)}\int_0^{t_1}\left|\left(t_1-s\right)^{-\sigma} - \left(t_2-s\right)^{-\sigma}\right|\left|T'u\left(s\right)\right|ds \\ &+\frac{1}{\Gamma\left(1-\sigma\right)}\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{-\sigma}\left|T'u\left(s\right)\right|ds, \end{aligned} \tag{4.42}$$

d'après (4.38), il s'ensuit que :

$$\left|{}^cD^{q}_{0^+}Tu\left(t_1\right) -{}^c D^{q}_{0^+}Tu\left(t_2\right)\right| \leq \frac{C_2\left(\psi\left(r\right)+\phi\left(r\right)+1\right)}{\left(1-\sigma\right)\Gamma\left(1-\sigma\right)}\left(2\left(t_2-t_1\right)^{1-\sigma} + t_2^{1-\sigma} + t_1^{1-\sigma}\right). \tag{4.43}$$

passant à la limite lorsque $t_1 \to t_2$ dans ((4.41)) et (4.43), on trouve que $|Tu(t_1) - Tu(t_2)|$ et$\left|{}^cD^{q}_{0^+}Tu\left(t_1\right) -{}^c D^{q}_{0^+}Tu\left(t_2\right)\right|$ tendent vers 0. Par Conséquent $T\left(B_r\right)$ est équicontinu.

Une application du théorème d' Arzela-Ascoli mène à déduire que T est un opérateur complètement continu. Enfin, on applique le théorème de Leray-Schauder nonlineaire alternative pour prouver que T a au moins une solution non triviale dans E.

Soit $\Omega = \{u \in E : \|u\| < r\}$, et soit $u \in \partial\Omega$, telle que $u = \lambda Tu$, $0 < \lambda < 1$,

à l'aide de (4.35), on trouve que

$$|u(t)| = \lambda\,|Tu(t)| \leq |Tu(t)| \leq C_1\left(\psi\left(r\right)+\phi\left(r\right)+1\right). \tag{4.44}$$

Tenant compte (4.39), on obtient

$$\left|{}^cD^{q}_{0^+}u\left(t\right)\right| \leq \frac{C_2}{\left(1-\sigma\right)\Gamma\left(1-\sigma\right)}\left(\psi\left(r\right)+\phi\left(r\right)+1\right), \tag{4.45}$$

en vertu de (4.44), (4.45) et (4.30), on peut déduire que

$$\|u\| \leq (\psi(r) + \phi(r) + 1)\left(C_1 + \frac{C_2}{(1-\sigma)\Gamma(1-\sigma)}\right) < r, \tag{4.46}$$

ce qui contredit le fait que $u \in \partial\Omega$. grâce le théorème 3.12 implique que l'operateur T a un point fixe $u^* \in \Omega$, et par suite le problème fractionnaire $(P1)$ a une solution non triviale $u^* \in E$. ce qui achève la démonstration. ■

4.3 Existence de la solution positive

Dans cette section on cherche la positivité de la solution du problème fractionnaire $(P1)$. On impose les hypothèses suivantes

$(H1)$ $f(t,u,v) = a(t) f_1(u,v)$, où $a \in C([0,1],(0,\infty))$ et $f_1 \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$

$(H2)$ $0 < \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds < \infty$, où

$$\Psi(s) = \begin{cases} \alpha - \dfrac{(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)} & s \leq \eta \\ \alpha & s > \eta \end{cases}.$$

On peut réécrire la fonction u sous la forme

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 \frac{H(t,s)}{(1-s)^{3-q}} a(s) f_1\left(u(s), {}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)\right) ds,$$

où

$$H(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\left((t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q}\right)}{(q-2)(q-1)} + t\alpha - \dfrac{t(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)} & s \leq t, s \leq \eta \\ t\alpha - \dfrac{t(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)} & s > t, s \leq \eta \\ \dfrac{\left((t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q}\right)}{(q-2)(q-1)} + t\alpha & s \leq t, s > \eta \\ t\alpha & s > t, s > \eta \end{cases}. \tag{4.47}$$

Donc

$$^{c}D_{0^{+}}^{\sigma}u\left(t\right)=\int\limits_{0}^{1}\frac{H_{\sigma}\left(t,s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}}a\left(s\right)f_{1}\left(u\left(s\right),^{c}D_{0^{+}}^{\sigma}u\left(s\right)\right)ds,$$

où

$$H_{\sigma}\left(t,s\right)=\begin{cases}\dfrac{\left(\left(t-s\right)^{\left(q-\sigma\right)-1}\left(1-s\right)^{3-q}\right)}{\Gamma\left(q-\sigma\right)}+\dfrac{\alpha t^{1-\sigma}}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)} \\ \qquad -\dfrac{t^{1-\sigma}\left(\eta-s\right)^{q-2}\left(1-s\right)^{3-q}}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-1\right)} & s\leq t,s\leq\eta \\ \dfrac{\alpha t^{1-\sigma}}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)}-\dfrac{t^{1-\sigma}\left(\eta-s\right)^{q-2}\left(1-s\right)^{3-q}}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-1\right)} & s>t,s\leq\eta \\ \dfrac{\left(\left(t-s\right)^{\left(q-\sigma\right)-1}\left(1-s\right)^{3-q}\right)}{\Gamma\left(q-\sigma\right)}+\dfrac{\alpha t^{1-\sigma}}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)} & s\leq t,s>\eta \\ \dfrac{\alpha t^{1-\sigma}}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)} & s>t,s>\eta\end{cases}. \tag{4.48}$$

On outre, pour la suite donnant les propriétés de la fonction de Green $H\left(t,s\right).$

Lemme 4.5 *Si* $\alpha\geq\dfrac{1}{\left(q-2\right)}$*, alors* $H\left(t,s\right)$ *a les propriétés suivantes :*

(i) $H\left(t,s\right),H_{\sigma}\left(t,s\right)\in C\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right),0<H\left(t,s\right),0<H_{\sigma}\left(t,s\right)$ *pour tout* $t,s\in\left[0,1\right]$

(ii) $t\in\left[\tau,1\right]$*,* $\tau>0$*, alors, pour tout* $s\in\left[0,1\right]$ *on a*

$$0<\tau\Psi(s)\leq H(t,s)\leq2\Psi(s) \tag{4.49}$$

et

$$0<\frac{\tau}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)}\Psi\left(s\right)\leq H_{\sigma}(t,s)\leq\varsigma\Psi\left(s\right), \tag{4.50}$$

où

$$\varsigma=\left(\frac{\left(q-2\right)\Gamma\left(\sigma\right)+1}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)}\right).$$

Preuve. (i) Il est facile de voir que $H\left(t,s\right)\in C\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right)$, de plus, on a

$$t\alpha-\frac{t\left(\eta-s\right)^{q-2}\left(1-s\right)^{3-q}}{\left(q-2\right)}=\frac{t\left[\alpha\left(q-2\right)-\left(1-s\right)^{3-q}\left(\eta-s\right)^{q-2}\right]}{\left(q-2\right)}, \tag{4.51}$$

qui est positif si $\alpha\geq\dfrac{1}{\left(q-2\right)}$. Donc $H\left(t,s\right)$, est positive pour tout $t,s\in\left[0,1\right].$

(ii) Soit $t \in [\tau, 1]$, comme $\Psi(s) \neq 0$, on obtient

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} = \frac{\frac{\left((t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q}\right)}{(q-2)(q-1)} + t\alpha}{\alpha} \quad \text{for } \eta < s \leq t, \tag{4.52}$$
$$\leq \frac{(1-s)^2}{(q-1)} + t \leq 2$$

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} = \frac{\frac{\left((t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q}\right)}{(q-2)(q-1)} + t\alpha - \frac{t(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)}}{\alpha - \frac{(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)}} \quad \text{pour } s \leq t, s \leq \eta, \tag{4.53}$$
$$= \frac{(t-s)^{q-1}(1-s)^{3-q}}{(q-1)\left(\alpha(q-2) - (\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}\right)} + t \leq 2$$

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} = \frac{\left[\frac{t\alpha}{(1-s)^{3-q}} - \frac{t(\eta-s)^{q-2}}{(q-2)}\right]}{\left[\frac{\alpha}{(1-s)^{3-q}} - \frac{(\eta-s)^{q-2}}{(q-2)}\right]} = t \leq 2, \quad t < s \leq \eta, \tag{4.54}$$

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} = t \quad \leq 2 \quad t < s, \eta < s. \tag{4.55}$$

D'autre part, remarquant que

$$\frac{H(t,s)}{\Psi(s)} \geq t \geq \tau \qquad \begin{array}{c} \eta \leq s \leq t \\ s \leq t, s < \eta \\ t \leq s, s < \eta \\ t \leq s, \eta < s \end{array}, \tag{4.56}$$

comme $\Psi(s)$ est positive, on aboutit à :

$$0 < \tau\Psi(s) \leq H(t,s) \leq 2\Psi(s).$$

De la même façon, on peut montrer les estimations pour $H_\sigma(t,s)$. ■

Faisant appel maintenant à la définition de la solution positive

Définition 4.1 *Une fonction $u(t)$ est dite solution positive du problème fractionnaire (4.1) si $u(t) \geq 0$, pour $t \in [0,1]$.*

Lemme 4.6 *Si* $u \in E^{+}$ *et* $\alpha \geq \dfrac{1}{(q-2)}$ *alors, la solution du problème fractionnaire* $(P1)$ *est positive et vérifie*

$$\min_{t\in[\tau,1]} \left(u\left(t\right) +^{c} D_{0+}^{\sigma} u\left(t\right)\right) \geq \gamma \left\| u \right\|, \tag{4.57}$$

où

$$\gamma = \frac{2\tau}{\Gamma\left(\sigma\right)\left(2+\Gamma\left(q-2\right)\varsigma\right)}.$$

Preuve. Premièrement, on peut remarquer que sous les conditions sur u et f, la fonction ${}^{c}D_{0+}^{\sigma}u$ est positive, d'après la relation (4.49), on peut obtenir

$$u\left(t\right) \leq \frac{2}{\Gamma\left(q-2\right)} \int_{0}^{1} \Psi(s) \frac{a(s)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1(u(s),^{c} D_{0+}^{\sigma} u(s))ds. \tag{4.58}$$

De plus, (4.50) donne

$$\begin{aligned} {}^{c}D_{0+}^{\sigma} u\left(t\right) &= \int_{0}^{1} H_{\sigma}\left(t,s\right) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1\left(u\left(s\right),^{c} D_{0+}^{\sigma} u\left(s\right)\right) ds \\ &\leq \varsigma \int_{0}^{1} \Psi(s) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1(u(s),^{c} D_{0+}^{\sigma} u(s))ds. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Combinant (4.58) et (4.59), on trouve

$$\left\| u \right\| \leq \int_{0}^{1} \left(\frac{2}{\Gamma\left(q-2\right)} + \varsigma\right) \Psi(s) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1(u(s),^{c} D_{0+}^{\sigma} u(s))ds,$$

ce qui est equivalent à

$$\left\| u \right\| \leq \left(\frac{2}{\Gamma\left(q-2\right)} + \varsigma\right) \int_{0}^{1} \Psi(s) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1(u(s),^{c} D_{0+}^{\sigma} u(s))ds, \tag{4.60}$$

donc

$$\int_{0}^{1} \Psi(s) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1(u(s),^{c} D_{0+}^{\sigma} u(s))ds \geq \left(\frac{2}{\Gamma\left(q-2\right)} + \varsigma\right) \left\| u \right\|. \tag{4.61}$$

Tenant compte de (4.49), on aura pour tout $t \in [\tau, 1]$

$$u(t) \geq \frac{\tau}{\Gamma\left(q-2\right)} \int_{0}^{1} \Psi(s) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1(u(s),^{c} D_{0+}^{\sigma} u(s))ds. \tag{4.62}$$

Or

$$ {}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u\left(t\right) \quad \geq \frac{\tau}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)}\int\limits_{0}^{1}\Psi(s)\frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}}f_1\left(u\left(s\right),{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u\left(s\right)\right)ds, \tag{4.63}$$

en vertu de (4.62) et (4.63), on aboutit à

$$ \min_{t\in[\tau,1]}\left(u\left(t\right)+{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u\left(t\right)\right)\geq\frac{2\tau}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)}\int\limits_{0}^{1}\Psi(s)\frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}}f_1(u(s),{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u(s))ds. \tag{4.64}$$

Finalement, la relation (4.61) conduit à

$$ \min_{t\in(\tau,1)}\left(u\left(t\right)+{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u\left(t\right)\right)\geq\gamma\left\|u\right\|. \tag{4.65}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Introduisons maintenant les quantités A_0 et A_∞ :

$$ A_0=\lim_{(|u|+|v|)\to o}\frac{f_1\left(u,v\right)}{|u|+|v|},\qquad A_\infty=\lim_{(|u|+|v|)\to\infty}\frac{f_1\left(u,v\right)}{|u|+|v|}. \tag{4.66}$$

Le cas où $A_0=0$ et $A_\infty=\infty$ est appelé le cas super linéaire, tandis que le cas $A_0=\infty$, $A_\infty=0$ est appelé sous linéaire cas.

Maintenant, on est à la mesure de donner un résultat important :

Théorème 4.3 *Sous les hypothèses du lemme 4.6, le problème fractionnaire $(P1)$ admet au moins une solution positive dans le cas super linéaire ainsi que le cas sous linéaire.*

Preuve. La démonstration est basée sur le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii dans un cône (voir le théorème *3.14*, pour cela on définit le cône K par

$$ K=\left\{u\in E^+,\min_{t\in[\tau,1]}\left(u\left(t\right)+{}^{c}D_{0^+}^{\sigma}u\left(t\right)\right)\geq\gamma\left\|u\right\|\right\}. \tag{4.67}$$

Il est facile de voir que K est un sous ensemble de E non vide, fermé et convexe. Utilisant le lemme *4.6* on peut voir aussi que $TK\subset K$.

D'autre part, d'après le théorème 4.2, l'opérateur T est complètement continu dans E.

En premier temps considérant le cas super linéaire.

Comme $A_0=0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $R_1>0$, telle que

$$ f_1\left(u,v\right)\leq\varepsilon\left(|u|+|v|\right), \tag{4.68}$$

pour $0 < |u| + |v| \leq R_1$.

Soit $\Omega_1 = \{u \in E, \|u\| < R_1\}$, pour chaque $u \in K \cap \partial\Omega_1$, on a

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &= \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 H(t,s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds \\ &\leq \frac{2\varepsilon \|u\|}{\Gamma(q-2)} \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds, \end{aligned} \tag{4.69}$$

de plus

$$\begin{aligned} \left| {}^c D_{0+}^{\sigma} Tu(t) \right| &\leq \varsigma \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} f_1(u(s), {}^c D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds \\ &\leq \varsigma\varepsilon \|u\| \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Tenant compte de (4.69) et (4.70), on conclut que

$$\|Tu\| \leq \left(\frac{2}{\Gamma(q-2)} + \varsigma \right) \int_0^1 \varepsilon \|u\| \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds \tag{4.71}$$

donc

$$\|Tu\| \leq \left(\frac{2}{\Gamma(q-2)} + \varsigma \right) \varepsilon \|u\| \int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds, \tag{4.72}$$

et d'après la condition $(H2)$, on peut choisir ε tel que

$$\varepsilon \leq \frac{\Gamma(q-2)}{2 + \Gamma(q-2)\varsigma} \frac{1}{\int_0^1 \Psi(s) \frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}} ds}. \tag{4.73}$$

Enfin les relations (4.72) et (4.73) conduisent à $||Tu|| \leq ||u||$, pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Deuxièmement, de $A_\infty = \infty$, on déduit que pour tout $M > 0$, il existe $R_2 > 0$, telle que

$$f_1(u,v) \geq M(|u| + |v|) \text{ pour } |u| + |v| \geq R_2.$$

Posant

$$R = max\{2R_1, R_2/\gamma\}$$

et notant par Ω_2 l'ensemble ouvert définit par

$$\Omega_2 = \{u \in E, ||u|| < R\}.$$

Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors

$$\min_{t\in[\tau,1]} \left(u\left(t\right) +^{c} D_{0+}^{\sigma} u\left(t\right)\right) \geq \gamma \left\|u\right\| = \gamma R \geq R_2. \tag{4.74}$$

Utilisant le relation (4.49) et le lemme 4.6, on obtient

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\geq \frac{\tau}{\Gamma\left(q-2\right)} \int_0^1 \Psi\left(s\right) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1(u(s),^{c} D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds \\ &\geq \frac{\tau M \left\|u\right\|}{\Gamma\left(q-2\right)} \int_0^1 \Psi\left(s\right) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} ds. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Grâce à (4.63), on a

$$\begin{aligned} \left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma} Tu\left(t\right)\right| &\geq \frac{\tau}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)} \int_0^1 \Psi\left(s\right) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} f_1(u(s),^{c} D_{0+}^{\sigma} u(s)) ds \\ &\geq \frac{\tau}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)} M \left\|u\right\| \int_0^1 \Psi\left(s\right) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} ds, \end{aligned} \tag{4.76}$$

or, les relations (4.75) et (4.76) permettent d'écrire

$$|Tu(t)| + \left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma} Tu\left(t\right)\right| \geq \frac{\tau\left(1+\Gamma\left(\sigma\right)\right)}{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)} M \left\|u\right\| \int_0^1 \Psi\left(s\right) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} ds. \tag{4.77}$$

Choisissant M telle que

$$M \geq \frac{\Gamma\left(\sigma\right)\Gamma\left(q-2\right)}{\tau\left(1+\Gamma\left(\sigma\right)\right) \displaystyle\int_0^1 \Psi\left(s\right) \frac{a\left(s\right)}{\left(1-s\right)^{3-q}} ds}, \tag{4.78}$$

par conséquent

$$|Tu(t)| + \left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma} Tu\left(t\right)\right| \geq \left\|u\right\|,$$

enfin,

$$\left\|Tu\right\| \geq \left\|u\right\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2. \tag{4.79}$$

Le théorème 3.14 implique que T admet un point fixe dans $K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$ telle que $R_2 \leq ||u|| \leq R$.

Pour prouver le cas sous linéaire on procède d'une façon similaire au cas précédant. ■

Donnant maintenant des exemples illustrant les résultats obtenus.

Exemple 4.1 *Le problème fractionnaire suivant*

$$\begin{array}{rl} {}^{c}D_{0^+}^{5|2} u &= \left(\dfrac{\sin(t)}{2}\right)^2 u + \left(\frac{1-t}{2}\right)^3 D_{0^+}^{1|5} u + e^t \\ & u\left(0\right) = u''(0) = 0, u'(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} u''(1) \end{array}, \tag{4.80}$$

admet une solution unique dans E.

Preuve. Prenant $2 < q = \dfrac{5}{2} < 3, 0 < \sigma = \dfrac{1}{5} < 1, \alpha = \dfrac{1}{2}$. Soit la fonction

$$f(t,x,y) = x\left(\frac{\sin(t)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-t}{2}\right)^3 y + e^t.$$

Vérifiant la condition

$$\left|f(t,x,\bar{x}) - f(t,y,\bar{y})\right| \leq (\sin t)^2 \left|x-y\right| + (1-t)^3 \left|\bar{x}-\bar{y}\right|, \tag{4.81}$$

donc on peut considérer les fonctions g et h comme suit

$$g(t) = \left(\frac{\sin(t)}{2}\right)^2, h(t) = \left(\frac{1-t}{2}\right)^3.$$

Un calcul nous donne

$$\begin{array}{ll} \left\|I_{0^+}^{q-1} g\right\| = 9.4158 \times 10^{-4} & I_{0^+}^{q-1} g(1) = 3.6581 \times 10^{-2} \\ I_{0^+}^{q-1} g(\dfrac{1}{3}) = 9.0283 \times 10^{-4} & I_{0^+}^{q-2} g(1) = 0.11626 \\ A_g = 9.5614 \times 10^{-2} & C_g = 5.9974 \times 10^{-2} \end{array},$$

$$\begin{array}{ll} \left\|I_{0^+}^{q-1} h\right\| = 1.7097 \times 10^{-2} & I_{0^+}^{q-1} h(1) = 3.1344 \times 10^{-2} \\ I_{0^+}^{q-1} h(\dfrac{1}{3}) = 1.2134 \times 10^{-2} & I_{0^+}^{q-2} h(1) = 2.0150 \times 10^{-2} \\ A_h = 6.1515 \times 10^{-2} & C_h = 3.9306 \times 10^{-2} \end{array},$$

$$C_g + C_h = 5.9974 \times 10^{-2} + 3.9306 \times 10^{-2} = 0.09928 < \frac{1}{2} \tag{4.82}$$

et

$$A_g + \ A_h = 9.561\,4 \times 10^{-2} + 6.151\,5 \times 10^{-2} = 0.157\,13 < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{5}\right). \quad (4.83)$$

Le théorème 4.1 assure que le problème fractionnaire (4.80) a une solution unique dans E.

■

Exemple 4.2 *Le problème fractionnaire suivant*

$$\begin{aligned} {}^cD_{0^+}^{7|3}u \ &= (1-t)^2\left(\frac{u^2+2}{(6+u^4)} + \ln\left(1 + ({}^cD_{0^+}^{\frac{5}{6}}u)^2\right) + 1\right) \\ u(0) &= u''(0) = 0, u'(\eta) = \tfrac{3}{2}u''(1), \end{aligned} \quad (4.84)$$

admet au moins une solution nontriviale E.

Preuve. Vérifions les conditions du théorème 4.2. On a $q = \dfrac{7}{3}, \sigma = \dfrac{2}{3}, \alpha = \dfrac{3}{2}, \eta = \frac{1}{4}$, et

$$\begin{aligned} |f(t,x,\bar{x})| \ &= \left|\frac{(1-t)^2\,(x^2+2)}{(6+x^4)} + (1-t)^2\ln(1+\bar{x}^2) + (1-t)^2\right| \\ &\le (1-t)^2\,\frac{(x^2+2)}{(6+x^4)} + (1-t)^2\ln(1+\bar{x}^2) + (1-t)^2 \\ &\le k\,(t)\,\psi\,(|x|) + h\,(t)\,\phi\,(|\bar{x}|) + g\,(t) \end{aligned} \quad (4.85)$$

où $k\,(t) = h\,(t) = g\,(t) = (1-t)^2$, $\psi\,(x) = \dfrac{(x^2+2)}{(6+x^4)}$, $\phi\,(\bar{x}) = \ln(1+\bar{x}^2)$ et $f(t,0,0) \neq 0$.

Par un choix conveneble de r $(r = 6)$ telle que

$$\left(\left(\frac{r^2+2}{r^4+6}\right) + \ln(1+r^2) + 1\right)(1.1664) - r$$

est négatif, on a

$$\begin{array}{ll} \left\|I_{0^+}^{q-1}g\right\| = 0.25843 & I_{0^+}^{q-1}g(1) = 0.33595 \\ I_{0^+}^{q-1}g(\dfrac{1}{3}) = 0.14420 & I_{0^+}^{q-2}g(1) = 0.15998 \\ C_g = C_1 = 0.50928 & A_g = C_2 = 0.5868 \end{array}.$$

Ce qui montre que le problème fractionnaire (4.84) a au moins une solution non triviale. ■

Exemple 4.3 *Le problème fractionnaire suivant*

$$\begin{aligned} {}^{c}D_{0+}^{q}u &= \frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}\left[\frac{4\pi}{u+^{c}D_{0+}^{\sigma}u+6\pi}+e^{-\pi\left(u+\left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\right|\right)}\right] \\ & u(0)=u''(0)=0, u'(\eta)=\alpha u''(1), \end{aligned} \tag{4.86}$$

a au moins une solution positive si $q=\frac{7}{3}$, $\sigma=\frac{5}{6}$, $\alpha=\frac{7}{2}$ *et* $\eta=\frac{1}{4}$.

Preuve. On a

$$f\left((t,u,^{c}D_{0+}^{\sigma}u\right) = \frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}\left[\frac{4\pi}{u+^{c}\left|D_{0+}^{\sigma}u\right|+6\pi}+e^{-\pi\left(u+\left|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\right|\right)}\right]. \tag{4.87}$$

Vérifions les conditions $(H1)$ et $(H2)$.

Pour $(H1)$ on a :

$$f(t,u,v)=f\left(t,u,v\right)=a\left(t\right)f_{1}\left(u,v\right),$$

où

$$\begin{aligned} f(t,u,v) &= \frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}\left[\frac{4\pi}{u+|v|+6\pi}+e^{-\pi(u+|v|)}\right] \\ a\left(t\right) &= \frac{1-t^{2}}{1+t^{2}} \\ f_{1}\left(u,v\right) &= \frac{4\pi}{u+|v|+6\pi}+e^{-\pi(u+|v|)} \end{aligned}$$

$a\in C\left([0,1],(0,\infty)\right)$ et $f_{1}\in C\left(\mathbb{R}_{+}\times\mathbb{R},\mathbb{R}_{+}\right)$.

Pour $(H2)$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Psi(s)\frac{a(s)}{(1-s)^{3-q}}ds &= \int_0^\eta \left(\alpha - \frac{(\eta-s)^{q-2}(1-s)^{3-q}}{(q-2)}\right)\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-q}}\right)ds \\
&+ \int_\eta^1 \alpha\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-q}}\right)ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{7}{2} - \frac{\left(\frac{1}{4}-s\right)^{\frac{7}{3}-2}(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}{\left(\frac{7}{3}-2\right)}\right)\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}\right)ds \\
&+ \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{7}{2}\left(\frac{\frac{1-s^2}{1+s^2}}{(1-s)^{3-\frac{7}{3}}}\right)ds \\
&= 2.648\,1 < \infty.
\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{f_1(u,v)}{|u|+|v|} \\
&= \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{\frac{4\pi}{u+|v|+6\pi}+e^{-\pi(u+|v|)}}{|u|+|v|} \\
&= \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{\frac{4\pi}{u+|v|+6\pi}}{|u|+|v|} + \lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{e^{-\pi(u+|v|)}}{|u|+|v|} \\
&= 0+(+\infty) = +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\infty &= \lim_{(|u|+|v|)\to \infty}\frac{f_1(u,v)}{|u|+|v|} \\
&= \lim_{(|u|+|v|)\to \infty}\frac{\frac{4\pi}{u+|v|+6\pi}+e^{-\pi(u+v)}}{|u|+|v|} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

donc on est dans le cas sous linéaire d'après le théorème 4.3, on déduit que le problème (4.86) admet au moins une solution positive. ■

Bibliographie

[1] B. Ahmad, J.J. Nieto, *Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions*, Comput. Math. Appl. 58 (2009), 1838–1843.

[2] B. Ahmad, J. J. Nieto, *Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2009, Article ID 494720, doi :10.1155/2009/494720.

[3] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications,* Springer.

[4] R.P. Agarwal, M. Mechan et D. O'regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge university press.

[5] R. L. BAGLEY and P.J. TORVIK "*On The Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior*" Journal of Rheology.

[6] C. Bessaga, *On the converse of the Banach fixed point principle,* colloq. Math.7 (1959) 41-43.

[7] A. Bensedik, et M. Bouchekif, *Symmetry and uniqueness of positive solution for a Neumann boundary value problem,* App-Math-Lett 20(2007) 419-426.

[8] D.W. Boyd and J.S.W. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 458-464.

[9] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle théorie et application* , Dunod, Paris, 1999.

[10] Z. Bai and H. Lu, *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications ,vol . 311, no .2 ,pp.495–505,2005.

[11] K. Balachandran, J.J. Trujillo, *The nonlocal Cauchy problem for nonlinear fractional integro differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 4587–4593..

[12] M. Belmekki, J.J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, *Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation*, Bound. Value Probl. 2009, 18 p. Article ID 324561.

[13] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, *Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 2391–2396.

[14] Z.B. Bai, *On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 916–924.

[15] Y.K. Chang, J.J. Nieto, *Some new existence results for fractional differential inclusions with boundary conditions*, Math. Comput. Model. 49 (2009), 605–609.

[16] Zhoujin Cui, Pinneng Yu and Zisen Mao, *Existence of Solutions for Nonlocal Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations,* Advances in Dynamical Systems and Applications ISSN 0973-5321, Volume 7, Number 1, pp. 31–40 (2012).

[17] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, Germany, 1985.

[18] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed point theory, Monographic mathematyczne*, vol 16, Polish Scientific Publisher, 1982.

[19] M. Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc.12 (1961) 7-10.

[20] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contraction mappings*, J. London Math Society, 37 (1962), pp. 74-79.

[21] L.CV. Evans, *Partial differential equations*, American Math. Soc., Providence, 1988.

[22] M. Frigon, *On continuation methods for contractive and non expansive mappings, Recent advance in metric fixed point theory*, Sevilla 1995 (T. Dominiguez Benarrides ed), Universidad de Sevilla 1996, 19-30.

[23] M.ElShahed, *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation,* Abstract and Applied Analysis,vol.2007,Article ID 10368,8pages,2007.

[24] A. Guezane-Lakoud, R Khaldi, *Solvability of a fractional boundary value problem with fractional integral condition*, Nonlinear Analysis 75 (2012) pp. 2692–2700.

[25] A. Guezane-Lakoud, R. *Khaldi, Positive solution to a higher order fractional boundary value problem with fractional integral condition*, Romanian Journal of Mathematics and Computer Sciences, 2 (2012), 28–40.

[26] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, *Solvability of a three-point fractional nonlinear boundary value problem,* Differ Equ Dyn Syst 20(4) (2012) 395–403

[27] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations on second order*, Springer Verlag, Berlin1983.

[28] D. J. Guo and V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones, vol. 5 of Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, Boston, Mass, USA, 1988.

[29] Ch.S. Goodrich, *Existence of a positive solution to a class of fractional differential equations*, Appl. Math. Lett. 23 (2010), 1050–1055.

[30] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge univ. Press, 1990.

[31] A. Granas, *Continuation methods for contractive maps, Methods* nonlinear anal, 3(1994 375-379.

[32] D. Hai and K. Schmitt, *Existence and uniqueness results for non linear boundary value problems*, Rocky Mtn. J. Math., 24(1994), pp. 77-91.

[33] R.Hilfer, Ed., *Applications of Fractional Calculus in Physics* , World Scientific,River Edge, NJ , USA,2000.

[34] N. Heymans, I. Podlubny, *Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives*, Rheologica Acta, Vol. 37, pp. 1–7, 2005.

[35] M.C.Ho,Y.C.Hung,C.H.Chou, Phys. Lett. A 296 (1) (2002) 43.

[36] M. Ichise, Y. Nagayanagi, T. Kojima, *An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode process,* J. Electroanal. Chem. 33 (1971) 253—265.

[37] M.Abd eloueheb,*Les systéme Chaotiques à dérivée Fractionaires*,mémoire de Magister,Numéro d'ordre : 042/Mag/2009,2009

[38] H.Jafari and V.Daftardar-Gejji, *Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomi and ecomposition method*, Applied Mathematics and Computation,vol.180,no.2,pp.700–706,2006.

[39] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Diff erential Equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[40] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities*, Acad. Press, New York 1980.

[41] W.A. Kirk, *Mappings of generalized contractive type*, J. Math. Anal. Appl. 32 (1970) 567-572.

[42] M.A. Krasnoselskii, *Positive solutions of operator equations,* Noordhoff, Groningen 1964.

[43] M. A. Krasnoselskij and V. J. Stetsenko, *About the theory of equations with concave opera tors*, Sib. Mat. Zh. 10 (1969), 565-572.

[44] S. Liang and J. Zhang, *Existence and uniqueness of positive solutions to m-point boundary value problem for nonlinear fractional differential equation*, Journal of Applied Mathematics and Computing. In press.

[45] S. Leader, Two convergence *principals with applications to fixed points in metric spaces*, Non linear Analysis 6 (1982) 531-538.

[46] D. Mozyrska, D.F.M. Torres, *Modified optimal energy and initial memory of fractional continuous-time linear systems*, Signal Process. 91(2011), 379–385.

[47] A.Le Méhauté, G.Crepy, *Introduction to transfer and motion in fractal media : the geometry of kinetics*, Solid State Ionics 9& 10 (1983) 17—30.

[48] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 28 (1969) 326-329.

[49] W.R. Melvin, *Some extensions of Krasnoselskii fixed point theorem*, J. Diff. Eq. 11 (1972) 335-348

[50] K.B.Oldham, *Fractional differential equations in electrochemistry*, Advances in Engineering Software,vol.41,no.1,pp.9–12,2010.

[51] I.Podlubny, Fractional Differential Equations : *An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations ,to Methods of Their Solution and Some of Their Applications* , vol .198 of Mathematics in Science and Engineering , Academic Press,SanDiego,Calif,USA,1999.

[52] M. E. Picard, *Leçons sur quelques problêmes aux limites de la théorie des équations différentielles,* Gauthiers-Villars, Paris, 1930.

[53] T.Qiuand Z.Bai, *Existence of positive solutions for singular fractional differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations ,vol.2008,article146,2008.

[54] M. Rehman,and R Ali, *Positive Solutions of Nonlocal Boundary Value Problem for Higher Order Fractional Differential System,* Dynamic Systems and Applications 20 (2011) 169-182.

[55] H. Robert and Jr. Martin, *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, Pure and applied Mathematics, John Wiley and Sons, New York 1976.

[56] Ross B. (1977) *The Development of Fractional Calculus* 1695-1900. Historia Math 4 :75-89.

[57] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, London, 1993.

[58] V.M. Sehgal and S.P. Singh, *On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convex-spaces*, Pacific J. Math. 62 (1976) 561-567.

[59] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[60] Y.P. Sun, Y. Sun, *Positive solutions for singular semi positive Neumann boundary value problems,* Electronic journal of differential equations (2004) 133.

[61] L. SCHWARTZ. *Theorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[62] I. Vasile-Istratescu, *Introduction into theory of fixed points*, E. Academie, Bucarest 1973.

[63] P.P. Zabreiko, R.N. Kachurovskii and M.A.O. Krasnoselskii, *On a fixed point principal for operators in Hilbert spaces*, Funk. Anal. Prilojenia 1 , 2 (1967) 168-169.

[64] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem*, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[65] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, and M. Zhang, *Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations*, Applied Mathematics and Computation, vol. 217, no 16, 6950–6958, 2011.

[66] C.B. Zhaï, X.M. Cao, *Fixed point theorems for singular*, Comp. Maths. App 59 (2010).