وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
DE MAGISTER EN MATHEMATIQUES

SUR L'ESTIMATION DE LA FONCTION DE FIABILITE

Option : Mathématiques Financières

Par

Ghouar Ahlem

Sous la Direction de
Dr Chadli Assia

.

Devant le jury

PRESIDENT	R. Remita	M.C.A.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	N. Seddik Ameur	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	R. Khelif	M.C.A	U.B.M. ANNABA

Année : 2012/2013

Table des matières

Résumé **iv**

Abstract **v**

Remerciements **vi**

Dédicaces **vii**

Introduction **viii**

1 Introduction à la fiabilité **1**
1.1 Fonction de fiabilité 1
1.2 Fonction de fiabilité en temps discret 2
1.3 Fonction de fiabilité en temps continu 3
1.4 Quelques éléments de fiabilité 4
1.4.1 Fonction de risque 4
1.4.2 Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement entre deux défaillances 4
1.4.3 Taux de défaillance 4
1.4.4 Analyse du taux de défaillance 5
1.5 Différents types des données 5
1.5.1 Matériels non réparables 5
1.5.2 Matériels réparables 6
1.6 Définitions 6

2 L'estimation de maximum de vraisemblance **7**
2.1 Introduction 7
2.2 Propriétés d'un estimateur 8
2.2.1 Biais d'un estimateur 8
2.2.2 Convergence d'un estimateur 8

2.2.3 Qualité d'un estimateur 9
2.3 Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance 9
2.4 Méthodes d'estimations 10
2.4.1 La méthode des moindres carrés 10
2.4.2 La méthode du maximum de vraisemblance 11
2.5 La vraisemblance pour les différents types de données . . . 14
2.5.1 Données complètes 14
2.5.2 Données censurées de différents types 14

3 Modèle classique en fiabilité 16
3.1 Introduction 16
3.2 Modèle exponentiel 16
3.2.1 Fonctions caractéristiques 16
3.2.2 La vraisemblance pour les différents cas des données 18
3.2.3 Données complètes (sans remplacement des matériels défaillants) 19
3.2.4 Données incomplètes censurées à droite (sans remplacement des matériels défaillants) 19
3.2.5 Données incomplètes avec un seul temps de censure (sans remplacement des matériels défaillants) 21
3.2.6 Données censurées avec remplacement des matériels défaillants 22
3.3 La loi de Pareto 23
3.3.1 Fonctions caractéristiques 23
3.3.2 Estimation de paramètre de Pareto 25
3.4 Modèle de Weibull 27
3.4.1 3.1 Fonctions caractéristiques 27
3.5 Estimation de la fonction de fiabilité d'un modèle de weibull par le maximum de vraisemblance 30
3.5.1 Données complètes 30
3.5.2 Données censurées (à droite) 32
3.6 L'algorithme EM 34
3.6.1 Notation 34
3.6.2 Vraisemblance pour les données observées 35
3.6.3 Les étapes E et M 36
3.6.4 L'algorithme EM pour les familles exponentielles . . 37
3.6.5 Monotonocité de l'algorithme EM 39
3.6.6 Convergence d'une suite EM vers une valeur stationnaire 42

3.6.7 Taux de convergence de l'algorithme EM 42
3.6.8 Forces et faiblesses de l'algorithme EM 43

4 Simulation **46**

5 Annexe A **52**

6 Annexe B **61**

Résumé

Dans ce mémoire, on reprend les notions éssentielles qui caractérisent la fiabilité d'un dispositif. On s'est intéréssé en particulier aux modèles exponentiels et aux modèles de Weibull pour lesquels, une approche classique a été utilisée pour l'estimation des paramètres des modèles, de la fonction de fiabilité et du taux de défaillance.

Cette approche a été étudiée pour différents plans d'expériences donnant lieu à des données complètes ou des données censurées. Lorsque, les données dont on dispose ne permettent pas l'estimation des paramètres et donc de la fonction de fiabilité, ou lorsque l'expression de la vraisemblance est analytiquement impossible à maximiser ; l'algorithme EM peut être une solution.

L'algorithme EM, pour "Expectation-Maximisation", est un algorithme itératif qui constitue une méthode d'estimation paramétrique s'inscrivant dans un cadre général du maximum de vraisemblance.

Le modèle de Weibull a été étudié dans le détail et d'une manière exhaustive, grâce à l'utilisation du logiciel "Weibull++" qui nous a permis de procéder à des simulations. C'est pour nous, l'occasion de nous familiariser avec le logiciel "Weibull++", très utilisé dans les problèmes liés à la survie car complet et performant.

Bonne lecture.

Mots clés : Fiabilité, Estimation, Vraisemblance, Loi de Weibull, Loi exponentielle, Algorithme EM.

Abstract

Our research work is based on the safety of material functioning defined by the function of reliability. The indicator used to determine this function is the rate of error λ.

The estimation of the parameters of basic distribution (exponential, Weibull) in the case of types completed data and types censured data with the method of maximum probability and to consolidate our result we use simulations.

Key words : Reliability, Estimation, Weibull law, Exponential law, Algorithm EM.

Remerciements

Je rends grâce à Dieu qui m'a donné la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Mes remerciements les plus chaleureux à Madame A.Chadli, Maître de conférences au département de mathématiques à l'université Badji-Mokhtar Annaba, pour avoir accepté de m'encadrer et pour ses conseils et ses critiques qui m'ont été très bénéfiques.

Mes respectueux remerciements à Monsieur R.Remita,Maître de conférences au département de mathématiques, universités Badji-Mokhtar, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de mon mémoire. Egalement je remercie Madame N.Seddik Ameur,Proffeseur à l'université d'Annaba et Monsieur R.Khelif, Maître de conférences à l'université Badji-Mokhtar qui ont accepté de faire partie du jury.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A ma très chère mère.

-A mon père qui s'est sacrifié pour me voir un jour réussir, et à qui je dois tout.

-A l'amour de ma vie, mon mari Mahdi, pour sa tendresse.

-A mon grand frère Aziz, et a Billel pour leur soutien.

-A tous mes autres frères, et a toute ma famille.

-A tous mes amis.

-A tous ceux que j'aime et à tous ceux qui m'aiment.

Introduction

La connaissance des caractéristiques de la fiabilité d'un matériel est essentielle, elle conditionne la maintenance. L'usure et le renouvellement des équipements engendrent des couts qu'on espère gérer de manière optimale. C'est pour ces raisons qu'un nouveau champ d'investigation s'est développé afin de réduire le cout. Celui-ci est basé principalement sur l'estimation de la fonction de fiabilité et la modélisation stochastique des apparitions des défaillances au cours du temps.

Le but de notre travail est de présenter la méthode d'estimation par le maximum de vraisemblance et de l'appliquer sur quelques modéles usuels. En effet, le principe de cette approche consiste à maximiser la fonction de vraisemblance en considérant que celle-ci est une fonction des paramètres, ce qui revient dans la plus part des modèles complexes à résoudre des systèmes non linéaires. Des solutions numériques sont alors nécessaires pour trouver des estimateurs pour les paramètres du modèle et d'en déduire des estimateurs des caractéristiques de la fiabilité, en particulier, la fonction de fiabilité et le taux de panne. Une de ces méthode, l'algorithme EM, a été développée et appliquée.

Les estimateurs du maximum de vraisemblance, permettent de déterminer les paramètres de la loi de fiabilité recherchée. On en déduit les indicateurs tels que le taux de défaillance λ, la fonction de fiabilité,...

On a structuré ce mémoire autour de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre nous nous limitons à un rappel bref sur des notions et définitions de base de la théorie de la fiabilité que nous estimons utiles pour la suite de notre travail.

Nous commençons par définir la fonction de fiabilité, ensuite nous définissons cette fonction dans le temps discret et continu et nous donnons aussi quelques notions sur les types de censures, les composants et les systèmes(en série, et en parallèle).

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons essentiellement à l'estimation, nous commençons par un rappel sur l'estimation et l'estimation par les deux méthodes, du maximum de vraisemblance et des moindres carrées.

Dans le troisième chapitre et après avoir donné un aperçu sur quelques lois usuelles en fiabilité, on a estimé les paramètres de ces lois pour des données complètes et des données censurées. On a utilisé, dans ce chapitre l'algorithme d'approximation (l'algorithme EM) pour l'obtention des estimateurs du maximum de vraisemblance d'un modèle de Weibull.

Le quatrième chapitre est consacré à une simulation à l'aide du logiciel "Weibull++" pour confirmer les résultats précédents.

.

Chapitre 1

Introduction à la fiabilité

1.1 Fonction de fiabilité

Le terme "fiabilité" est un néologisme introduit dans les années soixante pour traduire le terme anglo-saxon "Reliability". La commission électronique internationale donne à la fiabilité la définition suivante :

"L'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée".

Plus précisément, la fonction de fiabilité est :

"La probabilité pour qu'un matériel fonctionne sans défaillance pendant une durée de temps ". Ce matériel peut être technique (une machine, un bâtiment,...etc.), biologique (plantes, animaux,...etc.), social,...etc.

La fiabilité est une fonction, notée R, définie sur $[0; 1]$ par :

$$R(t) = P(T \notin [0; t]) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t)$$

T est la variable aléatoire qui représente le temps de bon fonctionnement d'un matériel (temps de survie), c'est à dire l'instant ou apparait la première défaillance (on a choisit $t = 0$ comme instant de mise en service du matériel).

F est la fonction de répartition de la variable aléatoire T :

$$F(t) = P(T < t)$$

Propriété

La fonction de fiabilité $R(t)$ est non croissante, elle vérifie :

$$R(0) = 1 \qquad\qquad \lim_{t \to \infty} R(t) = 0$$

Remarque :

Dans notre travail, un relevé de temps de bon fonctionnement portera :

*soit sur un groupe de dispositif unique identique, on relève alors les temps jusqu'à défaillance.

*soit sur un dispositif unique, réparé après chaque panne en supposant que la réparation n'influe pas sur les conditions initiales de fonctionnement du dispositif, on relève alors les temps entre défaillances.

1.2 Fonction de fiabilité en temps discret

L'exemple le plus simple concerne la loi binomiale :

C'est la loi d'une variable aléatoire discrète K pouvant prendre les valeurs entières $K = 0, 1, 2, ..., n$ avec les probabilités individuelles :

$$P(K = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Tell que

$$q = 1 - p \qquad \text{et} \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

La fonction cumulée de répartition est

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^k p^i q^{n-i}$$

La loi binomiale dépend de deux paramètres, n et k. elle correspond à des tirages aléatoires indépendant avec remise des éléments qui ont été tirés.**la probabilité individuelle est donc la probabilité d'obtenir K résultats (échecs ou réussites).**

C'est une loi couramment utilisé en sureté de fonctionnement pour évaluer la probabilité de réussite ou d'échec à la sollicitation (par exemple, une probabilité de démarrage d'un système de sauvegarde).

Exemple 1.2.1 ***Exemple :*** *(probabilité de défaillance à la sollicitation d'un alternateur)*

On souhaite tester l'alternateur d'un groupe électrogène.

La probabilité de défaillance à la sollicitation de ce matériel est estimée à 1défaillance pour 1000 démarrages.

On décide d'effectuer un test de 100 démarrages. On demande la probabilité d'observer 1 panne au cours de ce test.

On a donc $p = \frac{1}{1000}$

$$\begin{aligned} \Pr(k &= 1) = \frac{n!}{k(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{100!}{1!99!}(10^{-3})(1-10^{-3})^{99} \approx 90.10^{-3} \end{aligned}$$

1.3 Fonction de fiabilité en temps continu

Soit T une variable aléatoire désignant la durée de vie d'un équipement, sa fonction de répartition

$$F(t) = Pr(T \leq t)$$

Si F est absolument continue, la variable aléatoire T possède une fonction de densité $f(t)$ alors :

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\Pr(t < x < t + \triangle t)}{\triangle t}$$

La fonction complémentaire de F notée $\overline{F}$ est appelée fonction de survie ou probabilité du système notée $R(t)$, soit :

$$R(t) = \overline{F}(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t) = \int_t^{+\infty} f(u)du$$

ainsi, nous avons

$R(0) = 1$ $\qquad\qquad$ $R(+\infty) = 0$

On va donner dans le 3éme chapitre quelque exemples usuels dans le cas continu.

1.4 Quelques éléments de fiabilité

1.4.1 Fonction de risque

La fonction de risque $h(t)$ est la probabilité conditionnelle de défaillance d'un matériel à $(t+dt)$ sachant qu'il fonctionnait à t :

$$h(t)dt = \frac{f(t)dt}{R(t)} = -\frac{dR(t)}{dt}\frac{1}{R(t)}dt = -d\ln R(t)$$

1.4.2 Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement entre deux défaillances

On appelle M.T.B.F (Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement) le temps moyen entre deux défaillances consécutives de l'appareil, c'est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T représentent la durée de vie du matériel. Si f est la densité de probabilité de T alors :

$$MTBF = E(T) = \int_0^{+\infty} tf(t)dt$$

1.4.3 Taux de défaillance

On appelle taux de défaillance moyen entre les instants t et $t+h$, le rapport de la probabilité qu'un appareil ait une défaillance entre les instants t et $t+h$ sachant qu'il a fonctionné avant l'instant t par h.

On appelle taux de défaillance instantané à instantané à l'instant t, la limite quand elle existe du taux de défaillance moyen entre les instants t et $t+h$ quand h tend vers 0. On note $\lambda(t)$, le taux de défaillance à l'instant t.

Taux moyen

$$\begin{aligned}
\frac{p(t < T < t+h \backslash T > h)}{h} &= \frac{p(t < T < t+h \text{ et } T > h)}{h \;\; p(T > t)} \\
&= \frac{1}{h}\frac{p(t < T < t+h\;)}{p(T > t)} = \frac{1}{h}\frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)} \\
&= \frac{1}{h}\frac{1 - R(t+h) - (1 - R(t))}{R(t)} = \frac{1}{h}\frac{R(t) - R(t+h)}{R(t)}
\end{aligned}$$

Taux instantané :

$$\frac{1}{h}\frac{R(t)-R(t+h)}{R(t)} = \frac{-1}{R(t)}\frac{R(t+h)-R(t)}{h}$$

$$\lambda(t) = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{R(t)}\frac{R(t+h)-R(t)}{h} = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

On conclut que le taux de défaillance est donné par la formule

$$\lambda(t) = \frac{R'(t)}{R(t)}$$

1.4.4 Analyse du taux de défaillance

L'évolution du taux de défaillance d'un produit pendant toute sa durée de vie est caractérisée par ce qu'on appelle en analyse de fiabilité la courbe de baignoire (on va le voir dans l'application).

Le taux de défaillance est élevé au début de la vie du dispositif. Ensuite, il diminue assez rapidement avec le temps (taux de défaillance décroissant), cette phase de vie est appelée période de jeunesse. Après, il se stabilise à une période de vie utile (taux de défaillance constant). A la fin, il remonte lorsque l'usure et le vieillissement font sentir leurs effets, c'est la période de vieillissement (taux de défaillance croissant).

1.5 Différents types des données

Dans ce paragraphe, il est indispensable de distinguer nettement les deux grands types de données, Dans un premiers temps, on considérera des données provenant de matériel non réparable, ensuite le cas des données observées sur des matériels réparables qui requiert la théorie des processus aléatoires.

1.5.1 Matériels non réparables

Un matériel est non réparable s'il est jeté au rebut dés sa défaillance. C'est souvent un composant ou une petite partie d'un système ou d'un matériel plus complexe (le composant est échangeable).

En termes mathématiques, la duré de vie aléatoire dont la loi est définie sur R est caractérisée par une densité notée f(t) et un taux de défaillance (aussi appelé dans la documentation anglo-saxonne taux de hasard).

1.5.2 Matériels réparables

Précisons d'abord qu'un matériel réparable concerne un système qui peut subir, au cours de sa vie, plusieurs défaillances, celles de sa vie, celles-ci ne touchant généralement qu'une partie du système et étant donc réparable.

Si on notera $T_1, T_2,...T_n$ les instants (aléatoire) successifs des défaillances les T_i peuvent être représentés sur un axe des temps.

Remarque

Le modèle mathématique utilisé pour décrire ces défaillances successives est souvent un processus de Poisson

.

1.6 Définitions

Selon la terminologie adoptée dans le domaine de la sureté de fonctionnement, une installation industrielle est composée de systèmes élémentaires associant des groupes fonctionnels de matériels.

Système en série

Un système est dit en série si son fonctionnement est assujetti au fonctionnement simultané de tous ses composants. Si un seul de ses composants est en panne, alors le système sera en panne.

Système en parallèle

Le fonctionnement de ce système est assuré si au moins un de ses composant est en bon état, le système sera en panne si et seulement si tous ses composants sont en panne simultanément.

Chapitre 2

L'estimation de maximum de vraisemblance

2.1 Introduction

Une fois un modèle choisi, l'intérêt se tourne vers l'estimation des paramètres du modèle qui sont inconnus. Intuitivement, la notion d'estimation est claire. On observe les réalisations d'une variable aléatoire dont on connait la distribution à l'exclusion de quelques paramètres. A l'aide des réalisations observées, on doit estimer les valeurs des paramètres inconnus, Plusieurs approches peuvent être utilisées, on s'intéresse à l'approche classique du maximum de vraisemblance.

Un estimateur est une fonction des données et il est construit de telle façon que sa valeur soit proche de la vraie valeur du paramètre.

Autrement dit :

Un estimateur θ est une application T_n de E^n dans F qui à un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi P_θ associe une variable aléatoire réelle dont on peut déterminer la loi de probabilité.

La loi de la variable aléatoire $T_n\ (X_1, ..., X_n)$ dépend de celle de X, et donc de θ, et chaque réalisation $T_n\ (x_1, ..., x_n)$ sera une estimation de θ.

2.2 Propriétés d'un estimateur

2.2.1 Biais d'un estimateur

Bien entendu, pour pouvoir considérer $T_n\ (x_1, ..., x_n)$ comme une valeur approchée de θ, il faut que les valeurs prises par la variable aléatoire T_n ne s'écartent pas trop de la valeur fixe de θ. comme $T_n$est une variable aléatoire, on ne peut pas imposer une condition qu'à sa valeur moyenne, ce qui nous amène à définir le biais d'un estimateur comme l'écart entre sa moyenne et la vraie valeur du paramètre :

$$b_n(\theta) = E(T_n) - \theta$$

On peut dire alors que :

Un estimateur T_n de θ est dit sans biais si pour tout θ et tout entier positif n :

$$E(T_n)) = \theta$$

Propriété

Un estimateur T_n de θ est dit *asymptotiquement sans biais* si pour tout θ :

$$E(T_n) \to \theta \;\text{ quand }\; n \to \infty$$

2.2.2 Convergence d'un estimateur

Un estimateur T_n est convergent si la suite de variable aléatoire (T_n) converge en probabilité vers la valeur du paramètre, c'est-à-dire pour tout θ :

$$\begin{aligned} T_n &\to \theta \Leftrightarrow P_\theta(|T_n - \theta| < \varepsilon) \to 1, \forall \varepsilon > 0 \;\; n \to \infty \\ &\Leftrightarrow P_\theta(|T_n - \theta| > \varepsilon) \to 0 \end{aligned}$$

Tout estimateur sans biais dont la variance tend vers 0 est convergent :

$$\left.\begin{cases} E(T_n) = 0 \\ V(T_n) \to 0 \end{cases}\right\} T_n \xrightarrow{P} \theta \; n \to \infty$$

Tout estimateur asymptotiquement sans biais dont la variance tend vers 0 est convergent :

$$\left.\begin{cases} E(T_n) \to 0 \\ V(T_n) \to 0 \end{cases}\right\} T_n \xrightarrow{P} \theta \; n \to \infty$$

2.2.3 Qualité d'un estimateur

La qualité d'un estimateur va se mesurer à l'aide d'une distance au paramètre qui peut être par exemple $|T_n - \theta|$ou $(T_n - \theta)^2$, Pour obtenir un indicateur numérique, on peut alors déterminer la valeur moyenne de cette distance.

L'indicateur généralement retenu, car il se prête facilement aux calculs, est *l'erreur quadratique moyenne* définie pour θ par :

$$EQ(T_n) = E(T_{n\theta})^2 = V_\theta(T_n) + b_n^2(\theta)$$

Dans le cas particulier d'un estimateur sans biais, cette erreur quadratique se confond avec la variance de l'estimateur. Si dans l'erreur totale d'estimation, on privilège l'erreur structurelle, mesurée par $b_n^2(\theta)$, on fera un choix d'un estimateur sans biais et l'erreur de l'estimation se réduira à l'erreur statistique mesurée par la variance de l'estimateur. Si on ce place donc dorénavant la classe des estimateurs sans biais, on pourra comparer deux estimateurs T_n et T_n' de cette classe par leur variance qui mesure alors leur dispersion par rapport au paramètre qui est leur espérance commune. Nous dirons que l'estimateur T_n est plus **efficace** que T_n' si pour tout θ et pour une taille d'échantillon $n > N$:

$$V_\theta(T_n) \leq V_\theta(T_n')$$

2.3 Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

L'estimation d'un paramètre quelconque θ est ponctuelle si l'on associe une seule valeur à l'estimateur $\overset{\wedge}{\theta}$ à partir des données observable sur un échantillon aléatoire.

Contrairement à l'estimation ponctuelle, cette méthode consiste à construire un intervalle de confiance autour de l'estimateur $\overset{\wedge}{\theta}$ du paramètre θ, qui souvent s'interprète comme une marge d'erreur.

Pour construire cet intervalle de confiance, nous procédons, généralement de la manière suivante :

A partir de la loi de distribution de l'estimateur $\overset{\wedge}{\theta}$, nous déterminons un intervalle calculé sur la base d'échantillon tel que la probabilité soit importante qu'il englobe la vraie valeur du paramètre recherché.

Soit $\left[\overset{\wedge}{\theta} - l, \overset{\wedge}{\theta} + l\right]$ cet intervalle est $(1-\alpha)$ la probabilité d'appartenance.

Cette marge d'erreur l est liée au niveau α par la probabilité suivante :

$$\Pr(\overset{\wedge}{\theta} - l \leq \theta \leq \overset{\wedge}{\theta} + l) = 1 - \alpha$$

$(1 - \alpha)$ est appelé le niveau de confiance ou degré de confiance.

2.4 Méthodes d'estimations

Si la distribution de la variable aléatoire X est connue, on utilise la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi de probabilité. En revanche si la distribution n'est pas connue, on utilise la méthode des moindres carrés.

2.4.1 La méthode des moindres carrés

Le principe de cette méthode consiste à minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et les estimations obtenues de l'estimateur, Appliquons cette méthode pour construire un estimateur de μ, la moyenne de la population.

A partir d'un échantillon aléatoire de taille n prélevé d'une population de moyenne μ inconnue, on veut construire à l'aide de la méthode des moindres carrés un estimateur pour μ , notons l'estimation de μ par $\overset{\wedge}{\mu}$.

L'écart entre chaque observation x_i et l'estimation $\overset{\wedge}{\mu}$ est

$$Ecart = x_i - \overset{\wedge}{\mu}$$

Le carré des écarts est $\left(x_i - \overset{\wedge}{\mu}\right)^2$ et pour l'ensemble des observations, la somme des carrés des écarts que nous notons Q est :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overset{\wedge}{\mu}\right)^2$$

Nous cherchons la valeur de $\overset{\wedge}{\mu}$ qui permet de minimiser cette expression, on veut donc minimiser Q par rapport à $\overset{\wedge}{\mu}$. Les critères pour minimiser cette fonction sont :

$$\frac{dQ}{d\overset{\wedge}{\mu}} = 0 \quad , \quad \frac{dQ^2}{d\overset{\wedge}{\mu}^2} > 0$$

La dérivée de Q par rapport à $\overset{\wedge}{\mu}$ donne

$$\frac{dQ}{d\overset{\wedge}{\mu}} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overset{\wedge}{\mu})$$

Egalant $\frac{dQ}{d\overset{\wedge}{\mu}}$ à 0, on obtient $\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} \overset{\wedge}{\mu} = \sum_{i=0}^{n} x_i - n\overset{\wedge}{\mu} = 0$, puis

$$\overset{\wedge}{\mu} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

La dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q}{d\overset{\wedge}{\mu}^2} &= \frac{d}{d\overset{\wedge}{\mu}}\left[-2\sum_{i=0}^{n}(x_i - \overset{\wedge}{\mu})\right] = -2\sum_{i=0}^{n}(-1) \\ &= -2(-n) = 2n > 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous assure que $\overset{\wedge}{\mu} = \overline{X}$ minimise Q .L'estimateur $\overline{X}$ est l'estimateur des moindres carrée de μ.

2.4.2 La méthode du maximum de vraisemblance

Définition 2.4.1

La vraisemblance $L(x_1, ...x_n; \theta)$ représente la probabilité d'observer le n-uple $(x_1, ...x_n)$ pour une valeur fixe de θ. Dans la situation inverse ici ou on observe $(x_1, ...x_n)$ sans connaitre la valeur de θ, on va attribuer à θ la valeur qui apparait la plus vraisemblance, compte tenu de l'observation dont on dispose, c'est-à-dire celle qui va lui attribuer la plus forte probabilité.

L'estimation par le maximum de vraisemblance

Estimer un paramètre par la méthode du maximum de vraisemblance, c'est proposer comme valeur de ce paramètre celle qui rend maximale la vraisemblance, à savoir la probabilité d'observer les données comme réalisation d'un échantillon de la loi.

Soit une population munie d'une distribution de probabilité quelconque $\Pr(x, \theta)$, qui dépend d'un paramètre, le vrai paramètre θ est inconnu .

On tire un échantillon $X_1, X_2...X_n$ iid de X ,une observation de cet échantillon est notée $x_1, x_2, ...x_n$.

La question qui se pose est :

Comment estimer le vrai paramètre θ ?

L'idée générale de l'estimateur du maximum de vraisemblance consiste à choisir le paramètre qui maximise la vraisemblance de l'échantillon observé.

La fonction de vraisemblance est présentée par :

$$L(x_1, x_2, ...x_n; \theta) = \Pr(x_1, x_2, ...x_n/\theta)$$

Puisque les $X_1, X_2...X_n$ sont iid, $L(x_1, x_2, ...x_n; \theta) = \Pr(x_1, x_2, ...x_n/\theta)$ est égale au produit de toutes les probabilités $\Pr(X_i = x_i) = \Pr(x_i, \theta)$ que X_i prend la valeur x_i.

$L(x_1, x_2, ...x_n; \theta) = \Pr(x_1, x_2, ...x_n/\theta) = \Pr(x_1, \theta) \Pr(x_2, \theta) ... \Pr(x_n, \theta)$.

Remarque :

Si X est une variable aléatoire continue, la fonction de vraisemblance est déterminée à partir de la densité de probabilité $f(x, \theta) = \Pr(x, \theta)$ telle que

$L(x_1, x_2, ...x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) ... f(x_n, \theta)$

L'estimateur du maximum de vraisemblance noté **EMV** *est la valeur du paramètre qui maximise cette fonction de vraisemblance.*

$EMV \overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}_{MV} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ...x_n)$maximise $L(x_1, x_2, ...x_n; \theta)$

$L(x_1, x_2, ...x_n; \overset{\wedge}{\theta}_{MV}) = \max_\theta L(x_1, x_2, ...x_n; \theta)$

$L(x_1, x_2, ...x_n; \overset{\wedge}{\theta}_{MV}) = \max_\theta \Pr(x_1, \theta) \Pr(x_2, \theta) ... \Pr(x_n, \theta)$

L'EMV est donc la fonction qui permet d'estimer la valeur du paramètre inconnu, dont il est plus vraisemblable qu'il génère l'échantillon effectivement observé.

Cette définition ne renseigne en aucune façon, ni sur l'existence ni sur l'unicité, d'un tel estimateur. La recherche de l'EMV peut se faire directement par recherche du maximum du L, ou dans le cas particulier ou la fonction L est deux fois dérivable par rapport à θ, comme solution de l'équation $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ qui vérifie aussi $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$.

Cependant, la vraisemblance se calculent à partir d'un produit, on préfère remplacer ce dernier problème par le problème équivalent pour la **log-vraisemblance**, puisque la fonction **ln** est strictement croissante, $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ avec $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$. Est qui aura une expression généralement simplifiée.

Le théorème suivant va préciser la borne inférieure pour la variance des estimateurs sans biais, sous certaine hypothèse relative à la loi de probabilité de X et que nous appellerons hypothèses de Cramer-Rao. Nous ne donnerons pas le détail de ces hypothèses qui sont essentiellement des conditions techniques portant sur l'existence de dérivées de la densité f de X et la possibilité d'intervenir les opérations de dérivation et d'intégration.

Donc on définit la notion de **quantité d'information de Fisher** par :

$$I_n(\theta) = E_\theta \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)^2$$

Sous les hypothèses de Cramer-Rao, en particulier si $E = (\Omega)$ est indépendant du paramètre à estimer θ, pour tout estimation sans biais T_n de θ on a :

$$V_n(T_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = B_F(\theta)$$

Quelques propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance

Soit $(X_1, X_2 ... X_n)$ un échantillon aléatoire d'une distribution $f(x, \theta), \theta \in R$. Soit $\overset{\wedge}{\theta}$ un estimateur du maximum de vraisemblance de θ, Possède les propriétés suivantes :

Propriété 1 : $\overset{\wedge}{\theta}$ est un estimateur M.A.N (**M**eilleur estimateur **A**symptotiquement **N**ormal), si :

$\overset{\wedge}{\theta}$ converge en loi vers une distribution normale :

$$\sqrt{n}(\overset{\wedge}{\theta} - \theta) \underset{n \to \infty}{\to} N(0, C^2)$$

Propriété 2 : $\overset{\wedge}{\theta}$ est un estimateur efficace pour θ, C'est-à-dire $\overset{\wedge}{\theta}'$ un autre estimateur de θ alors :

$$Var(\overset{\wedge}{\theta}') \geq Var(\overset{\wedge}{\theta})$$

2.5 La vraisemblance pour les différents types de données

Le but de notre travail est de trouver des estimations raisonnables de la fiabilité qui dépend des paramètres de la distribution étudiée, et dans la plus part des situations pratiques la vrai valeur n'est pas connue, donc on va essayer d'estimer la valeur de cette fonction pour les différents types de données en utilisons la méthode du maximum de vraisemblance.

2.5.1 Données complètes

L'outil de base de l'estimation est la notion de vraisemblance. Plaçons nous pour l'instant dans le cas de données complètes. On a observé n réels $x_1 ... x_n$,que l'on considère comme des réalisation d'un n-échantillon ($\mathrm{x}_1 ... \mathrm{x}_n$).

les x_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Cette loi inconnue a pour densité f et pour fiabilité R. par définitions, la vraisemblance dans notre cas est définit par

$$L = \prod_{i=n}^{n} f(x_i)$$

2.5.2 Données censurées de différents types

Il peut être trop cher inutile, ou tout simplement impossible, d'observer toutes les durées de fonctionnement $x_1, ... x_n$.On décide alors d'interrompre l'observation avant la dernière. Nous ne considérons que deux types de censure, Il existe de nombreuses généralisations de ces deux cas de base.

Censure de type I

Les données n'ont été observées que jusqu'a un instant de censure t_c fixé à l'avance. Dans ce cas, l'observation se compose des valeurs de celles des durées qui étaient inférieures à t_c.

En d'autres termes, au lieu d'observer la valeur prise par X_i, on observe celle de $X_i^{'}$ avec :

$$X_i^{'} = X_i 1_{[0,t_c]}(X_i) + t_c 1_{]t_c,+\infty[}(X_i)$$

la variable $X_i^{'}$ vaut t_c avec probabilité $R(t_c)$, elle est égale à X_i si $X_i \leq t_c$.
La vraisemblance des observations est proportionnelle à :

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left(f(x_i) 1_{[0,t_c]}(x_i) + R(t_c) 1_{]t_c,+\infty[}(x_i) \right)$$

Pour écrire cette formule sous une forme plus lisible, notons $x_{(1)}, ...x_{(n)}$ les valeurs $x_1...x_n$ rangées par ordre croissant et k le nombre de valeurs inférieurs à t_c

$$k = \sum_{i=1}^{n} 1_{[0,t_c]}(x_i) = \max \left\{ i, x_{(i)} \leq t_c \right\}$$

La vraisemblance devient :

$$L = R(t_c)^{n-k} \prod_{i=1}^{k} f(x_i)$$

Censure de type II

Seules les n_c premières valeurs ont été observées, ou n_c est un nombre fixé à l'avance, on observe en fait les valeurs prises par $X_{(1)}, ...X_{(n)}$, et les n_c premières statistiques d'ordre de l'échantillon. La probabilité de l'événement observé est ici proportionnelle à

$$L = R\left(x_{(n_c)}\right)^{n-n_c} \prod_{i=1}^{n_c} f(x_i)$$

Chapitre 3

Modèle classique en fiabilité

3.1 Introduction

Le principal objectif de l'analyse de fiabilité est l'élaboration d'un modèle probabiliste du processus de défaillance des matériels.

Ce modèle va permettre d'évaluer la fiabilité prévisionnelle du matériel étudié lors de son fonctionnement dans le futur,et éventuellement d'améliorer ses performances.

3.2 Modèle exponentiel

C'est le modèle le plus couramment utilisé en sureté de fonctionnement car, il faut le dire, c'est le plus simple, mais il n'est pas toujours justifié surtout pour les matériels mécanique

3.2.1 Fonctions caractéristiques

X est une variable aléatoire définissant la durée de vie d'un phénomène. Si l'espérance de vie du phénomène est $E(X)$ et si la durée de vie est sans vieillissement, c'est-à-dire si la durée de vie au-delà de l'instant T est indépendante de l'instant T, alors X a pour densité de probabilité :

$f(t) = 0$ si $t \prec 0$

$f(t) = \frac{1}{E(X)} \exp\left(-\frac{t}{E(X)}\right)$pour $t \geq 0$

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{E(X)}$

De façon plus formelle on peut caractériser la loi exponentielle de la façon suivante :

$\forall(s,t) \in R^{+2} P(X \succ s+t \backslash X \succ t) = P(X \succ s)$

Une loi à valeurs dans R^+ qui vérifie cette propriété est alors exponentielle et toute loi exponentielle vérifie cette probabilité. Cette propriété se nomme la propriété de perte de mémoire.

Par exemple, la probabilité qu'un phénomène se produise entre les temps t et $t+s$ s'il ne s'est pas produit avant est la même que la probabilité qu'il se produise entre les temps 0 et s. On peut oublier l'instant de départ pour modéliser la probabilité.

Cette caractérisation est importante car elle permet de montrer que certains phénomènes peuvent être modélisés par une distribution exponentielle. Cette loi permet entre autres de modéliser la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique.

Aussi, c'est le modèle le plus couramment utilisé en sureté ce fonctionnement car, il faut le dire, c'est le plus simple, mais il n'est pas toujours justifié surtout pour les matériels mécaniques.

Si on appelle $F(t)$ la probabilité que la durée de vie soit supérieure à t, le fait que la durée de vie soit sans vieillissement se traduit par l'égalité suivante :

$$\frac{F(T+t)}{F(T)} = F(t)$$

Puisque la fonction F est monotone et bornée, cette équation implique que F est une fonction exponentielle. Il existe donc k réel tel que pour tout t :

$$F(t) = \exp(At)$$

Notons que A est négatif, puisque F est inférieure à 1. La densité de probabilité f est définie, pour tout $t \geq 0$, par :

$$f(t) = -A\exp\left(At\right)$$

Le calcul de l'espérance de X, qui doit valoir $E(X)$ conduit à l'équation :

$$\int_0^{+\infty} -At\exp(At)dt = E(X)$$

On calcule l'intégrale en intégrant par parties ; on obtient :

$$A = -\frac{1}{E(X)} = \lambda$$

donc

$$P(X \succ t) = \exp\left(-\frac{t}{E(X)}\right)$$

et

$$f(t) = \frac{1}{E(X)} \exp\left(-\frac{t}{E(X)}\right)$$

Espérance et variance

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, nous savons, par construction, que l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
On calcule la variance en intégrant par parties ; on obtient : $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

3.2.2 La vraisemblance pour les différents cas des données

On observe sur un ensemble de n matériels, un échantillon de k défaillances aux temps aléatoires $(t_1, t_2, ..., t_k)$ et de (n-k) survies aux temps $(t_{k+1}, t_{k+2}, ..., t_n)$

On va donc rechercher la fonction qui lie l'estimateur du paramètre de la loi étudier θ a ces observations :

$$\theta = f(t_1, t_2, ...t_k..., t_n)$$

Et, en particulier, on va chercher a déterminer la valeur de θ qui maximise la probabilité d'observer l'échantillon des observations $(t_1, t_2, ...t_k..., t_n)$.

La probabilité composée d'obtenir l'ensemble de ces observations est égale au produit des probabilité élémentaires de l'occurrence de chacun des temps de défaillance $(f(t_i, \theta))$ multiplié par la probabilité d'observer chacun des temps de survies constatés (ce qui correspond à la fonction de fiabilité des matériels aux temps de survie t_j).

Soit

$f(t_i, \theta)$:fonction de densité de défaillance .

$R(t_j, \theta)$:la fonction de fiabilité

k : le nombre de défaillance

n : le nombre d'éléments en essai ou observés

t_i : instant de défaillance de l'élément défaillant i

t_j : instant de censure de l'élément défaillant j

θ : le paramètre à estimer

D : l'ensemble des observations (t_i, t_j, n)

Plusieurs cas peuvent se présenter suivant le fait que l'on remplace ou nom les matériels défaillants, et que l'on observe des éléments nom défaillants (données incomplètes).

La fonction de vraisemblance étant différente dans chacun des cas, on obtiendra donc des expressions différentes pour l'estimation du paramètre λ.

3.2.3 Données complètes (sans remplacement des matériels défaillants)

Les n éléments sont défaillants au bout du temps t (fin d'observation)

par hypothèse $(n = k)$

On a :

$$L(D/\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \exp\left(-\lambda t_i\right) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i\right)$$

En maximisant la vraisemblance des observations, on obtient si l'on observe $k = n$ défaillances dans ce cas :

$$\frac{\partial \ln L\left(D/\lambda\right)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

d'ou :

$$\overset{\wedge}{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

3.2.4 Données incomplètes censurées à droite (sans remplacement des matériels défaillants)

Soit

$$L((t_1, t_2 ... t_n)/\theta) = \prod_{i=1}^{k} f(t_i/\theta) \prod_{j=k+1}^{n} R(t_j/\theta)$$

Et dans le cas de données exponentiel censurées à droite, ou l'on a observé k défaillances et $(n-k)$ survies, la vraisemblance et donc égale à :

$$L((t_i, t_j)/\theta) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t_i}{\theta}\right) \prod_{j=k+1}^{n} \exp\left(-\frac{t_j}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta^k} \exp\left[\frac{\sum_{i=1}^{k} ti + \sum_{j=k+1}^{n} t_j}{\theta}\right]$$

On va déterminer l'estimation ponctuelle de θ (ou de la même façon pour λ) en recherchant la solution de l'équation :

$$\frac{\partial L\left(D/\theta\right)}{\partial\theta} = 0$$

On fait appel au logarithme népérien de la fonction de vraisemblance :

$$\ln L\left(D/\theta\right) = \ln L\left(t_i, t_j/\theta\right)$$

sachant que $\ln x^k = k \ln x, \ln\left(\exp\right) = 1$,et que $\ln\left(a/b\right) = \ln a - \ln b$, est égale à :

$$\ln L\left(t_i, t_j/\theta\right) = -\frac{\sum_{i=1}^{k} ti + \sum_{j=k+1}^{n} t_j}{\theta} - k \ln\theta$$

en dérivant par rapport à θ, et en rendant égale à zéro la dérivée de $\ln L\left(t_i, t_j/\theta\right)$ on obtient :

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} ti + \sum_{j=k+1}^{n} t_j}{\overset{\wedge}{\theta}^2} - \frac{k}{\overset{\wedge}{\theta}} = 0$$

Soit finalement :

$$\overset{\wedge}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} ti + \sum_{j=k+1}^{n} t_j}{k}$$

Et bien entendu, si l'on cherche le maximum de vraisemblance du taux de défaillance $\overset{\wedge}{\lambda}$:

$$\overset{\wedge}{\lambda} = \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} ti + \sum_{j=k+1}^{n} t_j}$$

On observe sur des pompes les temps de défaillance (supposés exponentiels) suivants :

$t_i(i = 1...k = 3)$	
t_1	8650
t_2	12500
t_3	18200
$t_j(j = k+1...n = 5)$	
t_4	18200
t_5	18200

On veut estimer le temps des défaillances et le taux de défaillance moyens de ces pompes.

Le temps moyens de défaillance est

$\overset{\wedge}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} ti+\sum_{j=k+1}^{n} t_j}{k} = \frac{8650+12500+18200+18200+18200}{3} = 25250h$

$\overset{\wedge}{\lambda} = \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} ti+\sum_{j=k+1}^{n} t_j} = \frac{3}{8650+12500+18200+18200+18200} = 3,96.10^{-5}/h$

3.2.5 Données incomplètes avec un seul temps de censure (sans remplacement des matériels défaillants)

k éléments parmi n sont défaillants au bout du temps de censure t_j^*,tel que $\left(t_j^* = t\right)$

Cherchons la fonction de vraisemblance de ces événements.

$$\begin{aligned}
L((D)/\lambda) &= \left\{\prod_{i=1}^{k} f(t_i/\theta)\right\}\left\{\prod_{j=k+1}^{n} R(t_j^*/\theta)\right\} \\
L((D)/\theta) &= \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda \exp(-\lambda t_i)\right\}\left\{\prod_{j=k+1}^{n} \exp(-\lambda t)\right\} = \left\{\lambda^k \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{k} t_i\right)\right\}\left\{\exp\left(-\right.\right. \\
&= \left\{\lambda^k \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{k} t_i\right)\right\}\{\exp(-\lambda(n-k)t)\}
\end{aligned}$$

Soit :

$$L((D)/\lambda) = \lambda^k \exp\left(-\lambda\left[\sum_{i=1}^{k} t_i + (n-k)t\right]\right)$$

En maximisant la vraisemblance des observations, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L\left(D/\lambda\right)}{\partial\lambda} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\left(k\ln\lambda-\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+\lambda(n-k)t\right]\right)}{\partial\lambda}=0\Leftrightarrow\frac{k}{\lambda}-\left[(n-k)t+\sum_{i=1}^{k}t_i\right.\\
\overset{\wedge}{\lambda} &= \frac{k}{\left[(n-k)t+\sum_{i=1}^{k}t_i\right]}
\end{aligned}$$

3.2.6 Données censurées avec remplacement des matériels défaillants

Si t est le temps de censure des matériels non défaillants($t = t_j$), et t^* le temps de censure des matériels remplacés après défaillance ($t^* = t - t_i$), la fonction de vraisemblance si on observe r défaillances est ,dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
L((D)/\lambda) &= \left\{\prod_{i=1}^{r}f(t_i,\lambda)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{r}R(t_j^*,\lambda)\right\}\left\{\prod_{j=r+1}^{n}R(t,\lambda)\right\}\\
&= \left\{\lambda^r\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{r}t_i\right)\right\}\left\{\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{r}t_i^*\right)\exp\left(-\lambda\sum_{j=1}^{n}t_j^*\right)\right\}\\
&= \lambda^r\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{r}t_i+t_j^*\right)\exp\left(-\lambda\sum_{j=r+1}^{n}t\right),\text{ ou } t_i+t_j^*=t\\
&= \lambda^r\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{r}t_i+t_j^*+\sum_{j=r+1}^{n}t\right)=\lambda^r\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}t\right)=\lambda^r e^{-\lambda nt}
\end{aligned}$$

En maximisant la vraisemblance des observations, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L\left(D/\lambda\right)}{\partial\lambda} &= 0\Leftrightarrow\frac{\partial(\ln\lambda^r-n\lambda t)}{\partial\lambda}=0\Leftrightarrow\frac{r}{\lambda}-nt=0\\
&\Leftrightarrow \overset{\wedge}{\lambda}=\frac{r}{nt}
\end{aligned}$$

Vingt-cinq pièces de rechange sont en essai. Dix d'entre elles ont une défaillance avant 500 heures et les quinze restantes sont survivantes au bout de 500 heures.

Les pièces défaillantes sont remplacées systématiquement.

En supposons qu'une étude préalable de pièces identiques a conduit à supposer une distribution exponentiel de leurs de défaillance, on cherche à déterminer l'estimation ponctuelle du taux de défaillance de ce type de pièce.

La fonction de vraisemblance est données par

$L(D/\lambda) = \lambda^{10} \exp(-\lambda \sum t_i) \exp(-\lambda^* 500^* 15) \exp(-\lambda \sum t_j^*)$

$\lambda^{10} \exp(-\lambda \sum t_i) \longrightarrow défaillants$

$\exp(-\lambda^* 500^* 15) \longrightarrow non\ défaillants$

$\exp(-\lambda \sum t_j^*) \longrightarrow remplacement\ des\ piéces\ défaillantes$

$L(D/\lambda) = \lambda \exp(-\lambda^* 25^* 500) \longrightarrow$ pour chaque pièce défaillante, on a $t_i + t_j^* = 500h$

d'ou :

$\ln(D/\lambda) = 10 \ln \lambda - \lambda^* 25^* 500^*$

et $\frac{\partial \ln(D/\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{25^* 500} = \frac{r}{nt} \Rightarrow \lambda = 8.10^{-4} h^{-1}$

et MTTF$= 1250h$

Les pièces défaillantes ne sont pas remplacées

Si on suppose un temps moyen de défaillance $t_i = 250 heures$, le taux de défaillance est dans ces conditions :

$\overset{\wedge}{\lambda} = \frac{r}{(n-r)+\sum_{i=1}^{r} t_i} = \frac{10}{(25-10)\times 500+10\times 250} = 1,0.10^{-3}/h$

et

TMBF$= 1000 heures$

.

3.3 La loi de Pareto

3.3.1 Fonctions caractéristiques

On dit qu'une variable obéit à la loi de Pareto de paramètres a et x_0 (tous les deux >0), l'ors qu'elle admet pour densité :

$$d(t) = a \frac{x_0^a}{t^{a+1}} \text{ pour } t \geq x_0 \text{ et } 0 \text{ si non } (t \in R)$$

Telle que

x_0 : paramètre de location

k : paramètre de forme

La fonction d est continus sur R sauf au point de discontinuité x_0 ou elle admet une limite à gauche et une limite à droite, elle est partout $\geq$, et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} d(t) dt$ existe et vaut 1, en effet :

$\int_{-\infty}^{+\infty} d(t)dt = ax_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}}dt$, cette intégrale convergeant en $+\infty$ puisque l'exposant de $t, a+1 > 0$

$$ax_0^a \left[\frac{t^{-a}}{-a}\right]_{x_0}^{+\infty} = ax_0^a \frac{x_0^{-a}}{a} = 1$$

La fonction de répartition

Par définition $F(x) = p(X < x) == \int_{-\infty}^{x} d(t)dt$.
Pour $x < x_0$,avec une densité nulle, $F(x) = 0$.
Pour $x \geq x_0$,
$F(x) = ax_0^a \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^{a+1}}dt = ax_0^a \left[\frac{t^{-a}}{-a}\right]_{x_0}^{x} = ax_0^a \left(\frac{x^{-a}}{-a} - \frac{x_0^{-a}}{-a}\right) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^a$

Espérance et variance

$E(x) = \int_{x_0}^{+\infty} td(t)dt = ax_0^a \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{t^a}dt$. Cette intégrale n'existe que pour $a > 1$.
$=ax_0^a \left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_{x_0}^{+\infty} = \frac{ax_0}{a-1}$ pour $a > 1$, sinon X n'a pas d'espérance.
Pour la variance, on commence par chercher $E(X^2)$:
$E(X^2) = \int_{x_0}^{+\infty} t^2 d(t)dt = ax_0^a \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{a-1}}dt$, qui n'existe que pour $a > 2$
$= ax_0^a \left[\frac{t^{-a+2}}{-a+2}\right]_{x_0}^{+\infty} = \frac{ax_0^2}{a-2}$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{ax_0^2}{a-2} - \frac{a^2x_0^2}{(a-1)^2} = \frac{ax_0^2}{(a-1)^2(a-2)} \text{ pour } a > 2,$$
si non X n'admet pas de variance

Propriété

On veut montrer que la probabilité conditionnelle $p(X > x+y/X > x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$, y étant un nombre réel positif.

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$p(X > x+y/X > x) = \frac{p(X > x+y \text{ et } X > x)}{p(X > x)} = \frac{p(X > x+y)}{p(X > x)}$$

En supposant que $x > x_0$, ce qui sera le cas lorsque x va tendre vers l'infini,

on sait que $p(X > x) = 1 - p(X < x) = 1 - F(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^a$ .Ainsi :

$p(X > x+y/X > x) = \left(\frac{x}{x+y}\right)^a$ .Lorsque x tend vers $+\infty$, cette quantité va tendre vers 1.

Qu'est-ce que cela signifie concrètement ? Si la loi de Pareto modélise la durée de vie d'un phénomène, il est naturel d'appeler $p(X > x)$ la fonction de survie. Que signifie alors $p(X > x+y/X > x) \to 1$ pour x infini ? Plus le phénomène a une durée de vie longue, plus on vieillit, plus on a de chances de vivre encore longtemps.

3.3.2 Estimation de paramètre de Pareto

La loi de Pareto a deux paramètres a et x_0 tous deux ≥ 0. On veut maintenant déterminer un estimateur du paramètre a supposé inconnu. A partir de la densité $d(t) = a\frac{x_0^a}{t^{a+1}}$ pour $t \geq x_0$ et 0 sinon, on prend la fonction de vraisemblance :

$L(x_1, x_2, ..., x_n) = d(x_1)d(x_2)...d(x_n)$ en supposant que tout les x_i sont $>x_0$.

$$= a\frac{x_0^a}{x_1^{a+1}}a\frac{x_0^a}{x_2^{a+1}}...a\frac{x_0^a}{x_n^{a+1}} = a^n\frac{x_0^{na}}{x_1^{a+1}x_2^{a+1}...x_n^{a+1}}$$

$\ln L = n\ln a + na\ln x_{0-(a+1)(\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n)}$

Dérivons par rapport à a :

$$(\ln l)' = \frac{n}{a} + n\ln x_0 - (\ln x_1 + \ln x_2 + ... \ln x_n)$$

La dérivée s'annule pour

$$\frac{n}{a} = (\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n) - n\ln x_0 = \ln\frac{x_1}{x_0} + \ln\frac{x_2}{x_0} + ... + \ln\frac{x_n}{x_0}$$

qui est un nombre positif puisque tous les x_i sont $>x_0(> 0)$, d'ou la valeur de a correspondante :

$$a = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{x_0}}$$

Cette valeur est bien un maximum pour $\ln L$, et par suite de L, puisque la dérivée de $\ln L$ par rapport à a, de la forme $\frac{n}{a-B}$, est décroissante, passant donc du positif au négatif. Ainsi la suite (W_n), avec $W_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{x_0}}$, est un estimateur du maximum de vraisemblance.

On peut déjà prévoir que pour n suffisamment grand l'espérance de W_n va être proche de a .Cela demande à être précisé.

Est ce que W_n est un estimateur sans biais de a ?

Pour cela, on veut déterminer $E(W_n)$ pour $n \geq 2$.

Propriété

Lorsque X est une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètres a et x_0 , la variable aléatoire $Y = \ln \frac{X}{x_0}$ suit une loi exponentielle de paramètre a.

On rappelle aussi qu'une somme de n variables aléatoire obéissant toutes à la même loi exponentielle de paramètre k obéit elle-même à la loi de gamma de paramètres n et k.

Posons $Y_i = \ln \frac{X_i}{x_0}$.Puisque les X_i suivant une loi de Pareto de paramètres a et x_0, y_i suit une loi exponentielle de paramètre a .Dans ces conditions $\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{x_0} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, et l'on a une somme de variables indépendantes obéissant toutes à la loi exponentielle de paramètre a .On sait qu'alors la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ a pour densité $d(t) = \frac{a^n}{(n-1)!} e^{-at} t^{n-1}$ pour $t \geq 0$ et 0 sinon. A son tour $W_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{x_0}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$ a pour espérance :

$$E(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t} d(t) dt = \frac{na^n}{(n-1)!} \int_{0}^{+\infty} e^{-at} t^{n-2} dt,$$

Sous réserve que cette intégrale existe. Comme $n \geq 1$, l'intégrale existe en 0, et en $+\infty$, $e^{-at} t^{n-1}$ tend vers 0 et l'intégrale existe encore.

On constate aussi que $\frac{a^{n-1}}{(n-2)!} e^{-at} t^{n-2}$, pour $n \geq 2$, est la densité de $\sum_{i=1}^{n-1} Y_i$, d'ou :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-2)!} e^{-at} t^{n-2} dt = 1.$$

$$E(W_n) = \frac{na^n}{(n-1)!} \int_{0}^{+\infty} e^{-at} t^{n-2} dt = \frac{na}{(n-1)} \int_{0}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-2)!} e^{-at} t^{n-2} dt = \frac{na}{(n-1)}$$

Pour avoir un estimateur sans biais de a, il suffit de prendre la suite $(W_n^{,})$ avec :

$$W_n^{,} = \frac{n-1}{n} W_n$$

Puisque

$$E(W_n^{,}) = \frac{n-1}{n} E(W_n) = \frac{n-1}{n} \frac{na}{n-1} = a.$$

3.4 Modèle de Weibull

La loi de weibull, nommée d'après Waldi Weibull, cette distribution est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie, grâce à sa flexibilité. Elle convient pour modéliser des structures comportant une grande quantité de petits défauts.

C'est une distribution utilisée pour évaluer les valeurs extrêmes des pannes, elle permet de modéliser en particulier de nombreuse situations d'usure de matériel, aussi elle caractérise leur comportement dans les trois phases de vie utile et périodique d'usure ou vieillissement.

3.4.1 3.1 Fonctions caractéristiques

A-Weibull avec trois paramètres

Soit T une variable aléatoire qui présente la duré de vie du matériel.

La densité de probabilité est

$$f(t, \beta, \eta, \gamma) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta - 1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} t \succ 0$$

La fonction de répartition présenté par

$$F(t, \beta, \eta, \gamma) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$$

ou $\beta \succ 0$ le paramètre de forme

$\eta \succ 0$ le paramètre d'échelle lié au temps moyen de bon fonctionnement

$\gamma \geq 0$ le paramètre de position

B-Weibull avec deux paramètres

La densité de la loi de weibull à deux paramètres est

$$f(t,\beta,\eta,)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}t\succ 0$$

La fonction de répartition est

$$F(t,\beta,\eta,)=1-e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

C- Le temps moyenne de bon fonctionnement

Le TMBF qui présente l'espérance mathématique de la variable de durée de vie T

$$E(T)=\int_{0}^{+\infty}f(t)dt$$

Le calcule de ce intégrale n'est pas facile, on va utiliser la fonction de **gamma** telle que $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$ et on a aussi $\Gamma(x)=(x-1)!$

On pose

$$u=\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

d'ou $t=\eta u^{\frac{1}{\beta}}$ et $du=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}dt$

$\Rightarrow E(t)=\int_0^{+\infty}\left(\eta u^{\frac{1}{\beta}}\right)e^{-u}du=\eta\int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{\beta}}e^{-u}du$

d'ou finalement

$$TMBF=E(T)=\eta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

En calcule du même façon le moment d'ordre deux

$$E(T^2)=\eta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)+2\beta\eta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

connue que $V(T)=E(T^2)-(E(T))^2$

donc la variance de T est

$$V(T)=\eta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

D- La fonction de fiabilité

Comme on a vu dans le premier chapitre la fiabilité d'une distribution ε est $\quad R(t) = 1 - F(t)$

On a donc pour la distribution de weibull $\quad R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}\right)$

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

E-Le taux de défaillance

Le taux de panne est donner par

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

On constate expérimentalement, à partir d'une approche statistique que la courbe représentative de cette fonction est une courbe en ‹‹baignoire›› qui vari en trois périodes distincte, et suivant les valeurs de β, le taux de défaillance est :

_Si $\beta \prec 1$,$\lambda(t)$ décroit avec le temps, ce qui est représentatif de **la période de jeunesse** des matériels dans la courbe en baignoire, c'est au cour de cette période que se justifie l'intérêt du déverminage.

_Si $\beta = 1$ $\lambda(t)$ est constant avec le temps, ceci correspond à **la période de vie utile**, on retrouve la loi exponentielle.

_Si $\beta \succ 1$,$\lambda(t)$ croit avec le temps, on aborde alors **la période de vieillesse** ou d'usure, c'est qu'il faudra intervenir de façon préventive.

Utilisation pratique

L'expression de la loi de Weibull recouvre en fait toute une famille de lois, certaines d'entre elles apparaissant en physique comme conséquence de certaines hypothèses. C'est, en particulier, le cas de la loi exponentielle ($\beta = 1$) et la loi de Rayleigh ($\beta = 2$) importantes en matière de processus stochastique. Ces lois constituent surtout des approximations particulièrement utiles dans des techniques divers alors qu'il serait très difficile et sans grand intérêt de justifier une forme particulière de loi. Une distribution à valeurs positives (ou, plus généralement mais moins fréquemment, à valeurs supérieurs à une valeur ordonnée) a presque toujours la même allure. Elle part d'une fréquence d'apparition nulle, croit jusqu'à un maximum et décroit plus lentement. Il est alors possible de trouver dans la famille de Weibull une loi qui ne s'éloigne pas trop des données disponibles en calculant β et η à partir de la moyenne et la variance observées.

Application particulière

La distribution de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie, grâce à sa flexibilité : comme dit précédemment, elle permet de présenter au moins approximativement une infinité de lois de probabilité. La compréhension du taux de panne peut fournir une indication au sujet de la nature des pannes.

- Un taux de panne décroissant relève d'une "mortalité infantile" .Ainsi, les éléments défectueux tombent en panne rapidement, et le taux de panne au cours du temps, quand les éléments fragiles sortent de la population.

- Un taux de panne constant suggère que les éléments tombent en panne à cause d'événements aléatoires.

-Un taux de panne croissant suggère une "usure ou un problème de fiabilité" : les éléments ont de plus de chances de tomber en panne quand le temps passe.

3.5 Estimation de la fonction de fiabilité d'un modèle de weibull par le maximum de vraisemblance

3.5.1 Données complètes

Pour simplifier la présentation des calcul, on pose $\lambda = \frac{1}{\eta^\beta}$

La densité s'écrit

$$f(t) = \lambda\beta t^{\beta-1} \exp\left(-\lambda t^\beta\right)$$

La vraisemblance

Soit $t_1 \prec t_2.... \prec t_n$ sont les n dures de vie observé, et lorsque les données sont complètes, la vraisemblance qui est une fonction de deux paramètres sera :

$$L(t_1, t_2, ...t_n, \beta, \eta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \beta, \eta)$$

$$\begin{aligned} L(t_1, t_2, ...t_n, \beta, \eta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right] = \prod_{i=1}^{n} \lambda\beta t_i^{\beta-1} \exp\left(-\lambda t_i^\beta\right) \\ &= (\lambda\beta)^n \prod_{i=1}^{n} t_i^{\beta-1} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i^\beta\right) \end{aligned}$$

Estimation des paramètres

Comme on a vu dans le 2^{eme} chapitre , et pour des raisons de simplification de calcul, on fait appel au logarithme népérien de la fonction de vraisemblance

donc

$$\ln L(t_1, t_2, ...t_n, \beta, \eta) = n \ln \lambda + n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}$$

On cherche la solution des équations

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0 \quad et \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \ln t_i \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=}^{n} t_i^{\beta}} \Rightarrow \overset{\wedge}{\eta}^{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}}{n} \\ \overset{\wedge}{\beta} &= \frac{n}{\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \ln t_i - \sum_{i=1}^{n} \ln t_i} \end{aligned}$$

La résolution de ce système implique de lourds calculs, cependant si on dispose d'une bonne estimation préalable de β, par exemple à l'aide du graphe du weibull (on ait pas intéresser par cette méthode), on pourra le résoudre itération ,en calculant $\overset{\wedge}{\lambda}$ a partir de cette valeur et en recalculant une nouvelle valeur de $\overset{\wedge}{\beta}$ a partir de cette valeur , et en recalculant une nouvelle valeur de $\overset{\wedge}{\beta}$,cette valeur est utilisée à nouveau pour calculer $\overset{\wedge}{\lambda}$.

en 1962, LLOYD et LIPOW proposent la méthode suivant :

utiliser comme valeur initiale de $\overset{\wedge}{\beta}$, celle obtenue en égalant la moyenne expérimentale de l'échantillon à sa valeur théorique dans la population soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i &= \eta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) = \lambda^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \\ ou\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

qui peut être résolu en β par approximations successives faisant, appel à l'emploi d'une table de la fonction Γ dans les deux cas, théoriquement faciles, sont lourds mais ils peuvent être aisément programmés.

3.5.2 Données censurées (à droite)

La fonction de vraisemblance relative à l'observation de k défaillances survenant aux temps t_i et $(n-k)$ survies aux temps t_j pour la loi de weibull de paramètres η et β :

$$L(T) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n} \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}\right] \exp\left[-\left(\frac{t_j}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

Pour simplifier les calcules, on recherche le maximum du logarithme de la fonction de vraisemblance car ce maximum correspond aussi à celui de la fonction de vraisemblance .on a donc :

$$\ln L(T) = k\ln\beta + k\ln\frac{1}{\eta^{\beta}} + (\beta-1)\left[\sum_{i=1}^{k}\ln t_i\right] - \frac{1}{\eta^{\beta}}\left[\sum_{i=1}^{k} t_i^{\beta} \sum_{j=1+k}^{n} t_j^{\beta}\right]$$

Les dérivées relatives à β, puis à η, que l'on rend égal à zéro, déterminent le maximum de la distribution de chacun des paramètres.

La dérivée par rapport à β est :

$$\frac{\partial \ln L(T)}{\partial \beta} = \frac{k}{\beta} + \left[\sum_{i=1}^{k}\ln t_i\right] - \lambda\left[\sum_{i=1}^{k} t_i^{\beta}\ln t_i + \sum_{j=k+1}^{n} t_j^{\beta}\ln t_j\right] = 0$$

Comme précédemment on à poser que $\lambda = \frac{1}{\eta^{\beta}}$
En multipliant par β et en divisant par λ, on obtient :

$$\frac{k}{\lambda} + \beta \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \ln t_i \right) - \beta \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} t_i^{\beta} \ln t_i + \sum_{j=k+1}^{n} t_j^{\beta} \ln t_j \right) = 0$$

D'ou :

$$\overset{\wedge}{\beta} = \frac{k}{\lambda \left(\sum_{j=k+1}^{n} t_j^{\beta} \ln t_j + \sum_{i=1}^{k} t_i^{\beta} \ln t_i - \sum_{i=1}^{k} \ln t_i \right)}$$

La dérivée de (a^x) étant :

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = \ln a(a^x)$$

La dérivée par rapport à λ est :

$$\frac{\partial \ln L(T)}{\partial \lambda} = \frac{k}{\lambda} - \left[\sum_{i=1}^{k} t_i^{\beta} + \sum_{j=k+1}^{n} t_j^{\beta} = 0 \right]$$

Equation qui permet da calculer successivement :

$$\overset{\wedge}{\lambda} = \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} t_i^{\beta} + \sum_{j=k+1}^{n} t_j^{\beta}}$$

et $\overset{\wedge}{\eta} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} t_i^{\beta} + \sum_{j=k+1}^{n} t_j^{\beta}}{} \right]^{\frac{1}{\beta}}$

Pour obtenir les valeurs des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres β et η, il faut résoudre itérativement le système d'équation nom implicite :

$$\overset{\wedge}{\beta} = \frac{1}{\frac{\sum_1^k t_i^{\beta} \ln t_i + (n-k) t_s^{\beta} \ln t_s}{\sum_1^k t_i^{\beta} + (n-k) t_s^{\beta}} - \frac{1}{k} \sum_1^k \ln t_i}$$

$$\overset{\wedge}{\eta} = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} t_i^{\beta} + (n-k)\, t_s^{\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

t_i étant les temps des défaillance et t_s le temps de censure à droite supposé ici identique pour tous les matériels survivants.

Pour réaliser ce calcul on choisit tout d'abord une valeur initial de β, soit $\overset{\wedge}{\beta}_1$.on détermine une première estimation de $\overset{\wedge}{\beta}$ a partir de la valeur $\overset{\wedge}{\beta}_1$avec la première équation du système .On obtient une nouvelle valeur de l'estimateur $\overset{\wedge}{\beta'}_1$.on continue le calcul en remplaçant la valeur courante de β de la partie droite de l'équation par la valeur $\frac{\overset{\wedge}{\beta}_1+\overset{\wedge}{\beta'}_1}{2}=\overset{\wedge}{\beta}_2$, et ainsi de suite .lorsque l'estimateur $\overset{\wedge}{\beta}$ est stable on détermine $\overset{\wedge}{\eta}$.

Et comme on vus ces résultats prend des lourd calculs, ce la nous conduisons à utiliser des méthode d'approximation .

3.6 L'algorithme EM

D'après Dempster, Laird et Rubin(1977), l'algorithme EM est une approche générale qui fait un calcul itératif pour trouver des estimateurs du maximum de vraisemblance lorsque les données sont incomplètes. On l'appelle ‹‹ l'algorithme EM ›› puisque chaque itération de l'algorithme consiste une étape d'**E**spérance et une étape de **M**aximisation.

3.6.1 Notation

Soit Y, le vecteur aléatoire correspondant aux données observées y, ayant une fonction de densité dénotée $f(y/\theta)$,ou $\theta = (\theta_1, ...\theta_d)^T$ est un vecteur de paramètre inconnus dans l'espace Θ.

Le vecteur des valeurs observées y est incomplet, c'est-à-dire que certaines de ses données sont manquantes. Si la situation était idéale, toutes les données seraient présentes. Dans ce cas, ce serait le vecteur x qui serait observé. Mais dans les cas qui nous intéressent, c'est y qui est observé et ce dernier a des valeurs manquantes qui sont contenues dans le vecteur z .Donc si on ajoutait le vecteur z au vecteur y, toutes les données seraient présentes et ainsi, le vecteur x serait formé. Par exemple, admettons que 3 dés sont lancés et que les résultats de la face gagnante sont notés. Le vecteur x serait formé des 3 valeurs obtenues par les dés, soit par exemple $x = (1, 5, 2)$.Par contre si le deuxième dé ne pouvait être lu, alors on observerait $y = (1, ., 2)$ et donc $z = (5)$.

Au lieu d'observer le vecteur des données complètes x dans χ ,c'est plutôt le vecteur des données incomplètes $y = y(x)$ dans $\mathbf{Y}$ qui est observé. χ et $\mathbf{Y}$ sont des espaces échantillonnals et il y a plusieurs valeurs dans

χ pour une valeur dans **Y.** On définit ainsi $\chi(y) = \{x : y(x) = y\}$**.** Dans l'exemple sur les dés mentionné plus haut, on aurait

$$\chi(y) = \{(1,1,2),(1,2,2),(1,3,2),(1,4,2),(1,5,2),(1,6,2)\}$$

Soit toutes les vecteurs possibles que les dés peuvent prendre lorsque le deuxième dé ne peut être lu et que le premier et le dernier dé ont respectivement une valeur de 1 et de2.

Même lorsque c'est le vecteur x qui est observé, c'est-à-dire lorsque toutes les données sont présentes, l'algorithme EM peut être utilisé pour faciliter le calcul de l'estimateur de maximum de vraisemblance. En effet, moins il ya de données manquantes, plus l'estimation du maximum de vraisemblance par l'algorithme EM sera simple.

3.6.2 Vraisemblance pour les données observées

Soit $f_c(x/\theta)$, la fonction de densité de vecteur aléatoire X correspondant au vecteur de données complètes x. Alors la fonction de log-vraisemblance qui pourrait être formée

$$l_c(\theta/x) = \ln\left(L_c(\theta/x)\right) = \ln\left(f_c(x/\theta)\right) \tag{1}$$

Aussi, McLachlan et Krishnan (1997,p22) donnant la relation suivante pour la vraisemblance sous les données observées y :

$$L(\theta/y) = f(y/\theta) = \int_{\chi(y)} f_c(x/\theta)dx \tag{2}$$

C'est-à-dire que le principe pour calculer $L(\theta/y)$ est que, pour toutes les valeurs manquantes de y , on somme sur toutes leurs valeurs possible dans $\chi(y)$. Dans l'illustration des dés, la fonction de vraisemblance pour les données observées serait donc données par

$$L(\theta/y) = f(y/\theta) = \sum_{x_2=1}^{6} f_c((1,x_2,2)/\theta)$$

3.6.3 Les étapes E et M

L'algorithme EM tente de résoudre le problème suivant :

sachant qu'un échantillon de Y est observé, mais que les X correspondants ne sont pas observés entièrement (ou cachés), il faut trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $\overset{\wedge}{\theta}$ qui maximise $l(\theta/y) = \ln\left(f(y/\theta)\right).$ l'approche de l'algorithme EM envers ce problème est de résoudre la fonction score pour les données incomplètes, $S(\theta/y) = \partial l(\theta/y)/\partial\theta$, indirectement en faisant des itérations à l'aide de la fonction de log-vraisemblance pour les données complètes donnée par l'équation (1). Mais puisque les éléments de cette dernière équation ne sont pas tous observés, elle est remplacée par son espérance conditionnelle sachant y, en utilisant le θ de l'itération en cours.

Plus spécifiquement, MacLachlan et Krishnan (1997,p22) présentent les étapes E et M de cet algorithme comme suit :

Soit $\theta^{(0)}$, une valeur initiale de θ choisie arbitrairement, à laquelle l'algorithme début. Alors à la première itération, l'étape E (Espérance) de l'algorithme EM se calcule comme suit :

$$Q(\theta/\theta^{(0)}) = E_{\theta^{(0)}}\left[l_c(\theta/X)/y\right] \qquad (3)$$

Ensuite, l'étape M (Maximisation) maximise (3) par rapport à $\theta \in \Theta$. En fait, $\theta^{(1)}$ est choisi selon l'inéquation $Q(\theta^{(1)}/\theta^{(0)}) \geq Q(\theta/\theta^{(0)})$ pour tout $\theta \in \Theta$.

à la deuxième itération, les étapes E et M sont refaites, mais cette fois-ci avec $\theta^{(1)}$ au lieu de $\theta^{(0)}$.

Voici donc les étapes E et M pour l'itération $(b+1)$:

Etape E : Calculer $Q(\theta/\theta^{(0)})$, ou

$$Q(\theta/\theta^{(b)}) = E_{\theta^{(b)}}\left[l_c(\theta/X)/y\right] \qquad (4)$$

Etape M : Choisir $\theta^{(b+1)}$ qui est une valeur de $\theta \in \Theta$ qui maximise (4), c'est-à-dire qui est telle que $Q(\theta^{(b+1)}/\theta^{(b)}) \geq Q(\theta/\theta^{(b)})$ pour tout $\theta \in \Theta$.

Ces deux étapes sont répétées jusqu'à ce que la différence entre la fonction de vraisemblance de l'itération $(b+1)$ et celle de l'itération (b) ne change pratiquement plus (dans les cas ou la suite de $L(\theta^{(b)}/y)$ converge vers un point stationnaire) :

$$L(\theta^{(b+1)}/y) - L(\theta^{(b)}/y) \leq \varepsilon,$$

Ou ε est une valeur arbitraire positive très près de zéro.

Il sera démontré à la suite (dans 3.4.5) que $L(\theta/y)$ ne décroit pas après une itération, c'est-à-dire que $L(\theta^{(b+1)}/y) \geq L(\theta^{(b)}/y)$, avec l'égalité survenant seulement aux points stationnaires de $L(\theta/y)$.La convergence de la suite des fonctions de vraisemblance vers un point stationnaire est donc obtenus lorsque cette suite est bornée par haut.

3.6.4 L'algorithme EM pour les familles exponentielles

Si la distribution des données complètes est un membre de la famille exponentielle, alors l'algorithme EM est beaucoup plus simple à calculer.

McLachlan et Krishnan (1997, p.22) définissent la famille exponentielle comme la famille des distributions dont la fonction de densité est de la forme suivante :

$$f_c(x/\theta) = b(x) \exp\left\{c^T(\theta)t(x)\right\}/a(\theta) \qquad (5)$$

ou $t(x)$ est une statistique exhaustive de dimension $k \times 1$ $(k \geq d)\,, c(\theta)$ est un vecteur de dimension $k \times 1$ qui est fonction du vecteur de paramètres θ de dimension $d \times 1$ et $a(\theta)$ et $b(\theta)$ sont des fonctions scalaires.

Si $k = d$ et que le Jacobien de $c(\theta)$ est de rang complet, alors $f_c(x/\theta)$ appartient à la famille exponentielle régulière.Si $f_c(x/\theta)$ appartient à la famille exponentielle régulière de forme canonique, alors $c(\theta) = \theta$ et

$$f_c(x/\theta) = b(x) \exp\left\{\theta^T t(x)\right\}/a(\theta) \qquad (6)$$

Dans ce cas, la fonction de log-vraisemblance a la forme suivante :

$$l_c(\theta/x) = \ln(b(x)) - \ln(a(\theta)) + \theta^T t(x) \qquad (7)$$

On voit bien que maximiser (7) par rapport à θ revient au même que de maximiser $l_c(\theta/t(x)) = -\ln(a(\theta)) + \theta^T t(x)$ qui ne dépend de x seulement que par $t(x)$.

On a aussi que

$$\begin{aligned} E_\theta\left[l_c(\theta/X)\right] &= E_\theta\left[l_c(\theta/t(X))\right] \\ &= -\ln(a(\theta)) + \theta^T E_\theta\left[t(X)\right] \\ &= l_c(\theta/E_\theta\left[t(x)\right]). \qquad (8) \end{aligned}$$

De plus, si on intègre par rapport à x des deux cotés de l'équation (6), on obtient que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x/\theta)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[b(x)\exp\left\{\theta^T t(x)\right\}/a(\theta)\right] dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} b(x)\exp\left\{\theta^T t(x)\right\} dx \qquad (9)$$

En dérivant des deux cotés de (9) par rapport à θ, on a que

$$\frac{d}{d\theta}a(\theta) = \frac{d}{d\theta}\int_{-\infty}^{\infty} b(x)\exp\left\{\theta^T t(x)\right\} dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a(\theta)\frac{d}{d\theta}\ln\left(a\left(\theta\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\theta}b(x)\exp\left\{\theta^T t(x)\right\} dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a(\theta)\frac{d}{d\theta}\ln\left(a\left(\theta\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} b(x)t(x)\exp\left\{\theta^T t(x)\right\} dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a(\theta)\frac{d}{d\theta}\ln\left(a\left(\theta\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)a(\theta)f_c(x/\theta)dx \qquad \text{(de 8)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{d\theta}\ln\left(a\left(\theta\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)f_c(x/\theta)dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{d\theta}\ln(a\left(\theta\right)) = E_\theta\left[t(x)\right] \qquad (10)$$

Qui est l'espérance de la statistique exhaustive $t(X)$. Les équations (8) et (10) sont utilisées dans les étapes E et M de l'algorithme EM pour les familles exponentielle régulières canoniques comme il sera mentionné ultérieurement.

Une autre propriété intéressante concernant les familles exponentiel régulières canonique est que la matrice d'information espérée de θ est égale à la matrice de variance-covariance de $t(X)$.

McLachlan et krishnan (1997, p27) donnent une façon plus formelle d'écrire cette propriété :

$$I_c = cov_\theta \left[t(X) \right] \qquad (11)$$

D'après Dempster, Laird et Rubin (1977) et McLachlan et krishnan (1997, p27), voici les étapes E et M de l'algorithme EM pour la famille exponentielles canonique :

Etape E : calculer $Q(\theta/\theta^b)$ à partir de l'équation (8)

$$\begin{aligned} Q(\theta/\theta^{(b)}) &= E_{\theta^{(b)}} \left[l_c(\theta/X)/y \right] \\ &= -\ln(a(\theta)) + \theta^T E_{\theta^{(b)}} \left[t(X)/y \right] \qquad (12) \end{aligned}$$

(les termes qui n'impliquent pas θ ont été ignorés)

Etape M : Dériver (12) par rapport à θ et poser cette équation égale à zéro.

On trouve alors que $t^{(b)} = E_{\theta^{(b)}} \left[t(X)/y \right] = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\ln(a(\theta)) \right]$. En utilisant l'équation (10), on doit donc résoudre l'équation suivante pour déterminer θ^{b+1} :

$$E_\theta(t(X)) = t^{(b)} \qquad (13)$$

Si l'équation (13) peut être résolue algébriquement pour $\theta^{b+1} \in \Theta$, alors la solution est unique. Sinon, le θ^{b+1} maximum est sur la frontière de Θ.

3.6.5 Monotonocité de l'algorithme EM

Dans cette section, il est démontré que la fonction de vraisemblance pour les données incomplètes, $L(/y)$, ne décroit pas après une itération de l'algorithme EM, c'est-à-dire que

$$L(\theta^{(b+1)}/y) \geq L(\theta^{(b)}/y), \ b = 0, 1, 2, ... \qquad (14)$$

McLachlan et krishnan (1997, p83) donnent la fonction de densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ suivante :

$$k(x/y,\theta) = \frac{f_c(x/\theta)}{f(x/y)} \qquad (15)$$

Alors la fonction de log-vraisemblance pour les données incomplètes peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} l(\theta/y) &= \ln(L(\theta/y)) = \ln(f(y/\theta)) \\ &= \ln(f_c(x/\theta)/k(x/y,\theta)) \qquad \text{de}(15) \\ &= \ln(f_c(x/\theta)) - \ln(k(x/y,\theta)) \\ &= l_c(\theta/x) - \ln(k(x/y,\theta)) \qquad (16) \end{aligned}$$

L'espérance de l'équation (17) est prise par rapport à la distribution conditionnelle de X sachant $Y = y$,en utilisant la valeur $\theta^{(b)}$ pour θ. l'équation devient alors :

$$E_\theta\left[l(\theta/y)/y\right] = l(\theta/y) = E_{\theta^{(b)}}\left[l_c(\theta/X)/y\right] - E_{\theta^{(b)}}\left[\ln(k(X/y,\theta))/y\right] \qquad (17)$$

De l'équation (4),on a que

$$Q(\theta/\theta^{(b)}) = E_{\theta^{(b)}}\left[l_c(\theta/X)/y\right]$$

Et en posant

$$H(\theta/\theta^{(b)}) = E_{\theta^{(b)}}\left[\ln(k(X/y,\theta))/y\right]$$

Alors l'équation (18) peut se réécrire de la façon suivante :

$$l(\theta/y) = Q(\theta/\theta^{(b)}) - H(\theta/\theta^{(b)}) \qquad (18)$$

En utilisant l'équation (18), on trouve que

$$\begin{aligned} l(\theta^{b+1}/y) - l(\theta^{b}/y) &= \left[Q(\theta^{b+1}/\theta^{(b)}) - H(\theta^{(b+1)}/\theta^{(b)})\right] \\ &\quad - \left[Q(\theta^{b}/\theta^{(b)}) - H(\theta^{(b)}/\theta^{(b)})\right] \\ &= \left[Q(\theta^{b+1}/\theta^{(b)}) - Q(\theta^{(b)}/\theta^{(b)})\right] \\ &\quad - H(\theta^{b+1}/\theta^{(b)}) - H(\theta^{(b)}/\theta^{(b)})] \qquad (19) \end{aligned}$$

La première soustraction du coté droite de l'égalité de l'équation (19) est positive puisque $\theta^{(b+1)}$ est choisi tel que

$$Q(\theta^{b+1}/\theta^{(b)}) \geq Q(\theta/\theta^{(b)}) \qquad \text{pour tout } \theta \in \Theta \qquad (20)$$

Ainsi, l'inégalité (14) est vraie si on a que

$$H(\theta^{(b+1)}/\theta^{(b)}) - H(\theta^{(b)}/\theta^{(b)}) \leq 0 \qquad (21)$$

Pour tout θ,

$$\begin{aligned}
H(\theta/\theta^{(b)}) - H(\theta^{(b)}/\theta^{(b)}) &= E_{\theta^{(b)}}\left[\ln(k(X/y,\theta))/y\right] \\
&\quad -E_{\theta^{(b)}}\left[\ln(k(X/y,\theta^{(b)}))/y\right] \\
&= E_{\theta^{(b)}}\left[\ln(k(X/y,\theta)/k(X/y,\theta^{(b)}))/y\right] \\
&\leq \ln(E_{\theta^{(b)}}\left[k(X/y,\theta)/k(X/y,\theta^{(b)})\right]/y) \qquad (22) \\
&= \ln\left(\int\limits_{\varkappa(y)} \frac{k(x/y,\theta)}{k(x/y,\theta^{(b)})} k(x/y,\theta^{(b)})dx\right) \\
&= \ln(\int\limits_{\varkappa(y)} k(x/y,\theta)dx) \\
&= \ln(1) \\
&= 0. \qquad (23)
\end{aligned}$$

L'inégalité en (22) est une conséquence directe de l'inégalité de Jensen et de la concavité de la fonction logarithmique.

On a donc montré l'inégalité (21) et par le fait même l'inégalité (14) .Ainsi, $L(\theta/y)$ ne décroit pas après une itération de l'algorithme EM. Cette fonction de vraisemblance sera strictement croissante si l'inégalité (20) est stricte.

Ainsi, pour une suite bornée de valeurs de vraisemblance $\{L(\theta/y)\}$.

$L(\theta/y)$ converge de façon monotone vers une certaine valeur L^*,ou $L^* = L(\theta^*/y)$ pour un point θ^* pour lequel $\partial L(\theta/y)/\partial\theta = 0$ ou $\partial l(\theta/y)/\partial\theta = 0$. En d'autres mots, la fonction de vraisemblance augmente de façon monotone croissante à chaque itération de l'algorithme et atteint son sommet au point L^*.

3.6.6 Convergence d'une suite EM vers une valeur stationnaire

Comme il a été vu à la section précédente, pour une suite bornée $\{L(\theta/y)\}$, $L(\theta/y)$ est monotone croissante et converge vers une certaine valeur L^*.McLachlan et krishnan (1997, p85)mentionnent que, dans presque toutes les applications, L^* est une valeur stationnaire.

La plut part du temps, L^* est un maximum local. Par contre, si la suite EM $\left\{\theta^{(b)}\right\}$ est prise dans un point stationnaire θ^* qui ni un maximum local ni un maximum global (par exemple, un point de selle) ,une petite perturbation aléatoire de θ en-dehors du point de selle θ^* éloignera l'algorithme EM de ce point selle.

Si $L(\theta/y)$ a plusieurs points stationnaires, la convergence de la suite EM vers un maximum local, un maximum global ou un point de selle dépendra de la valeur initiale $\theta^{(0)}$ .Cependant, si la fonction de vraisemblance est unimodale dans Θ, alors la suite EM convergera nécessairement vers l'unique estimateur du maximum de vraisemblance, peu importe le point de départ $\theta^{(0)}$ utilisé.

Finalement, le théorème suivant est un résultat important sur la convergence d'une suite EM vers un point stationnaire et s'énonce comme suit :

Théorème

Supposons que $Q(\theta/\theta')$ est continue en θ et en θ'.Alors tous les points limites de la suite $\left\{\theta^{(b)}\right\}$ de l'algorithme EM sont des points stationnaire de $L(\theta/y)$ et $L(\theta^{(b)}/y)$ converge de façon monotone vers L^* pour n'importe quel point stationnaire θ^* .

3.6.7 Taux de convergence de l'algorithme EM

McLachlan et krishnan (1997, p105) expliquent que l'algorithme EM définit implicitement une fonction $\theta \longmapsto M(\theta)$ d'un espace d'un paramètre θ, Θ, vers lui-même telle que chaque itération est définie par

$$\theta^{(b+1)} = M(\theta^{(b)}), \quad b = 0, 1, .. \qquad (24)$$

Si $\theta^{(b)}$ converge vers un point θ^* et $M(\theta)$ est continue, alors θ^* doit satisfaire

$$\theta^* = M(\theta^*) \qquad (25)$$

Dans le voisinage de θ^* , par un développement en série de Taylor de $\theta^{(b+1)} = M(\theta^{(b)})$ autour du point $\theta^{(b)} = \theta^*$, on obtient de Meng et Rubin (1991) :

$$\theta^{(b+1)} - \theta^* \approx DM(\theta^*)(\theta^{(b)} - \theta^*), \tag{26}$$

ou $DM(\theta^*)$ est le Jacobien de dimension $d \times d$ pour $M(\theta) = (\ M_1(\theta), ...,$ $M_d(\theta))$ évaluée à $\theta = \theta^*$ dont le$(i,j)ème$ élément $(DM(\theta^*)_{ij}$ est donné par

$$r_{ij} = (DM(\theta^*))_{ij} = \left(\frac{\partial M_j(\theta)}{\partial \theta_i}\right)|_{\theta=\theta^*} \tag{27}$$

Ainsi, dans le voisinage de θ^* , l'algorithme EM est essentiellement une itération linéaire avec la matrice de taux $DM(\theta^*)$, puisque $DM(\theta^*)$ est différente de zéro. On dit alors que la matrice $DM(\theta^*)$ est la matrice du taux de convergence de l'algorithme EM.

McLachlan et krishnan (1997, p105) définissent une mesure du taux de convergence observé qui peut être déterminée par le taux de convergence globale comme suit :

$$r = \lim_{b\to\infty} \left\|\theta^{(b+1)} - \theta^*\right\| / \left\|\theta^{(b)} - \theta^*\right\| \tag{28}$$

ou $\|.\|$ est n'importe quelle norme sur l'espace R^d . Sous certaines conditions de régularité,

$$r \equiv \text{ la plus grande valeur propre de } DM^T(\theta^*).$$

Ainsi, une grande valeur de r implique que l'algorithme converge lentement

.

3.6.8 Forces et faiblesses de l'algorithme EM

Dans cette partie, l'objectif est de donner une idée du potentiel de l'algorithme EM comme outil utile pour l'estimation de paramètres dans des problèmes d'estimation statistique. Quelque critique de cet algorithme sera aussi mentionnée. De plus, il sera comparé à ses compétiteurs, comme les méthode de Newoton-Raphson et du score de Fisher, car ceux-ci utilisent aussi des algorithmes itératifs pour trouver les EMV.

Mclahlan et Krishnan (1997,p32) présentent quelques avantages de l'algorithme EM comparé à ces méthodes :

- L'algorithme EM est stable numériquement et la vraisemblance croit à chaque itération (sauf à un point fixe de l'algorithme).

- L'algorithme EM converge globalement sous certaines conditions. En effet, en partant d'un point arbitraire $\theta^{(0)}$ dans l'espace du paramètre, la convergence se fait presque toujours à un maximum local. Il peut arriver que ce ne soit pas le cas, mais cela arrive très rarement ; soit que le choix de $\theta^{(0)}$ ait été très malchanceux ou encore qu'il y ait une pathologie locale dans la fonction de log-vraisemblance.

- L'algorithme EM est facilement mis en application parce qu'il s'appuie sur le calcul des données complètes. En effet, l'étape E ne prend que l'espérance sur la distribution conditionnelle des données complètes à chaque itération, tandis que l'étape M n'exige, pour sa part, que l'estimation du maximum de vraisemblance des données complètes à chaque itération, qui est souvent sous une forme simple.

- L'algorithme EM est souvent facile à programmer, puisque ni l'évaluation de sa vraisemblance des données observées ni celle de ses dérivées ne sont nécessaire.

- L'algorithme EM demande peu d'espace de stockage et peut généralement être utilisé sur un petit ordinateur. Par exemple, il n'a pas besoin d'emmagasiner la matrice d'information ni son inverse.

- Souvent, le problème des données complètes est un problème ‹‹ classique ››, donc l'étape M peut souvent être résolue en utilisant des logiciels statistiques.

- Le travail analytique nécessaire est plus simple que celui des autres méthodes puisque seulement l'espérance conditionnelle de log-vraisemblance pour les données complètes a besoin d'être maximisée. Il a une certaine quantité de travail analytique à faire pour exécuter l'étape E, mais dans la plupart des applications, cette étape n'est pas compliquée.

- Le cout par itération étant généralement bas, un plus grand nombre d'itérations que les autres méthodes peut donc être exécuter par l'algorithme EM pour un cout donné.

- En observant la croissance monotone de la vraisemblance à chaque itération, il est facile de contrôler sa convergence et les erreurs de programmation.

-L'algorithme EM peut être utilisé pour fournir des valeurs estimées des données manquantes.

Voici maintenant quelques critiques de l'algorithme EM :

- L'algorithme EM n'a pas de procédure incluse qui pourrait produire la matrice de variance-covariance des paramètres estimées.

- L'algorithme EM peut converger lentement même pour les problèmes qui semblent inoffensifs. Il peut converger lentement aussi lorsqu'il ya beaucoup d'information manquante.

-Il n'est pas certain que l'algorithme EM convergera à un maximum global ou local lorsqu'il y a plusieurs maximums.

-Dans certains problèmes, l'étape E peut être analytiquement impossible à trouver.

Chapitre 4

Simulation

Applications de la distribution de Weibuull

La distribution de weibull permet de modéliser des données qui sont asymétriques vers la droite, asymétries vers la gauche, ou symétriques. Pour cette raison cette distribution est utilisée pour évaluer la fiabilité dans des très diverses, y compris les types à vide , les condensateurs, les roulements à billes, les relais, et les forces mécaniques.

la distribution de weibull peut également être utilisée pour modéliser la fonction de risque (taux de panne) qui diminue, augmente ou reste constante, ce qui lui permet de décrire chacune des différentes phases de la durée de vie d'un matériel.

Partie I

Evolution de la fonction de risque

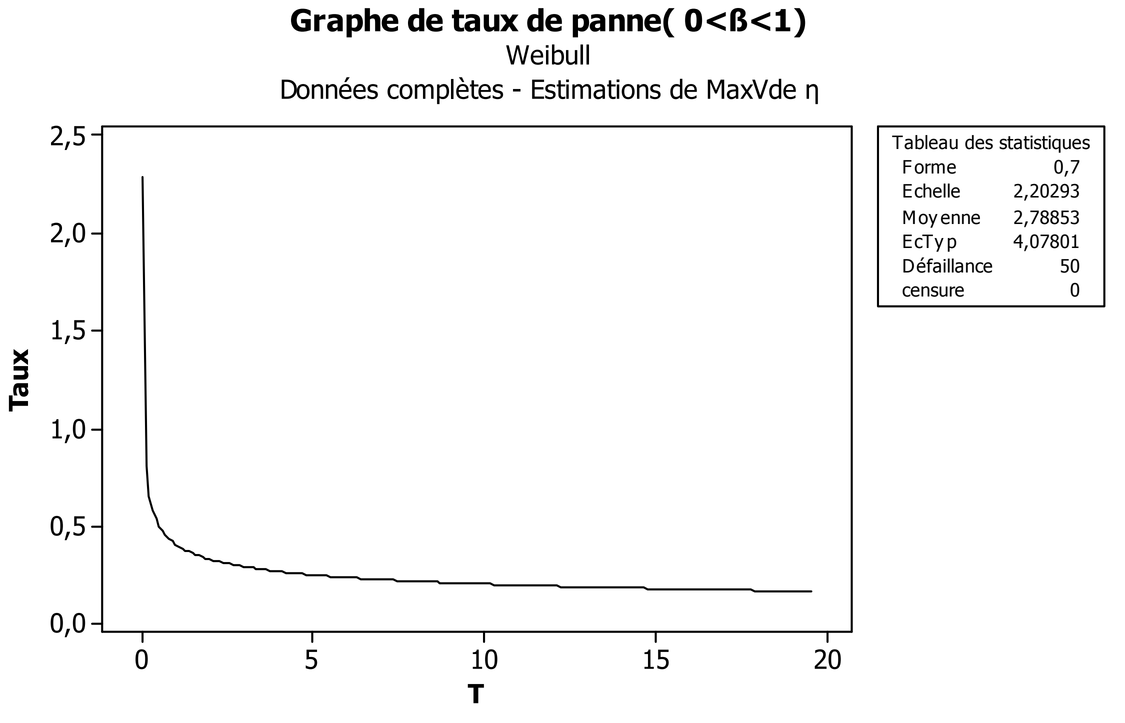
On va générer 50 réalisations d'une loi de weibull pour différentes valeurs de β

$0 < \beta < 1$

Exemple $\beta = 0,7$

$(\beta, \eta) = (0,7; 2)$

$\overset{\wedge}{\beta}_{MV}$	$\overset{\wedge}{\eta}_{MV}$	t_i	$\overset{\wedge}{\lambda}_{MV}(t_i)$	$\hat{R}_{MV}(t_i)$	$TMBF$	$Ec-Ty$	$Défail$	$Censu$
$0,6725$	$2,2893$	1	$0,3806$	$0,5639$	$2,7885$	$4,0780$	50	0
		$1,5$	$0,33297$	$0,47120$				
		2	$0,30684$	$0,40127$				
		$2,5$	$0,28131$	$0,33556$				



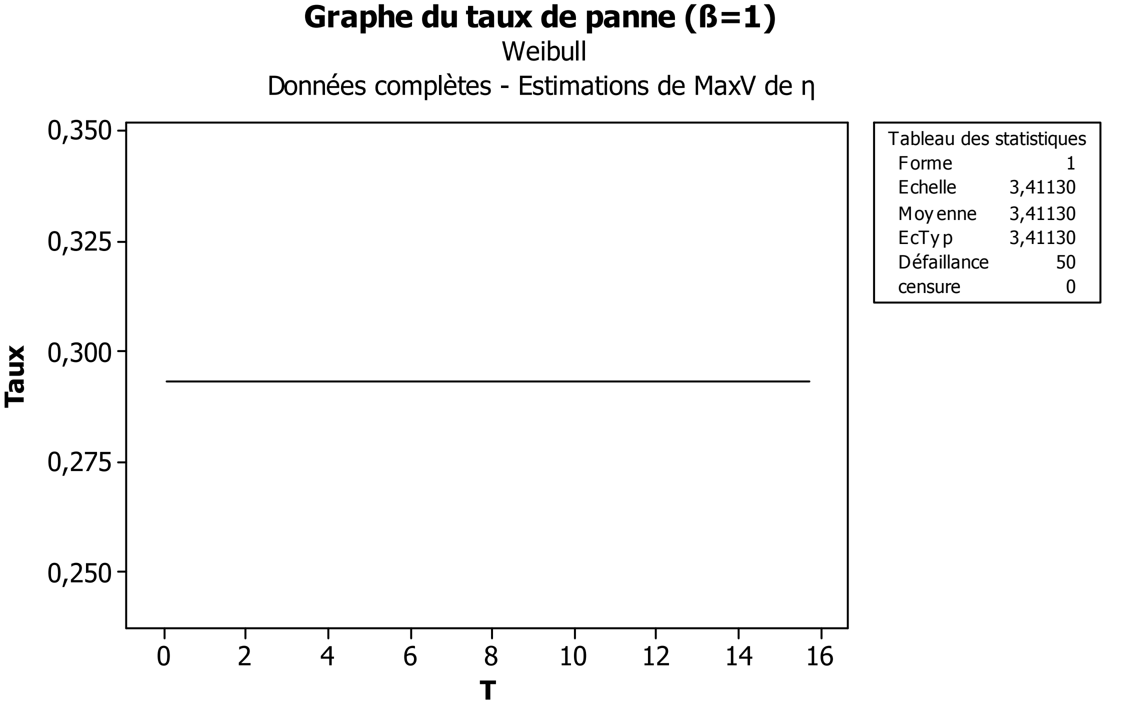
La forme du taux de panne ($0 < \beta < 1$) est présentée par le graphe suivant :

On remarque que le risque de défaillance élevé au départ qui diminue au fil du temps (première partie en forme de "baignoires" de la fonction de risque

Type de défaillances

Défaillances précoces, situation également connue sous le nom de mortalité infantile, car les défaillances se produisent dans la période initiale de la vie du matériel.

Ces défaillances peuvent nécessite une période de rodage pour réduire le risque de défaillance initiale.



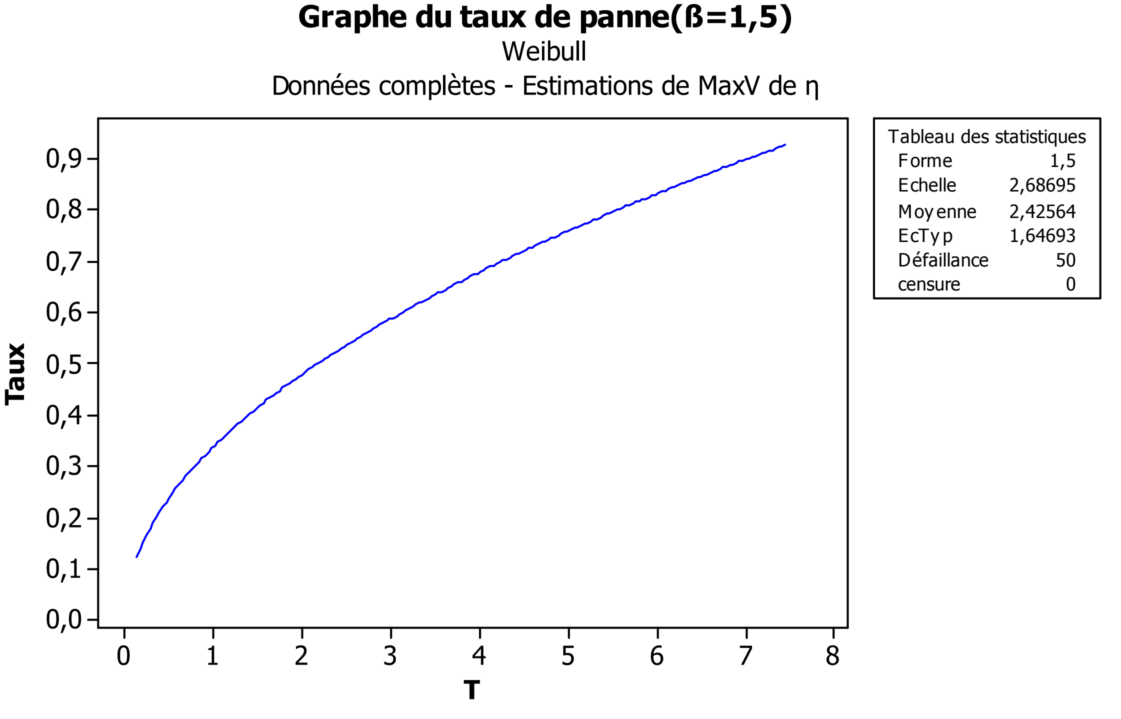
$\beta = 1$
$(\beta, \eta) = (1; 3)$

$\overset{\wedge}{\beta}_{MV}$	$\overset{\wedge}{\eta}_{MV}$	t_i	$\overset{\wedge}{\lambda}_{MV}(t_i)$	$\hat{R}_{MV}(t_i)$	$TMBF$	$Ec-Ty$	$Défail$	$Censu$
$0,9810$	$3,4113$	2	$0,2875$	$0,5563$	$3,4113$	$3,4113$	50	0
		$2,5$	$0,2875$	$0,4805$				
		3	$0,2875$	$0,4141$				
		$3,5$	$0,2875$	$0,3565$				

La forme du taux de panne ($\beta = 1$) est présentée dans le graphe suivant :

On remarque que le risque de défaillance est constant au cours de la vie du matériel.

Dans cette phase (phase de vie utile) les défaillances sont aléatoires, et il y a multiples causes de défaillances.

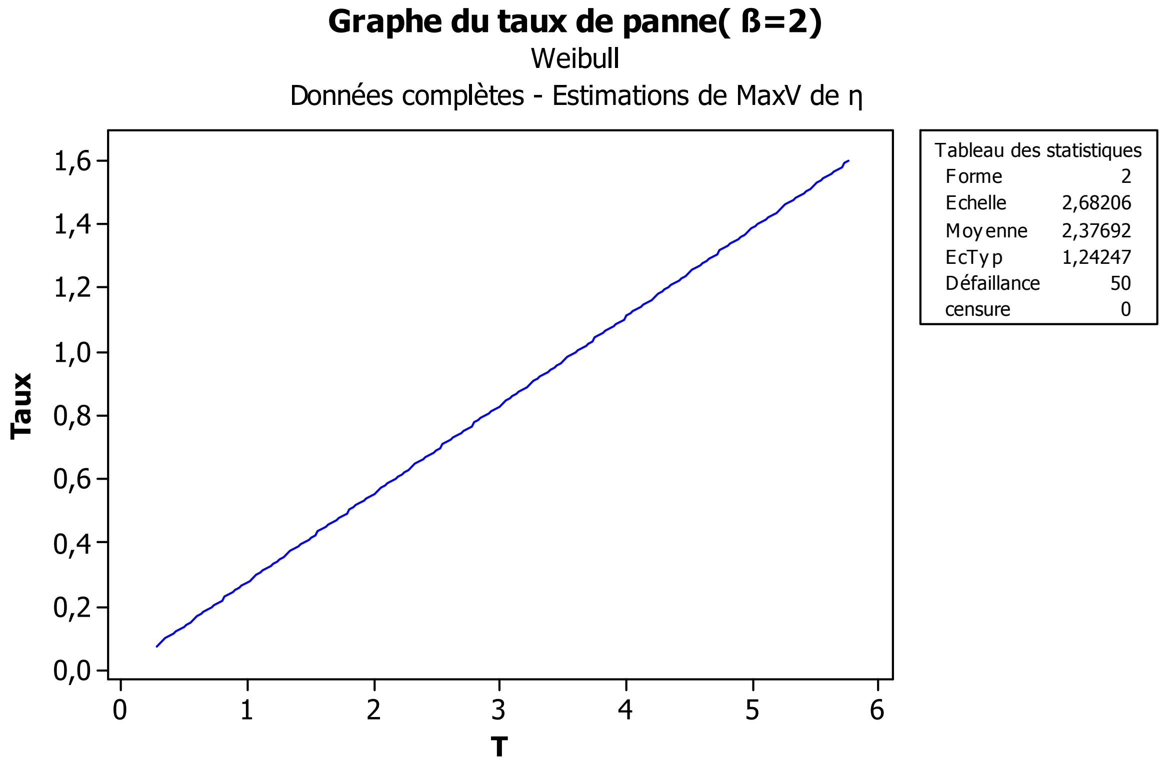


$\beta = 1,5$
$(\beta, \eta) = (1,5 \ ; \ 2,5)$

$\overset{\wedge}{\beta}_{MV}$	$\overset{\wedge}{\eta}_{MV}$	t_i	$\overset{\wedge}{\lambda}_{MV}(t_i)$	$\hat{R}_{MV}(t_i)$	$TMBF$	$Ec - Ty$	$Défail$	$Censu$
$1,7108$	$2,6869$	1	$0,3897$	$0,8316$	$2,4256$	$1,6469$	50	0
		$1,5$	$0,4713$	$0,6915$				
		2	$0,5442$	$0,5469$				
		$2,5$	$0,6084$	$0,5469$				

La forme du taux de panne $(\beta = 1,5)$ est présentée dans le graphe suivant :

Augmentation du risque de défaillance, avec une augmentation plus rapide au départ.



$(\beta, \eta) = (2\ ;\ 2,5)$

$\overset{\wedge}{\beta}_{MV}$	$\overset{\wedge}{\eta}_{MV}$	t_i	$\overset{\wedge}{\lambda}_{MV}(t_i)$	$\hat{R}_{MV}(t_i)$	$TMBF$	$Ec-Ty$	$Défail$	$Censu$
$2,3144$	$2,6820$	$0,5$	$0,1604$	$0,9797$	$2,3769$	$1,2424$	50	0
		1	$0,3208$	$O,9730$				
		$1,5$	$0,4813$	$0,7706$				
		2	$0,6417$	$0,6022$				

La forme du taux de panne ($\beta = 2$) est présentée dans le graphe suivant :

On remarque que le risque de défaillance augmente de façon linéaire.
Donc en conclus que ce risque augmente de façon constante au cours de la durée de vie du matériel.

$3 \leq \beta \leq 4$
Exemple $\beta = 3,5$
$(\beta, \eta) = (3,5\ ;\ 3)$

$\overset{\wedge}{\beta}_{MV}$	$\overset{\wedge}{\eta}_{MV}$	t_i	$\overset{\wedge}{\lambda}_{MV}(t_i)$	$\hat{R}_{MV}(t_i)$	$TMBF$	$Ec-Ty$	$Défail$	$Censu$
$3,3192$	$2,9316$	1	$0,0762$	$0,9722$	$2,6377$	$0,83473$	50	0
		$1,5$	$0,2100$	$0,8974$				
		2	$0,4311$	$0,7550$				
		$2,5$	$0,7531$	$0,5546$				

La forme du taux de panne (**$3 \leq \beta \leq 4$**) est présentée dans le graphe suivant :

ℓ

Chapitre 5

Annexe A

$0 < \beta < 1$

$(\beta, \eta) = (0, 7; 2)$

$W(\beta, \eta)$	$\lambda(t_i)$
0,0014	3,11029
0,6943	0,48073
1,5538	0,37754
13,860	0,19581
7,2233	0,23810
0,2411	0,66030
0,0219	1,35548
0,4516	0,54696
2,7437	0,31833
2,2219	0,33912
0,6753	0,48476
6,2369	0,24882
0,1076	0,84110
0,2807	0,63083
12,652	0,20124
0,0069	1,92154
0,7176	0,47601
0,0634	0,98578
2,0320	0,34834
11,795	0,20553
0,4132	0,56172
1,1561	0,41255
0,6526	0,48977
3,2448	0,30270

2,4490	0,32937
6,3030	0,24803
0,9019	0,44446
2,4459	0,32949
6,9151	0,24123
0,2412	0,66016
2,2268	0,33890
0,7018	0,47919
0,5632	0,51189
6,6602	0,24397
0,9837	0,43303
0,6248	0,49620
0,6068	0,50056
2,0423	0,34781
0,9758	0,43408
1,5915	0,37483
1,1697	0,41110
0,6055	0,50089
8,6571	0,22551
0,9361	0,43952
3,1457	0,30554
1,8342	0,35921
8,8409	0,22409
2,5758	0,32442
0,9958	0,43145
1,5377	0,37872

$\beta = 1$

$(\beta, \eta) = (1; 3)$

$W(\beta, \eta)$ $\quad \overset{\wedge}{\lambda}(t) = cte = 1 \backslash \eta = 0,2857$

0,8812
2,4187
1,9942
4,0023
2,1808
10,7438
2,4849
0,9984
3,4657

5,6012
6,5980
7,2176
2,6750
1,9455
3,7248
3,8966
1,7079
4,1298
6,7154
0,0900
2,2552
1,1645
0,6752
3,7996
0,5459
5,8935
1,2144
14,2168
3,2046
6,8495
1,6076
1,3642
1,7474
1,3566
5,2803
7,0992
4,1517
6,3413
4,9362
0,3122
1,2747
6,9748
3,3285
0,3996
3,3641
2,9800
1,7564
1,2633

1,7123
0,0235

$(\beta, \eta) = (1,5\ ;\ 2,5)$

$W(\beta, \eta)$	$\lambda(t_i)$
3,35994	0,529008
3,21730	0,517657
2,06760	0,414982
1,52629	0,356545
3,95996	0,574304
4,84922	0,635524
2,61907	0,467057
2,11487	0,419700
1,32912	0,332720
4,77034	0,630334
1,77165	0,384136
0,77251	0,253658
5,14565	0,654661
4,44750	0,608632
0,34595	0,169749
1,22487	0,319404
0,88193	0,271028
2,38851	0,446026
3,63341	0,550115
4,51045	0,612923
1,12411	0,305986
4,31795	0,599702
2,81470	0,484186
3,90686	0,570441
0,63628	0,230208
2,27704	0,435494
5,74551	0,691768
4,21626	0,592597
2,91379	0,492636
0,90516	0,274574
3,91499	0,571034
1,24449	0,321952
1,55650	0,360057
0,92560	0,277657
1,92648	0,400570

0,90687	0,274833
3,00191	0,500029
0,71879	0,244680
2,58119	0,463667
0,17836	0,121882
5,00423	0,645602
3,37168	0,529931
1,64379	0,370015
2,97658	0,497915
2,72983	0,476831
0,04786	0,063139
1,83913	0,391384
1,33358	0,333277
2,80848	0,483651
0,78288	0,255354

$\beta = 2$
$(\beta, \eta) = (2; 2,5)$

$W(\beta, \eta)$	$\lambda(t_i)$
1,24146	0,27585
1,11066	0,24679
2,01112	0,44687
1,07464	0,23878
3,96600	0,88124
4,15576	0,92341
1,07313	0,23845
1,48933	0,33093
0,81141	0,18029
1,12541	0,25007
3,33474	0,74098
1,76154	0,39141
4,45598	0,99012
3,63967	0,80873
4,60094	1,02233
1,16977	0,25992
1,36790	0,30395
4,21310	0,93615
2,99520	0,66553
2,19855	0,48852

1,33294	0,29618
1,66832	0,37070
2,40692	0,53482
4,05912	0,90194
1,15354	0,25632
0,91731	0,20383
4,15363	0,92294
1,93726	0,43046
1,00084	0,22239
1,00739	0,22384
2,45546	0,54560
1,60882	0,35748
3,61087	0,80234
0,29333	0,06518
3,62590	0,80568
1,52536	0,33894
1,60017	0,35556
1,00275	0,22281
2,92849	0,65071
2,70083	0,60013
4,64390	1,03187
1,77278	0,39391
3,42745	0,76158
2,23054	0,49563
3,23008	0,71772
2,77992	0,61770
3,83999	0,85325
0,20211	0,04491
4,51911	1,00415
2,57621	0,57243

$(\beta, \eta) = (3,5\ ;\ 3)$

$W(\beta, \eta)$	$\lambda(t_i)$
2,07742	0,46557
3,12975	1,29704
2,15924	0,51278
1,71528	0,28841
3,18061	1,35038
4,05562	2,47926
2,93732	1,10677

2,95322	1,12181
1,19969	0,11799
2,25766	0,57323
3,22688	1,40003
3,46743	1,67571
2,05478	0,45300
5,14361	4,49108
3,69949	1,97032
3,11240	1,27915
2,03009	0,43951
3,57121	1,80393
2,16245	0,51469
3,00483	1,17146
2,13859	0,50061
2,05067	0,45073
3,57979	1,81478
2,19000	0,53124
0,87572	0,05371
1,99472	0,42061
1,40041	0,17371
2,66805	0,87029
2,92895	1,09890
3,24591	1,42077
2,60318	0,81836
2,87755	1,05132
0,86903	0,05269
1,95593	0,40047
2,44192	0,69744
2,79355	0,97627
2,78710	0,97064
2,42873	0,68807
4,17903	2,67220
2,73460	0,92558
2,33881	0,62613
1,82500	0,33677
3,51960	1,73946
2,21445	0,54619
3,22538	1,39841
2,50871	0,74611

2,05298	0,45201
3,52105	1,74124
1,14085	0,10405
2,71828	0,91183

$\beta > 10$

$(\beta, \eta) = (13\ ;\ 3)$

$W(\beta, \eta)$	$\lambda(t_i)$
2,89584	2,8357
2,32102	0,1993
3,02163	4,7234
2,60415	0,7932
3,15329	7,8802
3,02828	4,8498
2,85464	2,3877
2,89225	2,7938
2,45912	0,3988
2,69903	1,2186
2,55999	0,6460
2,87178	2,5655
3,12884	7,1774
3,11041	6,6863
2,61983	0,8524
3,05438	5,3757
2,63530	0,9148
2,77768	1,7201
3,04027	5,0853
2,87122	2,5595
2,63962	0,9329
3,05812	5,4553
3,00664	4,4498
2,45407	0,3891
2,86545	2,4985
2,48369	0,4493
3,22501	10,3214
3,00487	4,4185
2,84891	2,3309
2,27018	0,1528
2,37455	0,2620
3,09068	6,1947

2,39606	0,2920
2,54459	0,6009
3,17362	8,5118
2,97269	3,8829
2,38392	0,2747
3,07223	5,7651
2,75968	1,5910
2,82846	2,1378
3,15790	8,0194
3,05772	5,4468
3,19699	9,2953
3,28135	12,7056
2,74609	1,4995
3,29021	13,1236
3,04691	5,2201
3,11342	6,7643
2,96250	3,7262
3,16254	8,1619

Chapitre 6

Annexe B

I-Données copmlétes

t_i	$f(t_i)$	$R(t_i)$	$f(t_i)'$	$R(t_i)'$
18,5	0,0152455	0,957998	0,0152487	0,958688
20,0	0,0233566	0,929360	0,0235660	0,929907
20,5	0,0266312	0,916876	0,0269418	0,917293
21,5	0,0340455	0,886632	0,0346128	0,886617
22,0	0,0381637	0,868590	0,0388865	0,868254
22,5	0,0425259	0,848427	0,0434209	0,847687
23,5	0,0518235	0,801305	0,0531013	0,799482
24,0	0,0566457	0,774190	0,0581247	0,771678
24,3	0,0595524	0,756761	0,0611513	0,753786
24,6	0,0624455	0,738460	0,0641617	0,734989
25,0	0,0662444	0,712719	0,0681092	0,708531
25,3	0,0690190	0,692428	0,0709864	0,687664
25,6	0,0717014	0,671317	0,0737610	0,665949
26,0	0,0750875	0,641951	0,0772491	0,635738
26,3	0,0774472	0,619067	0,0796661	0,612196
26,7	0,0802976	0,587506	0,0825621	0,579737
27,0	0,0821750	0,563129	0,0844468	0,554679
28,0	0,0864233	0,478549	0,0885212	0,467887
29,0	0,0868606	0,391556	0,0884363	0,379028
30,0	0,0828855	0,306306	0,0836006	0,292607
32,0	0,0625906	0,158455	0,0611284	0,145498
33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717
33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717
33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717
33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717

33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717
33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717
33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717
33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717
33,0	0,0486136	0,102760	0,0463108	0,091717

Bibliographie

[1] **Bernard Ycart**, "Notions de fiabilité et file d'attente",Ed centre de publication universitaire,(2004).

[2] **Christiane Cocozza**,"Processus stochastiques et fiabilité des systèmes", Ed Sringer,(1997).

[3] **Gerald Baillargean**,"Méthode statistique de l'ingenieur", SMG,(1990).

[4] **M.Mouy**, "Estimation de la fiabilité d'un systéme et de ses composants",Université Mentouri,(2009).

[5] **N.Bousquet**, "Analyse bayésienne de la durée de vie de composants industriels",Université de paris Sud.UFRS Scientifique D'orsay,(2006).

[6] **Ouahiba Tebbi**, "Estimation des lois de fiabilitéen mecanique par les essais accelerés", Université d'Angers,(2005).

[7] **E.Morice**, "Quelques problèmes d'estimation relatifs à la loi de Weibull",Revue de statistique appliquè,tome 16, $n \circ 3$,(1968).

[8] **Frédéric Planchet**, "Statistique des modèles paramétriques et semi-paramétriques",ISFA,(2012).

[9] **Henri Bertholon**, "Une modélisation du viellissement", Université Joseph Fourier-Gronoble1,(2001).

[10] **Isabelle Michou**, "Application de l'algorithme EM au modèle des risques concurrents avec causes de panne masquées",Université Laval Québec,(2005).

[11] **V.Hasselblad,** "Estimation of mixiture of distribution from the exponential family", Statistical Assoc, Vol **64** (1969).