

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar  
Annaba

Badji Mokhtar University -  
Annaba



جامعة باجي مختار

عنابة

Faculté des Sciences

Année : 2012/2013

Département de Mathématiques

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

### ÉTUDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE Á VOLATILITÉ STOCHASTIQUE ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Option

PROBABILITE-STATISTIQUE

Présentée par

**HADJI MOHAMMED LAKHDAR**

**DIRECTEUR DE THÈSE :** M. R. REMITA MCA U.B.M. ANNABA  
**CO-DIRECTEUR DE THÈSE :** M. Z. AISSAOUI MCA U. 8 Mai 45 GUELMA

Devant le jury

**PRESIDENT :** Mr. Brahim Khodja Prof. U.B.M. ANNABA  
**EXAMINATEUR :** Mme. Natalia Djellab Prof. U.B.M. ANNABA  
**EXAMINATEUR :** Mr. Nassereddine Kachkar Prof. U.L.B. Oum El Bouaghi  
**EXAMINATEUR :** Mr. Abderrahmane Yousfat Prof. U.D.L. Sidi Bel-Abbès



A mes parents, Mehania et Hocine

A Zohra

A Aymen, Ibtissem et Marwa

A mes frères et soeurs

A Hizia et tous ceux qui me sont très chers

# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| Introduction   | 1        |
| <b>1 Rappel</b>  | <b>5</b> |
| 1.1 Notions fondamentales sur le langage financier . . . . .   | 5        |
| 1.1.1 Action . . . . .   | 5        |
| 1.1.2 Obligation . . . . .                                     | 5        |
| 1.1.3 indice boursier . . . . .                                | 5        |
| 1.1.4 Taux de change . . . . .                                 | 6        |
| 1.1.5 Flux financier . . . . .                                 | 6        |
| 1.1.6 Marché financier . . . . .                               | 6        |
| 1.1.7 Actif financier . . . . .                                | 6        |
| 1.1.8 Produit dérivé . . . . .                                 | 6        |
| 1.1.9 Forward . . . . .  | 7        |
| 1.1.10 Contrat à terme . . . . .                               | 7        |
| 1.1.11 Swap . . . . .  | 7        |
| 1.1.12 Option . . . . .  | 7        |
| 1.1.13 Warrant . . . . .                                       | 8        |
| 1.1.14 Actif sous-jacent . . . . .                             | 8        |
| 1.1.15 Volatilité . . . . .                                    | 8        |
| 1.1.16 Trader . . . . .  | 9        |
| 1.1.17 Stratégie et marché . . . . .                           | 10       |
| 1.2 Notions fondamentales sur les probabilités . . . . .       | 11       |
| 1.2.1 Variable aléatoire . . . . .                             | 11       |
| 1.2.2 Densité de probabilité . . . . .                         | 12       |
| 1.2.3 Espérance mathématique . . . . .                         | 12       |
| 1.2.4 Variance . . . . .                                       | 13       |
| 1.2.5 Covariance . . . . .                                     | 14       |
| 1.2.6 Loi normale gaussienne . . . . .                         | 14       |
| 1.2.7 Loi Log-normale . . . . .                                | 15       |
| 1.3 Notions fondamentales sur le calcul stochastique . . . . . | 15       |
| 1.3.1 Processus aléatoire . . . . .                            | 16       |
| 1.3.2 Filtration . . . . .                                     | 16       |
| 1.3.3 Mouvement brownien . . . . .                             | 16       |
| 1.3.4 Notion de processus stochastique . . . . .               | 17       |
| 1.3.5 Définition mathématique du mouvement brownien . . . . .  | 18       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 1.3.6    | Martingale . . . . .   | 18        |
| 1.3.7    | Martingale dans $\mathbb{N}$ . . . . .                                       | 19        |
| 1.3.8    | Exemple de martingale à temps continu . . . . .                              | 19        |
| 1.3.9    | Processus adapté . . . . .   | 19        |
| 1.3.10   | Intégrale d'Itô . . . . .  | 19        |
| 1.3.11   | Processus d'Itô . . . . .  | 20        |
| 1.3.12   | Intégrale de Wiener et intégrale stochastique . . . . .                      | 21        |
| 1.3.13   | Lemme d'Itô . . . . .  | 21        |
| 1.3.14   | Processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .                                     | 21        |
| 1.3.15   | Equation différentielle stochastique (EDS) . . . . .                         | 22        |
| 1.3.16   | Volatilité stochastique . . . . .  | 22        |
| 1.3.17   | Matrice stochastique . . . . .   | 24        |
| 1.3.18   | Méthode Monté-Carlo . . . . .  | 24        |
| <b>2</b> | <b>Etude du modèle Black &amp; Scholes</b>                                   | <b>25</b> |
| 2.1      | Volatilité . . . . .   | 30        |
| 2.1.1    | Volatilité implicite . . . . .   | 32        |
| 2.1.2    | "Smile" de la volatilité . . . . .   | 33        |
| 2.1.3    | Exemple . . . . .  | 33        |
| 2.1.4    | Conclusion . . . . .   | 35        |
| <b>3</b> | <b>Etude de quelques modèles Financiers à vo-</b>                            |           |
|          | <b>latilité stochastique</b>   | <b>36</b> |
| 3.1      | Modèle de Hull et White . . . . .  | 36        |
| 3.1.1    | Déscription du modèle . . . . .  | 36        |
| 3.1.2    | Conclusion . . . . .   | 38        |
| 3.2      | Modèle de Elias M. Stein & Jeremy C. Stein . . . . .                         | 39        |
| 3.2.1    | Introduction . . . . .   | 39        |
| 3.2.2    | Intégration des équations du modèle . . . . .                                | 39        |
| 3.2.3    | Prix d'un call européen par la formule fermée . . . . .                      | 40        |
| 3.3      | Modèle Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou et K. Ronnie Sircar . . . . . | 43        |
| 3.3.1    | Décripion du modèle . . . . .  | 43        |
| 3.3.2    | Prix d'une option européenne . . . . .                                       | 44        |
| <b>4</b> | <b>EDP modélisant le prix d'un call à volatilité</b>                         |           |
|          | <b>stochastique -Modèle Heston</b>   | <b>52</b> |
| 4.1      | Modélisation d'une option à volatilité stochastique . . . . .                | 52        |
| 4.1.1    | Conditions aux limites . . . . .   | 55        |
| 4.2      | Nouvelle Equation Différentielle . . . . .                                   | 56        |
| 4.2.1    | Nouvelles conditions aux limites et nouveau domaine . . . . .                | 60        |
| 4.3      | Résolution de L'EDP par la méthode des différences finies . . . . .          | 60        |
| 4.3.1    | Schéma numérique . . . . .   | 61        |
| 4.3.2    | Conditions aux limites du schéma numérique . . . . .                         | 62        |
| 4.3.3    | Résultats numériques et commentaires . . . . .                               | 63        |

|                                   |           |
|-----------------------------------|-----------|
| 4.3.4 Conclusion . . . . .        | 65        |
| <b>5 Conclusion générale</b>      | <b>66</b> |
| <b>Conclusion et perspectives</b> | <b>66</b> |
| <b>Bibliographie</b>              | <b>67</b> |

# Résumé

---

Le travail de cette thèse est consacré principalement à la modélisation d'une option européenne. La particularité de ces modèles réside dans la non observabilité de la volatilité. On commence par un historique sur quelques modèles qui ont été déjà élaborés par plusieurs auteurs, en occurrence le modèle de référence de Black & Scholes qui a considéré la volatilité constante. Malheureusement cette assertion ne reflète pas la réalité, vu que la volatilité dépend du temps et du hasard. Afin de mieux représenter la réalité dans le domaine de la finance, on propose un modèle écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles stochastiques, dont une des équations modélise le cours du sous-jacent et l'autre prend en compte la volatilité. Ceci est fait en considérant un coefficient de corrélation entre les deux mouvements browniens qui n'est pas nécessairement nul. L'approche utilisée pour évaluer l'option est la résolution de l'équation aux dérivées partielles de Garman (EDPG)[12] dans le cas où la racine carré de la volatilité suit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck arithmétique[22]. On procède, à la fois à une étude analytique où l'existence et l'unicité de la solution de l'EDPG est détaillée ; ainsi qu'à l'approximation numérique de la solution par le biais de la méthode des différences finies.

# Abstract

---

The work of this thesis is mainly devoted to the modeling of a european option. The particularity of these models is the fact of the non observability of the volatility. First, we start by setting a history of some models which have been elaborated by many authors ; namely the refernce model due to Black & Scholes who considered the volatility to be constant. Unfortunetly, this asyption does not reflect the reality, because the volatility depends on time and the hazard. To better represent the reality in finance's domain, we propose a model written in the form of a system of two stochastic differential equations, where one of the two equations modelises the underlying asset and the other one takes in accont the volatility. This is done by considering a correlation coefficient between the two brownian motions, that is not necessaly equal to zero. The approach used to evaluate the option is the resolution of Garman's partial differential equation (GPDE)[12], in the case where the squarre root of the volatility follows the aritmetic Ornstein-Uhlenbeck's process [22]. We proceed both by an analytical study, where the existence and the uniqueness of the solution of GPDE is detailed ; and also a numerical approximation by the use of the finite difference method.

.

## Remerciements

*Mes sincères remerciements à mes deux directeurs de thèse M. R. Remita Maître de conférence à l'université Badji Mokhtar-Annaba et M. Z. Aissaoui, Maître de Conférence à l'université du 08 Mai 1945-Guelma, pour le sujet très intéressant qu'ils m'ont proposé qui m'a ouvert sur un nouvel horizon de la recherche. Sans leurs conseils, encouragements et leurs suivi continu je ne serais jamais arrivé à ce fruit.*

*Je remercie également tous les membres de jury pour le temps consacré pour examiner et évaluer ce travail.*

*Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à toute réalisation.*

*Enfin, j'exprime ma gratitude et ma reconnaissance à ma Femme qui grâce à son esprit très scientifique, sa patience, support moral et encouragement continu j'ai pu surmonter toutes les épreuves ; sans oublier mes chers Enfants Aymen, Ibtissem et Marwa.*

# Introduction

L'être humain a connu, la notion d'une option, depuis qu'il a commencé à pratiquer des échanges commerciaux c'est à dire à tronquer sa marchandise, les gens s'échangeaient des contrats de produits dérivés, achat et vente d'un actif à un prix d'exercice donné et une date future, en payant au vendeur du contrat une somme qui n'est autre que la prime négociée par les deux parties.

La grande -Bretagne et les états-unis d'Amérique ont vu l'apparition des contrats négociés dès le 18<sup>ème</sup> siècle, mais le cadre standardisé n'était pas réglementé. On a attendu l'année 1973, pour que des financiers de "Chicago Board Options exchange" (CBOE) donnent le certificat de naissance à un type d'option et permettre la négociation de contrats, entièrement standardisés. Le succès de cette initiative a donné naissance et prolifération de marché de même type sur toutes les places boursières, un produit dérivé ou contingent définit comme un actif financier négocié sur un marché dont le prix dépend de la valeur d'un autre actif appelé sous-jacent. Ce grand et dynamique essor des produits dérivés a expliqué l'accroissement de la volatilité, les taux d'intérêt et les risques financiers. Un marché est dit complet quand il permet à un opérateur d'atteindre l'objectif de rentabilité et de risque souhaité.

L'option a permis aux entreprises de diversifier les profils de risque et choisir le cours ou le taux d'intérêt avec lesquels, on peut céder le risque à la banque. La modélisation de l'évaluation des options est devenue un domaine d'une importance cruciale et complexe ce qui a ouvert la porte à la recherche pour beaucoup d'économistes et de mathématiciens.

Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier[1] est considéré comme l'un des précurseur de la théorie moderne des probabilités et comme le fondateur des mathématiques financières. Dans sa thèse intitulée Théorie de la spéculation, soutenue le 29 mars 1900, il a introduit l'utilisation en finance du mouvement brownien (découvert par le biologiste Brown), qui est à la base de

la plupart des modèles de prix en finance, notamment la formule de Black-Scholes (1973)[3][4]. Ses travaux ont été très commentés de son vivant et notamment cités par Kolmogorov dès les années trente. Benoit Mandelbrot, mathématicien, a été l'un des premiers après la seconde guerre mondiale à rappeler le rôle de pionnier de Bachelier dans les probabilités et les mathématiques financières. Il a supposé que le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement Brownien avec un drift nul, avec une probabilité égale à 1, le modèle a engendré des prix de sous-jacents négatifs et le prix de l'option peut être supérieur au prix du sous-jacent, ces deux éléments ont rendu son modèle déficient et en contradiction avec la réalité du marché financier.

Kiyoshi Itô a étudié les mathématiques à l'université Impériale de Tokyo. Il y fut attiré par le calcul des probabilités. Il s'intéressa aux travaux d'Andrei Kolmogorov et de Paul Lévy puis plus tard au concept de régularisation étudié par Doob[7]. En 1940, il publia "On the probability distribution on a compact group", un ouvrage important dans l'évolution dans ce domaine. Puis il s'intéressa aux processus stochastiques et au mouvement brownien essentiellement après 1945. Ses travaux ont été utilisés par Black-scholes (1973) pour la résolution d'évaluation de l'option d'achat d'un actif financier qui a aboutit à leur célèbre formule.

Le modèle de Black-Scholes (du nom de Fischer Black et Myron Scholes) d'évaluation d'option est un modèle utilisé en mathématiques financières afin d'estimer en théorie la valeur d'une option financière, du type option européenne. Il fut publié en 1973, et constituait le prolongement de travaux réalisés par Paul Samuelson et Robert Merton. L'intuition fondamentale de Black et Scholes fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent. Leur découverte eut très rapidement une influence considérable, et des déclinaisons de leur modèle sont utilisées dans tous les compartiments des marchés financiers. Dès 1977, Oldrich Vasicek[26] s'en inspirait pour fonder la théorie moderne des taux d'intérêt. Merton et Scholes reçoivent en 1997 le prix Nobel d'économie pour leurs travaux (Fisher Black était, lui, malheureusement mort en 1995).

Le modèle de Black & Scholes est devenu populaire grâce à sa formule de valorisation des options européennes, qui a donné le début de l'ère de la modélisation stochastique de la finance, toute fois, il reste tributaire de quelques hypothèses qui ne sont pas en accord avec la

réalité du marché, ce qui limite son champ d'application, mais il reste le modèle de base le plus utilisé dans les travaux de recherche, parmi ces imperfections la log-normalité du processus du prix du sous-jacent, ce qui suppose la constance de la volatilité qui est en contradiction avec la courbe de "smile", ce qui a amené certains chercheurs à conclure que même la volatilité ne peut être qu'une variable d'état stochastique.

La confection d'un modèle précis pour une évaluation correcte et fiable des produits financiers est un défi majeur que les praticiens attendent toujours pour l'amélioration ou le remplacement du modèle Black-Scholes. L'évaluation des produits dérivés est devenu varié et compliqué, ce qui fait appel aux évolutions les plus pointues et complexes des mathématiques, le scientifique est à la recherche du modèle équitable entre les contractants et juste pour permettre, de minimiser les erreurs de gestion, capter la logique du marché, tirer profit et en fin se couvrir contre un risque donné. La modélisation est devenue complexe vu que les acteurs de la finance n'ont pas les mêmes informations d'où la différence des anticipations, l'utilisation d'un modèle aujourd'hui, restera-t-il valable demain ?

En finance, la rapidité dans les calculs est très importante car les acteurs financiers ont besoin de conseils en temps réel dans un marché continu, de la part des spécialistes, la manipulation des grandes sommes d'argent exigent la précision du modèle utilisé. La plupart des modèles d'évaluation des options utilisent l'une des deux approches, soit la résolution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre avec des conditions aux limites propres à chacun des problèmes, soit l'approche martingale (raisonnement risque neutre).

Le but de la présente thèse est donc d'étudier les différents modèles d'évaluation des options Européennes, basées sur un indice boursier, par des équations différentielles stochastiques (EDS) où la volatilité n'est plus constante, en partant du modèle de Black-Scholes. Plusieurs travaux menaient par des chercheurs Wiggins (1987)[27], Hull-White (1987)[14] et Scott (1987)[23] ont conclu que la volatilité des rendements d'un actif sous-jacent suit aussi une variable aléatoire, qui dépend et évolue avec le temps, ce qui nous amène à dire que l'évaluation du prix d'une option ne peut être expliquer que par les variations stochastiques des deux variables d'état, le prix du sous-jacent et la volatilité. La réalité de marché des options a obligé les modélisateurs en mathématiques financières à tenir compte de la corrélation des variations entre ces deux variables.

La modélisation de la volatilité n'est pas évidente vu qu'elle n'est pas observable sur le marché, avec une dynamique particulière de la volatilité et sous certaines conditions, les chercheurs Stein & Stein (1991)[24] et Heston (1993)[15] sont arrivés à trouver une solution analytique pour un modèle à volatilité stochastique. Les autres travaux de la majorité des chercheurs ont eu recours à la résolution numérique des équations, Merton (1976)[21], Johnson & Shanno (1985)[17], Eisenberg (1985), Hull & White (1987)[?], Scott (1987)[23], Wiggins (1987)[27], Stein & Stein (1991)[24], Heston (1993)[15], Clifford & Roma (1994), Gurdip & al. (1997) et Fouque & al. (2000)[11].

Cette thèse comporte quatre chapitres : Le premier comporte trois sections, la première définit les notions de base du langage financier, ainsi que le métier de Trader un élément clé dans la négociation des produits financiers, la deuxième section traite les notions de probabilité en général et la troisième est consacrée aux notions fondamentales sur le calcul stochastique. Le deuxième chapitre est consacré entièrement au modèle de Black & Scholes, ma contribution dans ce chapitre est une simulation numérique pour montrer la courbe "Smile" sur les actions d'Apple ainsi qu'une simulation des valeurs d'options pour différentes valeurs de volatilités, en utilisant le logiciel R. Le troisième chapitre traite trois modèles financiers à volatilité stochastique Hull & White[?], Stein & Stein[24] et George Papanicolaou & K. Ronnie[11] Sircar. Enfin le quatrième chapitre traite un modèle où la racine carrée de la volatilité suit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck arithmétique. L'équation aux dérivées partielles de Garman correspondante est résolue numériquement par la méthode de différences finies où les simulations numériques sont réalisées par le logiciel MATLAB. La contribution personnelle réside dans le fait de pouvoir utiliser une technique de changement de variables pour simplifier l'EDP, l'écrire sous une forme canonique tout restant dans la situation où le coefficient de corrélation n'est pas égal à zéro[13].

# Chapitre 1

## Rappel

### 1.1 Notions fondamentales sur le langage financier

#### 1.1.1 Action

Une action (en anglais britannique : share, en anglais américain : stock) est un titre de propriété délivré par une société de capitaux ( une société anonyme ou Société en commandite par actions). Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. Le détenteur d'actions est qualifié d'actionnaire et l'ensemble des actionnaires constitue l'actionnariat.

#### 1.1.2 Obligation

Une obligation (en anglais : bond) est une valeur mobilière qui est un titre de créance représentatif d'un emprunt. En tant que tel, l'obligation est cessible et peut donc faire l'objet d'une cotation sur une Bourse, un marché secondaire. Dans la pratique, les volumes échangés se négocient principalement de gré à gré.

#### 1.1.3 indice boursier

Un indice boursier est une mesure statistique calculée par le regroupement des valeurs des titres de plusieurs sociétés. L'indice boursier sert généralement à mesurer la performance d'une bourse ou d'un marché.

#### 1.1.4 Taux de change

Le taux de change d'une devise (une monnaie) est le cours (autrement dit le prix) de cette devise par rapport à une autre. On parle aussi de la parité d'une monnaie.

Les taux de change, cotés sur les marchés des changes, varient en permanence ; ils varient également en fonction de la place de cotation.

#### 1.1.5 Flux financier

Le flux financier s'exerce entre différents secteurs institutionnels, c'est la valeur de ventes et d'achats dans une période comptable, le plus souvent un trimestre ou une année.

#### 1.1.6 Marché financier

Les marchés financiers, (en anglais, on dit de plus en plus : capital markets, soit marchés de capitaux, au lieu de financial markets), sont les marchés où sont effectuées les transactions sur des actifs financiers et de plus en plus, leurs produits dérivés.

#### 1.1.7 Actif financier

Un actif financier est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable (par exemple sur un marché financier), qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus et/ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque.

#### 1.1.8 Produit dérivé

Un produit dérivé ou contrat dérivé ou encore derivative product est un instrument financé : dont la valeur fluctue en fonction de l'évolution du taux ou du prix d'un produit appelé sous-jacent ; qui ne requiert aucun placement net initial ou peu significatif ; dont le règlement s'effectue à une date future.

Il s'agit d'un contrat entre deux parties, un acheteur et un vendeur, qui fixe des flux financiers futurs fondés sur ceux d'un actif sous-jacent, réel ou théorique, généralement financier.

### 1.1.9 Forward

Un contrat forward est un contrat à terme, il est donc considéré comme un produit dérivé (finance).

Il s'agit d'un accord d'acheter ou de vendre un actif à un prix et une date future précisée dans le contrat. En fait, la définition du forward est identique à celle des contrats futures à la différence près qu'ils sont négociés de gré à gré, entre banques et institutions financières alors que les contrats de futures sont négociés sur un marché organisé, localisé à un endroit bien précis.

### 1.1.10 Contrat à terme

Un contrat à terme (future en anglais) est un engagement ferme de livraison standardisé, dont les caractéristiques sont connues à l'avance, portant sur : une quantité déterminée d'un actif sous-jacent précisément défini, à une date, appelée échéance, et un lieu donné et négocié sur un marché à terme organisé. Les contrats à terme sont les instruments financiers les plus traités au monde.

### 1.1.11 Swap

Le swap (de l'anglais to swap : échanger) ou l'échange financier est un produit dérivé financier. Il s'agit d'un contrat d'échange de flux financiers entre deux parties, qui sont généralement des banques ou des institutions financières.

### 1.1.12 Option

Une option est un produit dérivé, en finance de marché, qui donne le droit, lorsqu'on l'achète, ou l'obligation, lorsqu'on la vend, d'acheter ou de vendre un actif financieré un prix fixé à l'avance (strike) pendant un temps donné ou à une date fixée, dans une optique de spéculation ou d'assurance. Il existe également des options dites exotiques qui obéissent à des règles plus complexes, les stock options, en tant que forme de rémunération.

### 1.1.13 Warrant

Un warrant est un contrat transférable qui confère à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une quantité donnée d'un actif spécifique, à un prix déterminé d'avance, à la date d'échéance du contrat (warrant européen) ou en tout temps jusqu'à cette date (warrant américain).

### 1.1.14 Actif sous-jacent

On appelle actif sous-jacent tout actif sur lequel porte une option ou plus largement un produit dérivé. Il peut être financier (actions, obligations, bons du Trésor, contrats à terme, devises, indices boursiers...) ou physique (matières premières agricoles ou minérales...).

L'actif sous-jacent est l'actif réel sur le prix contractuel duquel porte le produit dérivé concerné. Il désigne en effet l'instrument support d'un contrat à terme dont la qualité est strictement définie.

### 1.1.15 Volatilité

En finance, la volatilité est une mesure de l'ampleur des variations du cours d'un actif financier. Elle sert de paramètre de quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financier. Lorsque la volatilité est élevée, l'espérance de gain est plus importante, mais le risque de perte aussi. C'est par exemple le cas de l'action d'une société plus endettée, ou disposant d'un potentiel de croissance plus fort et donc d'un cours plus élevé que la moyenne. Si la croissance des ventes est moins forte qu'espérée ou si l'entreprise peine à rembourser sa dette, la chute du cours sera très forte.

La notion est plus souvent utilisée pour les oscillations à court terme que pour les grandes fluctuations boursières sur plusieurs années, souvent qualifiées (bien qu'irrégulières dans leur fréquence) de cycles boursiers. En réalité, le terme volatilité concerne aussi bien le court terme que le moyen et long terme. Il ne caractérise pas l'indécision du marché, mais l'ampleur des variations de cours qu'il peut subir, à la hausse comme à la baisse, les variations de court terme n'étant que des anticipations des variations à moyen et long terme.

Les traders sont appelés les risk player en ce sens qu'ils parient notamment sur la volatilité future.

### 1.1.16 Trader

Parfois appelés " golden boy", les traders sont des négociateurs de valeurs engagés par une banque, une société de bourse, une société d'investissement. Spéculateurs financiers, fins analystes économiques, ils ont une mission principale : anticiper les fluctuations permanentes du cours de valeurs boursières pour engendrer des profits.

#### Description des tâches et conditions de travail

Le métier de trader est une activité professionnelle liée aux échanges internationaux.

Elle consiste à gérer du risque financier en jouant sur des écarts de cours, le plus souvent à court terme.

C'est un métier stressant et à haut risque. En effet, le trading demande une réactivité permanente puisqu'il faut décider en temps réel de l'achat ou de la vente d'actions, de devises, d'obligations ou d'options. Concrètement, le trader doit acheter aux uns pour revendre à d'autres.

Pour y parvenir, il est armé de plusieurs téléphones, de fax, de télex, de micro-ordinateurs qui délivrent des informations en temps réel et permettent de surveiller l'évolution et les fluctuations des marchés internationaux. Il jauge et apprécie les risques, fixe ou propose parfois le prix des produits et négocie, minute par minute, les transactions : achat ou vente. Il possède une très bonne maîtrise du fonctionnement de l'économie, jongle avec les modèles mathématiques les plus sophistiqués, les statistiques et l'informatique, sans oublier une parfaite connaissance de l'anglais. Le trader a également des compétences administratives et d'excellentes notions de gestion.

Il est résistant physiquement et nerveusement car les salles de marchés dans lesquelles il travaille sont toujours en effervescence même si elles sont moins bruyantes qu'autrefois. Les journées de travail sont longues puisque l'ouverture des bourses des marchés internationaux se succèdent tout au long de la journée (Tokyo, Frankfort, Paris, Londres , New York).

En général, il travaille dans les grandes villes, où sont implantées les bourses de valeurs, les grandes entreprises, les sociétés de bourse, les banques, etc.

## **Salaires et revenus**

Le salaire d'un trader est très variable. Il se compose d'une rémunération de base à laquelle on ajoute une prime/rétribution annuelle proportionnelle aux profits obtenus. En termes de salaire la fourchette retenue se situe entre 4 000 et 6 000 € par mois.

## **Evolution professionnelle**

Le trader peut se spécialiser dans la gestion d'actions, de bons du Trésor, de devises (cambiste), de matières premières ou énergétiques. Un trader peut devenir "market maker", ou "teneur de marché". Cela implique une présence active et permanente sur le marché. Il doit produire des prix compétitifs en toutes circonstances.

Un trader peut aborder d'autres métiers de la finance et de la Bourse : gestionnaire de portefeuille, trésorier d'entreprise... Il peut également travailler au "back office" et contrôler l'exécution des ordres, l'encaissement des ventes et détecter toute anomalie juridique ou comptable.

## **Etudes et formations**

Pour devenir trader, il faut être diplômé d'une école de commerce ou de gestion, ou titulaire d'un 3e cycle universitaire en finances, gestion, droit ou économie. Une parfaite maîtrise d'une ou plusieurs langues étrangères est indispensable. Quelque soit votre profil, pour vous aventurer dans une salle de Front Office une solide formation initiale en mathématiques ainsi qu'une expérience dans le secteur bancaire ou boursier confirmée par une formation professionnelle complémentaire sont des atouts majeurs.

### **1.1.17 Stratégie et marché**

#### **Stratégie**

Une stratégie est définie par un processus aléatoire  $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  donnant à chaque instant les quantités  $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$  des divers actifs, détenues en portefeuille.

### Stratégie admissible

Une stratégie  $\phi$  est dite admissible si elle est autofinancée et  $V_n(\phi) \geq 0$  pour tout  $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$  où  $V_n(\phi)$  est la valeur du portefeuille à l'instant  $n$ .

### Stratégie d'arbitrage

Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

### Marché viable

On dit qu'un marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

#### Théorème

Un marché est viable si, et seulement si, il existe une probabilité  $P^*$  équivalente à  $P$  sous laquelle les prix des actifs sont des martingales.

### Actif simulable

On dit qu'un actif conditionnel défini par une variable aléatoire  $h$  est simulable (ou atteignable) s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant  $N$  est égale à  $h$ .

### Marché complet

On dit qu'un marché est complet si tout actif conditionnel est simulable.

#### Théorème

Un marché viable est complet si, et seulement si, il existe une probabilité  $P^*$  équivalente à  $P$  sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.

## 1.2 Notions fondamentales sur les probabilités

### 1.2.1 Variable aléatoire

Formellement, une variable aléatoire réelle est une application  $X$  d'un univers  $\Omega$  muni d'une probabilité  $p$  vers  $\mathbb{R}$ . Cette application crée un nouvel univers  $X(\Omega)$  de réels sur lequel on peut construire une probabilité issue de  $p$ . Cette probabilité s'appelle loi de probabilité de  $X$ . Il arrive souvent que l'on oublie l'univers  $\Omega$  pour ne s'intéresser qu'à l'univers  $X(\Omega)$ .

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  est la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = p(X \leq x)$ .

Dans le cas d'une variable discrète, c'est une fonction en escalier. En effet :

si  $x < x_1$  alors  $F(x) = 0$

si  $x_1 < x < x_2$  alors  $F(x) = p_1$

si  $x_2 < x < x_3$  alors  $F(x) = p_1 + p_2$

...

si  $x_{n-1} < x < x_n$  alors  $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$

si  $x \geq x_n$  alors  $F(x) = 1$ .

### 1.2.2 Densité de probabilité

En théorie des probabilités ou en statistiques, une densité de probabilité est une fonction qui permet de représenter une loi de probabilité sous forme d'intégrales.

Formellement, une loi de probabilité possède une densité  $f$ , si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  positive ou nulle et Lebesgue-intégrable, telle que la probabilité de l'intervalle  $[a, b]$  soit donnée par

$$\int_b^a f(x) dx \quad (1.1)$$

pour tous nombres  $a$  et  $b$ .

Cela implique que l'intégrale de  $f$  sur tout  $\mathbb{R}$  donne 1. Réciproquement, pour toute fonction  $f$  positive ou nulle et Lebesgue-intégrable, d'intégrale égale à 1 :

$$\{f(x) \geq 0 \forall x\} \text{ et } \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \right\} \quad (1.2)$$

il existe une loi de probabilité ayant  $f$  pour densité de probabilité

### 1.2.3 Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est l'équivalent en probabilité de la moyenne d'une série statistique en statistiques. Elle se note  $E(X)$  et se lit espérance de  $X$ .

L'espérance est définie pour les variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) de la manière suivante :

**Cas d'une variable discrète :**

Si  $X$  prend un nombre fini  $n$  de valeurs réelles :  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avec les probabilités  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  alors

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (1.3)$$

Si  $X$  prend un nombre dénombrable de valeurs réelles :  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  avec les probabilités,  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$  alors

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i x_i \quad (1.4)$$

si la série converge absolument. La convergence absolue assure que la division de la série ne dépend pas de la manière de numérotter les termes.

### Cas d'une variable à densité de probabilité :

Si  $X$  a pour densité de probabilité  $f$  alors

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \quad (1.5)$$

à condition que cette intégrale existe.

### Cas d'une application mesurable sur un espace de probabilité :

Si  $X$  est une application mesurable de  $(\Omega, B, p)$  dans  $\mathbb{R}$ , positive ou  $P$ -mesurable

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x P_x dx \quad (1.6)$$

(où  $P_x$  est la probabilité image).

## 1.2.4 Variance

En statistique et probabilité, la variance est une mesure arbitraire servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon.

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle dont le moment d'ordre 2, à savoir  $E(X^2)$  existe.

$$Var(X) \equiv V(X) \equiv E((X - E(X))^2) \quad (1.7)$$

On peut interpréter la variance comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle permet de caractériser la dispersion des valeurs par rapport à la moyenne. Ainsi, une distribution avec une même espérance et une variance plus grande apparaîtra comme plus étalée. Le fait que l'on prenne le carré de ces écarts à la moyenne évite que des écarts positifs et négatifs ne s'annulent.

### 1.2.5 Covariance

En statistiques, la covariance est un nombre permettant d'évaluer le sens de variation de deux variables et, par là, de qualifier l'indépendance de ces variables. Deux variables ayant une covariance non nulle sont dites dépendantes, par exemple, dans une population donnée, le poids et la taille sont des variables dépendantes. Cependant, elles ne sont pas corrélées, la corrélation est une relation linéaire, or le poids ne varie généralement pas proportionnellement à la taille.

En théorie des probabilités et en statistique, on nomme covariance de deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  la valeur :

$$\text{cov}(X, Y) \equiv (X - E(X))(Y - E(Y)) \quad (1.8)$$

On note parfois  $\text{cov}(X, Y) = \sigma_{XY}$ . Intuitivement, la covariance est une mesure de la variation simultanée de deux variables aléatoires. C'est à dire que la covariance devient plus positive pour chaque couple de valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le même sens, et plus négative pour chaque couple de valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le sens opposé.

### 1.2.6 Loi normale gaussienne

En probabilité, on dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi normale (ou loi normale gaussienne, loi de Laplace-Gauss) d'espérance  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  strictement positif (donc de variance  $\sigma^2$ ) si cette variable aléatoire réelle  $X$  admet pour densité de probabilité la fonction  $p(x)$  définie, pour tout nombre réel  $x$ , par :

$$p(x) = \frac{1}{\rho\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\rho}\right)^2} \quad (1.9)$$

Une telle variable aléatoire est alors dite variable gaussienne.

On note habituellement cela de la manière suivante :

$$X \sim N(\mu, \rho) \quad (1.10)$$

La loi normale est une des principales distributions de probabilité. Elle a été introduite par le mathématicien Abraham de Moivre en 1733 et utilisée par lui afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre  $n$  très

grand. Cette loi a été mise en évidence par Gauss au XIXe siècle et permet de modéliser de nombreuses études biométriques. Sa densité de probabilité dessine une courbe dite courbe en cloche ou courbe de Gauss.

On appelle loi normale (ou gaussienne) centrée réduite la loi définie par la densité de probabilité  $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} \quad (1.11)$$

On vérifie qu'elle est continue et que son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1.

On sait en effet que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t)^2} dt = \sqrt{2\pi} \quad (1.12)$$

appelé intégrale de Gauss.

### 1.2.7 Loi Log-normale

En probabilité et statistique, une variable aléatoire  $X$  est dite suivre une loi log-normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  si la variable  $Y = \ln(X)$  suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ .

Cette loi est parfois également appelé loi de Galton.

Une variable peut être modélisée par une loi log-normale si elle est le résultat de la multiplication d'un grand nombre de petits facteurs indépendants.

La loi log-normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  admet pour densité

$$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(x)-\mu)^2/(2\sigma)^2} \quad (1.13)$$

pour  $x > 0$ .  $\mu$  et  $\sigma$  sont la moyenne et l'écart type du logarithme de la variable (puisque par définition, le logarithme de la variable est distribué selon une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ ).

L'espérance  $E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}$  et la variance  $(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$

## 1.3 Notions fondamentales sur le calcul stochastique

Le calcul stochastique est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps. A ce titre, il est une extension de la théorie des probabilités.

### 1.3.1 Processus aléatoire

Un processus aléatoire  $X$  est une famille de variables aléatoires indexée par un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{N}$ , souvent assimilé au temps. C'est donc une fonction de deux variables, le temps et l'état du monde  $\omega$ . L'ensemble des états du monde est traditionnellement noté  $\Omega$ . L'application qui à un  $\omega$  fixé associe  $X(\omega, t)$ ,  $t$  variable, est appelée trajectoire du processus ; c'est une simple fonction du temps (sans caractère aléatoire) qui représente la réalisation particulière du processus sous l'occurrence  $\omega$ . Pour un  $t$  donné,  $X(\omega, t)$  est une simple variable aléatoire dont la valeur exacte n'est connue qu'en  $t$ . Le mouvement brownien est un exemple particulièrement simple de processus aléatoire indexé par  $\mathbb{R}$ . Il peut-être défini comme l'unique processus  $W_t$  à accroissement gaussien tel que la corrélation entre  $W_t$  et  $W_s$  soit  $\min(t, s)$ . On peut également le voir comme la limite d'une marche aléatoire lorsque le pas de temps tend vers 0.

### 1.3.2 Filtration

Une filtration  $F_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , est une famille de sous-tribus emboîtées de  $\Omega$ , qui peut s'interpréter comme l'information disponible qui évolue au cours du temps. Ainsi, une filtration est une famille de sigma-algèbres, indexée par le temps  $t \geq 0$  telle que  $F_s \subset F_t$  si  $s \leq t$ , ce qui reflète l'augmentation de l'information disponible.

### 1.3.3 Mouvement brownien

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une grosse particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les petites molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen de *Clarkia pulchella* (une espèce de fleur sauvage nord-américaine), puis de diverses autres plantes.

La description physique la plus élémentaire du phénomène est la suivante :

entre deux chocs, la grosse particule se déplace en ligne droite avec une vitesse constante, la grosse particule est accélérée lorsqu'elle rencontre une molécule de fluide ou une paroi.

Ce mouvement permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), ainsi que le phénomène de diffusion. Il est aussi très utilisé dans des modèles de mathématiques financières.

Brown aperçut dans le fluide situé à l'intérieur des grains de pollen (le mouvement brownien n'a pas été observé sur les grains de pollen eux-mêmes comme souvent mentionné), de très petites particules agitées de mouvements apparemment chaotiques. Ceux-ci ne pouvaient s'expliquer par des écoulements, ni par aucun autre phénomène physique connu. Dans un premier temps, Brown les attribua donc à une activité vitale. L'explication correcte du phénomène viendra plus tard. Brown n'est pas exactement le premier à avoir fait cette observation. Il signale lui-même que plusieurs auteurs avaient suggéré l'existence d'un tel mouvement (en lien avec les théories vitalistes de l'époque). Parmi ceux-ci, certains l'avaient effectivement décrit. On peut mentionner en particulier l'abbé John Turberville Needham (1713-1781), célèbre à son époque pour sa grande maîtrise du microscope.

La réalité des observations de Brown a été discutée tout au long du XXe siècle. Compte tenu de la médiocre qualité de l'optique dont il disposait, certains ont contesté qu'il ait pu voir véritablement le mouvement brownien, qui intéresse des particules de quelques micromètres au plus. Les expériences ont été refaites par l'Anglais Brian Ford au début des années 1990, avec le matériel employé par Brown et dans les conditions les plus semblables possibles. Le mouvement a bien été observé dans ces conditions, ce qui valide les observations de Brown.

### 1.3.4 Notion de processus stochastique

La difficulté de modélisation du mouvement brownien réside dans le fait que ce mouvement est aléatoire et que statistiquement, le déplacement est nul : il n'y a pas de mouvement d'ensemble, contrairement à un vent ou un courant. Plus précisément, à un instant donné, la somme vectorielle des vitesses de toutes les particules s'annule (il n'y a pas de mouvement d'ensemble), si on suit une particule donnée au cours du temps, le barycentre de sa trajectoire est son point de départ, elle "virevolte" autour du même point. Il est difficile dans ces conditions de caractériser le mouvement. La solution fut trouvée par Louis Bachelier et présentée dans sa thèse soutenue le 29 mars 1900. Il démontra que ce qui caractérise le mouvement, ce n'est pas la moyenne arithmétique des positions mais la moyenne quadratique  $\sqrt{\langle X^2 \rangle}$ , si

$x(t)$  est la distance de la particule à sa position de départ à l'instant  $t$ , alors :

$$\langle X^2 \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t x^2(\tau) d\tau \quad (1.14)$$

On démontre que le déplacement quadratique moyen est proportionnel au temps :

$$\langle X^2 \rangle = 2dDt \quad (1.15)$$

où  $d$  est la dimension du mouvement (linéaire, plan, spatial),  $D$  le coefficient de diffusion, et  $t$  le temps écoulé.

### 1.3.5 Définition mathématique du mouvement brownien

On peut définir de façon formelle un mouvement brownien : c'est un processus stochastique dont les accroissements disjoints sont indépendants et tels que  $B_{t+s} - B_t$  suit une loi normale de moyenne nulle et de variance  $s$ .

Cette définition permet de démontrer des propriétés du mouvement brownien, comme par exemple sa continuité (presque sûre), le fait que presque sûrement, la trajectoire n'est différentiable nulle part, et de nombreuses autres propriétés.

On pourrait également définir le mouvement brownien par rapport à sa variation quadratique moyenne. Cette définition, classiquement appelée théorème de Levy, donne la caractérisation suivante : un processus stochastique à trajectoires continues dont la variation quadratique est  $t$  est un mouvement brownien. Ceci se traduit mathématiquement par le fait que pour une filtration donnée  $(B_t)_{(t \geq 0)}$  et  $(B_t^2 - t)_{(t \geq 0)}$  sont des martingales.

### 1.3.6 Martingale

En calcul stochastique, une martingale désigne un type de processus stochastique, c'est-à-dire un processus aléatoire et dynamique. Ce type de processus  $X$  est tel que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date  $s$ , dénotée  $F_s$ , est la valeur à cette même date :

$$E(X_t | F_s) = X_s \text{ avec } s \leq t \quad (1.16)$$

$X$  est un processus adapté à la filtration  $F$ .

On parlera de sous-martingale si  $E(X_t | F_s) \geq X_s$  et de sur-martingale si  $E(X_t | F_s) \leq X_s$ .

### 1.3.7 Martingale dans $\mathbb{N}$ .

Soit  $(F_n)_{n \geq 0}$  une filtration et soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires.

On dit que  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale par rapport à  $(F_n)_{n \geq 0}$  si :

1  $(M_n)_{n \geq 0}$  est adaptée à la filtration  $(F_n)_{n \geq 0}$

2  $M_n$  est intégrable pour tout  $n$

3  $E(M_{n+1} | F_n) = M_n$ .

### 1.3.8 Exemple de martingale à temps continu

On peut par exemple définir des martingales avec des mouvements browniens. Ceci a de nombreux liens avec l'intégration stochastique. On commence par définir la filtration comme étant la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(B_t)_{(t)}$ . Alors le processus stochastique  $(M_t = B_t^2 - t)_{(t)}$  est une martingale. Ceci donne par ailleurs la décomposition de Doob de la sous-martingale  $(B_t^2)_{(t)}$

### 1.3.9 Processus adapté

On dit que le processus  $(X_n)_{n \geq 0}$  est adapté à la filtration  $(F_n)_{n \geq 0}$  si  $X_n$  est  $F_n$ -mesurable pour tout  $n$ .

### 1.3.10 Intégrale d'Itô

L'intégrale stochastique d'un processus  $X_t$  par rapport à un processus  $B_t$  est décrite par l'intégrale :

$$\int_a^b X_t dB_t \tag{1.17}$$

elle est définie comme la limite en moyenne quadratique des sommes correspondantes de la forme :

$$\sum X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \tag{1.18}$$

Un point essentiel lié à cette intégrale est le lemme d'Itô .

La somme comme le produit de variables aléatoires est définie dans la théorie des probabilités. La somme implique une convolution de la fonction de densité des probabilités, et la multiplication est une addition répétée.

### 1.3.11 Processus d'Itô

On définit alors un processus d'Itô comme étant un processus stochastique  $X_t$  de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s \quad (1.19)$$

avec  $u$  et  $v$  deux fonctions aléatoires satisfaisant quelques hypothèses techniques d'adaptation au processus  $B_t$  et  $\omega$  est une réalisation dans l'espace de probabilité sous-jacent.

Dans le formalisme du calcul différentiel avec la prescription d'Itô, on note de façon équivalente la relation précédente comme

$$dX_t = u(s, \omega) dt + v(s, \omega) dB_t \quad (1.20)$$

Il existe une autre prescription notable pour définir une intégrale stochastique, c'est la prescription de Stratonovich. L'intégrale de Stratonovich est définie comme la limite des sommes discrètes

$$\sum X_{\left(\frac{t_i - t_{i+1}}{2}\right)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad (1.21)$$

La différence notable avec la prescription d'Itô est que la quantité  $X_{\left(\frac{t_i - t_{i+1}}{2}\right)}$  n'est pas indépendante au sens des probabilités de la variable  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ . Ainsi, contrairement à la prescription d'Itô, dans la prescription de Stratonovich on a

$$E \left( \int_a^b X_t dB_t \right) \neq 0 \quad (1.22)$$

ce qui complique, de ce point de vue, certains calculs. Cependant l'utilisation de la prescription de Stratonovich ne choisit pas une direction du temps privilégiée contrairement à celle d'Itô, ce qui implique que les processus stochastiques définis par l'intégrale de Stratonovich satisfont des équations différentielles stochastiques invariantes par renversement du temps. Pour cette raison, cette prescription est souvent utilisée en physique statistique.

Il faut noter cependant qu'il est possible de passer de l'une à l'autre des prescriptions en effectuant des changements de variables simples ce qui les rend équivalentes. Le choix de prescription est donc une question de convenance.

### 1.3.12 Intégrale de Wiener et intégrale stochastique

Soit  $Z$  le mouvement brownien standard défini sur l'espace probabilisé  $(\Omega, A, F, P)$  et  $\sigma$  un processus adapté à  $F$ . On suppose par ailleurs que  $\sigma$  vérifie :

$$E \left( \int_0^T \sigma_s^2 ds \right) < +\infty \quad (1.23)$$

Alors, l'intégrale stochastique de  $\sigma$  par rapport à  $Z$  est la variable aléatoire :

$$\left( \int_0^T \sigma_s dZ_s \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sigma_{n-1} (Z_n - Z_{n-1}) \quad (1.24)$$

### 1.3.13 Lemme d'Itô

Soit  $x$  un processus stochastique tel qu'on a  $dx = a dt + b dz$  où  $z$  est un processus de Wiener standard.

Alors d'après le lemme d'Itô, on a pour une fonction  $G = G(x, t)$

$$dG = \frac{dG}{dt} dt + \frac{dG}{dx} dx + \frac{1}{2} b^2 \frac{d^2 G}{dx^2} dt \quad (1.25)$$

### 1.3.14 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus stochastique décrivant (entre autres) la vitesse d'une particule dans un fluide, en dimension 1.

On le définit comme étant la solution  $X_t$  de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \sqrt{2} dB_t - X_t dt \quad (1.26)$$

où  $B_t$  est un mouvement brownien standard, et avec  $X_0$  une variable aléatoire donnée. Le terme  $dB_t$  traduit les nombreux chocs aléatoires subis par la particule, alors que le terme  $-X_t dt$  représente la force de frottement subie par la particule.

La formule d'Itô appliquée au processus  $e^t X_t$  nous donne :

$$d(e^t X_t) = e^t X_t dt + e^t (\sqrt{2} dB_t - X_t dt) = e^t \sqrt{2} dB_t \quad (1.27)$$

soit, sous forme intégrale :

$$X_t = X_0 \sqrt{2} e^{-t} \int_0^t e^s dB_s \quad (1.28)$$

Par exemple, si  $X_0$  vaut presque sûrement  $x$ , la loi de  $X_t$  est une loi gaussienne de moyenne  $xe^{-t}$  et de variance  $1 - e^{-2t}$ , ce qui converge en loi quand  $t$  tend vers l'infini vers la loi gaussienne centrée réduite.

### 1.3.15 Equation différentielle stochastique (EDS)

Une équation différentielle stochastique EDS est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elle permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les domaines d'application des EDS sont vastes : physique, biologie, dynamique des populations, écologie, mathématiques financières, traitement du signal, théorie du contrôle, ...

Une équation différentielle stochastique EDS est la donnée d'une équation du type

$$dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dWt \quad (1.29)$$

où  $X$  est un processus aléatoire inconnu, que l'on appelle communément équation de diffusion. Intégrer l'EDS, c'est trouver l'ensemble des processus vérifiant la diffusion entière.

### 1.3.16 Volatilité stochastique

La volatilité stochastique est utilisée dans le cadre de la finance quantitative, pour évaluer des produits dérivés, tels que des options. Le nom provient du fait que le modèle traite la volatilité du sous-jacent comme un processus aléatoire, fonction de variable d'états telles que le prix du sous-jacent, la tendance qu'à la volatilité, à moyen terme, à faire revenir le prix vers une valeur moyenne, la variance du processus de la volatilité. Les modèles de volatilité stochastiques présentent l'une des approches pour résoudre l'une des lacunes du modèle Black & Scholes, qui ne prend pas en compte le fait que la volatilité sous-jacente peut ne pas être constante, pendant le temps de vie du produit dérivé, et que celui-ci est affecté par le changement de valeur du sous-jacent.

Cependant, ces modèles ne peuvent expliquer certaines caractéristiques bien connues de la volatilité implicite, telles que le smile de volatilité ou le biais de volatilité, qui indique que la

volatilité implicite a tendance à varier en accord avec le prix d'exercice et la date d'expiration du produit dérivé.

En supposant que la volatilité du prix du sous-jacent est un processus stochastique, plutôt qu'une constante, il devient possible de modéliser les produits dérivés avec plus de précision. Dans le modèle à volatilité constante, nous supposons que le prix du produit dérivé suit un mouvement Brownien géométrique standard :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.30)$$

où  $\mu$  est le drift constant (le retour espéré) du prix du sous-jacent  $S_t$ ,  $\sigma$  est la volatilité constante, et  $dW_t$  est une gaussienne standard de moyenne nulle et d'écart type unitaire. La solution explicite de cette équation différentielle stochastique est

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \quad (1.31)$$

L'estimation du Maximum de vraisemblance, pour la volatilité constante  $\sigma$  dépendant des prix du marché à différentes périodes  $t_i$  nous donne

$$\bar{\sigma}^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\log S_{t_i} - \log S_{t_{i-1}})^2}{(t_i - t_{i-1})} \right) - \frac{1}{n} \frac{(\log S_{t_n} - \log S_{t_0})^2}{(t_n - t_0)} \quad (1.32)$$

Son espérance est

$$E(\bar{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (1.33)$$

Ce modèle de base, avec une volatilité  $\sigma$  constante est le point de départ des modèles à volatilité non-stochastique, telle que Black-Scholes et Cox-Ross-Rubinstein.

Pour un modèle à volatilité stochastique, on remplace la volatilité constante  $\sigma$  par une fonction  $\nu_t$ , qui modélise la variance de  $S_t$ . Cette fonction de variance est aussi modélisé par un mouvement brownien et la courbe de  $\nu_t$  dépend du modèle de volatilité stochastique étudié.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\nu} S_t dW_t \quad (1.34)$$

$$d\nu_t = \alpha_{S,t} dt + \beta_{S,t} dB_t \quad (1.35)$$

où  $\alpha_{S,t}$  et  $\beta_{S,t}$  sont des fonctions de  $\nu$  et  $dB_t$  est une autre gaussienne, corrélé à  $dW_t$  par un facteur de corrélation constant  $\rho$ .

### 1.3.17 Matrice stochastique

En mathématiques, une matrice stochastique (aussi appelée matrice de Markov) est une matrice carrée dont chaque élément est un réel compris entre 0 et 1 et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1. Cela correspond, en probabilité, à la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie.

Une matrice est dite doublement stochastique si la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1

### 1.3.18 Méthode Monté-Carlo

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique, utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis, et publié pour la première fois en 1949 dans un article co-écrit avec Stanislas Ulam.

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.). La méthode de simulation de Monte-Carlo permet aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet telles que le chiffre d'affaires ou la marge... et à leur affecter une distribution de probabilité. Pour chacun de ces facteurs, on effectue un grand nombre de tirages aléatoires dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de déterminer la probabilité d'occurrence de chacun des résultats. Le véritable développement des méthodes de Monte-Carlo s'est effectué, sous l'impulsion de John von Neumann et Stanislas Ulam notamment, lors de la Seconde Guerre mondiale et des recherches sur la fabrication de la bombe atomique. Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la Monte-Carlo N-Particle transport.

# Chapitre 2

## Etude du modèle Black & Scholes

F. Black et M. Scholes ont proposé de modéliser la dynamique du cours  $X_t$  du sous-jacent par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad X_0 = x \quad (2.1)$$

- $X$  représente le sous-jacent,  $X_t$  son cours à la date  $t$ ,
- $\mu$  est le rendement instantané, supposé constant,
- $W$  est un mouvement brownien standard.

Le sous-jacent est une action ou un indice boursier. Dans ce modèle,  $\sigma$  est une constante strictement positive, une quantité supposée indépendante du temps et du hasard qu'on appelle volatilité. Nous considérons également un actif sans risque  $X^0$  dont la valeur à la date  $t$  est  $X_t^0 = e^{rt}$ . Ceci revient à supposer le taux d'intérêt à court terme constant égal à  $r$ . L'équation (2.1) a des conséquences importantes :

1. Le processus  $X$  est un mouvement brownien géométrique, on dispose d'une expression explicite pour  $X_t$

$$X_t = x \exp \left( \sigma W_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \quad (2.2)$$

qui prouve que le logarithme du cours  $X_t$  suit une loi gaussienne de moyenne  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$  et de variance  $\sigma^2 t$ . On peut écrire (2.2) sous la forme  $X_t = x e^{\mu t} M_t$ , où  $M_t = \exp \left( \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right)$  est une  $P$ -martingale.

- 2 Le marché est viable et complet :

2.1 Il existe une et une seule probabilité  $P^*$  sous la quelle le processus des prix actualisés  $(e^{-rt}X_t)_{t \geq 0}$  de l'actif risqué est une  $P^*$ -martingale. Cette probabilité est appelée probabilité risque neutre.

2.2 L'évolution du sous-jacent s'écrit

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t^* \quad X_0 = x \quad (2.3)$$

où  $W^*$  est un  $P^*$ -mouvement brownien.

2.3 Toute option européenne de payoff  $H \in L^2(P^*, \mathcal{F}_T)$ , c'est-à-dire toute option définie par une variable aléatoire  $H$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité  $P^*$  est simulable : il existe un unique portefeuille admissible, c-à-d autofinancé et minoré, ne contenant que l'actif sans risque et de l'actif risqué, dont la valeur en  $T$  est  $H$ . De plus, la valeur  $V(t)$  de l'option est, sous la probabilité risque-neutre, l'espérance actualisée du flux terminal  $H$  :

$$V(t) = E^* [e^{-r(T-t)} H | \mathcal{F}_t]$$

Ceci est une conséquence du Théorème de représentation des martingales browniennes, on note  $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq t) = \sigma(W_s^*, 0 \leq s \leq t)$ . Alors on peut se couvrir parfaitement c-à-d éliminer le risque, en gérant dynamiquement un portefeuille ne contenant que du liquide et du sous-jacent. On admet que  $V(t)$  est indépendante de la tendance  $\mu$ .

Si  $H = h(X_t)$ , avec  $h$  continue et positive, dans ce cas particulier le prix de l'option se met sous la forme  $P(t, X_t)$

$$P(t, X_t) = E^* \left[ e^{-r(T-t)} h(\exp(\sigma(W_T^* - W_t^*) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))) \right] \quad (2.4)$$

La fonction  $P$  est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\sigma)P = 0 \\ \forall x > 0, P(T, x) = h(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

où

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right). \quad (2.6)$$

La quantité d'actif risqué à détenir à la date  $t$  est

$$a_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, X_t)$$

cette quantité est appelée le "delta". Par conséquent, le portefeuille de couverture contient

$$b_t = e^{-rt} (P(t, X_t) - X_t \frac{\partial P}{\partial x}(t, X_t))$$

unités d'actif sans risque.

Si le call correspond au payoff  $h(x) = (x-K)_+$ , on note dans ce cas  $P(t, X_t) = C_{BS}(t, x, K, T, \sigma)$ ,  $K$  est le strike,  $T$  la maturité et

$$C_{BS}(t, x, K, T, \sigma) = xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} d_+ &= \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \\ d_- &= \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

De plus, le portefeuille contient la quantité  $a_t = N(d_+)$  d'actifs risqués. Ceci prouve que l'égalité (2.7) donnant le prix du call sous Black et Scholes donne aussi la décomposition du portefeuille de couverture en actif risqué et en actif sans risque. Tout ceci reste vrai, si on autorise le taux d'intérêt à cours terme appelé "taux cours", et la volatilité à dépendre du temps, mais pas du hasard. Il suffit de remplacer  $r$  par

$$\bar{r} = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds \quad (2.9)$$

et  $\sigma$  par  $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds \quad (2.10)$$

dans les formules (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8).

Le modèle de Black et Scholes sert de référence à tous ceux qui pratiquent la finance des marchés :

1. Il est simple : adopter le modèle de Black et Scholes, c'est simplement supposer les cours  $X$  à trajectoires continues et à accroissement relatifs indépendants et stationnaires.
2. Il est maniable : il donne lieu à des formules fermées pour le prix des calls et des puts, et pour les deltas correspondants, c'est-à-dire pour les quantités d'actifs risqués que doit contenir le portefeuille de couverture.

Ce pendant :

1. Tous les tests statistiques invalident l'hypothèse log-normale pour le cours du sous-jacent. En réalité, il semble que les queues de distribution soient plus épaisses que ne le prévoit le modèle de Black et Scholes. De plus, les queues de distributions empiriques de  $\ln(X_t)$  sont parfois asymétriques.
2. On définit la volatilité implicite  $I$  par l'égalité

$$C_{obs}(t, x, K, T; I) = C^{obs}$$

où  $C^{obs}$  est le prix observé du call de maturité  $T$  et de de strike  $K$ . La définition a un sens puisque  $\sigma \rightarrow C_{obs}(t, x, K; \sigma)$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $](x - K)_+, x[$ . Ainsi définie,  $I$  est une fonction de  $t, x, K, T$  et  $C^{obs}$ . Si les prix observés étaient les prix prévus par le modèle de Black et Scholes, la fonction  $K \rightarrow I(t, x, K; C^{obs})$  serait constante et égale au paramètre  $\sigma$ . Or, la courbe empirique  $K \rightarrow I(t, x, K; C^{obs})$  porte souvent le nom de courbe de "smile" en référence à son allure souriante (convexe décroissante puis croissante). Pour expliquer ces phénomènes, il faut raffiner le modèle. Il y a bien des façons de le faire, par exemple autoriser les cours  $X_t$  à avoir des sauts ou dépendre de  $t$  et de  $x$ , la seule source de bruit restant le mouvement brownien  $W$ , c'est ce que propose B. Dupire [5] et [6]. Une manière naturelle d'étendre le modèle de Black et Scholes [2] est d'autoriser la volatilité à être un processus stochastique gouverné par un deuxième bruit modélisé par un deuxième mouvement brownien  $\widehat{Z}$  éventuellement corrélé à  $W$ , mais non parfaitement corrélé, contrairement au cas du modèle de B. Dupire[?][?], on conserve l'écriture

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t$$

mais  $\sigma$  est désormais un processus aléatoire dépendant du temps et du hasard  $(W, \widehat{Z})$ . Comment choisir ce processus? On souhaite que la volatilité  $\sigma_t$  soit une quantité  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et

strictement positive. Aussi on propose de l'écrire sous forme  $\sigma_t = f(Y_t)$ , où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est une fonction déterministe et  $Y$  est un processus aléatoire à valeurs réelles  $\mathcal{F}_t$ -adapté. On se limite aux processus  $Y$  qui sont markoviens. Par exemple :

1. un processus markovien de sauts pur à espace d'états fini ou dénombrable.
2. un processus markovien de sauts pur à espace d'états infini non dénombrable.
3. une diffusion markovienne du type.

$$dY_t = \mu_Y(t, Y_t)dt + \sigma_Y(t, Y_t)d\widehat{Z}_t \quad (2.11)$$

Il y a une bonne raison a priori de considérer la volatilité comme une quantité aléatoire, des études empiriques sur les rendements du cours sous-jacent permettent d'estimer la volatilité et celle-ci semble présenter un comportement stochastique. Mais modéliser la volatilité par un processus stochastique, c'est en fait reconnaître que quantifier le risque à travers un paramètre de volatilité constant est aujourd'hui insuffisant pour expliquer certains phénomènes de marché. En particulier pour expliquer la courbe de smile. Et c'est une modification profonde et puissante qui permet de décrire un marché bien plus complexe que le marché de Black et Scholes :

1. on peut reproduire des lois plus réalistes pour les rendements, en particulier les queues de ces distributions sont plus épaisses que celles des lois lognormales.
2. on peut rendre ces distributions asymétriques en corrélant les bruits  $W$  et  $\widehat{Z}$ .
3. on peut faire apparaître du smile.

Evidemment rien n'est gratuit, surtout dans le monde de la finance des marchés, il faut payer le prix de ces améliorations.

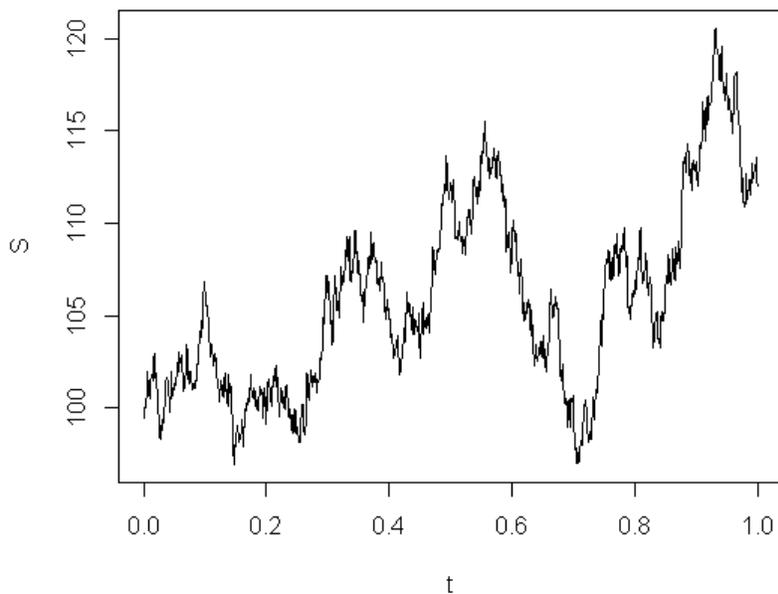
1. on ne peut pas observer directement la volatilité, estimer les paramètres du modèle et le niveau actuel de la volatilité sont donc des problèmes difficiles.
2. le marché ainsi modélisé est incomplet, lorsqu'on traite une option, on ne peut pas éliminer le risque en gérant un portefeuille contenant du liquide et du sous-jacent. En effet, la variation infinitésimale de la valeur d'un tel portefeuille contient des termes en  $dW_t$  et  $dZ_t$  que l'on ne peut annuler simultanément.

## 2.1 Volatilité

la volatilité et le taux d'intérêt sont des éléments non observables dans le calcul d'une option or la volatilité est un paramètre essentiel dans la valorisation d'une option, c'est un paramètre aléatoire contrairement à ce que prévoit le modèle de Black-Scholes, qui le considère comme élément constant, ce qui estime principalement ce paramètre sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

L'estimation de la volatilité est l'élément essentiel et le plus délicat pour l'évaluation des options car la valeur d'une option est très sensible aux variations de la volatilité. Les prix des options peuvent s'estimer différemment et changer brusquement, alors que le prix du sous-jacent reste stable. Cette situation est cruciale pour faire du "trading", elle facilite la spéculation sur la volatilité des cours. Si un opérateur anticipe une volatilité futur plus forte que celle anticipée par le marché, il achète des options qu'il estime sous-évaluées, dans l'espoir de les revendre avec bénéfice, si le marché réalise son erreur avant la date d'expiration. Le cas d'anticipation de volatilité moins forte ou faible, il vend des options qu'il croit sur-évaluées, de ce fait on parle de vente ou d'achat de volatilité à la place de vendre ou acheter des options.

**Figure 2.1: Prix du sous-jacent pour sigma=20%**



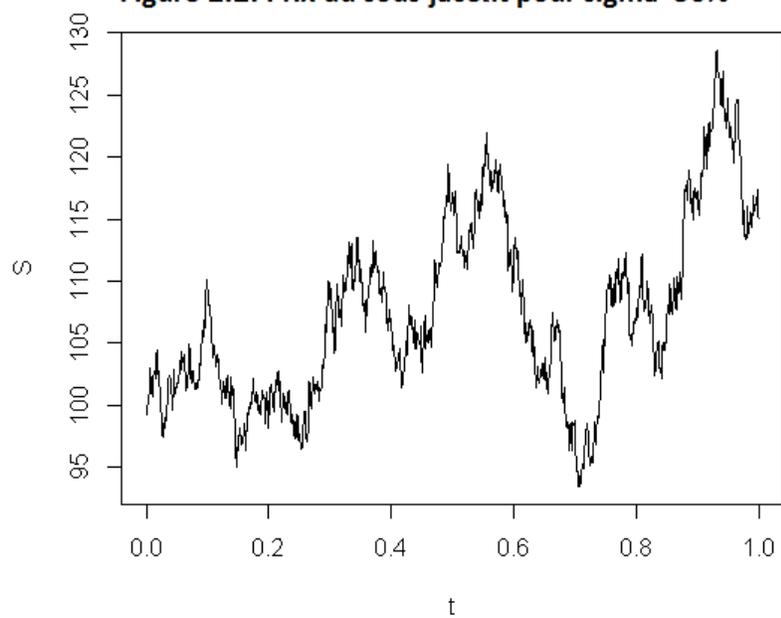
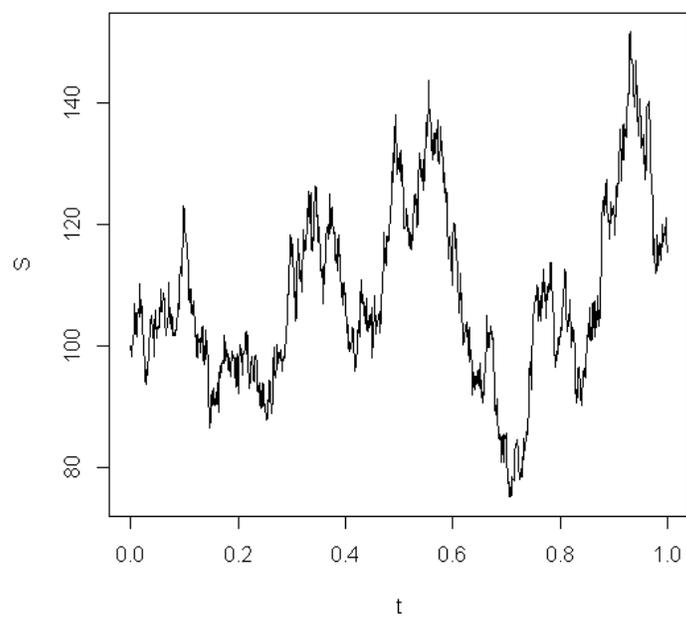
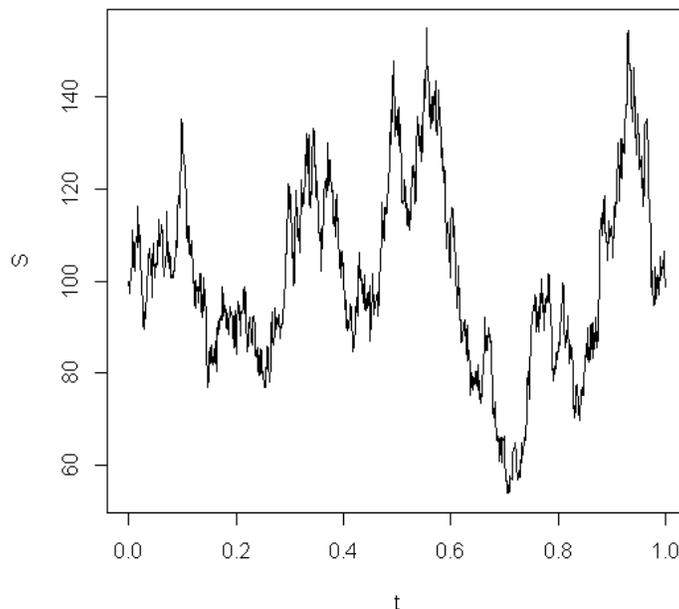
**Figure 2.2: Prix du sous-jacent pour sigma=30%****Figure 2.3: Prix du sous-jacent pour sigma=70%**

Figure 2.4: Prix du sous-jacent pour sigma=110%



### Volatilité historique

La volatilité est estimée par les données historiques, beaucoup de chercheurs l'ont utilisés, Black-Scholes [2], Galai (1977) et Finnerty (1978). La volatilité est donnée par l'écart type de rendement  $R_t$  du sous-jacent, au cours de la période qui précède l'émission des options. Si on considère le sous-jacent ne délivre pas de dividendes, ce rendement est donné par

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-dt}}{S_{t-dt}} = \frac{dS}{S} = d(\ln S) \quad (2.12)$$

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement Brownien géométrique suivant la formule

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.13)$$

où  $W_t$  est un processus de Wiener-Lévy.

#### 2.1.1 Volatilité implicite

La volatilité implicite consiste à utiliser les prix observés sur les marchés pour extraire une volatilité, elle est liée à la valeur présente du marché et se base sur le prix présent de l'option qui inclue les prévisions des événements futurs, elle est liée intimement avec le processus de diffusion du sous-jacent, dans le cas du modèle de Black-Scholes, celui-ci est brownien

géométrique, ce qui ne colle pas avec la réalité. La volatilité implicite de Black-Scholes est donnée par la volatilité  $\sigma$  qui égalise le prix de l'option donné par la formule de Black-Scholes et le prix de l'option observé sur le marché. Son calcul nécessite l'inversion de la formule d'évaluation de Black-Scholes, tout en considérant la valeur de l'option sur le marché. Cette inversion est conditionnée par la valeur du marché, la fonction de la volatilité est une bijection. L'inversion d'une formule d'évaluations d'options permet d'estimer les anticipations du marché, concernant la volatilité future des cours des actifs sous-jacents. Si un opérateur détient une option qu'il veut estimer sa volatilité, il observe le cours coté de cette même option la veille c-à-d un cours coté de l'option sur le même titre pour une autre échéance, il suppose la formule de Black-Scholes exacte, il déduit la volatilité  $\sigma$  entant qu'inconnue à partir du cours observé et ceci permet le calcul de la valeur future de l'option. Cette façon d'estimer les calculs est très utilisé par les praticiens. Pour inverser les formules d'évaluation, le calcul de la volatilité implicite est approché par des méthodes numériques.

### 2.1.2 "Smile" de la volatilité

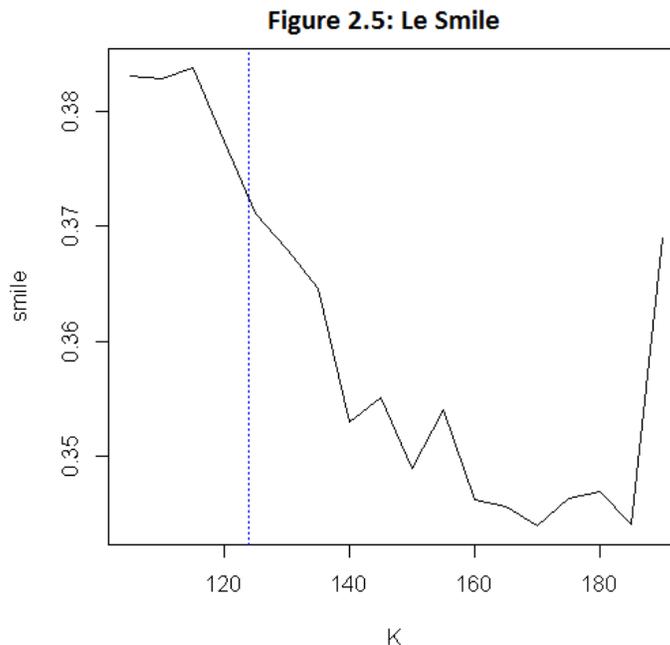
La volatilité est le seul paramètre inobservable dans le modèle de Black-Scholes, on peut considérer le prix de l'option comme fonction de la volatilité, si ce modèle était parfait, la volatilité implicite serait la même quelque soit le prix du marché de l'option. Des études empiriques ont montré que la volatilité est liée au prix d'exercice de l'option et de sa durée de vie résiduelle, quand il s'agit d'une option européenne. Si on représente la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice de l'option, en fixant la maturité, on obtient une courbe de forme convexe plutôt qu'une droite horizontale comme le suppose le modèle de Black & Scholes, cette forme de la courbe est désigné de "smile" par les chercheurs et les praticiens.

### 2.1.3 Exemple

On considère le prix d'un call dont le sous-jacent est une action Apple, nous avons collectés les prix des options pour différentes Strikes ; pour la période du 23 Avril 2009 au 17 Juillet 2009, l'échéance  $T$  est de 60 jours ouvrables, la valeur actuelle du sous-jacent est de 123.90 Dollars.

```
S <- yahooSeries("AAPL", from = "2009-01-02", to = "2009-04-23")
```

```
Close <- S[, "AAPL.Close"]
X <- returns(Close)
Delta <- 1/252
sigma.hat <- sqrt(var(X)/Delta)
sigma.hat
Pt <- c(22.2, 18.4, 15.02, 11.9, 9.2, 7, 5.2, 3.6, 2.62, 1.76,
1.28, 0.8, 0.53, 0.34, 0.23, 0.15, 0.09, 0.1)
K <- c(105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155,
160, 165, 170, 175, 180, 185, 190)
S0 <- 123.9
nP <- length(Pt)
T <- 60 * Delta
r <- 0.056
smile <- sapply(1 :nP, function(i) GBSVolatility(Pt[i], "c", S = S0, X = K[i], Time = T, r
= r, b = r))
vals <- c(smile, sigma.hat)
plot(K, smile, type = "l", ylim = c(min(vals, na.rm = TRUE), max(vals, na.rm = TRUE)),
main = "")
abline(v = S0, lty = 3, col = "blue")
abline(h = sigma.hat, lty = 3, col = "red")
axis(2, sigma.hat, expression(hat(sigma)), col = "red")
```



### 2.1.4 Conclusion

Le modèle de Black-Scholes a été toujours une référence pour tous ceux touchent de près ou de loin à la finance des marchés. Il est très utilisé dans le monde de la finance, alors que ces hypothèses ne sont pas toujours réalistes. Il suppose que le taux d'intérêt est constant or celui-ci est de toute évidence stochastique, car il fluctue aléatoirement, ce modèle a eu un succès commercial que les autres modèles n'ont pu égaliser. La volatilité implicite donne une meilleure prévision de la volatilité future que la volatilité historique et fournit des résultats plus fiables pour évaluer des options Latané et Rendeleman en (1976) et Becker (1981). Ce modèle suppose que la volatilité du sous-jacent est constante ou bien fonction déterministe et connue, or les séries temporelles de la volatilité montrent que cette dernière est variable et imprédictible ce qui veut dire aléatoirement fonction du temps donc stochastique. La volatilité n'est pas observée directement et sa valeur est très difficile à quantifier et lui donner une mesure, la difficulté réside dans la modélisation d'une variable inobservable.

Le modèle de Black-Scholes [2] considère le cours du sous-jacent suit un processus de diffusion dans le temps, ce qui n'est pas réaliste, car le cours du sous-jacent peut faire des sauts inattendus de temps en temps, ils sont le produit d'événements inattendus. Ces sauts sont, souvent, des chutes du cours, ce qu'on appelle des "Krach".

# Chapitre 3

## Etude de quelques modèles Financiers à volatilité stochastique

### 3.1 Modèle de Hull et White

#### 3.1.1 Description du modèle

On considère les hypothèses suivantes : on prend le call européen de valeur  $V$  sur une action,  $r$  le taux d'intérêt sans risque (constant ou déterministe). Le processus suivi par l'action  $S$  et la variance instantanée  $V$  est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} dS = \phi S dt + \sigma S dW \\ dV = \mu V dt + \epsilon V dZ \\ dW_{t,S} \cdot dW_{t,Z} = \rho dt \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\rho$  est le coefficient de corrélation entre  $dW$  et  $dZ$

$$V = \sigma^2$$

$$\phi = f(S, \sigma, t)$$

$$\mu = f(\sigma, t) \text{ et } \epsilon = f(\sigma, t)$$

Le système a deux variables d'états  $S$  et  $\sigma$ . Nous avons l'équation aux dérivées partielles de Garman à résoudre

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho\sigma^3 \epsilon S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + \epsilon^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right] - rV \\ &= -rS \frac{\partial V}{\partial S} - [\mu - \beta v (\mu^* - r)] \sigma^2 \frac{\partial V}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$\beta v$  est le vecteur des bétas de régression multiplié par le rendement de la variance par rapport au portefeuille de marché.

$\mu^*$  est le vecteur de rendement instantané espéré du portefeuille de marché.

Si  $\beta v (\mu^* - r) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho\sigma^3 \varepsilon S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + \varepsilon^2 V^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right] - rV \\ &= -rS \frac{\partial V}{\partial S} - \mu\sigma^2 \frac{\partial V}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (3.3)$$

La résolution analytique de cette EDP se fait en faisant un changement de mesure de probabilité, on utilise le Théorème de Girsanov, pour avoir une probabilité risque neutre et actualiser au taux sans risque de  $V(S, \sigma^2, t)$ , on obtient :

$$V(S_t, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)} \int V(S_T, \sigma_T^2, T) p(S_T/S_t, \sigma_t^2) dS_T \quad (3.4)$$

On note par :

$T$  = la maturité ;

$S_t$  = le prix de l'actif sous-jacent à la date  $t$  ;

$\sigma_t$  = la volatilité instantanée à la date  $t$  ;

$p(S_T | S_t, \sigma_t^2)$  la distribution conditionnelle de  $S_T$  sachant  $S_t$  et  $\sigma_t$

$$V(S, \sigma^2, t) = \max[0, S - K] \quad (3.5)$$

On a les conséquences suivantes :

– Les fonctions de densité conditionnelle sont en fonction de 3 variables  $(x, y, z)$  :

$$p(x | y) = \int g(x | z) h(z | y) dz$$

– Soit  $\bar{\sigma}$  la variance moyenne sur la durée de vie de l'option, définie par l'intégrale stochastique :

$$\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_\tau^2 d\tau \quad (3.6)$$

– La distribution de  $S_T$  s'écrit :

$$p(S_T | \sigma_t^2) = \int g(S_T | \bar{\sigma}) h(\bar{\sigma} | \sigma_t^2) d\bar{V} \quad (3.7)$$

En fin, on obtient

$$V(S_T, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)} \int \int C(S_T) g(S_T | \bar{V}) h(\bar{V} | \sigma_t^2) dS_T d\bar{V}$$

d'où

$$V(S_T, \sigma_t^2, t) = \int \left[ e^{-r(T-t)} \int C(S_T) g(S_T | \bar{\sigma}) dS_T \right] h(\bar{\sigma} | \sigma_t^2) d\bar{V} \quad (3.8)$$

Dans un monde risque neutre on a :

$$dS = rSdt + \sigma S d\bar{z} \quad (3.9)$$

$$d\sigma^2 = \alpha \sigma^2 dt + \epsilon \sigma^2 d\bar{w} \quad (3.10)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt \quad (3.11)$$

où  $r$  le taux sans risque supposé constant,  $\alpha$  et  $\epsilon$  sont indépendants de  $S$

les processus de Wiener sont indépendants

$$P(\log(S(T) | S(0) | \bar{\sigma}) \sim N(rT - \frac{\bar{\sigma}}{2}; \bar{\sigma}T) \quad (3.12)$$

si on note  $M(\bar{\sigma})$  la variance moyenne, on a

$$M(\bar{\sigma}) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.13)$$

avec

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (r + \bar{V}/2)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \quad (3.14)$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\bar{V}(T-t)} \quad (3.15)$$

alors la valeur de l'option est

$$V(S, \sigma_t^2) = \int M(\bar{\sigma}) h(\bar{\sigma} | \sigma_t^2) d\bar{V} \quad (3.16)$$

### 3.1.2 Conclusion

La formule d'évaluation est valide dans un monde risque neutre, le problème est la loi de distribution de  $\bar{V}$ , qui est inconnue, on ne peut donc pas déduire de forme analytique du prix du call. On connaît tous les moments de la distribution ( $E()$ , Skew...), d'où la nécessité d'utiliser une autre méthode. Deux critiques majeures se présentent, premièrement, il n'y a pas de prise en compte d'une prime de risque de volatilité, deuxièmement les hypothèses de processus non corrélés entre le sous-jacent et la volatilité

## 3.2 Modèle de Elias M. Stein & Jeremy C.Stein

### 3.2.1 Introduction

Dans l'article de Stein et Stein[24], une formule fermée est obtenue pour la distribution du sous-jacent, qui s'avère être un mélange de distributions log-normales. Les prix de calls déduits de cette formule présentent une forme en U de volatilité proche des phénomènes de marché. Ce U n'est pas capturé par le modèle de Black Scholes, d'où l'intérêt d'utiliser les modèles à volatilité stochastique, ils ont étudié la distribution des prix des actions, dans le cas où les prix  $S$  des sous-jacents suivent un mouvement brownien géométrique et la volatilité  $\sigma$  suit un processus de Ornstein-Uhlenbeck arithmétique.

On considère les dynamiques de  $S$  et  $\sigma$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^1 \quad (3.17)$$

$$d\sigma_t = -\delta(\sigma - \theta)dt + k dW_t^2 \quad (3.18)$$

Avec  $W_t^1$  et  $W_t^2$  deux mouvements browniens non corrélés,  $\delta$  le taux de retour à la moyenne,  $k$  un facteur constant.

Les auteurs cherchent à évaluer des options dans un monde où la volatilité suit un processus autorégressif . Ce qui caractérise ce modèle, est le retour à la moyenne  $\theta$  pour que la volatilité reste en général au voisinage des mêmes niveaux. Empiriquement, on constate que les probabilités de volatilité négatives sont très faibles donc négligeables.

### 3.2.2 Intégration des équations du modèle

Soit l'équation

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t^1 \quad (3.19)$$

Une intégration de cette équation nous donne

$$S_T = S_t e^{\int_t^T \left( \mu - \frac{\sigma_u^2}{2} \right) du + \int_t^T \sigma_u dW_u^1} \quad (3.20)$$

pour intégrer (3.18), on pose  $X_t = \theta - \sigma_t$  et  $Y_t = e^{\delta t} X_t$ , on a

$$dY_t = k e^{\delta t} dW_t^2$$

on déduit

$$Y_T - Y_t = k \int_t^T e^{(\delta u)} dW_u^2 \quad (3.21)$$

$$X_T = e^{-\delta(T-t)} X_t + k \int_t^T e^{-\delta(T-u)} dW_u^2 \quad (3.22)$$

$$\sigma_T = \theta + (\sigma_t - \theta) e^{-\delta(T-t)} + k \int_t^T e^{-\delta(T-u)} dW_u^2 \quad (3.23)$$

L'équation (3.20) fait apparaitre dans l'exponentielle la variable aléatoire gaussienne  $\int_t^T \sigma_u dW_u^1$ , cette gaussienne est centrée et de variance  $\int_t^T \sigma_u^2 du$ . On introduit la volatilité quadratique moyenne

$$\Sigma_{T,t} = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du} \quad (3.24)$$

l'équation (3.20) devient

$$S_T = e^{r(T-t)} S_t e^{-\frac{\sigma_t^2}{2}(T-t) + \Sigma_{T,t} W_T} \quad (3.25)$$

où  $W_T$  est un mouvement brownien, les deux mouvements browniens étant indépendants, la volatilité est indépendante de  $W_t^1$ , l'égalité précédente est valable en loi.

### 3.2.3 Prix d'un call européen par la formule fermée

L'origine de la difficulté de ce modèle est que la volatilité suit un processus stochastique. Ainsi, afin de trouver une formule fermée donnant le prix d'un call, il faut au préalable déterminer la densité conditionnelle du sous-jacent et donc la densité conditionnelle de la volatilité dont elle dépend.

#### Densité de la volatilité

Conditionnellement à  $F_t$  la tribu du passé définie par  $\sigma(\sigma_t, S_u, 0 < u < t)$ ,  $\sigma_T$  suit une loi gaussienne dont la moyenne et la variance sont d'après (3.23)

$$E(\sigma_T | \sigma_t) = \theta + (\sigma_t - \theta) e^{-\delta(T-t)} \quad (3.26)$$

$$Var(\sigma_T | \sigma_t) = \frac{k^2}{2\delta} (1 - e^{-2\delta(T-t)}) \quad (3.27)$$

On constate que l'espérance tend bien vers  $\theta$  lorsque  $T$  tend vers l'infini. De même, on vérifie que la variance n'explose pas mais tend bien vers  $\frac{k^2}{2\delta}$ . Ce modèle semble donc bien adapté à la description de l'évolution d'une volatilité. En effet, une volatilité tend à osciller autour de sa moyenne avec une variance bornée. Le facteur  $k$  qui indique la variance du mouvement brownien associé à la volatilité et fait augmenter la variance. Au contraire, le facteur  $\delta$  traduisant la force de retour vers la position d'équilibre et fait diminuer la variance. Il est à noter que ces paramètres doivent être calibrés pour correspondre au mieux au marché. Précisons simplement qu'il serait judicieux de vérifier après calibration que la probabilité d'avoir une volatilité négative soit très faible. En effet, le modèle Stein & Stein possède le défaut de permettre à  $\sigma_t$  de prendre des valeurs négatives.

### Densité du sous-jacent

Soit  $f_0$  la densité de  $S_T$  quand  $\mu = 0$ ,  $f$  la densité conditionnelle de  $S_T$  avec  $\mu$  quelconque, la relation entre ces deux dernières est

$$f(S_T | S_0, \sigma_0, r, T, \delta, \theta, k) = e^{-rT} f_0(S_T e^{-rT}) \quad (3.28)$$

Stein et Stein prouvent que lorsque la volatilité est un processus d'Ohrstein-Uhlenbeck, on obtient la distribution du sous-jacent à  $T$  à partir de la densité conditionnée à  $\sigma_0$  de la variable aléatoire  $\Sigma_{T,t}$  notée  $m_T$ .

Si on note  $f_{L,N}(S_T | S_0, T, r, \sigma)$  la densité log-normale du sous-jacent dans le cas d'un modèle de Black & Scholes classique à volatilité déterministe, on montre que

$$f(S_T | S_0, \sigma_0, r, T, \delta, \theta, k) = \int f_{L,N}(S_T | S_0, T, r, \sigma) m_T(\sigma) d\sigma \quad (3.29)$$

La densité du sous-jacent devient un mélange de distributions log-normale.

Pour déterminer  $m_T$ , les auteurs passent par une sorte de transformée de Laplace de  $m_T(\sigma)$ , ils introduisent la fonction  $I(\lambda)$ , qui dépendent de  $\sigma_0$  et  $T$

$$I(\lambda) = E\left(e^{-\lambda \Sigma_{T,0}^2}\right) = \int e^{-\lambda \sigma^2} m_T(\sigma) d\sigma \quad (3.30)$$

On démontre que

$$f_0(S_T) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{S_0}{S_T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{S_0} \int_{-\infty}^{\infty} I\left(\left(\eta^2 + \frac{1}{4}\right) \frac{T}{2}\right) \cos\left(\eta \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) d\eta \quad (3.31)$$

L'essentiel de ces travaux consiste à obtenir une expression analytique de cette transformée de Laplace. On utilise la formule de Feynman-Kac pour montrer que  $I(\lambda)$  est reliée à la solution d'une EDP, on aboutit à un résultat qui donne  $I(\lambda)$  sous la forme

$$I(\lambda) = \exp \left( L_T(\lambda) \frac{\sigma_0^2}{2} + M_T(\lambda) \sigma_0 + N_T(\lambda) \right) \quad (3.32)$$

où  $L_T$ ,  $M_T$  et  $N_T$  sont trois fonctions

Soient

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\delta}{k^2}, \quad B = \frac{\theta\delta}{k^2}, \quad C = -\frac{\lambda}{k^2t} \\ a &= (A^2 - 2C)^{\frac{1}{2}}, \quad b = -\frac{A}{a} \\ L &= -A - a \left( \frac{\sinh(ak^2t) + b \cosh(ak^2t)}{\cosh(ak^2t) + b \sinh(ak^2t)} \right) \\ M &= B \left\{ \frac{b \sinh(ak^2t) + b^2 \cosh(ak^2t) + 1 - b^2}{\cosh(ak^2t) + b \sinh(ak^2t)} - 1 \right\} \\ N &= \frac{a - A}{2a^2} [a^2 - AB^2 - B^2a] k^2t + \frac{B^2 [A^2 - a^2]}{2a^3} \\ &\quad \times \left\{ \frac{(2A + a) + (2A - a) e^{2ak^2t}}{(A + a + (a - A) e^{2ak^2t})} \right\} \\ &\quad + \frac{2AB^2 [a^2 - A^2] e^{2ak^2t}}{a^3 (A + a + (a - A) e^{2ak^2t})} \\ &\quad - \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{A}{a} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{A}{a} \right) e^{2ak^2t} \right\} \\ I &= \exp \left( L \frac{\sigma_0^2}{2} + M \sigma_0 + N \right) \end{aligned}$$

A l'aide de  $I(\lambda)$ , on pose  $f(x) = S.P(S, t)$ , en effectuant le changement de variables  $x = \log(S)$  et en utilisant les transformées de Fourier et la formule d'inversion, on a

$$P(S, t) = e^{-\mu t} S_0(S e^{-\mu t})$$

avec  $S_0(S, t)$  la distribution du prix des actions dans le cas où le drift est nul

$$S_0(S, t) = (2\pi)^{-1} S^{-\frac{3}{2}} \times \int_{v=-\infty}^{\infty} I \left( \left( \eta^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{t}{2} \right) e^{t\eta \log S} d\eta \quad (3.33)$$

### Prix d'un call européen

Pour valoriser le prix d'un call européen, il suffit de faire des approximations de la double intégrale

$$C_t = \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T | S_0, \sigma_0, r, T - t, \delta, \theta, k) dS_T \quad (3.34)$$

L'intégration numérique a été faite par Stein & Stein en utilisant la méthode des quadratures de type Romberg, les prix présentés ont été trouvés en moins d'une minute.

## 3.3 Modèle Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou et K. Ronnie Sircar

### 3.3.1 Description du modèle

Le modèle proposé par les auteurs est le suivant :

On se limite aux diffusions markoviennes, parmi celles qui possèdent la propriété de retour à la moyenne

$$\mu_Y(t, y) = \alpha(m - y) \quad (3.35)$$

Le paramètre  $\alpha$  s'appelle le taux de retour à la moyenne et le paramètre  $m$  la moyenne à long terme. On voit que  $Y_t$  comme la position à la date  $t$  d'une particule soumise à une force de rappel d'intensité  $\alpha$  qui a tendance à la ramener à sa position d'équilibre (déterministe)  $m$  est une force aléatoire, par exemple des chocs modélisés par le bruit  $\sigma_Y(t, Y_t)d\widehat{Z}_t$ . Le choix  $\sigma_Y(t, Y_t) = \beta$ , où  $\beta$  est une constante, correspond au processus dit d'Ornstein-Uhlenbeck.

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\widehat{Z}_t \end{cases} \quad (3.36)$$

- $X$  représente le sous-jacent,  $X_t$  son cours à la date  $t$ ,
- $\mu$  est le rendement instantané, supposé constant,
- $\sigma_t$  est la valeur à la date  $t$  de la volatilité du cours du sous-jacent, elle mesure l'intensité du bruit  $\sigma_t X_t dW_t$  auquel est soumis le cours du sous-jacent,
- $W_t$  est un mouvement brownien standard, la volatilité est elle-même un processus stochastique, fonction déterministe du processus  $Y$ , la fonction est définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs strictement positives,

- $Y$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, de moyenne à long terme  $m$  et de variance à long terme  $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ ,
- $\widehat{Z}_t$  est un mouvement brownien standard éventuellement corrélé à  $W_t$ ; on suppose cette corrélation constante et on la note  $\rho$ , avec  $\rho \in ]-1; 1[$ , de sorte que  $d\langle W, \widehat{Z} \rangle_t = \rho dt$ . Si on définit par  $Z_t$  par l'égalité  $\widehat{Z} = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t$ , alors  $W_t$  et  $Z_t$  sont deux mouvements browniens indépendants.

On se place sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  muni de la filtration  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, Z_s, 0 \leq s \leq t)$ . Par exemple, on pourra considérer l'espace  $\Omega = C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$  des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Wiener sur cette tribu. Dans ce cas, il faut voir un événement ponctuel  $\omega$  comme trajectoire  $t \rightarrow (W_t(\omega), Z_t(\omega))$ . Par ailleurs, la filtration  $\mathcal{F}_t$  représente l'information sur les deux mouvements browniens  $W_t$  et  $Z_t$  jusqu'à la date  $t$ , c'est l'augmentation habituelle de la tribu engendrée par les ensembles de la forme  $\{\omega \in \Omega \mid |W_s| \leq R_1, |Z_s| \leq R_2, 0 \leq s \leq t\}$ .

On se place sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Plus précisément, on suppose l'existence d'une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  sous laquelle le prix des actifs actualisé est une martingale locale.

### 3.3.2 Prix d'une option européenne

#### Modélisation par une EDP

On considère la dynamique (3.36) et on veut évaluer le prix d'une option européenne d'échéance  $T_1$  et de payoff  $h$  continue, l'acheteur d'une telle option reçoit  $h(X_{T_1})$  en  $T_1$ . L'absence d'opportunité d'arbitrage et l'hypothèse markovienne nous assure l'existence d'une fonction  $P^{(T_1)} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ , que nous supposons suffisamment assez régulière, telle que le prix de cette option à la date  $t \in [0, T_1]$  s'écrit  $P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t)$ .

Le risque ne peut être annulé avec uniquement l'actif sous-jacent. Alors on considère un portefeuille qui contient  $a_t$  unités d'actifs risqués,  $b_t$  unités d'actifs sans risque et  $c_t$  options européennes d'échéance  $T_2 > T_1$  et de même payoff  $h$ . Le but est de trouver  $a_t, b_t$  et  $c_t$  tel que le portefeuille réplique l'option et soit autofinancé. L'hypothèse de réplication correspond à l'égalité

$$P^{(T_1)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) = a_{T_1} X_{T_1} + b_{T_1} e^{rT_1} + c_{T_1} P^{(T_2)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) \quad (3.37)$$

et l'hypothèse d'autofinancement à

$$dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t dX_t + b_t d(e^{rt}) + c_t dP^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \quad (3.38)$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, l'égalité (3.38) nous donne pour tout  $t \leq T_1$

$$P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t X_t + b_t (e^{rt}) + c_t P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \quad (3.39)$$

c'est à dire que la valeur du portefeuille est à tout instant égale au prix de l'option. Par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = & \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial t}(t, X_t, Y_t)dt + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t)dX_t + \\ & \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial x^2}(t, X_t, Y_t)d\langle X \rangle_t \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial x \partial y}(t, X_t, Y_t)d\langle X, Y \rangle_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial y^2}(t, X_t, Y_t)d\langle Y \rangle_t \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = & A_1 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t)dt + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t)dX_t \\ & + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)dY_t \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $A_1$  est l'opérateur défini par

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 f(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \beta x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.42)$$

Mais, d'après l'hypothèse d'autofinancement, la variation infinitésimale de la valeur du portefeuille est aussi égale à

$$dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t dX_t + b_t d(e^{rt}) + c_t dP^{(T_2)}(t, X_t, Y_t)$$

$$\begin{aligned} dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = & a_t dX_t + r b_t e^{rt} dt + c_t (A_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t)dt + \\ & \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t)dX_t + \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)dY_t) \end{aligned}$$

$$dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = \left( a_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \right) dX_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) dY_t$$

Il n'y a de termes en  $dZ_t$  que dans  $dY_t$ , si bien que l'identification des termes en  $dZ_t$  donne

$$c_t = \frac{\frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)}{\frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)} \quad (3.43)$$

L'identification des termes en  $dW_t$  donne

$$a_t = \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) - c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \quad (3.44)$$

d'où on déduit

$$b_t = e^{-rt} \left( P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) - a_t X_t - c_t P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \right) \quad (3.45)$$

Enfin l'identification des termes en  $dt$  donne

$$\begin{aligned} & A_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) dt + \mu X_t \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) + \alpha(m - Y_t) \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \quad (3.46) \\ = & c_t A_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) + r b_t e^{rt} + \mu \left( a_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \right) X_t \\ & + \alpha(m - Y_t) c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi en remplaçant  $a_t, b_t$  et  $c_t$  par leurs expressions :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \right)^{-1} A_2 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) \\ = & \left( \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \right)^{-1} A_2 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \end{aligned}$$

où

$$A_2 = A_1 + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right) \cdot \quad (3.47)$$

Autrement dit, si on définit l'opérateur  $U$  par

$$U = \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} A_2 \quad (3.48)$$

alors

$$U P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = U P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \quad (3.49)$$

Comme le membre de gauche dépend de  $T_1$  mais pas de  $T_2$  et que le membre de droite, dépend de  $T_2$  mais pas de  $T_1$ , les membres sont en fait indépendants de  $T_1$  et de  $T_2$ . Moralement,

l'opérateur  $U$  annule la dépendance en l'échéance. Il existe donc une fonction  $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  telle que quelle que soit son échéance  $T > 0$ , une option de payoff  $h$  a un prix  $P^{(T)}(t, X_t, Y_t)$  qui vérifie

$$UP^{(T)}(t, X_t, Y_t) = \psi(t, X_t, Y_t) \quad (3.50)$$

L'option de payoff  $h$  et d'échéance  $T$  a un prix  $P(t, X_t, Y_t)$ , qui vérifie l'équation

$$A_1 P(t, X_t, Y_t) - \psi(t, X_t, Y_t) \frac{\partial P}{\partial y}(t, X_t, Y_t) = 0 \quad (3.51)$$

On introduit les fonctions  $\Lambda$  et  $\gamma$  définies par

$$\psi(t, x, y) = \beta \Lambda(t, x, y) - \alpha(m - y) \quad (3.52)$$

et

$$\Lambda(t, x, y) = \rho \frac{\mu - r}{f(y)} + \sqrt{1 - \rho^2} \gamma(t, x, y) \quad (3.53)$$

Avec ces notations, l'égalité (3.51) se réécrit, en omettant la dépendance en  $(t, X_t, Y_t)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} X_t^2 f(Y_t) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho \beta X_t f(Y_t) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + r \left( X_t \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + \alpha(m - Y_t) \frac{\partial P}{\partial y} - \beta \Lambda \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Cette égalité étant vraie ps, le prix  $P$  est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{L}_{BS}(f(y)) + \mathcal{L}_{OU} + \mathcal{L}_1)P(t, x, y) = 0 \quad (3.54)$$

avec la condition terminale

$$P(T, x, y) = h(x) \quad (3.55)$$

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right). \quad (3.56)$$

est l'opérateur de Black et Scholes de paramètre de volatilité  $f(y)$

$$\mathcal{L}_{OU} = \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m - y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.57)$$

est le générateur infinitésimal du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$\mathcal{L}_1 = \rho \beta x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \beta \Lambda(t, x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.58)$$

est un opérateur faisant intervenir la corrélation  $\rho$  d'une part, en facteur de la dérivée croisée et la fonction  $\Lambda$  d'autre part. Cette dernière formule est appelée prime de risque de volatilité.

Plus précisément, la fonction  $\frac{\mu-r}{f}$  est exactement la prime de risque liée à la première source de bruit  $W$  et  $\gamma$  est exactement la prime de risque liée à la deuxième source de bruit  $Z$ . En effet, une variation infinitésimale du prix de l'option s'écrit, en utilisant (3.54) et la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dP(t, X_t, Y_t) = & (rP \frac{\mu-r}{f(Y_t)} \left( X_t f(Y_t) \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \beta \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \\ & \gamma(t, X_t, Y_t) \beta \sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} dt + (X_t f(Y_t) \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \beta \frac{\partial P}{\partial y}) dW_t \\ & + (\beta \sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial P}{\partial y}) dZ_t \end{aligned} \quad (3.59)$$

La fonction  $\Lambda$  agrège les primes de risque liées aux deux sources indépendantes de hasard à travers (3.53). D'où, on comprend pourquoi la fonction  $\gamma$  s'écrit sous la forme (3.52) et (3.53).

### Interprétation probabiliste

On cherche à donner une interprétation probabiliste du prix  $P(t, x, y)$ , on pose

$$\begin{cases} \theta_t^W = \frac{\mu-r}{f(Y_t)} \\ \theta_t^Z = \gamma(t, X_t, Y_t) \end{cases} \quad (3.60)$$

et

$$M_t = \exp \left( - \int_0^t \theta_s^W dW_s - \int_0^t \theta_s^Z dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left( (\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds \right) \quad (3.61)$$

Sous certaines conditions techniques, par exemple la condition Novikov :

$$E \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \left( (\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds \right) \right] < \infty \quad (3.62)$$

$M$  est une  $P$ -martingale. On définit alors une mesure de probabilité  $P^{*(\gamma)}$  en posant

$$dP^{*(\gamma)}(\omega) = M_T(\omega) dP(\omega) \quad (3.63)$$

Cette nouvelle probabilité est équivalente à  $P$  et, d'après le Théorème de Girsanov, les processus

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s^W ds \quad (3.64)$$

et

$$Z_t^* = Z_t + \int_0^t \theta_s^Z ds \quad (3.65)$$

sont deux  $P^{*(\gamma)}$ -mouvements browniens indépendants. On a

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t \\ dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t \left( dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right) \\ dX_t &= r X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t^* \end{aligned} \quad (3.66)$$

et

$$\begin{aligned} dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\widehat{Z}_t \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t) \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \rho \left( dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right) + \beta \sqrt{1 - \rho^2} (dZ_t^* - \gamma(t, X_t, Y_t) dt) \\ dY_t &= (\alpha(m - Y_t) - \beta \Lambda(t, X_t, Y_t)) dt + \beta \left( \rho dW_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^* \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Si on pose

$$\widehat{Z}_t^* = \rho W_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^*$$

On définit un  $P^{*(\gamma)}$ -mouvement brownien et on peut réécrire la dynamique sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = r X_t dt + \sigma_t X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \{ \alpha(m - Y_t) - \beta \Lambda(t, X_t, Y_t) \} dt + \beta d\widehat{Z}_t^* \end{cases} \quad (3.68)$$

Sous la probabilité  $P^{*(\gamma)}$ , le processus des prix actualisés  $(\widetilde{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par

$$\widetilde{X}_t = e^{-rt} X_t$$

est une martingale locale. On se place sous les hypothèses qui assurent que c'est en fait une vraie  $P^{*(\gamma)}$  martingale. On pourra par exemple supposer que

$$E^{*(\gamma)} \left[ \int_0^T f(Y_t)^2 X_t^2 dt \right] < \infty$$

ou même seulement

$$E^{*(\gamma)} \left[ \sqrt{\int_0^T f(Y_t)^2 X_t^2 dt} \right] < \infty$$

Alors si on évalue l'option européenne de maturité  $T$  et de payoff  $H = h(X_T)$  par

$$V_t = E^{*(\gamma)} [e^{-r(T-t)} h(X_t) | F_t] \quad (3.69)$$

on supprime alors toute possibilité d'arbitrage. L'énorme inconvénient de ce modèle à volatilité stochastique, lorsqu'on le compare au modèle de Black et Scholes, c'est qu'à chaque fonction  $\gamma(t, x, y)$  correspond une probabilité risque neutre  $P^{*(\gamma)}$ . On peut adopter le point de vue suivant : le marché sélectionne naturellement une prime de risque de volatilité  $\gamma$  qu'il s'agit de mesurer en étudiant l'historique des données sur l'ensemble des prix d'options cotés sur le marché. Pour se faire, il sera sans doute raisonnable de supposer d'abord que  $\gamma$  est une constante, puis de considérer que  $\gamma$  ne dépend que de  $y$  ou éventuellement de  $t$  et de  $y$ . Dans ces derniers cas en effet, la dynamique de  $Y$  reste autonome, au sens où la dynamique de  $X$  n'interfère pas avec celle de  $Y$ . Retenons qu'il existe a priori une infinité de  $\gamma$  possibles, auxquels correspondent une infinité de probabilités risque-neutre équivalentes  $P^{*(\gamma)}$ . Cette propriété est caractéristique de l'incomplétude du marché.

Il semble cependant raisonnable, étant donnée l'interprétation financière de  $\Lambda$ , de considérer que des fonctions  $y \mapsto \Lambda(y)$  soient bornées. D'après (3.68), la prime de risque  $\Lambda$  n'intervient que dans le terme de drift de  $Y$  où elle s'ajoute au terme  $\alpha(m - Y_t)$  qui lui n'est pas borné. Il est donc légitime de penser que  $\Lambda$  ne joue qu'au second ordre. Ainsi, lors des simulations numériques, on ne considère que le cas  $\Lambda = 0$ .

### Analyse asymptotique

L'idée principale de Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou et K. Ronnie Sircar[11] est de considérer :

- d'une part que la volatilité possède la propriété de retour à la moyenne, qu'on modélise par la force de rappel déterministe  $\alpha(m - Y_t)dt$
- d'autre part que ce retour à la moyenne est rapide. On suppose donc que l'intensité  $\alpha$  de la force de rappel est grande,  $\alpha$  est l'inverse d'un temps. Il s'agit donc de comparer  $\epsilon = \frac{1}{\alpha}$  le temps caractéristique de retour à la moyenne à l'échelle de temps du problème :  $T - t$ . Aussi on considère que  $\epsilon \ll (T - t)$  de manière équivalente que  $\alpha \gg (T - t)^{-1}$ .

**Retour à la moyenne**

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $Y$  de dynamique

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta d\widehat{Z}_t \quad Y_0 = y \quad (3.70)$$

a une expression explicite pour  $Y_t$

$$Y_t = m + (y - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(T-t)} d\widehat{Z}_t \quad (3.71)$$

Qui prouve que  $Y_t$  suit la loi gaussienne de moyenne  $m + (y - m)e^{-\alpha t}$  et de variance  $\nu^2(1 - e^{-2\alpha t})$ , où  $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ ,  $Y_t$  converge en loi lorsque  $t \mapsto +\infty$  vers  $\pi = N(m, \nu^2)$ , la gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\nu^2$ .

# Chapitre 4

## EDP modélisant le prix d'un call à volatilité stochastique -Modèle Heston

### 4.1 Modélisation d'une option à volatilité stochastique

L'objectif principal de ces modèles est de résorber les biais et donner une évaluation plus fidèle du prix de l'option. On considère les spécifications relatives aux dynamiques des variables d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_{t,S} \\ \sigma_t = f(Z_t) = (Z_t)^2 \\ dZ_t = p(t, S, \sigma) dt + q(t, S, \sigma) dW_{t,Z} \\ dW_{t,S} \cdot dW_{t,Z} = \rho dt \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$V_1$  l'option à la monnaie comme actif primitif. L'idée majeure est la construction d'un portefeuille composé de l'option  $V$  que l'on cherche à évaluer, du sous-jacent  $S$  en quantité  $n$  et de l'option  $V_1$  en quantité  $n_1$

$$P = V - nS - n_1V_1 \quad (4.2)$$

Nous étudions le rendement de ce portefeuille, car le portefeuille doit être autofinçant

$$dP = dV - ndS - n_1dV_1 \quad (4.3)$$

Si on applique le lemme d'Itô aux options  $V$  et  $V_1$ , on obtient

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial Z} d\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} (d\sigma)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial Z} (dS)(dZ) \quad (4.4)$$

de même pour  $V_1$

$$dV_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} dt + \frac{\partial V_1}{\partial S} dS + \frac{\partial V_1}{\partial Z} dZ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial Z^2} (dZ)^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial Z} (dS)(dZ) \quad (4.5)$$

L'équation de rendement du portefeuille s'organise de la façon suivante

$$\begin{aligned}
dP &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) dt \\
&\quad - n_1 \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial Z^2} \right) dt \\
&\quad + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - n_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} - n \right) dS + \left( \frac{\partial V}{\partial Z} - n_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z} \right) dZ
\end{aligned} \tag{4.6}$$

les termes  $dS$  et  $dZ$  contiennent des mouvements browniens, ce qui suppose l'existence du risque. Pour éliminer toute source de risque de ce portefeuille, il est judicieux de définir  $n$  et  $n_1$  de façon que

$$\left( \frac{\partial V}{\partial S} - n_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} - n \right) = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial V}{\partial Z} - n_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z} \right) = 0 \tag{4.7}$$

On obtient ainsi

$$n_1 = \frac{V \text{é}ga_V}{V \text{é}ga_{V_1}} \text{ et } n = \Delta_V - \frac{V \text{é}ga_C}{V \text{é}ga_{C_1}} \Delta_{V_1} \tag{4.8}$$

Il ne reste donc que des termes en  $dt$

$$\begin{aligned}
dP &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial Z} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) dt \\
&\quad - n_1 \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho \sigma q S \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial Z} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial Z^2} \right) dt
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Le portefeuille n'ayant plus de composantes risquées, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, nous pouvons dire qu'il rapporte le taux sans risque. Nous obtenons finalement l'équation suivante

$$\begin{aligned}
dP &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial Z} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) dt \\
&\quad - n_1 \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial Z} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial Z^2} \right) dt \\
&= rPdt = r(V - nS - n_1V_1) dt
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Nous avons ici une EDP qui est une fonction de deux variables alors que dans le modèle de Black&Scholes, cette EDP n'est fonction que d'une seule variable. En isolant les termes en  $V$  dans le membre de gauche et les termes en  $V_1$  dans le membre de droite, nous pouvons

réécrire l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial Z} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V \right)}{\frac{\partial V}{\partial Z}} \\ &= \frac{\left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial Z} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial Z^2} + r S \frac{\partial V_1}{\partial S} - r V_1 \right)}{\frac{\partial V_1}{\partial Z}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

D'une manière plus générale on obtient

$$\frac{EDP_V}{Vég a_V} = \frac{EDP_{V_1}}{Vég a_{V_1}} = \dots = \frac{EDP_{V_n}}{Vég a_{V_n}} = \text{constante} = -r \quad (4.12)$$

Dans le modèle Black et Scholes, on pose

$$\lambda_S = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (4.13)$$

Tandis que dans le modèle à volatilité stochastique

$$\lambda_\sigma = \frac{p - r}{q} \Leftrightarrow r = p - q \lambda_\sigma \quad (4.14)$$

Nous pouvons donc obtenir l'égalité suivante

$$\frac{\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial Z} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V \right)}{\frac{\partial V}{\partial Z}} = -(p - q \lambda) \quad (4.15)$$

Et en déduire l'EDP qui est le point de départ de tous les modèles à volatilité stochastique

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial Z} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + (p - q \lambda) \frac{\partial V}{\partial Z} - r V = 0 \quad (4.16)$$

où  $\lambda$  est appelé le prix de marché du risque de volatilité et il est supposé être constant.

C'est donc, l'équation différentielle où  $V(S, Z, t)$  est une option d'achat sur un sous-jacent dont le rendement instantané est à volatilité stochastique. Il s'agit d'une équation linéaire, qui est un cas particulier de l'équation générale développée par Garman[12] et Cox[?], Ross et Ingersoll (1985).

Il s'agit d'une équation de type elliptique dans le plan  $(S, Z)$  puisque le discriminant  $m(S, Z) =$

$$(\rho q Z S)^2 - 4 \frac{1}{2} q^2 \left( \frac{1}{2} Z^2 S^2 \right) = (\rho q Z S)^2 (\rho^2 - 1) < 0$$

Cette équation peut-être formulée de la façon suivante :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Z^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V \right) + \left( \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + \rho Z q S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + (p - q \lambda_\sigma) \frac{\partial V}{\partial Z} \right) = 0$$

Soit, en mettant en facteur l'opérateur dérivé, par rapport à la volatilité dans la deuxième parenthèse, on a

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}Z^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{2}q^2\frac{\partial V}{\partial Z} + \rho ZqS\frac{\partial V}{\partial S} + (p - q\lambda_\sigma)V\right) = 0$$

On constate que, lorsque la volatilité est constante, la seconde parenthèse prend une valeur nulle et on retrouve l'équation de Black-Scholes.

On pose  $Z = \sqrt{\sigma}$ , on obtient

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sqrt{\sigma}qS\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + \frac{1}{2}q^2\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + (p - q\lambda)\frac{\partial V}{\partial\sigma} - rV = 0$$

Pour éliminer, le terme de la dérivée mixte et mettre l'équation sous sa forme canonique, deux cas se présentent

- soit prendre le coefficient de corrélation nul ( $\rho = 0$ ), ce qui ne reflète pas la réalité
- ou bien faire un changement de variable adéquat.

### 4.1.1 Conditions aux limites

Soit, l'équation aux dérivées partielles, qui modélisent la valeur d'un call européen

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sqrt{\sigma}qS\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + \frac{1}{2}q^2\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + (p - q\lambda)\frac{\partial V}{\partial\sigma} - rV = 0$$

On considère la formule de Black-Scholes, dans le cas d'un call, soit :

$$V = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{K}\right) + rt}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \text{ et } d_2 = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S}{K}\right) + rt}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

Les conditions aux limites sont au nombre de six, puisque l'équation considérée comporte six dérivées partielles. Soient deux conditions, par rapport au sous-jacent, trois par rapport à la volatilité et une condition par rapport au temps.

$$\text{C1 : } V(0, \sigma, t) = 0$$

Le pay-off est nul quand le prix du sous-jacent est nul

$$\text{C2 : } \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{(\sigma, S=-\infty, t)} = 1$$

Quelle que soit la valeur de la volatilité  $\sigma$ , quand la valeur du sous-jacent est infinie, la valeur de l'option se confond avec sa valeur intrinsèque (la valeur temps est nulle car on est sûr de l'exercice de l'option). La dérivée du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent n'est autre que le coefficient directeur de l'asymptote à cette courbe est égal à 1. Cette condition est analogue à  $V(+\infty, \sigma, t) = S$ .

$$C3 : V(S, 0, t) = \text{Max}(0, S - Ke^{-r(T-t)})$$

Selon le modèle Black-Scholes, qui est un cas particulier du modèle à volatilité stochastique où la volatilité est constante et égale à 0, ce résultat peut être illustré par le tableau suivant

| $\sigma = 0$      | $d_1$     | $d_2$     | $N(d_1)$ | $N(d_2)$ | $V$            |
|-------------------|-----------|-----------|----------|----------|----------------|
| $S < Ke^{-rt}$    | $-\infty$ | $-\infty$ | 0        | 0        | 0              |
| $S \geq Ke^{-rt}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 1        | 1        | $S - Ke^{-rt}$ |

C4 :  $V(S, +\infty, t) = S$

Selon le modèle Black-Scholes, qui est un cas particulier du modèle à volatilité stochastique où la volatilité est constante et égale à  $+\infty$ , ce résultat peut être illustré par le tableau suivant

| $\sigma = +\infty$ | $d_1$     | $d_2$     | $N(d_1)$ | $N(d_2)$ | $V$ |
|--------------------|-----------|-----------|----------|----------|-----|
| $\forall S$        | $+\infty$ | $-\infty$ | 1        | 0        | $S$ |

C5 :  $V(S, \sigma, T) = \text{Max}(0, S - K)$

Il s'agit d'une option de type européen, sa valeur  $K$  à l'échéance  $T$  ( le pay-off) est égale à sa valeur intrinsèque

$$C6 : \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{(S, \sigma=0, t)} = 0$$

Selon le modèle Black-Scholes, qui est un cas particulier du modèle à volatilité stochastique où la volatilité est constante et égale à 0, ce résultat est illustré par le tableau suivant

| $\sigma = 0$ | $d_1^2$   | $N'(d_1)$ | $\Lambda_V = \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = S\sqrt{t}N'(d_1)$ |
|--------------|-----------|-----------|---|
| $\forall S$  | $+\infty$ | 0         | 0   |

Avec ces conditions aux limites et dans l'hypothèse de la complétude du marché financier l'équation admet une solution unique.

## 4.2 Nouvelle Equation Différentielle

Les coefficients des termes de dérivées d'ordre 2 de l'équation différentielle considérée sont :

$$a = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2; \quad b = \frac{1}{2}\rho q \sqrt{\sigma} S \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{2}q^2$$

On fait un changement de variables tel que :  $X = X(S, \sigma, t)$  et  $Y = Y(S, \sigma, t)$ , les nouveaux coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  des termes des dérivées d'ordre 2, par rapport à  $X$  et  $Y$  sont tel que :

$$a \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2b \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + c \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = A \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + 2B \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + C \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= a \left( \frac{\partial X}{\partial S} \right)^2 + 2b \frac{\partial X}{\partial S} \frac{\partial X}{\partial \sigma} + c \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 \\ B &= a \left( \frac{\partial X}{\partial S} \frac{\partial Y}{\partial S} \right) + b \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{\partial X}{\partial S} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right) + c \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right) \\ C &= a \left( \frac{\partial Y}{\partial S} \right)^2 + 2b \frac{\partial Y}{\partial S} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + c \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right)^2 \end{aligned}$$

Le type de l'équation est conservé par le changement de variables. On a aussi

$$B^2 - 4AC = J^2(b^2 - ac)$$

où le  $J$  est le jacobien correspondant à ce changement de variables. Ce jacobien est donné par le déterminant suivant :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \end{vmatrix}$$

Par ce changements de variables, on souhaite annuler le terme de dérivées croisées, soit  $B = 0$

Sur une iso- $X$ ,  $X$  prend une valeur constante, on a :

$X = X(S, \sigma) = \text{constante}$  implique

$$dX = \frac{\partial X}{\partial S} dS + \frac{\partial X}{\partial \sigma} d\sigma = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dS} = - \frac{\frac{\partial X}{\partial S}}{\frac{\partial X}{\partial \sigma}}$$

De même sur une iso- $Y$ ,  $Y$  est constante, on a :

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial S} dS + \frac{\partial Y}{\partial \sigma} d\sigma = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dS} = - \frac{\frac{\partial Y}{\partial S}}{\frac{\partial Y}{\partial \sigma}}$$

En divisant l'équation de  $B$  par  $\frac{\partial X}{\partial \sigma} \frac{\partial Y}{\partial \sigma}$ , on obtient

$$B = a \left( \frac{\frac{\partial X}{\partial S} \frac{\partial Y}{\partial S}}{\frac{\partial X}{\partial \sigma} \frac{\partial Y}{\partial \sigma}} \right) + b \left( \frac{\frac{\partial Y}{\partial S}}{\frac{\partial Y}{\partial \sigma}} + \frac{\frac{\partial X}{\partial S}}{\frac{\partial X}{\partial \sigma}} \right) + c$$

En simplifiant par les dérivées suivant  $X$  et  $Y$ , on a :

$$B = a \left( \frac{d\sigma}{dS} \right)^2 - 2b \left( \frac{d\sigma}{dS} \right) + c = 0$$

Cette équation caractéristique n'est qu'une équation du second degré où l'inconnue est la dérivée de la volatilité par rapport à la valeur du sous-jacent le long des iso- $X$  et des iso- $Y$ . Dans le plan  $(S, \sigma)$ , l'équation est de type elliptique ( $b^2 - ac < 0$ ), cette équation admet deux solutions complexes :

$$\frac{d\sigma}{dS} = \frac{b}{a} \pm i \sqrt{\frac{ac - b^2}{a^2}}$$

avec  $i$  le nombre complexe tel que  $\sqrt{i} = -1$

En remplaçant  $a, b$  et  $c$  par leurs valeurs, par leurs expressions, en fonction des variables  $\rho, q, S$  et  $\sigma$  dans la précédente équation, on a :

$$\frac{d\sigma}{dS} = \frac{q}{\sqrt{\sigma}S} (\rho \pm i \sqrt{1 - \rho^2})$$

En séparant les deux variables, on a :

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{q} d\sigma = \frac{dS}{S} (\rho \pm i \sqrt{1 - \rho^2})$$

En intégrant, on obtient :

$$(\rho \text{Ln} S - \int \frac{\sqrt{\sigma}}{q} d\sigma) \pm i \sqrt{1 - \rho^2} \text{Ln} S = \text{constante}$$

On choisit le changement de variables, tel que

$$X = \rho \text{Ln} S - \int \frac{\sqrt{\sigma}}{q} d\sigma$$

$$Y = \sqrt{1 - \rho^2} \text{Ln} S$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial S} &= \frac{\rho}{S}, & \frac{\partial X}{\partial \sigma} &= -\frac{\sqrt{\sigma}}{q} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} &= \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{S}, & \frac{\partial Y}{\partial \sigma} &= 0 \end{aligned}$$

Avec ce changement de variables, on obtient :

$$A = C = \frac{\sigma}{2}(1 - \rho^2)$$

Enfin, on a  $B = 0$  et aussi :

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial S} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{S} \frac{\partial V}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \sigma} = -\frac{\sqrt{\sigma}}{q} \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle originelle, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma}{2}(1-\rho^2) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \left( \rho r - (p - \lambda_\sigma q) \frac{\sqrt{\sigma}}{q} \right) \frac{\partial V}{\partial X} + r\sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial V}{\partial Y} - rV = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma}{2}(1-\rho^2)\Delta V + \left( \rho r - (p - \lambda_\sigma q) \frac{\sqrt{\sigma}}{q} \right) \frac{\partial V}{\partial X} + r\sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial V}{\partial Y} - rV = 0$$

Avec  $\sigma = \sigma(X, Y)$ .

Si on considère que la volatilité de la volatilité est de la forme  $q = \eta\sigma^{\gamma-\frac{1}{2}}$ , la variable  $X$  s'écrira :

$$X = \rho \text{Ln} S - \int \frac{\sqrt{\sigma}}{q} d\sigma = \rho \text{Ln} S - \frac{1}{\gamma} \int \sigma^{-\gamma} d\sigma$$

Quatre cas peuvent se présenter :

Cas :  $\gamma = \frac{3}{2}$

Cas :  $\gamma = \frac{5}{2}$

cas :  $\gamma \neq \frac{3}{2}, \gamma \neq \frac{5}{2}$

Cas  $\gamma = \frac{1}{2}$

Le quatrième cas est un cas particulier du cas 3, où la volatilité de la volatilité est constante, ce qui correspond dans notre travail au mouvement Brownien ou au processus d'Ornstein Uhlenbeck arithmétique, comme processus de la volatilité.

Les expressions de  $S$  et  $Y$ , sont les mêmes quelque soit le cas de figure :

$$S = S(X, Y) = \exp\left(\frac{Y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

$$Y = Y(S, \sigma) = \sqrt{1-\rho^2} \text{Ln} S$$

Les expressions de  $\sigma$  et de  $X$  varient suivant la relation entre la volatilité de la volatilité et la volatilité. Le tableau suivant donne, les expressions de  $X(S, \sigma)$  et de  $\sigma(X, Y)$ .

|       | $q$   | $X = X(S, \sigma)$   | $\sigma = \sigma(X, Y)$  |
|-------|---|--|--|
| Cas 1 | $q = \eta\sigma^{\frac{1}{2}}$  | $X = \rho LnS - \frac{2}{\eta\sqrt{\sigma}}$                         | $\sigma = \frac{\eta}{2} \left( X - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} Y \right)^{-2}$   |
| Cas 2 | $q = \eta\sigma^2$  | $X = \rho LnS + \frac{2}{3\eta\sigma\sqrt{\sigma}}$                  | $\sigma = \left( \frac{2}{3\eta} \right)^{\frac{2}{3}} \left( X - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} Y \right)^{-\frac{2}{3}}$ |
| Cas 3 | $q = \eta\sigma^{\gamma-\frac{1}{2}}$<br>$\gamma \neq \frac{3}{2}$ et $\gamma \neq \frac{5}{2}$ | $X = \rho LnS - \frac{1}{\eta} \frac{\sigma^{1-\gamma}}{(1-\gamma)}$ | $\sigma = \left( \eta(1-\gamma) \left( \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} Y - X \right) \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$          |
| Cas 4 | $q = \eta$  | $X = \rho LnS - \frac{2\sqrt{\sigma}}{\eta}$                         | $\sigma = \frac{\eta^2}{4} \left( \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} Y - X \right)^2$  |

### 4.2.1 Nouvelles conditions aux limites et nouveau domaine

Les conditions aux limites s'obtiennent, en remplaçant  $S$  et  $\sigma$  par leurs expressions, en fonction de  $X$  et de  $Y$ . Les transformations de ces conditions aux limites sont récapitulées dans le tableau, le cas  $q = \eta\sigma^{\gamma-\frac{1}{2}}$  avec  $\gamma \neq \frac{1}{2}$  et  $\gamma \neq \frac{5}{2}$ .

| Conditions | Dans le plan $(S, \sigma)$  | Dans le plan $(X, Y)$   |
|------------|---|---|
| C1         | $V(0, \sigma, t) = 0$   | $V(X = -\infty, Y = -\infty) = 0$   |
| C2         | $\left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_{(\sigma, S=-\infty, t)} = 1$ | $\rho \frac{\partial V}{\partial X} + \sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial V}{\partial Y} = S$                |
| C3         | $V(S, 0, t) = \text{Max}(0, S - Ke^{-r(T-t)})$                              | $V\left(X, \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} X, t\right) = \text{Max}(0, e^{\frac{X}{\rho}} - Ke^{-r(T-t)})$ |
| C4         | $V(S, +\infty, t) = S$  | $V(X = -\infty, Y, t) = e^{\frac{Y}{\sqrt{1-\rho^2}}}$  |
| C5         | $V(S, \sigma, T) = \text{Max}(0, S - E)$                                    | $V(X, Y, T) = \text{Max}(0, e^{\frac{Y}{\sqrt{1-\rho^2}}} - K)$   |
| C6         | $\left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_{(S, \sigma=0, t)} = 0$       | $\left( \frac{\partial V}{\partial X} \right)_{\left(X, \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} X, t\right)} = 0$  |

Le terme de dérivée croisée n'existe plus, même dans le cas où le coefficient de corrélation est non nul. Cependant la forme du domaine de  $V(X, Y)$  rend cette tâche difficile. En effet, en faisant le changement de variables de  $(S, \sigma)$  vers  $(X, Y)$ , la forme du domaine se transforme.

## 4.3 Résolution de L'EDP par la méthode des différences finies

L'équation aux dérivées partielles, avec ses conditions aux limites, le marché est supposé complet et en équilibre admet une solution analytique unique, que l'on ne peut trouver explicitement, ce qui nous oriente vers la résolution numérique. La méthode des différences finies est recommandée, comparativement à la méthode de Monte Carlo, vu qu'il y a deux variables d'états.

La définition la plus simple d'un marché complet, est que c'est un marché où chaque produit

dérivé peut-être repliqué par une stratégie autofinancée, avec une position sur le sous-jacent et une position sur une obligation[?].

### 4.3.1 Schéma numérique

On considère le cas où la volatilité de la volatilité est constante  $q = \eta$  avec

$$S = S(X, Y) = \exp\left(\frac{Y}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)$$

$$\sigma = \frac{\eta^2}{4} \left( \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} Y - X \right)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma}{2}(1 - \rho^2) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \left( \rho r - (p - \lambda_\sigma q) \frac{\sqrt{\sigma}}{q} \right) \frac{\partial V}{\partial X} + r\sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial V}{\partial Y} - rV = 0$$

soit  $D = (p - \lambda q)$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma}{2}(1 - \rho^2) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \left( \rho r - D \frac{\sqrt{\sigma}}{q} \right) \frac{\partial V}{\partial X} + r\sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial V}{\partial Y} - rV = 0$$

les variables sont  $X$ ,  $Y$  et la durée de vie de l'option  $T - t$ , sont discrétisées de la façon suivante

$$\begin{aligned} X &= i\Delta X & 0 \leq i \leq I \\ Y &= j\Delta Y & 0 \leq j \leq J \\ T - t &= k\Delta t & 0 \leq k \leq L \end{aligned}$$

où  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta t$ , sont les pas respectifs des variables.

La valeur de l'option européenne se fait dans le sens anti-cronologique, à partir de la date d'échéance  $T$ . Le domaine du prix du sous-jacent et de sa volatilité, est infini dans la théorie, mais numériquement on prend un rectangle, son centre correspond au prix du sous-jacent et de sa volatilité, à l'instant  $t$ , pour lequel on cherche à évaluer l'option. Si le prix du sous-jacent et de sa volatilité sont négatifs, la valeur de l'option est nulle.

La valeur de l'option  $V(X, Y, t)$  est approchée par discrétisation par  $V_{i,j}^{k+1} = V(i\Delta X, j\Delta Y, T - k\Delta t)$

Les dérivées s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial X} &\approx \frac{V_{i+1,j}^k - V_{i-1,j}^k}{2\Delta X} & \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} &\approx \frac{V_{i+1,j}^k - 2V_{i,j}^k + V_{i-1,j}^k}{\Delta X^2} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} &\approx \frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j-1}^k}{2\Delta Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} &\approx \frac{V_{i,j+1}^k - 2V_{i,j}^k + V_{i,j-1}^k}{\Delta Y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &\approx \frac{V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k+1}}{\Delta t}\end{aligned}$$

En remplaçant chaque expression dans l'équation, on trouve

$$V_{i,j}^{k+1} = a_{i,j}^k V_{i,j}^k + b_{i,j}^k V_{i+1,j}^k + c_{i,j}^k V_{i,j+1}^k + d_{i,j}^k V_{i,j-1}^k + e_{i,j}^k V_{i-1,j}^k$$

avec

$$\begin{aligned}a_{i,j}^k &= 1 - \left[ r + 2\sigma_{i,j}(1 - \rho^2) \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right] \Delta t \\ b_{i,j}^k &= \left[ \sigma_{i,j}(1 - \rho^2) \frac{1}{(\Delta x)^2} + (\rho r - D) \frac{\sqrt{\sigma_{i,j}}}{q} \frac{1}{2\Delta x} \right] \Delta t \\ c_{i,j}^k &= \left[ \sigma_{i,j}(1 - \rho^2) \frac{1}{(\Delta Y)^2} + r\sqrt{1 - \rho^2} \frac{1}{2\Delta Y} \right] \Delta t \\ d_{i,j}^k &= \left[ \sigma_{i,j}(1 - \rho^2) \frac{1}{(\Delta Y)^2} - r\sqrt{1 - \rho^2} \frac{1}{2\Delta Y} \right] \Delta t \\ e_{i,j}^k &= \left[ \sigma_{i,j}(1 - \rho^2) \frac{1}{(\Delta x)^2} + (\rho r - D) \frac{\sqrt{\sigma_{i,j}}}{q} \left( -\frac{1}{2\Delta x} \right) \right] \Delta t\end{aligned}$$

$$S_{i,j}(X_i, Y_j) = S(X_i, Y_j) = \exp\left(\frac{Y_j}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)$$

$$\sigma_{i,j}(X_i, Y_j) = \frac{\eta^2}{4} \left( \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} Y_j - X_i \right)^2$$

### 4.3.2 Conditions aux limites du schéma numérique

On considère que, lorsque l'indice  $k$  est incrémenté de 1, chacun des indices  $i$  et  $j$  est décrémenté de 1 avec  $I = J = L$ .

Les conditions aux limites s'obtiennent :

$$C1 : V_{0,j}^k = 0; \forall j, \forall k$$

$$C2 : V_{I,j}^k = S_{I,j}^k; \forall j, \forall k$$

$$C3 : V_{i,j}^0 = \text{Max}(0, S_{i,j}^0 - K); \forall i, \forall j$$

$$C4 : V_{i,0}^k = \text{Max}(0, S_{i,0}^k - Ke^{-kr\Delta t}); \forall i, \forall k$$

$$C5 : V_{i,J}^k = S_{i,J}^k; \forall i, \forall k$$

$$C6 : V_{i,I}^k = V_{i,0}^k; \forall i, \forall k$$

### 4.3.3 Résultats numériques et commentaires

Selon les expérimentations numériques (Figures 4.1 - 4.3), Il est clair que le prix du sous-jacent se comporte exponentiellement par rapport à la variable Y comme indiqué dans la Figure 4.1.

Nous remarquons aussi que nous n'avons aucun comportement d'instabilité numérique tant que nous respectons la CFL (la condition de stabilité) qui est déduite de l'analyse de la stabilité du schéma de la méthode des différences finis considéré. La figure 4.3 montre que, plus on se rapproche de l'échéance  $T$  de l'option, plus on a des perturbations dans le marché des options.

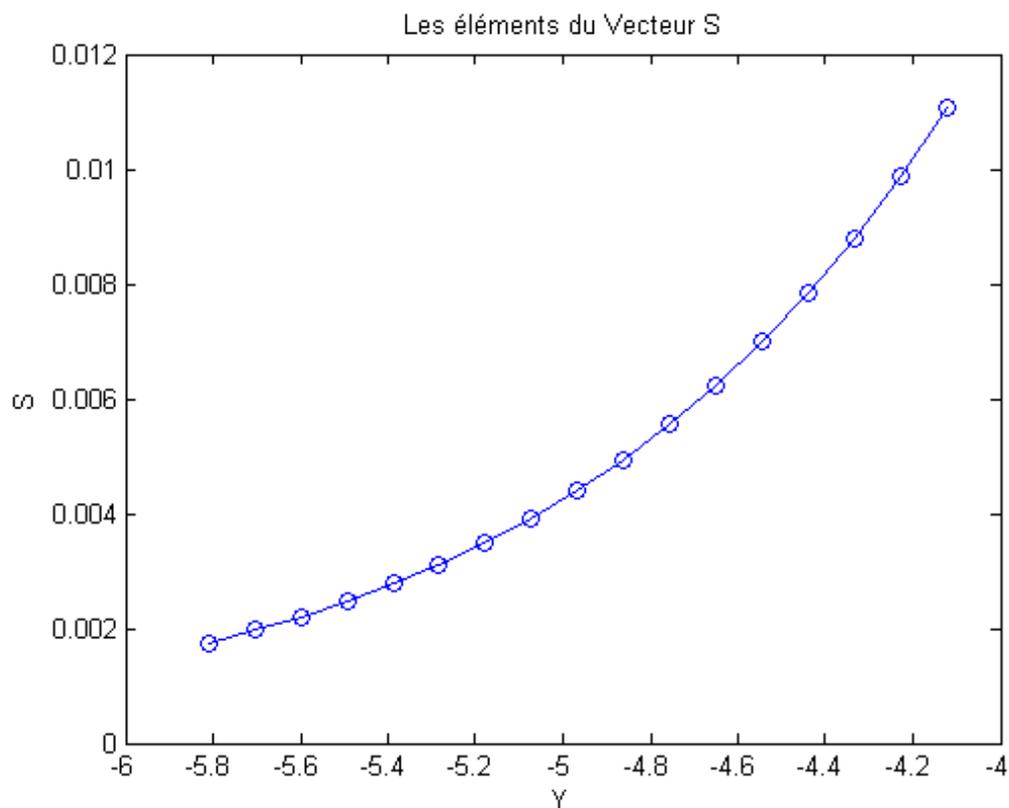
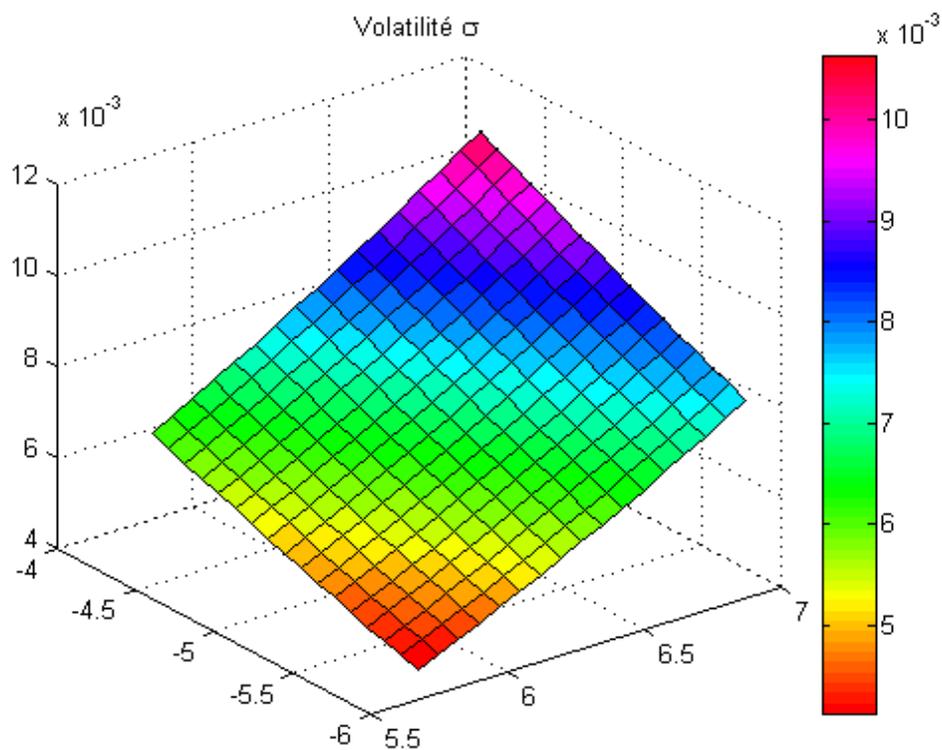


Figure 4.1 : Prix du Sous-jacent S

Figure 4.2 : la Volatilité  $\sigma$

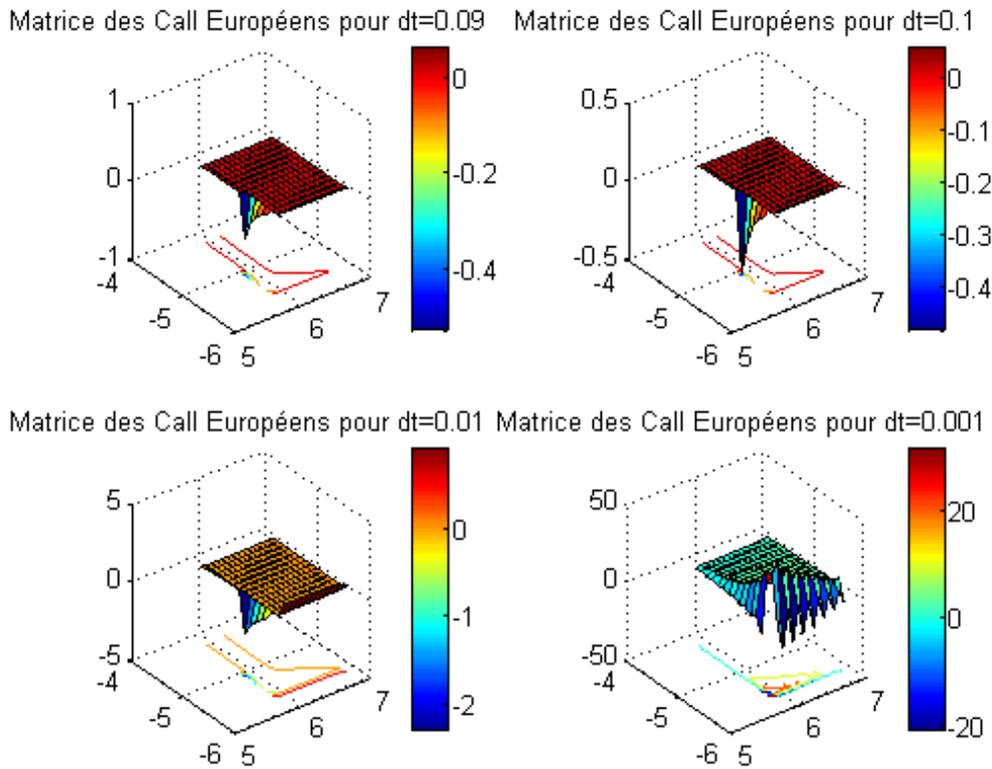


Figure 4.3 : Prix de l'Option V

#### 4.3.4 Conclusion

Après avoir établi l'équation différentielle de Garman, ainsi que les conditions aux limites qui lui sont liées, dans le cas où le prix du sous-jacent est modélisé par une EDS dont le carré de la volatilité suit une autre EDS et la volatilité de la volatilité est constante, on a fait un changement de variables pour cette EDP pour éliminer le terme de dérivée mixte et rester dans la situation où le coefficient de corrélation n'est pas nécessairement nul. L'évaluation d'une option européenne est approchée, en résolvant l'EDP par la méthode des différences finies, les résultats numériques montrent qu'au temps  $T$  qui est l'échéance, on a des perturbations dans les prix des options car le paramètre de spéculation prend effet.

# Chapitre 5

## Conclusion générale

Cette thèse a traité l'évaluation des options européennes, en commençant par le modèle de Black & Scholes, qui a toujours servi de référence, on a montré ses performances et ses limites à donner un prix d'une option Européenne, ses imperfections est d'avoir considéré la volatilité constante, d'être en décalage avec la réalité du marché, mais son plus grand avantage est d'avoir une solution analytique explicite, les autres modèles ont tenu compte de la non constante de la volatilité sur les marchés, d'où le fait de la considérer comme variable aléatoire et dépend aussi du temps, ce qui a poussé les modélisateurs à considérer un système de deux EDS, l'une pour évaluer les variations du prix du sous-jacent et l'autre pour la volatilité, ceci a fait apparaître la considération du coefficient de corrélation entre les deux mouvements browniens des équations, ce qui a compliqué encore la modélisation, les spécialistes de la finance le considère constant, alors qu'en réalité il est aléatoire.

Notre approche dans ce travail est l'évaluation des options européennes en résolvant une équation aux dérivées partielles elliptique du second ordre de Garman[12], après avoir montré l'existence et l'unicité de la solution, la résolution numérique a été faite par la méthode des différences finies, en utilisant un schéma numérique explicite en temps et central en espace. Les performances des modèles d'évaluation des options européennes, sont différentes, selon le choix du processus de la volatilité, la dynamique utilisée par notre approche, pour la volatilité est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, avec un coefficient de corrélation constant. Dans le domaine de la recherche des modèles les plus performants, on doit se fier à des paramètres et à des variables, représentant le comportement des individus, qui ne peuvent être valorisés que sous des hypothèses très restrictives, par exemple l'estimation de la prime de risque. Il serait

recommandable de considérer un modèle qui prend en compte la dynamique de ce paramètre. Les modèles à volatilité stochastique étudiés ne sont pas toujours conformes à la réalité, vu que le prix du sous-jacent et la volatilité peuvent avoir des sauts dans leur dynamique. Tout cela perfectionne un modèle, mais le rend encore plus complexe.

## Perpectives

Suite à l'étude de tous ces cas, il reste quelques conjonctures, on peut citer les modèles d'évaluation des options européennes où :

- Le drift n'est pas constant
- Le coefficient de corrélation est variable
- On peut introduire un mouvement Brownien dans le terme de la volatilité de la volatilité et sa corrélation avec les deux autres mouvements Browniens
- On peut expliciter la solution analytique comme celle trouvée par Black & Scholes.

# Bibliographie

- [1] L. Bachelier, "Théorie de la spéculation", Paris : Gauthier-Villars, 1900.
- [2] L. V. Ballestra, "Numerical Method to Price Exacte Path-dependent Options on an Underlying described by Heston Stochastic Volatility Model". Journal of Banking Finance, Vol 31, pp 3420-3437, 2007.
- [3] F. Black, M. Scholes, "The Valuation of Option Contrats and a Test of Market Efficiency", Journal of Finance, 27, pp 399–417, 1972.
- [4] F. Black, M. Scholes, "The pricing of Options and Liabilities", Journal of Political Economy, 81 pp 635-654, 1973.
- [5] J. C. Cox, S. A. Ross, "The valuation of optionsfor alternative stohastic processes", Journal of finance economic, Vol. 3 pp 145-166, 1976.
- [6] J. C. Cox, S. A. Ross, "An intertemporal general equilibrium model of asset prices", Econoetrica 53, pp 363-384, 1985.
- [7] J. L. Doob, "The Brownian movement and stochastic equations", Annals of Mathematics 43, pp 351–369, 1942.
- [8] B. Dupire, "Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility", Proceedings of AFFI Conference, Paris, June 1992.
- [9] B. Dupire, B. Dupire, "Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility", pp 118-124, 1993.
- [10] J. L. Forman, M. Sorensen, "The Pearson diffusions, A class of statistically tractable diffusion processes", Scand. J. Statist. 35, pp 438-465, 2008.
- [11] J.-P. FOUQUE, G. PAPANICOLAOU, K. R. SIRCAR, "Derivatives in Financial Markets with Stochastitic Volatility", Cambridge University Press, 2000.

- 
- [12] M. Garman, "A general theory of asset valuation under diffusion state processes", working paper Num 50 (Graduate School of Business Administration University of California Berkeley, CA, 1976).
- [13] M. L. Hadji, M. R. Remita, "A Numerical Resolution of a European Option Value with a Stochastic Volatility", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, 2013, no. 18, pp 883 - 891, 2013.
- [14] J. Hull, A. White, "The pricing of option on assets with stochastic volatility, *Journal of finance*", Vol XLII Num 2, June 1987.
- [15] S. L. Heston, "Closed form solution for options with stochastic volatility with application to bonds and currency options", *The review of financial studies*. Vol 6 Issue 2 pp 327-343, 1993.
- [16] J. Jacod, "Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales", volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin 1979.
- [17] H. Johnson & D. Shane, "Options pricing when variance is changing", *Journal of Finance and Quantitative analysis*, Vol 22, pp 143-151, 1985.
- [18] J. E. Ingerson, "Contingent Foreign Exchange Contracts with Stochastic Interest Rates", Working paper, Yale School of Organisation and Management, 1990.
- [19] D. Lamberton, B. Lapeyre, "Introduction au calcul stochastique. appliqué à la finance", Ellipses, 1997.
- [20] P. L. Lions, "Correlations and Bounds for Stochastic Volatility Models", *Ann. T. H. Poincaré*. An 24, pp1-16, 2007.
- [21] Merton, "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 1976.
- [22] L. S. Ornstein & G. E. Uhlenbeck, "On the theory of Brownian Motion", *Phys.Rev.*, 36, pp 823-841, 1930.
- [23] L. O. Scott, "Option pricing when the variance changes randomly :Theory estimation and an application", *Journal of financial and quantitative analysis*. Vol 22, Num 4, December 1987

- 
- [24] E. M. Stein & J. C. Stein, "Stock price distributions with stochastic volatility and analytic approach", *The review of financial studies*. Vol4 number 4 pp727-752, 1991.
- [25] D. Talay, L. Tubaro, "Probabilistic Numerical Methods for Partial Differential Equations" , *Elements of Analysis*, publié dans *Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations*, *Lectures Notes in Mathematics* 1627, 1996.
- [26] O. Vasicek, "An Equilibrium characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*. Vol 5, pp 177-188, 1977.
- [27] J. B. Wiggins, "Option Values under Stochastic Volatilitis", *Journal of Financial Economics*, 19, pp 351-372, 1987.