UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

THESE de DOCTORAT

Spécialité :

Modélisations Mathématiques

Présentée par

Gharbi Ouahiba

Titre :

Etude de l'existence de solutions d'une classe de systèmes d'équations elliptiques non linéaires

devant le jury composé de :

KHODJA Brahim .... Directeur de Thèse

BOUKHEMIS Ammar .... Président de Thèse

BENTRAD Ali .... Examinateur de Thèse

YOUKANA Amar .... Examinateur de Thèse

NOUAR Ahmad .... Examinateur de Thèse

NISSE Lamine .... Examinateur de Thèse

Remerciements

*Je remercie **Dieu** tout-puissant, qui m'a donné la force et la patience pour accomplir cette thèse.*

*Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans la confiance, la patience et la générosité de mon directeur de thèse **Brahim KHODJA** que je tiens à remercier vivement. Je voudrais le remercie aussi pour les conseils qui m'ont orienté au long de la production de cette thèse. En fait, je ne saurais exprimer toute ma gratitude en quelques lignes.*

*Monsieur le professeur **Ammar BOUKHEMIS** m'a fait le grand honneur de présider le jury. Je l'en remercie trés vivement.*

*Je remercie les professeurs **Ali BENTRAD**, **Amar YOUKANA**, **Ahmed NOUAR** et **Lamine NISSE** de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.*

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes proches, mes parents, mes soeurs, mon frère et mes amies pour le soutien constant tout au long des années de la thèse.

A mes parents et ma grande mère

A la mémoire de : mes grands-parents

Résumé

Dans cette thèse, on présente des résultats d'existence de solutions non triviales pour une classe de systèmes des équations aux dérivées partielles semi linéaires de type elliptiques, dans un domaine borné de R ^{N}, avec des conditions de Dirichlet nulles sur le bord.

Ces résultats sont obtenus grâce au théorème du point fixe de Schauder, du degré topologique de Leray-Schauder et quelques outils d'analyse fonctionnelle.

Mots clés : Degré topologique, Théorème du point fixe de Schauder, Homotopie, Problèmes aux limite.

Abstract

In this thesis, we present some results of existence of non trivial solutions for a class of semi linear elliptic systems of partial differential equations, in a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, with zero Dirichlet boundary conditions.

These results are obtained by using Schauder's fixed point theorem, Leray-Schauder's topological degree and some tools of functional analysis.

Key words : Topological Degree, Schauder's fixed point thoerem, Homotopy, Boundary value Problems.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles aux dérivées partielles sont d'une importance cruciale dans la modélisation et la description des phénomènes naturels en Physique, Chimie, Biologie....

Plusieurs phénomènes physiques : dynamique de fluide, mécaniques de continuum, simulation d'avion, graphiques des calculatrices et prédiction de temps sont modélisés par divers équations aux dérivées partielles.

La non linéarité est essentielle pour la description réelle de nombreuses questions naturelles, cependant l'existence et l'unicité de solutions, approximation,....

Pour cela une intence étude de l'existence de solutions des systèmes de ces équations a entrainé durant les deux siècles derniers et fait partie des préoccupations actuelles des chercheurs dans ce domaine.

Dans ce travail, nous abordons la question de l'existence de solutions pour une classe de systèmes elliptiques de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) \quad \text{dans } \Omega \\ \\ -\Delta v = g(x,u,v) \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Cette question a fait récemment l'objet de plusieurs travaux où différentes situations sur les structures des non linéarités f et g ont été étudiées ; voir par exemple [3],[8],[13],[18],[19] et [20], ainsi que leurs références.

Le travail de cette thèse est structuré comme suit :

Chapitre 1 :

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiels des notions de base necessaires à l'accomplissement de cette thèse.

Le chapitre est organisé comme suit :

En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces L^P et les espaces de Sobolev, le degré topologique en dimension finie et infinie ainsi que le théorème du point fixe de Schauder.

Chapitre 2 :

Ce chapitre est consacré à l'existence de solutions non triviales d'un problème elliptique semi linéaire en utilisant le théorème du point fixe de Schauder ainsi que l'analyse fonctionnelle (bases hilbertiennes).

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, nous intéréssons à l'étude d'un système elliptique semi linéaire issue du premier, où la démonstration est basée sur le degré topologique de Leray-Schauder.

Finalement, parmi les nombreuses références bibliographiques, nous avons choisi à la fin de ce travail un nombre assez restreint permettant au lecteur interéssé d'avoir accés à quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger cette thèse.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous traitons deux parties dans la première nous rappelons divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références. Dans la deuxième partie nous parlerons de la méthode du degré topologique.

1.1 Rappels

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces fonctionnels et tout particulièrement, les espaces L^p et les espaces de Sobolev et nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats qui seront utiles pour la suite.

1.1.1 Les espaces L^p

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. On désigne par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

et on définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et il existe } C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \quad p.p. \text{ sur } \Omega \},$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p. \text{ sur } \Omega \}$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) dx.$$

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω et on écrit

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : u \in L^1(K) \text{ pour tout compacte } K \text{ de } \Omega \right\}.$$

Remarque 1.1 *$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposition 1.1 *L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparable pour $1 \leq p < \infty$ et reflexif pour $1 < p < \infty$.*

1.1.2 Dérivée faible

Soit $1 \leq i \leq n$, on dit qu'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i au sens faible, s'il existe $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega D_i f(x) \varphi(x)\, dx.$$

Lorsque $D_i f$ existe elle est unique. Si la fonction f est différentiable au sens classique alors $D_i f$ coïncide avec la dérivée classique.

1.1.3 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels (c'est-à-dire des espace constitués de fonctions) dont les puissances et les dérivées (au sens faible ou au sens de la transposition, que nous allons préciser) sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets). Le fait qu'ils soient complets est trés important pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1 *Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$. On définit les espaces de Sobolev comme suit :*

1. $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q } D_i u \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } i = 1, ..., N\}.$

2. Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q } D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q } |\alpha| \leq m\right\}.$$

3. Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \text{ t.q } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q } |\alpha| \leq m\right\}.$$

Notons que pour $m = 0$, l'espace $W^{0,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Proposition 1.2 ***(Structure d'espace vectoriel)*** *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorqu'on les munit du produit scalaire suivant*

$$(u/v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u / D^\alpha v)_{L^2},$$

où $(./.)_{L^2}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

On note par $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Une norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \text{ si } p = +\infty; \end{cases}$$

où $\|.\|_{L^p}$ désigne la norme dans $L^p(\Omega)$.

Muni de cette norme $W^{m,p}(\Omega)$ est un **espace de Banach**.

On peut montrer que la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, \ 1 \leq p < +\infty; \\ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \ p = +\infty; \end{cases}$$

est une norme équivalente à la précédente.

Ces normes sont notées par $\|.\|_{m,p}$ ou $\|.\|_{W^{m,p}}$.

Théorème 1.1 ***(CNS sur la dimension)*** *Un espace de Banach E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte.*

Définition 1.2 ***(Convergence faible et faible *)*** *Soit E un espace de Banach*

1. **Convergence faible**

Soient $(u_n)_{n \in IN} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \longrightarrow u$ faiblement dans E lorsque $n \longrightarrow \infty$

si $T(u_n) \longrightarrow T(u)$ pour tout $T \in E'$.

2. **Convergence faible ***

Soient $(T_n)_{n\in IN} \subset E'$ et $x \in E$. On dit que $T_n \longrightarrow T$ dans E' faible * si $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ pour tout $x \in E$.

Définition 1.3 ***(Espace** $H_0^1(\Omega)$**)*** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$*

1. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note par :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

2. Pour $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$

$$W_0^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Inégalité de Minkowski [9]

Soient $f, g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors

$$f + g \in L^p(\Omega) \text{ et } \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Inégalité de Hölder [9]

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors

$$f, g \in L^1(\Omega) \text{ et } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} .$$

Inégalité de Poincaré [9]

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $C_{\Omega.P}$ telle que

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} \leq C_{\Omega.P} \|\nabla u\|_{L^P(\Omega)} \forall u \in W_0^{1.P}(\Omega).$$

Inégalité de Cauchy Schwartz [9]

Dans un espace préhilbertien H, on a

$$\forall x, y \in H, \qquad |(x, y)| \leq \|x\| . \|y\|$$

Où

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}.$$

1.1.4 Injection de Sobolev

Théorème 1.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$ à frontière lipschitzienne ou $\Omega = \mathbb{R}^N$.*

1. *Si $1 \leq p < N$, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

En particulier

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega).$$

Pour $N = 1$, on a $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

2. *Pour $p > N$, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega).$$

3. *Pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$, on a $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$.*

(et le cas $q = \infty$ est autorisé si $N = 1$). Ce résultat est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Si Ω est un ouvert borné sans hypothèse de régularité sur la frontière, les trois assertions précédentes restent vraies si l'on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.1.5 Formule d'intégration par partie

La formule d'intégration par partie est définie dans la proposition suivante :

Proposition 1.3 ***(Formule d'intégration par partie)*** *Soient u, v deux fonctions de $H^1(\Omega)$ et $\partial\Omega \in C^1$, alors pour tout $1 \leq i \leq N$ a lieu la formule d'intégration par partie suivante*

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u(s)v(s)n_i ds.$$

1.1.6 Bases hilbertiennes

La notion de base hilbertienne généralise en dimension infinie la notion de base orthonormée.

Définition 1.4 *Soit V un espace de Hilbert. On appelle base hilbertienne de V une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de V tels que*

- Pour tout n, $\|e_n\| = 1$ et pour tous $m \neq n$, $\langle e_n, e_m \rangle = 0$.

- L'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n\geq 1}$ est dense dans V.

Proposition 1.4 *Soit V un espace de Hilbert admettant une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$. Soient $u \in V$ et*

$$u_n = \langle u, e_n \rangle \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Alors, les séries $\sum_{n\geq 1} u_n e_n$ et $\sum_{n\geq 1} |u_n|^2$ sont convergentes dans V et $\mathbb{R}$ respectivement, et on a

$$u = \sum_{n\geq 1} u_n e_n \text{ et } \|u\|^2 = \sum_{n\geq 1} |u_n|^2 .$$

1.1.7 Résultats supplémentaires

Théorème 1.3 ***(Rellich-Kondrachov)*** [21] *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ *et* $1 \leq p < +\infty$. *Toute partie bornée de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est relativement compacte dans* $L^p(\Omega)$. *Ceci revient à dire que de toute suite bornée de* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *on peut extraire une sous-suite qui converge dans* $L^p(\Omega)$.

Le théorème reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Théorème 1.4 ***(Lax-Milgram)*** [25] *Soit* L *une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert* H *et* a *une forme bilinéaire continue et coercive, alors il existe une et une seule fonction* $u \in H$ *telle que :*

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Si de plus la forme bilinéaire a *est symétrique, alors* u *est l'unique élément de* H *qui minimise la fonctionnelle* $J : H \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \quad \textit{pour tout } v \in H,$$

c.à.d

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \ \textit{ et } J(u) < J(v) \ \textit{ si } u \neq v.$$

Définition 1.5 *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable à valeur réelle. Considérons l'application*

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto f(u);$$

où $f(u)$ est une fonction à valeur réelle définie sur Ω par :

$$f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

L'application f est appellée opérateur de Nemytski assicié à f.

Remarque 1.2 *Pour les propriétés de l'opérateur de Nemytski nous invitons le lecteur à consulter la référence* [6].

Théorème 1.5 [4] *Soient $\alpha, \beta \geq 1,\ f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant :*

(i) $f(x,t)$ mesurable par rapport à $x \in \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et continue par rapport à $t \in \mathbb{R}$ pour presque partout $x \in \Omega$.

(ii) Il existe $a_1 \in L^\beta(\Omega)$ et $a_2 > 0$ tel que

$$|f(x,u)| \leq a_1(x) + a_2(x)\,|u|^{\frac{\alpha}{\beta}},\ \forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta \geq 1).$$

Alors l'opérateur de Nemytski f est continu de $L^\alpha(\Omega)$ dans $L^\beta(\Omega)$.

Remarque 1.3 *La condition* (i) *est appellée condition de Carathéodory et* $f(x,t)$ *satisfaisant* (i) *est appellée fonction de Carathéodory.*

Théorème 1.6 ***(Inégalité de Bessel)*** [25] *Soit* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *un système orthonormé dans* X*, alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(y, e_n)|^2 \leq \|y\|^2 \qquad \text{pour tout } y \in X.$$

En particulier, la somme $\sum_{j=1}^{\infty} |(y, e_j)|^2$ *est toujours convergente dans* X.

Proposition 1.5 [31] *Si* Ω *est de classe* C^2*, alors* $(-\Delta)^{-1}(L^2(\Omega)) \subset H^2(\Omega)$ *et l'application linéaire* $(-\Delta)^{-1}$ *de* $L^2(\Omega)$ *dans* $H^2(\Omega)$ *est aussi bornée.*

Théorème 1.7 ***(Convergence dominée de Lebesgue)*** [21] *Soit*

$(f_n)_{n\in N}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *telle que*

$$i)\ f_n(x) \to f(x)\,,\ \textit{presque partout sur } \Omega.$$

$$ii)\ \mid f_n(x)| \leq h(x) \quad \textit{presque partout sur } \Omega,\ \forall n \textit{ avec } h \in L^p(\Omega).$$

Alors

$$f \in L^p(\Omega) \textit{ et } \|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Le résultat suivant découle de la caractérisation des espaces relativement compacts :

Proposition 1.6 *Une application*

$$f : X \to Y$$

est compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X, *on peut extraire une sous-suite* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ *converge dans* Y.

Définition 1.6 *Une application de la forme*

$$f = I - K$$

où I *est l'application identité et* K *est une application compacte est dite perturbation compacte de l'identité (ou application de Leray-Schauder).*

1.2 Degré topologique

Nous abordons dans cette deuxième partie le degré topologique de Brouwer (dimension finie) et celui de Leray-Schauder (dimension infinie).

1.2.1 Degré de Brouwer

Nous donnons ici une formulation du degré topologique de Brouwer et de ses propriétés principales

Théorème 1.8 *Soit $N \geq 1$ et A l'ensemble des triplets (f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue et telle que $y \notin f(\partial\Omega)$. Il existe une et une seule application $d : A \to \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1)***Normalisation :*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $y \in \Omega$ alors* $\deg(I, \Omega, y) = 1$.

2)***Additivité :*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ et Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin f\left(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$, alors*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

3)***Invariance par homotopie :*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ et $y : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ sont continues et pour tout $t \in [0,1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ alors*

$$d(h(0,.), \Omega, y(0)) = d(h(1,.), \Omega, y(1)).$$

d est appelé degré topologique de Brouwer.

1.2.1.1 Propriétés

Le degré topologique de Brouwer vérifie les propriétés suivantes :

(i) Invariance sur le bord :

Si $y \notin f(\partial\Omega)$ et $f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega}$ alors

$$d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y).$$

(ii) Continuité par rapport à y :

Si y_0 voisin de $y \notin f(\partial\Omega)$, alors

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega,y_0).$$

(iii) Continuité par rapport à la fonction :

Soit $r = dist(y,\ f(\partial\Omega)) > 0$ et soit $g \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ une fonction telle que

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \|g(x) - f(x)\| < r;$$

alors

$$d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y).$$

(iiii) Propriété multiplicative du degré :

Soient $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions de classe C^1, où U et V sont deux ouverts bornés respectivement de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ et soit $y \notin f(\partial U)$ et $z \notin f(\partial V)$. Alors, la formule suivante a lieu

$$d(f\times g, U\times V, (y,z)) = d(f,U,y) \times d(g,V,z).$$

où

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

La propriété essentielle du degré est la suivante :

Si $d(f, \Omega, y) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = y$.

On donne dans ce qui suit le résultat principal du degré de Brouwer.

1.2.1.2 Théorème du point fixe de Brouwer, 1912 :

Théorème 1.9 *Soit C un compact, convexe et non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Preuve 1 *Voir [15].*

1.2.2 Degré de Leray-Schauder

Théorème 1.10 *Soit $N \geq 1$ et A l'ensemble des triplets $(I - f, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est compacte et telle que $y \notin (I - f)(\partial\Omega)$.*

Il existe une et une seule application $d : A \to \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1)***Normalisation :*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $y \in \Omega$ alors* $\deg(I, \Omega, y) = 1$.

2)***Additivité :*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ et Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin (I - f)\left(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$, alors*

$$d(I - f, \Omega, y) = d(I - f, \Omega_1, y) + d(I - f, \Omega_2, y).$$

3)***Invariance par homotopie :*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ et $y : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ sont continues et pour tout $t \in [0,1]$, $y(t) \notin I - h(t, \partial\Omega)$ alors*

$$d(I - h(0,.), \Omega, y(0)) = d(I - h(1,.), \Omega, y(1)).$$

d est appelé degré topologique de Leray Schauder.

1.2.2.1 Propriétés

Les propriétés essentielles du degré en dimension finie restent valables en dimension infinie et se démontrent par approximation.

1.2.2.2 Théorème de Schauder, 1930

Théorème 1.11 *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach X et $K : C \to C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe.*

Preuve 2 ***(a) 1èreétape :*** *On suppose $C = B(0,1)$ la boule unité.*

S'il existe $x_0 \in \partial C$ *tel que* $K(x_0) = x_0$*, il n'y a rien à démontrer.*

Sinon, $\forall t \in [0,1]$*, le degré* $\deg(K_t, C, 0)$ *, où*

$$K_t = I - tK$$

est bien défini.

En effet, s'il existe

$$x \in \partial C, \; tK = x,$$

alors

$$R = \|x\| = t\,\|K(x)\| \leq Rt$$

car $K(C) \subset C$ *et donc* $t = 1$*, ce qui conduit à une contradiction avec*

$$\|K(x)\| = R = \|x\|.$$

Le degré est donc bien défini et vaut, par homotopie

$$\deg(K, C, 0) = 1,$$

d'où le résultat.

(b) $2^{\text{ème}}$ ***étape :***

C *est un convexe, fermé, borné, non vide.*

On considère une rétraction continue.

$$R : X \to C$$

et B une boule contenant C. Soit la diagramme

$$B \to^{R} C \to^{K} B.$$

L'application $(K \circ R)$ est compacte car K est compacte et R est bornée. D'aprés la première étape, l'application $(K \circ R)$ admet un point fixe

$$x_0 \in B,\ x_0 = (K \circ R)(x_0).$$

Or, $R(x_0) \in C$ et, par hypothèse, $K(C) \subset C$; alors $K(R(x_0)) \in C$ et donc $x_0 \in C$.

Corollaire 1.1 *Soit C un sous-ensemble convexe, compact, non vide d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application complètement continue. Alors f admet au moins un point fixe.*

Corollaire 1.2 *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, non vide, C non nécessairement borné, d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue tel que $f(C)$ est inclus dans un compact de C. Alors f admet au moins un point fixe.*

Chapitre 2

Existence de solutions pour un système elliptique semi linéaire

Dans ce chapitre nous étudions un système elliptique semi linéaire où la mise en évidence de la solution est basée sur la technique du point fixe de **Schauder**.

2.1 Préliminaires

Considérons l'espace

$$U = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|(u,v)\|_U^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

et soit

$$V = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Rappelons que l'opérateur $(-\triangle)$, donnée par

$$D(-\triangle) = \left\{u \in H_0^1(\Omega), \quad -\triangle u \in L^2(\Omega)\right\}$$

définit un opérateur inverse et compact sur $L^2(\Omega)$.

$(-\triangle)$ est appellé l'opérateur de Laplace-Dirichlet.

L'opérateur $(-\triangle)$ a une famille dénombrable des valeurs propres $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qu'on peut l'écrire comme une suite croissante des nombres positives qui tends vers $+\infty$ si $n \to +\infty$ définie par

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k \leq ....$$

Chaque valeur propre est répétée un nombre de fois égale à sa multiplicité (qui est finie).

Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ définie par

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H_0^1, v \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx}$$

équivalant à

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx : \int_\Omega |v(x)|^2 \, dx = 1, v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0 \right\}$$

λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet nulles au bord.

Il existe une base hilbertienne orthonormée et complete $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ de fonctions propres tel que

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_2 = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j, \\ 0, & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Où $\langle ., . \rangle_2$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Avec les notations utilisés on peut écrire

$$\int_\Omega \nabla \varphi_k \nabla w dx = \langle \varphi_k, w \rangle_{0,2} = \lambda_k \langle \varphi_k, w \rangle_2, \qquad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

et

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k, \qquad \text{pour tout } v \in L^2(\Omega).$$

La suite $\left(\varphi_k / \sqrt{\lambda_k}\right)_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de produit scalaire $\langle .,. \rangle_{0,2}$, permettant d'écrire pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad \text{où} \quad c_k = \langle u, \varphi_k \rangle_{0,2} / \lambda_k = \langle u, \varphi_k \rangle_2 .$$

2.2 Position du problème

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions non triviales pour la classe du système elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha u + f(x, v, \nabla v) \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ -\Delta v = \beta v + g(x, u, \nabla u) \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ \quad u = v = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière régulière $\partial\Omega$.

α et β deux nombres réels non négatifs avec $\alpha, \beta \notin \sigma(-\Delta)$, où $\sigma(-\Delta)$ désigne le spectre de l'opérateur de Laplace $-\Delta$.

On assume dans la suite que les deux fonctions

$$f, g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

sont continues, satisfaisant les conditions de Carathéodory, voir [1.3] et vérifiant aussi la condition de croissance définie ci dessous :

$$\begin{cases} |f(x,\xi_1,\xi_2)| \leq a\,|\xi_1| + b\,|\xi_2| + h_1(x), \\ \\ |g(x,\eta_1,\eta_2)| \leq c\,|\eta_1| + d\,|\eta_2| + h_2(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

Où $h = (h_1, h_2) \in (L^2(\Omega, \mathbb{R}_+))^2$ deux fonctions non nulles;

a, b, c et d des constantes non négatives telles que

$$(a\mu_\alpha + b\sqrt{\mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)} + c\mu_\beta + d\sqrt{\mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)}) < 1, \tag{2.3}$$

où les constantes μ_α et μ_β sont définies par

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \max\{|\lambda_k - \alpha|^{-1}, \quad k = 1, 2, ...\}, \\ \\ \mu_\beta = \max\{|\lambda_k - \beta|^{-1}, \quad k = 1, 2, ...\}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Le problème (2.1) est supposé non variationnel donc, il n'y a pas de possibilité d'utiliser la méthode variationnelle car le système (2.1) n'est pas une équation de

Euler-Lagrange pour une certaine fonctionnelle. Par conséquent, nous ferons appel à la méthode topologique où la grande difficulté réside dans l'obtention d'une estimation a priori des solutions éventuelles.

L'idée est de se ramener à un problème de point fixe.

Pour cela, donnons nous deux fonctions $(u, v) \in U = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, puis considérons les fonctions mesurables $f(x, v, \nabla v), g(x, u, \nabla u)$.

On obtient un problème linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u - \alpha u = f(x, v(x), \nabla v(x)) = f(x), \\ \\ -\Delta v - \beta v = g(x, u(x), \nabla u(x)) = g(x), \\ \\ u = v = 0, \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par **Lax-Milgram**, on trouve

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta - \alpha)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta - \beta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}; \qquad (2.5)$$

ce qui permet d'écrire le système (2.1) sous la forme d'un problème de point fixe dans l'espace produit $U = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$A(u,v) = (u,v), \tag{2.6}$$

où

$$A : U \to U, \qquad A = L^{-1}F. \tag{2.7}$$

Ici

$$F \quad : \quad U \to V$$

$$F(u,v)(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} f(x, v(x), \nabla v(x)) \\ \\ g(x, u(x), \nabla u(x)) \end{pmatrix}.$$

On sait que (u,v) la solution de notre problème est de la forme $(u,v) = L^{-1}(\hat{u},\hat{v})$ avec $(\hat{u},\hat{v}) \in V$.

Introduisons l'opérateur continu

$$P : V \to V$$

défini par

$$P(\hat{u},\hat{v}) = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

i.e

$$P_1(\hat{u}) = \hat{v}, P_2(\hat{v}) = \hat{u}.$$

On a alors

$$L^{-1}(\hat{u}, \hat{v}) = \left(L_1^{-1} \circ P_1\hat{u}; L_2^{-1} \circ P_2\hat{v}\right) = \left(L_1^{-1}\hat{v}; L_2^{-1}\hat{u}\right).$$

Tout revient à résoudre dans V le problème de point fixe suivant

$$T(\hat{u}, \hat{v}) = (T_1(\hat{u}); T_2(\hat{v})) = (\hat{u}, \hat{v}),$$

avec

$$T : V \to V$$

$$(\hat{u}, \hat{v}) \mapsto T(\hat{u}, \hat{v}) = (f(., L_1^{-1}\hat{v}, \nabla L_1^{-1}\hat{v}); g(., L_2^{-1}\hat{u}, \nabla L_2^{-1}\hat{u})).$$

2.3 Résultats principaux

Pour tout $(\hat{u}, \hat{v}) \in V$, il existe une unique solution faible $(u, v) \in U$ du problème

$$\begin{cases} L_1 u = -\Delta u - \alpha u = \hat{v} \text{ dans } \Omega, \\ \\ L_2 v = -\Delta v - \beta v = \hat{u} \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notons la solution (u, v) par $\left(L_1^{-1}\hat{v}, L_2^{-1}\hat{u}\right)$, i.e

$$\begin{pmatrix} u \\ \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^{-1}\hat{v} \\ \\ L_2^{-1}\hat{u} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Grâce au théorème de représentation, on peut écrire les expressions suivantes

$$\begin{cases} L_1^{-1}\hat{v} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k, \\ \\ L_2^{-1}\hat{u} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k. \end{cases} \tag{2.10}$$

Où les séries convergent dans $H_0^1(\Omega)$.

Lemme 2.1 *Soit α et β deux constantes positives avec $\alpha, \beta \neq \lambda_k, k = 1, 2, ...$ Si* (2.10) *est vérifié, Alors on a les estimation suivantes :*

$$\begin{cases} \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_2 \leq \mu_\alpha \left\|\hat{v}\right\|_2, \\ & \textit{pour tout } (\hat{u},\hat{v}) \in V. \\ \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_2 \leq \mu_\beta \left\|\hat{u}\right\|_2, \end{cases} \tag{2.11}$$

Où μ_α, μ_β *comme dans* (2.4).

Preuve 3 *Montrons d'abord la convergence des séries* (2.10). *Sachant que* $\left(\lambda_k^{\frac{-1}{2}}\varphi_k\right)_{k\geq 1}$ *est une base hilbertienne de* $\left(H_0^1(\Omega), \langle .,.\rangle_{0,2}\right)$, *on obtient*

$$\begin{cases} \left\|\sum_{k=m+1}^{m+p}(\lambda_k-\alpha)^{-1}\langle\hat{v},\varphi_k\rangle_2\varphi_k\right\|_{0,2}^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p}\langle\hat{v},\varphi_k\rangle_2^2\lambda_k/(\lambda_k-\alpha)^2 \leq C_1\sum_{k=m+1}^{m+p}\langle\hat{v},\varphi_k\rangle_2^2, \\ \left\|\sum_{k=j+1}^{j+p}(\lambda_k-\beta)^{-1}\langle\hat{u},\varphi_k\rangle_2\varphi_k\right\|_{0,2}^2 = \sum_{k=j+1}^{j+p}\langle\hat{u},\varphi_k\rangle_2^2\lambda_k/(\lambda_k-\beta)^2 \leq C_2\sum_{k=j+1}^{j+p}\langle\hat{u},\varphi_k\rangle_2^2. \end{cases}$$

Où C_1, C_2 *sont deux constantes positives, telles que*

$$\begin{cases} \lambda_k/(\lambda_k-\alpha)^2 \leq C_1, \\ \lambda_k/(\lambda_k-\beta)^2 \leq C_2. \end{cases}$$

La convergence de (2.10) *suit alors de la convergence des séries numériques*

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2^2, \sum_{k=j+1}^{j+p} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2^2 \quad (\textit{ Inégalité de } \textbf{\textit{Bessel}}).$$

Vérifions que $L(u, v) = (\hat{v}, \hat{u})$ *faiblement, i.e*

$$\begin{cases} \langle u, w_1 \rangle_{0,2} - \alpha \langle u, w_1 \rangle_2 = \langle \hat{v}, w_1 \rangle_2, \\ \\ \langle v, w_2 \rangle_{0,2} - \beta \langle v, w_2 \rangle_2 = \langle \hat{u}, w_2 \rangle_2. \end{cases} \tag{2.12}$$

On a

$$\begin{cases} \langle u, w_1 \rangle_{0,2} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_1 \rangle_{0,2} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \lambda_k \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_1 \rangle_2, \\ \\ \langle v, w_2 \rangle_{0,2} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_2 \rangle_{0,2} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \beta)^{-1} \lambda_k \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_2 \rangle_2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Et

$$\begin{cases} \langle u, w_1 \rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_1 \rangle_2, \\ \\ \langle v, w_2 \rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_2 \rangle_2. \end{cases} \tag{2.14}$$

En substituant les formules (2.13) et (2.14) dans (2.12), on obtient les nouvelles expressions

$$\begin{cases} \langle u, w_1 \rangle_{0,2} - \alpha \langle u, w_1 \rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \lambda_k \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_1 \rangle_2 - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_1 \rangle_2 , \\ \\ \langle v, w_2 \rangle_{0,2} - \beta \langle v, w_2 \rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \beta)^{-1} \lambda_k \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_2 \rangle_2 - \beta \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_2 \rangle_2 , \end{cases} \tag{2.15}$$

qui donnent aprés simplification les formules

$$\begin{cases} \langle u, w_1 \rangle_{0,2} - \alpha \langle u, w_1 \rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} (\lambda_k - \alpha) \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_1 \rangle_2 , \\ \\ \langle v, w_2 \rangle_{0,2} - \beta \langle v, w_2 \rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \beta)^{-1} (\lambda_k - \beta) \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_2 \rangle_2 . \end{cases}$$

Soit finalement

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_1 \rangle_2 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k, w_1 \right\rangle_2 = \langle \hat{v}, w_1 \rangle_2 , \\ \\ \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \langle \varphi_k, w_2 \rangle_2 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k, w_2 \right\rangle_2 = \langle \hat{u}, w_2 \rangle_2 . \end{cases}$$

D'où le résultat désiré.

L'unicité suit du fait que $\alpha, \beta \neq \lambda_k, k = 1, 2, ...$

En conclusion, on observe d'une part que

$$\begin{cases} \left\| \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k \right\|_2^2 \to \left\| L_1^{-1} \hat{v} \right\|_2^2, \quad \textit{quand } m \to \infty, \\ \\ \left\| \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k - \beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k \right\|_2^2 \to \left\| L_2^{-1} \hat{u} \right\|_2^2, \quad \textit{quand } j \to \infty. \end{cases} \tag{2.16}$$

D'autre part on a

$$\begin{cases} \left\| \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k \right\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k - \alpha)^{-2} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2^2 \leq \mu_\alpha^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2^2 \to \mu_\alpha^2 \left\| \hat{v} \right\|_2^2, \\ \\ \left\| \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k - \beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k \right\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k - \beta)^{-2} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2^2 \leq \mu_\beta^2 \sum\limits_{k=1}^{j} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2^2 \to \mu_\beta^2 \left\| \hat{u} \right\|_2^2, \end{cases} \tag{2.17}$$

ce qui d'après (2.16) *et* (2.17) *donne*

$$\begin{cases} \left\| L_1^{-1} \hat{v} \right\|_2 \leq \mu_\alpha \left\| \hat{v} \right\|_2, \\ & \textit{pour tout } (\hat{u}, \hat{v}) \in V. \\ \left\| L_2^{-1} \hat{u} \right\|_2 \leq \mu_\beta \left\| \hat{u} \right\|_2, \end{cases}$$

Théorème 2.1 *Supposons que Ω est de classe C^2, f et g deux fonctions vérifiant les conditions de Carathéodory et la relation* (2.2) *pour a, b, c et d comme dans* (2.3). *Alors* (2.1) *admet au moins une solution non triviale.*

Preuve 4 *D'après la proposition 1.5, on a*

$$\left(\nabla\, L^{-1}\hat{v}\ , \nabla\, L^{-1}\hat{u}\right) \in \left(H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\right)^2,$$

et aussi

$$\left(\left(L^{-1}\hat{v}, \nabla L^{-1}\hat{v}\right); \left(L^{-1}\hat{u}, \nabla L^{-1}\hat{u}\right)\right) \in \left(H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^{n+1}\right)\right)^2.$$

L'injection de $H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^{n+1}\right)$ dans $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^{n+1}\right)$ est complètement continue d'aprés le théorème de Rellich-Kondrachov. D'autre part les opérateurs de Nemytski $(f(.,u(.)); g(.,v(.)))$ de $\left(L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^{n+1}\right)\right)^2$ dans $\left(L^2\left(\Omega\right)\right)^2$ sont continus et bornés, il suit finalement que T est complètement continue de V dans lui même.

En utilisant (2.2) *on observe que presque partout dans Ω, on a*

$$\begin{cases} \left|f(x, L_1^{-1}\hat{v}, \nabla L_1^{-1}\hat{v})\right| \leq a\left|L_1^{-1}\hat{v}\right| + b\left|\nabla L_1^{-1}\hat{v}\right| + h_1(x), \\ \\ \left|g(x, L_2^{-1}\hat{u}, \nabla L_2^{-1}\hat{u})\right| \leq c\left|L_2^{-1}\hat{u}\right| + d\left|\nabla L_2^{-1}\hat{u}\right| + h_2(x). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} \left|f(x, L_1^{-1}\hat{v}, \nabla L_1^{-1}\hat{v})\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int\limits_{\Omega} \left(a\left|L_1^{-1}\hat{v}\right| + b\left|\nabla L_1^{-1}\hat{v}\right| + h_1(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \\ \left(\int\limits_{\Omega} \left|g(x, L_2^{-1}\hat{u}, \nabla L_2^{-1}\hat{u})\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int\limits_{\Omega} \left(c\left|L_2^{-1}\hat{u}\right| + d\left|\nabla L_2^{-1}\hat{u}\right| + h_2(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} \left|f(x, L_1^{-1}\hat{v}, \nabla L_1^{-1}\hat{v})\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq a\left(\int\limits_{\Omega} \left|L_1^{-1}\hat{v}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + b\left(\int\limits_{\Omega} \left|\nabla L_1^{-1}\hat{v}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{\Omega} h_1^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \\ \left(\int\limits_{\Omega} \left|g(x, L_2^{-1}\hat{u}, \nabla L_2^{-1}\hat{u})\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\left(\int\limits_{\Omega} \left|L_2^{-1}\hat{u}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + d\left(\int\limits_{\Omega} \left|\nabla L_2^{-1}\hat{u}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{\Omega} h_2^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \|T_1(\hat{u})\|_2 \leq a \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_2 + b \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_{0,2} + \|h_1\|_2 \,, \\ \\ \|T_2(\hat{v})\|_2 \leq c \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_2 + d \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_{0,2} + \|h_2\|_2 \,. \end{cases} \tag{2.18}$$

Les estimations du lemme 2.1,

$$\begin{cases} \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_2 \leq \mu_\alpha \|\hat{v}\|_2 \,, \\ & \textit{pour tout } \ (\hat{u},\hat{v}) \in V, \\ \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_2 \leq \mu_\beta \|\hat{u}\|_2 \,, \end{cases}$$

et les inégalités suivantes

$$\begin{cases} \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_{0,2}^2 = \alpha \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_2^2 + \left\langle \hat{v}, L_1^{-1}\hat{v}\right\rangle_2 \leq \alpha\mu_\alpha^2 \|\hat{v}\|_2^2 + \mu_\alpha \|\hat{v}\|_2^2 \leq \mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha) \|\hat{v}\|_2^2 \,, \\ \\ \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_{0,2}^2 = \beta \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_2^2 + \left\langle \hat{u}, L_2^{-1}\hat{u}\right\rangle_2 \leq \beta\mu_\beta^2 \|\hat{u}\|_2^2 + \mu_\beta \|\hat{u}\|_2^2 \leq \mu_\beta(1+\beta\mu_\beta) \|\hat{u}\|_2^2 \,, \end{cases}$$

donnent

$$\begin{cases} \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_{0,2} \leq \sqrt{\mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)} \, \|\hat{v}\|_2 \,, \\ \\ \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_{0,2} \leq \sqrt{\mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)} \, \|\hat{u}\|_2 \,, \end{cases}$$

qui aprés substitution dans (2.18) *fournit*

$$\|T_1(\hat{u})\|_2 \leq a\mu_\alpha \|\hat{v}\|_2 + b\sqrt{\mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)}\,\|\hat{v}\|_2 + \|h_1\|_2\,, \tag{2.19}$$

$$\|T_2(\hat{v})\|_2 \leq c\mu_\beta \|\hat{u}\|_2 + d\sqrt{\mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)}\,\|\hat{u}\|_2 + \|h_2\|_2\,. \tag{2.20}$$

En combinant les formules (2.19) *et* (2.20) *on obtient finalement*

$$\|T(\hat{u},\hat{v})\|_V \leq (a\mu_\alpha + b\sqrt{\mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)} + c\mu_\beta + d\sqrt{\mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)})\,\|(\hat{u},\hat{v})\|_V + \|h\|_V\,.$$

En posant

$$\|h\|_V = C_2,$$

et

$$a\mu_\alpha + b\sqrt{\mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)} + c\mu_\beta + d\sqrt{\mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)} = C_1.$$

Comme C_1 *satisfait* (2.3) , *il existe alors une constante* $R > 0$, *telle que*

$$C_1R + C_2 \leq R,$$

il suit que

$$T : \overline{B(0;R)} \to \overline{B(0;R)}$$

T applique la boule fermé $\overline{B(0;R)} \subset V$ de centre l'origine et de rayon R dans lui même. L'existence d'une solution est alors obtenue grâce au théorème du point fixe de Schauder.

Chapitre 3

Résulats d'existence pour une classe de systèmes elliptiques semi-linéaires

Dans ce troisième chapitre nous envisageons une autre méthode (le degré topologique et la propriété de l'homotopie) pour montrer l'existence de solutions faibles non triviales d'un problème issue du chapitre précédant.

Cette partie est consacrée à la mise en évidence de l'existence de solutions pour le système elliptique du type

$$\begin{cases} -\triangle u + \alpha u = f(\nabla v) \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ -\triangle v + \beta v = g(\nabla u) \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$.

On assume que $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions lipschitziennes satisfaisant la condition ci dessous

$$\begin{cases} |f(s)| \leq c_1 |s| + f(0), \\ \\ |g(t)| \leq c_2 |t| + g(0). \end{cases} \tag{3.2}$$

Où c_1, c_2 deux constantes réelles positives.

Associons au système elliptique (3.1) le système linéaire

$$
\begin{cases}
-\triangle u+\alpha u=h_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\[2em]
-\triangle v+\beta v=h_2(x) \quad \text{dans } \Omega, \\[2em]
u=v=0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{3.3}
$$

Où h_1 et h_2 sont dans $L^2(\Omega)$.

La théorie variationnelle et le théorème de Lax-Milgram assurent l'existence et l'unicité d'une solution (u,v) dans $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, i.e

$$
\begin{cases}
\int\limits_\Omega (\nabla u.\nabla\varphi+\alpha u\varphi)\,dx=\int\limits_\Omega h_1(x)\varphi dx, \\[2em]
\int\limits_\Omega (\nabla v.\nabla\psi+\beta v\psi)\,dx=\int\limits_\Omega h_2(x)\psi dx, \quad \forall\,(\varphi,\psi)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega). \\[2em]
u=v=0 \text{ sur } \partial\Omega,
\end{cases} \tag{3.4}
$$

Pour l'opérateur linéaire

$$
\begin{aligned}
T: L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) &\rightarrow \quad H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \\[2em]
(h_1,h_2) \qquad &\mapsto \quad T(h_1,h_2)=(u,v)
\end{aligned}
$$

où (u,v) est la solution du systéme (3.1), on a le résultat suivant

Proposition 3.1 *T est un opérateur continu, i.e*

$$\exists C>0/\forall h=(h_1,h_2)\in V, \left\|T(h)\right\|_U \leq C\left\|h\right\|_V .$$

Preuve 5 *Multiplions la première équation par $u\in H_0^1(\Omega)$ et la second par $v\in H_0^1(\Omega)$ puis intégrons sur Ω, on trouve alors les estimations suivantes*

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2=\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq \int\limits_\Omega h_1(x)\,|u|\,dx, \\ \\ \|v\|_{H_0^1}^2=\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx \leq \int\limits_\Omega h_2(x)\,|v|\,dx. \end{cases}$$

En utilisant Cauchy-Schwartz, on arrive à

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}, \\ \\ \|v\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_2\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}, \end{cases}$$

qui donne d'aprés l'inégalité de Poincaré

$$\begin{cases} \|u\|^2_{H^1_0} \leq C_\Omega \|h_1\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ \\ \|v\|^2_{H^1_0} \leq C_\Omega \|h_2\|^2_{L^2(\Omega)} \ . \end{cases}$$

En ajoutant ces deux inégalités, on obtient

$$\|u\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0} \leq C_\Omega(\|h_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h_2\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

qui finalement donne

$$\|(u,v)\|_U = \|T(h)\|_U \leq C \|h\|_V \, .$$

L'opérateur suivant est bien définie

$$F : U \to V$$

$$(u,v) \mapsto F(u,v) = (f(\nabla v), g(\nabla u)) \, .$$

Sachant que F est lipschitzienne et continue, il existe alors une constante $c > 0$

telle que pour chaque $\varphi, \psi \in U$, on a

$$\|F(\varphi) - F(\psi)\|_V \leq c\,\|\varphi - \psi\|_U \,. \tag{3.5}$$

Lemme 3.1 *Sous l'hypothèse* (3.5) F *est compacte.*

Preuve 6 *Soit* $M \subset U$ *un sous ensemble borné de* U *et* $\{(w_{1,n}, w_{2,n})\}_{n=1}^{+\infty} \subset F\,(M)$ *une suite arbitraire.*

il faut montrer que $\{(w_{1,n}, w_{2,n})\}_{n=1}^{+\infty}$ *admet une sous suite convergente dans* U*. Soit* $\{(u_n, v_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$ *tel que*

$$F\,(u_n, v_n) = (f\,(\nabla v_n)\,, g\,(\nabla u_n)) = (w_{1,n}, w_{2,n})\,,$$

la réflèxivité de l'espace U *implique que* $(u_n, v_n) \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (u, v)$ *dans* U *au moins pour une sous suite.*

Il suit d'après le théorème de Rellich-Kondrachov que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ *dans* V*.*

F *étant continue de* U *dans* V*. Alors*

$$F\,(u_n, v_n) = (w_{1,n}, w_{2,n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F\,(u, v) = (u, v) \ \ dans\ V,$$

F *est ainsi un opérateur compact.*

3.1 Estimation à priori de la solution

Soit K l'opérateur suivant ainsi défini

$$K \ : \ U \to U$$
$$U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{T} U$$

$$K = T \circ F$$

il est claire que K est un opérateur compact et continu.

Définissons l'homotopie suivante

$$H : [0,1] \times U \to U$$
$$(t,u,v) \mapsto H(t,u,v) = (u,v) - tK(u,v).$$

H est une homotopie compacte et la résolution du système (3.1) est équivalente à la résolution du problème suivant

$$(u,v) \in U, \quad (u,v) - K(u,v) = 0. \tag{3.6}$$

Lemme 3.2 *Il existe $R > 0$ tel que*

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], \forall (u,v) \in U \\ \\ H(t,u,v) = 0 \ \Rightarrow \|(u,v)\|_{U} < R. \end{cases}$$

Preuve 7 *Soient $t \in [0,1]$ et $(u,v) \in U$, alors on a*

$$H(t,u,v) = 0,$$

Multiplions par $(w_1, w_2) \in U$ puis intégrons sur Ω, on trouve

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla w_1 + \alpha \int\limits_{\Omega} u w_1 = t \int\limits_{\Omega} f(\nabla v) w_1, \\ \\ \int\limits_{\Omega} \nabla v \nabla w_2 + \beta \int_{\Omega} v w_2 = t \int\limits_{\Omega} g(\nabla u) w_2, \qquad (w_1, w_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \\ \\ u = v = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

En choisissons que $t = 1$, $w_1 = u$, $w_2 = v$ et le fait que

$$\begin{cases} |f(\nabla v)| \leq c_1 |\nabla v| + |f(0)|, \\ \\ |g(\nabla u)| \leq c_2 |\nabla u| + |g(0)|. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \int\limits_{\Omega} |u|^2 \leq \int\limits_{\Omega} c_1 |\nabla v| \, u + \int\limits_{\Omega} f(0)u, \\ \\ \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 + \beta \int\limits_{\Omega} |v|^2 \leq \int\limits_{\Omega} c_2 |\nabla u| \, v + \int\limits_{\Omega} g(0)v, \end{cases} \qquad (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

en appliquant l'inégalités $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \int\limits_{\Omega} |u|^2 \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{(c_1)^2}{2} \int\limits_{\Omega} |u|^2 + f(0) \int\limits_{\Omega} |u| \,, \\ \\ \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 + \beta \int\limits_{\Omega} |v|^2 \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{(c_2)^2}{2} \int\limits_{\Omega} |v|^2 + g(0) \int\limits_{\Omega} |v| \;\;, \end{cases} \qquad (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

En simplifiant l'expression ci-dessus, on obtient

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 + \left(\alpha - \frac{(c_1)^2}{2}\right) \int\limits_{\Omega} |u|^2 \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 + f(0)\sqrt{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \\ \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 + \left(\beta - \frac{(c_2)^2}{2}\right) \int\limits_{\Omega} |v|^2 \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 + g(0)\sqrt{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} |v|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \qquad (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

donc

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 + \left(\alpha - \frac{(c_1)^2}{2}\right)\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 + f(0)\sqrt{\Omega}\,\|u\|_{L^2}\,, \\ \\ \|v\|_{H_0^1}^2 + \left(\beta - \frac{(c_2)^2}{2}\right)\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 + g(0)\sqrt{\Omega}\,\|v\|_{L^2}^2\,, \end{cases} \qquad (u,v) \in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega).$$

Et en utilisant le fait que

$$\begin{cases} \alpha^1 = \left(\alpha - \frac{(c_1)^2}{2}\right) > 0, \\ \\ \beta^1 = \left(\beta - \frac{(c_2)^2}{2}\right) > 0, \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 + \alpha^1\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 + f(0)\sqrt{\Omega}\,\|u\|_{L^2}\,, \\ \\ \|v\|_{H_0^1}^2 + \beta^1\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 + g(0)\sqrt{\Omega}\,\|v\|_{L^2}\,, \end{cases} \qquad (u,v) \in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega).$$

En additionons les deux inégalités ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2\right) + a\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2\right) \leq b\sqrt{\Omega}\left(\|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\right),$$

en posons

$$
\begin{cases}
a = \min(\alpha^1, \beta^1), \\
\\
b = \max(f(0), g(0)),
\end{cases}
$$

on arrive à

$$
\tfrac{1}{2} \left\| (u,v) \right\|_U^2 \; + a \left\| (u,v) \right\|_V^2 \leq 2B \left\| (u,v) \right\|_V .
$$

C.à.d

$$
\left\| (u,v) \right\|_U < \frac{2\sqrt{2}B}{\sqrt{a}} = R.
$$

Il est connu maintenant que pour mettre en evidence une solution du système (3.1) ; il suffit que le degré topologique de l'homotopie H au point 0 dans la boule ouverte de centre l'origine et de rayons R ainsi déterminé soit différent de 0.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses ci-dessus le système* (3.1) *admet au moins une solution.*

On utilisons la propriété de l'invariance par homotopie du degré.

Preuve 8 *Soit*

$$B\left(0,R\right)=\left\{\left(u,v\right)\in U,\left\Vert \left(u,v\right)\right\Vert_{U}<R\right\},$$

par invariance du degré topologique on a

$$t\in\left[0,1\right],\ \ \deg(H(t,.,.),B\left(0,R\right),0),$$

est constant.

En particlier $t=0,$ *on trouve*

$$\deg(H(0,.,.),B\left(0,R\right),0)=\deg(H(1,.,.),B\left(0,R\right),0)=1.$$

Conclusion et perspectives

Le travail principale est composé de deux problèmes.

Le premier problème est l'étude de la solution d'un système d'équations semi linéaires et a été traité par une combinaison du théorème du point fixe de Schauder et des outils de l'analyse spéctrale (Base hilbertienne).

Le deuxième problème quand à lui a été traité avec le degré topologique de Leray-Schauder et un choix judecieux d'une homotopie.

En fait, beaucoup de conséquences du degré topologique sont souvent vues comme de simples applications des deux théorèmes de point fixe (Brouwer et Schauder). Il faut cependant comprendre que le degré topologique est un outil bien plus puissant, plus général et souvent même plus facile d'utilisation que ces théorèmes de point fixe.

- Nous sommes actuellement sur l'étude d'un système elliptique semi linéaire à l'état de resonance généralisant les conditions de Ladesmen et Lazer en propose la méthode du degré topologique de Leray-Schauder.

Liste des symboles

Δ Laplacian.

∇ Gradient d'un champ de vecteurs.

$\frac{\partial}{\partial x}$ Dérivée partielle.

$\frac{\partial}{\partial n}$ Dérivée normale exterieure d'un champ scalaire.

$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ un multi-indice.

$x.y$ est le produit scalaire euclidien usuel de deux vecteurs $x; y \in \mathbb{R}^N$; $|.|$ est la norme euclidienne associée.

$p.p$ Presque partout.

$\rightarrow$ Convergence forte.

$\rightharpoonup$ Convergence faible.

$\varphi^{\perp}$ L'orthogonale de φ dans l'espace $L^2(\Omega)$.

$C^m(\mathbb{R}^N)$ Espace des fonctions m fois continument différentiables.

$C^{\infty}(\mathbb{R}^N) = \underset{m \in \mathbb{N}}{\cap} C^m(\mathbb{R}^N)$.

$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ Espace des fonctions $C^{\infty}(\mathbb{R})$ support compact dans $\mathbb{R}^N$.

$L^p(\mathbb{R}^N)$ Espace de Lebegue equipé de la norme $\|.\|_p$.

$L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ Espace des fonctions de $L^p(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \mathbb{R}^N$.

$W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ Espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\|.\|_{m,p}$.

$W_{loc}^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ Espace des fonctions de $W^{m,p}\left(\Omega'\right), \forall\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \mathbb{R}^N$.

$H^m\left(\mathbb{R}^N\right) \quad = W^{m,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

$U \quad = \quad H_0^1\left(\Omega\right) \times H_0^1\left(\Omega\right)$ muni de la norme $\|(u,v)\|_U^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.

$V \quad = L^2\left(\Omega\right) \times L^2\left(\Omega\right)$.

$\mathbb{N}$ L'ensemble des entiers positives, N = 0,1, 2,... .

$\mathbb{R}$ L'ensemble des nobmres réelles.

$\mathbb{R}^N$ Espace réelle de dimension N.

$[a,b]$ Un intervalle dans X; $[a,b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$.

$B\left(o,r\right)$ Boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$.

$\bar{\Omega}$ L'adherence de Ω.

$X \hookrightarrow Y, X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ L'injection continue (ou compacte) de X dans Y.

Bibliographie

[1] **R.A.Adams**, Sobolev spaces, Academic Press, New York/ San Francisco/ London, (1975).

[2] **R.P.Agarwal, M.Meehan and D.O'Regan**, Fixed point theory and applications, Cambridge University Press, (2001).

[3] **C.O.Alves and D.G. de Figueiredo**, Nonvariational elliptic systems, Disc. Cont. Dynamical Syst., Vol. 8, No. 2, (2002), pp. 289-302.

[4] **A.Ambroseti and A.Malchiodi**, Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems, Cambridge University Press, (2007).

[5] **A.Ambroseti and G.Prodi**, A primer of nonlinear analysis, Cambridge University Press, (1993).

[6] **M.Badiale and E.Serra**, Semilinear elliptic equations for beginners, existence results via the variational approach, Universitext, Springer-Verlag, London, (2011).

[7] **A.Bahri and P.L.Lions**, On the existence of a positive solution of semi-linear elliptic equations in unbounded domains, Ann. Inst. Henri Poincaré, (1997).

[8] **L.Boccardo and D.G. de Figueiredo**, Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations, Nonlinear Diff. Eqn. Appl., Vol. 9, (2002), pp. 309-323.

[9] **H.Brezis**, Analyse fonctionnelle, théorie et application, Dunod, Paris, (1983).

[10] **H.Brezis and L.Nirenbrg**, Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems, Ann. scuola. Norm. Sup. Pisa CI. sci., Vol. 4, No. 5, (1978), pp. 225-326.

[11] **H.Brezis and W.Strauss**, Semi-linear elliptic equations in L^1, J. Math. Soc. Japan, (1973).

[12] **M.Chipot**, Hand book of differential equations, stationary partial differential equations, Vol. 7, Elsevier, (2008).

[13] **Ph.Clément, D.G. de Figueiredo and E.Mitidieri**, Positive solutions of semilinear elliptic systems, Commun. Part. Diff. Eqns., Vol. 17, (1992), pp. 923-940.

[14] **J.Cronin**, Fixed points and topological degree in non linear analysis, Amer. Math. Soc, (1964).

[15] **S.Djebali**, Le degré topologique, théorie et applications, Kouba Alger, (2006).

[16] **P.Drabek and J.Milota**, Methods of nonlinear analysis, applications to differential equations, Birkhauser Advanced Texts, Basel, (2007).

[17] **M.J.Estiben and P.Lions**, Existence and non existence results for semi-linear elliptic problems in unbounded domains, Proc. Roy. Soc. Edimburgh, (1982).

[18] **D.G. de Figueiredo**, Semilinear elliptic systems, Lectures at the International School on Nonlinear Differential Equations, Trieste-Italy, October (2006).

[19] **D.G. de Figueiredo and B.Ruf**, Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth, Med. J. Math., Vol. 1, (2004), pp. 417-431.

[20] **D.G. de Figueiredo and J.Yang**, A priori bounds for positive solutions of a non-variational elliptic systems, Commun. PDE, Vol. 23, No. 11&12, (2001), pp. 2305-2322.

[21] **T.Gallouet et R.Herbin**, Equation aux dérivée partielle, Cours Master 2, Université Aix de Marseille, (2012).

[22] **T.Gallouet and O.Kavian**, Résultats d'existence et de non-existence pour certains problèmes demi-linéaires a l'infini, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. 3, No. 3&4, (1981), pp. 201-246.

[23] **D.Gilbarg and N.S.Trudinger**, Elliptic partial differential equations of second order, Spring-Verlag, Berlin, (1998).

[24] **A.Haraux et B.Khodja**, Caractère trivial de la solution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires dans des ouverts cylindriques de $\mathbb{R}^N$, Portugaliae Mathématica Fasc 2, (1984).

[25] **H.Lakhal, B.Khodja et W.Gharbi**, Existence results of nontrivial solutions for a semi linear elliptic system at resonance, J. Adv. Res. Dyn. Con. Sys., Vol.5, Avril (2013), pp. 1-12.

[26] **F.Legoll et M.Lewin**, Mathématique des modèle multi-échelles, Mars (2010).

[27] **J.Leray and J.Schauder**, Topologie et equations fonctionelles, Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa 3, (1934), pp. 45-78.

[28] **J.L.Lions**, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, (1969).

[29] **J.Mawhin**, Topological degree methods in non linear boundary value problems, Conference Board of the Mathematical Sciences, AMS, (1979).

[30] **J.W.Milnor**, Topology from a differencial view point, Charottesville, The University Press of Verginia, (1965).

[31] **A.Moussaoui and B.Khodja**, Existence results for a class of semilinear elliptic systems, Journal of Partial Differential Equations, Vol. 22, No. 2, (2009), pp. 111-126.

[32] **D.O'Regan and R.Precup**, Theorems of Leray-Schauder type and applications, Gordon and Breach Science Publishers, vol. 3, (2001).

[33] **A.Ponce**, Calculus of variations and optimization, Lectures at the International School on Nonlinear Differential Equations, Trieste-Italy, October (2006).

[34] **P.H.Robinouitz**, Théorie du degré topologique et application aux problèmes aux limites non linéaires, (notes rédigées par H.Berestycki), Univ. Paris, (1976).

Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems
Vol. 4, Issue. 4, 2012, pp. 1-13
Online ISSN: 1943-023X

Existence result of solutions for a class of semi linear elliptic systems

Gharbi Wahiba[1,*], Khodja Brahim [1], Lakehal Hakim[2]

[1] *Department of Mathematics, Badji Mokhtar University, P.O 12 Annaba, Algeria.*
[2] *Department of Mathematics, 20 August 1955 University, P.O 26 Skikda, Algeria.*

Abstract. In this paper, we interested with the study of the existence of solutions for a class of semi-linear elliptic systems. Using the topological degree and its application in Schauder's fixed point theorem, under suitable assumptions on the non linearities f and g, we prove the existence of weak solutions.

Keywords: Topological degree; Schauder's fixed point theorem; Boundary value problem.

Mathematics Subject Classification 2010: 35J55, 15A15, 05A15, 15A18.

---

1 Introduction

Elliptic systems have several practical applications. For example they can describe the multiplicative chemical reaction catalyzed by grains under constant or variant temperature, a correspondence of the stable station of dynamical system determined by the reaction-diffusion system. In recent years, many publications have appeared concerning semi-linear elliptic systems which have been used in a greet variety of applications.

The question of the existence of solutions for semi-linear elliptic systems of the form

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) & \text{in } \Omega, \\ \\ -\Delta v = g(x,u,v) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

subject to zero Dirichlet boundary conditions, has been the object of intensive research recently and different situations on the structure of the nonlinearities f and g are studied; see for example [1–6] and references therein.

*Correspondence to: Gharbi Wahiba, Badji Mokhtar University, P.O 12 Annaba, Algeria. Email: `gharbiwahiba@gmail.com`
†Received: 4 March 2012, accepted: 1 July 2012.

In this paper, we study the existence of weak solutions for the semi-linear Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha u + f(x, v, \nabla v) \quad \text{in } \Omega, \\ \\ -\Delta v = \beta v + g(x, u, \nabla u) \quad \text{in } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$, with smooth boundary $\partial\Omega$.

α and β are nonnegative real numbers with $\alpha, \beta \notin \sigma(-\Delta)$, $\sigma(-\Delta)$ denoted the spectrum of the Laplace operator.

$f, g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ two continuous functions satisfying the Carathéodory conditions (i.e : $f(., w)$ is measurable for each $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ and $f(x, .)$ is continuous for a.e $x \in \Omega$),

and verifying also the growth restriction defined below

$$\begin{cases} |f(x, \xi_1, \xi_2)| \leq a\,|\xi_1| + b\,|\xi_2| + h_1(x), \\ \\ |g(x, \eta_1, \eta_2)| \leq c\,|\eta_1| + d\,|\eta_2| + h_2(x). \end{cases} \tag{1.2}$$

(We are employed the notation that $|.|$ stands for absolute value in $\mathbb{R}$ and the Euclidean norm in $\mathbb{R}^N$).

Where $h = (h_1, h_2) \in (L^2(\Omega))^2$ nonnul function; a, b, c and d are nonnegative constants satisfying:

$$(a\mu_\alpha + b\sqrt{\mu_\alpha(1 + \alpha\mu_\alpha)} + c\mu_\beta + d\sqrt{\mu_\beta(1 + \beta\mu_\beta)}) < 1. \tag{1.3}$$

Where μ_α, μ_β are two constants such that

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \max\{|\lambda_k - \alpha|^{-1}, \quad k = 1, 2, ...\}, \\ \\ \mu_\beta = \max\{|\lambda_k - \beta|^{-1}, \quad k = 1, 2, ...\}. \end{cases} \tag{1.4}$$

To prove our result, we shall apply to (1.1) the reasoning used in [11].

2 Preliminaries

We consider the space

$$U = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

which is a Banach space endowed with the norm, that we will denote by $\|.\|_U$

$$\|(u, v)\|_U^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

and let us take

$$V = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

In the sequel, $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ and $\|.\|_{H_0^1(\Omega)}$ will denote the usual norms on $L^2(\Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$ respectively.

Recalling that the operator $(-\triangle)$, given by

$$D(-\triangle) = \left\{u \in H_0^1(\Omega), \quad -\triangle u \in L^2(\Omega)\right\}$$

define an inverse compact operator on $L^2(\Omega)$, he called the Laplace-Dirichlet operator and he has a countable family of eigenvalues $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ which can be written as an increasing sequence of positive numbers which tends to $+\infty$ as $n \to +\infty$ defined by

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$$

Each eigenvalue is repeated a number of times equal to its multiplicity (which is finite).

Let $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ be defined as

$$\lambda_1 = \inf_{v\in H_0^1, v\neq 0} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx}{\int\limits_\Omega |v(x)|^2\, dx}$$

or equivalently as

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int\limits_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx : \int\limits_\Omega |v(x)|^2\, dx = 1, v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0\right\}$$

λ_1 is the first eigenvalue of the Laplace operator subject to the Dirichlet boundary conditions.

There exists an orthonormal and compleat Hilbert base $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ be the sequence of all eigenfunctions such that

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_2 = \begin{cases} 1, & \text{if } k = j, \\ 0, & \text{if } k \neq j. \end{cases}$$

Where $\langle .,. \rangle_2$ denote the inner product in $L^2(\Omega)$.

Hence

$$\int\limits_\Omega \nabla\varphi_k \nabla w dx = \langle \varphi_k, w \rangle_{0,2} = \lambda_k \langle \varphi_k, w \rangle_2, \qquad \text{for all } w \in H_0^1(\Omega),$$

and

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k, \qquad \text{for all } v \in L^2(\Omega),$$

Moreover, the sequence $\left(\varphi_k/\sqrt{\lambda_k}\right)_{k\geq 1}$ is an Hilbert base of the space $H_0^1(\Omega)$ equipped with the scalar product $\langle .,. \rangle_{0,2}$. Thus, for each $u \in H_0^1(\Omega)$, one has

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad \text{where} \quad c_k = \langle u, \varphi_k \rangle_{0,2} / \lambda_k = \langle u, \varphi_k \rangle_2.$$

Proposition 2.1. (**The regularity of weak solutions**) If Ω is C^2, then $(-\Delta)^{-1}\left(L^2(\Omega)\right) \subset H^2(\Omega)$ and the linear map $(-\Delta)^{-1}$ is also bounded from $L^2(\Omega)$ into $H^2(\Omega)$.

3 Fixed point formulation of the problem (1.1)

1) We can write (1.1) as the following fixed point problem on $U :\ A(u,v) = (u,v)$, where

$$A : U \to U, \qquad A = L^{-1}F;$$

here

$$F : U \to V;$$

where

$$F(u,v)(x) = (f(x, v(x), \nabla v(x)); g(x, u(x), \nabla u(x))).$$

Denoted by

$$S = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Clearly, any fixed point of A belongs to the subspace $S(V)$ of U.

2) If we look a priori for a solution (u,v) of the form $(u,v) = L^{-1}(\hat{u}, \hat{v})$ with $(\hat{u}, \hat{v}) \in V$.

Let

$$P : V \to V;$$

be a continuous operator defined by

$$P(\hat{u}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \end{pmatrix}.$$

Such that

$$L^{-1}(\hat{u}, \hat{v}) = \left(L_1^{-1} \circ P_1\hat{u}; L_2^{-1} \circ P_2\hat{v}\right) = \left(L_1^{-1}\hat{v}; L_2^{-1}\hat{u}\right),$$

hence in the subspace $S(V)$, then we have to solve a fixed point problem on V: $T\ (\hat{u}, \hat{v}) = (T_1(\hat{u}); T_2(\hat{v})) = (\hat{u}, \hat{v})$, where

$$T : V \to V$$

$$(\hat{u}, \hat{v}) \mapsto T(\hat{u}, \hat{v}) = (f(., L_1^{-1}\hat{v}, \nabla L_1^{-1}\hat{v}); g(., L_2^{-1}\hat{u}, \nabla L_2^{-1}\hat{u})).$$

4 Main results

For each $(\hat{u}, \hat{v}) \in V$, there exists a unique weak solution $(u,v) \in U$ to the problem

$$\begin{cases} L_1 v = -\Delta v - \alpha v = \hat{v} & \text{in } \Omega, \\ \\ L_2 u = -\Delta u - \beta u = \hat{u} & \text{in } \Omega, \\ \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Denoted by $\left(L_1^{-1}\hat{v}, L_2^{-1}\hat{u}\right)$, we have the following eigenfunction expansion

$$\begin{cases} L_1^{-1}\hat{v} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k, \\ \\ L_2^{-1}\hat{u} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k. \end{cases} \tag{4.1}$$

Where the series converges in U.

Lemma 4.1. Let α and β are positive constants with $\alpha, \beta \neq \lambda_k, k = 1, 2, ...$ If (4.1) hold, then we have

$$\begin{cases} \left\| L_1^{-1}\hat{v} \right\|_2 \leq \mu_\alpha \left\| \hat{v} \right\|_2, \\ \\ \left\| L_2^{-1}\hat{u} \right\|_2 \leq \mu_\beta \left\| \hat{u} \right\|_2, \end{cases} \quad \text{For all } (\hat{u}, \hat{v}) \in V. \tag{4.2}$$

Where μ_α, μ_β as in (1.4).

Proof. We first prove the convergence of the series (4.1). Since $\left(\lambda_k^{\frac{-1}{2}} \varphi_k\right)_{k \geq 1}$ is a Hilbert base in $\left(H_0^1(\Omega), \langle .,. \rangle_{0,2}\right)$, we have

$$\begin{cases} \left\| \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} (\lambda_k - \alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k \right\|_{0,2}^2 = \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2^2 \lambda_k / (\lambda_k - \alpha)^2 \leq C_1 \sum\limits_{k=m+1}^{m+p} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2^2, \\ \\ \left\| \sum\limits_{k=j+1}^{j+p} (\lambda_k - \beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2 \varphi_k \right\|_{0,2}^2 = \sum\limits_{k=j+1}^{j+p} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2^2 \lambda_k / (\lambda_k - \beta)^2 \leq C_2 \sum\limits_{k=j+1}^{j+p} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2^2. \end{cases}$$

Where C_1, C_2 are positive constants, such that

$$\begin{cases} \lambda_k / (\lambda_k - \alpha)^2 \leq C_1, \\ \\ \lambda_k / (\lambda_k - \beta)^2 \leq C_2. \end{cases}$$

Thus the convergence of (4.1) follows from the convergence of the numerical series $\sum\limits_{k=m+1}^{m+p} \langle \hat{v}, \varphi_k \rangle_2^2$, $\sum\limits_{k=j+1}^{j+p} \langle \hat{u}, \varphi_k \rangle_2^2$ (Bassel's inequality).

Let $(u, v) \in U$ be the sums of series (4.1). Next we check that $L(u, v) = (\hat{u}, \hat{v})$ weakly, i.e

$$\begin{cases} \langle v, w_1 \rangle_{0,2} - \alpha \langle v, w_1 \rangle_2 = \langle \hat{v}, w_1 \rangle_2, \\ \\ \langle u, w_2 \rangle_{0,2} - \beta \langle u, w_2 \rangle_2 = \langle \hat{u}, w_2 \rangle_2. \end{cases}$$

Indeed, we have

$$\begin{cases} \langle v, w_1\rangle_{0,2} = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k-\alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2 \langle \varphi_k, w_1\rangle_{0,2} = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k-\alpha)^{-1} \lambda_k \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2 \langle \varphi_k, w_1\rangle_2 , \\ \langle u, w_2\rangle_{0,2} = \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k-\beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2 \langle \varphi_k, w_2\rangle_{0,2} = \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k-\beta)^{-1} \lambda_k \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2 \langle \varphi_k, w_2\rangle_2 . \end{cases}$$

And

$$\begin{cases} \langle v, w_1\rangle_2 = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k-\alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2 \langle \varphi_k, w_1\rangle_2 , \\ \langle u, w_2\rangle_2 = \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k-\beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2 \langle \varphi_k, w_2\rangle_2 . \end{cases}$$

Hence

$$\begin{cases} \langle v, w_1\rangle_{0,2} - \alpha \langle v, w_1\rangle_2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2 \langle \varphi_k, w_1\rangle_2 = \left\langle \sum\limits_{k=1}^{m} \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2 \varphi_k, w_1 \right\rangle_2 = \langle \hat{v}, w_1\rangle_2 , \\ \langle u, w_2\rangle_{0,2} - \beta \langle u, w_2\rangle_2 = \sum\limits_{k=1}^{j} \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2 \langle \varphi_k, w_2\rangle_2 = \left\langle \sum\limits_{k=1}^{j} \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2 \varphi_k, w_2 \right\rangle_2 = \langle \hat{u}, w_2\rangle_2 . \end{cases}$$

as desired.

The uniqueness follows from $\alpha, \beta \neq \lambda_k, k = 1, 2, ...$

To prove (4.2), observe that

$$\begin{cases} \left\| \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k-\alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2 \varphi_k \right\|_2^2 \to \left\| L_1^{-1}\hat{v} \right\|_2^2, \quad \text{as } m \to \infty, \\ \left\| \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k-\beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2 \varphi_k \right\|_2^2 \to \left\| L_2^{-1}\hat{u} \right\|_2^2, \quad \text{as } j \to \infty. \end{cases}$$

And, on the other hand we have

$$\begin{cases} \left\| \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k-\alpha)^{-1} \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2 \varphi_k \right\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k-\alpha)^{-2} \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2^2 \leq \mu_\alpha^2 \sum\limits_{k=1}^{m} \langle \hat{v}, \varphi_k\rangle_2^2 \to \mu_\alpha^2 \|\hat{v}\|_2^2 , \\ \left\| \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k-\beta)^{-1} \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2 \varphi_k \right\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{j} (\lambda_k-\beta)^{-2} \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2^2 \leq \mu_\beta^2 \sum\limits_{k=1}^{j} \langle \hat{u}, \varphi_k\rangle_2^2 \to \mu_\beta^2 \|\hat{u}\|_2^2 . \end{cases}$$

Finally we have

$$\begin{cases} \left\| L_1^{-1}\hat{v} \right\|_2 \leq \mu_\alpha \|\hat{v}\|_2 , \\ \left\| L_2^{-1}\hat{u} \right\|_2 \leq \mu_\beta \|\hat{u}\|_2 , \end{cases} \quad \text{For all } (\hat{u}, \hat{v}) \in V.$$

□

Theorem 4.1. Suppose that Ω is C^2, f and g satisfying the Carathéodory conditions and (1.2) for a, b, c and d as in (1.3). Then (1.1) has at least one solution.

Proof. By proposition (2.1), we have

$$\left(\nabla L^{-1}\hat{v}, \nabla L^{-1}\hat{u}\right) \in \left(H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^n\right)\right)^2,$$

and so

$$\left(\left(L^{-1}\hat{v}, \nabla L^{-1}\hat{v}\right); \left(L^{-1}\hat{u}, \nabla L^{-1}\hat{u}\right)\right) \in \left(H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^{n+1}\right)\right)^2.$$

Next, by Rellich-Kondrachov theorem, the imbedding of $H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^{n+1}\right)$ into $L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^{n+1}\right)$ is completely continuous and the Nemytsky operators $(f(., u(.)); g(., v(.)))$ from $\left(L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^{n+1}\right)\right)^2$ into $\left(L^2(\Omega)\right)^2$ are continuous and bounded, it follows that T is completely continuous then compact from V into itself.

On the other hand, using the fact that

$$\begin{cases} \left|f(x, L_1^{-1}\hat{v}, \nabla L_1^{-1}\hat{v})\right| \leq a\left|L_1^{-1}\hat{v}\right| + b\left|\nabla L_1^{-1}\hat{v}\right| + h_1(x), \\ \\ \left|g(x, L_2^{-1}\hat{u}, \nabla L_2^{-1}\hat{u})\right| \leq c\left|L_2^{-1}\hat{u}\right| + d\left|\nabla L_2^{-1}\hat{u}\right| + h_2(x). \end{cases}$$

Then, we have

$$\begin{cases} \|T_1(\hat{u})\|_2 \leq a\left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_2 + b\left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_{0,2} + \|h_1\|_2, \\ \\ \|T_2(\hat{v})\|_2 \leq c\left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_2 + d\left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_{0,2} + \|h_2\|_2. \end{cases}$$

From the Lemma 4.1, we obtain

$$\begin{cases} \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_{0,2}^2 = \alpha\left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_2^2 + \left\langle\hat{v}, L_1^{-1}\hat{v}\right\rangle_2 \leq \alpha\mu_\alpha^2\|\hat{v}\|_2^2 + \mu_\alpha\|\hat{v}\|_2^2 \leq \mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)\|\hat{v}\|_2^2, \\ \\ \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_{0,2}^2 = \beta\left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_2^2 + \left\langle\hat{u}, L_2^{-1}\hat{u}\right\rangle_2 \leq \beta\mu_\beta^2\|\hat{u}\|_2^2 + \mu_\beta\|\hat{u}\|_2^2 \leq \mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)\|\hat{u}\|_2^2. \end{cases}$$

Thus

$$\begin{cases} \left\|L_1^{-1}\hat{v}\right\|_{0,2} \leq \sqrt{\mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)}\,\|\hat{v}\|_2, \\ \\ \left\|L_2^{-1}\hat{u}\right\|_{0,2} \leq \sqrt{\mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)}\,\|\hat{u}\|_2. \end{cases}$$

Then, we get

$$\begin{cases} \|T_1(\hat{u})\|_2 \leq a\mu_\alpha\|\hat{v}\|_2 + b\sqrt{\mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)}\,\|\hat{v}\|_2 + \|h_1\|_2, \\ \\ \|T_2(\hat{v})\|_2 \leq c\mu_\beta\|\hat{u}\|_2 + d\sqrt{\mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)}\,\|\hat{u}\|_2 + \|h_2\|_2. \end{cases}$$

The addition give

$$\|T(\hat{u}, \hat{v})\|_V \leq (a\mu_\alpha + b\sqrt{\mu_\alpha(1+\alpha\mu_\alpha)} + c\mu_\beta + d\sqrt{\mu_\beta(1+\beta\mu_\beta)})\,\|(\hat{u}, \hat{v})\|_V + \|h\|_V.$$

Then

$$\|T(\hat{u},\hat{v})\|_V \leq C_1 \|(\hat{u},\hat{v})\|_V + \underbrace{\|h\|_V}_{C_2}.$$

Hence C_1 satisfying (1.3) , then there exist a constant $R > 0$, such that

$$C_1 R + C_2 \leq R.$$

It follows that T maps the close ball $\overline{B(0;R)} \subset V$ with radius R into itself; and Schauder's fixed point theorem assure the existence of solutions for the problem (1.1) . □

Remark 4.1. We can also assure the existence of solutions with the nonlinearities f and g satisfying the condition below

$$\begin{cases} |f(x,s,\xi_1)| \leq a(x) + M_1[|s|^\gamma + |\xi_1|^\gamma], \\ \\ |g(x,t,\xi_2)| \leq b(x) + M_2[|t|^\gamma + |\xi_2|^\gamma]. \end{cases}$$

Where $(a,b) \in (L^2(\Omega))^2$ are non-null functions; M_1, M_2 two positive constants; $0 \leq \gamma < 1$.

In the next section we prove with another technique the existence of weak solutions for a particular case of (1.1).

5 Application

This section concerns the existence of solutions of elliptic systems of the type

$$\begin{cases} -\triangle u + \alpha u = f(\nabla v) \quad \text{in } \Omega, \\ \\ -\triangle v + \beta v = g(\nabla u) \quad \text{in } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$. with smooth boundary $\partial\Omega$. We assume that $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ are lipschitz functions satisfying the condition below

$$\begin{cases} |f(s)| \leq c_1 |s| + f(0), \\ \\ |g(t)| \leq c_2 |t| + g(0). \end{cases} \tag{5.2}$$

Where c_1, c_2 are real positive constants.

Let us consider the linear system

$$\begin{cases} -\triangle u+\alpha u=h_1(x) \quad \text{in } \Omega, \\ -\triangle v+\beta v=h_2(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u=v=0 \qquad\qquad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

where $h_1$and h_2 are in $L^2(\Omega)$.

The Lax-Milgram theorem shows that the system of equations (5.3) has a unique solution (u,v) in $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, that is

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega}(\nabla u.\nabla\varphi+\alpha u\varphi)\,dx=\int\limits_{\Omega}h_1(x)\varphi dx, \qquad \text{for } \ \varphi\in H_0^1(\Omega), \\ \int\limits_{\Omega}(\nabla v.\nabla\psi+\beta v\psi)\,dx=\int\limits_{\Omega}h_2(x)\psi dx, \qquad \text{for } \psi\in H_0^1(\Omega), \\ u=v=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.4}$$

The linear operator T associated with (5.3) satisfies

$$\begin{aligned} T:L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \;&\rightarrow\; H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \\ (h_1,h_2) \;&\mapsto\; T(h_1,h_2)=(u,v) \end{aligned}$$

where (u,v) is the solution of system (5.1) .

T is well defined and has property given in the next proposition.

Proposition 5.1. *T is continuous if*

$$\|T\,(h)\|_U\leq\|h\|_V$$

where $h=(h_1,h_2)\in V$.

Proof. Let

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2=\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\leq\int\limits_{\Omega}h_1(x)\,|u|\,dx, \quad u\in H_0^1(\Omega) \\ \|v\|_{H_0^1}^2=\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^2\,dx\leq\int\limits_{\Omega}h_2(x)\,|v|\,dx, \quad v\in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

then, we have

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2\leq\|h_1\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\|h_1\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1} \\ \|v\|_{H_0^1}^2\leq\|h_2\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\leq\|h_2\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1}\,, \end{cases}$$

since

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 , \\ \\ \|v\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2 . \end{cases}$$

Thus

$$\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

This means that

$$\|(u,v)\|_U = \|T(h)\|_U \leq \|h\|_V .$$

□

The following operator is well defined

$$F : U \to V$$

$$(u,v) \mapsto (f(\nabla v), g(\nabla u)) .$$

Let us assume that F is lipschitz and continuous, i.e., there exists a constant $c > 0$ such that for any $\varphi, \psi \in U$,

$$\|F(\varphi) - F(\psi)\|_V \leq c\,\|\varphi - \psi\|_U . \tag{5.5}$$

Lemma 5.1. If (5.5) is satisfied, then F is compact.

Proof. let $M \subset U$ be a bounded set and $\{(w_{1,n}, w_{2,n})\}_{n=1}^{+\infty} \subset F(M)$ and arbitrary sequence. Let $\{(u_n, v_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$ be such that

$$F(u_n, v_n) = (f(\nabla v_n), g(\nabla u_n)) = (w_{1,n}, w_{2,n}) ,$$

the reflexivity of U implies that $(u_n, v_n) \to (u,v)$ in U at least for a subsequence. It follows from theorem (Rellich-Kondrachov) that $(u_n, v_n) \to (u,v)$ in V.

F is continuous from U into V. then

$$(w_{1,n}, w_{2,n}) \to F(u,v) \text{ in } V,$$

F is a compact operator. □

6 A priori bounds for solutions of (5.1)

The following operator is well defined

$$K : U \to U$$

where

$$K = T \circ F$$

It is clear that K is compact and continuous operator.

Define the following homotopy

$$H(t,u,v)=(u,v)-tK(u,v)$$

clearly

$$H:[0,1]\times U\to U.$$

Is a compact homotopy and moreover the system (5.1) is equivalent to the following problem

$$(u,v)\in U,\quad (u,v)-K(u,v)=0.$$

Lemma 6.1. There exist $R>0$ such that

$$\begin{cases} \forall t\in[0,1]\,,\forall\,(u,v)\in U \\ \\ H(t,u,v)=0\ \Rightarrow \|(u,v)\|_{U}\le R. \end{cases}$$

Proof. Let

$$H(t,u,v)=0$$

this means that

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla w_1+\alpha\int\limits_{\Omega}uw_1=t\int\limits_{\Omega}f(\nabla v)w_1, & w_1\in H_0^1(\Omega), \\ \\ \int\limits_{\Omega}\nabla v\nabla w_2+\beta\int_{\Omega}vw_2=t\int\limits_{\Omega}g(\nabla u)w_2, & w_2\in H_0^1(\Omega), \\ \\ u=v=0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Let $w_1=u$, $w_2=v$. And using (5.2) we obtain

$$\begin{cases} \|u\|^2_{H_0^1}+\left(\alpha-\frac{(c_1)^2}{2}\right)\|u\|^2_{L^2}\le\frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1}+f(0)\sqrt{\Omega}\,\|u\|_{L^2}\,, \\ \\ \|v\|^2_{H_0^1}+\left(\beta-\frac{(c_2)^2}{2}\right)\|v\|^2_{L^2}\le\frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1}+g(0)\sqrt{\Omega}\,\|v\|^2_{L^2}\,, \end{cases}\quad \text{For } (u,v)\in U.$$

Let

$$\begin{cases} \alpha^1=\left(\alpha-\frac{(c_1)^2}{2}\right)>0, \\ \\ \beta^1=\left(\beta-\frac{(c_2)^2}{2}\right)>0. \end{cases}$$

We have

$$\begin{cases} \|u\|^2_{H_0^1}+\alpha^1\|u\|^2_{L^2}\le\frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1}+f(0)\sqrt{\Omega}\,\|u\|_{L^2} \\ \\ \|v\|^2_{H_0^1}+\beta^1\|v\|^2_{L^2}\le\frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1}+g(0)\sqrt{\Omega}\,\|v\|_{L^2}\,. \end{cases}\quad \text{For } (u,v)\in U.$$

The addition give

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|_{H_0^1}^2+\|v\|_{H_0^1}^2\right)+a\left(\|u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2\right)\leq b\sqrt{\Omega}\left(\|u\|_{L^2}+\|v\|_{L^2}\ \right).$$

Where

$$\begin{cases} a=\min(\alpha^1,\beta^1) \\ \\ b=\max(f(0),g(0)). \end{cases}$$

Hence we obtain

$$\frac{1}{2}\left\|(u,v)\right\|_U^2+a\left\|(u,v)\right\|_V^2\leq 2B\left\|(u,v)\right\|_V.$$

It is clear that

$$\|(u,v)\|_V\leq\frac{2B}{a}.$$

Finally we get

$$\|(u,v)\|_U\leq\frac{2\sqrt{2}B}{\sqrt{a}}=R.$$

□

Theorem 6.1. The existence of at least one solution of (5.1) would follow from

$$\deg(H(1,.,.),B\left(0,R\right),0)\neq 0.$$

We use the homotopy invariance property of the degree.

Proof. Let

$$B\left(0,R\right)=\left\{(u,v)\in U,\|(u,v)\|_U<R\right\},$$

By invariance of the topological degree we have

$$t\in[0,1]\,,\ \ \deg(H(t,.,.),B\left(0,R\right),0),$$

is constant.

In particular $t=0$. By the homotopy invariance property, we have

$$\deg(H(0,.,.),B\left(0,R\right),0)=\deg(H(1,.,.),B\left(0,R\right),0)=1.$$

□

Acknowledgments

The authors would like to thank the reviewer for his expertise.

References

[1] C.O. Alves, D.G. de Figueiredo. Nonvariational elliptic systems. Disc. Cont. Dynamical Syst., 2002, 8(2): 289 - 302.

[2] L. Boccardo, D.G. de Figueiredo. Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations. Nonlinear Diff. Eqn. Appl., 2002, 9: 309 - 323.

[3] Ph. Clément, D.G. de Figueiredo, E. Mitidieri. Positive solutions of semilinear elliptic systems. Commun. Part. Diff. Eqns., 1992, 17: 923 - 940.

[4] D.G. de Figueiredo. Semilinear Elliptic Systems. Lectures at the International School on Nonlinear Differential Equations, Trieste-Italy, October 2006.

[5] D.G. de Figueiredo, B. Ruf. Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth. Med. J. Math., 2004, 1: 417 - 431.

[6] D.G. de Figueiredo, J. Yang. A priori bounds for positive solutions of a non-variational elliptic systems. Commun. PDE, 2001, 23(11&12): 2305 - 2322.

[7] P. Drabek, J. Milota. Methods of Nonlinear Analysis; Applications to Diferential Equations. Birkhauser Advanced Texts, Basel, 2007.

[8] Th. Gallouet, O. Kavian. Resultats d'existence et de non-existence pour certains problemes demi-linéaires a l'infini. Ann. Fac. se. de toulouse, 1981.

[9] J. Leray, J. Schauder. Topologie et equations fonctionnelles. Ann. se. Fc. Nom.Sup., 1934, 51: 45 - 78.

[10] A. Moussaoui, B. Khodja. Existence results for a class of semilinear elliptic systems. J. Partial Dif. Eqts., 2009, 22(2): 201 - 246.

[11] D. O'Regan, R. Precup. Theorems of Leray-Schauder Type and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, Volume 3, 2001.