

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

Faculté des Sciences

Département des Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHEMATIQUES

Option : Mathématiques appliquées

Présentée et soutenue par

LAGRAF SAMIRA

Méthodes variationnelles pour les problèmes avec contraintes de type inégalité.

Thèse dirigée par Pr SISSAOUI HOCINE

soutenue le 16-6-2013

Jury :

<i>Président :</i>	HAIOUR Mohamed	PR	U.B.M.ANNABA
<i>Rapporteur :</i>	SISSAOUI Hocine	PR	U.B.M.ANNABA
<i>Examineur :</i>	AISSAOUI Mohamed Zine	PR	U.GUELMA
<i>Examineur :</i>	BOULBRACHENE Messaoud	PR	U.S.Q.OMAN
<i>Examineur :</i>	GHANEM Redouane	M.C.A.	U.B.M.ANNABA
<i>Examineur :</i>	NOUAR Ahmed	M.C.A.	U.SKIKDA

Remerciements

Pour commencer je tiens à remercier infiniment le Pr Sissaoui , qui m'a guidé tout le long de ces années pour l'aboutissement de cette thèse et qui a toujours fait preuve de patience et de compréhension. Je ne lui serai jamais assez reconnaissante.

Je tiens à exprimer ma gratitude au Pr Boulbrachéne, qui malgré la distance a été présent de par ses suggestions et ses conseils.

Je remercie le Pr Haiour qui a bien accepté de présider cette soutenance.

Je remercie aussi le Pr Aissaoui et le Dr Ghanem pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Un remerciement particulier à Mr Nouar pour ses encouragements.

Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Résumé :

Pour résoudre des problèmes avec contraintes de type inégalité formulés par les inéquations variationnelles de première espèce, plusieurs algorithmes ont été proposés. On s'est intéressé à trois algorithmes classiques : approximations successives , pénalisation et Lagrangien. Des résultats sont présentés pour des problèmes de type obstacle. La région de contact aussi a été retrouvée pour chaque problème.

Abstract :

To resolve problems with constrains of inequalities type formulated by variational inequalities ,several algorithms are proposed, we choosed three classical algorithms : successive approximations, penalty and Lagrangian. Resulats are presented for problems of obstacle type. The conact region was found also for those problems.

ملخص

لحل مسائل ذات قيود من صنف متراجحة، معرفة بمتراجحات تغايرية من الصنف الأول، اقترحت عدة خوارزميات ، درسنا ثلاث خوارزميات كلاسيكية : التقريبات المتتالية، المعاقبة، لأغرنج. عرضنا النتائج بالنسبة لمسائل من الصنف حاجز وجدنا ايضاً منطقة التماس في كل حالة.

Table des matières

0.1	Introduction	5
1	Inéquations variationnelles elliptiques et leur approximation	6
1.1	Introduction	6
1.2	Hypothèses et définitions :	6
1.3	Approximation des inéquations variationnelles	10
1.3.1	Approximation de Galerkin	11
2	Algorithmes d'optimisation	13
2.1	Introduction	13
2.2	Les approximations successives	13
2.3	Méthode de pénalisation	14
2.4	Méthode du Lagrangien	16
3	Problème de type obstacle	18
3.1	Introduction	18
3.2	Description du problème	18
3.2.1	Régularité de la solution du problème de l'obstacle	19
3.3	Méthode des éléments finis	20
3.3.1	Approximation de K et de V	21
3.3.2	Discrétisation du problème de l'obstacle par la méthode des éléments finis	23
3.3.3	Applications des différentes méthodes de résolution au problème de l'obstacle	24
3.4	Expérimentations numériques	28
3.4.1	Premier problème	28
3.4.2	Deuxième problème	33
3.4.3	Troisième problème	35
4	Problème de Signorini	39
4.1	Introduction	39
4.2	Définition du problème	39

4.2.1	Existence et régularité de la solution	40
4.2.2	Discrétisation par éléments finis	40
4.2.3	Discrétisation du problème par éléments finis	41
4.3	Description des algorithmes de résolution	41
4.3.1	Approximation successives	42
4.3.2	Pénalisation	43
4.3.3	Méthode du Lagrangien	44
4.4	Expérimentations numériques	45
4.4.1	Premier exemple	45
4.4.2	Second exemple	47

Conclusions et perspectives	52
------------------------------------	-----------

0.1 Introduction

On rencontre les problèmes avec contraintes de type inégalité dans des domaines variés (mécanique, physique, économie, contrôle optimal, etc. . .)

Ces problèmes ont fait l'objet de beaucoup d'études théoriques [5],[7],[9],[10], pour n'en citer que les plus importantes. La résolution analytique de ces problèmes étant quasi-impossible, des études numériques ont été faites dans ce domaine [1], [2],[11],[12], les éléments finis ont été proposés pour résoudre ces problèmes [6],[13].

Dans ce travail, on a étudié deux problèmes de ce type : le problème de l'obstacle et le problème de Signorini qui sont les problèmes les plus étudiés de l'analyse numérique et possèdent différentes formulations mathématiques[24]. Nous avons considéré la formulation en I.V. de ces problèmes. Cette formulation est la plus générale et possède plusieurs avantages. Nous proposons dans cette thèse d'utiliser trois algorithmes itératifs de résolution numérique pour ces problèmes discrétisés par la méthode des éléments finis triangulaires linéaires.

Notre objectif principal est, d'une part de résoudre ces problèmes par trois algorithmes classiques simples (approximations successives, pénalisation et multiplicateurs de Lagrange), et d'autre part, de déterminer la région de contact très utile sur le plan pratique.

Cette thèse comporte quatre chapitres, le premier chapitre est un rappel sur les inéquations variationnelles. Le second chapitre est consacré aux trois algorithmes simples et efficaces de résolution. Dans le troisième chapitre, on présente l'étude théorique du problème de l'obstacle ainsi que les principaux résultats obtenus. Le dernier chapitre contient l'étude théorique du problème de Signorini ainsi que les résultats numériques obtenus.

Chapitre 1

Inéquations variationnelles elliptiques et leur approximation

1.1 Introduction

Les inéquations variationnelles représentent une classe importante de problèmes non linéaires d'origine physique, mécanique ou autre[7]. Plusieurs auteurs ont étudié l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ces problèmes[5],[10].

On s'intéresse dans ce chapitre à la formulation en inéquation variationnelle I.V. des problèmes de types obstacle. On va rappeler les principaux résultats sur l'existence, l'unicité de la solution des I.V. ainsi que leur approximation.

On note par V et W deux espaces d'Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et par K et Q deux convexes fermés de V et W , respectivement.

1.2 Hypothèses et définitions :

Soient $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue de $V \times V$ dans \mathbb{R} , V' le dual de V et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre V et V' , et $f \in V'$.

Nous considérons le problème suivant :

$$\text{PVI} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \end{array} \right.$$

Le problème PVI est appelé inéquation variationnelle.

On définit aussi un problème plus général *PVI1* qui est équivalent au problème PVI .

Soit V un espace de Banach réflexif, et si la forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue et linéaire en v , alors $a(u, v) = (Au, v)$, où l'opérateur A est non linéaire. Il s'agit du problème :

$$\text{PVI1} \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

On dit que *PVI1* est plus général car A n'est pas obligatoirement symétrique. En plus si $a(., .)$ est symétrique, on définit une troisième formulation à ce problème

$$\text{PMIN} \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

où : $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u)$

Notre but est de rappeler les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème PVI. Pour cela on a besoin de quelques définitions.

Définition 1.1 *La forme bilinéaire $a(., .)$ est continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $M > 0$ tel que :*

$$a(u, v) \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

Définition 1.2 *La forme bilinéaire $a(., .)$ est V -elliptique sur $V \times V$ s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

Définition 1.3 *La forme bilinéaire $a(., .)$ est symétrique sur $V \times V$ si elle vérifie :*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$$

Définition 1.4 *La forme bilinéaire $a(., .)$ est positive sur $V \times V$ si elle vérifie :*

$$a(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V$$

Définition 1.5 *Un opérateur $A : V \rightarrow V'$ est fortement monotone s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

$$(Au - Av, u - v) \geq \alpha \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V$$

Définition 1.6 Un opérateur $A : V \rightarrow V'$ est continue s'il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

$$(Au - Av, w) \leq \beta \|u - v\|_V \|w\|_V \quad \forall u, v, w \in V$$

Définition 1.7 Un opérateur $A : V \rightarrow V'$ est Lipschitzien s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|Au - Av\|_{V'} \leq C \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

Définition 1.8 Le point $[u, p]$ est point selle de la fonctionnelle L sur $V \times W$, si : $L(u, b) \leq L(u, p) \leq L(v, p)$ pour tout $v \in V$ et $b \in W$.

Définition 1.9 Une suite u_i converge fortement vers u , si la norme $\|u_i - u\|$ tend vers 0 quand i tend vers ∞ .

Définition 1.10 Une suite u_i converge faiblement vers u dans V , si pour tout $f \in V'$, $f(u_i)$ tend vers $f(u)$ quand i tend vers ∞ et u est unique.

Définition 1.11 On définit un cône par : $K = \{w \in K / \lambda w \in K, \forall \lambda \geq 0\}$

On commence par un résultat fondamental d'existence et d'unicité de la solution de l'I.V. C'est le théorème de Lions-Stampachia.

On détaille la démonstration de ce résultat pour obtenir une idée sur la méthode des approximations successives qui sera décrite ultérieurement.

Théorème 1.12 [11] Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et V -elliptique et K un convexe fermé, alors il existe une solution unique du problème PVI dans K .

Démonstration : On commence par l'unicité :

Supposons qu'il y a deux solutions u_1 et u_2 de PVI. On écrit l'inégalité associée à u_1 en prenant $v = u_2$ et l'inégalité associée à u_2 en prenant $v = u_1$

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq (f, u_2 - u_1)$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq (f, u_1 - u_2)$$

On additionne les deux inéquations, on obtient :

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

La V -ellipticité de $a(., .)$ donne :

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq 0$$

Ce qui implique que :

$$u_1 = u_2$$

Pour prouver l'existence de la solution, on écrit PVI comme un problème de point fixe.

Le théorème de représentation de Riesz pour les espaces d'Hilbert implique l'existence d'un opérateur continu $A : V \rightarrow V$ tel que :

$$(Au, v) = a(u, v) \text{ pour tout } u, v \in V.$$

Alors PVI peut être réécrite sous la forme :

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \text{ pour tout } u, v \in K \quad (1.1)$$

En multipliant (1.1) par $\rho > 0$, on obtient l'inégalité équivalente :

$$(u - [u - \rho(Au - f)], v - u) \leq 0 \text{ pour tout } u, v \in K \quad (1.2)$$

Ceci est équivalent à trouver u tel que :

$$u = P_K(u - \rho(Au - f)) \quad \forall \rho > 0 \quad (1.3)$$

où P_K est un opérateur de projection de V dans K .

On introduit l'opérateur $S_\rho : V \rightarrow K$ par : $S_\rho(u) = P_K(u - \rho(Au - f))$

On réécrit l'équation (1.3) sous la forme : $u = S_\rho(u)$.

On pose $u_1, u_2 \in K$. Puisque P_K est une contraction, on a :

$$\|S_\rho(u_1) - S_\rho(u_2)\|_V^2 \leq \|u_1 - u_2\|_V^2 + \rho^2 \|A(u_1 - u_2)\|_V^2 - 2\rho\alpha(u_1 - u_2, u_1 - u_2)$$

Alors on obtient :

$$\|S_\rho(u_1) - S_\rho(u_2)\|_V^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|_V^2) \|u_2 - u_1\|_V^2$$

Ce qui implique que S_ρ est une contraction à condition que :
 $0 < \rho < 2\alpha / \|A\|_V^2$.

En prenant ρ dans cet intervalle, on obtient une solution unique du problème de point fixe (1.3) ce qui prouve l'existence de la solution de PVI. Dans ce qui suit on définit le convexe K par :

$$K = \{v \in V : b(v, w) \leq g(w), \forall w \in Q\} \quad (1.4)$$

où $b : V \times W \rightarrow IR$ est une forme bilinéaire continue, et $g \in W'$.

On introduit la formulation en inéquation variationnelles mixtes suivantes.

Trouver $(u, p) \in V \times Q$ tel que :

$$a(u, v) - (f, v) + b(v, p) = 0 \quad \forall v \in V \quad (1.5)$$

$$b(u, w - p) \leq g(w - p) \quad \forall w \in Q \quad (1.6)$$

Théorème 1.13 [13] *Si K défini par (1.4) est non vide et s'il existe un réel $\delta > 0$ vérifiant :*

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v, w)}{\|v\|_V} \geq \delta \|w\|_V, \forall w \in V \quad (1.7)$$

Alors la formulation (1.5),(1.6) admet une solution unique $(u, p) \in V \times Q$.

La conditions (1.7) est appelée condition de Brezzi-Babuska.

On introduit aussi la notion du Lagrangien associé à ce problème qui sera utile ultérieurement.

Si K est donné par (1.4),alors le Lagrangien associé à (PVI) est défini par :

$$L(v, w) = J(v) + b(v, w) - g(w) \quad \forall v \in V, \forall w \in Q \quad (1.8)$$

Théorème 1.14 [13] *Si $(u, p) \in V \times Q$ est point selle du Lagrangien $L(.,.)$ défini par(1.8).Alors u est solution de PVI.*

1.3 Approximation des inéquations variationnelles

Dans cette section, on va introduire la discrétisation des I.V. par les éléments finis afin d'étudier leur convergence et leur approximation qui sera nécessaire plus tard.

1.3.1 Approximation de Galerkin

Soit $\{V_h\}_{h>0}$ une famille de sous espaces de dimension finie de V ,
et $\{K_h\}_{h>0}$ une famille de sous ensembles convexes fermés non vides de V
tel

que : $K_h \subset V_h$ pour tout h .

On dit que l'ensemble $\{K_h\}_{h>0}$ approche le sous espace K , si les conditions
suivantes sont vérifiées :

$\lim_{h \rightarrow 0} K_h = K$, si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) Si $\{v_h\}_{h>0}$ est une suite telle que : $v_h \in K_h$ pour tout $h > 0$ et $v_h \rightarrow v$
fortement dans V , si $v \in K$

2) Pour tout $v \in K$, il existe une suite $\{v_h\}_{h>0}$ telle que $v_h \in K_h$ pour tout
 $h > 0$ et $v_h \rightarrow v$ fortement dans V .

Soit le problème discret associé à PVI :

$$\text{PVI}_h \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{cases}$$

$$\text{où } K_h = \{v_h \in V_h : b(v_h, w_h) \leq g(w_h), \forall w_h \in Q_h\} \quad (1.9)$$

et Q_h est la discrétisation de Q , et W_h la discrétisation de W .

Théorème 1.15 [11] *Le problème PVI_h admet une solution unique dans K_h .*

Théorème 1.16 [11] *Sous les hypothèses précédentes sur K et K_h , on a :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$$

où u est une solution de PVI et u_h est solution de PVI_h .

On définit aussi le problème de minimisation discret associé au problème
PMIN.

$$\text{PMIN}_h \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que :} \\ J(u_h) \leq J(v_h) \text{ pour tout } v_h \in K_h \end{cases}$$

où $J(v_h) = \frac{1}{2}a(v_h, v_h) - (f, v_h)$

Lemme 1.17 [13] *Soit $K_h \subset V_h$ défini par (1.9). On suppose que
 $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ vérifient les inéquations variationnelles mixtes :*

$$a(u_h, v_h) - (f, v_h) + b(v_h, p_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (1.10)$$

$$b(u_h, w_h - p_h) \leq g(w_h - p_h) \quad \forall w_h \in Q_h \quad (1.11)$$

Alors u_h est solution de PVI_h .

Lemme 1.18 *Si le couple $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ est point selle du Lagrangien discret défini par (1.8), alors u_h est solution du problème de minimisation $PMIN_h$.*

Chapitre 2

Algorithmes d'optimisation

2.1 Introduction

Les algorithmes d'optimisation cherchent à déterminer la solution maximale ou minimale d'un problème donné par une fonction dans un espace donné. Cette optimisation peut se faire avec ou sans contraintes. Plusieurs schémas numériques ont été proposés pour les I.V. On peut citer les références [12],[18],[21] à titre d'exemple. Dans [12], les méthodes de résolution sont variées :relaxation avec projection, méthodes du gradient, méthodes de pénalisation et la méthode de dualité. Dans [23] la pénalisation a été étudiée de manière détaillée. Dans ce chapitre, on expose le principe des trois méthodes de résolution : approximations successives, pénalisation et la méthode du Lagrangien. Ce sont des algorithmes classiques simples et capables de produire des résultats numériques acceptables. D'autre part, leur mise en oeuvre sur ordinateur est relativement facile et permet d'envisager le développement de logiciels scientifiques performants à moindre coût.

2.2 Les approximations successives

Cette méthode est basée sur le théorème de Lions Stampacchia (théorème 1.12). D'après ce théorème, l'I.V. est équivalente à l'équation du point fixe :

$$u = S_\rho(u) \quad u \in K \tag{2.1}$$

où l'opérateur $S_\rho(v) = P_K(v - \rho(Av - f))$, $\forall v \in V$.
 A est l'opérateur du problème *PVI1* et P_K la projection sur le convexe K .

D'après le théorème 1.12, pour certaines valeurs de ρ l'opérateur $S_\rho(u)$ est une contraction [1] et par suite l'équation (2.1) admet une solution unique $u \in K$, qui est aussi solution de l'I.V. En plus, ce même théorème donne :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{(p)} - u\|_V = 0$$

où la suite $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u^{(0)} \in K \\ u^{(p+1)} = S_\rho(u^{(p)}) \end{cases} \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

2.3 Méthode de pénalisation

Définition 2.1 On dit que la fonction $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si :
 $\forall (x_1, x_2) \in V \times V, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$

Définition 2.2 La fonctionnelle convexe $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est propre si $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in V$ et f n'est pas identiquement égal à ∞

Définition 2.3 La fonctionnelle convexe $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi continue inférieurement en x si pour toute suite $(x_i)_{i \geq 0}$ convergente vers x , on a

$$f(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} f(x_j)$$

Soit $K \subset V$ défini par (1.4) et soit le problème correspondant à la formulation variationnelle mixte (1.5), (1.6) :

Trouver $(u_\epsilon, p_\epsilon) \in V \times Q$

$$a(u_\epsilon, p_\epsilon) - (f, v) + b(v, p_\epsilon) = 0 \quad \forall v \in V \quad (2.3)$$

$$b(u_\epsilon, w - p_\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}(p_\epsilon, w - p_\epsilon) \leq g(w - p_\epsilon) \quad \forall w \in Q \quad (2.4)$$

Ici (\cdot, \cdot) est le produit scalaire dans V et $\epsilon > 0$ est un paramètre fixé qu'on appelle paramètre de pénalisation. Le problème (2.3), (2.4) est le problème pénalisé de PVI. Donc PVI est transformé en un problème écrit sous forme d'équation variationnelle.

Pour simplifier la notation, on identifie W avec son dual W' . On pose $B : V \rightarrow W$ défini par :

$$(Bv, w) = b(v, w) \quad \forall v \in V, \forall w \in W$$

Alors (2.4) peut être réécrit en :

$$(p_\epsilon - \epsilon(Bu_\epsilon - g), w - p_\epsilon) \geq 0 \quad \forall w \in Q \quad (2.5)$$

Soit $P_Q : W \rightarrow Q$ la projection de W sur le convexe fermé $Q \subset W$. En utilisant certaines propriétés [13], on pose :

$$p_\epsilon = \epsilon P_Q(Bu_\epsilon - g) \quad (2.6)$$

La formulation mixte (2.3),(2.4) est équivalente à (2.6) et :

$$(p_\epsilon - \epsilon(Bu_\epsilon - g), w - p_\epsilon) \geq 0$$

L'équation (2.5) est réécrite en :

$$((Au_\epsilon - f), v) + \epsilon(P_Q(Bu_\epsilon - g), Bv) = 0 \quad \forall v \in V \quad (2.7)$$

Celle ci est la forme pénalisée du problème *PVI*. Donc, on a transformé le problème originel *PVI* en une équation variationnelle. Le paramètre positif ϵ est appelé paramètre de pénalisation

On va maintenant étudier l'existence et la convergence de u_ϵ quand $\epsilon \rightarrow \infty$. Pour cela, on admet que la condition de Babuska-Brezzi est vérifiée.

Lemme 2.4 [13] *Pour tout $\epsilon > 0$, le problème pénalisé (2.7) admet une solution unique u_ϵ de V .*

Lemme 2.5 [13] *On suppose que l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ est fortement monotone. Alors pour tout $\epsilon > 0$, le problème (2.7) admet une solution unique $u_\epsilon \in V$.*

Théorème 2.6 [13] *On suppose K non vide et la condition de Babuska-Brezzi vérifiée. Soit l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ fortement monotone. Alors la solution u_ϵ solution du problème (2.6) converge quand $\epsilon \rightarrow \infty$ vers u solution du problème *PVI*. En plus, les éléments p_ϵ de Q définis par (2.3),(2.5) convergent vers p solution du problème mixte (1.5),(1.6).*

Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u - u_\epsilon\|_V \leq C\epsilon^{-1} \quad \text{et} \quad \|p - p_\epsilon\|_Q \leq C\epsilon^{-1}$$

Maintenant, on va pénaliser le problème *PMIN*. Pour cela, soit la fonction $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et continue.

D'après [13], ceci implique l'existence de $q \in V'$ et $q_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$J(v) \geq q_0 + \langle q, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in V$$

Pour tenir compte de la contrainte $v \in K$, on introduit une fonction de pénalisation convexe $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ qui rend la fonction objectif augmentée très grande chaque fois que la contrainte est violée.

$$\Psi(v) = \begin{cases} > 0 & \text{si } v \notin K \\ = 0 & \text{si } v \in K \end{cases}$$

Le problème *PMIN* est alors remplacé, par un problème sans contraintes :

$$\min_{v \in V} [J(v) + \epsilon \Psi(v)] \quad (2.8)$$

où $\epsilon > 0$ est un paramètre de pénalisation fixé de la même façon que dans (2.6) .

Théorème 2.7 [13] *Soit $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ une suite de solutions du problème (2.8). Si cette suite converge faiblement vers une limite u quand $\epsilon \rightarrow +\infty$, la limite u représente la solution de *PMIN*.*

2.4 Méthode du Lagrangien

Le principe de cette méthode est obtenu à partir de la formulation mixte (1.5),(1.6). L'algorithme de la méthode du Lagrangien est basé sur :

Trouver $u^k \in V$ et $p^k \in Q$ tel que :

$$a(u^k, v) - (f, v) + b(u^k, v) = 0 \quad \forall v \in V \quad (2.9)$$

$$b(u^k, w - p^k) - \frac{1}{\rho}(p^k - p^{k-1}, w - p^k) \leq g(w - p^k) \quad \forall w \in Q \quad (2.10)$$

pour $k = 1, 2, \dots$. Ici ρ est un paramètre positif fixé et $p^0 \in Q$ est choisi de manière arbitraire.

On réécrit (2.10) sous la forme :

$$(p^k - (p^{k-1} + \rho(Bu^k - g)), w - p^k) \geq 0 \quad \forall w \in Q$$

Comme pour la méthode de pénalisation, on pose $(Bu, w) = b(u, w) \quad \forall v \in V$ et $\forall w \in Q$.

Utilisant la projection P_Q définie de W dans Q , l'équation (2.9) peut être réécrite sous la forme :

Trouver $u^k \in V$ tel que :

$$a(u^k, v) - (f, v) + (p^{k-1} + \rho(Bu^k - g), Bv) = 0 \quad \forall v \in V \quad (2.11)$$

Alors, pour un $p^{k-1} \in Q$ donné, l'itéré $u^k \in V$ est obtenu comme solution de l'équation variationnelle sans contraintes (2.11). Et l'itéré $p^k \in Q$ est calculé à partir de :

$$p^k = p^{k-1} + \rho(Bu^k - g)$$

Chapitre 3

Problème de type obstacle

3.1 Introduction

Le problème de l'obstacle est un exemple typique d'inéquations variationnelles du premier type. Beaucoup de problèmes importants, tels que la torsion d'un cylindre élastique-plastique, le problème de Stefan..etc, peuvent être formulés par transformation en un problème de type obstacle. A cet effet, on suggère les références [7],[10],[11],[17], [20],[21].Puisque le problème de l'obstacle est difficile à résoudre, la solution approchée est habituellement calculée par différentes méthodes de projection, telle la relaxation [12], la méthode de la projection multiniveaux[25], méthode multigrille [14],[18], méthode de la projection pour les problèmes non linéaires [3],[9]. Dans[26] un algorithme a été proposé pour approximer à posteriori, la région de contact.

Dans ce chapitre, on commence par décrire le problème de l'obstacle, puis sa discrétisation par la méthode des éléments finis. On considère trois différents problèmes que l'on résoud par les algorithmes décrits dans le chapitre précédent.

3.2 Description du problème

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f \in L^p(\Omega)$ et $q \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \Omega \text{ tel que :} \\ -\Delta u \geq f \text{ dans } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - q) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Ce problème est appelé problème de l'obstacle. La solution u représente un petit déplacement transversal d'une membrane élastique Ω fixée le long

de sa frontière Γ , soumise à une force f et heurtant un obstacle rigide $q(x, y)$.

Le problème de l'obstacle est l'exemple type d'un problème de frontière libre que l'on peut interpréter ainsi : la solution u divise le domaine Ω en deux sous domaines :

$$\Omega = \Omega^q \cup \Omega^+$$

où

$$\Omega^q = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = q(x, y)\}$$

et

$$\Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) > q(x, y)\}$$

Ces deux sous domaines sont séparés par :

$$\Lambda = \Omega^q \cap \overline{\Omega^+} \tag{3.2}$$

qui est également une inconnue du problème qu'il faudra déterminer.

Le problème(3.1) peut être transformé en un problème à deux inconnues u et Λ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \Omega \text{ tel que :} \\ -\Delta u = f \text{ sur } \Omega^+ \\ u = q \text{ sur } \Omega^q \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Gamma \\ u|_{\Omega^+} = u|_{\Omega^q} \end{array} \right. \tag{3.3}$$

On peut réécrire ce problème sous forme variationnelle. Pour cela, on pose $V = H_0^1(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ a(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in K \end{array} \right. \tag{3.4}$$

où $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ et $F(v) = \int_{\Omega} f v dx$

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq q \text{ dans } \Omega\} \tag{3.5}$$

3.2.1 Régularité de la solution du problème de l'obstacle

Théorème 3.1 [11] *Soit Ω un borné de IR^2 de frontière suffisamment régulière. Si $f \in L^p(\Omega), 1 < p < +\infty$ et $q \in W^{2,p}(\Omega)$, alors u la solution du problème (3.4) est dans $W^{2,p}(\Omega)$.*

3.3 Méthode des éléments finis

Historiquement, les premières approches de la méthode des éléments finis ont été proposées par le mathématicien Richard Courant dans les années 1940, mais ce sont les mécaniciens qui ont développé et démontré l'efficacité de cette méthode dans les années 1950-1960. L'essor de la méthode des éléments finis repose sur deux faits fondamentaux. D'une part, les propriétés d'interpolation des éléments finis : ceux-ci permettent d'approcher des fonctions définies sur un domaine en subdivisant ce domaine puis en choisissant sur chaque grille du maillage des combinaisons linéaires de fonctions de forme (par exemple polynômiales). D'autre part, la méthode de Galerkin, qui fournit un cadre d'approximation général pour une large classe de problèmes où l'inconnue est une fonction qui doit satisfaire une ou plusieurs équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites.

Concrètement la méthode des éléments finis permet de remplacer l'espace de Hilbert V par un espace V_h de dimension fini. Le problème 'approché' posé sur V_h se ramène à une simple résolution d'un système linéaire. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de V_h de manière à ce que le sous-espace V_h soit une bonne approximation de V et que la solution u_h dans V_h de la formulation variationnelle soit 'proche' de la solution exacte u dans V . On considère une triangulation T_h , du domaine polygonal Ω de IR^2 , T_h est un ensemble fini de triangles T tels que :

$$T \subset \bar{\Omega}, \forall T \in T_h \quad \cup_{T \in T_h} T = \bar{\Omega}.$$

$$T_1^\circ \cap T_2^\circ = \phi \quad \text{et } T_1 \neq T_2$$

où T° représente l'intérieur de T

En plus, pour tout $T_1, T_2 \in T_h$ et $T_1 \neq T_2$, on a l'une ou l'autre des conditions suivantes :

- 1) $T_1 \cap T_2 \neq \phi$
- 2) T_1 et T_2 ont un seul côté commun.
- 3) T_1 et T_2 ont un seul sommet commun.

La figure 3.1 représente un maillage de l'ouvert $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$

Considérons l'espace d'éléments finis construit à partir de pôlynomes de degré 1. On établit sur Ω une triangulation T_h de triangles T , voir (figure 3.1) et soit p le pôlynome de degré 1 défini sur T par P_1 :

$$P_1 = \{p : p(x, y) = ax + by + c; (a, b, c) \in IR^3\}$$

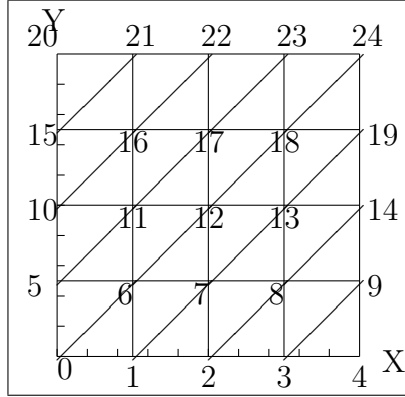


FIGURE 3.1 – Domaine de résolution

Les fonctions φ_j , $1 \leq j \leq 3$ représentent la base canonique de V_h (l'espace approchant V défini ci-dessus), et vérifiant $\varphi_j(a_i) = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} désigne le symbol de Kronecher).

Dans ce travail, on va considérer les éléments finis conformes définis comme suit :

Définition 3.2 *On dit que $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y)$ est conforme s'il est continu sur tout le triangle T de T_h et si les dérivées partielles de u_h d'ordre m (m compris entre 1 et l'ordre de dérivée le plus élevé de la fonctionnelle à discrétiser) sont continus sur tous les triangles voisins de T .*

3.3.1 Approximation de K et de V

Définissons les ensembles suivants qui seront utilisés par la suite.

$$\Sigma_h = \{i \in \bar{\Omega}, i \text{ est noeud de } T \in T_h\}$$

$$\Sigma_h^\circ = \{i \in \Sigma_h, i \notin \Gamma\}$$

$$\Sigma'_h = \{i \in \bar{\Omega}, i \text{ est milieu d'un côté de } T \in T_h\}$$

$$\Sigma_h^{\circ'} = \{i \in \Sigma'_h, i \notin \Gamma\}$$

L'espace $V = H_0^1(\Omega)$ est approché par un ensemble de sous espaces $(V_h)_h$

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_\Gamma = 0 \text{ et } v_h|_T \in P_1, \forall T \in T_h\}$$

D'après Ciarlet [6], l'espace V_h est de dimension finie.

L'approximation K_h de K est donnée par :

$$K_h = \{v_h \in V_h, v_h(P) \geq q(P), \forall P \in \Sigma_h\}$$

Proposition 3.3 [11] *K_h est un ensemble convexe, non vide et fermé de V_h .*

Le problème discret approchant (3.4) est donné par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f_h, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (3.6)$$

On discrétise aussi PVI1 par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que :} \\ (A_h u_h, v_h - u_h) \geq (f_h, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (3.7)$$

où $A_h = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$, $a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega$, et $f_h = (f_i)_{1 \leq i \leq N}$, $f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega$.

Proposition 3.4 [11] *Le problème (3.6) admet une solution unique.*

Théorème 3.5 [11] *On suppose que les angles de la triangulation T_h sont uniformément bornés par $\theta_0 > 0$ quand $h \rightarrow 0$; alors $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$*

où u_h et u sont des solutions de (3.6) et (3.4) respectivement.

Théorème 3.6 [8] *Il existe une constante C , indépendante du pas h et de la solution u_h de (3.6), qui satisfait :*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch$$

L'approximation de la formulation mixte donnée par (1.5),(1.6) s'écrit :
Trouver $(u_{h\epsilon}, p_{h\epsilon}) \in V_h \times Q_h$

$$a(u_{h\epsilon}, v_h) - (f, v_h) + b(v_h, p_{h\epsilon}) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.8)$$

$$b(u_{h\epsilon}, w - p_{h\epsilon}) - \frac{1}{\epsilon}(p_{h\epsilon}, w - p_{h\epsilon}) \leq g(w - p_{h\epsilon}) \quad \forall w \in Q_h \quad (3.9)$$

Comme pour le cas continu, l'inégalité (3.9) peut être réécrite grâce à l'opérateur de projection $P_{Q_h} : W_h \rightarrow Q_h$.

Alors (3.8),(3.9) constitue la méthode de pénalisation définie par :

$$(Au_{h\epsilon}, v_h) - (f, v_h) + \epsilon(P_{Q_h}(Bu_{h\epsilon} - g, Bv_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.10)$$

Théorème 3.7 [13] *Soit $u_{h\epsilon} \in V_h$ solution de (3.10). On suppose que les éléments finis vérifient la condition de Babuska-Brezzi uniformément, i.e., il existe $\delta > 0$, indépendant de h , tel que :*

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{W_h}} \geq \delta \|w_h\|_{W_h} \quad \forall w_h \in W_h$$

Alors il existe une constante positive telle que $\|u_h - u_{h\epsilon}\| \leq C\epsilon^{-1}$

Ici $u_h \in K_h$ représente la solution du problème discret (3.6)

3.3.2 Discrétisation du problème de l'obstacle par la méthode des éléments finis

La solution exacte du problème (3.4) est, en général, difficile voire impossible à calculer. Nous cherchons donc une solution approchée en utilisant la méthode des éléments finis (voir section 3 de ce chapitre).

On va étudier en détail la structure du problème de dimension finie obtenu. L'espace V_h est engendré par les fonctions de base $\{\varphi_{kl}\}_{k,l=1}^{N \times M}$, i.e. tout v_h de V_h s'écrit :

$$v_h(x) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M v_{kl} \varphi_{kl}(x)$$

Alors l'inéquation (3.6) est équivalente au système :

$$a \left(\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M u_{kl} \varphi_{kl}, \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{kl} - u_{kl}) \varphi_{kl} \right) \geq \left(f, \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{kl} - u_{kl}) \varphi_{kl} \right) \quad (3.11)$$

pour tout $v_h = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M v_{kl} \varphi_{kl} \in K_h$

$$\text{où } R_h = \left\{ v_h \in V_h : v_h(p^{ij}) \geq q(p^{ij}), i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M} \right\} \quad (3.12)$$

Ici p^{ij} , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, sont les points intérieurs du maillage du domaine Ω discrétisant V_h .

Le problème (3.7), après la discrétisation de (3.12), donne le problème de complémentarité suivant : Pour tout $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M a(\varphi_{ik}, \varphi_{lj}) u_{ij} \geq f_{ij} \\ u_{ij} \geq q_{ij} \\ \left(\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M a(\varphi_{ik}, \varphi_{lj}) u_{ij} - f_{ij} \right) (u_{ij} - q_{ij}) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

avec $a(\varphi_{jk}, \varphi_{li}) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{jk} \nabla \varphi_{li} dx$, $f_{ij} = \int_{\Omega} f \varphi_{ij} dx$ et $q_{ij} = q(p^{ij})$

On peut également discrétiser le problème de minimisation $PMIN_h$

On obtient la matrice

$$\mathbf{AA} = \begin{pmatrix} B & C & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & 0 & \dots \\ 0 & C & B & C & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B & C \\ 0 & \dots & \dots & C & B \end{pmatrix}$$

tel que :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

une matrice carrée tridiagonale $N \times M$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

une matrice carrée tridiagonale $N \times M$

3.3.3 Applications des différentes méthodes de résolution au problème de l'obstacle

La méthode des approximation successives

R_h étant donné par (3.12), on applique la formule (2.2)

$$\begin{cases} u^{(0)} \in K_h \\ u_h^{(m+1)} = P_{K_h}(u_h^{(m+1)} - w(AAu_h^{(m)} + f_{ij})) \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.14)$$

Comme $u \in R_h$ donné par (3.12), et utilisant la relaxation (3.14) s'écrit :

$$u_{ij}^{(m+1)} = \max(q_{ij}, u_{ij}^{(m)} - w_{ij}(\sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{j-1} a_{ijkl} u_{ij}^{(m)} + \sum_{k=i}^N \sum_{l=j}^M a_{ijkl} u_{ij}^{(m)} + f_{ij})) \quad (3.15)$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$,

on pose :

$$w_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} - w_{ij}(\sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{j-1} a_{ijkl} u_{ij}^{(m)} + \sum_{k=i}^N \sum_{l=j}^M a_{ijkl} u_{ij}^{(m)} + f_{ij}) \quad (3.16)$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$

La discrétisation sous forme matricielle donne :

$$w_{ij}^{(m+1)} = (1 - \omega)u_{ij}^{(m)} - \frac{w}{4}(u_{i-1j}^{(m+1)} + u_{ij-1}^{(m+1)} + u_{i+1j}^{(m)} + u_{ij+1}^{(m)} + f_{ij}) \quad (3.17)$$

pour tout $i = 1, 2 \dots N, j = 1, 2 \dots M$

Algorithme 3.1 Etapes de l'algorithme

étape1 : On fixe u^0 .

étape2 : On calcule

$u^{(m)} = (u_{ij}^{(m)}) \in IR^{N \times M}$, solution de :

$$u_{ij}^{(m)} = \max(q_{ij}, (1-w)u_{ij}^{(m-1)} + (w/4)(u_{i-1j}^{(m)} + u_{ij-1}^{(m)} + u_{i+1j}^{(m-1)} + u_{ij+1}^{(m-1)} + f_{ij}))$$

étape3 : On fixe un critère d'arrêt. Si $u^{(m)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête, sinon, on pose $m=m+1$ et on retourne à l'étape2

w est le paramètre de relaxation.

Remarque : Dans tout ce travail, on a considéré le critère d'arrêt comme étant : $\frac{\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|}{\|u^{(m+1)}\|} < 5 \times 10^{-3}$.

La norme discrète utilisée est la norme infinie définie par :

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}| \text{ où } A = (a_{ij})$$

Méthode de pénalisation

On propose dans cette section la méthode de la pénalisation pour résoudre le problème discret (3.6)

On pose $W = L^2(\Omega)$, le cône Q est défini par : $Q = \{w \in L^2(\Omega) : w \geq 0\}$

$B : V = H_0^1(\Omega) \longrightarrow W = L^2(\Omega)$ est l'opérateur identité.

On définit $[\cdot]_+ : W \longrightarrow Q$ par :

$$[w]_+(x) = \max \{w(x), 0\} \text{ p.p dans } \Omega.$$

L'opérateur de projection est donné par : $P_Q w = [w]_+ \forall w \in W$

Donc le problème pénalisé (2.7) (voire chapitre précédent) s'écrit sous la forme :

$$\int_{\Omega} \nabla u_p \cdot \nabla v dx - \epsilon \int_{\Omega} [q - u_{\epsilon}]_+ v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.18)$$

D'après [13], on a une estimation en L^∞ de la convergence de la méthode de pénalisation appliquée au problème de type obstacle (3.4)

Théorème 3.8 [13] Soit $\Omega \subset IR^2$ un domaine convexe polygonal de frontière Γ . Soit $f \in L^\infty(\Omega)$ et $q \in W^{2,\infty}(\Omega)$ avec $q \leq 0$ au sens des traces. Considérons le problème de l'obstacle (3.4), et en forme pénalisée donnée par l'équation (3.18).

Alors l'équation variationnelle (3.18) admet une solution unique $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $\epsilon > 0$ et :

$$\|u - u_\epsilon\|_{H_0^1} \leq \epsilon^{-1} (\|q\|_{W^{2,\infty}} + \|f\|_{L^\infty})$$

Choix du paramètre de pénalisation [23]

Pour assurer la convergence donnée par le théorème, on choisit le paramètre de pénalisation : $\epsilon = \epsilon(h) = h^{-4}$

Il existe alors deux cas :

Soit $u_{ij}^{(m)} \geq q_{ij}$ alors $(q_{ij} - u_{\epsilon ij})^+ = 0$, ce qui donne : $\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M a_{kl ij} u_{\epsilon ij} = f_{ij}$
Après application de la relaxation, on a :

$$u_h^{(m+1)} = (1-\omega)u_{ij}^{(m)} + \frac{\omega}{a_{iiii}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{j-1} a_{kl ij} u_{ij}^{(m+1)} + \sum_{k=i+1}^N \sum_{l=j+1}^M a_{ijkl} u_{ij}^{(m)} + f_{ij} \right) \quad (3.19)$$

pour $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$

Soit $u_{ij}^{(m)} < q_{ij}$ alors $(q_{ij} - u_{\epsilon ij})^+ = q_{ij} - u_{\epsilon ij}$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M a_{ijkl} u_{\epsilon ij} + \epsilon u_{ij}^{(m)} = \epsilon q_{ij} + f_{ij}$$

En appliquant toujours la relaxation, on obtient :

$$u_{ij}^{(m+1)} = \frac{1}{a_{iiii} + \epsilon} \left(\sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{j-1} a_{ijkl} u_j^{(m+1)} + \sum_{j=i+1}^N a_{ijkl} u_{ij}^{(m)} + f_{ij} + \epsilon q_{ij} \right) \quad (3.20)$$

pour $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$

Algorithme 3.2 : étape1 : On fixe u^0 .

étape2 : On calcule $u^{(m)} = (u_{ij}^{(m)}) \in IR^{N \times M}$, solution de :

On distingue deux cas :

Si $u_{ij}^{(m)} \geq q_{ij}$, on a :

$$u_{ij}^{(m)} = (1-w) u_{ij}^{(m-1)} + \frac{w}{4} (u_{i-1j}^{(m)} + u_{ij-1}^{(m)} + u_{i+1j}^{(m-1)} + u_{ij+1}^{(m-1)} + f_{ij})$$

Si $u_{ij}^{(m)} < q_{ij}$, alors on a :

$$u_{ij}^{(m)} = \frac{1}{4+\epsilon} (u_{i-1j}^{(m)} + u_{ij-1}^{(m)} + u_{i+1j}^{(m-1)} + u_{ij+1}^{(m-1)} + f_{ij} + \epsilon q_{ij})$$

étape3 : Si $u^{(m)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête, sinon, on pose $k=k+1$ et on retourne à l'étape2

Méthode du Lagrangien

Pour le problème de l'obstacle (3.4), on a déjà précisé que l'opérateur de projection $P_Q : W \rightarrow Q$ est : $P_Q w = [w]_+ \quad \forall w \in W$

Le schéma itératif du Lagrangien s'écrit :

Trouver $u^m \in V = H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla u^k \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} [p^{k-1} + \rho(q - u^k)]_+ v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V$$

où $p^k \in Q$ est défini par :

$$p^k = [p^{k-1} + \rho(q - u^k)]_+$$

La convergence de la méthode pour le problème de l'obstacle est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.9 [13] Soit $(u, p) \in V \times Q$ solution de la formulation variationnelle mixte (1.5), (1.6) et soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur fortement monotone. Alors quel que soit l'itéré initial $p^0 \in Q$, le schéma (2.9), (2.10) est bien défini et :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u\| = 0$$

En plus, si la condition de Babuska-Brezzi (1.7) est vérifiée, on a également :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|p^k - p\| = 0$$

et les estimations :

$$\|p^k - p\| \leq \frac{1}{1 + c_1 \rho} \|p^{k-1} - p\|$$

$$\|u^k - u\| \leq c_2 \rho^{-1} \|p^{k-1} - p\|$$

pour tout $k = 1, 2, \dots$ et c_1, c_2 des constantes positives.

Donc l'algorithme s'écrit, en utilisant toujours le principe de la relaxation :

Algorithme 3.3

étape1 : On choisit p^0 et on fixe u^0 .

étape2 : On calcule

$u^{(m)} = (u_{ij}^{(m)}) \in IR^{N \times M}$, solution de :

$$u_{ij}^{(m)} = (1 - w) u_{ij}^{(m-1)} + \frac{w}{4} (u_{i-1j}^{(m)} + u_{ij-1}^{(m)} + u_{i+1j}^{(m-1)} + u_{ij+1}^{(m-1)} + f_{ij} - p_{ij}^{(m)})$$

étape3 : On calcule p^{m+1} donné par :

$$p_{ij}^{(m+1)} = \max \left(0, p_{ij}^{(m)} + \rho \left(u_{ij}^{(m)} - q_{ij} \right) \right) \text{ où } \rho > 0 \text{ est donné.}$$

étape4 : On fixe un critère d'arrêt. Si $u^{(m)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête, sinon, on pose $m = m + 1$ et on retourne à l'étape2.

3.4 Expérimentations numériques

Dans cette section, on applique les trois algorithmes avec des paramètres (ϵ pour la pénalisation, ω pour la relaxation et ρ pour le lagrangien) 'optimaux', c'est à dire, donnant la convergence optimale en un minimum d'itérations.

3.4.1 Premier problème

Le premier exemple [24] est celui de l'équilibre de petits déplacements verticaux d'une membrane élastique fixée le long de sa frontière et déplacée par un obstacle rigide :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u \geq 0 \\ \text{et } u(x, y) \leq q(x, y) \end{cases}$$

où

$$q(x, y) = \begin{cases} -0.4 + (0.25 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.009 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$

Pour les 3 différentes méthodes, on compare la solution aux points représentés sur la figure ci-dessous. Pour simplifier les calculs, on utilisera les symétries axiale et diagonale.

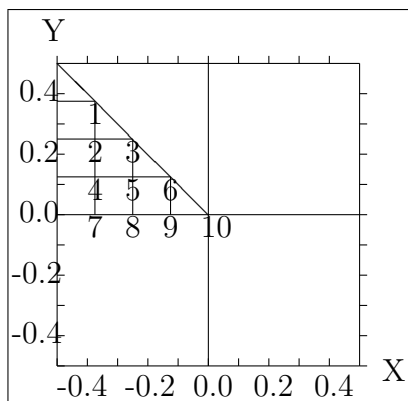


FIGURE 3.2 – Domaine de résolution du problème IP_1

Les paramètres utilisés dans chaque algorithme sont obtenus par expérimentation numérique et sont généralement le résultat d'un jeu d'équilibre avec le paramètre de discrétisation.

Résultats obtenus par la méthode des approximations successives

Pour le paramètre de relaxation $\omega = 1.87$

Pas	h=1/8	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	61	71	91	111	397
1	0.00631396	0.00642734	0.00651700	0.00653688	0.00654088
2	0.01262870	0.01280006	0.01296262	0.01299773	0.01300458
3	0.02603917	0.02637633	0.02670335	0.02677671	0.02679083
4	0.01815900	0.01819967	0.01837961	0.01841358	0.01841948
5	0.03944997	0.03958548	0.03999158	0.04007447	0.04008984
6	0.06770716	0.06770716	0.06770716	0.06783936	0.06784553
7	0.02055233	0.02047905	0.02064049	0.02066651	0.02067006
8	0.04589451	0.04603467	0.04641024	0.04647788	0.04648622
9	0.08472291	0.08412291	0.08412291	0.08412291	0.08412291
10	0.09999994	0.09999994	0.09999994	0.09999994	0.09999994

TABLEAU 3.1 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR IP_1

Résultats obtenus par la méthode du Lagrangien

Pour le paramètre de relaxation $\omega = 1.3$ et $\rho = 10E - 03$

Pas	h=1/8	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	285	698	1071	1763	4469
1	0.00636262	0.00643205	0.00652008	0.00653717	0.00654103
2	0.0127260	0.01281050	0.01296871	0.01299825	0.01300483
3	0.02626811	0.02639563	0.02672047	0.02677724	0.02679114
4	0.01827517	0.01821405	0.01838466	0.01841424	0.01841976
5	0.03981641	0.03962164	0.04001288	0.04007445	0.04009007
6	0.06903102	0.06788524	0.06787314	0.06783779	0.06784588
7	0.02056144	0.02047905	0.02064049	0.02066651	0.02067006
8	0.04569505	0.04608258	0.04639695	0.04647805	0.04648641
9	0.08257862	0.08380959	0.08412051	0.084128536	0.08412438
10	0.09772175	0.1003737	0.09998323	0.1000126	0.1000081

TABLEAU 3.2 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN POUR IP_1

Résultats obtenus par la méthode de la pénalisation

Pour le paramètre de relaxation $\omega = 1.86$ et le paramètre de pénalisation $\epsilon^{-1} = 10E - 03$

Pas	h=1/8	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	60	72	86	111	464
1	0.00628545	0.00642068	0.00651461	0.00653635	0.00654074
2	0.01257301	0.01278643	0.01295777	0.01299667	0.01300431
3	0.02592501	0.02634861	0.02669389	0.02677447	0.02679023
4	0.01807807	0.01818069	0.01837257	0.01841211	0.01841912
5	0.03927892	0.03954355	0.03997588	0.04007115	0.04008898
6	0.06746570	0.06764984	0.06770137	0.06783234	0.06784337
7	0.02045132	0.02045875	0.02063273	0.02066489	0.02066967
8	0.04564834	0.04599436	0.04639110	0.04647462	0.04648537
9	0.08357922	0.08395678	0.08408121	0.08411248	0.08412030
10	0.09936842	0.09984302	0.09996088	0.09999022	0.09999755

TABLEAU 3.3 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DE LA PÉNALISATION POUR IP_1

Commentaire

Ce problème a été résolu dans [24], sous sa forme primal c'est à dire :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ I(u_0) = \min I(u) \end{cases} \quad (3.21)$$

où : $I(u) = \int_{\Omega} |\text{gradu}|^2 d\Omega$ et $K = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \geq q\}$, q défini dans (P_1) . Voici la comparaison entre ce qui a été retrouvé dans [24] et ce qu'on a retrouvé par les 3 algorithmes, pour le pas $h = 1/8$, aux points représentés sur la figure (3.2). On remarque que les solutions retrouvés par les trois méthodes sont proches de celle retrouvée dans [24]. Nous constatons que les trois méthodes sont plus ou moins équivalentes par rapport à la précision des résultats. Néanmoins par rapport au nombre d'itérations la méthode de pénalisation et celle des approximations successives restent équivalentes et de loin supérieure à celle du Lagrangien.

Les points	Résultats retrouvés dans[24]	Les approximations successives	Pénalisation	Lagrangien
1	0.00606	0.00642734	0.006420068	0.00643205
2	0.01261	0.01280006	0.01278643	0.01281050
3	0.02590	0.02637633	0.02634861	0.02639563
4	0.01823	0.01819967	0.01818069	0.01821405
5	0.03920	0.03958548	0.03954355	0.03962164
6	0.06770	0.06770716	0.06764984	0.06788524
7	0.02065	0.02047905	0.02045875	0.02048939
8	0.04573	0.04603467	0.04599436	0.04608258
9	0.08412	0.08412291	0.08395678	0.08380959
10	0.1	0.09999994	0.09984302	0.1003737

TABLEAU 3.4 – COMPARAISON DES RÉSULTATS

Représentation de la région de contact

Pour obtenir une approximation à posteriori de la région de contact, on choisit les points où la solution du problème pour le pas $h = 1/128$ et l'obstacle coïncident, c'est à dire la région Λ (équation 3.2). Les trois méthodes donnent la même région, car la solution donnée par les trois méthodes sont pratiquement identiques. Les points sur la figure ci-dessous représentent la frontière entre la région de contact et celle de non contact.

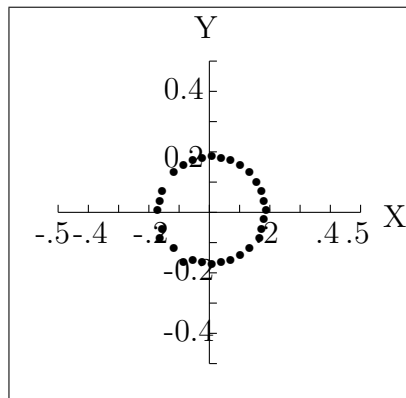


FIGURE 3.3 – Région de contact pour le problème IP_1

3.4.2 Deuxième problème

On propose de déterminer la solution pour un autre problème où l'obstacle est plus petit.

$$(P_2) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u \geq 0 \text{ et } u(x, y) \leq q(x, y) \end{cases}$$

où

$$q(x, y) = \begin{cases} -0.2 + (0.0625 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.0225 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$

Les points pour lesquels on donne la solution sont représentés sur la figure (3.2) donnée ci dessus.

Résultats obtenus par la méthode des approximations successives

Pour le paramètre de relaxation $\omega = 1.83$

Pas	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	61	71	187	849
1	0.00203912	0.00210194	0.00210480	0.00210681
2	0.00406131	0.00418090	0.00418510	0.00418875
3	0.00836086	0.00861208	0.00862191	0.00862972
4	0.00578374	0.00592901	0.00592882	0.00593250
5	0.01255691	0.01289849	0.01290364	0.01291296
6	0.02113180	0.02181391	0.02184551	0.02186628
7	0.00652223	0.00665966	0.00665405	0.00665691
8	0.01470548	0.01498119	0.01496398	0.01496941
9	0.02843520	0.02868009	0.028624006	0.02863201
10	0.04999997	0.04999997	0.04999997	0.04999997

TABLEAU 3.5 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR IP_2

Résultats obtenus par la méthode du Lagrangien

Pour le paramètre de relaxation $\omega = 1.8$ et $\rho = 0.015$

Pas	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	722	1124	1435	2409
1	0.00205079	0.00210428	0.00210529	0.00210683
2	0.00408452	0.00418560	0.00418606	0.00418878
3	0.00840943	0.00862162	0.00862397	0.00862975
4	0.00581556	0.00593562	0.00593012	0.00593253
5	0.01262847	0.01291270	0.01290660	0.01291297
6	0.02127170	0.02183861	0.02185111	0.02186627
7	0.00655570	0.00666708	0.00665543	0.00665694
8	0.01477373	0.01499721	0.01496710	0.01496942
9	0.02846234	0.02870350	0.02862842	0.02863205
10	0.04967458	0.05006099	0.04999420	0.05000020

TABLEAU 3.6 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN POUR IP_2

Résultats obtenus par la méthode de la pénalisation

Pour le paramètre de relaxation $\omega = 1.83$ et le paramètre de pénalisation $\epsilon^{-1} = 10E - 03$

Pas	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	62	74	152	857
1	0.00220386	0.00210173	0.00210472	0.00210691
2	0.00406049	0.00418051	0.00418494	0.00418892
3	0.00835897	0.00861123	0.00862161	0.00862991
4	0.00578247	0.00592844	0.00592860	0.00593271
5	0.01255401	0.01289720	0.01290320	0.012913015
6	0.02112723	0.02181178	0.02184480	0.02186632
7	0.00652065	0.00665906	0.00665380	0.00665716
8	0.01470179	0.01497977	0.01496347	0.01496963
9	0.02842568	0.02867712	0.02862307	0.02863198
10	0.04996828	0.04999215	0.04999804	0.04999950

TABLEAU 3.7 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DE LA PÉNALISATION POUR IP_2

Commentaires

Pour ce problème, la remarque précédente reste valable c'est à dire, la méthode des approximations successives est équivalente à celle de la pénalisation du point de vue nombre d'itérations.

Région de contact

Pour le pas $1/128$ et par les approximations successives, on obtient :

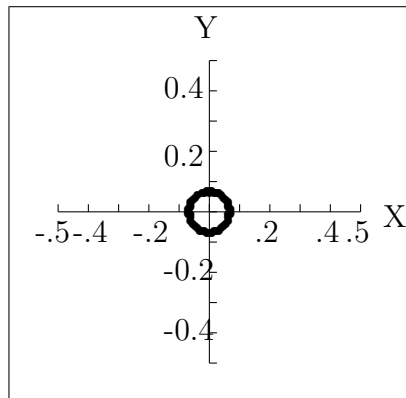


FIGURE 3.4 – Région de contact pour le problème IP_2

3.4.3 Troisième problème

Soit le problème [25] :

$$(P_3) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u \geq -2x - y \text{ et } u(x, y) \leq -0.08 \end{cases}$$

où $\Omega = [0, 1]^2$

La figure 3.5 représente les points en lesquels la solution est recherchée.

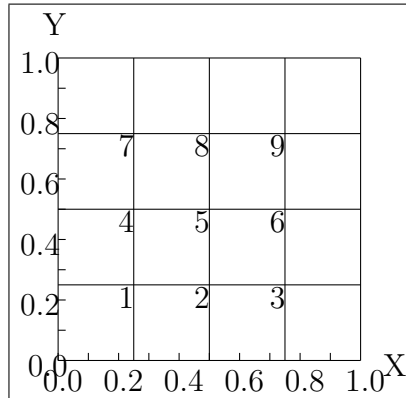


FIGURE 3.5 – Domaine de résolution du problème IP_3

Résultats obtenus par la méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives pour le paramètre de relaxation $w = 1.83$

Pas	h=1/8	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	45	55	71	185	795
1	-0.04373558	-0.043636903	-0.043640733	-0.043634098	-0.04363346
2	-0.066921659	-0.066777274	-0.066807605	-0.066800989	-0.06680099
3	-0.064438239	-0.064514659	-0.064551249	-0.064559348	-0.06456130
4	-0.061319873	-0.061200134	-0.061256737	-0.06126223	-0.0612642
5	-0.07999998	-0.079999998	-0.07999998	-0.07999998	-0.07999999
6	-0.07999998	-0.07999998	-0.07999998	-0.07999998	-0.07999998
7	-0.058370613	-0.052910805	-0.054401796	-0.054448225	-0.05445640
8	-0.076631851	-0.075946301	-0.075936899	-0.075925902	-0.0759198
9	-0.073704824	-0.072987221	-0.072992921	-0.072988465	-0.07298509

TABLEAU 3.8 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR IP_3

Résultats obtenus par la méthode du Lagrangien

La méthode du Lagrangien pour $w = 1.8$ et $\rho = 2 \times 10^{-3}$

Pas	h=1/8	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres itérations	464	831	1150	1536	2496
1	-0.04436249	-0.04361213	-0.04359643	-0.04362992	-0.04363526
2	-0.06822802	-0.06673280	-0.06673022	-0.06678971	-0.06680152
3	-0.06556747	-0.06443140	-0.06449952	-0.06454911	-0.06456024
4	-0.06232170	-0.06118142	-0.06118463	-0.06125504	-0.06126606
5	-0.08676835	-0.08121247	-0.08017659	-0.08001349	-0.08000018
6	-0.082526274	-0.07870724	-0.07874318	-0.07879330	-0.07881106
7	-0.05444845	-0.05294783	-0.05445532	-0.05444832	-0.05445718
8	-0.07860511	-0.07594231	-0.07581016	-0.07589540	-0.07591881
9	-0.07511369	-0.07300639	-0.07291636	-0.07296295	-0.07298381

TABLEAU 3.9 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN POUR IP_3

Résultats obtenus par la méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation pour $w = 1.86$ et $\epsilon^{-1} = 0.001$.

Pas	h=1/8	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	57	75	91	110	615
1	-0.043775566	-0.043635972	-0.043641828	-0.043635551	-0.04363536
2	-0.066922143	-0.066778935	-0.066808410	-0.066801697	-0.06680195
3	-0.064448029	-0.064515173	-0.064551421	-0.064559542	-0.06456155
4	-0.061331511	-0.061198551	-0.061257798	-0.061263461	-0.06126580
5	-0.080021068	-0.080005854	-0.080001466	-0.080000363	-0.08000008
6	-0.080003724	-0.079142869	-0.078824542	-0.078819409	-0.07881376
7	-0.054452535	-0.054401461	-0.054448429	-0.054455746	-0.05445728
8	-0.076644152	-0.075947352	-0.075937554	-0.075926065	-0.07591993
9	-0.073712036	-0.072987348	-0.072993331	-0.072988652	-0.07298510

TABLEAU 3.10 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DE PÉNALISATION POUR IP_3

Commentaire

La comparaison entre les trois méthodes reste identique.

Région de contact

On obtient l'interface séparant la région de contact et celle de non contact qui est identique à celle obtenue dans [25].

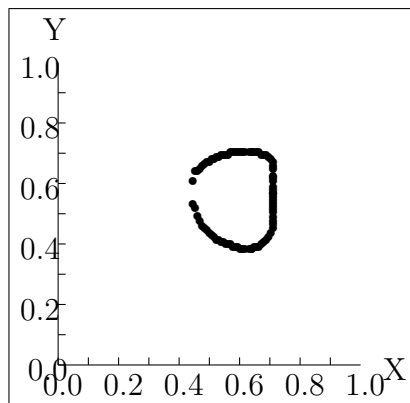


FIGURE 3.6 – Région de contact pour le problème IP_3

Chapitre 4

Problème de Signorini

4.1 Introduction

Le problème de Signorini est un problème très connu et peut être considéré comme un cas particulier du problème de l'obstacle dans le sens où la contrainte d'inégalité est seulement imposée sur une partie Γ_1 de la frontière Γ . Le problème de Signorini représente une classe importante d'inéquations variationnelles gouvernant plusieurs problèmes pratiques tels que l'élasticité avec condition unilatérale [1], les problèmes de la mécanique des fluides [7] ...etc . L'existence et l'unicité ainsi que la régularité du problème ont été démontrés par Fichera dans [9], Brezis [5] et Friedman [10]. La résolution numérique de ce problème par les éléments finis a été discutée dans [1], [12].

Dans ce chapitre, on exposera ce qui a été trouvé sur l'existence et unicité de ce type de problème, puis on appliquera les algorithmes du chapitre2 et enfin on illustrera ceux-ci par deux exemples numériques.

4.2 Définition du problème

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine de frontière Γ suffisamment régulière. On suppose que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $f \in L^2(\Omega)$ et q une fonction suffisamment régulière sur Γ .

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ p.p sur } \Omega \\ u = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_0 \\ u \geq 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} \geq q \text{ et } u(\frac{\partial u}{\partial n} - q) = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

La formulation (4.1) du problème est appelée formulation forte. On définit l'I.V. relative à ce problème.

On pose $V = H^1(\Omega)$.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ a(u, v - u) \geq F(v - u) \forall v \in K \end{cases} \quad (4.2)$$

où : $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$, $F(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} q v d\Gamma$

et

$$K = \{v \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0, u|_{\Gamma_1} \geq 0 \text{ p.p}\} \quad (4.3)$$

4.2.1 Existence et régularité de la solution

Théorème 4.1 [3] *L'inéquation variationnelle (4.2) admet une solution unique.*

Théorème 4.2 [3] *Soit Ω un borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ suffisamment régulière . Si $f \in L^2(\Omega)$ et $q \in L^2(\Gamma_1)$, alors la solution du problème est dans $H^1(\Omega)$*

4.2.2 Discrétisation par éléments finis

On considère une triangulation T_h définie dans le chapitre précédent.

L'espace $H^1(\Omega)$ est approché par l'espace d'éléments finis suivant :

$$H_h = \left\{ u_h \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que : } u_h|_{\Gamma} \in P_1 \right\}$$

On définit $\Gamma_h = \{P \in \Sigma_h \cap \Gamma\}$, $\Gamma_{0h} = \Gamma_h \cap \Gamma_0$ et $\Gamma_{1h} = \Gamma_h \cap \Gamma_1$

Alors K est approché par :

$$K_h = \{u_h \in H_h, u_h(P) = 0, \forall P \in \Gamma_{0h} \text{ et } u_h(P) \geq 0, \forall P \in \Gamma_{1h}\}$$

K_h est un convexe fermé de H_h et $K_h \subset K$ [3].

Le problème discret associé s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq F(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (4.4)$$

D'après [11], ce problème admet une solution unique qui vérifie :

Théorème 4.3 [11] *On suppose les angles θ de la triangulation T_h uniformément bornés par $\theta_0 > 0$, quand $h \rightarrow 0$, alors :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

où u_h et u sont les solutions de (4.4) et (4.2) respectivement.

Théorème 4.4 [11] *Il existe une constante C , indépendante du pas h , de la solution u , de f et de u_h solution de (4.4), qui satisfait :*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch$$

4.2.3 Discrétisation du problème par éléments finis

On utilise la méthode des éléments finis décrite dans la section(3.3). Après discrétisation, on obtient une matrice tridiagonale par blocs :

$$\mathbf{AA} = \begin{pmatrix} D & C & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & 0 & \dots \\ 0 & C & B & C & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B & C \\ 0 & \dots & \dots & C & D \end{pmatrix}.$$

où :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

est une matrice tridiagonale $N \times M$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & \dots & 0 \\ -1/2 & 2 & -1/2 & 0 & \dots \\ 0 & -1/2 & 2 & -1/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 2 & -1/2 \\ 0 & \dots & \dots & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

est une matrice tridiagonale $N \times M$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

est une matrice tridiagonale $N \times M$

4.3 Description des algorithmes de résolution

La discrétisation du problème implique la résolution du système suivant :
 $u_{11} - 0.5(u_{12} + u_{21}) = f_{11}$

$2u_{1i} - 0.5(u_{1i-1} + u_{1i+1}) - u_{2i} = f_{1i}$ pour tout $i = \overline{2, M-1}$
 $u_{1M} - 0.5(u_{1M-1} + u_{2M}) = f_{1M}$
 $2u_{i1} - 0.5(u_{i-11} + u_{i+11}) - u_{i+11} = f_{i1}$ pour tout $i = \overline{2, N-1}$
 $4u_{ij} - u_{i-1j} - u_{i+1j} - u_{ij-1} - u_{ij+1} = f_{ij}$ pour tout $i = \overline{2, N-1}$ et pour tout $j = \overline{2, M-1}$
 $2u_{iM} - 0.5(u_{i-1M} + u_{i+1M}) - u_{iM-1} = f_{iM}$ pour tout $i = \overline{2, N-1}$
 $u_{N1} - 0.5(u_{N2} + u_{N-11}) = f_{N1}$
 $2u_{Ni} - 0.5(u_{Ni-1} + u_{Ni+1}) - u_{N-1i} = f_{Ni}$ pour tout $i = \overline{2, M-1}$
 $u_{NM} - 0.5(u_{NM-1} + u_{N-1M}) = f_{NM}$
 En appliquant la relaxation, comme on l'a vu dans le chapitre précédent (voir section 3.3), on obtient l'algorithme suivant :

4.3.1 Approximation successives

Algorithme 4.1

étape1 : On fixe $u^{(1)} \in K_h$
 étape2 : On cherche $u^{(m+1)} = (u_{ij}^{(m+1)}) \in IR^{N \times M}$ solution de :
 $u_{11}^{(m+1)} = \max(q_{11}, (1-w)u_{11}^{(m)} + w(f_{11} + 0.5(u_{12}^{(m)} + u_{21}^{(m)})))$
 $u_{1i}^{(m+1)} = \max(q_{1i}, (1-w)u_{1i}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{1i} + 0.5(u_{1i+1}^{(m)} + u_{1i-1}^{(m)} + u_{2i}^{(m+1)})))$
 pour tout $i = \overline{2, M-1}$
 $u_{1M}^{(m+1)} = \max(q_{1M}, (1-w)u_{1M}^{(m)} + w(f_{1M} + u_{1M-1}^{(m+1)} + 0.5u_{2M}^{(m)}))$
 $u_{i1}^{(m+1)} = \max(q_{i1}, (1-w)u_{i1}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{i1} + 0.5(u_{i1}^{(m+1)} + u_{i-11}^{(m+1)} + u_{i+11}^{(m)})))$
 pour tout $i = \overline{2, N-1}$
 $u_{iM}^{(m+1)} = \max(q_{iM}, (1-w)u_{iM}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{iM} + 0.5(u_{i+1M}^{(m)} + u_{i-1M}^{(m+1)} + u_{iM-1}^{(m+1)})))$
 pour tout $i = \overline{2, N-1}$
 $u_{N1}^{(m+1)} = \max(q_{N1}, (1-w)u_{N1}^{(m)} + w(f_{N1} + 0.5(u_{N2}^{(m)} + u_{N-11}^{(m+1)})))$
 $u_{Ni}^{(m+1)} = \max(q_{Ni}, (1-w)u_{Ni}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{Ni} + 0.5(u_{Ni-1}^{(m+1)} + u_{Ni+1}^{(m)} + u_{(N-i)}^{(m+1)})))$
 pour tout $i = \overline{2, M-1}$
 $u_{NM}^{(m+1)} = \max(q_{NM}, (1-w)u_{NM}^{(m)} + w(f_{NM} + 0.5(u_{NM-1}^{(m)} + u_{N-1M}^{(m+1)})))$
 $u_{ij}^{(m+1)} = (1-w)u_{ij}^{(m)} + \frac{w}{4}(f_{ij} + u_{i+1j}^{(m)} + u_{i-1j}^{(m+1)} + u_{ij-1}^{(m+1)} + u_{ij+1}^{(m)})$ pour tout $i = \overline{2, N-1}$ et pour tout $j = \overline{2, M-1}$
 étape3 : On donne un critère d'arrêt défini dans le chapitre précédent par : $\frac{\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|}{\|u^{(m+1)}\|} < 5 \times 10^{-3}$. Si $u^{(m)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête. Sinon, on pose $m = m + 1$ et on retourne à l'étape 2.

4.3.2 Pénalisation

De manière analogue, on définit l'opérateur de projection associé au problème de Signorini par :

$$P_Q(u) = (q - u)^+|_\Gamma$$

Algorithme 4.2

étape1 : On fixe $u^{(1)} \in K_h$

étape2 : On cherche $u^{(m+1)} = (u_{ij}^{(m+1)}) \in IR^{N \times M}$ solution de :

Si $u_{11}^{(m)} \geq q_{11}$

$$u_{11}^{(m+1)} = (1 - w)u_{11}^{(m)} + w(f_{11} + 0.5(u_{12}^{(m)} + u_{21}^{(m)}))$$

Si $u_{11}^{(m)} < q_{11}$

$$u_{11}^{(m+1)} = \frac{1}{1+\epsilon^{-1}}(f_{11} - \epsilon^{-1}q_{11} + 0.5(u_{12}^{(m)} + u_{21}^{(m)}))$$

Si $u_{1i}^{(m)} \geq q_{1i}$

$$u_{1i}^{(m+1)} = (1-w)u_{1i}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{1i} + 0.5(u_{1i+1}^{(m)} + u_{1i-1}^{(m+1)}) + u_{2i}^{(m)}) \text{ pour tout } i = \overline{2, M-1}$$

Si $u_{1i}^{(m)} < q_{1i}$

$$u_{1i}^{(m+1)} = \frac{1}{2+\epsilon^{-1}}(f_{1i} - \epsilon^{-1}q_{1i} + 0.5(u_{1i+1}^{(m)} + u_{1i-1}^{(m+1)}) + u_{2i}^{(m)}) \text{ pour tout } i = \overline{2, M-1}$$

Si $u_{1M}^{(m)} \geq q_{1M}$

$$u_{1M}^{(m+1)} = (1 - w)u_{1M}^{(m)} + w(f_{1M} + 0.5(u_{1M-1}^{(m+1)} + u_{2M}^{(m)}))$$

Si $u_{1M}^{(m)} < q_{1M}$

$$u_{1M}^{(m+1)} = \frac{1}{1+\epsilon^{-1}}(f_{1M} - \epsilon^{-1}q_{1M} + 0.5(u_{2M}^{(m)} + u_{1M-1}^{(m+1)}))$$

Si $u_{i1}^{(m)} \geq q_{i1}$

$$u_{i1}^{(m+1)} = (1-w)u_{i1}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{i1} + 0.5(u_{i+11}^{(m)} + u_{i-11}^{(m+1)}) + u_{i2}^{(m)}) \text{ pour tout } i = \overline{2, N-1}$$

Si $u_{i1}^{(m)} < q_{i1}$

$$u_{i1}^{(m+1)} = \frac{1}{2+\epsilon^{-1}}(f_{i1} - \epsilon^{-1}q_{i1} + 0.5(u_{i+11}^{(m)} + u_{i-11}^{(m+1)}) + u_{i2}^{(m)}) \text{ pour tout } i = \overline{2, N-1}$$

Si $u_{iM}^{(m)} \geq q_{iM}$

$$u_{iM}^{(m+1)} = (1 - w)u_{iM}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{iM} + 0.5(u_{i+1M}^{(m)} + u_{i-1M}^{(m+1)}) + u_{iM-1}^{(m)}) \text{ pour tout } i = \overline{2, N-1}$$

Si $u_{iM}^{(m)} < q_{iM}$

$$u_{iM}^{(m+1)} = \frac{1}{2+\epsilon^{-1}}(f_{iM} - \epsilon^{-1}q_{iM} + 0.5(u_{i+1M}^{(m)} + u_{i-1M}^{(m+1)}))$$

pour tout $i = \overline{2, N-1}$

Si $u_{N1}^{(m)} \geq q_{N1}$

$$u_{N1}^{(m+1)} = (1 - w)u_{N1}^{(m)} + w(f_{N1} + 0.5(u_{N1}^{(m)} + u_{N-11}^{(m+1)}))$$

Si $u_{N1}^{(m)} < q_{N1}$

$$u_{N1}^{(m+1)} = \frac{1}{1+\epsilon^{-1}}(f_{N1} - \epsilon^{-1}q_{N1} + 0.5(u_{N1}^{(m)} + u_{N-11}^{(m+1)}))$$

Si $u_{Ni}^{(m)} \geq q_{Ni}$

$$u_{Ni}^{(m+1)} = (1 - w)u_{Ni}^{(m)} + w(f_{Ni} + 0.5(u_{Ni-1}^{(m+1)} + u_{Ni+1}^{(m)}))$$

pour tout $i = \overline{2, M-1}$

Si $u_{Ni}^{(m)} < q_{Ni}$
 $u_{Ni}^{(m+1)} = \frac{1}{1+\epsilon^{-1}}(f_{Ni} - \epsilon^{-1}q_{Ni} + 0.5(u_{Ni-1}^{(m+1)} + u_{Ni+1}^{(m)}))$
pour tout $i = \overline{2, M-1}$
Si $u_{NM}^{(m)} \geq q_{NM}$
 $u_{NM}^{(m+1)} = (1-w)u_{NM}^{(m)} + w(f_{NM} + 0.5(u_{NM-1}^{(m+1)} + u_{N-1M}^{(m)}))$
Si $u_{NM}^{(m)} < q_{NM}$
 $u_{NM}^{(m+1)} = \frac{1}{1+\epsilon^{-1}}(f_{NM} - \epsilon^{-1}q_{NM} + 0.5(u_{NM-1}^{(m+1)} + u_{N-1M}^{(m)}))$
 $u_{ij}^{(m+1)} = (1-w)u_{ij}^{(m)} + \frac{w}{4}(f_{ij} + u_{i+1j}^{(m)} + u_{i-1j}^{(m+1)} + u_{ij-1}^{(m+1)} + u_{ij+1}^{(m)})$ pour tout
 $i = \overline{2, N-1}$ et pour tout $j = \overline{2, M-1}$
étape3 : Si $u^{(m)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête. Sinon, on pose $m = m+1$
et on retourne à l'étape3.

4.3.3 Méthode du Lagrangien

Le Lagrangien pour ce type de problème est donné par :

$$L(u, q) = a(u, v) - \int_{\Omega} f u - \int_{\Gamma} q u$$

Algorithme 4.3

étape1 : On fixe $u^{(1)} \in K_h$

étape2 : On cherche $u^{(m+1)} = (u_{ij}^{(m+1)}) \in IR^{N \times M}$ solution de :

$$u_{11}^{(m+1)} = (1-w)u_{11}^{(m)} + w(f_{11} + 0.5(u_{12}^{(m)} + u_{21}^{(m)} - q_{11}))$$

$$u_{1i}^{(m+1)} = (1-w)u_{1i}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{1i} + 0.5(u_{1i+1}^{(m)} + u_{1i-1}^{(m)} + u_{2i}^{(m+1)} - q_{1i}))$$

pour tout $i = \overline{2, M-1}$

$$u_{1M}^{(m+1)} = ((1-w)u_{1M}^{(m)} + w(f_{1M} + u_{1M-1}^{(m+1)} + 0.5u_{2M}^{(m)} - q_{1M}))$$

$$u_{i1}^{(m+1)} = ((1-w)u_{i1}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{i1} + 0.5(u_{i1}^{(m+1)} + u_{i-11}^{(m+1)}) + u_{i+11}^{(m)} - q_{i1}))$$

pour tout $i = \overline{2, N-1}$

$$u_{iM}^{(m+1)} = ((1-w)u_{iM}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{iM} + 0.5(u_{i+1M}^{(m)} + u_{i-1M}^{(m+1)}) + u_{iM-1}^{(m+1)} - q_{iM}))$$

pour tout $i = \overline{2, N-1}$

$$u_{N1}^{(m+1)} = ((1-w)u_{N1}^{(m)} + w(f_{N1} + 0.5(u_{N2}^{(m)} + u_{N-11}^{(m+1)}) - q_{N1}))$$

$$u_{Ni}^{(m+1)} = ((1-w)u_{Ni}^{(m)} + \frac{w}{2}(f_{Ni} + 0.5(u_{Ni-1}^{(m+1)} + u_{Ni+1}^{(m)} + u_{N-1i}^{(m+1)} - q_{Ni}))$$

pour tout $i = \overline{2, M-1}$

$$u_{NM}^{(m+1)} = ((1-w)u_{NM}^{(m)} + w(f_{NM} + 0.5(u_{NM-1}^{(m)} + u_{N-1M}^{(m+1)}) - q_{NM}))$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = (1-w)u_{ij}^{(m)} + \frac{w}{4}(f_{ij} + u_{i+1j}^{(m)} + u_{i-1j}^{(m+1)} + u_{ij-1}^{(m+1)} + u_{ij+1}^{(m)})$$

pour tout $i = \overline{2, N-1}$ et pour tout $j = \overline{2, M-1}$

étape3 : Si $u^{(m)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête. Sinon, on pose $m = m+1$
et on retourne à l'étape3.

4.4 Expérimentations numériques

Les algorithmes de résolution étant les mêmes que ceux utilisés pour le problème de l'obstacle, on les adapte facilement au cas du problème de Signorini. Les résultats numériques sont donnés ci-dessous pour le problème suivant :

4.4.1 Premier exemple

$$(IP_4) \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ -\Delta u = 1000 \sin(2\pi x) \end{cases}$$

où $K = \{v \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_1} \geq 0\}$

$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \partial\Omega : x = 0\}$ et $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$

La solution est donnée aux points représentés sur la -figure3.5-

Résultats obtenus par la méthode des approximations successives :

Pour le paramètre de relaxation $w = 1.8$

Pas	h=1/8	h=1/16	h=1/32	h=1/64	h=1/128
nombres d'itérations	43	52	120	570	2564
1	20.12327	20.05528	20.03473	20.02609	20.02634
2	9.238988	9.413750	9.4490361	9.75491	9.454594
3	-8.581542	-8.816880	-8.883394	-8.902328	-8.906061
4	19.79365	19.76973	19.76022	19.76022	19.75542
5	6.301563	6.181117	6.135973	6.117041	6.116618
6	-14.61640	-14.77977	-14.82605	-14.84025	-14.84258
7	20.08174	20.03255	20.04627	20.02583	20.02623
8	10.07720	9.654552	9.513001	9.463051	9.458670
9	-8.541303	-8.803104	-8.879504	-8.901241	-8.905803

TABLEAU 4.1 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR IP_4

Résultats obtenus par la méthode du Lagrangien :

Pour le paramètre de relaxation $w = 1.7$ et pour $\rho = 0.001$

Pas	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$	$h=1/64$	$h=1/128$
nombres d'itérations	772	1963	1430	22370	3650
1	20.00490	20.07207	20.04070	20.02604	20.02627
2	8.769081	9.488567	9.477580	9.443720	9.454902
3	-9.053777	-8.866525	-8.897423	-8.903039	-8.906026
4	19.67696	19.78372	19.76483	19.75486	19.75528
5	5.721209	6.214642	6.147403	6.116222	6.116326
6	-16.26168	-14.76504	-14.82233	-14.84095	-14.84262
7	20.03575	20.06996	20.03979	20.02543	20.02618
8	10.02322	9.769990	9.548096	9.459301	9.458997
9	-9.018938	-8.858238	-8.894095	-8.902118	-8.905764

TABLEAU 4.2 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN POUR IP_4

Résultats obtenus par la méthode de pénalisation

Pour le paramètre de relaxation $w = 1.8$ et pour le paramètre de pénalisation $\epsilon^{-1} = 0.001$

Pas	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$	$h=1/64$	$h=1/128$
nombres d'itérations	772	1963	1430	22370	3650
1	20.12791	20.05470	20.03432	20.02583	20.02624
2	9.230148	9.410646	9.447250	9.445249	9.454144
3	-8.594146	-8.822768	-8.886357	-8.903818	-8.906797
4	19.79184	19.76905	19.75979	19.75465	19.75531
5	6.293557	6.177499	6.134116	6.116043	6.116154
6	-14.63088	-14.78659	-14.82951	-14.84200	-14.84344
7	20.07790	20.04562	20.03211	20.02558	20.02613
8	10.06970	9.651078	9.511188	9.462063	9.458204
9	-8.554272	-8.809067	-8.882478	-8.902733	-8.906543

TABLEAU 4.3 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DE PÉNALISATION POUR IP_4

Région de contact

La région en pointillés, Figure 4.1, représente l'approximation de la région de contact et est identique à celle obtenue dans [4].

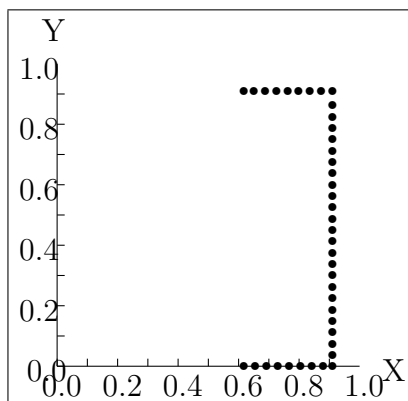


FIGURE 4.1 – Région de contact pour le problème IP_4

Commentaire

Comme pour le chapitre précédent, les résultats numériques obtenus par les trois méthodes sont équivalents. En ce qui concerne le nombre d'itérations la méthode du Lagrangien est la plus coûteuse, car elle fait intervenir une inconnue supplémentaire.

4.4.2 Second exemple

On résoud un autre exemple :

$$(IP_5) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1([0, 0.5] \times [0, 1]) \text{ tel que :} \\ \Delta u = 0 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0, u \geq -1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

On va déterminer la solution par les différents algorithmes cités dans le chapitre 2 aux points :

$x^i = (0.5, 0.1i)$ pour $i = 1, 2, \dots, 10$ et $x^i = (1.5 - 0.1i, 1)$ pour $i = 11, 12, \dots, 15$ sur la frontière pour les trois pas différents $h = 1/10, 1/20, 1/30$ car c'est ses mêmes résultats qu'on a dans [15]

Résultats obtenus par les approximations successives :

Pour $w = 1.7$

Pas	$h=1/10$	$h=1/20$	$h=1/30$
nombres d'itérations	43	174	2007
x^1	0.7193620	0.7449279	0.7523709
x^2	0.5460919	0.5727181	0.5806166
x^3	0.3986038	0.4270706	0.4354702
x^4	0.2724754	0.3019310	0.3105603
x^5	0.1661376	0.1952560	0.2037402
x^6	7.9565354E-02	0.1068301	0.1147164
x^7	1.4316590E-02	3.8208447E-02	4.4907328E-02
x^8	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
x^9	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
x^{10}	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
x^{11}	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
x^{12}	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
x^{13}	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
x^{14}	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
x^{15}	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00

TABLEAU 4.4 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR IP_5

Résultats obtenus par le Lagrangien :

Pour $w= 1.4$ et pour le paramètre de Lagrange $\rho= 0.1$

Pas	h=1/10	h=1/20	h=1/30
nombres d'itérations	136	496	1049
x^1	0.7193622	0.7449280	0.7523698
x^2	0.5460922	0.5727179	0.5806148
x^3	0.3986042	0.4270705	0.4354679
x^4	0.2724759	0.3019310	0.3105580
x^5	0.1661380	0.1952561	0.2037381
x^6	7.9565667E-02	0.1068301	0.1147147
x^7	1.4316812E-02	3.8208481E-02	4.4906132E-02
x^8	7.8975351E-09	1.1548458E-09	6.5580215E-11
x^9	1.7210841E-08	2.0861630E-09	3.9363899E-09
x^{10}	2.7567142E-09	-1.5385440E-08	-2.8374296E-09
x^{11}	1.7210841E-08	3.0174874E-09	3.0050675E-09
x^{12}	1.5348196E-08	3.0174852E-09	3.9363899E-09
x^{13}	7.8976141E-09	3.9488075E-09	2.0737450E-09
x^{14}	7.8976017E-09	2.0861626E-09	2.0737450E-09
x^{15}	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00

TABLEAU 4.5 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN POUR IP_5

Résultats obtenus par la pénalisation :

Pour $w = 1.5$ et pour le paramètre de pénalisation $\epsilon^{-1} = 0.1$

Pas	$h=1/10$	$h=1/20$	$h=1/30$
nombres d'itérations	87	327	728
x^1	0.7190335	0.7447947	0.7522903
x^2	0.5454343	0.5724508	0.5804554
x^3	0.3976153	0.4266686	0.4352280
x^4	0.2711519	0.3013921	0.3102364
x^5	0.1644703	0.1945766	0.2033329
x^6	7.7535495E-02	0.1060038	0.1142241
x^7	1.1884066E-02	3.7230521E-02	4.4336352E-02
x^8	-2.5321557E-03	-5.3229352E-04	-6.6356457E-05
x^9	-4.9007507E-03	-2.2570903E-03	-1.4603804E-03
x^{10}	-6.8091592E-03	-3.4431685E-03	-2.3067109E-03
x^{11}	-4.9007507E-03	-2.3559819E-03	-1.5498908E-03
x^{12}	-3.4525299E-03	-1.5382320E-03	-9.8438095E-04
x^{13}	-2.5174597E-03	-1.0128123E-03	-6.2336511E-04
x^{14}	-2.0636483E-03	-7.3834643E-04	-4.3175663E-04
x^{15}	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00

TABLEAU 4.6 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE DE PÉNALISATION POUR IP_5

Commentaire

Dans [15], ce même problème a été résolu par la méthode des éléments aux bords et on a obtenu les résultats ci-dessus.

Pas	h=1/10	h=1/20	h=1/30
x^1	0.697	0.740	0.715
x^2	0.571	0.572	0.567
x^3	0.429	0.431	0.430
x^4	0.310	0.308	0.310
x^5	0.206	0.204	0.206
x^6	0.118	0.116	0.119
x^7	0.049	0.048	0.051
x^8	0.000	0.002	0.006
x^9	0.000	0.000	0.000
x^{10}	0.000	0.000	0.000
x^{11}	0.000	0.000	0.000
x^{12}	0.000	0.000	0.000
x^{13}	0.000	0.000	0.000
x^{14}	0.000	0.000	0.000
x^{15}	0.000	0.000	0.000

TABLEAU 4.7 – RÉSULTATS DONNÉS PAR [15]

On remarque que ces résultats sont équivalents à ceux qu'on a obtenu . Pour la région de contact dans ce problème, on obtient toute la frontière Γ_2 .

Conclusions et perspectives

Dans ce travail on a résolu des problèmes de type obstacle par trois algorithmes bien simples. Le but principal a été de voir comment ils se comportent et surtout de trouver l'interface séparant la région de contact de la région de non contact sur le plan pratique.

Les perspectives restent nombreuses, on compte faire un travail sur les estimations d'erreur à posteriori à partir de ces résultats, pour les problèmes étudiés.

Bibliographie

- [1] V.Arnautu P.Neittaanmaki..Optimal Control From Theory To Computer Programs.Kluwer Academic Publishers.London.(2003)
- [2] K.Atkinson et W.Han.Theoretical Numerical Analysis.A Functional analysis framework .Springer(2001)
- [3] F.B. Belgacem.Méthodes d'éléments finis pour les inéquations variationnelles de contact unilatéral.Acad.Sci..t.328,série1,p811-816.Paris(1999)
- [4] H.Blum,FT.Suttmeier. An adaptive finite element discretisation for a simplified Signorini problem. *Calcolo*.37(2),p 65-77.(2000)
- [5] H.Brezis.Problems Unlatrux.J.de Math Pures et Appliques.51,1-168.(1972)
- [6] PH.Ciarlet et P.A.Raviart.Comp.Methods in Appl.Mech and Eng.,2,p17-31.(1973)
- [7] G.Duvaut,J.L.Lions.Les Inequations en Mecanique et en Physique,Dunod.Paris.(1972).
- [8] R.Falk. Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities. *Mathematics of Computation*. Vol28. Number 128,p 963-971.(1974)
- [9] G.Fichera.Problemi elastostatici con vincoli unilaterali :il problemi di Signorini con ambigue condizioni al contorno.Atti.Accad.Naz.Lincei(8) ,91-140.(1963/64)
- [10] A.Freidman.Variational Principles and Free Boundary Problems,John Wiley and Sons.New-York.(1982)
- [11] Glowinski,R. .Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems.Springer-Verlag.New York.(1984)
- [12] R.Glowinski,J.L.Lions and R.Tremoliseses ,Numerical Analysis of Variational Inequalities,North-Holland.Amsterdam.(1981)
- [13] C.Grossman,H.G.Roos and M.Stynes. Numerical treatment of Partial Differential Equations.Springer.(2007)

- [14] W.Hackbusch and A.Reusken.Analysis of a damped non linear multilevel method.Num.Amath,55,225-246.(1989)
- [15] ArH.Han.The Boundary Element Method For Solving Variational Inequalities.Math.Comp.,163,p55-69.(1994)
- [16] H.Han.A Direct Boundary Element Method For Signorini Problems.Math.Comp.,55,p115-128.(1990)
- [17] W.Han and B.D.Reddy,Plasticity :Mathematical Theory and Numerical Analysis,Springer-Verlag.New York.(1990)
- [18] B.Imoro .Discretised Obstacle Problems with Penalties on Nested Grids.Appl.Num.Math.32,21-34.(2000)
- [19] H.Kardestuncer. Finite Element Handbook,New York,McGraw-Hill.(1987)
- [20] D.Kinderlehrer and G.Stampacchia.An introduction to Variational Inequalities and Their Applications,Academic Press.New York.(1980)
- [21] N.Kikuchi,J.T.Oden.Contact problems in elasticity.A study of variational inequalities and finite element methods.Piladelphia.Siam.(1988)
- [22] P.Shi.A Pitonyak,and M.M.Shillor.On an iterative method for variational inequalities,Numer.Math.58,231-242.(1990)
- [23] R.Scholz.Numerical Solution of the Obstacle Problem by Penalty Method.Math.Comp 32.p294-306.(1984)
- [24] H.Sissaoui .Variational Methods for Inequality Constraints Problems. Ph.D Thesis,Sheffield University,U.K.(1983)
- [25] P.Travainen.Two-Level Schwarz Methods for Unilateral Variational Inequalities.SIAM.Journal of Numerical Analysis Vol 19.p273-290.(1999)
- [26] L.Xue and X.L.Gheng.An algorithm for solving the Obstacle Problems .Comp.Math.48,1651-1657.(2004)
- [27] Y.Zang,Multilevel projection algorithm for solving obstacle problems,Computers Math applic.41(12),1505-1513.(2001)