الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY

جامعة باجي مختار – عنابــــة

Faculté des sciences.
Département de mathématiques.
Domaine : Mathématiques.
Filière : Mathématiques appliquées.
Spécialité : Systèmes Dynamiques.

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème:

Sur l'équation de Riccati

Présenté par : Mosbah Randa

Encadrant : Ghanem Radouen Prof. Université Badji Mokhtar –Annaba

Jury de Soutenance :

Hadidi El Bahi	Pr	UBM-Annaba	Président
Ghanem Radouen	Pr	UBM-Annaba	Encadrant
Zireg Bilel	M.C.B	UBM-Annaba	Examinateur

Année Universitaire : 2022/2023

Remerciements

Après avoir rendu grâce à Dieu le tout puissant et le bienveillant. Je tiens à remercie tout d'abord Ms.Ghanem qui a accepter de m'encadrer pendant cette recherche, et n'a ménagé aucun effort pour me prodiguer ses observations ses conseils et ses suggestions.

Je remercie aussi les membres de jury pour avoir accepté de juger mon travail.

Enfin, mes meilleurs remerciements vont à tous ceux qui est présent aujourdhuit, en particulier mes parents.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

A ma très chére mère : quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercie comme se doit, ton affection me couvre ta bienveillance me guide et ta présence a mes côtés a été toujours ma source de force.

A mon trés chér roi mon pére, tu as toujours eté a mes côtés pour me soutenir et m'encourager.

Et je le dédie :

A ma très belle soeur et ses filles.

A une personne spécifique, et très spécial pour moi.

A ma famille et mes amies .

MOSBAH RANDA

Résumé

Ce mémoire, est une introduction pour résoudre l'équation différentielle matricielle de Ricatti, à travers laquelle on trouve une solution du problème régulateur quadratique linéaire en temps fini (LQR).

On a commencé d'abord par étudier les systèmes linéaires et non-linéaires. Ensuite, nous avons données quelques notions fondamentales sur l'observabilité, la contrôlabilité et la stabilité. Enfin, nous avons introduit une méthode pour étudier et résoudre une classe de problème LQR.

Mots clés : Système dynamique, théorie de Lyapunov, contrôlabilité, observabilité.

Abstract

This master thesis is an introduction to the solution of the Ricatti matrix differential equation, through which we find a solution to the finite-time linear quadratic regulator problem (LQR).

We started by studying the linear and nonlinear systems. Then, we give some basic notions about observability, controllability and stability. Finally, we introduced a method to study and solve a class of LQR problems.

keywords : Dynamical system, lyapunov theory, controllability, observability.

ملخص

هذه المذكـرة عبـارة عـن مـقدمة لحـل معـادلة المصفـوفـة التفـاضلية لـ Ricatti ، والتي من خلالها نجـد حلاً لمشكلة المنظـم التربيعي الخطـي فـي وقـت محـدد (LQR).

بدأنا أولاً بدراسة الأنظمة الخطية وغير الخطية. بعد ذلك ، قدمنا بعض المفاهيم الأساسية حول إمكانية الملاحظة والتحكم والاستقرار. أخيرًا ، قدمنا طريقة لدراسة وحل فئة من مشكلة LQR.
الكلمات الدالة : النظام الديناميكي ، نظرية Lyapunov ، إمكانية التحكم ، إمكانية الملاحظة.

Table des matières

CHAPITRE

1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1.1 Introduction

En général le concept de système dynamique désigne tout ce qui évolue dans le temps. Pour cela de nombreux processus (électrique, mécanique, chimiques, etc) peuvent être modélisés par un système dynamique (un système d'équation différentielle).

Pour étudier un système dynamique, nous pouvons observer les sorties que nous mesurons pour des entrées données. Nous pouvons aller plus loin et essayer d'orienter le système vers un état désiré en appliquant certaines entrées en réaction aux sorties mesurées. Le problème consistant à forcer le système dynamique à atteindre l'état souhaité est appelé contrôle et, comme pour les systèmes dynamiques, le concept de contrôle se retrouve dans de nombreux domaines. La théorie mathématique du contrôle traite de l'analyse du système dynamique et de la conception d'une méthode de contrôle appropriée.

Bien entendu, nous ne nous contentons pas de trouver une commande qui dirige notre système vers l'état cible défini, nous souhaitons également le faire de manière optimale. L'optimalité est donc l'un des principaux sujets d'étude dans ce domaine.

Fondamentalement, on peut diviser la théorie du contrôle en une théorie classique et une théorie moderne. L'approche classique analyse les entrées et les sorties d'un système pour déterminer sa fonction de transfert.

L'approche moderne utilise la représentation de l'espace d'état dans le domaine temporel. La représentation de l'espace d'état est un modèle mathématique qui relie l'état du système avec les entrées et les sorties du système par des équations différentielles du premier ordre. Ce domaine de mathématiques est un sujet largement étudié, il existe de nombreux livres et articles couvrant divers aspects et applications.

— Dans la suite on introduit un exemple classique

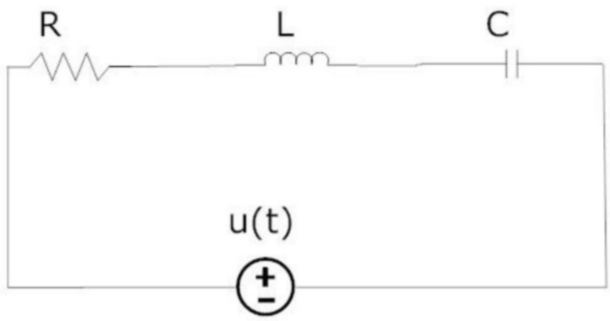

FIGURE 1.1 – Circuit RLC

Le système donné ci-dessous a les propriétés de linéarité et d'invariance par rapport au temps t, où la linéarité signifie que, si l'entrée $u_1(t)$ nous donne $y_{\mathbf{1}}(t)$ et l'entrée $u_{\mathbf{2}}(t)$ nous donne $y_{\mathbf{2}}(t)$, alors pour tout t dans $[0, 1]$ on a

$$au_{\mathbf{1}}(t) + bu_{\mathbf{2}}(t) \to ay_{\mathbf{1}}(t) + by_{\mathbf{2}}(t), \tag{1.1.1}$$

et l'invariance par rapport au temps signifie que, si l'entrée $u(t)$ nous donne $y(t)$, alors $u(t - \tau)$ nous donne $y(t - \tau)$.

Dans la suite, nous pouvons montrer un exemple tiré de la théorie des circuits électrique.

Soit $u(t)$ une tension appliquée à un circuit RLC résultant en courant $i(t)$ (voir figure 1.1).

Les relations de bases régissant la tension et le courant pour les résistances, les inducteurs et les condensateurs sont données par

$$v_L = L\frac{di}{dt},$$

$$C\frac{dv_c}{dt} = i(t),$$

et

$$v_R = i(t)R.$$

Par substitution on obtient

$$v_L = LC\frac{d^2v_c}{dt^2},$$

et

$$v_R = RC\frac{dv_c}{dt}.$$

Sachant que la loi de Kirchoff affirme que $u(t) = v_R + v_c$, alors on a

$$u(t) = LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + RC\frac{dv_c}{dt} + v_c,$$

et si

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_c \\ \dot{v}_c \end{bmatrix},$$

ensuite, on obtient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u(t).$$

Pour plus d'informations sur les équations matricielles et leurs applications aux problèmes de contrôle optimal on peut par exemple voir [1] et [2].

Ce mémoire est divisé en sept chapitres, une conclusion et une bibliographie. Le premier chapitre est une introduction générale, le chapitre deux est une introduction à la théorie des systèmes dynamiques, le troisième chapitre est concerné par la théorie de la stabilité on considérant la stabilité au sens de lyapunov. Le chapitre quatre nous présentons l'observabilité d'un système linéaire contrôlé, pour le cinquième chapitre traite la contrôlabilité, dans le chapitre six nous utilisons les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité pour stabiliser un système, enfin dans le dernier chapitre nous essayons de trouver un contrôle optimal pour un problème de contrôle linéaire quadratique.

CHAPITRE

2

SYSTÈMES DYNAMIQUES

2.1 Système non-linéaire

Dans ce mémoire, nous concentrons principalement sur les systèmes linéaires [] []. Mais bien sûr, la plupart des systèmes physiques que l'on peut rencontrer dans la vie réelle sont non linéaires [] []. Les systèmes non linéaires nécessitent une étude intensive pour couvrir tous leurs aspects. En ce qui concerne le contrôle, on préfère donc souvent linéariser le système autour d'un certain point de fonctionnement. Néanmoins, nous commencerons par décrire des systèmes non linéaires.

Un système non linéaire est donné par les équations

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ ou \\ \dot{x} = f(t, x, u), \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où x est dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et est appelé vecteur d'état et désigne l'état du système à un instant t donné. Le vecteur de contrôle u prend des valeurs dans un ensemble U de $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$, qui est l'ensemble des paramètres de contrôle. La fonction $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ est un vecteur à n dimensions dépendant de x, u, et de t dans le cas d'une variation par rapport au temps, où $(.)^T$ est le vecteur transposé du vecteur $(.)$. Pour une brève discussion sur les solutions des systèmes non linéaires, nous considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Contrairement aux systèmes linéaires, l'existence et l'unicité des solutions ne sont pas garanties. En outre, une solution peut seulement exister dans un intervalle, appelé l'intervalle maximal d'existence. Il existe de nombreux résultats explorant (2.1.2), et nous énonçons ici une d'entrés elles sans preuve. Pour la preuve du théorème cidessous et des résultats plus généraux vous pouvez par exemple consulter $[1, 22]$ où de nombreux résultats sont donnés également dans $[18]$.

Supposons que pour un x arbitraire appartenant à $\mathbb{R}^n$ la fonction f est mesurable et localement intégrable en t et pour les fonctions L de $L^1_+(I)$ (intégrables sur l'intervalle I avec 0 dans I). On ajoute à cela la condition de Lipschitz :

$$\| f(t, x) - f(t, y) \|_{\mathbb{R}^n} \leq L(t) \| x - y \|_{\mathbb{R}^n} . \tag{2.1.3}$$

Alors le système (2.1.2) a une solution unique x dans l'espace des fonctions continues, c'est-à-dire, x et dans $C(I, \mathbb{R}^n)$ pour chaque x_0 dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné qu'une solution unique est trouvée, par sa continuité nous pouvons définir l'opérateur de solution $\{T_{t,s}, t \geq s \geq 0\}$ $[1, p.87]$ qui fait correspondre l'état ξ donné à l'instant s à l'état actuel , $x(t)$, au temps t .

Cette famille d'opérateurs de solution satisfait les propriétés d'évolution ou de semigroupe (voir par exemple []) :

$$\begin{aligned} (T_1) &\quad : \quad T_{s,s} = I, \ \forall s \geq 0. \\ (T_2) &\quad : \quad \lim_{t \downarrow s} T_{t,s}(\xi) = \xi, \forall s \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \\ (T_3) &\quad : \quad T_{t,\tau}(T_{\tau,s}(\xi)) = T_{t,s}(\xi), \forall t \geq \tau \geq s \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

2.2 Systèmes linéaires

Un système dynamique linéaire d'ordre n est décrit par un ensemble de n équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t). \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Nous pouvons exprimer le système (2.2.1) en notation matricielle sous la forme

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t). \tag{2.2.2}$$

Afin de garantir l'existence et l'unicité d'une solution, les coefficients $a_{ij}(t)$ sont généralement supposés continus en t. Un résultat plus fort pour $a_{ij}(t)$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$, localement intégrable est montré dans la section suivante.

Remarque 2.2.1 *Tout au long de ce mémoire, nous utilisons la norme induite ou norme d'opérateur pour la norme d'une matrice : Si les normes vectorielles sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont données, la norme de l'opérateur pour la matrice A de $\mathbb{R}^{n\times m}$ est définie par*

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}. \tag{2.2.3}$$

La norme de l'opérateur possède les propriétés sous-multiplicatives importantes suivantes pour les matrices A, B et le vecteur x

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \|A\|\|x\|, \qquad (2.2.4) \\ \|AB\| &\leq \|A\|\|B\|. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous allons d'abord montrer l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite, nous décrirons à quoi ressemble une telle solution et enfin nous définissons l'opérateur de transition qui résout le système linéaire (2.2.2).

2.2.1 Existence et unicité de la solution

Pour commencer, nous considérons le système homogène

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \ t \geq s, \\ x(s) = \xi. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Dans (2.2.5), le vecteur $x(t)$ de $\mathbb{R}^n$ désigne l'état du système et la matrice $A(t)$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$ représente la matrice qui caractérise le comportement du système.

Théorème 2.2.1 *Considérons le système* (2.2.5) *ci-dessus. Supposons que les éléments* $a_{ij}(t)$ $1 \leq i \leq j \leq n$, *de la matrice* $A(t)$ *sont localement intégrables dans le sens où* $\int_I |a_{ij}(t)|dt < \infty$, *pour tout* $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *et pour tout intervalle fermé fini* I, *disons* $I = [s, T]$. *Alors notre système a une solution unique et absolument continue qui, en outre, dépend continuellement de l'état initial* ξ.

Pour la preuve voir par exemple[]

2.2.2 Matrice fondamentale et matrice de transition

La formule de résolution d'un système linéaire général fait intervenir une matrice appelée matrice fondamentale.

Définition 2.2.1 ***(La matrice fondamentale)*** *Soit* $\gamma_i : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ *avec* $i = 1, \cdots, n$ *la solution unique du problème de la valeur initiale.*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x, \\ x(0) = e_i. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Ici e_i, *pour* $i = 1, \cdots, n$ *désignent les vecteurs unitaires dans* $\mathbb{R}^n$. *La matrice fondamentale est alors la matrice* $X(t)$ *dont les colonnes sont les solutions de* (2.2.6), $X(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)]$.

Il est facile de montrer que les vecteurs $\gamma_i(t)$, pour $i = 1, \cdots, n$, sont linéairement indépendants et que toute solution du système homogène linéaire peut être écrite comme une combinaison linéaire unique de ces vecteurs. En d'autres termes, l'ensemble de toutes les solutions du problème homogène linéaire est un espace vectoriel à n dimensions.

Théorème 2.2.2 *Si* $X(t)$ *est la matrice fondamentale de* $A(t)$, *alors* $X(t)$ *satisfait à*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), \ t > 0, \\ X(0) = I \text{ (la matrice identité).} \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Pour la preuve voir par exemple[]

Corollaire 2.2.1 *La matrice de transition correspondant au système homogène linéaire* (2.2.5), *désignée par* $\Phi(t,s), t \geq s$, *est donnée par*

$$\Phi(t,s) = X(t)X^{-1}(s),\ t \geq s, \tag{2.2.8}$$

et la solution du système homogène linéaire (2.2.5) *est donnée par*

$$x(t) = \Phi(t,s)\xi,\ t \geq s. \tag{2.2.9}$$

Preuve 2.2.1 *Supposons que* $X(t)$ *soit inversible, alors nous avons*

$$\dot{x} = A(t)X(t)X^{-1}(s)\xi = A(t)\Phi(t,s)\xi = A(t)x(t),\ t > 0, \tag{2.2.10}$$

et

$$\lim_{t \downarrow s} x(t) = \xi. \tag{2.2.11}$$

Il reste à démontrer que $X(t)$ *est non-singulier. Pour cela, on considère le problème de la valeur initiale*

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = -Y(t)A(t),\ t \geqslant 0, \\ Y(0) = I. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Encore une fois, nous supposons que les entrées de A *sont localement intégrables, donc par application du théorème* (2.2.2). *l'équation a une solution unique et absolument continue* $Y(t)$. *En calculant la dérivée*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Y(t)X(t)) &= \dot{Y}(t)X(t) + Y(t)\dot{X}(t) \\ &= -Y(t)A(t)X(t) + Y(t)A(t)X(t) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

on voit que le produit de $Y(t)X(t)$ *doit être constant et de* $Y(0)X(0) = I$, *il s'ensuit que* $Y(t)X(t) = I$ *pour tout* $t \geq 0$. *Par conséquent, nous avons*

$$X^{-1}(t) = Y(t), \tag{2.2.14}$$

ce qui montre que la matrice fondamentale $X(t)$ *est non-singulière et que son inverse est également une solution unique d'une équation différentielle matricielle et de plus* $t \to X^{-1}(t)$ *est absolument continue.*

Nous pouvons maintenant énoncer les propriétés fondamentales de la matrice de transition :

$$\begin{aligned}
(P_1) &\ :\ \Phi(t,t) = I, \qquad (2.2.15)\\
(P_2) &\ :\ \Phi(t,\theta)\Phi(\theta,s) = \Phi(t,s),\ s \leq \theta \leq t \text{ (propriété de l'évolution)},\\
(P_3) &\ :\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s) = A(t)\Phi(t,s),\\
(P_4) &\ :\ \frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s) = -\Phi(t,s)A(s),\\
(P_5) &\ :\ (\Phi(t,s))^{-1} = \Phi(s,t).
\end{aligned}$$

La propriété (P_5) peut être dérivée de (P_2), en posant $t = s$ nous obtenons $\Phi(s,\theta)\Phi(\theta,s) = \Phi(s,s) = I \Rightarrow (\Phi(\theta,s))^{-1} = \Phi(s,\theta)$.

2.2.3 Matrice fondamentale pour les systèmes invariants par rapport au temps

La matrice fondamentale $X(t)$ a une forme particulièrement agréable pour le système invariant dans le temps.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (2.2.16)$$

Ici, la matrice fondamentale est de la forme $X(t) = e^{tA}$, où l'exponentielle de la matrice a la définition suivante

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \qquad (2.2.17)$$

et donc la solution de (2.2.16) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0, t \in \mathbb{R}^+. \qquad (2.2.18)$$

2.2.4 Solution du système linéaire de contrôle

Le système linéaire de contrôle est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t > s, \\ x(s) = \xi. \end{cases} \qquad (2.2.19)$$

En plus du vecteur d'état et de la matrice système, nous introduisons la commande $u(t)$ de$\mathbb{R}^{\,d}$ représentant le contrôle et $B(t)$ de $\mathbb{R}^{n\times d}$ la matrice de contrôle.

Théorème 2.2.3 *Supposons que les éléments de la matrice $A(t)$ soient localement intégrables et que ceux de $B(t)$ soient essentiellement bornés, $u(t)$ est une fonction de $L^1([0,t],\mathbb{R}^d)$. Alors la solution continue de* (2.2.19) *: $\Phi(t)\in\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$, est donnée par*

$$\varphi(t)=\Phi(t,s)\xi+\int_s^t \Phi(t,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta,\ t\geq s. \tag{2.2.20}$$

Preuve 2.2.2 *Pour montrer que φ satisfait le problème de valeur initiale* (2.2.15)*, on différencie* (2.2.20) *et en utilisant les propriétés $(P1)$ et $(P3)$ de la matrice de transition définie dans* (2.2.15)*, nous obtenons*

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= A(t)\Phi(t,s)\xi+\int_s^t A(t)\Phi(t,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta+\Phi(t,t)B(t)u(t) \qquad (2.2.21)\\ &= A(t)\varphi(t)+B(t)u(t).\end{aligned}$$

En faisant tendre t vers s et en appliquant $(P1)$ on obtient $\lim\limits_{t\downarrow s}\varphi(t)=\Phi(t,t)\xi=\xi$.

De plus, la solution dépend continuellement de toutes les données, telles que l'état initial, le contrôle et les matrices du système.

CHAPITRE

3

THÉORIE DE LA STABILITÉ

3.1 Définition de la stabilité

Considérons le système homogène, non linéaire et invariant par rapport au temps $\dot{x}(t) = f(x(t))$, où $x(t)$ est dans $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue. En étudiant la stabilité de ce système, nous analysons le comportement du système à un point d'équilibre ou, pour les systèmes ayant des solutions périodiques, nous examinons la stabilité du mouvement périodique. Ici, nous nous concentrerons uniquement sur la stabilité des points d'équilibre. Mathématiquement, la stabilité du système en un tel point d'équilibre peut être réduite à la question de la stabilité à l'origine ou, de manière équivalente, à la stabilité de l'état zéro.

Nous travaillerons donc avec le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)), \\ x(0) = x_0,\ avec\ f(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Ici, l'intensité de la perturbation est donnée par $\|x_0\|$. Nous définissons l'opérateur de transition ou de solution T_t, pour $t \geq 0$ comme dans (2.1.4). Nous énonçons ici trois définitions importantes de la stabilité par rapport à la stabilité de l'état zéro ou de la solution nulle.

Définition 3.1.1 *La solution nulle du système* (3.1.1) *est appelée stable ou stable au sens de Lyapunov si pour tout $R > 0$, il existe un $r = r(R) \leq R$ de sorte que $T_t(B(0,r)) \subset B(0,R), \forall t \geq 0$, où $B(0,r)$ et $B(0,R)$ respectivement, désignent les boules ouvertes centrées sur l'origine de rayon r et R respectivement.*

La définition 3.1.1 nous permet d'obtenir immédiatement la définition de l'instabilité, à savoir que pour tout $R > 0$ donné, nous ne pouvons pas trouver un $r > 0$ tel que $T_t(B(0,r)) \subset B(0,R), \forall t \geq 0$.

Définition 3.1.2 *La solution nulle du système* (3.1.1) *est asymptotiquement stable si elle est stable et pour tout x_0 de $\mathbb{R}^n$, on a $\lim_{t\to\infty} T_t(x_0) = 0$.*

Définition 3.1.3 *La solution nulle du système* (3.1.1) *est exponentiellement stable s'il existe un $M > 0$, et $\alpha > 0$, tel que $\|T_t(x_0)\| \leq Me^{-\alpha t}$, $t \geq 0$.*

D'une manière générale, si un système, dont la solution nulle est stable au sens de Lyapounov, est expulsé de son point d'équilibre, il reste à proximité et exécute des mouvement autour de ce point. Si la solution nulle du système est asymptotiquement stable, il finit par y revenir et, en cas de stabilité exponentielle, le système retourne au point d'équilibre exponentiellement.

3.2 Théorie de la stabilité de Lyapounov

Il existe essentiellement deux façons d'analyser la stabilité du système (3.1.1), à savoir la méthode de linéarisation et la méthode de Lyapunov.

Pour appliquer la méthode de linéarisation, on calcul le développement de Taylor autour d'un point d'équilibre pour obtenir le Jacobien en ce point et, puis on détermine la stabilité en calculant ses valeurs propres. La méthode de linéarisation n'est pas abordée dans ce mémoire. Au lieu de cela,nous concentrons sur la théorie de Lyapunov car elle sera d'une grande importance dans la suite.

3.2.1 Fonctions de Lyapunov et critère de stabilité

Définition 3.2.1 *Considérons le système* (3.1.1)*. Soit* Ω *un ensemble ouvert dans* $\mathbb{R}^n$ *et* 0 *dans* Ω*., une fonction* $V : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *pour* $n \geq 1$*, est dite fonction de Lyapunov si elle satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} (L1) &\ :\ V \in C^1(\Omega), \\ (L2) &\ :\ V \textit{ définie positive} : V(x) > 0 \forall x \in \Omega \textit{ et } V(0) = 0, \\ (L3) &\ :\ \dot{V}(x(t)) = (DV, f)(x(t)) = (V_x x(t)), f(x(t)) \leq 0, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

le long de toute trajectoire $x(t) = T_t(x_0) = x(t, x_0)$*,pour* x *et* x_0 *dans* Ω*.*

La définition 3.1.1 montre que $\dot{V}(x(t))$ est une fonction de l'état. Évalué à un certain état x, $\dot{V}(\bar{x}(t))$ donne le taux d'accroissement de V le long de la trajectoire du système passant par $\bar{x}$. Le grand avantage des fonctions de Lyapounov est que le calcul de ce taux ne nécessite pas le calcul préalable de la trajectoire du système. Malheureusement, il n'existe pas d'algorithme pour déterminer une fonction de Lyapunov. Mais dans le cas où nous trouvons une fonction de Lyapunov, la stabilité de la solution nulle est garantie.

Théorème 3.2.1 ***(Théorème de Lyapunov)*** *Considérons le système dynamique* (3.1.1) *et supposons qu'il existe une fonction* V *satisfaisant les propriétés* $(L1) - (L3)$*, alors le système est stable au sens de Lyapunov par rapport à la solution nulle. De plus, si l'inégalité stricte est valable pour* $(L3)$*, à savoir* $\dot{V}(x(t)) < 0$*, le système* (3.1.1) *est asymptotiquement stable par rapport à la solution nulle.*

Pour la preuve voir par exemple[]

3.2.2 Théorème de Lyapunov pour les systèmes linéaires

Si nous appliquons le théorème de Lyapunov aux systèmes linéaires invariants par rapport au temps, nous obtenons la matrice de Lyapunov et le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 *Soit* A *dans* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *la matrice du système* $\dot{x} = Ax$*. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *La matrice A est stable, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres ont une partie réelle négative.*

2. *Pour toutes les matrices Q de M_s^+ (symétrique définie positive), il existe une solution unique P de M_s^+ de l'équation matricielle de Lyapunov suivante :*

$$A^T P + PA = -Q. \tag{3.2.2}$$

Pour la preuve voir par exemple [].

3.2.3 Linéarisation par la méthode de Lyapunov

Considérons le système (3.1.1) avec un point d'équilibre à l'origine. Si f est continûment différentiable, nous pouvons linéariser le système autour de l'origine et analyser le système linéaire invariant par rapport au temps correspondant à $\dot{x} = Ax(t)$, où $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ dans $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Théorème 3.2.3 *Si* (3.1.1) *a un point d'équilibre à l'origine et f est dans $C^1(\mathbb{R}^n)$.Si $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ est stable, alors* (3.1.1) *est asymptotiquement stable par rapport à l'origine.*

Pour la preuve voir par exemple [].

CHAPITRE

4

OBSERVABILITÉ

4.1 Matrice d'observabilité

Dans de nombreux systèmes que nous pouvons rencontrer en pratique, l'état interne $x(t)$ de $\mathbb{R}^n$ n'est pas directement accessible. C'est pourquoi nous introduisons le modèle de système suivant

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in I_{s,T} = [s, T]\,, \tag{4.1.1}$$

$$y(t) = H(t)x(t),\ t \in I_{s,T}. \tag{4.1.2}$$

Le nouveau vecteur introduit $y(t)$ est la trajectoire de sortie et prend des valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Habituellement, la dimension de la sortie est inférieure à la dimension de l'état du système, c'est-à-dire que $m < n$. Pour avoir des dimensions compatibles pour les matrices, étant donné A dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice H doit être dans $\mathbb{R}^{m\times n}$.

La question se pose maintenant de savoir si, à partir d'une trajectoire de sortie donnée, le comportement de l'ensemble du système peut être déterminé. Pour étudier cette question, nous définissons d'abord l'observabilité d'un système.

Définition 4.1.1 *Le système défini par les équations* (4.1.1) *et* (4.1.2) *est observable sur la période $I_{s,T}$, si à partir des données d'entrée $u(t)$, t de $I_{s,T}$ et de la trajectoire de sortie $y(t)$, t de $I_{s,T}$, l'état initial, et donc la trajectoire entière de l'état, est uniquement identifiable.*

Comme mentionné dans la définition, mathématiquement, le problème de l'observabilité du système est équivalent au problème de la recherche de l'état initial x_0. Par conséquent, nous pouvons approcher le problème directement par l'état initial.

Nous avons vu que la solution de (4.1.1), avec l'état initial $x(s) = \xi$, est donnée par (2.2.19). En insérant (4.1.2) dans cette solution, on obtient

$$y(t,\xi) = H(t)\Phi(t,s)\xi + \int_s^t H(t)\Phi(t,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta,\ t \in I_{s,T}. \tag{4.1.3}$$

Par la définition 4.1.1, nous avons $y(t)$ et $u(t)$ donnés. Ainsi, en considérant un état initial ξ de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons définir

$$\tilde{y}(t,\xi) = y(t,\xi) - \int_s^t H(t)\Phi(t,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta = H(t)\Phi(t,s)\xi. \tag{4.1.4}$$

La matrice $H(t)\Phi(t,s)$ est de dimension $m\times\ n$ et n'a donc pas d'inverse. Cela signifie que nous ne pouvons pas trouver ξ directement. Pour approfondir le problème, nous introduisons la matrice d'observabilité :

$$Q_T(s) = \int_s^T \Phi^{^T}(t,s)H^{^T}(t)H(t)\Phi(t,s)dt. \tag{4.1.5}$$

La matrice d'observabilité $Q_T(s)$, considérée comme une fonction du temps de départ t de $I_{s,T}$, est symétrique semi-définie positive et est la solution de l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_T(t) &= -A^{^T}(t)Q_T(t) - Q_T(t)A(t) - H^{^T}(t)H(t),\ t \in [s,t), \\ Q_T(T) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Le fait que $Q_T(t)$ satisfait (4.1.6) peut être constaté en prenant la dérivée par rapport à t dans $Q_T(T) = \int_t^T \Phi^{^T}(\theta,t)H^{^T}(\theta)H(\theta)\Phi(\theta,t)d\theta$ en utilisant la règle de Leibniz et en appliquant les propriétés de l'opérateur de transition. La condition terminale est donnée par la définition intégrale de la matrice d'observabilité. Si la matrice d'observabilité est donnée, nous disposons du théorème suivant pour déterminer si un système donné est observable.

Théorème 4.1.1 *Le système donné par les équations* (4.1.1) *et* (4.1.2) *est observable sur* $I_{s,T}$ $\Leftrightarrow$ *la matrice d'observabilité* $Q_T(T)$ *est définie positive.*

Preuve 4.1.1 *(Observabilité* $\Rightarrow Q_T(s) > 0$*) Nous supposons que le système est observable, c'est-à-dire que deux états initiaux distincts* $\xi \neq \eta$ *produisent deux sorties distinctes* $\tilde{y}(t,\xi) \neq y(t,\xi)$ *On obtient*

$$\begin{aligned} \int_s^T \|\tilde{y}(t,\xi) - y(t,\eta)\|^2 dt &> 0, \ \forall \xi \neq \eta, \qquad (4.1.7)\\ &\Rightarrow \int_s^T \|H(t)\Phi(t,s)(\xi-\eta)\|^2 dt > 0, \ \forall \xi \neq \eta, \\ &\Rightarrow \int_s^T (\Phi^T(t,s)H^T(t)H(t)\Phi(t,s)(\xi-\eta),(\xi-\eta))dt > 0, \ \forall \xi \neq \eta, \\ &\Rightarrow (Q_T(s)(\xi-\eta),(\xi-\eta)), \ \forall \xi \neq \eta. \end{aligned}$$

Par (4.1.7) *la matrice d'observabilité est définie positive lorsque le système est observable.*

($Q_T(s) > 0 \Rightarrow$ *observabilité) Par contradiction, supposons que* $Q_T(s) > 0$ *mais que le système n'est pas observable. Dans ce cas, il existe deux états initiaux*

distincts produisant des sorties identiques, c'est-à-dire , $\tilde{y}(t,\xi) = y(t,\eta)$, $t \in I_{s,T}$. *Par* (4.1.7), *on obtient*

$$(Q_T(s)(\xi-\eta),(\xi-\eta)) = 0 \qquad (4.1.8)$$

Mais $Q_T(s)$ *est définie positive, ce qui implique que* $\xi = \eta$.

Puisque $A(t)$ et $H(t)$ varient dans le temps, le système peut être observable sur une période de temps, mais ne pas l'être à une autre. Par conséquent, $Q_T(s)$ est une fonction des intervalles de temps.

4.2 Condition de rang d'observabilité pour les systèmes invariants dans le temps

D'après le résultat précédent, déterminer si la matrice d'observabilité est définie positive implique l'intégration de fonctions à valeur matricielle. Cela n'est pas toujours facile. Pour un système invariant dans le temps, sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Hx, \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

nous avons l'alternative plus simple suivante :

Théorème 4.2.1 ***(condition de rang d'observabilité de Kalman)*** *La condition nécessaire et suffisante pour l'observabilité du système* (4.2.1) *est que la matrice* $\left[H^T, A^T H^T, \left(A^T\right)^2 H^T, \cdots, \left(A^T\right)^{n-1} H^T\right]$ *a un rang complet , c'est-à-dire*

$$Observabilit\acute{e} \Leftrightarrow Rang(\left[H^T, A^T H^T, \left(A^T\right)^2 H^T, \cdots, \left(A^T\right)^{n-1} H^T\right] = n. \qquad (4.2.2)$$

CHAPITRE

5

CONTRÔLABILITÉ

Étant donné un système linéaire, variant ou invariant dans le temps, ainsi que son état initial. Nous voulons souvent conduire le système à un état cible désiré. Dans ce cas, le problème consiste à trouver une stratégie de contrôle appropriée à partir d'un ensemble d'entrées admissibles, de sorte que le système atteigne cet état cible dans un certain intervalle de temps. Il est également très probable que le système soit instable, et la question se pose alors de savoir si le système peut être stabilisé. Nous verrons dans le prochain chapitre sur la stabilisabilité que si le système est contrôlable, nous pouvons construire une commande en retour qui stabilisera le système. Cela peut se faire dans les deux cas, lorsque l'état interne ou uniquement la sortie est disponible . Cependant, si seule la sortie est disponible, nous devons introduire un observateur, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

5.1 Matrice de contrôlabilité

Nous considérons le système linéaire à variante temporelle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \text{ pour } t \in R^+, \\ x(s) = x_0. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Prenons à nouveau le vecteur d'état x dans $\mathbb{R}^n$ puis A dans $\mathbb{R}^{n\times n}$. De plus, laissons $u(t)$ dans $\mathbb{R}^d$ et donc B dans $\mathbb{R}^{n\times d}$. Nous définissons les stratégies de contrôle admissibles U_{ad} comme l'espace des fonctions localement carrées intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire u dans $U_{ad} = L_2^{Loc}(R^+, R^d)$. En ce qui concerne les systèmes physiques, cette définition des contrôles admissibles est logique car l'énergie du contrôle est généralement limitée. Pour de nombreux systèmes, non seulement l'énergie, mais aussi les amplitudes de $u(t)$ sont limitées, de sorte que l'ensemble de contrôle est un sous-ensemble fermé et borné, donc compact, de $\mathbb{R}^d$. Nous donnons maintenant la définition de la contrôlabilité telle qu'elle figure dans $[1, p.182]$

Définition 5.1.1 *Le système* (5.1.1) *avec les contrôles admissibles U_{ad} est dit contrôlable à l'instant T par rapport à la paire (x_0, x_1), toutes deux dans $\mathbb{R}^n$, s'il existe une stratégie de contrôle u dans U_{ad} sur l'intervalle de temps $I_{s,T} = [s, T]$, de sorte que l'état atteint à l'instant T coïncide avec l'état cible donné x_1. Le système est dit globalement contrôlable sur la période $I_{s,T}$, si la contrôlabilité est assurée pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^n$.*

La définition ci-dessus décrit la contrôlabilité comme la capacité du système à atteindre des états cibles avec l'aide des contrôles admissibles. Il est donc logique de décrire ce états cibles comme des ensembles atteignables.

Définition 5.1.2 *Pour un intervalle de temps $I_{s,T}$ l'ensemble atteignable à l'instant T est donné par*

$$A_s(T) = \left\{ z \in R^n : z = \int_s^T \Phi(T,\theta)B(\theta)u(\theta)d\theta, \ u \in U_{ad} \right\}. \tag{5.1.2}$$

Comme l'état initial x_0 et l'état final x_1 sont arbitraires, on a $z(t) = x1 - \Phi(t,s)x_0$ et donc la définition de l'ensemble atteignable dans (5.1.2) *n'inclut pas l'état initial.*

Comme dans le chapitre précédent sur l'observabilité, pour étudier en premier la contrôlabilité, nous introduisons la matrice de contrôlabilité

$$C_s(t) = \int_s^t \Phi(t,\theta)B(\theta)B^T(\theta)\Phi^T(t,\theta)d\theta, \text{ pour } s \leq t. \tag{5.1.3}$$

Comme nous l'avons vu pour l'observabilité, en différenciant l'équation (5.1.3), nous obtenons l'équation différentielle matricielle suivante à partir de laquelle la matrice de contrôlabilité $C_s(t)$ peut être obtenue par

$$\begin{cases} \dot{C}_s(t) = A(t)C_s(t) + C_s(t)A^T(t) + B(t)B^T(t), \text{pour } t \in (s,T], \\ C_s(s) = 0. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Et maintenant nous énonçons le théorème concernant la contrôlabilité globale.

Théorème 5.1.1 *Le système* (5.1.1) *est globalement contrôlable sur l'horizon* $I_{s,T} = [s,T]$ *équivaut à* $C_s(T) > 0$.

Pour la preuve voir [1].

5.2 Condition de rang de contrôlabilité pour les systèmes invariants dans le temps

Pour le système suivant invariant dans le temps,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Hx, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

la contrôlabilité globale peut être déterminée à l'aide d'une condition de rang comme pour le problème d'observation.

Théorème 5.2.1 (Condition de rang de contrôlabilité de Kalman) *Le système invariant dans le temps* (5.2.1) *est globalement contrôlable ce qui équivaut à dire que la condition de rang suivante s'applique :*

$$rang(A \mid B) = rang\left(\left[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B\right]\right) = n. \tag{5.2.2}$$

Pour la preuve voir par exemple [].

5.3 Dualité de la contrôlabilité et de l'observabilité :

L'observabilité et la contrôlabilité semblent être des propriétés très similaires d'un système linéaire. En effet, ces deux concepts sont des problèmes duaux. Pour formaliser cette affirmation, notons qu'étant donné le système décrit dans (4.1.1) et (4.1.2), on peut définir le dual correspondant par

$$\begin{cases} \dot{x} = -A^T(t)\tilde{x}(t) + H^T(t)\tilde{u}(t), \text{ pour tout } t \text{ dans } I_{s,T} \\ \tilde{y} = B^T(t)\tilde{x}(t),\ t \text{ dans } I_{s,T}, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Le théorème de dualité établit la relation entre les deux systèmes.

Théorème 5.3.1 (Théorème de dualité) *Soit $\Phi(t,s)$ la matrice de transition du système décrit par* (4.2.1) *et* (7.3.4) *et $\Psi(t,s)$ la matrice de transition du système* (5.3.1)*. Nous avons*

1. $\Psi(t,s) = \Phi^T(s,t)$.

2. Le système (4.1.1) *et* (4.1.2) *est contrôlable (respectivement observable) sur $I_{s,T}$ $\Leftrightarrow$ le système* (5.3.1) *est observable (contrôlable) sur $I_{s,T.}$*

Preuve 5.3.1 1. *Par* (2.2.15) $(P3)$ *, on a*

$$\dot{\Psi}(t,s) = -A^T(t)\Psi(t,s). \tag{5.3.2}$$

En multipliant par $\Phi^T(t,s)$ et en utilisant la propriété de $\dot{\Phi}(t,s)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Phi^T(t,s)\dot{\Psi}(t,s) + \Phi^T(t,s)A^T(t)\Psi(t,s) &= 0, \\ \Phi^T(t,s)\dot{\Psi}(t,s) + \dot{\Phi}^T(t,s)\Psi(t,s) &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi^T(t,s)\Psi(t,s)\right] &= 0, \\ &\Rightarrow \Phi^T(t,s)\Psi(t,s) = \textit{ constante.} \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Par (2.2.15) $(P1)$ $\Phi^T(s,s) = \Psi(s,s) = I$ *et pour $t = s$ on a*

$$\begin{aligned} \Phi^T(t,s)\Psi(t,s) &= I, \\ &\Rightarrow \Psi(t,s) = \left[\Phi^T(t,s)\right]^{-1} = \Phi^T(t,s). \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Dans la dernière étape, nous avons utilisé la propriété $(P5)$ *de* (2.2.15). *Cela montre que les matrices de transitions des deux systèmes sont duales l'une de l'autre.*

2. *En comparant la définition de la matrice de contrôlabilité*

$$C_s(T) = \int_s^T \Phi(T,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(T,\tau)d\tau, \tag{5.3.6}$$

avec la matrice d'observabilité

$$Q_T(s) = \int_s^T \Phi^T(\tau,s)H^T(\tau)H(\tau)\Phi(\tau,s)d\tau, \tag{5.3.7}$$

on voit que le $C_s(T)$ *est identique au* $Q_T(s)$ *associé à la paire* $(-A^T(t), B^T(t))$ *et inversement,* $Q_T(s)$ *est identique à* $C_s(T)$ *associé à la paire* $(-A^T(t), B^T(t))$. *Pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, la dualité peut être dérivée des conditions de rang.*

Corollaire 5.3.1 *Si pour un système linéaire invariant dans le temps la paire* (A, B) *est contrôlable, alors la paire* (A^T, B^T) *est observable. De même, si la paire* (A, H) *est observable, alors la paire* (A^T, H^T) *est contrôlable.*

Preuve 5.3.2 *Nous ne prouvons que la première affirmation, car la preuve de la deuxième affirmation est identique en appliquant la condition de rang correspondante. Étant donné que la paire* (A^T, B^T) *est observable, nous avons* $rang(A^T \mid B^T) = n$. *Comme*

$$\begin{aligned} rang(A^T \quad | \quad & B^T) = Rang\left(\left[(B^T)^T, (A^T)^T(B^T)^T, \cdots, ((A^T)^T)^{n-1}(B^T)\right]\right) \\ = \quad & rang(A \mid B) = n, \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

il s'ensuit que (A, B) *est contrôlable.*

CHAPITRE

6

STABILITÉ

6.1 Contrôle feeback

Dans les chapitres précédents, nous avons vu qu'il est possible de déterminer si un système est observable ou contrôlable. Dans ce chapitre, nous verrons qu'étant donné ces deux propriétés, nous pouvons aller plus loin et concevoir des contrôleurs qui permettent au système de se comporter de la manière souhaitée. Dans la démonstration du théorème (5.1.1), nous avons déjà construit une politique de contrôle qui dirige le système vers un état désiré. C'est ce qu'on appelle une commande en boucle ouverte. Cependant, cela peut ne pas être suffisant dans la pratique en raison d'écarts dans les états initiaux ou les matrices impliquées. En particulier pour les systèmes instables, les écarts peuvent devenir arbitrairement grands et le contrôle en boucle ouverte peut échouer.

La méthode la plus robuste consiste à mesurer l'état (ou la trajectoire de sortie si l'état n'est pas accessible), et, dès que le système commence à s'écarter de la trajectoire souhaitée, l'entrée est adaptée en conséquence. Cette méthode est appelée contrôle par rétroaction. Dans ce chapitre, nous verrons que si un système est contrôlable, alors il est stabilisable par un contrôle feedback. Si les états du système ne sont pas accessibles, mais qu'ils sont stabilisables et observables, nous pouvons construire un estimateur d'état ou un observateur, qui sera ensuite utilisé pour stabiliser le système original.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons qu'au système linéaire suivant invariant dans le temps

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Hx. \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Pour montrer que la contrôlabilité du système (6.1.1) implique la stabilisabilité, nous donnerons d'abord une preuve directe tirée de $[1, p.208]$ en utilisant la théorie de Lyapunov pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Ensuite, nous donnerons une brève description de la méthode de placement des valeurs propres ou de placement des pôles.

Théorème 6.1.1 (Retour d'état) *Si le système donné dans* (6.1.1) *est contrôlable, alors il est stabilisable par un retour d'état linéaire, où l'opérateur de retour K et le contrôle de retour correspondant sont donnés par*

$$\begin{cases} K = -B^T \tilde{C}_T^{-1}, \\ u = Kx, \end{cases} \tag{6.1.2}$$

où

$$\tilde{C}_T = \int_0^T e^{-sA} B B^T e^{-sA^T} ds. \tag{6.1.3}$$

Preuve 6.1.1 *La preuve montre que $(A + BK)$ est stable, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres ont des parties réelles négatives. Comme nous supposons que notre système est contrôlable, $\tilde{C}_T$ est inversible pour $T > 0$ et donc la matrice K est bien définie.*

Considérons le vecteur

$$\int_0^T \frac{d}{ds} \left(e^{-sA} B B^T e^{-sA^T} \right) ds, \tag{6.1.4}$$

et en dérivant une fois sous le signe de l'intégrale et une fois en utilisant l'intégration par parties. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^T -Ae^{-sA} B B^T e^{-sA^T} - e^{-sA} B B^T e^{-sA^T} A^T ds &= e^{-sA} B B^T e^{-sA^T} \Big|_0^T \\ &= e^{-TA} B B^T e^{-TA^T} - B B^T, \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

En introduisant la rétroaction (6.1.3) *dans le côté gauche de l'équation ci-dessus* (6.1.6) *et en utilisant* (6.1.1), *nous obtenons*

$$\begin{aligned}(A+BK)\,\tilde{C}_T+\tilde{C}_T\,(A+BK)^T &= \left(A\tilde{C}_T+\tilde{C}_TA^T\right)+BK\tilde{C}_T+\tilde{C}_TK^TB^T \quad (6.1.6)\\ &= \left(A\tilde{C}_T+\tilde{C}_TA^T\right)-2BB^T\\ &= -\left(BB^T+e^{-TA}BB^Te^{-TA^T}\right).\end{aligned}$$

En définissant

$$\Gamma=\left(BB^T+e^{-TA}BB^Te^{-TA^T}\right). \tag{6.1.7}$$

et $\tilde{A}=(A+BK)$, *nous pouvons réarranger l'équation* (6.1.7) *en une équation de Lyapounov telle qu'elle est décrite au chapitre* 3.

$$\tilde{A}\tilde{C}_T+\tilde{C}_T\tilde{A}^T=-\Gamma. \tag{6.1.8}$$

Par notre hypothèse de contrôlabilité globale, le second terme de Γ *est défini positif, tout comme le premier. Nous avons donc* Γ *dans* M_s^+ *une matrice carrée symétrique définie positive. Maintenant, en par application du théorème , la matrice* $\tilde{A}^T=(A+BK)^T$ *est stable et donc sa transposée est stable aussi. Ainsi, en utilisant* K *comme opérateur de rétroaction, nous obtenons une commande de rétroaction stabilisante.*

6.1.1 Placement des valeurs propres par retour d'état

Comme indiqué, nous donnerons ici une brève description de la méthode de placement des valeurs propres. Pour une lecture plus approfondie, vous pouvez vous référer à [9] ou [13].

En général, la méthode de placement des valeurs propres suit le principe selon lequel, si le système est contrôlable, nous pouvons assigner les valeurs propres de $(A+BK)$ en choisissant l'opérateur de rétroaction K. Cela signifie essentiellement qu'il est possible pour le système en boucle fermée d'avoir n'importe quel polynôme caractéristique désiré.

Théorème 6.1.2 (placement des valeurs propres) *Soit* (A,B) *une paire contrôlable de matrices, c'est-à-dire* $rang(A|B)=n$. *Alors, étant donné n'importe quel polynôme réel monique d'ordre n* $p(\lambda)=\lambda^n+r_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+r_1\lambda+r_{0,}$ *il existe une matrice réelle* K *telle que* $A+BK$ *a pour polynôme caractéristique* $p(\lambda)$.

Nous ne donnerons ici qu'un aperçu de la preuve pour un système à une seule entrée, ce qui signifie que $u(t)$ dans $\mathbb{R}$ et donc B dans $\mathbb{R}^n$ est un vecteur b.

Avant de commencer la preuve, nous introduisons la forme canonique contrôlable pour les systèmes à une seule entrée. La forme canonique contrôlable est une forme spéciale de matrices de système pour laquelle la contrôlabilité est toujours valable, où elle est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6.1.9}$$

Théorème 6.1.3 *La matrice de contrôlabilité $(A|b)$ est de rang n et le polynôme caractéristique de A est donné par*

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0. \tag{6.1.10}$$

Pour la preuve voir par exemple [].

Le problème de placement des valeurs propres pour les systèmes multivariables est plus complexe, mais sa solution peut être construite à partir du cas mono varié comme décrit dans $[13, p.143]$.

6.2 Contrôle par rétroaction de sortie

Dans la réalité, on a souvent accès qu'à la sortie du système et l'état du système est caché. Le problème consiste alors de concevoir une fonction de rétroaction qui utilise les mesures de la sortie pour décider de l'entrée à appliquer au système. L'étude de la rétroaction de l'état nous a permis de constater que nous pouvons construire un opérateur de rétroaction pour stabiliser le système. Malheureusement, nous ne pouvons pas construire un tel opérateur directement pour la rétroaction de sortie. Une idée consiste maintenant à calculer une estimation de l'état en utilisant l'entrée et la sortie accessibles du système. Ainsi, au lieu d'utiliser la valeur réelle de l'état, nous appliquons son estimation à un contrôleur de retour d'état qui nous donne alors l'entrée du système, voir la figure (6.1) pour un diagramme illustratif. Une façon d'aborder ce problème est encore une fois la méthode de placement des valeurs propres comme illustré dans [9] ou [13]. Nous appliquant ici les théorèmes de [1].

— Dans la suite on introduit un exemple lassique

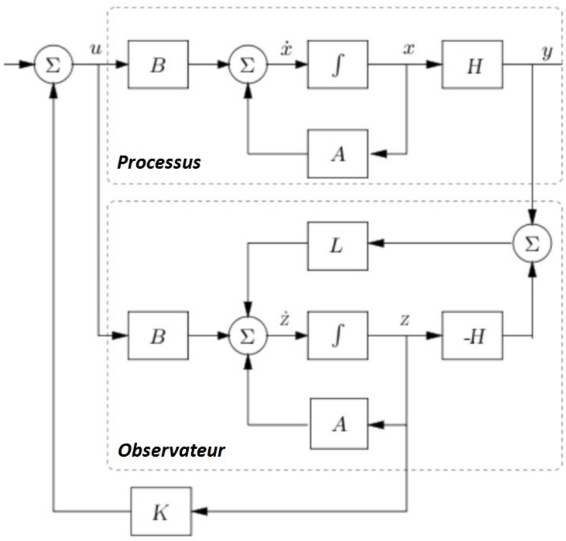

FIGURE 6.1 – Schéma fonctionnel d'une commande par rétroaction avec observateur.

Considérons le système (6.1.1). Pour ce que nous appelons le problème de l'estimateur, nous devons produire une estimation $\tilde{x}$ de x à partir de l'observation de $\tilde{y}$, qui possède au moins la propriété de suivi asymptotique. Cela signifie que nous introduisons un estimateur de la forme

$$\dot{x} = \tilde{A}\tilde{x} + Bu + Ly, \tag{6.2.1}$$

où les matrices $\tilde{A}$ et L sont choisies de telle sorte que

$$\lim_{t\to\infty} \|\tilde{x}(t) - x(t)\| = 0. \tag{6.2.2}$$

La solution au problème de l'estimateur est énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 6.2.1 *Si le système est observable, c'est-à-dire $rang(A|H) = n$, le problème de l'estimateur a une solution. et l'estimateur est donné par*

$$\dot{x} = (A - LH) + Bu + Ly,\ L = C_T^{-1}H^T, \tag{6.2.3}$$

où

$$C_T = \int_0^T e^{-tA} H^T H e^{-tA} dt, \tag{6.2.4}$$

est la matrice d'observabilité.

Pour la preuve voir par exemple [].

Théorème 6.2.2 ***(Output Feedback)*** *Si le système original* (6.2.1) *est contrôlable et observable, alors il existe un compensateur (observateur) stabilisant donné par*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BKz, \\ \dot{z} = (A + BK - LH)\, z + LHx, \end{cases} \tag{6.2.5}$$

où K est donné par l'expression (6.1.2) *et L est donné par* (6.2.3) *du théorème précédent.*

Preuve 6.2.2 Considérons le système de dimensions $2n$ donné par $(6.2.12)$. Nous introduisons la matrice non singulier de dimension $2n \times 2n$

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}. \tag{6.2.6}$$

T est son propre inverse puisque $T^2 = I_{2n}$. Nous continuons en utilisant T pour la transformation des coordonnées

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \tag{6.2.7}$$

Sous cette transformation, le système $(6.2.1)$ devient

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ (A + BK - LH) - \tilde{A} & \tilde{A} - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \tag{6.2.8}$$

En choisissant $\tilde{A} = A + BK - LH$, la matrice du système de $(6.2.16)$ se réduit à

$$A = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LH \end{bmatrix}. \tag{6.2.9}$$

Comme la matrice A est diagonale par blocs, nous constatons que le polynôme caractéristique du système en boucle fermée est le suivant

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A - BK)\det(\lambda I - A + LH). \tag{6.2.10}$$

Il s'ensuit que l'ensemble des valeurs propres du système en boucle fermée est l'union de celles de $A + BK$ et celles de $A - LH$. Ainsi, si $A + BK$ et $A - LH$ sont asymptotiquement stables, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable, le système en boucle fermée est également asymptotiquement stable. Maintenant, si la paire (A, B) est contrôlable, alors, comme nous l'avons vu dans le théorème (6.1.1), nous pouvons choisir une matrice K dans $M_{d\times n}$ pour que $A+BK$ soit stable. De même, si la paire (A, H) est observable, alors par dualité (A^T, H^T) est contrôlable, c'est-à-dire que le système $\dot{\xi} = A^T\xi + H^Tv$ est globalement contrôlable. Il existe donc une matrice $\tilde{K}$ dans $M_{m\times n}$ telle que $A^T + H^T\tilde{K}$ est stable ainsi que sa transposée $A + \tilde{K}^TH.$ On peut donc choisir la matrice $L = -\tilde{K}^T$ ce qui rend le système compensé stable et par conséquent le système original l'est aussi.

CHAPITRE

7

CONTRÔLE LINÉAIRE QUADRATIQUE

Jusqu'à présent, nous n'avons vu que si le système satisfait certaines propriétés, il est possible de construire une boucle ouverte ou un contrôle par rétroaction pour stabiliser le système ou le forcer à atteindre un certain état. Nous allons maintenant aller plus loin et tenter d'obtenir une commande optimale. Cela signifie qu'étant donné un système, nous exprimerons les performances du système contrôlé en termes de fonction coût.

Le problème sera alors de trouver un contrôleur optimal qui minimise cette fonction de coût. Nous aborderons ce problème par la méthode de la programmation dynamique, élaborée par Richard E. Bellman dans les années soixante. L'idée centrale de Bellman était d'obtenir le contrôle optimal par le biais d'une fonction de valeur qui satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi. À peu près à la même époque, en union soviétique, Lev S.Pontryagin a formulé le principe du maximum en se basant sur des méthodes variationnelles ou multiplicatives (voir [1, 10, 22]). Ces approches sont assez différentes et ont leurs avantages et leurs inconvénients ; alors que la programmation dynamique fournit un contrôle en boucle fermée, le principe du maximum est l'approche la plus générale.

Le point de départ ici est le problème général de contrôle optimal. Pour l'approche de programmation dynamique, nous utilisons le principe d'optimalité de Bellman pour obtenir l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). En appliquant cette équation à un système linéaire et à une fonction coût quadratique, nous obtenons une solution au problème du régulateur quadratique linéaire (LQR) en temps fini sous la forme d'une solution de retour d'état en résolvant l'équation différentielle matricielle de Riccati.

La commande quadratique linéaire est un sujet largement étudié. Sa popularité n'est pas seulement due au fait qu'elle fournit une théorie complète pour les systèmes linéaires invariants et variant dans le temps, mais aussi parce qu'elle constitue un outil de conception puissant. Des algorithmes logiciels permettant de calculer les matrices correspondantes et les solutions du problème LQR peuvent être appliqués à un système donné.

Pour plus de détails on peut se référer par exemple à [8] et [6].

7.1 Un problème de contrôle optimal

Pour le problème général de contrôle optimal, considérons un système non linéaire variant dans le temps, donné par l'équation suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \text{ pour } t \text{ dans } I_{s,T} = [s, T], \\ x(s) = x_0, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

où s, T, x_0 sont fixés. Le problème est de déterminer la fonction de contrôle $u(t)$, $t \in I_{s,T}$ qui minimise la fonctionnelle coût donnée par

$$I(s, x_0, u(t)) = \int_s^T \phi(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau + m(T, x(T)). \tag{7.1.2}$$

Comme d'habitude, $x(t)$ dans $\mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u(t)$ dans $\mathbb{R}^d$ est une fonction carrée intégrable de sorte que (7.1.1) a une solution unique. Les fonctions scalaires ϕ et m sont continues par rapport à leurs arguments respectifs et généralement non négatives. Le terme $m(\cdot)$ représente une pénalité terminale et $\phi(\cdot)$ est la fonction de coût de fonctionnement.

7.1.1 Le principe d'optimalité

En suivant Bellman, nous introduisons la fonction de valeur définie comme suit

$$V(t, x(t)) = \inf_{u[t,T]} \int_t^T \phi(\tau, x, u) d\tau + m(T, x(T)), \tag{7.1.3}$$

pour un t arbitraire dans $I_{s,T}$ et un état initial arbitraire $x(t)$. Notons que dans (7.1.3) nous n'avons pas écrit x et u en fonction du temps t car le problème de minimisation (7.1.2) peut être trouvé pour n'importe quel t.

Nous introduisons maintenant le principe d'optimalité. L'idée de base du principe d'optimalité est que le système peut être caractérisé à l'instant t par son état $x(t)$. Cela signifie que l'état actuel résume complètement tous les effets de l'entrée $u(\tau)$ pour τ avant l'instant t.

Théorème 7.1.1 (Principe d'optimalité) *Si $u^*(\tau)$ est optimal sur l'intervalle $[t, T]$, à partir de l'état $x(t)$, alors $u^*(\tau)$ est nécessairement optimal sur le sous-intervalle $[t + \Delta t, T]$ pour tout Δt tel que $T - t \geq \Delta t > 0$.*

Preuve 7.1.1 *On va faire une démonstration par contradiction, supposons qu'il existe un u^{**} qui conduit à une plus petite valeur de*

$$\int_{t+\Delta t}^T \phi(\tau, x, u) d\tau + m(T, x(T)), \tag{7.1.4}$$

que u^* sur le sous-intervalle $[t+\Delta t, T]$. Nous définissons donc un nouveau contrôle $u(\tau)$ donné par

$$u(\tau) = \begin{cases} u^*(\tau) \text{ pour } t \leq \tau \leq t + \Delta t, \\ u^{**}(\tau) \text{ pour } t + \Delta t \leq \tau \leq T. \end{cases} \tag{7.1.5}$$

Sur l'intervalle $[t, T]$, on a donc

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \phi(\tau, x^*, u^*) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T \phi(\tau, x^{**}, u^{**}) d\tau + m(T, x^{**}(T)) \\ < & \int_t^{t+\Delta t} \phi(\tau, x^*, u^*) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T \phi(\tau, x^*, u^*) d\tau + m(T, x^*(T)), \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

ce qui est une contradiction puisque nous avons supposé que u^* est optimal sur l'intervalle $[t, T]$.

Fondamentalement, le principe d'optimalité montre que la commande optimale $u[t,T]$ peut être trouvée en transformant la commande optimale $u[t,t_1]$ à la commande optimale $u[t_1,T]$ pour t_1 dans $[t,T]$ comme suit

$$\begin{aligned} V(t,x(t)) &= \inf_{u[t,T]} \left[\int_t^{t_1} \phi(\tau,x,u)d\tau + \int_{t_1}^T \phi(\tau,x,u)d\tau + m(T,x(T)) \right] \\ &= \inf_{u[t,t_1) \bigcup u[t_1,T]} \left[\int_t^{t_1} \phi(\tau,x,u)d\tau + \int_{t_1}^T \phi(\tau,x,u)d\tau + m(T,x(T)) \right] \\ &= \inf_{u[t,t_1)} \left[\int_t^{t_1} \phi(\tau,x,u)d\tau + \inf_{u[t_1,T]} \int_{t_1}^T \phi(\tau,x,u)d\tau + m(T,x(T)) \right]. \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Et alors on peut écrire

$$V(t,x(t)) = \inf_{u[t,t_1)} \left[\int_t^{t_1} \phi(\tau,x,u)d\tau + V(t_1,x(t_1)) \right]. \tag{7.1.8}$$

7.1.2 L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

Nous allons maintenant extraire l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) pour le problème général de contrôle optimal. La (HJB) est une forme différentielle de (7.1.8) que nous obtenons en faisant tendre t_1 vers t. Nous supposons que l'équation est continuellement différentiable en x et t car nous calculerons son développement de Taylor à un moment de la preuve. On écrit $t_1 = [t+\Delta t]$ et on obtient donc pour (7.1.8)

$$V(t,x(t)) = \inf_{u[t,t+\Delta t]} \left[\int_t^{t+\Delta t} \phi(\tau,x,u)d\tau + V(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) \right]. \tag{7.1.9}$$

Nous appliquons maintenant le théorème de la valeur moyenne à l'intégrale de (6.1.9). Comme nous l'avons mentionné, nous supposons que nous pouvons calculer le développement de Taylor de $V(t+\Delta t, x(t+\Delta t))$ (le développement partiel de $V(t+\Delta t, x(t+\Delta t))$ existent et sont bornées) autour de $V(t,x(t))$. On obtient donc pour un certain α de $[0,1]$

$$\begin{aligned} V(t,x(t)) &= \inf_{u[t,t+\Delta t]} [\phi(t+\alpha\Delta t, x(t+\alpha\Delta t), u(t+\alpha\Delta t))\Delta t + \\ &\quad +V(t,x(t)) + \frac{\partial V^T}{\partial x}\dot{x}\Delta t + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + o(\Delta t)^2] \\ &= V(t,x(t)) + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \\ &\quad + \inf_{u[t,t+\Delta t]} [\phi(t+\alpha\Delta t, x(t+\alpha\Delta t), u(t+\alpha\Delta t))\Delta t + \\ &\quad + \frac{\partial V^T}{\partial x} f(t,x,u)\Delta t + o(\Delta t)^2], \end{aligned} \tag{7.1.10}$$

où $o(\Delta t)^2$ représente les termes de deuxième ordre et d'ordre supérieur de Δt. L'équation ci-dessus donne maintenant les résultat suivants

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \inf_{u[t,t+\Delta t]}[\phi(t+\alpha\Delta t, x(t+\alpha\Delta t), u(t+\alpha\Delta t)) + \\ +\frac{\partial V}{\partial x}^T f(t,x,u) + o(\Delta t)]. \tag{7.1.11}$$

Soit maintenant Δt qui tend vers 0, on obtient alors

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \inf_{u(t)}\left[\phi(t,x,u) + \frac{\partial V}{\partial x}^T f(t,x,u)\right], \tag{7.1.12}$$

qui est l'équation HJB souhaitée pour l'optimalité avec la condition limite

$$V(T, x(T)) = m(T, x(T)). \tag{7.1.13}$$

où (7.1.12) représente une équation aux dérivées partielles pour $V(t,x)$. La minimisation de (7.1.12) donne $u(t)$ en fonction de $x(t)$ et $\frac{\partial V}{\partial x}$. Si une solution $V(t,x)$ de (7.1.12) et de (7.1.13) peut être trouvée, il en résulte que $u(t)$ est une fonction de $x(t)$, c'est-à-dire un contrôle par retour d'état. Dans le cas général, il est très difficile, voire impossible, d'obtenir $u(t)$ analytiquement. Nous verrons plus tard que pour un système linéaire avec une fonction coût quadratique, une solution analytique peut être trouvée.

Nous définissons maintenant

$$\begin{cases} J\left(t,x,u,\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \phi(t,x,u) + \frac{\partial V}{\partial x}^T f(t,x,u), \\ J^* = \inf_{u(t)} J\left(t,x,u,\frac{\partial V}{\partial x}\right), \end{cases} \tag{7.1.14}$$

Nous pouvons donc réécrire (7.1.12) avec ses conditions aux limites comme suit

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t} = J^*, \\ V(T,x(T)) = m(T,x(T)). \end{cases} \tag{7.1.15}$$

De plus, nous laissons

$$u^*(t) = \arg\left[\inf_{u(t)} J\left(t,x,u,\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right], t \in I_{s,T}. \tag{7.1.16}$$

La dérivation ci-dessus de l'équation de HJB n'est qu'une condition nécessaire. Pour les conditions suffisantes, nous avons le théorème suivant.

Théorème 7.1.2 ***(Conditions suffisantes pour l'optimalité)*** *Supposons que la fonction* $V(t,x)$ *satisfaisant* (7.1.12) *sur* $([s,T] \times \mathbb{R}^n)$ *ainsi que sa condition limite* (7.1.13) *existent. De plus, un contrôle donné* $u^*[s,T]$ *satisfaisant* (7.1.16) *existe. Alors* $u^*[s,T]$ *est la commande optimale minimisant la fonction de coût* (7.1.2) *et la valeur minimale de la fonction coût est* $V(s,x_0)$.

Preuve 7.1.2 *Notons d'abord que*

$$\int_s^T \frac{dV(\tau,x(\tau))}{d\tau} d\tau = V(T,x(T)) - V(s,x_0), \tag{7.1.17}$$

et

$$\frac{dV(\tau,x(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial V(\tau,x(\tau))}{\partial \tau} + \frac{\partial V^T(\tau,x(\tau))}{\partial x} f(\tau,x(\tau),u(\tau)). \tag{7.1.18}$$

Nous pouvons donc réécrire (7.1.1) *en ajoutant* (7.1.17) *de la manière suivante*

$$\begin{aligned} I(s,x_0,u(t)) &= \qquad (7.1.19) \\ &= \int_s^T \left(\phi(\tau,x(\tau),u(\tau) + \frac{\partial V^T(\tau,x(\tau))}{\partial x} f(\tau,x(\tau),u(\tau) + \frac{\partial V(\tau,x(\tau))}{\partial \tau} \right) d\tau + \\ &\quad + m(T,x(T)) - V(T,x(T)) + V(s,x_0) \\ &= V(s,x_0) + \int_s^T \left(J\left(\tau,x,u,\frac{\partial V}{\partial x}\right) - J^*\left(\tau,x,u^*,\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right) d\tau. \end{aligned}$$

Nous avons obtenu le dernier résultat par l'utilisation de la condition aux limites et la définition (7.1.15) *de* J^*. *Par notre hypothèse pour* u^*, *nous avons pour tout* u ,

$$J^*\left(\tau,x,u^*,\frac{\partial V}{\partial x}\right) \leq J\left(\tau,x,u,\frac{\partial V}{\partial x}\right). \tag{7.1.20}$$

de cette équation, nous voyons que l'intégrale de (7.1.19) *a une valeur minimale de zéro, lorsque*

$$u[s,T] = u^*[s,T], \tag{7.1.21}$$

et donc le coût minimum est $V(s,x_0)$, *c'est-à-dire*

$$I(s,x_0,u[s,T]) \geq I(s,x_0,u^*[s,T]) = V(s,x_0), \tag{7.1.22}$$

pour tout $u[s,T]$.

7.2 Problème LQR en temps fini

Nous utilisons maintenant les résultats précédents pour obtenir une solution du problème LQR. Puisque nous essayons de trouver le contrôle optimal $u^*(t)$ sur l'intervalle fini $I_{s,T}$, nous l'appelons le problème LQR en temps fini.

Considérons le système linéaire à variante temporelle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \text{pour } t \text{ dans } I_{s,T}, \\ x(s) = x_0, \text{ avec } x_0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{7.2.1}$$

avec les dimensions habituelles des matrices. Nous pouvons alors formuler (7.1.2), (pour ce cas, en laissant la fonctionnelle coût de fonctionnement) $\phi(t, x(t), u(t)) = (Q(t)x(t), x(t)) + (R(t)u(t), u(t))$ et le coût terminal $m(T, x(T)) = (Mx(T), x(T))$.Et $Q(t)$, $R(t)$, M sont des matrices symétriques de tailles appropriées. En outre, les matrices $Q(t)$ et M sont semi-définies positives et $R(t)$ est définie positive. La fonction coût est alors donnée par

$$I(s, x_0, u(t)) = \int_s^T [Q(\tau)x(\tau), x(\tau) + R(\tau)u(\tau), u(\tau)]\, d\tau + (Mx(T), x(T). \tag{7.2.2}$$

7.2.1 Extraction de l'équation matricielle de Riccati

Dans ce chapitre, nous allons montrer que la solution du problème LQR en temps fini peut être trouvée en résolvant une équation différentielle matricielle, qui est la fameuse équation différentielle matricielle de Riccati.

Théorème 7.2.1 *Considérons le système linéaire donné par* (7.2.1) *avec la fonction coût quadratique* (7.2.2). *La loi de commande optimale par retour d'état est donnée par*

$$u^*(t) = \underbrace{-R^{-1}(t)B^T(t)P(t)}_{k(t)}x(t), \tag{7.2.3}$$

où $P(t)$ est la solution de l'équation à matrice différentielle matricielle de Riccati

$$-\dot{P}(t) = Q(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t), \text{pour } t \text{ dans } I_{s,T}, \tag{7.2.4}$$

avec la condition aux limites

$$P(T) = M. \tag{7.2.5}$$

Preuve 7.2.1 *Les équations* (7.2.2) *et* (7.1.20) *se traduisent par*

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t,xt))}{\partial t} = \inf_{u(t)} \left[Q(t)x(t), x(t) + R(t)u(t), u(t)) + \frac{\partial V^T}{\partial x} \left(A(t)x(t) + B(t)u(t) \right) \right], \\ V(T, x(T)) = (Mx(T), x(T)). \end{cases} \tag{7.2.6}$$

La minimisation de (7.2.6) *se fait en fixant son gradient par rapport à* $u(t)$ *au vecteur zero*

$$2R(t)u^*(t) + B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{7.2.7}$$

et comme $R(t)$ *est définie positive, nous obtenons pour* $u^*(t)$

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{7.2.8}$$

Remplaçons maintenant $u(t)$ *dans* (7.2.6) *par l'expression dans* (7.2.8) *pour obtenir l'équation différentielle partielle que* $V(t, x(t))$ *doit satisfaire*

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t} = (Q(t)x(t), x(t)) + \frac{\partial V^T}{\partial x} A(t)x(t) - \frac{1}{4}\frac{\partial V^T}{\partial x} B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x}, \\ V(T, x(T)) = (Mx(T), x(T)). \end{cases} \tag{7.2.9}$$

Comme nous avons défini les matrices de la fonction de coût comme étant de forme quadratique, il est raisonnable de supposer que la fonction V *est également quadratique en* x. *Nous prenons donc comme fonction candidate pour* V

$$V(t, x(t)) = (P(t)x(t), x(t)), \tag{7.2.10}$$

où $P(t)$ *est symétrique. Le gradient de* V *par rapport à* x *est alors* $2P(t)x(t)$. *Ainsi* (7.2.9) *devient*

$$\begin{aligned} -(\dot{P}(t)x(t), x(t)) &= (Q(t)x(t), x(t)) + 2(x(t)P(t)A(t)x(t) - \\ &\quad -x^T(t)P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T P(t)(t)x(t), \\ (P(T)x(T), x(T)) &= (Mx(T), x(T)). \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

Nous pouvons écrire $2P(t)A(t)$ *comme la somme d'un terme symétrique et d'un terme antisymétrique*

$$2P(t)A(t) = \underbrace{P(t)A(t) + A^T(t)P(t)}_{\text{symétrie}} + \underbrace{P(t)A(t) - A^T(t)P(t)}_{\text{antisymétrie}} P(t)A(t) - A^T(t)P(t), \tag{7.2.12}$$

et puisque pour une matrice antisymétrique $S(t)$ il est vrai que

$$(S(t)x(t), x(t)) = -(S(t)x(t), x(t)), \tag{7.2.13}$$

on peut écrire

$$2x^T(t)P(t)A(t)x(t) = x^T(t)(A^T(t)P(t) + P(t)A(t))x(t). \tag{7.2.14}$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation différentielle matricielle de (7.2.11) *comme suit*

$$\begin{aligned} -x^T(t)\dot{P}(t)x(t) &= x^T(t)[Q(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - \\ &\quad -P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]x(t), \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

ce qui nous conduit à (7.2.4) *pour t dans $I_{s,T}$ avec la condition limite* (7.2.5). *Si une solution $P(t)$ peut être trouvée, à partir de* (7.2.7) *nous obtenons la loi de contrôle optimale comme indiqué dan*(7.2.3), *qui est une loi de commande par rétroaction. Pour obtenir la commande, $P(t)$ doit être précalculée à partir de la condition aux limites et satisfaire* (7.2.4).

7.2.2 Solution de l'équation matricielle de Riccati

Nous montrons ici que l'équation de Riccati non linéaire peut être résolue en la transformant en un système linéaire équivalent.

Théorème 7.2.2 *Supposons que les matrices A et Q ont des entrées localement intégrables, les éléments de B sont localement carrés intégrables et que les éléments de R et R^{-1} sont des fonctions mesurables essentiellement bornées. Alors pour tout M dans $M_{n\times n}$, les équations* (7.2.4) *et* (7.2.5) *ont une unique solution $P(t)$ absolument continue dans $(I_{s,T}, M_{n\times n})$.*

Preuve 7.2.2 *Il y a plusieurs façons de prouver ce résultat. Nous montrerons une méthode directe telle que donnée dans* $[1, p.311]$ *ou* $[8, p.16]$ *en transformant l'équation non linéaire en un système linéaire équivalent, qui est alors résolu par son opérateur de transition correspondant. Une autre façon de résoudre cette équation se trouve dans* [14].

Considérons le système linéaire

$$\dot{Z} = A(t)Z,\ Z(T) = \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}. \tag{7.2.16}$$

La matrice $\mathcal{A}(t) \in M_{2n\times 2n}$ joue un rôle important dans les problèmes linéaires quadratiques et est appelée matrice hamiltonienne. Elle est donnée par

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t) \\ -Q(t) & -A^{T}(t) \end{bmatrix}. \tag{7.2.17}$$

(7.2.16) *avec la matrice hamiltonienne est une équation différentielle linéaire dans $M_{2n\times n}$. D'après nos hypothèses sur les matrices, les éléments de $\mathcal{A}$ sont localement intégrables. Il existe donc un opérateur de transition unique $\Psi(t,s)$ qui donne une solution unique à* (7.2.16)

$$Z(t) = \Psi^{-1}(T,t) \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}, \text{ pour } t \text{ dans } [s,T]. \tag{7.2.18}$$

Soit $X(t)$ et $Y(t)$ des matrices $n\times\ n$ telles que

$$Z(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}. \tag{7.2.19}$$

Nous montrons maintenant que la solution de (7.2.4) *et* (7.2.5) *est donnée par $P(t) = Y(t)X^{-1}(t)$. En prenant la dérivée par rapport au temps et en utilisant l'identité $\frac{d}{dt}(X^{-1}(t)) = -X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t)$, on obtient*

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \dot{Y}(t)X^{-1}(t) + Y(t)\dot{X}^{-1}(t) = (-Q(t)X(t) - A^{T}(t)Y(t))X^{-1}(t) \\ &\quad -Y(t)X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t) \\ &= (-Q(t)X(t) - A^{T}(t)Y(t))X^{-1}(t) - Y(t)X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t) \\ &= -Q(t) - A^{T}(t)P(t) - P(t)(A(t)X(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)Y(t))X^{-1}(t) \\ &= -Q(t) - A^{T}(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t). \end{aligned} \tag{7.2.20}$$

Il s'agit de l'équation (7.2.4) *et comme $Y(T) = M$ et $X(T) = I$, $P(T) = M$ est également valable.*

Lorsque les matrices $\{A, B, Q, R\}$ varient dans le temps, la matrice (7.2.17) *et donc l'équation linéaire* (7.2.16) *varient également dans le temps et une solution analytique peut ne pas être disponible.*

Cependant, nous pouvons exprimer la solution pour $X(t)$ et $Y(t)$ en termes de matrice de transition $\Phi(t,T)$. Pour ce faire, nous partitionnons la matrice de transition

$2n \times 2n$ en quatre blocs de taille égale

$$\Phi(t,T) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,T) & \Phi_{12}(t,T) \\ \Phi_{21}(t,T) & \Phi_{22}(t,T) \end{bmatrix}. \tag{7.2.21}$$

Avec la condition aux limites de (7.2.16)*, on obtient*

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi_{11}(t,T)X(T) + \Phi_{12}(t,T)Y(T) \\ &= \Phi_{11}(t,T) + \Phi_{12}(t,T)M, \\ Y(t) &= \Phi_{21}(t,T)X(T) + \Phi_{22}(t,T)Y(T) \\ &= \Phi_{21}(t,T) + \Phi_{22}(t,T)M. \end{aligned} \tag{7.2.22}$$

La solution pour $P(t)$ devient donc finalement

$$P(t) = [\Phi_{21}(t,T) + \Phi_{22}(t,T)M]\,[\Phi_{11}(t,T) + \Phi_{12}(t,T)M]^{-1}. \tag{7.2.23}$$

Lorsque les matrices sont invariantes dans le temps, une solution explicite est disponible en termes de fonctions exponentielles matricielles. Un aperçu de la façon d'obtenir ces solutions est donné dans $[8, p.17]$.

Remarque 7.2.1 *Dans le théorème et la preuve ci-dessus, nous n'avons pas exigé que les matrices $\{Q, R, M\}$ soient symétriques, (semi) définies positives. Cependant, nous avons utilisé cette hypothèse dans l'extraction de l'équation matricielle de Riccati et nous verrons plus loin qu'elle est également utilisée pour obtenir la stabilité du système de rétroaction.*

7.3 Problème LQR en régime permanent

Dans les applications pratiques, le problème de la variante temporelle peut s'avérer difficile car il faut connaître les matrices variables dans le temps de la commande de rétroaction sur la période d'optimisation. Pour les systèmes invariants dans le temps, le problème devient plus simple car les matrices $\{A, B, Q, R\}$ sont invariantes dans le temps. En outre, l'intervalle d'optimisation est infini, c'est-à-dire que T est proche de l'infini.

Le problème consiste alors à trouver une commande optimale qui minimise la fonction coût

$$I(x_0, u[0,\infty)) = \int_0^\infty [(Qx, x) + (Ru, u)]dt, \tag{7.3.1}$$

sous réserve de la contrainte dynamique

$$\dot{x} = Ax + Bu, \text{ et } x(0) = x_0 \text{ dans } \mathbb{R}^n. \tag{7.3.2}$$

Comme précédemment, la matrice Q est symétrique et semi-définie positive et la matrice R est symétrique et définie positive.

Nous commençons par le problème général de contrôle optimal à horizon infini avant de passer au cas linéaire quadratique.

7.3.1 Conditions générales d'optimalité

Considérons le système dynamique décrit par

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \text{ et } x(0) = x_0 \text{ dans } \mathbb{R}^n. \tag{7.3.3}$$

pour laquelle la fonction coût suivante est formulée

$$I(x_0, u(t)) = \int_0^\infty \psi(x(\tau), u(\tau))d\tau. \tag{7.3.4}$$

De nouveau, pour minimiser la fonction coût I, nous recherchons des commandes de rétroaction de la forme $u(t) = \mu(x(t))$. Ainsi, au lieu de (7.3.4), nous écrivons

$$I(x_0, \mu) = \int_0^\infty \psi(x(\tau), \mu(x(\tau)))d\tau. \tag{7.3.5}$$

Le système en boucle fermée doit également être asymptotiquement stable, ce qui signifie que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \text{pour tout } x_0 \text{ dans } \mathbb{R}^n. \tag{7.3.6}$$

Ainsi, l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad} contient $\mu((x(t))$, pour lequel (7.3.3) a une solution unique $x(t)$ qui satisfait (7.3.6).

Le problème de contrôle optimal est de trouver une loi de contrôle, $\mu^*(x(t))$ dans U_{ad} qui minimise (7.3.5)

$$\mu^* = Arg\left[\inf_{\mu\in U_{ad}} \int_0^\infty \psi(x(\tau), \mu(x(\tau)))d\tau\right]. \tag{7.3.7}$$

Pour la fonction de valeur de ce problème, nous définissons

$$V(x_0) = \inf_{\mu\in U_{ad}} I(x_0, \mu). \tag{7.3.8}$$

Ceci suggère de rechercher la fonction de valeur générale $V(x(t))$ avec le problème donné étant l'évaluation de V à $x = x_0$. Le résultat suivant fournit cette approche.

Théorème 7.3.1 *S'il existe une loi de contrôle $u = \mu^*(x(t))$ dans U_{ad} et un $V(x(t))$ dans $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $0 \leq V(x) \leq (Tx, x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ pour une matrice T symétrique définie positive et*

a

$$\frac{\partial V^T}{\partial x} f(x(t), \mu^*(x(t))) + \psi(x(t), \mu^*(x(t))) = 0, \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}^n. \tag{7.3.9}$$

b

$$\frac{\partial V^T}{\partial x} f(x(t), u(x(t))) + \psi(x(t), u(x(t)) \geq 0, \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}^n, \text{pour tout } u \text{ dans } U_{ad}. \tag{7.3.10}$$

c'est-à-dire

$$J\left(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}\right) \geq J\left(x, \mu^*(x), \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0.$$

Alors $\mu^*(x(t))$ est le contrôle optimal minimisant (7.3.4).

Preuve 7.3.1 *Soit $u(t) = \mu^*(x(t))$, alors*

$$\begin{aligned} \frac{dVx(t)}{dt} &= \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x(t), \mu^*(x(t))) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{=0} \\ &= -\psi(x(t), \mu^*(x(t))), \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

comme dans (7.3.9).

Nous intégrons de 0 à τ

$$V(x(\tau)) - V(x_0) = -\int_0^\tau \psi(x(t), \mu^*(x(t)))dt, \tag{7.3.12}$$

et puisque par hypothèse $V(x(\tau)) \leq (Tx(\tau), x(\tau))$ et $x(\tau)$ tend vers 0, il s'ensuit,

$$\lim_{\tau \to \infty} V(x(\tau)) = 0. \tag{7.3.13}$$

On en déduit que

$$V(x_0) = I(x_0, \mu^* x(t))). \tag{7.3.14}$$

Laissons maintenant $u(t) = \mu(x(t))$ être une loi de contrôle arbitraire admissible et laissons $x(t)$ représenter la solution de (7.3.3). *En intégrant* (7.3.10)

$$V(x(\tau)) - V(x_0) = \int_0^\tau \frac{\partial V^T}{\partial x} f(x(t), \mu(x(t))dt \geq -\int_0^\tau \psi(x(t), \mu(x(t)))dt, \tag{7.3.15}$$

ou

$$V(x_0) \leq V(x(\tau) + \int_0^\tau \psi(x(t), \mu(x(t)))dt. \tag{7.3.16}$$

En faisant tendre τ vers ∞ et en utilisant (7.3.13) *et* (7.3.14)*, on obtient*

$$I(x_0, \mu^*(x(t))) \leq I(x_0, \mu(x(t))), \tag{7.3.17}$$

et de plus

$$V(x_0) = \inf_{\mu \in Uad} I(x_0, \mu(x(t))). \tag{7.3.18}$$

Nous passons maintenant au problème de LQR à horizon infini ou en régime permanent.

7.3.2 Equation algébrique de Riccati

Pour le problème LQR en régime permanent, nous considérons à nouveau la fonctionnelle coût donnée dans (7.3.1) et le système (7.3.2) et essayons de trouver les fonctions $V\ (x(t))$ et $\mu^*(x(t))$ satisfaisant (7.3.9) et (7.3.10). Nous avons donc pour l'optimalité

$$\frac{\partial V^T}{\partial x}(Ax + B\mu^*) + (Qx, x) + (R\mu^*, \mu^*) = 0, \tag{7.3.19}$$

et pour un $\mu(x(t))$ admissible arbitraire

$$\frac{\partial V^T}{\partial x}(Ax + B\mu) + (Qx, x) + (R\mu, \mu) \geq 0. \tag{7.3.20}$$

Maintenant, si nous prenons

$$V(x) = (\bar{P}x, x), \tag{7.3.21}$$

et

$$\mu^*(x(t)) = -R^{-1}B^T\bar{P}x, \tag{7.3.22}$$

alors les conditions (7.3.19) et (7.3.20) sont valables si l'équation matricielle suivante est valable

$$A^T\bar{P} + \bar{P}A + Q - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} = 0. \tag{7.3.23}$$

L'équation ci-dessus est la célèbre équation matricielle algébrique de Ricatti (EAR). Il reste maintenant à démontrer que cette équation a une solution unique sous certaines conditions et que, si une telle solution peut être trouvée, le système de rétroaction est stable.

Théorème 7.3.2 (Existence et stabilité de la solution LQR en régime permanent) *Étant donné le problème LQR avec $M = 0$, $R > 0$, $Q = D^T D$, où la paire (A, D) est observable et la paire (A, B) est contrôlable, alors la solution du problème LQR en régime permanent existe, en particulier, il existe une solution unique $\bar{P}$ de (EAR) définie positivement à (EAR)* (7.3.23). *De plus, le système optimal en boucle fermée $\dot{x} = (A - BK)$, avec $K = R^{-1} B^T \bar{P}$, est asymptotiquement stable.*

En fait, le résultat d'existence et de stabilité pour (ARE) peut être obtenu pour les conditions plus faibles de stabilisabilité et d'unicité. conditions plus faibles de stabilisabilité et de détectabilité. Pour la définition de la détectabilité, se référer à $[1, p.167]$. On peut montrer que la stabilisabilité est suffisante pour que $P(t)$ soit borné et que la détectabilité est tout ce qui est nécessaire pour garantir que A_c est stable. Avec la condition d'observabilité remplacée par la détectabilité, cependant, la matrice $\bar{P}$ ne peut être que semi-définie positive. En particulier, on peut montrer que la stabilisabilité et la détectabilité sont les seules conditions requises par la dynamique du système pour que la matrice Hamiltonienne définie dans (7.2.18) n'ait pas de valeurs propres purement imaginaires où ce point est développé en détail dans $[6, p.651]$.

CONCLUSIONS

Étant donné un système dynamique linéaire, la méthode de l'espace d'états pour analyser le système et construire des lois de contrôle (à la fois en boucle ouverte et en boucle fermée) est une théorie complète qui fournit de nombreuses méthodes puissantes. Une fois que nous avons obtenu les propriétés de stabilité, d'observabilité et de contrôlabilité du système, notre but est d'obtenir une loi de commande, qui puisse stabiliser un système d'une part, et stabiliser un système potentiellement instable, deuxièmement, pouvoir orienter le système vers un état d'objectif souhaité.

Nous avons montré que l'optimisation linéaire quadratique peut être utilisée pour construire des lois de contrôle de rétroaction optimales en conjonction avec une fonction coût.

Ces méthodes de conception sont applicables à la fois aux systèmes variant dans le temps et invariants dans le temps, et ne sont donc pas seulement un concept intéressant d'un point de vue mathématique, mais aussi très utiles dans la pratique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ahmed, N. U., Dynamic Systems and Control with Applications. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2006.

[2] Basar, T., Bernhard, P., H^{∞}-Optimal Control and Related Minimax Problems. A Dynamic Game Approach. Second Edition. Birkhaeuser, Boston, 2008.

[3] Benner, P., Control Theory. Fakultaet fuer Mathematik, Technische Universitaet Chemnitz. Chemnitz, 2006.

[4] Bernstein, D., S., Matrix Mathematics. Theory, Facts and Formulas. Second Edition. Princeton University Press, Princeton, 2009.

[5] Betounes, D., Differential Equations. Theory and Applications, Second Edition. Springer, New York, 2010.

[6] Bhattacharyya, S., P., Datta, A., Keel, L., H., Linear Control Theory. Structure, Robustness and Optimization. Taylor and Francis Group, LLC, Boca Raton, 2009.

[7] Chen, C. T., Linear System Theory and Design, Third Edition. Oxford University Press, New York, 1999.

[8] Dorato, P., Abdallah, C. T., Cerone, V., Linear Quadratic Control. An Introduction. Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 2000.

[9] Fairman, F. W., Linear Control Theory. The State Space Approach. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 1998.

[10] Kirk, D., E., Optimal Control Theory. An Introduction. Dover Publications, Inc.,Mineola, 2003.

[11] Levin, J., J., On the Matrix Riccati Equation. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 10, No. 4 (Aug., 1959), pp. 519-524.

[12] Luenberger, D. G., Dynamic Systems. Theory, Models, and Applications. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1979.

[13] Lygeros, J., Ramponi, F., Lecture Notes on Linear System Theory. ETH Zurich, Zurich, 2010.

[14] Nazarzadeh, J., Razzaghi, M., Nikravesh, K., Y., Solution of the Matrix Riccati Equation for the Linear Quadratic Control Problems. Math. Comput. Modelling vol. 27, No. 7 (1998), pp. 51-55.

[15] Ramponi, F., Noteson Lyapunov's Theorem. control.ee.ethz.ch 126 ifalst docs lyapunov.pdf

[16] Reid, W., T., A Matrix Differential Equation of Riccati Type. American Journal of Mathematics, Vol.68, No. 2 (Apr., 1946), pp 237-246.

[17] Rugh, W., J,, Linear System Theory, Second Edition. Prentice Hall, Inc., NewJersey, 1996.

[18] Haddad, W. M., Chellaboina, V., Nonlinear Dynamical Systems and Control. A Lyapunov-Based Approach. Princeton University Press, Princeton, 2007.

[19] Hsu, Sze-Bi, Ordinary Differential Equations with Applications. World Scientific-Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2005.

[20] Sima, V., Algorithms for Linear-Quadratic Optimization. Marcel Dekker, Inc. New York,.

[21] Sontag, E., D., Mathematical Control Theory. Deterministic Finite Dimensional Systems. Second Edition. Springer, New York, 1998.

[22] Zabczyk, J., Mathematical Control Theory. An Introduction. Birkhaeuser, Boston, 2008.

[23] Zhang, F., Matrix Theory. Basic Results and Techniques. Springer, New York.