الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY

جامعة باجي مختار-عنابـــــــــــــة

Faculté : des Sciences
Département : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Contrôle Optimale

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème:

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE EN NORME L^∞
POUR UNE APPROXIMATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS D'UNE EQUATION QUASI-LINEAIRE PARABOLIQUE

Présenté par : *Mokrane Aya*
Encadrante : *Harbi Abida* *M.C.A.* *à L'université d'annaba*

Jury de Soutenance :

Bouras Mohamed Cherif	Professeur	U.B.M.ANNABA	Président
Haiour Mohamed	Professeur	U.B.M.ANNABA	Examinateur

Année Universitaire : 2022/2023

REMERCIEMENTS

J E remercie avant tous ALLAH pour son aide, ALLAH qui m'a donné la force,la volonté et la moral pour accomplir mon étude en master en mathématique

J E tiens `a remercier mon directrice de thèse. Harbi Abida qui m'a beaucoup aidée et a travaillé avec moi avec soin et m'a toujours généreusement donné le temps de partager ses grandes connaissances et son expérience. Qu'elle trouver ici l'expression de ma profonde gratitude

J E voudrais remercier très vivement à Monsieur Mohamed Cherif BOURAS - professeur en Mathématiques à l'Université d'Annaba et Monsieur HAIOUR Mohamed – professeur en Mathématiques à l'Université d'Annaba qui ont accepté de faire partie du jury de mémoire, ainsi que pour leurs remarques et suggestions constructives qui ont permisde parfaire la qualitéé du présent mémoire

J E remercie également tous mes collègues mathématiciens et tous les professeurs du dd́épartement de Mathématiques de l'Université de d'Annaba

.

Dédicaces

Pour le sourire, la patience et l'effort de mon père Salim, pour celui sans sa détermination, je n'aurais pas atteint ce que je suis, et pour le grisonnement de sa tête qui en témoigne

Pour les yeux de ma mère Saida, qui s'est toujours souciée de mon confort. À la belle femme qui était et est toujours le soutien et l'épaule qui ne se lasse ni ne s'ennuie

à mes frères. Ma force, j'espère que tu atteindras les plus hauts niveaux de réussite

à mes amis et compagnons de toujours qui m'ont encouragé et ne m'ont pas laissé seul

Je ne saurais terminer sans remercier vivement toutes les personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permise d'atteindre ce point.

A toute la famille Mokrane, et la famille Mansouri.

Résumé

Résumé : l'objectif principal de ce travail est l'étude du comportement asymptotique d’une équation quasi-linéaire parabolique transformée en un système d’équations elliptique. Le travail porte sur l’existence et l’unicité de la solution et une démonstration du comportement asymptotique en utilisant la norme uniforme en combinant un schéma numérique par la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis

Mots clés : Equation quasi-linéaire parabolique, comportement asymptotique, éléments finis, différance finis, norme uniforme.

Abstract

Abstract: The main objective of this work is the study of the asymptotic behavior of a quasi-linear parabolic equation transformed into an elliptical system of equations. The work focuses on the existence and uniqueness of the solution and a demonstration of the asymptotic behavior using the uniform norm by combining a numerical scheme by the finite difference method and the finite element method.

Key words : Parabolic quasi linear equality, asymptotic behavior, finite elements, the uniform norm, finite difference.

الملخص

الملخص : الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة السلوك المقارب لمعادلة قطع مكافئ شبه خطية تتحول إلى نظام بيضاوي من المعادلات. يركز العمل على وجود الحل وتفرده وإثبات السلوك المقارب باستخدام المعيار الموحد من خلال الجمع بين المخطط العددي بطريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المحدودة

الكلمات المفتاحية : معادلة شبه متغيرة مكافئ ، سلوك مقارب ، عناصر محدودة ، تباين محدود ، معيار موحد

TABLE DES MATIÈRES

1 Introduction

La modélisation mathématique de nombreux problèmes en sciences et en science de l'ingénieur conduit aux équations aux dérivées partielles dépendant du temps. Par conséquent, les méthodes d'approximation de la solution de problèmes avec condition initiale pour des équations aux dérivées partielles paraboliques ou hyperboliques d'évolution présentent un intérêt particulier.

Pour résoudre numériquement les problèmes d'évolutions, la méthode des différences finies est appliquée pour la variable temporelle ainsi qu'une combinaison de discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis.

Pour l'étude et résultats sur la résolution numérique et l'erreur d'approximation pour les variables spatiales on réfère respectivement à [2], [4], [6] et [7].

Dans ce travail on s'intéresse au comportement asymptotique en norme L^∞ d'une classe d'équations paraboliques non-linéaires où la non-linéarité de l'équation aux dérivées partielles repose sur la non-linéarité du terme source dépendant de la solution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + cu(t,x) = f(u(t,x)),\ (t,x) \in [0,T] \times [0,1] \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ en } \Omega = [0,1] \text{ La condition initiale} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \text{ Conditions aux limites de type Dirichlet} \end{cases} \tag{1.1}$$

et où l'équation aux dérivées partielle du problème (1.1) est une équation parabolique non-linéaire qui peut être caractériser comme une variante de l'équation de la Chaleur en dimension une avec un terme source inconnu et l'équation Fischer [1].

Le comportement asymptotique de la solution consiste à mesurer l'erreur entre la solution du problème stationnaire associé au problème (1.1) et la solution discrète à l'instant final T.

L'approche repose en premier lieu, sur une semi-discrétisation en temps où la méthode des différences finie est utilisée pour approcher la dérivée partielle d'ordre un par rapport à la variable temporelle laquelle semi-discrétisation génère un système d'équations elliptiques avec également des termes sources dépendants de la solution.

Ainsi la solution du problème parabolique est approchée par une suite finie dont les termes sont solutions du système d'équations elliptiques avec des termes sources dépendants de la solution.

La propriété de Lipschitzienneté de la solution par rapport au terme source et les conditions aux limites pour des équations elliptiques démontrée dans [3] a permit d'obtenir une convergence géométrique de la suite finie.

La deuxième étape consiste à discrétiser chaque équation elliptique du système généré par la semi-discrétisation par différence finies, par la méthode des éléments finis.

L'analogue discret de la propriété de Lipschitzienneté par rapport aux terme source et aux conditions aux limites a permit de démontrer également la convergence de la suite discrète.

Le comportement asymptotique est alors obtenu en combinant l'estimation de l'erreur d'approximation par la méthode des éléments finis aux problème stationnaire elliptique associé à au problème (1.1)

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{Ch^2 \left|\log h\right|}{1-K}$$

et la convergence géométrique de l'algorithme discret

$$\|u^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{Ch^2 \left|\log h\right|}{1-K} + \left(\frac{1}{1+(\beta-k)\,\Delta t}\right)^N ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}.$$

2 Préliminaires

Cette section est un rappel sur les définitions de base et des résultats classiques pour des équations linéaires elliptiques.

2.1 Les équations linéaires elliptiques

On considère la forme bilinéaire

$$a(u,v)=\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right)dx,$$

la forme linéaire

$$(f,v)=\int_0^1 f\left(x\right)v\left(x\right)dx$$

où le second membre

$$f\in L^{\infty}\left(\Omega\right)$$

l'espace

$$V^{(g)}=\left\{v\in H^1\left([0,1]\right)\ \text{ tel que } v\left(0\right)=v\left(1\right)=g.\right\}$$

On considère l'équation linéaire elliptique

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \zeta\in V^{(g)} \text{ tel que}\\&a(\zeta,v)+c(\zeta,v)=\left(f,v\right),\ \forall v\in V^{(g)}\end{aligned}\tag{2.1}$$

où $c\in\mathbb{R}$ et telle que

$$c\geq\beta>0$$

Soit $V_h^{(g)}$ l'espace des éléments finis constitué de fonctions linéaires continues par morceaux et $\phi_i,\ i=1,2,...,m\left(h\right)$ les fonctions de bases de $V_h^{(g)}$. L'analogue discret du problème continu (2.1) est défini par

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \zeta_h \in V_h^{(g)} \text{ tel que} \\ a(\zeta_h, v) + c(\zeta_h, v) = (f, v)\,,\ \forall v \in V_h^{(g)} \end{array} \tag{2.2}$$

où

$$V_h^{(g)} = \{v \in V_h \text{ tel que } v\,(0) = v\,(1) = \pi_h g\}$$

où g est une constante et π_h est l'opérateur d'interpolation.

Théorème 2.1 (cf. [6]) Soient ζ solution de (2.1) et ζ_h solution de (2.2) alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|\zeta - \zeta_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 \left|\log h\right|. \tag{2.3}$$

Lemme 2.1 (cf. [5]) Soit $w \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que $a\,(w, \phi) + c\,(w, \phi) \geq 0$ pour tout ϕ positive dans $H_0^1(\Omega)$ et $w \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors $w \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$.

Notation 2.1 Soient (f, g) et $\left(\widetilde{f}, \widetilde{g}\right)$ deux données telles que $\zeta = \sigma\,(f, g)$ et $\widetilde{\zeta} = \sigma\left(\widetilde{f}, \widetilde{g}\right)$ deux solutions relatives au problème (2.1), alors on a la proposition qui suit

Proposition 2.1(cf. [3]) Sous les conditions du lemme 2.1 précédent on a

$$\left\|\zeta - \widetilde{\zeta}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f - \widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, |g - \widetilde{g}|\right\}. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1 Le lemme 2.1 reste vrai dans le cas discret.

En effet, on suppose que le principe du maximum discret (p.m.d.) est satisfait, c'est-à-dire que la matrice résultante du problème discret (2.2) est une $M-$matrice. Alors

Lemme 2.2 Soit $w \in V_h^{(g)}$ tel que : $a\,(w, \phi_i) + c\,(w, \phi_i) \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m\,(h)$ et $w \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors $w \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$.

Démonstration La démonstration est la conséquence directe du principe du maximum discret.

Notation 2.2 Soient (f, g) et $\left(\widetilde{f}, \widetilde{g}\right)$ deux données discrètes telles que $\zeta_h =$

$\sigma_h(f,g)$ et $\widetilde{\zeta}_h = \sigma_h\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux solutions discrètes relatives au problème discret (2.2), alors on a la proposition suivante.

Proposition 2.2 Sous les conditions du principe du maximum discret (p.m.d.) et sous les conditions du lemme 2.2, on a

$$\left\|\zeta_h - \widetilde{\zeta}_h\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, |g-\widetilde{g}|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}. \tag{2.5}$$

3 Le problème continue

Dans ce mémoire de master on considère le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + cu(t,x) = f(u(t,x)),\ (t,x) \in [0,T]\times[0,1] \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0. \text{ Conditions aux limites de type Dirichlet.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $f \in L^2([0,T], L^\infty[0,1])$ une fonctionnelle nonlinéaire, croissante et Lipschitzienne de constante de Lipschitz k

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|,\ \forall x,y \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

c une constante positive telle que

$$c \geq \beta > k \tag{3.3}$$

La formulation variationnelle du problème d'évolution (1.1)

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } u(t,x) \in L^2\left([0,T],\ H_0^1([0,1])\right) \text{ solution de} \\ \int\limits_0^1 \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x) + a(u(t,x),v(x))dx = \int\limits_0^1 f(u(t,x))v(x),\ \forall v \in H_0^1([0,1]) \end{array} \tag{3.4}$$

où $a(.,.)$ est la forme bilinéaire coécrive définie par

$$a(u(t,x),v(x)) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dv}{dx} + cuv\right) dx \tag{3.5}$$

Le problème stationnaire associé au problème d'évolution (1.1) est défini par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\infty \in H_0^1\left([0,1]\right) \text{ solution de} \\ a(u^\infty, v) = \int_0^1 f(u^\infty) v dx, \, \forall v \in H_0^1\left([0,1]\right). \end{cases} \tag{3.6}$$

4 Discrétisation

Pour résoudre numériquement le problème d'évolution (1.1), la méthode des différences finies est appliquée pour la variable temporelle t ainsi qu'une combinaison de discrétisation de la variable spatiale x par la méthode des éléments finis. On commence par la semi-discrétisation en temps.

4.1 Semi-discrétisation en temps

On discrétise le domaine $[0,T]$ de manière uniforme où les points du maillage sont $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, $i = 0, ..., N-1$, le pas de discrétisation est $\Delta t = \dfrac{T}{N}$ avec N un entier naturel

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < ... < t_N = T.$$

La dérivée partielle $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ est approchée par la différence finie rétrograde

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \simeq \frac{u(t,x) - u(t-\Delta t, x)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

On remplace (4.1) dans (3.4) en obtient

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{u(t,x)-u(t-\Delta t,x)}{\Delta t} v(x)dx + a(u(t,x),v(x)) = \int_0^1 f(u(t,x))v(x)dx \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t,0) = \ u(t,1) = 0 \text{ Conditions aux limites de type Dirichlet.} \end{cases}$$

On remplace t par les nœuds de la discrétisation t_{i+1}

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{u(t_{i+1},x)-u(t_{i+1}-\Delta t,x)}{\Delta t} v(x)dx + a(u(t_{i+1},x),v(x)) = \int_0^1 f(u(t_{i+1},x))v(x)dx \\ u(t_0,x) = u(0,x) = u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t_{i+1},0) = u(t_{i+1},1) = 0. \end{cases}$$

ce qui implique pour $i = 0, ..., N-1$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 u(t_{i+1},x)v(x)dx + a(u(t_{i+1},x),v(x)) = \int_0^1 f(u(t_{i+1},x))v(x)dx + \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 u(t_i,x)v(x)dx \\ u(t_0,x) = u(0,x) = u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t_{i+1},0) = u(t_{i+1},1) = 0. \end{cases}$$

En utilisant la notation

$$u(t_i,x) = u_i\left(x\right),\ \ i = 0, 1, ..., N. \tag{4.2}$$

on obtient le schéma numérique suivant, pour tout $i = 0, 1, ..., N-1$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 u_{i+1}\left(x\right) v(x)dx + a(u_{i+1},v(x)) = \int_0^1 f(u_{i+1})v(x)dx + \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 u_i(x)v(x)dx \\ u(t_0,x) = u(0,x) = u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u_{i+1}\left(0\right) = u_{i+1}\left(1\right) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Le schéma numérique (4.3) représente un système fini d'équations elliptiques avec second membre dépendant de la solution qu'on peut écrire sous la forme suivante en prenant

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t} \tag{4.4}$$

pour tout $i = 0, 1, ..., N-1$

$$\begin{cases} b(u_{i+1}, v) = \int\limits_0^1 \left(f(u_{i+1}) + \lambda u_i\right) v(x) dx \\ u(t_0, x) = u(0, x) = u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u_{i+1}(0) = u_{i+1}(1) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

où $b(.,.)$ est une forme bilinéaire définie par

$$b(u_{i+1}, v) = a(u_{i+1}, v) + \lambda \int\limits_0^1 u_{i+1} v(x) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} \frac{dv}{dx} + (c+\lambda) u_{i+1} v \right) dx \tag{4.6}$$

On peut facilement voir que la solution faible du problème stationnaire $u^\infty \in H_0^1([0,1])$ satisfait

$$b(u^\infty, v) = \int\limits_0^1 \left(f(u^\infty) + \lambda u^\infty\right) v(x) dx, \ \forall v \in H_0^1([0,1]). \tag{4.7}$$

On note

$$F(u^\infty) = f(u^\infty) + \lambda u^\infty \tag{4.8}$$

Compte tenu de la Lipschitzenneté de f de constante de Lipschitz (3.2), la fonctionnelle F est également Lipschitzienne de constante de Lipschitz $k+\lambda$. Il est clair qu'on peut facilement adapter (2.4) défini par rapport à la fonction f à la fonctionnelle F et on obtient

$$\left\| \zeta^\infty - \widetilde{\zeta}^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{1}{\beta+\lambda} \right) \left\| F - \widetilde{F} \right\|_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.9}$$

où $\zeta^\infty = \sigma(F)$ et $\widetilde{\zeta}^\infty = \sigma\left(\widetilde{F}\right)$ sont solutions relatives au problème (4.7).

4.2 Application de point fixe associée à l'algorithme (4.5)

On considère l'application T suivante

$$\begin{aligned} T : L^{\infty}([0,1]) &\rightarrow L^{\infty}([0,1]) \\ w &\rightarrow T(w) = \varepsilon \end{aligned} \tag{4.10}$$

où ε est solution du problème suivant

$$b(\varepsilon, v) = \int_0^1 (f(\varepsilon) + \lambda w)\, v dx. \tag{4.11}$$

Il est clair alors que pour u_{i+1} solution de (4.5)

$$u_{i+1} = Tu_i,\ i = 0, ..., N-1. \tag{4.12}$$

Théorème 4.1 L'application T définie dans (4.10) est une application contractante de constante de contraction

$$0 < K = \frac{\lambda}{\lambda + \beta - k} < 1 \tag{4.13}$$

telle que pour tous w et $\widetilde{w}$ dans $L^{\infty}([0,1])$, on a

$$||Tw - T\widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])} \leq K||w - \widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])}. \tag{4.14}$$

et u^{∞} solution de (4.7) est l'unique point fixe de cette application T.

$$u^{\infty} = Tu^{\infty}.$$

Démonstration Soient w et $\widetilde{w}$ dans $L^{\infty}([0,1])$ et $\varepsilon = \partial(f(\varepsilon) + \lambda w)$ et $\widetilde{\varepsilon} = (f(\widetilde{\varepsilon}) + \lambda\widetilde{w})$ sont solutions de (4.11). Alors

$$||Tw - T\widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])} = ||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^{\infty}([0,1])}.$$

En appliquant la dépendance Lipschitzienne (4.9) appliquée à la fonctionnelle F avec des conditions aux limites de types Dirichlet nulles, on obtient

$$\begin{aligned}||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^\infty([0,1])} &\leq \left(\frac{1}{\lambda+\beta}\right) ||\left(f(\varepsilon)+\lambda w\right) - \left(f(\widetilde{\varepsilon})+\lambda\widetilde{w}\right)||_{L^\infty([0,1])} \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda+\beta}\right) ||\left(f(\varepsilon)-f(\widetilde{\varepsilon})\right)+\lambda\left(w-\widetilde{w}\right)||_{L^\infty([0,1])}\end{aligned}$$

Puisque $f(.)$ est une fonction Lipschitzienne, alors

$$||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{k}{\lambda+\beta}||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^\infty([0,1])} + \frac{\lambda}{\lambda+\beta}||w-\widetilde{w}||_{L^\infty([0,1])}$$

Ce qui implique

$$\left(1-\frac{k}{\lambda+\beta}\right)||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{\lambda}{\lambda+\beta}||w-\widetilde{w}||_{L^\infty([0,1])}.$$

Donc

$$||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{\dfrac{\lambda}{\lambda+\beta}}{\left(1-\dfrac{k}{\lambda+\beta}\right)}||w-\widetilde{w}||_{L^\infty([0,1])},$$

et ainsi

$$||Tw - T\widetilde{w}||_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}||w-\widetilde{w}||_{L^\infty([0,1])}.$$

4.3 Convergence géométrique de l'algorithme (4.5)

Dans ce qui suit on démontre la convergence de l'algorithme (4.5) et on en déduit sa vitesse de convergence.

Proposition 4.1 Soient u^∞ solution de (4.7) et u_{i+1} solution de (4.5). Alors pour tout $i = 0, ..., N-1$

$$||u^\infty - u_{i+1}||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right)^{i+1}||u^\infty - u_0||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.15}$$

où u_0 est la condition initiale du problème (1.1).

Démonstration On démontre (4.15) par récurrence.

Lorsque $i = 0$, alors d'après (4.14) on obtient.

$$||u^\infty - u_1||_{L^\infty([0,1])} = ||Tu^\infty - Tu_0||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right) ||u^\infty - u_0||_{L^\infty([0,1])}.$$

Ainsi (4.15) est vérifiée pour $i = 0$. On suppose que (4.15) est vérifiée pour i, c'est-à-dire

$$||u^\infty - u_i||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right)^i ||u^\infty - u_0||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.16}$$

Sachant que

$$||u^\infty - u_{i+1}||_{L^\infty([0,1])} = ||Tu^\infty - Tu_i||_{L^\infty([0,1])}$$

et en utilisant (4.14) , on obtient

$$||Tu^\infty - Tu_i||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right) ||u^\infty - u_i||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.17}$$

On substitue (4.16) dans (4.17) on obtient (4.15) .

4.4 Discrétisation totale temps-espace

Dans cette section on étudie la discrétisation du système (4.5) par la méthode des éléments finis P_1 linéaire par morceaux. On décompose l'intervalle $\Omega = [0,1]$ en $n-1$ segments

$$\Omega = [0,1] = \bigcup_{i=0}^{N-1} [x_i, x_{i+1}] = \bigcup_{i=0}^{N-1} E_i$$

avec les nœuds

$$0 = x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < ... < x_N = 1.$$

Les segments

$$E_i = [x_i, x_{i+1}]$$

sont les éléments du maillage. Soient V_h l'espace d'éléments finis des fonctions linéaires par morceaux v s'annulant sur $\partial\Omega$

$$V_h = \left\{ v \in C\left([0,1]\right) \cap H_0^1\left([0,1]\right) ;\ v/E_i \in P_1 \text{ et } v\left(0\right) = v\left(1\right) = 0 \right\} \tag{4.18}$$

$\varphi_i,\ i = 1, ..., m_h$ les fonctions de base de V_h définies par

$$\varphi_i\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} \text{ si } x \in \left[x_{i-1}, x_i\right] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h} \text{ si } x \in \left[x_i, x_{i+1}\right] \\ 0 \text{ si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases} \tag{4.19}$$

est h est le pas de discrétisation. Le système discret associé au système (4.5) consiste à résoudre pour tout $i = 0, ..., N-1$

$$\begin{cases} u_{i+1,h} \in V_h \text{ solution de} \\ b(u_{i+1,h}, v_h) = \int\limits_0^1 \left(f\left(u_{i+1,h}\right) + \lambda u_{i,h}\right) v_h dx \end{cases} \tag{4.20}$$

où

$$u_{i+1,h}\left(x\right) = \sum_{k=1}^{N-1} u_{i+1,h}\left(x_k\right) \varphi_k\left(x\right)$$

On note

$$U_{i+1,h} = \begin{pmatrix} u_{i+1,h}\left(x_1\right) \\ . \\ . \\ u_{i+1,h}\left(x_{N-1}\right) \end{pmatrix} \text{ et } V_h = \begin{pmatrix} v_h\left(x_1\right) \\ . \\ . \\ v_h\left(x_{N-1}\right) \end{pmatrix}$$

alors

$$b(u_{i+1,h}, v_h) = U_{i+1,h}^t M V_h$$

où $M = \left(M_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq N-1}$ est une matrice dont les coefficients

$$M_{ij} = b(\varphi_i, \varphi_j)$$

avec $u_{0,h} = \pi_h(u_0)$ ou π_h fait référence à l'opérateur d'interpolation dans $[0,1]$. Le problème discret associé au problème continue (4.7) consiste à résoudre le problème discret suivant

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^\infty \in V_h \text{ solution de} \\ b(u_h^\infty, v) = \int\limits_0^1 (f(u_h^\infty) + \lambda u_h^\infty)\, v dx \quad \forall v \in V_h \,. \end{array} \tag{4.21}$$

4.5 Application de point fixe associée à l'algorithme discret (4.20)

On considère l'application T_h suivante

$$\begin{array}{rl} T_h : V_h \to V_h & \\ w_h \to T_h\,(w_h) = \varepsilon_h & \end{array} \tag{4.22}$$

où ε_h est solution du problème suivant

$$b(\varepsilon_h, v) = \int\limits_0^1 (f(\varepsilon_h) + \lambda w_h)\, v dx. \tag{4.23}$$

Il est clair alors que pour $u_{i+1,h}$ solution de (4.20)

$$u_{i+1,h} = T_h u_{i,h}, \;\; i = 0, ..., N-1. \tag{4.24}$$

Théorème 4.2 L'application T_h définie dans (4.22) est une application contractante de constante de contraction

$$0 < K = \frac{\lambda}{\lambda + \beta - k} < 1 \tag{4.25}$$

telle que pour tous w_h et $\widetilde{w}_h$ dans V_h, on a

$$||T_h w_h - T_h \widetilde{w}_h||_{L^\infty([0,1])} \leq K||w_h - \widetilde{w}_h|||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.26}$$

et u_h^∞ solution de (4.21) est l'unique point fixe de cette application T_h

$$u_h^\infty = T_h u_h^\infty. \tag{4.27}$$

Démonstration La démonstration est similaire à celle établie pour le théorème 4.1.

4.6 Convergence géométrique de l'algorithme (4.20)

Par une étude similaire effectuée dans le cadre continu, on démontre la convergence géométrique de l'algorithme (4.20) et on en déduit sa vitesse de convergence.

Proposition 4.2 Soient u_h^∞ solution de (4.21) et $u_{i+1,h}$ solution de (4.20) . Alors pour tout $i = 0, ..., N-1$

$$||u_h^\infty - u_{i+1,h}||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right)^{i+1} ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.28}$$

Démonstration La démonstration repose sur le raisonnement par récurrence et est similaire à celle établie pour la proposition 4.1.

5 Comportement asymptotique en norme L^∞ de la solution de l'équation parabolique nonlinéaire (1.1)

Cette section est dédiée au résultat principal de ce travail, à savoir le comportement asymptotique de la solution du problème d'évolution (1.1) .

On rappelle que le comportement asymptotique de la solution du problème d'évolution (1.1) consiste à mesurer l'erreur par la nome L^∞ entre u^∞ la solution du problème stationnaire (4.7) associé au problème (1.1) et $u_{N,h}$ la solution discrète à l'instant final T.

Dans le but d'obtenir ce résultat principal on a besoin d'introduire l'analogue discret du problème stationnaire (4.7), défini par

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } w_h^\infty \in V_h \\ b(w_h^\infty, v) = \int\limits_0^1 \left(f(u^\infty) + \lambda u^\infty\right) v(x)dx, \ \forall v \in V_h. \end{array} \tag{5.1}$$

et d'énoncer et de démontrer le théorème qui suit

Théorème 5.1 Soient u^∞ la solution du problème stationnaire (4.7) et w_h^∞ solution de (5.1). Alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u^\infty - w_h^\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 \left|\log h\right|. \tag{5.2}$$

Démonstration La démonstration repose sur un résultat d'approximation des équations linéaires de [6]. Dans ce but on introduit et on démontre la convergence géométrique de la suite de problèmes elliptiques linéaires suivante

$$\begin{array}{l} u^{0,\infty} \text{ le premier terme} \\ b(u^{i+1,\infty}, v) = \int\limits_0^1 \left(f(u^{i,\infty}) + \lambda u^{i,\infty}\right) v(x)dx, \ \forall v \in H_0^1([0,1]) \end{array}. \tag{5.3}$$

La propriété de Lipschitziennetté (4.9) permet facilement de prouver la convergence géométrique de la suite $\left(u^{k,\infty}\right)_{k\geq 0}$ vers u^∞ la solution du problème (4.7) où on obtient par récurrence

$$\left\|u^\infty - u^{i+1,\infty}\right\|_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{k+\lambda}{\beta+\lambda}\right)^{i+1} \left\|u^\infty - u^{0,\infty}\right\|_{L^\infty([0,1])}. \tag{5.4}$$

L'analogue discret de la suite (5.3) est défini par

$$\begin{array}{l} u_h^{0,\infty} = r_h u_h^{0,\infty} \text{ le premier terme} \\ b(u_h^{i+1,\infty}, v) = \int\limits_0^1 \left(f(u^{i,\infty}) + \lambda u^{i,\infty}\right) v(x)dx, \ \forall v \in H_0^1([0,1]) \end{array}. \tag{5.5}$$

d'après un résultat classique de [6] donc l'estimation (2.3), on a

$$\left\| u^{i+1,\infty} - u_h^{i+1,\infty} \right\|_{L^\infty([0,1])} \leq Ch^2 \left| \log h \right|. \tag{5.6}$$

La contre partie discrète de la propriété de Lipschitzienneté (4.9) permet facilement de prouver la convergence géométrique de la suite $\left(u_h^{k,\infty}\right)_{k\geq 0}$ vers w_h^∞ la solution du problème (5.1) où on obtient également par récurrence

$$\left\| u_h^{k,\infty} - w_h^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{k+\lambda}{\beta+\lambda} \right)^{i+1} \left\| u_h^{0,\infty} - u^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])}. \tag{5.7}$$

Puisque

$$\left\| u^\infty - w_h^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} \leq \left\| u^\infty - u^{i+1,\infty} \right\|_{L^\infty([0,1])} + \left\| u^{i+1,\infty} - u_h^{i+1,\infty} \right\|_{L^\infty([0,1])} + \left\| u_h^{i+1,\infty} - w_h^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} \tag{5.8}$$

en substituant respectivement (5.4) , (5.6) , (5.7) dans (5.8) , on obtient

$$\begin{aligned} \left\| u^\infty - w_h^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} \leq \; & \left(\frac{k+\lambda}{\beta+\lambda} \right)^{i+1} \left\| u^\infty - u^{0,\infty} \right\|_{L^\infty([0,1])} + Ch^2 \left| \log h \right| \\ & + \left(\frac{k+\lambda}{\beta+\lambda} \right)^{i+1} \left\| u_h^{0,\infty} - u^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} \end{aligned}$$

En faisant tendre i vers $+\infty$, on trouve (5.2) .

Théorème 5.2 Soient u^∞ la solution du problème stationnaire (4.7) et u_h^∞ solution de (4.21) alors il existe une constante positive C indépendante de h telle que

$$\left\| u^\infty - u_h^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{Ch^2 \left| \log h \right|}{1-K}. \tag{5.9}$$

Démonstration Compte tenu de

$$\left\| u^\infty - u_h^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} \leq \left\| u^\infty - w_h^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])} + \left\| w_h^\infty - u_h^\infty \right\|_{L^\infty([0,1])}$$

(5.2) implique

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} \leq Ch^2 |\log h| + \|w_h^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} . \tag{5.10}$$

Sachant que

$$\|w_h^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} = \|T_h(u^\infty) - T_h(u_h^\infty)\|_{L^\infty([0,1])} \leq K \|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])}$$

(5.10) devient

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} \leq Ch^2 |\log h| + K \|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])}$$

ce qui implique

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{Ch^2 |\log h|}{1-K}$$

où K est la constante de l'application contractante T_h définie dans (4.25)

Le résultat principal

Théorème 5.3 Soient u^∞ la solution du problème stationnaire (4.7) et $u_{N,h}$ la solution de (4.20) à l'instant final $t = T$, alors il existe une constante positive C indépendante de h et de Δt telle que

$$\|u^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{Ch^2 |\log h|}{1-K} + \left(\frac{1}{1+(\beta-k)\Delta t}\right)^N ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}. \tag{5.11}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient compte tenu de

$$0 < K = \frac{\lambda}{\lambda+\beta-k} = \frac{1}{1+(\beta-k)\Delta t} < 1$$

l'estimation de l'erreur d'approximation suivante

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{Ch^2 |\log h|}{1-K}.$$

Démonstration On utilise l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_{L^\infty([0,1])}$

$$\|u^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq \|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} + \|u_h^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])}\,. \tag{5.12}$$

Où d'après (5.9)

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{Ch^2\,|\log h|}{1-K} \tag{5.13}$$

et d'après (4.28)

$$\|u_h^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right)^N ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}. \tag{5.14}$$

En remplaçant $\lambda = \dfrac{1}{\Delta t}$, (5.14) devient

$$\|u_h^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{1}{1+(\beta-k)\,\Delta t}\right)^N ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}. \tag{5.15}$$

En substituant (5.13) et (5.15) dans (5.12) obtient le résultat principal de ce travail à savoir l'inégalité (5.11) .

Application

On considère le problème d'évolution qui suit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + 2u(t,x) = -2e^{-2t}\ (t,x) \in [0,T] \times [0,1] \\ u(0,x) = u_0(x) = x\,(x-1)\ \text{ en } \Omega = [0,1]\ \text{ Condition initiale} \\ u(t,x) = 0 \text{ dans } \partial\Omega \text{ Condition aux limites de type Dirichlet} \end{cases}$$

dont la solution exacte est

$$u(t,x) = e^{-2t} x\,(x-1)$$

La semi-discrétisation de la variable temporelle t par la méthode des différences finies nous conduit à la résolution du système suivant, où le pas $\Delta t = \dfrac{1}{4}$

$$i = 0,1,2,3.$$
$$b(u_{i+1},v) = a(u_{i+1},v) + \lambda\int_0^1 u_{i+1}v(x)dx = \int_0^1 f(u_{i+1})v(x)dx + \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 u_i(x)v(x)dx$$

Puisque

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t} = 4$$

le système d'équations devient

$$i = 0,1,2,3.$$
$$\int_0^1 \left(\frac{du_{i+1}(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}dx + 6u_{i+1}(x)\,v(x)\right)dx = -2\int_0^1 e^{-2t_{i+1}}v(x)dx + 4\int_0^1 u_i(x)v(x)dx$$

avec

$$u_{i+1}(x) = u(t_{i+1},x) = u\left(\frac{(i+1)}{4},x\right),\ \ i = 0,1,2,3$$

et

$$u_0(x) = x\,(x-1)\,.$$

La discrétisation du domaine $\Omega = [0,1]$ par la méthode des éléments finis ou le pas

$$h = \frac{1}{3}$$

nous conduit à la résolution séquentielle du système discret suivant

$$i = 0,1,2,3.$$
$$\int_0^1 \left(\frac{du_{i+1,h}(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}dx + 6u_{i+1,h}(x)\,v(x)\right)dx = -2\int_0^1 e^{-2t_{i+1}}v(x)dx + 4\int_0^1 u_{i,h}(x)v(x)dx$$

avec

$$u_{i+1,h}(x) = \sum_{k=1}^{2} u_{i+1,h}(x_k)\,\varphi_k(x)$$

et

$$u_{0,h}(x) = r_h x\,(x-1)\,.$$

On note

$$\begin{aligned} U_{i+1,h} &= \begin{pmatrix} u_{i+1,h}\,(x_1) \\ u_{i+1,h}\,(x_2) \end{pmatrix} \text{ et } V_h = \begin{pmatrix} v_h\,(x_1) \\ v_h\,(x_2) \end{pmatrix} \\ x_i &= ih = i\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

alors

$$b(u_{i+1,h}, v_h) = U^t_{i+1,h} M V_h$$

où $M = (M_{ij})_{1\leq i,j\leq N-1} = \big(b(\varphi_i, \varphi_j)\big)_{1\leq i,j\leq N-1}$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{22}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{22}{3} \end{pmatrix}$$

On présente dans ce qui suit les résultats obtenus en utilisant le logiciel FreeFem dans certains points du maillage

Point	Solution exacte	Solution approchée
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$	-0.08175098	-0.0862652725
$\left(1, \frac{2}{3}\right)$	-0.03007450	-0.0879013978

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Fischer, The wave of advance of advantageous genes. Ann Eugenics $7(4)\ 355 - 369,\ 1937.$

[2] Grégoire Allaire, Analyse numérique et optimisation. Les éditions de l'ecole polytechnique. ISBN 978-2-7302-1255-7.

[3] A. Harbi, M. Boulbrachene, Maximum Norm Analysis of a Nonmatching Grids Method for Nonlinear Elliptic PDES. Journal of Applied Mathematics Volume 2011, Article ID 605140, 18 pages doi :10.1155/2011/605140.

[4] B. Heinrich and B. Jung, Nitsche Mortaring for Parabolic Initial-Boundary Value Problems, Electronic Transactions on Numerical Analysis. Volume 32, pp. 190-209, Kent State University. ISSN 1068-9613. 2008.

[5] S. H. Lui, "On linear monotone iteration and Schwarz methods for nonlinear elliptic PDEs," Numerische Mathematik, vol. 93, no. 1, pp. 109–129, 2002.

[6] J. Nitsche, "L_∞-convergence of finite element approximations," in Proceedings of the Sym-posium on Mathematical Aspects of Finite Element Methods, vol. 606 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 261–274, 1977.

[7] J. Nitsche, L_∞-convergence of finite-element Glerkin approximation on parabolic problems, RAIRO Anal. Numer. 13, 31-54. 1979.