

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté : des Sciences

Département : de Mathématiques

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques appliquées

Spécialité : Systèmes Dynamiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème :

**Cycles limites de quelques systèmes différentiels
polynomiaux via averaging theory**

Présenté par : KHALDI Imene

Encadrant : MAKHLOUF Amar

Prof.

U. B. M. Annaba

Jury de Soutenance :

LAOUAR Abdelhamid	Prof.	U. B. M. Annaba	Président
HMAMDA Meriem	Dr.	U. B. M. Annaba	Examinatrice

Année Universitaire : 2022/2023

Dédicace

A mes chers parents

pour leurs efforts et leurs sacrifices durant tout ma vie, leurs encouragements et soutiens pour persévérer jusqu'à l'aboutissement de ce travail.

A ma belle sœur

source de joie et de bonheur.

A mon frère

A tous mes amies
qui m'ont encouragé.

A toute ma famille

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la volonté d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon encadreur **PR MAKHLOUF Amar** pour sa disponibilité la confiance qu'il m'a encadré et sa patience, ainsi pour ses bonnes explications et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier **Monsieur LAOUAR Abdelhamid** professeur de l' Université Badji Mokhtar Annaba, qui a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier **Madame HMAMDA Meriem** docteur à l' Université Badji Mokhtar Annaba, pour avoir fait partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie également tous les professeurs de département de Mathématiques ainsi que tous les doctorants .

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie le nombre maximum des cycles limites de certains systèmes différentiels polynômiaux en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un et deux. Premièrement, on étudie le nombre maximum de cycle limite bifurquant de l'origine du système différentiel polynomial quadratique dans \mathbb{R}^3 de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dy}{dt} = bx + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dz}{dt} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk}x^i y^j z^k, \end{array} \right.$$

où $a_{ijk}, A_{ijk}, b_{ijk}, B_{ijk}, c_{ijk}, C_{ijk}$ pour $i + j + k = 2$, a_1, a_2, c_1, c_2 et b sont des paramètres réels et ε un petit paramètre.

Deuxièmement, on étudie le nombre maximum de cycle limite bifurquant de l'origine du système différentiel polynomial quadratique dans \mathbb{R}^4 de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^2 + a_{j1}xy + a_{j2}xz + a_{j3}xw + a_{j4}y^2 \\ &\quad + a_{j5}yz + a_{j6}yw + a_{j7}z^2 + a_{j8}zw + a_{j9}w^2, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} respectivement par b_{ji}, c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 9$. Les coefficients $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ sont des paramètres réels avec $b \neq 0$.

Troisièmement, on étudie l'existence des solutions périodiques bifurquant de l'origine des coordonnées des systèmes différentiels polynômiaux dans \mathbb{R}^4 non-linéaires homogènes cubiques de la

forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) = & a_{j0}x^2 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw \\ & + a_{j7}xz^2 + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13} \\ & yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 9$. Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , a_1 , a_2 , a_3 , b , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 sont des paramètres avec $b \neq 0$.

Mots clés : Bifurcation de Hopf, Cycle limite, Solution périodique, Théorie de moyennisation.

Abstract

In this memory, we study the maximum number of limit cycles of certain polynomial differential systems using the averaging method of first and second order.

Firstly, we study the maximum number of limit cycles bifurcating from the origin of the quadratic polynomial differential system in \mathbb{R}^3 of the form

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \dot{y} = bx + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk}x^i y^j z^k, \end{array} \right.$$

where a_{ijk} , A_{ijk} , b_{ijk} , B_{ijk} , c_{ijk} , C_{ijk} for $i + j + k = 2$, a_1 , a_2 , c_1 , c_2 and b are real parameters and ε small parameter.

Secondly, we study the maximum number of limit cycles bifurcating from the origin of the quadratic polynomial differential system in \mathbb{R}^4 of the form

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right.$$

where

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^2 + a_{j1}xy + a_{j2}xz + a_{j3}xw + a_{j4}y^2 \\ &\quad + a_{j5}yz + a_{j6}yw + a_{j7}z^2 + a_{j8}zw + a_{j9}w^2, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ and $W_j(x, y, z, w)$ have the same expression as $X_j(x, y, z, w)$ by replacing a_{ji} respectively by b_{ji} , c_{ji} and d_{ji} for $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 9$. The coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , a_1 , a_2 , a_3 , b , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 are real parametres with $b \neq 0$.

Thridly, we study the existence of periodic solution bifurcation from the origin of coordinate of a

cubic polynomial differential system in \mathbb{R}^4 of the forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right.$$

where

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) = & a_{j0}x^2 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw \\ & + a_{j7}xz^2 + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13} \\ & yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ and $W_j(x, y, z, w)$ have the same expression as $X_j(x, y, z, w)$ by replacing a_{ji} by b_{ji} , c_{ji} and d_{ji} for $j = 0, 1, 2$ and $i = 0, 1, \dots, 9$. The coefficients $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ are real parametres with $b \neq 0$.

Key words : Averging theory, Hopf bifurcation, Limit cycle, Periodic solution.

الملخص

في هذه المذكرة، ندرس العدد الأقصى للحلول الدورية لبعض الأنظمة التفاضلية باستخدام نظرية المتوسط من الدرجة الأولى و الثانية .
أولاً، ندرس العدد الأقصى للعدد الدورات الدورية التي تتفرع من أصل مبدأ نظام تفاضلي رباعي في \mathbb{R}^3 من الشكل التالي

$$\begin{cases} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \dot{y} = bx + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk}x^i y^j z^k, \end{cases}$$

حيث $a_{ijk}, A_{ijk}, b_{ijk}, B_{ijk}, c_{ijk}, C_{ijk}$ من أجل $i + j + k = 2$ و a_1, a_2, c_1, c_2 و b وسائط حقيقة و ε وسيط صغير.

ثانياً، ندرس العدد الأقصى للعدد الدورات الدورية التي تتفرع من أصل مبدأ نظام تفاضلي رباعي في \mathbb{R}^4

$$\begin{cases} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{cases}$$

حيث

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^2 + a_{j1}xy + a_{j2}xz + a_{j3}xw + a_{j4}y^2 \\ &+ a_{j5}yz + a_{j6}yw + a_{j7}z^2 + a_{j8}zw + a_{j9}w^2, \end{aligned}$$

$Z_j(x, y, z, w), Y_j(x, y, z, w)$ و $W_j(x, y, z, w)$ لهم نفس عبارة $X_j(x, y, z, w)$ بتعويض a_{ji} ب b_{ji}, c_{ji}, d_{ji} من أجل $i = 0, 1, \dots, 9$ و $j = 0, 1, 2$

المعاملات $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ هي معاملات حقيقية مع $b \neq 0$.
ثالثاً، ندرس وجود الحلول الدورية المتفرعة عن مبدأ الاحداثيات لأنظمة تفاضلية بكثيرات حدود من الدرجة الثالثة في \mathbb{R}^4 من الشكل

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right.$$

حيث

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) = & a_{j0}x^2 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw + a_{j7}xz^2 \\ & + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13}yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 \\ & + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3, \end{aligned}$$

d_{ji}, b_{ji}, c_{ji} بتعويض a_{ji} $X_j(x, y, z, w)$ لهم نفس عبارة $W_j(x, y, z, w)$ و $Z_j(x, y, z, w), Y_j(x, y, z, w)$ من أجل $j = 0, 1, 2$ و $i = 0, 1, \dots, 9$ المعاملات $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ هي معاملات حقيقية مع $b \neq 0$.

الكلمات المفتاحية: نظرية المتوسط، دورة الحد، تشبع هوبف، حل دوري.

Introduction		11
1	Notions préliminaires	14
1.1	Système dynamique	14
1.2	Flot	15
1.3	Point d'équilibre	15
1.4	Le système linéarisé	15
1.5	Nature du point d'équilibre	16
1.5.1	Cas des systèmes non linéaires	16
1.5.2	Cas des systèmes linéaires	16
1.6	Stabilité du point d'équilibre	22
1.7	Plan et portrait de phase	22
1.8	Orbite périodique	22
1.9	Cycle limite	22
1.9.1	Stabilité des cycles limites	23
1.10	Bifurcation de Hopf	24
1.11	Théorème de Bezout	26
2	Théorie de moyennisation	27
2.1	Théorème de moyennisation du premier ordre	28
2.2	Théorème de moyennisation d'ordre deux	31
3	La bifurcation zéro-Hopf pour des systèmes différentiels quadratiques en dimension trois	33
4	La bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques en dimension 4	46
5	La bifurcation zéro-Hopf en dimension 4 pour des systèmes différentiels polynomiaux non-linéaires homogènes et cubiques	57

Les systèmes dynamiques sont des modèles mathématiques utilisés pour décrire l'évolution temporelle ou spatiale de phénomènes naturels ou artificiels. Ils sont largement utilisés dans de nombreux domaines scientifiques et techniques, tels que la physique, la biologie, la mécanique, la chimie, l'ingénierie et l'économie...

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du *XIX^e* siècle. Ils concernaient en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles. Une évolution continue du système dynamique dans le temps est représentée par une équation différentielle ordinaire.

La notion d'équation différentielle est apparue pour la première fois sous la plume de Leibniz en 1676 pour définir la relation entre les différentielles dx et dy de deux variables x et y .

Un des principaux problèmes de la théorie des systèmes dynamiques est l'étude des cycles limites, leur existence, leur nombres, leur stabilité.

Un cycle limite est une orbite périodique isolée fermée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques. Les cycles limites ont été introduit par H.Poincaré en 1881 dans son Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.

Généralement, obtenir des cycles limites est un problème difficile et souvent impossible. En appliquant la théorie de moyennisation, on réduit ce problème difficile des équations différentielles à la recherche des racines d'un système algébrique. Cette méthode est l'une des plus importantes méthodes utilisées actuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes dynamiques. Elle donne une relation entre les solutions des systèmes différentielles périodiques non autonomes et les solutions des systèmes autonomes. Elle a été introduite en 1934 par Bogoliobov et Krylov, en 1961 par Bogoliobov et Mitropolsky. Ensuite plusieurs développements ont eu lieu de cette méthode par Verhulst [19], Sanders et Verhulst [17], Malkin [13], Roseau [16] et J. Llibre.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres.

- **Le premier chapitre** est un rappel sur les notions fondamentales aux systèmes dynamiques tels que : système dynamique, flot d'un système, point d'équilibre, système linéarisé, nature du point d'équilibre, orbite périodique, cycle limite, bifurcation de Hopf, théorème de Bezout.
- **Dans le deuxième chapitre** on introduit la théorie de moyennisation pour chercher les cycles limites du système dynamique qu'on étudiera dans les chapitres suivants.
On présente quelques résultats sur la méthode de moyennisation du premier et deuxième

ordre.

- **Le troisième chapitre** est consacré à l'étude de la bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques dans \mathbb{R}^3 de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dy}{dt} = bx + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dz}{dt} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk}x^i y^j z^k, \end{array} \right.$$

où a_{ijk} , A_{ijk} , b_{ijk} , B_{ijk} , c_{ijk} , C_{ijk} pour $i + j + k = 2$, a_1 , a_2 , c_1 , c_2 et b sont des paramètres réels et ε un petit paramètre.

On utilise la méthode de moyennisation d'ordre deux pour démontrer qu'il y au plus trois cycles limites qui bifurquent de l'origine. De plus, on donne un exemple pour lequel ce nombre est atteint.

- **Dans le quatrième chapitre** on étudie la bifurcation zéro-Hopf d'un système différentiel quadratique polynomial dans \mathbb{R}^4 de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^2 + a_{j1}xy + a_{j2}xz + a_{j3}xw + a_{j4}y^2 \\ &+ a_{j5}yz + a_{j6}yw + a_{j7}z^2 + a_{j8}zw + a_{j9}w^2, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} respectivement par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 9$. Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , a_1 , a_2 , a_3 , b , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 sont des paramètres réels avec $b \neq 0$.

En utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux on prouve qu'au plus 9 cycles limites peuvent bifurquer de l'origine. De plus, on donne un exemple pour lequel ce nombre est atteint.

- **Le cinquième chapitre** consiste à l'étude de la bifurcation zéro-Hopf d'un système diffé-

rentiel cubique polynomial dans \mathbb{R}^4 de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) = & a_{j0}x^2 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw + a_{j7}xz^2 \\ & + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13}yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 \\ & + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 9$. Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , a_1 , a_2 , a_3 , b , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 sont des paramètres avec $b \neq 0$.

On démontre par la méthode de moyennisation d'ordre deux qu'au plus 9 cycles limites bifurquent de l'origine. De plus, on donne un exemple pour lequel ce nombre est atteint.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R} est une application $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :*

1. $U(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
2. $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
3. $U(0, x) = x$.
4. $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $\forall t, s \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.2 *Un système dynamique U sur \mathbb{R}^n est linéaire si :*

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La solution du système (1.1) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Le système (1.1) engendre le système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$U(t, x) = e^{tA}x.$$

Remarque 1.1 *Soit le système dynamique non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $f(x)$ ne dépend pas explicitement de t , on dit que ce système est autonome.

1.2 Flot

Définition 1.3 Soit le système dynamique non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de ce système.

L'ensemble des applications Φ_t défini par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentiel.

1.3 Point d'équilibre

Définition 1.4 On appelle point d'équilibre du système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = 0$.

Définition 1.5 Soit x^* point d'équilibre de (1.2). Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \text{ où } A = D(f(x^*)).$$

Ax est une bonne approximation de (1.2) au voisinage de x^* . Un point d'équilibre x^* est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de A n'a de partie réelle nulle.

1.4 Le système linéarisé

Définition 1.6 Le système

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n,$$

où $A = Df(x^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelé le système linéarisé du système (1.2) en x^* .

Exemple 1.2 Dans le système (1.3), où $f(x)$ est donnée par l'expression suivante

$$f(x) = \begin{pmatrix} x - xy \\ y - x^2 \end{pmatrix}$$

les points d'équilibre de $f(x) = 0$, sont $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$.

Les matrices jacobiniennes associées sont

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Df(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes linéarisés associés sont respectivement

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Les systèmes linéarisés au points d'équilibre nous donne une idée sur la nature du points d'équilibre.

1.5 Nature du point d'équilibre

1.5.1 Cas des systèmes non linéaires

On considère le système (1.2) où $x = (x_1 \dots x_n)$, $f = (f_1 \dots f_n)$ et le système linéarisé associée.

- Le point d'équilibre x^* est appelé **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives.
- Il est appelé **source** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles positives.
- Il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si la matrice $A = Df(x^*)$ a une valeur propre avec une partie réelle positive et une valeur propre avec une partie négative.

1.5.2 Cas des systèmes linéaires

On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases}$$

où A est la matrice associée à ce système

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de la matrice A , l'origine $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre de ce système.

On distingue les différents cas selon ces valeurs propres.

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe opposé alors le point d'équilibre est un selle. Il est toujours instable.

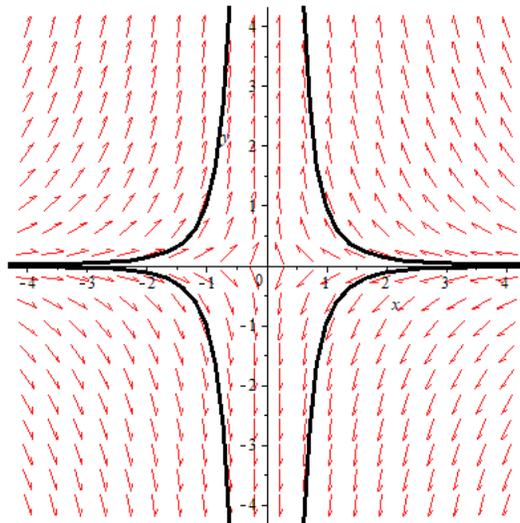


FIGURE 1.1 – selle

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de même signe on a trois cas :

(a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ et sont distinctes alors le point d'équilibre est un nœud impropre stable.

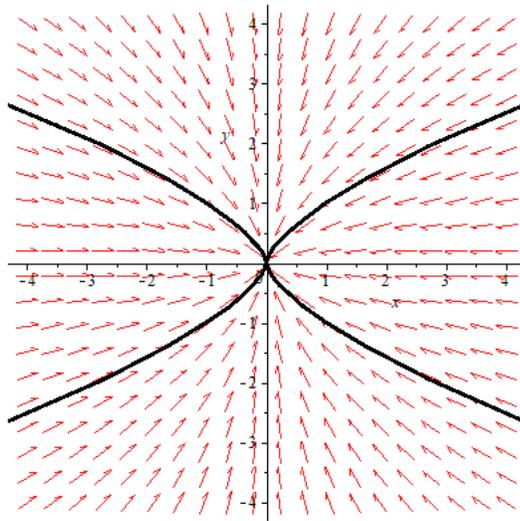


FIGURE 1.2 – nœud impropre stable

(b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ et sont distinctes alors le point d'équilibre est un nœud impropre instable.

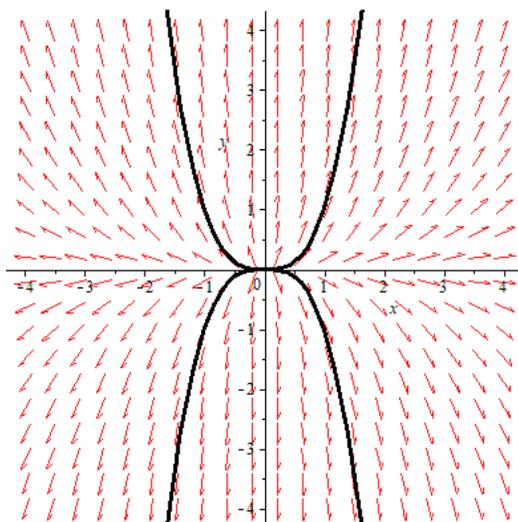


FIGURE 1.3 – nœud impropre instable

- (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ on a
- A est diagonalisable
 - si $\lambda < 0$, le point d'équilibre est un nœud propre stable.

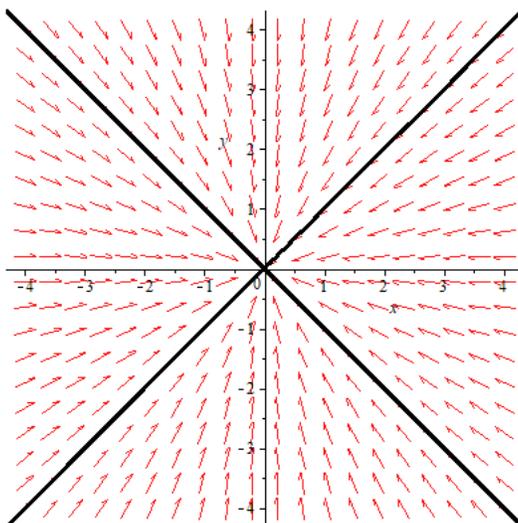


FIGURE 1.4 – nœud propre stable

— si $0 < \lambda$, le point d'équilibre est un nœud propre instable.

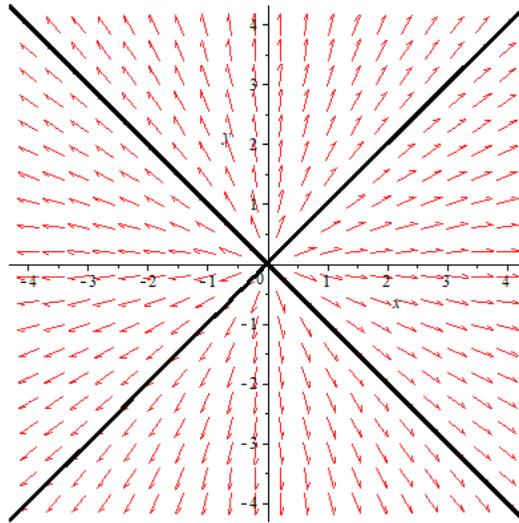


FIGURE 1.5 – nœud propre instable

— A est non diagonalisable

— si $\lambda < 0$, le point d'équilibre est un nœud exceptionnel stable.

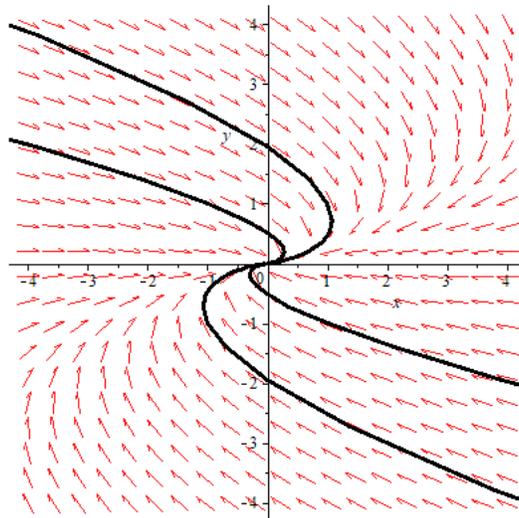


FIGURE 1.6 – nœud exceptionnel stable

— si $0 < \lambda$, le point d'équilibre est un nœud exceptionnel instable.

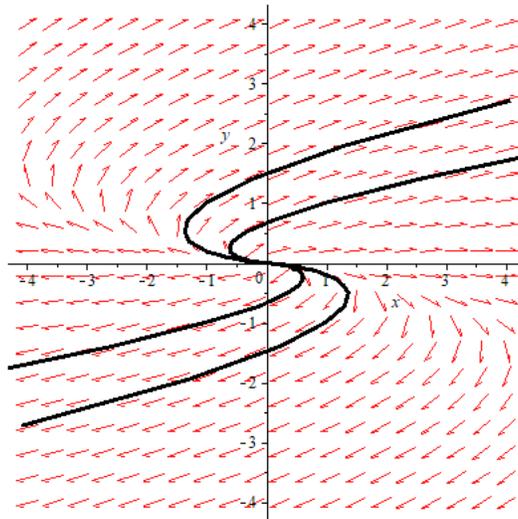


FIGURE 1.7 – nœud exceptionnel instable

3. Si λ_1 et $\lambda_2 = \lambda$ sont complexes conjuguées et $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$, on a
- Si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ le point d'équilibre est foyer stable.

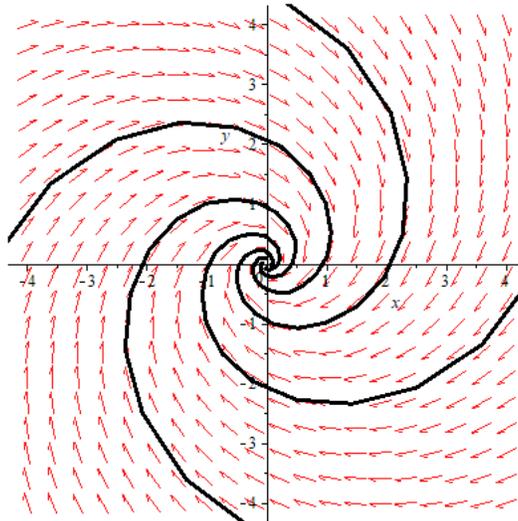


FIGURE 1.8 – foyer stable

— Si $0 < \text{Re}(\lambda_{1,2})$ le point d'équilibre est foyer instable.

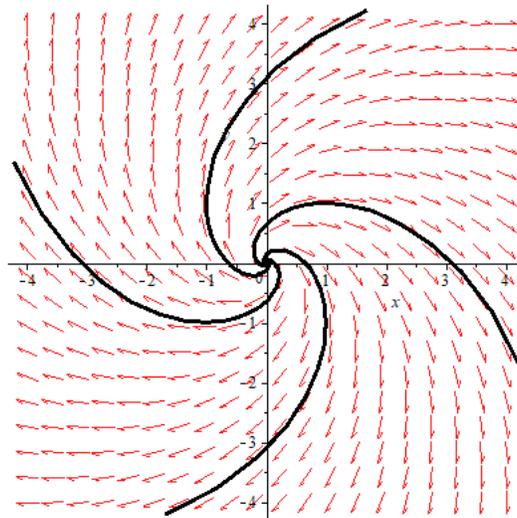


FIGURE 1.9 – foyer instable

4. Si λ_1 et $\lambda_2 = \lambda$ sont complexes et $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, alors le point d'équilibre est un centre stable mais pas asymptotiquement stable.

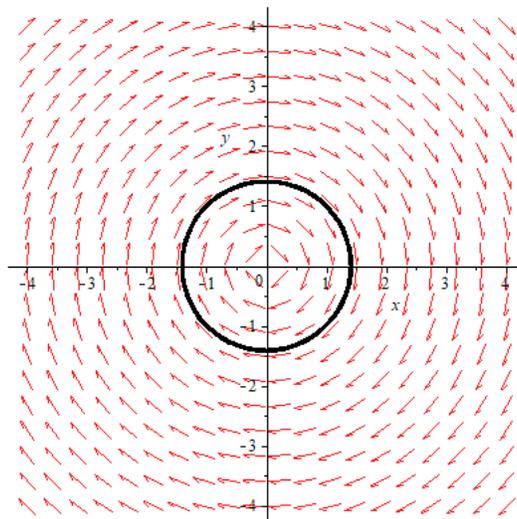


FIGURE 1.10 – centre

1.6 Stabilité du point d'équilibre

Soit x^* le point d'équilibre du système (1.2).

- a) Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable.
- b) S'il existe au moins une valeur propre de $Df(x^*)$ avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre x^* est dit instable.
- c) Si $Df(x^*)$ a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre x^* .

1.7 Plan et portrait de phase

Définition 1.7 Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P_1(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = P_2(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (1.4)$$

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variable. Les solutions $(x(t); y(t))$ du système (1.4) représentent dans le plan $(x; y)$ des courbes appelées orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points d'équilibre représentent le portrait de phase et le plan $(x \circ y)$ est appelé le plan de phase.

1.8 Orbite périodique

Définition 1.8 On appelle orbite périodique toute trajectoire $\Psi_t(x)$ de (1.2) tel qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Psi(t + T, x) = \Psi(t, x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.5) est appelé période.

L'amplitude d'une orbite périodique est la valeur maximale de la variable x de cette orbite.

1.9 Cycle limite

Définition 1.9 Un cycle limite C est une orbite périodique fermée isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques.

Définition 1.10 L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.

1.9.1 Stabilité des cycles limites

Définition 1.11 Soit C la trajectoire correspondante au cycle limite, et soient toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C . Elles s'enroulent en spirales autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.

1. Le cycle limite est dit stable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers C .
2. Le cycle limite est dit instable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées par C .

Exemple 1.3 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + 4x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 4y + 4y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.6)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$,

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= 4x^2 - xy - 4x^2(x^2 + y^2) + xy + y^2 - 4y^2(x^2 + y^2) \\ &= 4r^2(1 - r^2), \\ r^2\dot{\theta} &= x^2 + 4xy - 4xy(x^2 + y^2) - 4xy + y^2 + 4xy(x^2 + y^2) \\ &= r^2, \end{aligned}$$

le système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = 4r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{r} = 0 &\Rightarrow r = 0, \text{ ou } r = \pm 1, \\ \theta &= t + \theta_0. \end{aligned}$$

Comme $r > 0$, on accepte que la racine positive $r = 1$. Donc, pour $r = 1$ on a la solution périodique $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$, avec $\theta(0) = \theta_0$. Alors il existe un seul cycle limite stable d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et d'amplitude $r = 1$.

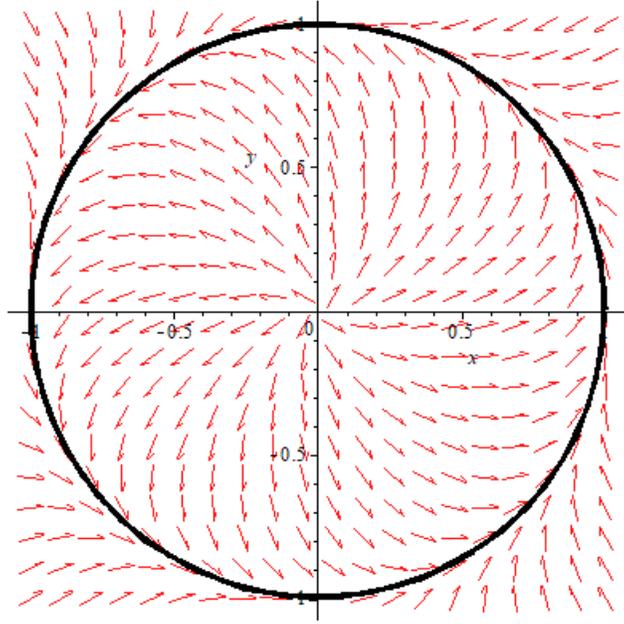


FIGURE 1.11 – Cycle limite stable de système (1.6)

1.10 Bifurcation de Hopf

Théorème 1.1 *Soit le système planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\mu(x, y), \\ \dot{y} = g_\mu(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

où μ est un paramètre. On suppose que $(x, y) = (x_0, y_0)$ est un point d'équilibre du système (1.7) qui dépend de μ .

Soient $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ et $\bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) - i\beta(\mu)$ les valeurs propres du système linéarisé au voisinage de (x_0, y_0) .

On suppose que pour une certaine valeur de $\mu = \mu_0$, les conditions suivantes sont satisfaites

1. $\alpha(\mu_0) = 0$, $\mu_0 = 0$, $\beta(\mu_0) = w \neq 0$ où $\text{sgn}(w) = \text{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} \Big|_{\mu=\mu_0}\right)(0, 0) = 1$,
2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$,
3. $a \neq 0$ où

$$a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + \frac{1}{16w}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}),$$

avec $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)$.

Alors il existe une orbite périodique qui bifurque du point d'équilibre pour $\mu > \mu_0$ si $ad < 0$ ou pour $\mu < \mu_0$ si $ad > 0$.

Le point d'équilibre (x_0, y_0) est stable pour $\mu > \mu_0$ (respectivement pour $\mu < \mu_0$) si $d < 0$ (respectivement si $d > 0$).

L'orbite périodique est stable (respectivement instable) si le point d'équilibre est instable (respectivement stable).

L'amplitude de l'orbite périodique est égale à $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$ et la période est de $T = \frac{2\pi}{|w|}$ quand $\mu \rightarrow \mu_0$.

La bifurcation est dite supercritique si l'orbite périodique est stable et sous critique si l'orbite périodique est instable.

Exemple 1.4 Soit le système planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.8)$$

$(0, 0)$ est le seul point d'équilibre du système (1.8).

Les valeurs propres de la matrice jacobienne du système linéarisé calculée au voisinage de $(0, 0)$ sont $\lambda(\mu) = \mu + i$ et $\bar{\lambda}(\mu) = \mu - i$.

1. $\alpha(\mu) = \mu \Rightarrow \mu_0 = 0$. $\beta(\mu) = 1 = \omega \neq 0$ car $\text{sgn}(w) = \text{sgn}\left(\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial \mu}\right)_{\mu=\mu_0}(0, 0)\right) = 1$
2. $\left(\frac{d\alpha}{d\mu}\right)_{\mu=\mu_0} = 1 = d \neq 0$
3. $a = -1 \neq 0$

Le système a une bifurcation de Hopf pour $\mu = 0$. On a $w = 1$, $d = 1$ et $a = -1$. Comme $ad = -1 < 0$, alors il existe une orbite périodique qui bifurque de l'origine pour $\mu > 0$.

Le point $(0, 0)$ est instable pour $\mu > 0$. Donc l'orbite périodique est stable. D'où la bifurcation est supercritique pour $\mu > 0$.

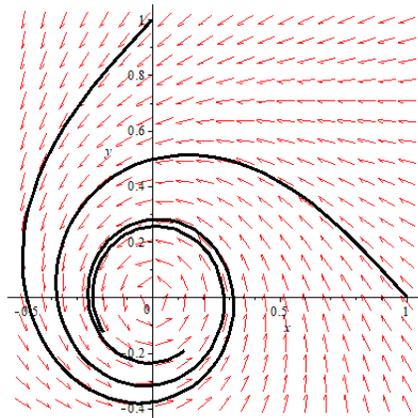


FIGURE 1.12 – Portrait de phase pour $\mu = 0.01$

1.11 Théorème de Bezout

Soient P_j , $j = 1 \dots n$ des polynômes en les variables (x_1, \dots, x_d) de degré d_i , $i = 1 \dots n$.
Considérons le système polynomial suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x_1, \dots, x_d) = 0, \\ P_2(x_1, \dots, x_d) = 0, \\ \dots \\ P_n(x_1, \dots, x_d) = 0, \end{array} \right.$$

où $(x_1, \dots, x_n) \in R^d$.

Si le nombre de solutions de ce système est fini, alors il est borné par $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n$.

CHAPITRE 2

THÉORIE DE MOYENNISATION

Dans ce chapitre, on introduit la théorie de moyennisation d'ordre un et deux. La théorie de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques.

Cette méthode donne des conditions pour lesquelles les points d'équilibre du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels associés.

L'idée de base est de considérer une équation différentielle de la forme standard

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \quad (2.1)$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon \leq 1$ et f est T -périodique, et de déterminer l'équation moyennée associée à cette équation

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(r) \quad (2.2)$$

où

$$f^0(r) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y) ds \quad (2.3)$$

et de chercher les solutions périodiques de l'équation (2.1).

2.1 Théorème de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), y(0) = x_0, \quad (2.4)$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, x)$ et $G(t, x, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodiques en t .

Le système moyenné associé au système (2.4) est défini par

$$\dot{y} = \varepsilon f(y), y(0) = x_0, \quad (2.5)$$

où

$$f(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt. \quad (2.6)$$

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les points d'équilibres du système moyenné (2.5) fournissent des solutions périodiques du système (2.4).

Théorème 2.1 [17] *On considère le système (2.4) et on suppose que*

(i) $F, G, D_x F, D_x^2 F$ et $D_x G$ sont des fonctions continues et bornées par une constante M indépendante de ε dans $[0, \infty[\times D$ et $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

(ii) F et G sont T -périodiques en t (T indépendante de ε).

Alors on a :

(a) Si le point p est un point d'équilibre pour le système moyenné (2.5) tel que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0, \quad (2.7)$$

alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.4) telle que $x_\varepsilon(0) \rightarrow p$.

(b) Si le point d'équilibre $y = p$ du système moyenné (2.5) est hyperbolique, alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la solution périodique du système (2.4) est unique et de même stabilité que p .

Exemple 2.1 Soit L'équation de **Van Der Pol**

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.9)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)). \end{cases} \quad (2.10)$$

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x^2), \quad |x| < 1.$$

Prenons

$$x = \varepsilon(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \cos(\theta) \sin(\theta).$$

Le système (2.10) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) est sous la forme standard (2.1), ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation avec

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(t, x) = F(r, \theta) = -r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta).$$

On a

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} r (r^2 - 4).$$

On remarque que $f_0(r)$ admet une unique racine positive $r = 2$, et on a $\frac{d}{dr} f^0(r) = \frac{1}{8}(3r^2 - 4)$, d'où $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1$. D'après théorème précédent et pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, l'équation de **Van Der Pol** (2.8) admet une solution périodique d'amplitude $r = 2$, et comme $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1 > 0$ alors ce cycle limite est instable.

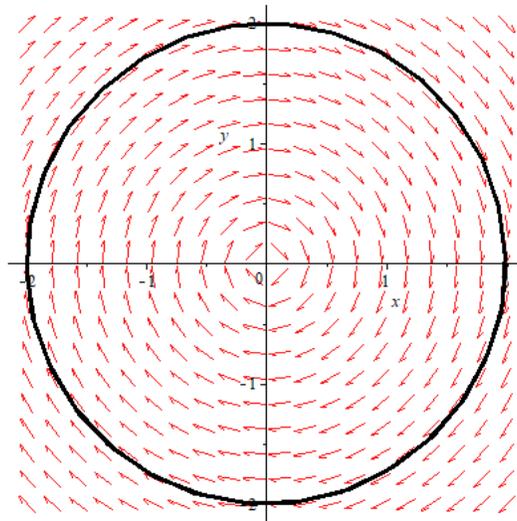


FIGURE 2.1 – cycle limite instable pour $\varepsilon = 10^{-3}$ du système (2.9)

Exemple 2.2 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + 2xy\varepsilon \\ \dot{y} = 2x + \varepsilon(x^2y - 3y) \end{cases} \quad (2.12)$$

En coordonnées polaires le système (2.12) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r \sin(\theta)\varepsilon(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)r^2 + 2 \cos(\theta)^2r - 3 \sin(\theta)), \\ \dot{\theta} = \cos(\theta)^3 \sin(\theta)\varepsilon r^2 + 2 \cos(\theta)^3\varepsilon r - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)\varepsilon - 2 \cos(\theta)\varepsilon r + 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

En utilisant le développement de Taylor le système (2.13) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = r \sin(\theta)(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)r^2 + 2 \cos(\theta)^2r - 3 \sin(\theta))\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) est sous la forme normale pour appliquer la méthode de moyennisation d'ordre un, on prend

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(t, x) = F(r, \theta) = r \sin(\theta)(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)r^2 + 2 \cos(\theta)^2r - 3 \sin(\theta)).$$

On a

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} r (r^2 - 12).$$

La première fonction moyennée $f_0(r)$ admet une unique racine positive $r = 2\sqrt{3}$ et on a $\frac{d}{dr} f^0(r) = \frac{3}{8} r^2 - \frac{3}{2}$, d'où $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2\sqrt{3}) = 3$.

D'après théorème précédent et pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (2.12) admet une solution périodique d'amplitude $r = 2\sqrt{3}$, et comme $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2\sqrt{3}) = 3 > 0$ alors ce cycle limite est instable.

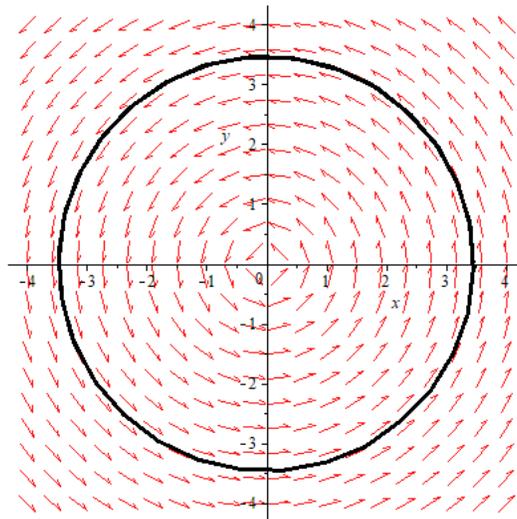


FIGURE 2.2 – cycle limite instable pour $\varepsilon = 0.0003$ du système (2.12)

2.2 Théorème de moyennisation d'ordre deux

Théorème 2.2 [3] *On considère le système différentiel suivant*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.15)$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à la première variable et D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

On suppose que les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées.

(i) F_1, F_2, R sont localement lipschitziennes par rapport à x , $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et R est différentiable par rapport à ε .

On définit $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \\ f_2(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z) \right] ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

où

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt,$$

(ii) *Pour $V \subset D$ un sous ensemble ouvert et pour chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a \in V$ tel que $f_1(a) + \varepsilon f_2(a) = 0$ et $d_B(f_1 + \varepsilon f_2, V, a) \neq 0$.*

Alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ du système (2.15) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. L'expression $d_B(f_1 + \varepsilon f_2, V, 0)$ signifie que le degré de Brouwer de la fonction $f_1 + \varepsilon f_2$ dans un voisinage V de zéro est non nul.

Si la fonction $f_1 + \varepsilon f_2$ est de classe C^1 alors, il suffit de vérifier que $\det(D(f_1 + \varepsilon f_2(a_\varepsilon))) \neq 0$ pour avoir que $d_B(f_1 + \varepsilon f_2, V, 0) \neq 0$.

Si f_1 est non identiquement nulle. Alors les racines de $f_1 + \varepsilon f_2$ sont principalement les racines de f_1 pour ε suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent est celui de la théorie de moyennisation de premier ordre.

Si f_1 est identiquement nulle et f_2 est non identiquement nulle. Alors les racines de $f_1 + \varepsilon f_2$ sont principalement les racines de f_2 pour ε suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent est celui de la théorie de moyennisation de deuxième ordre.

Exemple 2.3 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x^2 - xy + 2y^2) + \varepsilon^2(ax + y^2), \\ \dot{y} = x. \quad a > 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

En coordonnées polaires, le système peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r \cos(\theta)^2 \varepsilon + \cos(\theta)^2 r + \cos(\theta) \sin(\theta) r - \cos(\theta) a \varepsilon - \varepsilon r - 2r) \cos(\theta) \varepsilon, \\ \dot{\theta} = \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \varepsilon^2 r - \cos(\theta)^3 \varepsilon r + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \varepsilon r - \cos(\theta) \sin(\theta) a \varepsilon^2 - \varepsilon^2 r \sin(\theta) + \\ \cos(\theta) \varepsilon r - 2 \sin(\theta) \varepsilon r + 1, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & -r(\cos(\theta)^2 r + \cos(\theta) \sin(\theta) r - 2r) \cos(\theta) \varepsilon + (-r(\cos(\theta)^2 r - \cos(\theta) a - r) \cos(\theta) \\ & + r^2(\cos(\theta)^2 + \cos(\theta) \sin(\theta) - 2) \cos(\theta) (-\cos(\theta)^3 r + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) r + r \cos(\theta) - \\ & 2r \sin(\theta))) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (2.15) avec

$$F_1(r, \theta) = -r(\cos(\theta)^2 r + \cos(\theta) \sin(\theta) r - 2r) \cos(\theta),$$

$$F_2(r, \theta) = -r(\cos(\theta)^2 r - \cos(\theta) a - r) \cos(\theta) + r^2(\cos(\theta)^2 + \cos(\theta) \sin(\theta) - 2) \cos(\theta) (-\cos(\theta)^3 r + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) r + r \cos(\theta) - 2r \sin(\theta)),$$

$$R(r, \theta) = O(\varepsilon^3).$$

Donc on applique le théorème 2.2

$$f^0(r) = \frac{-r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^2 r + \cos(\theta) \sin(\theta) r - 2r) \cos(\theta) = 0 \text{ et}$$

$$f^1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[D_r F_1(\theta, r) \int_0^s F_1(\theta, r) dt + F_2(s, r) \right] ds = \frac{1}{8} r(-3r^2 + 4a).$$

$f^1(r)$ admet les racines $0, \frac{2}{3}\sqrt{3a}, -\frac{2}{3}\sqrt{3a}$ et comme $r > 0$, l'unique racine positive est $\frac{2}{3}\sqrt{3a}$.

On a $\frac{d}{dr} f^1(r) = -\frac{9}{8} r^2 + \frac{1}{2} a$ et $(\frac{df^1}{dr})(\frac{2}{3}\sqrt{3a}) = -a$.

Le système (2.17) a un cycle limite stable d'amplitude $r = \frac{2}{3}\sqrt{3a}$.

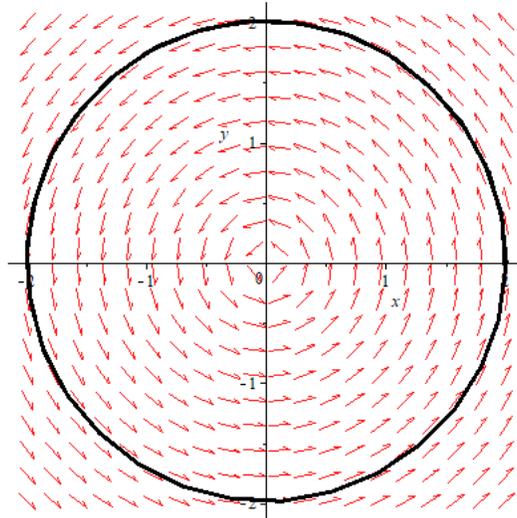


FIGURE 2.3 – cycle limite stable pour $\varepsilon = 0.003$ du système (2.17)

CHAPITRE 3

LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF POUR DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUADRATIQUES EN DIMENSION TROIS

Dans ce chapitre [9], en appliquant la théorie de moyennisation d'ordre deux, on étudie le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent de l'origine du système différentiel polynomial quadratique dans \mathbb{R}^3 , dont la partie linéaire du point d'équilibre $(0, 0, 0)$ a des valeurs propres de la forme $(\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2) \pm bi$ et $\varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2$ où ε est un petit paramètre.

Ce système est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk} x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk} x^i y^j z^k, \\ \frac{dy}{dt} = bx + (\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk} x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk} x^i y^j z^k \\ \frac{dz}{dt} = (\varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk} x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk} x^i y^j z^k. \end{cases} \quad (3.1)$$

où $a_{ijk}, A_{ijk}, b_{ijk}, B_{ijk}, c_{ijk}, C_{ijk}$ pour $i + j + k = 2$, a_1, a_2, c_1, c_2 et b sont des paramètres réels.

Théorème 3.1 *En appliquant la théorie de moyennisation d'ordre un, on obtient au plus un cycle limite qui bifurque de l'origine du système (3.1) quand $\varepsilon = 0$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*

- (i) $(2a_1^2 c_{002} - a_1 c_1 (a_{101} + b_{011}))(c_{020} + c_{200}) < 0$,
- (ii) $a_{101} + b_{011} > 0$.

Preuve En coordonnées cylindriques $x = R \cos(\theta)$, $y = R \sin(\theta)$ et $z = z$, le système (3.1) devient

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \varepsilon(a_1 + \varepsilon a_2)R + h_{11}(\theta)R^2 + h_{12}(\theta)Rz + h_{13}(\theta)z^2, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}(bR + h_{21}(\theta)R^2 + h_{22}(\theta)Rz + h_{23}(\theta)z^2), \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(c_1 + \varepsilon c_2)R + h_{31}(\theta)R^2 + h_{32}(\theta)Rz + h_{33}(\theta)z^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$h_{11}(\theta) = (a_{200} + \varepsilon A_{200}) \cos^3(\theta) + [a_{110} + b_{200} + \varepsilon(A_{110} + B_{200})] \cos^2(\theta) \sin(\theta) + [(a_{020} + b_{110}) + \varepsilon(A_{020} + B_{110})] \cos(\theta) \sin(\theta)^2 + (b_{020} + \varepsilon B_{020}) \sin^3(\theta),$$

$$h_{12}(\theta) = (a_{101} + \varepsilon A_{101}) \cos^2(\theta) + [a_{011} + b_{101} + \varepsilon(A_{011} + B_{101})] \cos(\theta) \sin(\theta) + (b_{011} + \varepsilon B_{011}) \sin^2(\theta),$$

$$h_{13}(\theta) = (a_{002} + \varepsilon A_{002}) \cos(\theta) + (b_{002} + \varepsilon B_{002}) \sin(\theta),$$

$$h_{21}(\theta) = (b_{200} + \varepsilon B_{200}) \cos^3(\theta) + [-(a_{200} + b_{110}) + \varepsilon(-A_{200} + B_{110})] \cos^2(\theta) \sin(\theta) + [(-a_{110} + b_{020}) + \varepsilon(-A_{110} + B_{020})] \cos(\theta) \sin(\theta)^2 - (a_{020} + \varepsilon A_{020}) \sin^3(\theta),$$

$$h_{22}(\theta) = (b_{101} + \varepsilon B_{101}) \cos^2(\theta) + [(-a_{101} + b_{011}) + \varepsilon(-A_{101} + B_{011})] \cos(\theta) \sin(\theta) + (a_{011} + \varepsilon A_{011}) \sin^2(\theta),$$

$$h_{23}(\theta) = (b_{002} + \varepsilon B_{002}) \cos(\theta) + (a_{002} + \varepsilon A_{002}) \sin(\theta),$$

$$h_{31}(\theta) = (c_{200} + \varepsilon C_{200}) \cos^2(\theta) + (c_{110} + \varepsilon C_{110}) \cos(\theta) \sin(\theta) + (c_{020} + \varepsilon C_{020}) \sin^2(\theta),$$

$$h_{32}(\theta) = (c_{101} + \varepsilon C_{101}) \cos(\theta) + (c_{011} + \varepsilon C_{011}) \sin(\theta),$$

$$h_{33}(\theta) = c_{002} + \varepsilon C_{002}.$$

On considère θ comme une nouvelle variable, le système (3.2) devient

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\theta} &= \frac{[(\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2)R + h_{11}(\theta)R^2 + h_{12}(\theta)Rz + h_{13}(\theta)z^2]R}{bR + h_{21}(\theta)R^2 + h_{22}(\theta)Rz + h_{23}(\theta)z^2}, \\ \frac{dz}{d\theta} &= \frac{[\varepsilon(c_1 + \varepsilon c_2)R + h_{31}(\theta)R^2 + h_{32}(\theta)Rz + h_{33}(\theta)z^2]R}{(bR + h_{21}(\theta)R^2 + h_{22}(\theta)Rz + h_{23}(\theta)z^2)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Prenons

$$(R, z) = (\rho\varepsilon, \xi\varepsilon).$$

Le système (3.1) devient sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation. En considérant les variables (ρ, ξ) , le système (3.3) devient

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \xi) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho, \xi) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\xi}{d\theta} &= \varepsilon F_{12}(\theta, \rho, \xi) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \xi) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
& \text{où} \\
F_{11} &= \frac{1}{b} [a_{200}\rho^2 \cos^3(\theta) + \rho(a_1 + a_{101}\xi) \cos^2(\theta) + \rho^2(a_{110} + b_{200}) \cos^2(\theta) \sin(\theta) + a_{200}\xi^2 \cos(\theta) + \\
& \rho^2(a_{020} + b_{110}) \sin^2(\theta) \cos(\theta) + \rho\xi(a_{011} + b_{101}) \cos(\theta) \sin(\theta) + b_{020}\rho^2 \sin^3(\theta) + \rho(a_1 + b_{011}\xi) \sin^2 + \\
& b_{200}\xi^2 \sin(\theta)], \\
F_{21} &= -\frac{1}{b^2\rho} [\cos(\theta)^4 \sin(\theta)\rho^3\xi a_{011}b_{200} - 2\cos(\theta)^4 \sin(\theta)\rho^3\xi a_{101}a_{200} + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)\rho^3\xi a_{101}b_{110} + \cos(\theta)^4 \\
& \sin(\theta)\rho^3\xi a_{110}b_{101} + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)\rho^3\xi a_{200}b_{011} + 2\cos(\theta)^4 \sin(\theta)\rho^3\xi b_{101}b_{200} - 2\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3\xi a_{011}a_{200} + \\
& \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3\xi a_{011}b_{110} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3\xi a_{020}b_{101} - 2\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3\xi a_{101}a_{110} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3 \\
& \xi a_{101}b_{020} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3\xi a_{101}b_{200} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3\xi a_{110}b_{011} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3\xi a_{200}b_{101} + 2\cos(\theta)^3 \\
& \sin(\theta)^2 \rho^3\xi b_{11}b_{200} + 2\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^3\xi b_{101}b_{110} - 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3\xi a_{011}a_{110} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3\xi a_{011}b_{020} \\
& - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3\xi a_{011}b_{200} - 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3\xi a_{020}a_{101} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3\xi a_{020}b_{011} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3 \\
& \xi a_{101}b_{110} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3\xi a_{110}b_{101} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3\xi a_{200}b_{011} + 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^3\xi b_{011}b_{110} + 2\cos(\theta)^2 \\
& \sin(\theta)^3 \rho^3\xi b_{020}b_{101} - 2\cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^3\xi a_{011}a_{020} - \cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^3\xi a_{011}b_{110} - \cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^3\xi a_{020}b_{101} - \\
& \cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^3\xi a_{101}b_{020} - \cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^3\xi a_{110}b_{011} + 2\cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^3\xi b_{011}b_{020} - 2\cos(\theta)^3 \sin(\theta)\rho^2\xi^2 \\
& a_{002}a_{200} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)\rho^2\xi^2 a_{002}b_{110} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)\rho^2\xi^2 a_{011}b_{101} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)\rho^2\xi^2 a_{101}b_{011} + \cos(\theta)^3 \\
& \sin(\theta)\rho^2\xi^2 a_{110}b_{002} + 2\cos(\theta)^3 \sin(\theta)\rho^2\xi^2 b_{002}b_{200} - 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 a_{002}a_{110} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 a_{002} \\
& b_{020} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 a_{002}b_{200} - 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 a_{011}a_{101} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 a_{011}b_{011} + \cos(\theta)^2 \\
& \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 a_{020}b_{002} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 a_{101}b_{101} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 a_{200}b_{002} + 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 b_{002} \\
& b_{110} + 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^2\xi^2 b_{011}b_{101} - 2\cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^2\xi^2 a_{002}a_{020} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^2\xi^2 a_{002}b_{110} - \cos(\theta) \\
& \sin(\theta)^3 \rho^2\xi^2 a_{011}b_{101} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^2\xi^2 a_{101}b_{011} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^2\xi^2 a_{110}b_{002} + 2\cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^2\xi^2 b_2b_{20} - \\
& \cos(\theta)^3 \sin(\theta)a_1\rho^2\xi a_{101} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)a_1\rho^2\xi b_{11} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 a_1\rho^2\xi a_{011} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 a_1\rho^2\xi b_{101} - \\
& 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)\rho\xi^3 a_{002}a_{101} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)\rho\xi^3 a_{002}b_{011} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)\rho\xi^3 a_{011}b_{002} + 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)\rho\xi^3 \\
& b_{002}b_{101} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 a_1\rho^2\xi a_{101} + \cos(\theta) \sin(\theta)^3 a_1\rho^2\xi b_{011} - 2\cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho\xi^3 a_{002}a_{011} - \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \\
& \rho\xi^3 a_{002}b_{101} - \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho\xi^3 a_{101}b_{002} + 2\cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho\xi^3 b_{002}b_{011} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)a_1\rho\xi^2 a_{002} + \cos(\theta) \\
& \sin(\theta)^2 a_1\rho\xi^2 b_{002} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)b\rho^2\xi A_{011} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)b\rho^2\xi B_{101} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 b\rho^2\xi A_{101} - \cos(\theta)^2 \\
& \sin(\theta)^2 b\rho^2\xi B_{011} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 b\rho^2\xi A_{011} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 b\rho^2\xi B_{101} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)b\rho\xi^2 B_{002} - \cos(\theta) \\
& \sin(\theta)^2 b\rho\xi^2 a_{002} + \cos(\theta)^4 a_1\rho^2\xi b_{101} + \cos(\theta)^3 \rho\xi^3 a_{002}b_{101} + \cos(\theta)^3 \rho\xi^3 a_{101}b_2 - \sin(\theta)^4 a_1\rho^2\xi a_{11} - \sin(\theta)^3 \rho\xi^3 \\
& a_{002}b_{011} - \sin(\theta)^3 \rho\xi^3 a_{011}b_{002} + \cos(\theta)^3 a_1\rho\xi^2 b_{002} - \sin(\theta)^3 a_1\rho\xi^2 a_{002} - \cos(\theta)^4 \sin(\theta)b\rho^3 A_{110} - \cos(\theta)^4 \\
& \sin(\theta)b\rho^3 B_{200} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 b\rho^3 A_{020} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 b\rho^3 A_{200} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 b\rho^3 B_{110} - \cos(\theta)^2 \\
& \sin(\theta)^3 b\rho^3 A_{110} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 b\rho^3 B_{020} + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)\rho^4 a_{110}b_{200} + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)\rho^4 a_{200}b_{110} + \cos(\theta)^4 \\
& \sin(\theta)^2 \rho^4 a_{020}b_{200} - 2\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 \rho^4 a_{110}a_{200} + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 \rho^4 a_{110}b_{110} + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 \rho^4 a_{200}b_{020} - \\
& \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 \rho^4 a_{200}b_{200} + 2\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 \rho^4 b_{110}b_{200} - 2\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 \rho^4 a_{020}a_{200} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 \rho^4 a_{020} \\
& b_{110} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 \rho^4 a_{110}b_{20} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 \rho^4 a_{110}b_{200} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 \rho^4 a_{200}b_{110} + 2\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 \rho^4 \\
& b_{020}b_{200} - 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 \rho^4 a_{020}a_{110} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 b\rho^3 B_{200} - \cos(\theta) \sin(\theta)^4 b\rho^3 A_{020} - \cos(\theta) \sin(\theta)^4 b\rho^3 \\
& B_{110} - \cos(\theta)^4 b\rho^2\xi A_{101} - \sin(\theta)^4 b\rho^2\xi B_{011} - \cos(\theta)^3 b\rho\xi^2 a_{002} - 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 a_2b\rho^2 - \sin(\theta)^3 b\rho\xi^2 B_{002} + \\
& \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 \rho^4 a_{020}b_{020} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 \rho^4 a_{020}b_{200} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 \rho^4 a_{110}b_{110} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 \rho^4 a_{200} \\
& b_{020} + 2\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 \rho^4 b_{020}b_{110} - \cos(\theta) \sin(\theta)^5 \rho^4 a_{020}b_{110} - \cos(\theta) \sin(\theta)^5 \rho^4 a_{110}b_{020} + \cos(\theta)^5 \rho^3\xi a_{101}b_{200} \\
& + \cos(\theta)^5 \rho^3\xi a_{200}b_{101} - \sin(\theta)^5 \rho^3\xi a_{011}b_{020} - \sin(\theta)^5 \rho^3\xi a_{020}b_{011} - \cos(\theta)^4 \sin(\theta)a_1\rho^3 a_{200} + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)a_1\rho^3 \\
& b_{110} + \cos(\theta)^4 \rho^2\xi^2 a_{002}b_{200} + \cos(\theta)^4 \rho^2\xi^2 a_{101}b_{101} + \cos(\theta)^4 \rho^2\xi^2 a_{200}b_{002} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 a_1\rho^3 a_{110} + \cos(\theta)^3 \\
& \sin(\theta)^2 a_1\rho^3 b_{020} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 a_1\rho^3 b_{200} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)\rho^2\xi^2 a_{101}^2 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)\rho^2\xi^2 b_{101}^2 - \cos(\theta)^2 \\
& \sin(\theta)^3 a_1\rho^3 a_{020} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 a_1\rho^3 a_{200} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 a_1\rho^3 b_{110} - \cos(\theta) \sin(\theta)^4 a_1\rho^3 a_{110} + \cos(\theta) \\
& \sin(\theta)^4 a_1\rho^3 b_{020} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^2\xi^2 a_{011}^2 + \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^2\xi^2 b_{011}^2 - \sin(\theta)^4 \rho^2\xi^2 a_{002}b_{020} - \sin(\theta)^4 \rho^2\xi^2 a_{011} \\
& b_{011} - \sin(\theta)^4 \rho^2\xi^2 a_{020}b_{002} + \cos(\theta)^6 \rho^4 a_{200}b_{200} - \cos(\theta)^5 \sin(\theta)\rho^4 a_{200}^2 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)\rho^4 b_{200}^2 - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 \\
& \rho^4 a_{110}^2 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 \rho^4 b_{110}^2 - \cos(\theta) \sin(\theta)^5 \rho^4 a_{020}^2 + \cos(\theta) \sin(\theta)^5 \rho^4 b_{20}^2 - \sin(\theta)^6 \rho^4 a_{020}b_{020} + \cos(\theta)^5 a_1\rho^3 \\
& b_{200} - \sin(\theta)^5 a_1\rho^3 a_{020} + \cos(\theta)^2 \xi^4 a_{002}b_2 - \cos(\theta) \sin(\theta)\xi^4 a_{002}^2 + \cos(\theta) \sin(\theta)\xi^4 b_2^2 - \sin(\theta)^2 \xi^4 a_{002}b_{002} - \\
& \cos(\theta)^5 b\rho^3 A_{200} - \sin(\theta)^5 b\rho^3 B_{020} - \cos(\theta)^4 a_2b\rho^2 - \sin(\theta)^4 a_2b\rho^2],
\end{aligned}$$

$$F_{12} = \frac{1}{b} [c_{200} \cos^2(\theta) \rho^2 + [c_{020} \sin^2(\theta) \rho^2 + c_{110} \cos(\theta) \sin(\theta) \rho^2 + c_{101} \xi \cos(\theta) \rho + c_{011} \xi \sin(\theta) \rho + c_{002} \xi^2 + c_1 \xi],$$

$$F_{22} = -\frac{1}{b^2 \rho} [-\cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^3 \xi a_{011} c_{110} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^3 \xi a_{020} c_{101} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^3 \xi a_{101} c_{020} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^3 \xi a_{110} c_{011} + \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^3 \xi b_{011} c_{020} + \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \rho^3 \xi b_{020} c_{011} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \rho^2 \xi^2 a_{002} c_{200} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \rho^2 \xi^2 a_{101} c_{101} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \rho^2 \xi^2 a_{200} c_{002} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \rho^2 \xi^2 b_{002} c_{110} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \rho^2 \xi^2 b_{011} c_{101} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \rho^2 \xi^2 b_{101} c_{011} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \rho^2 \xi^2 b_{110} c_{002} - \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho^2 \xi^2 a_{002} c_{110} - \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho^2 \xi^2 a_{011} c_{101} - \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho^2 \xi^2 a_{101} c_{011} - \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho^2 \xi^2 a_{110} c_{002} + \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho^2 \xi^2 b_{002} c_{020} + \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho^2 \xi^2 b_{011} c_{011} + \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \rho^2 \xi^2 b_{020} c_{002} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta) c_1 \rho^2 \xi a_{200} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) c_1 \rho^2 \xi b_{110} - \cos(\theta) \sin(\theta)^2 c_1 \rho^2 \xi a_{110} + \cos(\theta) \sin(\theta)^2 c_1 \rho^2 \xi b_{020} - \cos(\theta) \sin(\theta) \rho \xi^3 a_{002} c_{101} - \cos(\theta) \sin(\theta) \rho \xi^3 a_{101} c_{002} + \cos(\theta) \sin(\theta) \rho \xi^3 b_{002} c_{11} + \cos(\theta) \sin(\theta) \rho \xi^3 b_{011} c_{002} - \cos(\theta) \sin(\theta) c_1 \rho \xi^2 a_{101} + \cos(\theta) \sin(\theta) c_1 \rho \xi^2 b_{011} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta) b \rho^2 \xi C_{011} - \cos(\theta) \sin(\theta)^2 b \rho^2 \xi C_{101} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \rho^3 \xi a_{101} c_{200} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \rho^3 \xi a_{200} c_{101} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \rho^3 \xi b_{011} c_{200} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \rho^3 \xi b_{101} c_{110} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \rho^3 \xi b_{110} c_{101} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \rho^3 \xi b_{200} c_{011} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^3 \xi a_{011} c_{200} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^3 \xi a_{101} c_{110} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^3 \xi a_{110} c_{101} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^3 \xi a_{200} c_{011} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^3 \xi b_{011} c_{110} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^3 \xi b_{20} c_{101} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^3 \xi b_{101} c_{20} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \rho^3 \xi b_{110} c_{101} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 b \rho^3 C_{200} - \cos(\theta) \sin(\theta)^3 b \rho^3 C_{110} - \cos(\theta)^3 b \rho^2 \xi C_{101} - \sin(\theta)^3 b \rho^2 \xi C_{011} - \cos(\theta)^2 b \rho \xi^2 c_{002} - \sin(\theta)^2 b \rho \xi^2 c_{002} - \cos(\theta)^2 b c_2 \rho \xi - \sin(\theta)^2 b c_2 \rho \xi - \cos(\theta)^4 \sin(\theta) \rho^4 a_{200} c_{200} + \cos(\theta)^4 \sin(\theta) \rho^4 b_{110} c_{200} + \cos(\theta)^4 \sin(\theta) \rho^4 b_{200} c_{110} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^4 a_{110} c_{200} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^4 a_{200} c_{110} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^4 b_{020} c_{200} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^4 b_{110} c_{110} + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 \rho^4 b_{200} c_{020} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^4 a_{020} c_{200} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^4 a_{110} c_{110} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^4 a_{200} c_{020} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^4 b_{020} c_{110} + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \rho^4 b_{110} c_{020} - \cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^4 a_{020} c_{110} - \cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^4 a_{110} c_{020} + \cos(\theta) \sin(\theta)^4 \rho^4 b_{020} c_{020} + \cos(\theta)^4 \rho^3 \xi b_{101} c_{200} + \cos(\theta)^4 \rho^3 \xi b_{200} c_{101} - \sin(\theta)^4 \rho^3 \xi a_{011} c_{020} - \sin(\theta)^4 \rho^3 \xi a_{020} c_{011} + \cos(\theta)^3 \rho^2 \xi^2 b_{002} c_{200} + \cos(\theta)^3 \rho^2 \xi^2 b_{101} c_{101} + \cos(\theta)^3 \rho^2 \xi^2 b_{200} c_{002} - \sin(\theta)^3 \rho^2 \xi^2 a_{002} c_{020} - \sin(\theta)^3 \rho^2 \xi^2 a_{011} c_{011} - \sin(\theta)^3 \rho^2 \xi^2 a_{020} c_{002} + \cos(\theta)^3 c_1 \rho^2 \xi b_{200} + \cos(\theta)^2 \rho \xi^3 b_{002} c_{101} + \cos(\theta)^2 \rho \xi^3 b_{101} c_{002} - \sin(\theta)^3 c_1 \rho^2 \xi a_{020} - \sin(\theta)^2 \rho \xi^3 a_{002} c_{011} - \sin(\theta)^2 \rho \xi^3 a_{011} c_{002} + \cos(\theta)^2 c_1 \rho \xi^2 b_{101} - \sin(\theta)^2 c_1 \rho \xi^2 a_{011} - \cos(\theta)^3 \sin(\theta) b \rho^3 C_{110} - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 b \rho^3 C_{020} + \cos(\theta)^5 \rho^4 b_{200} c_{200} - \sin(\theta)^5 \rho^4 a_{020} c_{020} + \cos(\theta) \xi^4 b_{002} c_{002} - \sin(\theta) \xi^4 a_{002} c_{002} + \cos(\theta) c_1 \xi^3 b_{002} - \sin(\theta) c_1 \xi^3 a_{002} - \cos(\theta)^4 b \rho^3 C_{200} - \sin(\theta)^4 b \rho^3 C_{020}].$$

Le système (3.4) est équivalent au système (2.15) avec $x = (\rho, \xi), t = \theta$,

$F_1(t, x) = (F_{11}(\theta, \rho, \xi), F_{12}(\theta, \rho, \xi)), F_2(t, x) = (F_{21}(\theta, \rho, \xi), F_{22}(\theta, \rho, \xi))$ et $T = 2\pi$.

Calculons la première fonction moyennée $f_1 = (f_{11}(\rho, \xi), f_{12}(\rho, \xi))$, où

$$f_{1i}(\rho, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{1i}(\theta, \rho, \xi) d\theta,$$

pour $i = 1, 2$, on obtient

$$\begin{aligned} f_{11}(\rho, \xi) &= \frac{\rho(2a_1 + (a_{101} + b_{011})\xi)}{2b}, \\ f_{12}(\rho, \xi) &= \frac{\rho^2(c_{020} + c_{200}) + 2\xi(c_1 + c_{002}\xi)}{2b}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

On résout le système

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \xi) = 0, \\ f_{12}(\rho, \xi) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\text{On trouve } (\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \left(\frac{2\sqrt{-\frac{2a_1^2 c_{002} - a_1 c_1 (a_{101} + b_{011})}{c_{020} + c_{200}}}}{a_{101} + b_{011}}, -\frac{2a_1}{a_{101} + b_{011}} \right).$$

Cette solution est définie si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées.

Ensuite, on vérifie que

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{21}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{22}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \Big|_{(\rho, \xi) = (\bar{\rho}, \bar{\xi})} \neq 0. \quad (3.7)$$

D'où, le système (3.6) a une seule racine positive qui produit un unique cycle limite bifurque de l'origine du système (3.1).

Exemple 3.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\varepsilon x^2 + \varepsilon x - xz - y, \\ \dot{y} = \varepsilon y + 3x^2 + 3xz - 2yz + x, \\ \dot{z} = -\varepsilon z + 4x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}\varepsilon x^2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Les valeurs propres du point d'équilibre $(0, 0, 0)$ du système (3.8) sont $\varepsilon \pm i$ et $-\varepsilon$.

Le système (3.4) associée au système (3.8) comprend les fonctions suivantes

$$F_{11} = \frac{3}{4} \sin(\theta) \rho^2 + \frac{3}{2} \sin(2\theta) \rho \xi + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \rho \xi + \frac{3}{4} \sin(3\theta) \rho^2 - \frac{3}{2} \rho \xi + \rho,$$

$$F_{12} = -\xi + \rho^2 \cos(2\theta) + 3\rho^2.$$

Pour déterminer le cycle limite, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \xi) = -\frac{1}{2}\rho(3\xi - 2) = 0, \\ f_{12}(\rho, \xi) = 3\rho^2 - \xi = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Le système (3.9) admet une unique racine $(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3})$.

Vérifions maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul, où

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det(M) = \det \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\xi + 1 & -\frac{3}{2}\rho \\ 6\rho & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$D\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2.$$

Donc, le système admet un cycle limite qui bifurque de l'origine.

Maintenant on étudie la stabilité de ce point. Pour ceci, on calcule les valeurs propres de la matrice M au ce point.

On trouve $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i)$.

Alors, ce cycle limite est stable.

En revenant par les changement des variables, on obtient le cycle limite du système (3.8) tel que

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) = \varepsilon \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cos(\theta), \frac{\sqrt{2}}{3} \sin(\theta), \frac{2}{3} \right).$$

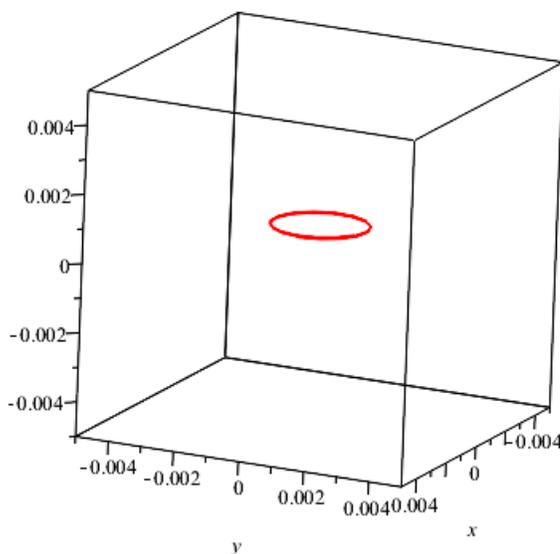


FIGURE 3.1 – cycle limite stable du système (3.8) pour $\varepsilon = 10^{-3}$

Exemple 3.2 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 3\varepsilon y^2 + \varepsilon x - 2yz - y, \\ \dot{y} = \varepsilon y + x^2 + 2yz + x, \\ \dot{z} = -\frac{1}{4}\varepsilon z - 3x^2 + 2y^2 + 5\varepsilon y^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Les valeurs propres du point d'équilibre $(0, 0, 0)$ du système (3.8) sont $\varepsilon \pm i$ et $-\frac{1}{4}\varepsilon$.

Le système (3.4) associée au système (3.10) comprend les fonctions suivantes

$$F_{11} = \frac{1}{4} \sin(\theta) \rho^2 - \sin(2\theta) \rho \xi - \cos(2\theta) \rho \xi + \frac{1}{4} \sin(3\theta) \rho^2 + \rho \xi + \rho,$$

$$F_{12} = -\frac{1}{4} \xi - \frac{5}{2} \rho^2 \cos(2\theta) - \frac{1}{2} \rho^2.$$

Pour déterminer le cycle limite, on résout le système suivant

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \xi) = \rho(\xi + 1) = 0, \\ f_{12}(\rho, \xi) = -\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \xi = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Le système (3.11) admet une unique racine $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$.

Vérifions maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul, où

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det(M) = \det \begin{pmatrix} \xi + 1 & \rho \\ -\rho & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right) = -\frac{7}{36}.$$

Donc, le système admet un cycle limite qui bifurque l'origine.

Maintenant on étudie la stabilité de ce point. Pour ceci, on calcule les valeurs propres de la matrice M au ce point.

On trouve $\left(\frac{17}{24} + \frac{\sqrt{401}}{24}, \frac{17}{24} - \frac{\sqrt{401}}{24}\right)$.

Alors, ce cycle limite est semi stable.

En revenant par les changement des variables, on obtient le cycle limite du système (3.8) tel que

$$(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) = \varepsilon \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\theta), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta), -1 \right).$$

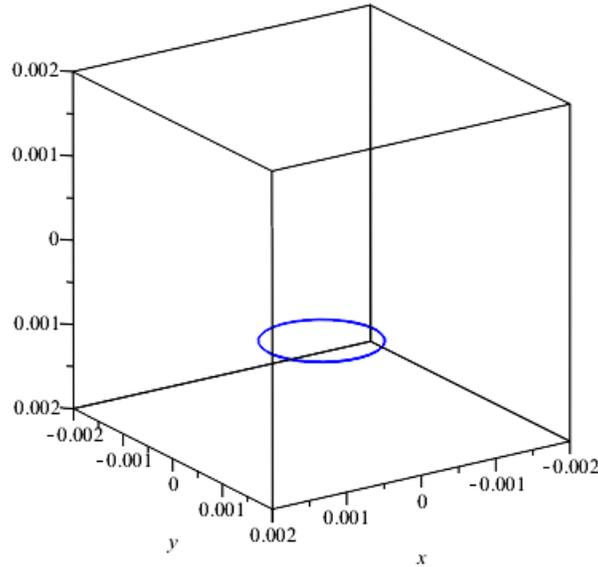


FIGURE 3.2 – cycle limite semi stable du système (3.10) pour $\varepsilon = 10^{-3}$

Théorème 3.2 En appliquant la théorie de moyennisation d'ordre deux, on obtient au plus trois cycles limites qui bifurquent de l'origine du système (3.1) quand $\varepsilon = 0$.

Preuve

Pour passer à la théorie de moyennisation d'ordre deux, on annule $(f_{11}(\rho, \xi), f_{12}(\rho, \xi))$. Alors, on prend

$$a_1 = 0, b_{011} = -a_{101}, c_{200} = -c_{020}, c_1 = 0, c_{002} = 0.$$

Substituons ces conditions dans $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$.

Ensuite, on calcule l'expression suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^s F_{11}(\theta, \rho, \xi) d\theta \\ \int_0^s F_{12}(\theta, \rho, \xi) d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{21}(s, \rho, \xi) \\ F_{22}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix},$$

on intègre cette expression entre 0 et 2π et on divise par 2π , on obtient le système

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \xi) = \frac{1}{b^2} \rho [U_0 + U_1 \xi + U_2 \rho^2 + U_3 \xi^2], \\ f_{22}(\rho, \xi) = \frac{1}{b^2} [V_0 \xi + V_1 \rho^2 + V_2 \xi^2 + V_3 \xi^2 + V_4 \xi^3], \end{cases}$$

où

$$U_0 = a_2 b,$$

$$U_1 = b(A_{101} + B_{011})/2,$$

$$U_2 = [(a_{110} a_{200} + a_{020}(2a_{110} + 2b_{020}) - 2a_{200} b_{200} + b_{110}(b_{020} + b_{200})]/8,$$

$$U_3 = [b_{002}(a_{020} - a_{200} - b_{110}) + a_{002}(a_{110} + b_{020} + b_{200}) + a_{011}(a_{101} + b_{011})]/4,$$

et

$$V_0 = c_2 b,$$

$$V_1 = b(C_{020} + C_{020})/2,$$

$$V_2 = 8bC_{002},$$

$$V_3 = [(3a_{020} + a_{200} - b_{110})c_{011} + (3a_{011} - b_{101})c_{020} + c_{101}(a_{110} - b_{020} - 3b_{200}) + c_{110}(a_{101} - b_{011}) + c_{200}(a_{11} - 3b_{101})]/8,$$

$$V_4 = [a_{002}c_{011} - b_{002}c_{101}]/4.$$

Pour chercher les cycles limites, on résout

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \xi) = 0, \\ f_{22}(\rho, \xi) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

En résolvant la première équation par rapport à ρ et en évitant les solutions avec $\rho = 0$, on trouve

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{-U_0 - U_1 \xi - U_3 \xi^2}}{\sqrt{U_2}}, \quad \rho_2 = -\frac{\sqrt{-U_0 - U_1 \xi - U_3 \xi^2}}{\sqrt{U_2}},$$

avec $U_2 \neq 0$.

Puisque $\rho > 0$, on n'accepte que ρ_1 .

Substituons ρ_1 dans $f_{22}(\rho, \xi)$ on trouve :

$$\frac{U_2 V_4 - U_3 V_3}{U_2} \xi^3 + \frac{U_2 V_2 - U_3 V_1 - U_1 V_3}{U_2} \xi^2 + \frac{U_2 V_0 - U_1 V_1 - U_0 V_3}{U_2} \xi^2 - \frac{U_0 V_1}{U_2} = 0.$$

On choisit les coefficients du système (3.1) de telle manière que l'équation cubique peut prendre trois racines réelles. Soit $\bar{\xi}$ une racine de l'équation cubique.

On suppose que $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ est une solution de (3.12). Pour obtenir un cycle limite du théorème 3.2, on doit avoir

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{21}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{22}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \Big|_{(\rho, \xi) = (\bar{\rho}, \bar{\xi})} \neq 0. \quad (3.13)$$

Les solutions de système (3.12) qui vérifient la condition (3.13) satisfont les hypothèses du théorème 2.2. D'où, d'après le théorème de moyennisation d'ordre 2 le système (3.1) a au plus trois cycles limites.

Exemple 3.3 *On considère le système quadratique*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{8}\varepsilon^2 x + y - xy + xz + y^2 - \frac{1}{2}z^2, \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{8}\varepsilon^2 y - x^2 + y^2 - yz, \\ \dot{z} = -\frac{3}{2}\varepsilon^2 z - x^2 + 4xy + y^2 - 4yz + \frac{3}{2}\varepsilon z^2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Les valeurs propres du point d'équilibre $(0, 0, 0)$ du système (3.14) sont $\frac{\varepsilon^2}{8} \pm i$ et $\frac{-3\varepsilon^2}{2}$.

Le système (3.4) associé au système (3.14) comprend les fonctions

$$F_{11} = \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}\rho^2\right) \cos(\theta) - \rho\xi \cos(2\theta) + \frac{1}{4}\rho^2 \cos(3\theta) + \frac{3}{4}\rho^2 \sin(3\theta) - \frac{1}{4}\rho^2 \sin(\theta),$$

$$F_{21} = \frac{1}{16}(2\rho^3 - 2\rho\xi^2 - 2\rho + 4\rho^2\xi \cos(\theta) - 5\rho^2 \cos(2\theta) + 6\rho(\rho^2 - \xi^2) \cos(4\theta) + 12\rho^2\xi \cos(5\theta) - 3\rho^3 \cos(6\theta) - 4\rho^3 \sin(6\theta) - 4\rho^2\xi \sin(5\theta) + (10\rho\xi^2 - 2\rho^3) \sin(4\theta) + 8(\rho^3\xi - \xi^3) \sin(3\theta) + (2\xi^4/\rho - 4\rho\xi^2) \sin(2\theta) - 4\rho^2\xi \sin(\theta)),$$

$$F_{12} = \frac{3}{2}\xi^2 + \rho^2 \cos(2\theta) - 2 \sin(2\theta)\rho^2 + 4\rho \sin(\theta)\xi,$$

$$F_{22} = \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{5}{4}\xi^2 + \frac{5}{4}\xi - \frac{1}{4}\rho^2\xi - \frac{5}{4\rho\xi^2} \cos(\theta) + (\rho^2\xi - \frac{1}{2}\xi^3) \cos(2\theta) + (\frac{5}{4}\rho\xi^2 - \frac{7}{16}\rho^3) \cos(3\theta) - \frac{3}{4}\rho^2\xi \cos(4\theta) - \frac{1}{16}\rho^3 \cos(5\theta) + \frac{7}{16}\rho^3 \sin(5\theta) - \rho^2\xi \sin(4\theta) + (\frac{1}{8}\rho\xi^2 - \frac{1}{16}\rho^3) \sin(3\theta) + \frac{1}{2}\rho^2\xi \sin(2\theta) - \frac{1}{8}\rho\xi^2 \sin(\theta).$$

Pour chercher les cycles limites, on résout le système

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \xi) = \frac{1}{8}\rho(\rho^2 - \xi^2 - 1) = 0, \\ f_{22}(\rho, \xi) = \frac{1}{2}\xi(2\rho^2 + 2\xi^2 - 3\xi + 3) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Le système moyenné (3.15) possède les racines $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4})$,

$(0, \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4})$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{5}, 2)$, $(-\sqrt{5}, 2)$.

Comme $\rho > 0$ et ξ réel, les solutions admissibles sont

$$(1, 0), (\sqrt{2}, 1), (\sqrt{5}, 2)$$

Vérifions maintenant que le déterminant calculé en ces racines est non nul, où

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det(M) = \det \begin{pmatrix} \frac{3}{8}\rho^2 - \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\rho\xi \\ -\rho\xi & -\frac{1}{2}\rho^2 + 3\xi^2 - 3\xi + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On obtient

$$D(1, 0) = \frac{1}{4}, D(\sqrt{2}, 1) = -\frac{1}{4}, D(\sqrt{5}, 2) = \frac{5}{4}.$$

Donc le système (3.14) a trois cycles limites qui bifurquent de l'origine.

Maintenant on étudie la stabilité de ces trois cycle limites. Pour ceci, on calcule les valeurs propres de la matrice M aux points $(1, 0), (\sqrt{2}, 1), (\sqrt{5}, 2)$.

On obtient respectivement en chaque point $(1, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{25}{8} + \frac{\sqrt{545}}{8}, \frac{25}{8} - \frac{\sqrt{545}}{8})$.

Alors les cycles limites correspondants sont instable, semi stable et instable respectivement.

Les cycles limites Γ_i pour $i = 1, 2, 3$ du système (3.3) associé au système (3.14) et correspondant aux racines $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ données par (3.1) s'écrivent comme suit $\{(R_i(\theta), z_i(\theta)), \theta \in S^1\}$. On a

$$\begin{pmatrix} R_i(\theta) \\ z_i(\theta) \end{pmatrix} = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{11}(s, \rho, \xi) ds \\ \int_0^\theta F_{12}(s, \rho, \xi) ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^2) \\ O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \right]$$

où

$$\begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{11}(s, \rho, \xi) ds \\ \int_0^\theta F_{12}(s, \rho, \xi) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\rho^2 \cos(3\theta) + \frac{1}{4} \cos(\theta)\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^2 \sin(\theta) + \frac{1}{12}\rho^2 \sin(3\theta) - \frac{1}{2}\rho\xi \sin(2\theta) \\ + \frac{1}{2} \sin(\theta)\xi^2 \\ -\rho^2 + 4\rho\xi + \frac{1}{2} \sin(2\theta)\rho^2 + \rho^2 \cos(2\theta) - 4\rho \cos(\theta)\xi + \frac{3}{2}\xi^2\theta \end{pmatrix}$$

Le cycle limite Γ_1 peut être écrit comme

$$\begin{aligned} R_1(\theta) &= \left(-\frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{1}{4} \cos(\theta) - \frac{1}{4} \sin(\theta) + \frac{1}{12} \sin(3\theta)\right)\varepsilon^2 + \varepsilon \\ z_1(\theta) &= \left(-1 + \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \cos(2\theta)\right)\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Le cycle limite Γ_2 peut être écrit comme

$$\begin{aligned} R_2(\theta) &= \left(-\frac{1}{2} \cos(3\theta) + \frac{1}{2} \cos(\theta) + \frac{1}{6} \sin(3\theta) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin(2\theta)\right)\varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{2}, \\ z_2(\theta) &= \left(-2 + 4\sqrt{2} + \sin(2\theta) + 2 \cos(2\theta) - 4\sqrt{2} \cos(\theta) + \frac{3}{2}\theta\right)\varepsilon^2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Le cycle limite Γ_3 peut être écrit comme

$$\begin{aligned} R_3(\theta) &= \left(-\frac{5}{4} \cos(3\theta) + \frac{5}{4} \cos(\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta) + \frac{5}{12} \sin(3\theta) - \sqrt{5} \sin(2\theta)\right)\varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{5}, \\ z_3(\theta) &= \left(-5 + 8\sqrt{5} + \frac{5}{2} \sin(2\theta) + 5 \cos(2\theta) - 8\sqrt{5} \cos(\theta) + 6\theta\right)\varepsilon^2 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

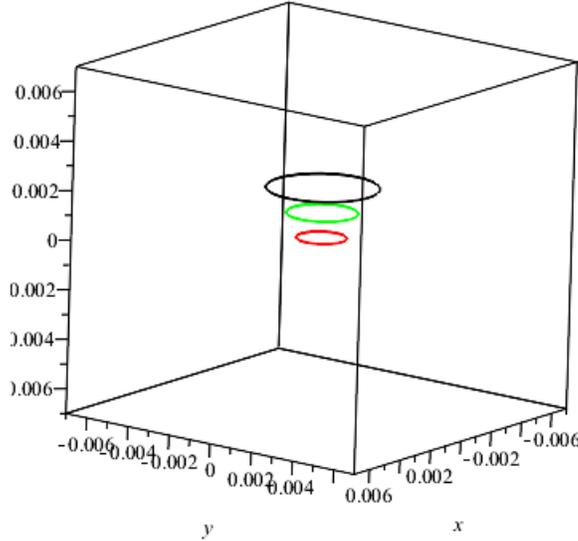


FIGURE 3.3 – trois cycles limites du système (3.14) pour $\varepsilon = 10^{-3}$

Exemple 3.4 On considère le système différentiel polynomial quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 x + 2y - 2xy + 2xz + 2y^2 - z^2, \\ \dot{y} = -2x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 y - 2x^2 + 2y^2 - 2yz, \\ \dot{z} = -\frac{1}{4}\varepsilon^2 z - x^2 + 4xy + y^2 - 4yz + \frac{1}{4}\varepsilon z^2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Les valeurs propres du point d'équilibre $(0, 0, 0)$ du système (3.16) sont $\frac{\varepsilon^2}{2} \pm 2i$ et $\frac{-\varepsilon^2}{4}$.

Le système (3.4) associé au système (3.16)

$$F_{11} = \frac{3}{4}\rho^2 \sin(3\theta) - \frac{1}{4}\rho^2 \sin(\theta) - \frac{1}{4}\cos(\theta)\rho^2 + \frac{1}{4}\rho^2 \cos(3\theta) - \rho\xi \cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta)\xi^2,$$

$$F_{21} = \frac{1}{16\rho}(-4\rho^3\xi \sin(5\theta) + 6\cos(4\theta)\rho^4 - 6\rho^2\xi^2 \cos(4\theta) - 3\rho^4 \cos(6\theta) - 4\rho^2\xi^2 \sin(2\theta) + 2\xi^4 \sin(2\theta) - 4\rho^4 \sin(6\theta) - 2\rho^4 \sin(4\theta) + 10\rho^2\xi^2 \sin(4\theta) + 12\rho^3\xi \cos(5\theta) + 8\sin(3\theta)\rho^3\xi - 8\rho\xi^3 \sin(3\theta) - 5\cos(2\theta)\rho^4 + 4\rho^3\xi \cos(\theta) - 4\sin(\theta)\rho^3\xi + 2\rho^4 - 2\rho^2\xi^2 - 4\rho^2),$$

$$F_{12} = -\rho^2 \sin(2\theta) + \frac{1}{2}\rho^2 \cos(2\theta) + 2\rho \sin(\theta)\xi,$$

$$F_{22} = -\frac{1}{2}\xi^3 \cos(2\theta) + \rho^2\xi \cos(2\theta) - \frac{1}{8}\sin(\theta)\rho\xi^2 + \frac{1}{2}\rho\xi^2 \sin(3\theta) - \frac{5}{4}\cos(\theta)\rho\xi^2 + \frac{5}{4}\rho\xi^2 \cos(3\theta) - \frac{1}{4}\rho^2\xi + \frac{1}{2}\rho^2\xi \sin(2\theta) - \rho^2\xi \sin(4\theta) - \frac{3}{4}\rho^2\xi \cos(4\theta) - \frac{7}{16}\rho^3 \cos(3\theta) + \frac{7}{16}\rho^3 \sin(5\theta) - \frac{1}{16}\sin(3\theta)\rho^3 - \frac{1}{16}\rho^3 \cos(5\theta) + \frac{1}{12}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi.$$

Pour chercher les cycles limites, on résout le système

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \xi) = \frac{1}{8}\rho(\rho^2 - \xi^2 - 2) = 0, \\ f_{22}(\rho, \xi) = -\frac{1}{4}\xi(\rho^2 - 2\xi^2 + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{2}) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Le système moyenné (3.17) possède les racines $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{15}}{8})$, $(0, \frac{1}{8} - i\frac{\sqrt{15}}{8})$, $(\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{3}{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{3}{2})$.

Comme $\rho > 0$ et ξ réel, les solutions admissibles sont

$$(\sqrt{2}, 0), (\sqrt{3}, -1), (\frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{3}{2}).$$

Vérifions maintenant que le déterminant calculé en ces racines est non nul, où

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det(M) = \det \begin{pmatrix} \frac{3}{8}\rho^2 - \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\rho\xi \\ -\frac{1}{2}\rho\xi & -\frac{1}{4}\rho^2 + \frac{2}{3}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

On obtient $D(\sqrt{2}, 0) = -\frac{3}{16}$, $D(\sqrt{3}, -1) = \frac{15}{32}$, $D(\frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{3}{2}) = \frac{255}{256}$.

Donc, le système (3.16) a trois cycles limites qui bifurquent de l'origine.

Maintenant on étudie la stabilité de ces trois cycle limites. Pour ceci, on calcule les valeurs propres de la matrice M aux points $(\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{3}, -1)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{3}{2})$.

On obtient respectivement en chaque point $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$, $(\frac{15}{16} + \frac{\sqrt{105}}{16}, \frac{15}{16} - \frac{\sqrt{105}}{16})$, $(\frac{25}{16} + \frac{\sqrt{370}}{16}, \frac{25}{16} - \frac{\sqrt{370}}{16})$.

Alors les cycles limites correspondants sont semi stable, instable et instable respectivement.

Les cycles limites Γ_i pour $i = 1, 2, 3$ du système associés au système (3.16) et correspondant aux racines $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ données par (3.17) s'écrivent comme suit $\{(R_i(\theta), z_i(\theta)), \theta \in S^1\}$. On a

$$\begin{pmatrix} R_i(\theta) \\ z_i(\theta) \end{pmatrix} = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{11}(s, \rho, \xi) ds \\ \int_0^\theta F_{12}(s, \rho, \xi) ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^2) \\ O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \right],$$

où

$$\begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{11}(s, \rho, \xi) ds \\ \int_0^\theta F_{12}(s, \rho, \xi) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\rho^2 \cos(3\theta) + \frac{1}{4} \cos(\theta)\rho^2 + \frac{1}{2} \sin(\theta)\xi^2 - \frac{1}{2}\rho\xi \sin(2\theta) - \frac{1}{4}\rho^2 \sin(\theta) \\ + \frac{1}{12}\rho^2 \sin(3\theta) \\ -\rho^2 + 4\rho\xi + \frac{1}{2} \sin(2\theta)\rho^2 + r h o^2 \cos(2\theta) - 4\rho \cos(\theta)\xi + \frac{3}{2}\xi^2\theta \end{pmatrix}.$$

Le cycle limite Γ_1 peut être écrit comme

$$\begin{aligned} R_1(\theta) &= (-\frac{1}{2} \cos(3\theta) + \frac{1}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin(\theta) + \frac{1}{6} \sin(3\theta))\varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{2}, \\ z_1(\theta) &= \varepsilon^2(\cos(2\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\theta) - 1). \end{aligned}$$

Le cycle limite Γ_2 peut être écrit comme

$$R_2(\theta) = \left(-\frac{3}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta) - \frac{1}{4}\sin(\theta) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(2\theta) + \frac{1}{4}\sin(3\theta)\right)\varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{3},$$

$$z_2(\theta) = \varepsilon^2\left(-\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{3}{4}\sin(2\theta) + \frac{3}{2}\cos(2\theta) + 2\sqrt{3}\cos(\theta) + \frac{1}{8}\theta\right) - \varepsilon.$$

Le cycle limite Γ_3 peut être écrit comme

$$R_3(\theta) = \left(-\frac{17}{16}\cos(3\theta) + \frac{17}{16}\cos(\theta) + \frac{1}{16}\sin(\theta) - \frac{3}{8}\sqrt{17}\sin(2\theta) + \frac{17}{48}\sin(3\theta)\right)\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{17},$$

$$z_3(\theta) = \varepsilon^2\left(-\frac{17}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{17} + \frac{17}{16}\sin(2\theta) + \frac{17}{8}\cos(2\theta) - \frac{3}{2}\sqrt{17}\cos(\theta) + \frac{9}{32}\theta\right) + \frac{3}{2}\varepsilon.$$

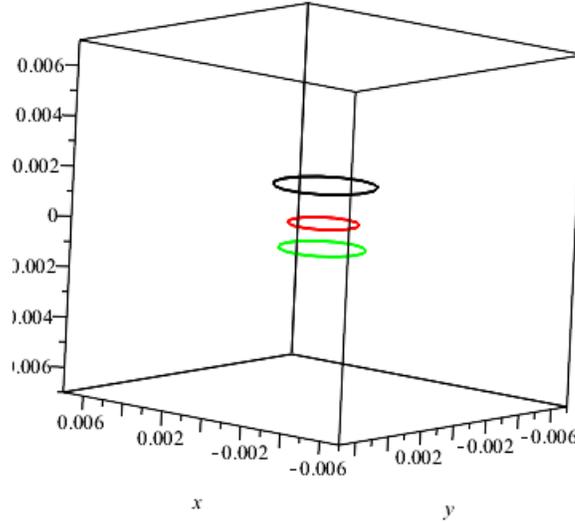


FIGURE 3.4 – trois cycles limites du système (3.16) pour $\varepsilon = 10^{-3}$

CHAPITRE 4

LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX QUADRATIQUES EN DIMENSION 4

Dans ce chapitre [4], on applique la théorie de moyennisation d'ordre deux pour étudier le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent de l'origine du système différentiel polynomial quadratique de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^2 + a_{j1}xy + a_{j2}xz + a_{j3}xw + a_{j4}y^2 \\ &\quad + a_{j5}yz + a_{j6}yw + a_{j7}z^2 + a_{j8}zw + a_{j9}w^2, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} respectivement par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 9$. Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , $a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ sont des paramètres réels avec $b \neq 0$.

Théorème 4.1 (a) En appliquant la théorie de moyennisation d'ordre un, on obtient au plus deux cycles limites qui bifurquent de l'origine du système (4.1) quand $\varepsilon = 0$.

(b) En appliquant la théorie de moyennisation d'ordre deux, on obtient au plus 9 cycles limites qui bifurquent de l'origine du système (4.1) quand $\varepsilon = 0$.

Preuve de la partie (a) de théorème

On commence par un changement de variable $(x, y, z, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon W)$. Ensuite, on passe aux coordonnées cylindriques $(X, Y, Z, W) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta, \xi)$. Après, on considère θ comme une nouvelle variable indépendante.

Le système (4.1) devient sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\eta}{d\theta} = \varepsilon F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\xi}{d\theta} = \varepsilon F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^3). \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$F_{11} = \frac{1}{b}(\sin(\theta) \cos(\theta)b_{03}\rho\xi + \cos(\theta) \sin(\theta)a_{05}\eta\rho + \cos(\theta) \sin(\theta)a_{06}\rho\xi + \sin(\theta) \cos(\theta)b_{02}\eta\rho + a_1\rho + b_{04}\rho^2 \sin(\theta) + \cos(\theta)a_{04}\rho^2 + b_{06}\rho\xi + \cos(\theta)b_{01}\rho^2 + b_{05}\eta\rho + \cos(\theta)^3 a_{00}\rho^2 + \cos(\theta)a_{07}\eta^2 + \sin(\theta)b_{07}\eta^2 + \cos(\theta)a_{09}\xi^2 - b_{01} \cos(\theta)^3 \rho^2 - a_{04} \cos(\theta)^3 \rho^2 + \sin(\theta)b_{09}\xi^2 - \sin(\theta)b_{04} \cos(\theta)^2 \rho^2 - b_{05} \cos(\theta)^2 \eta\rho - b_{06} \cos(\theta)^2 \rho\xi + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 b_{00}\rho^2 + \sin(\theta)b_{08}\eta\xi + \cos(\theta)a_{08}\eta\xi + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)a_{01}\rho^2 + \cos(\theta)^2 a_{02}\eta\rho + \cos(\theta)^2 a_{03}\rho\xi),$$

$$F_{12} = \frac{1}{b}(\xi^2 c_{09} + \xi\rho \cos(\theta)c_{03} + \xi\rho \sin(\theta)c_{06} + \xi\eta c_{08} + \rho^2 \cos(\theta)^2 c_{00} + \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)c_{01} + \rho \cos(\theta)\eta c_{02} + \rho^2 \sin(\theta)^2 c_{04} + \rho \sin(\theta)\eta c_{05} + \eta^2 c_{07} + \eta c_1),$$

$$F_{13} = \frac{1}{b}(\xi^2 d_{09} + \xi\rho \cos(\theta)d_{03} + \xi\rho \sin(\theta)d_{06} + \xi\eta d_{08} + \rho^2 \cos(\theta)^2 d_{00} + \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)d_{01} + \rho \cos(\theta)\eta d_{02} + \rho^2 \sin(\theta)^2 d_{04} + \rho \sin(\theta)\eta d_{05} + \eta^2 d_{07} + \eta d_1),$$

$$F_{21} = \frac{1}{b}(\cos(\theta)\xi^2 a_{19} + \cos(\theta)\eta^2 a_{17} + \rho^2 \cos(\theta)^3 a_{10} + \cos(\theta)^2 a_2 \rho + \sin(\theta)\eta^2 b_{17} + \sin(\theta)\xi^2 b_{19} + \sin(\theta)^2 a_2 \rho + \rho^2 \sin(\theta)^3 b_{14} + \cos(\theta)\xi\rho \sin(\theta)a_{16} + \cos(\theta)\rho \sin(\theta)\eta a_{15} + \sin(\theta)\xi\rho \cos(\theta)b_{13} + \sin(\theta)\rho \cos(\theta)\eta b_{12} + \cos(\theta)\xi\eta a_{18} + \cos(\theta)\rho^2 \sin(\theta)^2 a_{14} + \xi\rho \cos(\theta)^2 a_{13} + \rho^2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)a_{11} + \rho \cos(\theta)^2 \eta a_{12} + \sin(\theta)\xi\eta b_{18} + \sin(\theta)\rho^2 \cos(\theta)^2 b_{10} + \xi\rho \sin(\theta)^2 b_{16} + \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 b_{11} + \rho \sin(\theta)^2 \eta b_{15} - \frac{1}{b\rho}(\cos(\theta)a_{07}\eta^2 + \cos(\theta)a_{09}\xi^2 + a_{00}\rho^2 \cos(\theta)^3 + \cos(\theta)^2 a_1 \rho + \sin(\theta)b_{07}\eta^2 + \sin(\theta)b_{09}\xi^2 + b_{04}\rho^2 \sin(\theta)^3 + \sin(\theta)^2 a_1 \rho + \cos(\theta)a_0 4\rho^2 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)a_0 8\eta\xi + a_0 1\rho^2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) + a_{02}\rho \cos(\theta)^2 \eta + a_{03}\rho \cos(\theta)^2 \xi + \sin(\theta)b_{08}\eta\xi + \sin(\theta)b_{00}\rho^2 \cos(\theta)^2 + b_{01}\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 + b_{05}\rho \sin(\theta)^2 \eta + b_{06}\rho \sin(\theta)^2 \xi + \cos(\theta)a_{05}\rho \sin(\theta)\eta + \cos(\theta)a_{06}\rho \sin(\theta)\xi + \sin(\theta)b_{02}\rho \cos(\theta)\eta + \sin(\theta)b_{03}\rho \cos(\theta)\xi)(\cos(\theta)b_{05}\rho \sin(\theta)\eta + \cos(\theta)b_{06}\rho \sin(\theta)\xi - \sin(\theta)a_{02}\rho \cos(\theta)\eta - \sin(\theta)a_{03}\rho \cos(\theta)\xi + \cos(\theta)b_{04}\rho^2 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)b_{08}\eta\xi + b_{01}\rho^2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) + b_{02}\rho \cos(\theta)^2 \eta + b_{03}\rho \cos(\theta)^2 \xi - \sin(\theta)a_{00}\rho^2 \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)a_{08}\eta\xi - a_{01}\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 - a_0 5\rho \sin(\theta)^2 \eta - a_{06}\rho \sin(\theta)^2 \xi - a_0 4\rho^2 \sin(\theta)^3 + \sin(\theta)^2 b_1 \rho + \cos(\theta)b_{07}\eta^2 + \cos(\theta)b_{09}\xi^2 + \cos(\theta)^2 b_1 \rho + b_{00}\rho^2 \cos(\theta)^3 - \sin(\theta)a_{07}\eta^2 - \sin(\theta)a_{09}\xi^2)),$$

$$F_{22} = \frac{1}{b}(\xi^2 c_{19} + \xi\rho \cos(\theta)c_{13} + \xi\rho \sin(\theta)c_{16}\xi\eta c_{18} + \rho^2 \cos(\theta)^2 c_{10} + \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)c_{11} + \rho \cos(\theta)\eta c_{12} + \rho^2 \sin(\theta)^2 c_{14} + \rho \sin(\theta)\eta c_{15} + \eta^2 c_{17} + \eta c_2 - \frac{1}{b\rho}(\xi^2 c_{09} + \xi\rho \cos(\theta)c_{03} + \xi\rho \sin(\theta)c_{06} + \xi\eta c_{08} + \rho^2 \cos(\theta)^2 c_{00} + \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)c_{01} + \rho \cos(\theta)\eta c_{02} + \rho^2 \sin(\theta)^2 c_{04} + \rho \sin(\theta)\eta c_{05} + \eta^2 c_{07} + \eta c_1)(-b_{04} \cos(\theta)^3 \rho^2 - a_{05}\eta\rho +$$

$$\begin{aligned}
& \cos(\theta)^3 b_{00} \rho^2 - \cos(\theta) a_{01} \rho^2 + \cos(\theta) b_{09} \xi^2 - a_{06} \rho \xi + a_{01} \cos(\theta)^3 \rho^2 + \cos(\theta) b_{04} \rho^2 - \sin(\theta) a_{09} \xi^2 + \cos(\theta) b_{07} \eta^2 - \\
& a_{04} \rho^2 \sin(\theta) - \sin(\theta) a_{07} \eta^2 + b_1 \rho - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 a_{00} \rho^2 + \sin(\theta) a_{04} \cos(\theta)^2 \rho^2 + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 b_{01} \rho^2 + \\
& a_{05} \cos(\theta)^2 \eta \rho + a_{06} \cos(\theta)^2 \rho \xi + \cos(\theta)^2 b_{02} \eta \rho + \cos(\theta)^2 b_{03} \rho \xi + \cos(\theta) b_{08} \eta \xi - \sin(\theta) a_{08} \eta \xi - \\
& \sin(\theta) \cos(\theta) a_{02} \eta \rho - \sin(\theta) \cos(\theta) a_{03} \rho \xi + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{05} \eta \rho + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{06} \rho \xi), \\
F_{23} = & \frac{1}{b} (\xi^2 d_{19} + \xi \rho \cos(\theta) d_{13} + \xi \rho \sin(\theta) d_{16} + \xi \eta d_{18} + \rho^2 \cos(\theta)^2 d_{10} + \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) d_{11} + \rho \cos(\theta) \eta d_{12} + \\
& \rho^2 \sin(\theta)^2 d_{14} + \rho \sin(\theta) \eta d_{15} + \eta^2 d_{17} + \xi d_2 - \frac{1}{b\rho} (\xi^2 d_{09} + \xi \rho \cos(\theta) d_{03} + \xi \rho \sin(\theta) d_{06} + \xi \eta d_{08} + \rho^2 \cos(\theta)^2 d_{00} + \\
& \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) d_{01} + \rho \cos(\theta) \eta d_{02} + \rho^2 \sin(\theta)^2 d_{04} + \rho \sin(\theta) \eta d_{05} + \eta^2 d_{07} + \xi d_1) (-b_{04} \cos(\theta)^3 \rho^2 - a_{05} \eta \rho + \\
& \cos(\theta)^3 b_{00} \rho^2 - \cos(\theta) a_{01} \rho^2 + \cos(\theta) b_{09} \xi^2 - a_{06} \rho \xi + a_{01} \cos(\theta)^3 \rho^2 + \cos(\theta) b_{04} \rho^2 - \sin(\theta) a_{09} \xi^2 + \cos(\theta) b_{07} \eta^2 - \\
& a_{04} \rho^2 \sin(\theta) - \sin(\theta) a_{07} \eta^2 + b_1 \rho - \sin(\theta) \cos(\theta)^2 a_{00} \rho^2 + \sin(\theta) a_{04} \cos(\theta)^2 \rho^2 + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 b_{01} \rho^2 + \\
& a_{05} \cos(\theta)^2 \eta \rho + a_{06} \cos(\theta)^2 \rho \xi + \cos(\theta)^2 b_{02} \eta \rho + \cos(\theta)^2 b_{03} \rho \xi + \cos(\theta) b_{08} \eta \xi - \sin(\theta) a_{08} \eta \xi - \\
& \sin(\theta) \cos(\theta) a_{02} \eta \rho - \sin(\theta) \cos(\theta) a_{03} \rho \xi + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{05} \eta \rho + \sin(\theta) \cos(\theta) b_{06} \rho \xi).
\end{aligned}$$

Le système (4.2) est écrit sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation, on prend $x = (\rho, \eta, \xi)$, $t = \theta$, $F_1(t, x) = (F_{11}(\rho, \eta, \xi), F_{12}(\rho, \eta, \xi), F_{13}(\rho, \eta, \xi))$, $F_2(t, x) = (F_{21}(\rho, \eta, \xi), F_{22}(\rho, \eta, \xi), F_{23}(\rho, \eta, \xi))$, $T = 2\pi$.

On calcule la fonction moyennée du premier ordre $f_1 = (f_{11}(\rho, \eta, \xi), f_{21}(\rho, \eta, \xi), f_{23}(\rho, \eta, \xi))$

$$\begin{cases}
f_{11}(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{2b} (\rho(2a_1 + (a_{03} + b_{06})\xi + (a_{02} + b_{05})\eta)) = 0, \\
f_{12}(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{2b} ((c_{00} + c_{04})\rho^2 + 2(c_{09}\xi^2 + \eta(c_1 + c_{08}\xi + c_{07}\eta))) = 0, \\
f_{13}(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{2b} ((d_{00} + d_{04})\rho^2 + 2(\xi(d_1 + d_{09}\xi) + d_{08}\xi\eta + d_{07}\eta^2)) = 0.
\end{cases} \quad (4.3)$$

Résolvons la premier équation f_{11} du système (4.3) par rapport ξ , on obtient

$$\xi = -\frac{2a_1 + (a_{02} + b_{05})\eta}{a_{03} + b_{06}}, \quad (4.4)$$

avec $a_{03} + b_{06} \neq 0$.

Substituons (4.4) dans f_{22} et f_{23} du système (4.3), d'où

$$\begin{cases}
g_{11} = \frac{1}{2b} \left(\frac{8a_1^2 c_{09}}{(a_{03} + b_{06})^2} + (c_{00} + c_{04})\rho^2 - \frac{2}{(a_{03} + b_{06})^2} (2a_{03} a_1 c_{08} + \right. \\
\left. 2a_1 b_{06} c_{08} - 4a_{02} a_1 c_{09} - 4a_1 b_{05} c_{09} - a_{03}^2 c_1 - 2a_{03} b_{06} c_1 - b_{06}^2 c_1) \eta + \right. \\
\left. \frac{2}{(a_{03} + b_{06})^2} (a_{03}^2 c_{07} + 2a_{03} b_{06} c_{07} + b_{06}^2 c_{07} - a_{02} a_{03} c_{08} - a_{03} b_{05} c_{08} \right. \\
\left. - a_{02} b_{06} c_{08} - b_{05} b_{06} c_{08} + a_{02}^2 c_{09} + 2a_{02} b_{05} c_{09} + b_{05}^2 c_{09}) \eta^2 \right) = 0, \\
g_{12} = \frac{1}{2b} \left(\frac{4a_1 (2a_1 d_{09} - a_{03} d_1 - b_{06} d_1)}{(a_{03} + b_{06})^2} + (d_{00} + d_{04})\rho^2 - \frac{2}{(a_{03} + b_{06})^2} \right. \\
\left. (2a_{03} a_1 d_{08} + 2a_1 b_{06} d_{08} - 4a_{02} a_1 d_{09} - 4a_1 b_{05} d_{09} + a_{02} a_{03} d_1 + \right. \\
\left. a_{03} b_{05} d_1 + a_{02} b_{06} d_1 + b_{05} b_{06} d_1) \eta + \frac{2}{(a_{03} + b_{06})^2} (a_{03}^2 d_{07} + \right. \\
\left. 2a_{03} b_{06} d_{07} + b_{06}^2 d_{07} - a_{02} a_{03} d_{08} - a_{03} b_{05} d_{08} - a_{02} b_{06} d_{08} \right. \\
\left. - b_{05} b_{06} d_{08} + a_{02}^2 d_{09} + 2a_{02} b_{05} d_{09} + b_{05}^2 d_{09}) \eta^2 \right) = 0.
\end{cases}$$

Ce système a 4 racines réelles. On élimine ρ^2 entre les deux équations $g_{11} = 0$ et $g_{12} = 0$, on obtient une équation quadratique en η qui a au plus deux racines réelles. Substituons l'une de ces deux racines dans l'expression de ρ^2 , on obtient deux racines réelles. Comme $\rho > 0$, le système (4.3) possède au plus deux racines réelles.

Soit $(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi})$ une solution de (4.3). Pour obtenir un cycle limite, on doit avoir

$$D(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{11}}{\partial \eta} & \frac{\partial f_{11}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \eta} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{13}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{13}}{\partial \eta} & \frac{\partial f_{13}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \Big|_{(\rho, \eta, \xi) = (\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi})} \neq 0.$$

Donc, d'après la théorie de moyennisation de premier ordre le système (4.1) a au plus 2 cycles limites dans une bifurcation zéro Hopf de l'origine.

Exemple 4.1 On considère le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}y + 2yw - 6xw + (y^2 + 2x)\varepsilon, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}x - xw + (2y - \frac{1}{4}yw)\varepsilon, \\ \frac{dz}{dt} = y^2 - 3w^2 + (-3xw + 3z^2)\varepsilon, \\ \frac{dw}{dt} = y^2 + z^2 - 8w^2 + xz\varepsilon. \end{cases} \quad (4.5)$$

Les valeurs propres du point d'équilibre $(0, 0, 0, 0)$ du système (4.5) sont $2\varepsilon \pm \frac{3}{2}i$ et 0 de multiplicité 2.

Le système moyenné associé au système (4.5) est

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \eta, \xi) = -6\rho(2 + 3\xi), \\ f_{12}(\rho, \eta, \xi) = -3\xi^2 + \frac{3}{4}\rho^2, \\ f_{13}(\rho, \eta, \xi) = \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{3}{4}\rho^2 - 12\xi^2. \end{cases}$$

Pour trouver les cycles limites on résout le système

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \eta, \xi) = 0, \\ f_{12}(\rho, \eta, \xi) = 0, \\ f_{13}(\rho, \eta, \xi) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Le système (4.6) possède deux racines $(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi})$, avec $\rho > 0$

$$P_{12} = \left(\frac{4}{3}, \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

Calculons le déterminant en ces deux racines, où

$$D(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} -12 - 18\bar{\xi} & 0 & -18\bar{\rho} \\ \frac{3}{2}\bar{\rho} & 0 & -6\bar{\xi} \\ \frac{3}{2}\bar{\rho} & 3\bar{\eta} & -24\bar{\xi} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi})=P_{12}} = \mp 96\sqrt{6} \neq 0.$$

Comme les déterminants sont non nuls, alors le système (4.5) a exactement deux cycles pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit.

En revenant par les changement des variables, on obtient les deux cycles limites du système (4.5) tel que :

$$(x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), z_1(t, \varepsilon), w_1(t, \varepsilon)) = \varepsilon \left(\frac{4}{3} \cos(\theta), \frac{4}{3} \sin(\theta), \frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

$$(x_2(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon)) = \varepsilon \left(\frac{4}{3} \cos(\theta), \frac{4}{3} \sin(\theta), -\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

Exemple 4.2 On considère le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \frac{1}{2}yw - 2xz + 2xy + (x^2 + 2x)\varepsilon, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3xw + (2y - \frac{1}{2}yw)\varepsilon, \\ \frac{dz}{dt} = 2x^2 - w^2 + (2y^2 - z^2)\varepsilon, \\ \frac{dw}{dt} = z^2 - 6w^2 + yz\varepsilon. \end{cases} \quad (4.7)$$

Les valeurs propres du point d'équilibre $(0, 0, 0, 0)$ du système (4.7) sont $2\varepsilon \pm i$ et 0 de multiplicité 2.

Le système moyenné associé au système (4.7) est

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \eta, \xi) = -\rho(\eta - \xi - 2), \\ f_{12}(\rho, \eta, \xi) = -\xi^2 + \rho^2, \\ f_{13}(\rho, \eta, \xi) = \eta^2 - 6\xi^2. \end{cases}$$

Pour trouver les cycles limites on résout le système

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \eta, \xi) = 0, \\ f_{12}(\rho, \eta, \xi) = 0, \\ f_{13}(\rho, \eta, \xi) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Le système (4.8) possède deux racines $(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi})$, avec $\rho > 0$

$$P_1 = \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6}, \frac{12}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{6}, \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{6} \right), P_2 = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6}, \frac{12}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6}, \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6} \right),$$

Calculons le déterminant en ces deux racines, où

$$D(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} -\bar{\eta} + \bar{\xi} + 2 & -\bar{\rho} & -\bar{\rho} \\ 2\bar{\rho} & 0 & -2\bar{\xi} \\ 2\bar{\rho} & 2\bar{\eta} & -12\bar{\xi} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$D(P_1) = 6.587428097 \neq 0, D(P_2) = -37.30742811 \neq 0.$$

Comme les déterminants sont non nuls, alors le système (4.7) a exactement deux cycles pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit.

En revenant par les changement des variables, on obtient les deux cycles limites du système (4.7) tel que :

$$\begin{aligned} (x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), z_1(t, \varepsilon), w_1(t, \varepsilon)) &= \varepsilon \left(\left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6} \right) \cos(\theta), \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6} \right) \sin(\theta), \frac{12}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{6}, \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{6} \right), \\ (x_2(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon)) &= \varepsilon \left(\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6} \right) \cos(\theta), \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6} \right) \sin(\theta), \frac{12}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6}, \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6} \right). \end{aligned}$$

Preuve de la partie (b) de théorème

Pour passer au deuxième ordre, on annule la première fonction moyennée et pour ceci on prend :

$$a_1 = d_1 = c_1 = 0, \quad b_{06} = -a_{03}, \quad b_{05} = -a_{02}, \quad c_{09} = c_{08} = c_{07} = 0,$$

$$d_{04} = -d_{00}, \quad d_{09} = d_{08} = d_{07} = 0, \quad c_{04} = -c_{00}.$$

Substituons ces conditions dans $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}$.

Ensuite, on calcule la deuxième fonction moyennée $f_2 = (f_{21}(\rho, \eta, \xi), f_{22}(\rho, \eta, \xi), f_{23}(\rho, \eta, \xi))$, on trouve

$$\left\{ \begin{aligned} f_{21}(\rho, \eta, \xi) &= \frac{\rho}{8b^2} (U_0 + U_1\rho^2 + U_2\xi + U_3\xi^2 + U_4\eta + U_5\xi\eta + U_6\eta^2), \\ f_{22}(\rho, \eta, \xi) &= \frac{1}{2b^2} (V_0\rho^2 + V_1\rho^2\xi + V_2\xi^2 + V_3\xi^3 + V_4\eta + V_5\rho^2\eta \\ &\quad + V_6\xi\eta + V_7\xi^2\eta + V_8\eta^2 + V_9\xi\eta^2 + V_{10}\eta^3), \\ f_{23}(\rho, \eta, \xi) &= \frac{1}{2b^2} (W_0\rho^2 + W_1\xi + W_2\rho^2\xi + W_3\xi^2 + W_4\xi^3 + W_5\rho^2\eta \\ &\quad + W_6\xi\eta + W_7\xi^2\eta + W_8\eta^2 + W_9\xi\eta^2 + W_{10}\eta^3), \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

où

$$\begin{aligned}
U_0 &= 8a_2b, \\
U_1 &= a_{00}a_{01} + a_{01}a_{04} - 2a_{00}b_{00} - b_{00}b_{01} + 2a_{04}b_{04} - b_{01}b_{04} + a_{05}c_{00} + b_{02}c_{00} \\
&\quad - a_{02}c_{01} + a_{06}d_{00} + b_{03}d_{00} - a_{03}d_{01}, \\
U_2 &= 4b(a_{13} + b_{16}), \\
U_3 &= 4(a_{01}a_{09} + 2a_{09}b_{04} - 2a_{00}b_{09} - b_{01}b_{09} + b_{08}c_{03} - a_{08}c_{06} + 2b_{09}d_{03} - 2a_{09}d_{06}), \\
U_4 &= 4b(a_{12} + b_{15}), \\
U_5 &= 4(a_{01}a_{08} + 2a_{08}b_{04} - 2a_{00}b_{08} - b_{01}b_{08} + b_{08}c_{02} + 2b_{07}c_{03} - a_{08}c_{05} - 2a_{07}c_{06} \\
&\quad + 2b_{09}d_{02} + b_{08}d_{03} - 2a_{09}d_{05} - a_{08}d_{06}), \\
U_6 &= 4(a_{01}a_{07} + 2a_{07}b_{04} - 2a_{00}b_{07} - b_{01}b_{07} + 2b_{07}c_{02} - 2a_{07}c_{05} + b_{08}d_{02} - a_{08}d_{05}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V_0 &= b(c_{10} + c_{14}), \\
V_1 &= -(a_{06}c_{00} + b_{03}c_{00} - a_{03}c_{01} + b_{00}c_{03} + b_{04}c_{03} - c_{03}c_{05} - a_{00}c_{06} - a_{04}c_{06} \\
&\quad + c_{02}c_{06} - c_{06}d_{03} + c_{03}d_{06}), \\
V_2 &= 2bc_{19}, \\
V_3 &= -2(b_{09}c_{03} - a_{09}c_{06}), \\
V_4 &= 2bc_2, \\
V_5 &= -(a_{05}c_{00} + b_{02}c_{00} - a_{02}c_{01} + b_{00}c_{02} + b_{04}c_{02} - a_{00}c_{05} - a_{04}c_{05} - c_{06}d_{02} + c_{03}d_{05}), \\
V_6 &= bc_{18}, \\
V_7 &= -2(b_{09}c_{02} + b_{08}c_{03} - a_{09}c_{05} - a_{08}c_{06}), \\
V_8 &= 2bc_{17}, \\
V_9 &= -2(b_{08}c_{02} + b_{07}c_{03} - a_{08}c_{05} - a_{07}c_{06}), \\
V_{10} &= -2(b_{07}c_{02} - a_{07}c_{05}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
W_0 &= b(d_{10} + d_{14}), \\
W_1 &= 2bd_2, \\
W_2 &= -(a_{06}d_{00} + b_{03}d_{00} - a_{03}d_{01} + c_{06}d_{02} + b_{00}d_{03} + b_{04}d_{03} - c_{03}d_{05} - a_{00}d_{06} - a_{04}d_{06}), \\
W_3 &= 2bd_{19}, \\
W_4 &= -2(b_{09}d_{03} - a_{09}d_{06}), \\
W_5 &= -(a_{05}d_{00} + b_{02}d_{00} - a_{02}d_{01} + b_{00}d_{02} + b_{04}d_{02} + c_{05}d_{02} - a_{00}d_{05} - a_{04}d_{05} \\
&\quad - c_{02}d_{05} + d_{03}d_{05} - d_{02}d_{06}), \\
W_6 &= 2bd_{18}, \\
W_7 &= -2(b_{09}d_{02} + b_{08}d_{03} - a_{09}d_{05} - a_{08}d_{06}), \\
W_8 &= 2bd_{17}, \\
W_9 &= -2(b_{08}d_{02} + b_{07}d_{03} - a_{08}d_{05} - a_{07}d_{06}), \\
W_{10} &= -2(b_{07}d_{02} - a_{07}d_{05})\eta^3.
\end{aligned}$$

On résout la première équation $f_{21}(\rho, \eta, \xi)$ du système (4.9) par rapport à ρ^2 , on trouve

$$\rho^2 = -\frac{U_0 + U_2\xi + U_3\xi^2 + U_4\eta + U_5\xi\eta + U_6\eta^2}{U_1}, \quad (4.10)$$

avec $U_1 \neq 0$.

Substitue (4.10) dans $f_{2i}(\rho, \eta, \xi) = 0$ pour $i = 2, 3$, on obtient deux polynômes

$$\begin{cases} g_{21} &= C_0 + C_1\eta + C_2\xi + C_3\eta^2 + C_4\eta\xi + C_5\xi^2 + C_6\eta^3 + C_7\eta^2\xi + C_8\eta\xi^2 + C_9\xi^3, \\ g_{22} &= D_0 + D_1\eta + D_2\xi + D_3\eta^2 + D_4\eta\xi + D_5\xi^2 + D_6\eta^3 + D_7\eta^2\xi + D_8\eta\xi^2 + D_9\xi^3, \end{cases}$$

où C_i et D_i pour $i = 0..9$ sont des paramètres réels donnés par :

$$C_0 = \frac{-V_0U_0}{U_1},$$

$$C_1 = \frac{-V_0U_4 - V_5U_0 + V_4U_1}{U_1},$$

$$C_2 = \frac{-V_0U_2 - V_1U_0}{U_1},$$

$$C_3 = \frac{-V_0U_6 - V_5U_4 + V_8U_1}{U_1},$$

$$C_4 = \frac{V_6U_1 - V_0U_5 - V_1U_4 - V_5U_2}{U_1},$$

$$C_5 = \frac{-V_0U_3 - V_1U_2 + V_2U_1}{U_1},$$

$$C_6 = \frac{-V_5U_6 + V_{10}U_1}{U_1},$$

$$C_7 = \frac{-V_1U_6 - V_5U_5 + V_9U_1}{U_1},$$

$$C_8 = \frac{-V_1U_5 - V_5U_3 + V_7U_1}{U_1},$$

$$C_9 = \frac{-V_1U_3 + V_3U_1}{U_1},$$

et

$$D_0 = \frac{-W_0U_0}{U_1},$$

$$D_1 = \frac{-W_0U_4 - W_5U_0}{U_1},$$

$$D_2 = \frac{-W_0U_2 - W_2U_0 + W_1U_1}{U_1},$$

$$D_3 = \frac{-W_0U_6 - W_5U_4 + W_8U_1}{U_1},$$

$$D_4 = \frac{W_6U_1 - W_0U_5 - W_2U_4 - W_5U_2}{U_1},$$

$$D_5 = \frac{-W_0U_3 - W_2U_2 + W_3U_1}{U_1},$$

$$D_6 = \frac{-W_5U_6 + W_{10}U_1}{U_1},$$

$$D_7 = \frac{-W_2U_6 - W_5U_5 + W_9U_1}{U_1},$$

$$D_8 = \frac{-W_2U_5 - W_5U_3 + W_7U_1}{U_1},$$

$$D_9 = \frac{-W_2U_3 + W_4U_1}{U_1}.$$

D'après le théorème de Bezout, le système $g_{21}(\eta, \xi) = 0$, $g_{22}(\eta, \xi) = 0$ a 9 racines réelles. Comme $\rho > 0$, on déduit que le système (4.1) a au plus 9 cycles limites.

Soit $(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi})$ une solution du système. Pour avoir un cycle limite, on doit avoir

$$D(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial f_{21}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{22}}{\partial \eta} & \frac{\partial f_{22}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{23}}{\partial \eta} & \frac{\partial f_{23}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \Big|_{(\rho, \eta, \xi) = (\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi})} \neq 0.$$

Donc, d'après la théorie de moyennisation de deuxième ordre le système (4.1) a au plus 9 cycles limites dans une bifurcation zéro Hopf de l'origine.

Exemple 4.3 On considère le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -4\varepsilon^2x - y - 2wx - wy - x^2 - 2xz - 4y^2 + yz + \frac{1}{2}zw + \frac{5}{4}w^2 \\ \quad + \varepsilon(2xz + 5xw) + \varepsilon^2(2x^2 + \frac{3}{2}y^2 - yz), \\ \frac{dy}{dt} = x - 4\varepsilon^2y - 3xz + xw - 2yz + 2yw + 2zw + \varepsilon(3wy + xy + 2yz) \\ \quad + \varepsilon^2(7wy + xz + yz), \\ \frac{dz}{dt} = 12\varepsilon^2z - 4wx - 4x^2 - 2xz - 2y^2 + \varepsilon(-4wz + 16z^2) + \varepsilon^2(w^2 - \frac{1}{2}z^2), \\ \frac{dw}{dt} = 16\varepsilon^2w - 2wx + 4x^2 + 4xy - 2xz - 2y^2 + \varepsilon(-4w^2 - 4zw) \\ \quad + \varepsilon^2(6wx - 5x^2). \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Les valeurs propres du point d'équilibre $(0, 0, 0, 0)$ du système (4.11) sont $-4\varepsilon^2 \pm i$, $12\varepsilon^2$ et $16\varepsilon^2$.

Le système moyenné associé au système (4.11) est

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{21}(\rho, \eta, \xi) = -2\rho(2 + \eta - 2\xi + \eta^2 + 2\xi^2 - \rho^2 + \eta\xi) = 0, \\ f_{22}(\rho, \eta, \xi) = 4\eta(\eta\xi - \rho^2 + 2\xi^2 + \eta - \xi + 3) = 0, \\ f_{23}(\rho, \eta, \xi) = 4\xi(\eta^2 + \eta\xi - \rho^2 - \eta - \xi + 4) = 0. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Pour trouver les cycles limites on résout le système (4.12), on obtient 9 racines $(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi})$ avec $\rho > 0$

$$P_1 = (\sqrt{2}, 0, 0), \quad P_2 = \left(1.649006850, 0, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}\right), \quad P_3 = \left(2.186498663, 0, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}\right),$$

$$P_4 = (\sqrt{3}, 1 + \sqrt{2}, 0), \quad P_5 = (\sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}, 1), \quad P_6 = \left(2.932684033, 1 + \frac{1}{4}\sqrt{34} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}\right),$$

$$P_7 = \left(1.990205306, 1 - \frac{1}{4}\sqrt{34} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}\right),$$

$$P_8 = \left(1.832239702, 1 + \frac{1}{4}\sqrt{34} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}\right),$$

$$P_9 = \left(2.254183858, 1 - \frac{1}{4}\sqrt{34} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} \right).$$

On doit vérifier que le déterminant en ces racines est non nul,

$$D(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi}) =$$

$$\det \begin{pmatrix} -2\bar{\eta}^2 - 2\bar{\eta}\bar{\xi} + 6\bar{\rho}^2 - 4\bar{\xi}^2 + 2\bar{\eta} + 4\bar{\xi} - 4 & -2\bar{\rho}(-1 + 2\bar{\eta} + \bar{\xi}) & -2\bar{\rho}(-1 + 4\bar{\xi} + \bar{\eta}) \\ -8\bar{\rho}\bar{\eta} & 12 + 4\bar{\eta} - 4\bar{\xi} + 8\bar{\xi}^2 + 4\bar{\eta}\bar{\xi} - 4\bar{\rho}^2 & -4\bar{\eta} + 16\bar{\xi}\bar{\eta} + 4\bar{\eta}^2 \\ -8\bar{\rho}\bar{\xi} & -4\bar{\xi} + 4\bar{\xi}^2 + 8\bar{\xi}\bar{\eta} & 16 - 8\bar{\xi} - 4\bar{\eta} + 8\bar{\xi}\bar{\eta} + 4\bar{\eta}^2 - 4\bar{\rho}^2 \end{pmatrix},$$

On trouve

$$\det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_1} = 256 \neq 0, \det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_2} = -2096.068081 \neq 0,$$

$$\det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_3} = -215.9319199 \neq 0,$$

$$\det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_4} = -5387.761039 \neq 0, \det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_5} = -500.2389639 \neq 0,$$

$$\det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_6} = 19024.44101 \neq 0, \det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_7} = 5888.133430 \neq 0,$$

$$\det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_8} = 936.7583498 \neq 0, \det \left(\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_9} = 6213.85563 \neq 0.$$

Donc, le système (4.11) a 9 cycles limites bifurquant de l'origine pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. En revenant par les changement des variables, on obtient les 9 cycles limites du système (4.11) tels que

$$(x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), z_1(t, \varepsilon), w_1(t, \varepsilon)) = \varepsilon(\sqrt{2} \cos(\theta), \sqrt{2} \sin(\theta), 0, 0),$$

$$(x_2(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon)) = \varepsilon(1.649006850 \cos(t), 1.649006850 \sin(t), 0, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}),$$

$$(x_3(t, \varepsilon), y_3(t, \varepsilon), z_3(t, \varepsilon), w_3(t, \varepsilon)) = \varepsilon(2.186498663 \cos(t), 2.186498663 \sin(t), 0, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}),$$

$$(x_4(t, \varepsilon), y_4(t, \varepsilon), z_4(t, \varepsilon), w_4(t, \varepsilon)) = \varepsilon(\sqrt{3} \sin(t), \sqrt{3} \sin(t), 1 + \sqrt{2}, 0),$$

$$(x_5(t, \varepsilon), y_5(t, \varepsilon), z_5(t, \varepsilon), w_5(t, \varepsilon)) = \varepsilon(\sqrt{3} \cos(t), \sqrt{3} \sin(t), -\sqrt{2}, 1),$$

$$(x_6(t, \varepsilon), y_6(t, \varepsilon), z_6(t, \varepsilon), w_6(t, \varepsilon)) = \varepsilon(2.932684033 \cos(t), 2.932684033 \sin(t), 1 + \frac{1}{4}\sqrt{34} + \frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{4} \frac{1}{4}\sqrt{17}),$$

$$\begin{aligned}
(x_7(t, \varepsilon), y_7(t, \varepsilon), z_7(t, \varepsilon), w_7(t, \varepsilon)) &= \varepsilon(1.990205306 \cos(t), 1.990205306 \sin(t), 1 - \frac{1}{4}\sqrt{34} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \\
&\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}), \\
(x_8(t, \varepsilon), y_8(t, \varepsilon), z_8(t, \varepsilon), w_8(t, \varepsilon)) &= \varepsilon(1.832239702 \cos(t), 1.832239702 \sin(t), 1 + \frac{1}{4}\sqrt{34} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \\
&\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}), \\
(x_9(t, \varepsilon), y_9(t, \varepsilon), z_9(t, \varepsilon), w_9(t, \varepsilon)) &= \varepsilon(2.254183858 \cos(t), 2.254183858 \sin(t), 1 - \frac{1}{4}\sqrt{34} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \\
&\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}).
\end{aligned}$$

CHAPITRE 5

LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF EN DIMENSION 4 POUR DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX NON-LINÉAIRES HOMOGÈNES ET CUBIQUES

Dans ce chapitre [5], on étudie l'existence des solutions périodiques bifurquant de l'origine des systèmes différentiels polynomiaux dans \mathbb{R}^4 non-linéaires homogènes cubiques ayant les valeurs propres $\pm bi$ et 0 de multiplicité deux, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un et deux. Ces systèmes sont de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} &= (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} &= (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{cases} \quad (5.1)$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^2 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw + a_{j7}xz^2 \\ &+ a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13}yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 \\ &+ a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 9$. Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , a_1 , a_2 , a_3 , b , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 sont des paramètres avec $b \neq 0$.

Théorème 5.1 *En appliquant la théorie de moyennisation du second ordre le système (5.1) admet 9 solutions périodiques bifurquant de l'origine quand $\varepsilon = 0$ et ce nombre de solutions périodiques est atteint si et seulement si la condition suivante est satisfaite $(3a_{00} + a_{04} + b_{01} + 3b_{010})b \neq 0$.*

Preuve du théorème 1.1

On commence par un changement de variables $(x, y, z, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon W)$. Ensuite, on passe aux coordonnées cylindriques $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta, \xi)$. Après, on prend θ comme une nouvelle variable indépendante.

D'où le système (5.1) devient sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\eta}{d\theta} = \varepsilon F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\xi}{d\theta} = \varepsilon F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^3), \end{cases} \quad (5.2)$$

où

$$F_{11}(\rho, \eta, \xi) = \frac{\rho a_1}{b},$$

$$F_{12}(\rho, \eta, \xi) = \frac{\eta a_2}{b},$$

$$F_{13}(\rho, \eta, \xi) = \frac{\xi a_3}{b},$$

$$\begin{aligned} F_{21}(\rho, \eta, \xi) = & \frac{1}{b^2} (b \sin(\theta) b_{00} \rho^3 \cos(\theta)^3 + b a_{07} \rho \cos(\theta)^2 \eta^2 + b a_{09} \rho \cos(\theta)^2 \xi^2 + b a_{01} \rho^3 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) + \\ & b a_{02} \rho^2 \cos(\theta)^3 \eta + b a_{03} \rho^2 \cos(\theta)^3 \xi + b a_{04} \rho^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + b \cos(\theta) a_{010} \rho^3 \sin(\theta)^3 + b \cos(\theta) a_{017} \eta^2 \xi + \\ & b \cos(\theta) a_{018} \eta \xi^2 + b \xi \eta^2 b_{017} \sin(\theta) + b \xi^2 \eta b_{018} \sin(\theta) + b b_{01} \rho^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + b b_{04} \rho^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^3 + \\ & b b_{011} \rho^2 \sin(\theta)^3 \eta + b b_{012} \rho^2 \sin(\theta)^3 \xi + b b_{013} \rho \sin(\theta)^2 \eta^2 + b b_{015} \rho \sin(\theta)^2 \xi^2 + b \cos(\theta) a_{014} \rho \sin(\theta) \eta \xi + b \sin(\theta) \\ & b_{08} \rho \cos(\theta) \eta \xi + b a_{08} \rho \cos(\theta)^2 \eta \xi + b \sin(\theta) b_{02} \rho^2 \cos(\theta)^2 \eta + b \sin(\theta) b_{03} \rho^2 \cos(\theta)^2 \xi + b \sin(\theta) b_{07} \rho \cos(\theta) \eta^2 + \\ & b \sin(\theta) b_{09} \rho \cos(\theta) \xi^2 + b b_{05} \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \eta + b b_{06} \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \xi + b b_{014} \rho \sin(\theta)^2 \eta \xi + b \cos(\theta) \\ & a_{011} \rho^2 \sin(\theta)^2 \eta + b \cos(\theta) a_{012} \rho^2 \sin(\theta)^2 \xi + b \cos(\theta) a_{013} \rho \sin(\theta) \eta^2 + b \cos(\theta) a_{015} \rho \sin(\theta) \xi^2 + b a_{05} \rho^2 \cos(\theta)^2 \\ & \sin(\theta) \eta + b a_{06} \rho^2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \xi + b \xi^3 b_{019} \sin(\theta) - a_1 b_1 \rho + b \cos(\theta)^2 a_2 \rho + b a_{00} \rho^3 \cos(\theta)^4 + b b_{010} \rho^3 \sin(\theta)^4 + \\ & b \sin(\theta)^2 a_2 \rho + b \cos(\theta) a_{019} \xi^3 + b \cos(\theta) a_{016} \eta^3 + b \eta^3 b_{016} \sin(\theta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{22}(\rho, \eta, \xi) = & \frac{1}{b^2} (\cos(\theta)^3 b c_{00} \rho^3 + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) b c_{01} \rho^3 + \cos(\theta) \sin(\theta)^2 b c_{04} \rho^3 + \sin(\theta)^3 b c_{010} \rho^3 + \cos(\theta)^2 b c_{02} \\ & \eta \rho^2 + \cos(\theta)^2 b c_{03} \rho^2 \xi + \cos(\theta) \sin(\theta) b c_{05} \eta \rho^2 + \cos(\theta) \sin(\theta) b c_{06} \rho^2 \xi + \sin(\theta)^2 b c_{011} \eta \rho^2 + \sin(\theta)^2 b c_{012} \rho^2 \xi + \\ & \cos(\theta) b c_{07} \eta^2 \rho + \cos(\theta) b c_{08} \eta \rho \xi + \cos(\theta) b c_{09} \rho \xi^2 + \sin(\theta) b c_{013} \eta^2 \rho + \sin(\theta) b c_{014} \eta \rho \xi + \sin(\theta) b c_{015} \rho \xi^2 + \\ & b c_{016} \eta^3 + b c_{017} \eta^2 \xi + b c_{018} \eta \xi^2 + b c_{019} \xi^3 + b c_2 \eta - c_1 \eta b_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{23}(\rho, \eta, \xi) = & \frac{1}{b^2} (\cos(\theta)^3 b d_{00} \rho^3 + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) b d_{01} \rho^3 + \cos(\theta) \sin(\theta)^2 b d_{04} \rho^3 + \sin(\theta)^3 b d_{010} \rho^3 + \cos(\theta)^2 b \\ & d_{02} \eta \rho^2 + \cos(\theta)^2 b d_{03} \rho^2 \xi + \cos(\theta) \sin(\theta) b d_{05} \eta \rho^2 + \cos(\theta) \sin(\theta) b d_{06} \rho^2 \xi + \sin(\theta)^2 b d_{011} \eta \rho^2 + \sin(\theta)^2 b d_{012} \rho^2 \xi + \\ & \cos(\theta) b d_{07} \eta^2 \rho + \cos(\theta) b d_{08} \eta \rho \xi + \cos(\theta) b d_{09} \rho \xi^2 + \sin(\theta) b d_{013} \eta^2 \rho + \sin(\theta) b d_{014} \eta \rho \xi + \sin(\theta) b d_{015} \rho \xi^2 + \\ & b d_{016} \eta^3 + b d_{017} \eta^2 \xi + b d_{018} \eta \xi^2 + b d_{019} \xi^3 + b d_2 \xi - d_1 \xi b_1). \end{aligned}$$

Le système (5.2) est écrit sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation, on prend

$$x = (\rho, \eta, \xi),$$

$$t = \theta,$$

$$\begin{aligned}
F_1(t, x) &= (F_{11}(\rho, \eta, \xi), F_{12}(\rho, \eta, \xi), F_{13}(\rho, \eta, \xi)), \\
F_2(t, x) &= (F_{21}(\rho, \eta, \xi), F_{22}(\rho, \eta, \xi), F_{23}(\rho, \eta, \xi)), \\
T &= 2\pi.
\end{aligned}$$

Calculons la premier fonction moyennée $f_1 = (f_{11}(\rho, \eta, \xi), f_{12}(\rho, \eta, \xi), f_{13}(\rho, \eta, \xi))$:

$$f_{11}(\rho, \eta, \xi) = \frac{a_1\rho}{b},$$

$$f_{12}(\rho, \eta, \xi) = \frac{c_1\eta}{b},$$

$$f_{13}(\rho, \eta, \xi) = \frac{d_1\xi}{b}.$$

Comme on cherche les solutions (ρ^*, η^*, ξ^*) de $f_1(\rho, \eta, \xi)$ pour $\rho^* > 0$, si $a_1 \neq 0$ la premier fonction moyennée ne fournit aucune information sur les cycles limites du système (5.1).

Pour calculer la deuxième fonction moyennée, on annule la première fonction moyennée. Donc, on prend

$$a_1 = c_1 = d_1 = 0.$$

On substitue ces conditions dans $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}$.

Calculons la deuxième fonction moyennée, on obtient

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \frac{\rho}{8b}((3a_{00} + a_{04} + b_{01} + 3b_{010})\rho^2 + 4(a_{07} + b_{013})\eta^2 + 4(a_{08} + b_{014})\eta\xi + \\
&\quad 4(a_{09} + b_{015}\xi^2 + 8a_2)), \\
f_{22} &= \frac{1}{2b}(2c_{016}\eta^3 + 2c_2\eta + 2\xi(c_{017}\eta^2 + c_{018}\eta\xi + c_{019}\xi^2) + (c_{02} + c_{011})\eta\rho^2 + \\
&\quad (c_{03} + c_{012})\eta^2\xi), \\
f_{23} &= \frac{1}{2b}(2d_{016}\eta^3 + 2d_2\xi + 2\xi(d_{017}\eta^2 + d_{018}\eta\xi + d_{019}\xi^2) + (d_{02} + d_{011})\eta\rho^2 + \\
&\quad (d_{03} + d_{012})\eta^2\xi).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

On résout l'équation $f_{21}(\rho, \eta, \xi) = 0$ par rapport à ρ^2 , on obtient

$$\rho^2 = \frac{-1}{3a_{00} + a_{04} + b_{01} + 3b_{010}}(4(a_{07} + b_{013})\eta^2 + 4(a_{08} + b_{014})\eta\xi + 4(a_{09} + b_{015}\xi^2 + 8a_2)), \tag{5.4}$$

Substituons (5.4) dans $f_{2i}(\rho, \eta, \xi) = 0$ pour $i = 2, 3$. On obtient deux polynômes :

$$\begin{cases} g_{22}(\eta, \xi) = \frac{1}{3a_{00} + a_{04} + b_{01} + 3b_{010}}(c_1\eta + c_2\xi + c_3\eta\xi^2 + c_4\eta^2\xi + c_5\eta^3 + c_5\xi^3) = 0, \\ g_{23}(\eta, \xi) = \frac{1}{3a_{00} + a_{04} + b_{01} + 3b_{010}}(d_1\eta + d_2\xi + d_3\eta\xi^2 + d_4\eta^2\xi + d_5\eta^3 + d_5\xi^3) = 0, \end{cases}$$

où

$$C_1 = -4a_2c_{02} - 4a_2c_{011} + 3a_{00}c_2 + a_{04}c_2 + b_{01}c_2 + 3b_{010}c_2,$$

$$C_2 = -4a_2(c_{03} + c_{012}),$$

$$C_3 = -2(a_{08}c_{03} + a_{08}c_{012} + a_{09}c_{011} + a_{09}c_{011} + b_{014}c_{03} + b_{014}c_{012} + b_{015}c_{02} + b_{015}c_{011}) + 3a_{00}c_{018} + a_{04}c_{018} + b_{01}c_{018} + 3b_{010}c_{018},$$

$$C_4 = -2(a_{07}c_{03} + a_{07}c_{012} + a_{08}c_{02} + a_{08}c_{011} + b_{013}c_{012} + b_{014}c_{02} + b_{014}c_{011}) + 3a_{00}c_{07} + a_{04}c_{017} + b_{01}c_{017} + 3b_{010}c_{017},$$

$$C_5 = -2(c_{02} + c_{011})(a_{07} + b_{013}) + 3a_{00}c_{016} + a_{04}c_{016} + b_{01}c_{016} + 3b_{010}c_{016},$$

$$C_6 = 3a_{00}c_{019} + a_{04}c_{019} - 2a_{09}c_{03} - 2a_{09}c_{012} + b_{01}c_{019} + 3b_{010}c_{019} - 2b_{015}c_{03} - 2b_{015}c_{012},$$

et

$$D_1 = -4a_2(d_{03} + d_{012}) \quad D_2 = -4a_2d_{02} - 4a_2d_{011} + 3a_{00}d_2 + a_{04}d_2 + b_{01}d_2 + 3b_{010}d_2,$$

$$D_3 = -2(a_{08}d_{03} + a_{08}d_{012} + a_{09}d_{011} + a_{09}d_{011} + b_{014}d_{03} + b_{014}d_{012} + b_{015}d_{02} + b_{015}d_{011}) + 3a_{00}d_{018} + a_{04}d_{018} + b_{01}d_{018} + 3b_{010}d_{018},$$

$$D_4 = -2(a_{07}d_{03} + a_{07}d_{012} + a_{08}d_{02} + a_{08}d_{011} + b_{013}d_{012} + b_{014}d_{02} + b_{014}d_{011}) + 3a_{00}d_{07} + a_{04}d_{017} + b_{01}d_{017} + 3b_{010}d_{017},$$

$$D_5 = -2(d_{02} + d_{011})(a_{07} + b_{013}) + 3a_{00}d_{016} + a_{04}d_{016} + b_{01}d_{016} + 3b_{010}d_{016},$$

$$D_6 = 3a_{00}d_{019} + a_{04}d_{019} - 2a_{09}d_{03} - 2a_{09}d_{012} + b_{01}d_{019} + 3b_{010}d_{019} - 2b_{015}d_{03} - 2b_{015}d_{012}.$$

On suppose que $3a_{00} + a_{04} + b_{01} + 3b_{010} \neq 0$.

Le rang de la matrice jacobienne des fonctions $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ par rapport aux variables $a_{00}, a_{04}, a_{07}, a_{08}, a_{09}, a_2, b_{01}, b_{010}, b_{013}, b_{014}, b_{015}, c_{02}, c_{03}, c_{011}, c_{012}, c_{016}, c_{017}, c_{018}, c_{019}, c_2, d_{02}, d_{03}, d_{03}, d_{011}, d_{012}, d_{016}, d_{017}, d_{018}, d_{019}, d_2$ est 12 ceci implique que $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ sont indépendantes. Donc, les coefficients des polynômes $g_{22}(\eta, \xi) = 0, g_{23}(\eta, \xi) = 0$ ont peut les choisit arbitrairement.

D'après le théorème de Bezout, le système $g_{22}(\eta, \xi) = 0, g_{23}(\eta, \xi) = 0$ a 9 solutions.

Exemple 5.1 *On considère le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}x\varepsilon^2 + y + w^2x + xz^2 + 3\varepsilon x^3, \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}y\varepsilon^2 + 2w^2y - 4x^2y + 2yz^2, \\ \dot{z} = -3w^3 + \frac{1}{2}wy^2 + \frac{5}{2}w^2z - \frac{3}{4}x^2z - \frac{1}{4}z^2w + z^3 + \frac{1}{2}z\varepsilon^2 - \varepsilon w^3, \\ \dot{w} = -\frac{9}{4}w^2z + \frac{3}{4}x^2z + \frac{3}{4}y^2z - \frac{1}{4}z^2w - 3z^3 + \varepsilon^2w^3. \end{cases} \quad (5.5)$$

Le système moyenné (5.3) associé au système (5.5) est

$$\begin{aligned} f_{21}(\rho, \eta, \xi) &= -\frac{1}{2}\rho(3\eta^2 - \rho^2 + 3\xi^2 + 1), \\ f_{22}(\rho, \eta, \xi) &= -\eta^3 + \frac{1}{4}\xi\eta^2 + \frac{3}{8}\eta\rho^2 - \frac{5}{2}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\rho^2 + 3\xi^3 - \frac{1}{2}\eta, \\ f_{23}(\rho, \eta, \xi) &= \frac{1}{4}\eta(12\eta^2 + \eta\xi - 3\rho^2 + 9\xi^2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

En résolvant le système (5.6), on trouve 9 solutions $z_i = (\rho^*_i, \eta^*_i, \xi^*_i)$ où $\rho^*_i > 0$ pour $i = \overline{0, 9}$ données par

$$\begin{aligned} z_1 &= (1, 0, 0), \\ z_2 &= (2, 1, 0), \\ z_3 &= (2, -1, 0), \\ z_4 &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), \\ z_5 &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right), \\ z_6 &= \left(\frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_7 &= \left(\frac{\sqrt{22}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\
z_8 &= \left(\frac{\sqrt{3547830}}{858}, \frac{9\sqrt{286}}{143}, -\frac{19\sqrt{286}}{858} \right), \\
z_9 &= \left(\frac{\sqrt{3547830}}{858}, -\frac{9\sqrt{286}}{143}, \frac{19\sqrt{286}}{858} \right).
\end{aligned}$$

Calculons le déterminant en ces 9 racines $z_i = (\rho_i^*, \eta_i^*, \xi_i^*)$, où

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{13}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}\rho^2 + \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2} & 3\rho\eta & 3\rho\xi \\ \frac{3}{4}\rho\eta - \frac{1}{2}\rho\xi & -3\eta^2 + \frac{1}{2}\eta\xi + \frac{3}{8}\rho^2 - \frac{5}{2}\xi^2 - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\eta^2 - 5\eta\xi - \frac{1}{4}\rho^2 + 9\xi^2 \\ \frac{3}{2}\rho\eta & -3\eta^2 - \frac{1}{4}\eta\xi + \frac{3}{4}\rho^2 - \frac{9}{4}\xi^2 - \frac{1}{4}\eta(24\eta + \xi) & -\frac{1}{4}\eta(\eta + 18\xi) \end{pmatrix},$$

on obtient respectivement : $-\frac{3}{16}, \frac{19}{4}, \frac{19}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{2409}{128}, -\frac{2409}{128}, -\frac{5735245}{654368}, -\frac{5735245}{654368}$.

D'où, d'après la théorie de moyennisation d'ordre deux on obtient 9 solutions périodiques.

Maintenant en revenant par les changements de variables, on trouve 9 cycles limites

$(x_i(t, \varepsilon), (y_i(t, \varepsilon), (z_i(t, \varepsilon), (w_i(t, \varepsilon))$ de système différentiel tel que

$(x_i(t, \varepsilon), (y_i(t, \varepsilon), (z_i(t, \varepsilon), (x_i(t, \varepsilon)) = \varepsilon(\rho_i^* \cos(t), \rho_i^* \sin(t), \eta_i^*, \xi_i^*)$.

Pour $i = 1..9$, on trouve

$$(x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), z_1(t, \varepsilon), w_1(t, \varepsilon)) = \varepsilon(\cos(t), \sin(t), 0, 0) + O(\varepsilon^2),$$

$$(x_2(t, \varepsilon), (y_2(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon)) = \varepsilon(2 \cos(t), 2 \sin(t), 1, 0) + O(\varepsilon^2),$$

$$(x_3(t, \varepsilon), y_3(t, \varepsilon), z_3(t, \varepsilon), w_3(t, \varepsilon)) = \varepsilon(2 \cos(t), 2 \sin(t), -1, 0) + O(\varepsilon^2),$$

$$(x_4(t, \varepsilon), y_4(t, \varepsilon), z_4(t, \varepsilon), w_4(t, \varepsilon)) = \varepsilon\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos(t), \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(t), 0, \frac{1}{3}\right) + O(\varepsilon^2),$$

$$(x_5(t, \varepsilon), y_5(t, \varepsilon), z_5(t, \varepsilon), w_5(t, \varepsilon)) = \varepsilon\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos(t), \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(t), 0, -\frac{1}{3}\right) + O(\varepsilon^2),$$

$$(x_6(t, \varepsilon), y_6(t, \varepsilon), z_6(t, \varepsilon), w_6(t, \varepsilon)) = \varepsilon\left(\frac{\sqrt{22}}{2} \cos(t), \frac{\sqrt{22}}{2} \sin(t), \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + O(\varepsilon^2),$$

$$(x_7(t, \varepsilon), y_7(t, \varepsilon), z_7(t, \varepsilon), w_7(t, \varepsilon)) = \varepsilon\left(\frac{\sqrt{22}}{2} \cos(t), \frac{\sqrt{22}}{2} \sin(t), -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + O(\varepsilon^2),$$

$$(x_8(t, \varepsilon), y_8(t, \varepsilon), z_8(t, \varepsilon), w_8(t, \varepsilon)) = \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3547830}}{858} \cos(t), \frac{\sqrt{3547830}}{858} \sin(t), \frac{9\sqrt{286}}{143}, -\frac{19\sqrt{286}}{858}\right) + O(\varepsilon^2),$$

$$(x_9(t, \varepsilon), y_9(t, \varepsilon), z_9(t, \varepsilon), w_9(t, \varepsilon)) = \varepsilon\left(\frac{\sqrt{3547830}}{858} \cos(t), \frac{\sqrt{3547830}}{858} \sin(t), -\frac{9\sqrt{286}}{143}, \frac{19\sqrt{286}}{858}\right) + O(\varepsilon^2).$$

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, on a utilisé la méthode de moyennisation pour étudier la bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels quadratique dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 . Ensuite, on a étudié la bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels cubiques dans \mathbb{R}^4 .

Notre futur travail consiste à étudier la bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels cubique dans \mathbb{R}^4 , en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre trois.

- [1] **E. Bendib, S. Badi, A. Makhlof**, *On the 3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of third order*, Turkish Journal of Mathematics, Vol 41, 4, 1053-1071, 2017.
- [2] **NN. Bogoliubov, N. Krylov**, *The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations*, Kyiv : Publ. Acad. of Sci. Ukr. SSR, 1934.
- [3] **A. Buică, J. Llibre**, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bulletin des sciences mathematiques, Vol 128, 1, 7-22, Elsevier, 2004.
- [4] **D. Djedid, E. Bendib, A. Makhlof**, *Four-dimensional Zero-Hopf Bifurcation of Quadratic Polynomial Differential System, via Averaging Theory of Third Order*, Journal of Dynamical and Control Systems, Springer, 1-16, 2021.
- [5] **A. Feddaoui, J. Llibre, A. Makhlof**, *4-dimensional zero-Hopf bifurcation for polynomial differentials systems with cubic homogeneous nonlinearities via averaging theory*, International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, 10(4), 321-328, 2020.
- [6] **J. Llibre**, *Averaging theory and limit cycles for quadratic systems*, Radovi Matematicki, Vol 11, 215-228, 2002.
- [7] **J. Llibre, C. A. Buzzi, P. R. Da Silva**, *3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol 17, 3, 529, AIMS PRESS, 2007.
- [8] **J. Llibre, A. Makhlof**, *Zero-Hopf bifurcation in the generalized Michelson system*. Chaos Soltion Fract, 89 :228-231, 2016.
- [9] **J. Llibre, A. Makhlof, S. Badi**, *3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of second order*, Discrete Contin Dynam Syst ; 25 : 1287-1295, 2009.
- [10] **J. Llibre, A. C. Mereu, M. A. Teixeira**, *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations*, In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 148, No. 2, pp. 363-383). Cambridge University Press, 2010.
- [11] **J. Llibre, D. D. Novaes, M. A. Teixeira**, *Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree*. Nonlinearity, 27(3), 563, 2014.
- [12] **J. Llibre, X. Zhang**, *Hopf bifurcation in higher dimensional differential systems via the averaging method*, Mathematical Sciences Publishers, Vol 240, 2, 321-341, 2009.
- [13] **I. G. Malkin**, *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, (Russian) Gosudarstv, Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.

- [14] **J. E. Marsden and M. McCracken**, *The Hopf bifurcation and its applications*, Applied Mathematical Sci, vol 19, New York, Springer-Verlag, 1976.
- [15] **L. Perko**, *Differential equations and dynamical systems*, Springer Science, 2001.
- [16] **M. Roseau**, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer, vol 8, 1966.
- [17] **JA. Sanders and F. Verhulst**, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1985.
- [18] **IR. Shafarevich**, *Basic algebraic geometry*. Berlin : Springer, 1974.
- [19] **F. Verhulst**, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Springer Science & Business Media, 2006.