الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA
BADJI MOKHTAR–ANNABA UNIVERSITY

جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté des Sciences
Département de mathématiques
Domaine : mathématique et informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Actuariat

Mémoire

Présenté en vue de l’obtention du Diplôme de Master

Thème :

Théorie de la crédibilité imprécise

Présenté par : *Khader Mostapha Oualid*

Encadrant : *Metiri Farouk* *M.C.A* *à L’université d’Annaba*

Jury de Soutenance :

Djebar Ahlem	M.C.A	L’université D’Annaba	Président
Belhamra Thara	M.C.B	L’université D’Annaba	Examinateur

Année Universitaire : 2022/2023

ملخص

الهدف من هذا البحث هو استكشاف اثنتين من النهج المهمة في مجال المصداقية البايزية: منهجية غاما-مينيماكس للانحدار اللاحق ونظرية المصداقية غير الدقيقة. يقوم هذا البحث بمقارنة هاتين المنهجين وفحص مبادئهما وأدائهما وتطبيقاتهما المختلفة. من خلال استكشاف مزايا وقيود كل نهج، يهدف هذا البحث إلى المساهمة في تحسين النمذجة الإحصائية واتخاذ القرار في السياقات التي تكون فيها عدم اليقين حاضرة. في النهاية، يقدم هذا البحث نظرة عامة على الأسعار المصدقية البايزية المستحصلة باستخدام منهجية غاما-مينيماكس للانحدار اللاحق ونظرية المصداقية غير الدقيقة، مسلطًا الضوء على الفرص التي توفرها كل نهج للتعامل مع عدم اليقين بشكل دقيق.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'explorer deux approches importantes dans le domaine de la crédibilité bayésienne : la méthodologie de Γ-Minimax à régression postérieure et la théorie de la crédibilité imprécise.

Ce mémoire compare ces deux approches et examine leurs principes, leurs performances et leurs applications respectives. En explorant les avantages et les limitations de chaque approche, ce mémoire vise à contribuer à l'amélioration de la modélisation statistique et de la prise de décision dans des contextes où l'incertitude est omniprésente. En fin de compte, il offre une vision d'ensemble des primes de crédibilité bayésienne obtenues à partir de la méthodologie de Γ-Minimax à régression postérieure et de la théorie de la crédibilité imprécise, en mettant en évidence les possibilités offertes par chaque approche pour traiter l'incertitude de manière rigoureuse.

Abstract

The objective of this thesis is to explore two important approaches in the field of Bayesian credibility: the Γ-Minimax methodology for posterior regression and the theory of imprecise credibility. This thesis compares these two approaches and examines their principles, performance, and respective applications. By exploring the advantages and limitations of each approach, this thesis aims to contribute to the improvement of statistical modeling and decision-making in contexts where uncertainty is ubiquitous. Ultimately, it provides an overview of Bayesian credibility premiums obtained from the Γ-Minimax methodology for posterior regression and the theory of imprecise credibility, highlighting the possibilities offered by each approach to rigorously address uncertainty.

Remerciements

Avant tout on tient à remercier Allah le tout puissant qui nous a donné la volonté, la patience, la force et la santé d'accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers mon encadreur Monsieur Metiri Farouk, pour sa confiance indéfectible, sa disponibilité constante, sa patience infinie, sa rigueur scientifique exemplaire et son soutien inestimable. Je suis extrêmement reconnaissant d'avoir eu la chance et le privilège de réaliser ce modeste travail grâce à son accompagnement précieux.

Je souhaite exprimer mes sincères remerciements à Madame Djebar Ahlem, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar-Annaba, pour l'honneurqu'elle m'a fait en tant que présidente du jury de cette soutenance. Je tiens également à remercier Madame Belhamra Thara Maître de conférences B à l'université Badji Mokhtar-Annaba d'avoir accepté de faire partie du jury et d'y consacrer une partie de son temps.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude envers mes chers parents qui ont toujours été une source constante d'encouragement tout au long de mon parcours. Votre soutien inconditionnel et votre motivation m'ont permis de surmonter les obstacles et d'atteindre mes objectifs. Merci du fond du cœur pour votre amour et votre soutien sans faille.

Finalement, j'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants qui ont joué un rôle essentiel dans notre formation. Leur dévouement, leur expertise et leur soutien ont grandement contribué à notre développement académique. Nous leur adressons nos sincères remerciements pour leur précieuse contribution à notre parcours éducatif.

Table des matières

Introduction générale

La théorie de la crédibilité est un concept statistique utilisé en actuariat et en assurance pour estimer les caractéristiques de risque d'un groupe sur la base de données collectives et individuelles. Elle vise à fournir une prédiction plus précise des événements futurs en combinant l'expérience du groupe (données collectives) avec l'expérience de l'individu (données personnelles).

Dans le domaine de l'assurance, la théorie de la crédibilité aide les assureurs à estimer les pertes attendues pour un assuré spécifique ou un groupe d'assurés. Elle reconnaît que si les données individuelles peuvent fournir des informations précieuses, elles sont souvent limitées en termes de taille d'échantillon et de fiabilité statistique. En revanche, les données de groupe, qui reposent sur un plus grand nombre d'observations, tendent à être plus stables et plus fiables.

L'idée centrale de la théorie de la crédibilité est de trouver un équilibre entre les données individuelles et les données de groupe en attribuant des poids différents à chaque ensemble de données. Les pondérations sont déterminées en fonction de la fiabilité des données individuelles et collectives, un poids plus important étant accordé à la source la plus fiable.

La théorie de la crédibilité utilise diverses techniques statistiques, telles que le modèle de Bühlmann-Straub et l'approche bayésienne, pour calculer les pondérations appropriées et mélanger les données individuelles et collectives. En combinant les deux sources d'information, la théorie de la crédibilité aide les assureurs à faire des prévisions plus précises sur les pertes futures, ce qui est essentiel pour fixer des primes d'assurance appropriées et gérer les risques.

Dans l'ensemble, la théorie de la crédibilité est un outil important de la science actuarielle qui permet aux assureurs de tirer parti des données individuelles et collectives pour améliorer l'évaluation des risques et les décisions en matière de tarification.

Dans la théorie de la crédibilité, la prime facturée à un assuré est calculée sur la base de ses propres sinistres passés et des sinistres passés cumulés du portefeuille d'assurés correspondant. Afin d'obtenir une formule appropriée pour cela, diverses méthodologies ont été proposées dans la littérature actuarielle, la plupart dans le domaine de la méthodologie de décision bayésienne.

Le domaine de la crédibilité bayésienne occupe une place prépondérante dans la modélisation statistique et l'analyse des données. Il vise à estimer des paramètres inconnus en utilisant à la fois des informations a priori et des données observées. Au fil des années, diverses approches ont été développées pour améliorer la précision des estimations et prendre en compte l'incertitude dans les modèles. Deux approches importantes dans ce contexte sont les primes de crédibilité bayésiennes obtenues en utilisant la méthodologie de $\Gamma-$Minimax à régression postérieure et la théorie de la crédibilité imprécise.

Le premier chapitre de ce mémoire se concentre sur l'utilisation de la méthodologie de $\Gamma-$Minimax à régression postérieure pour obtenir des primes de crédibilité bayésiennes. Cette approche repose sur l'idée de minimiser une perte maximale conditionnelle associée à une distribution a priori et une fonction de perte spécifiées. Elle offre ainsi une façon robuste de construire des primes de crédibilité bayésiennes qui tiennent compte des incertitudes dans les données et les hypothèses a priori. Nous explorerons les fondements théoriques de cette méthodologie et discuterons de ses applications potentielles dans différents domaines.

Le deuxième chapitre de ce mémoire portera sur la théorie de la crédibilité imprécise. Contrairement à l'approche bayésienne classique, qui repose sur des distributions de probabilité précises, la théorie de la crédibilité imprécise permet de modéliser l'incertitude de manière plus flexible en utilisant des ensembles de possibilités plausibles. Nous aborderons les concepts clés de cette théorie, tels que les intervalles de crédibilité et les fonctions de croyance, et discuterons de leur interprétation et de leurs avantages par rapport aux approches bayésiennes traditionnelles. De plus, nous présenterons des méthodes pour estimer les ensembles de crédibilité imprécise à partir des données disponibles.

L'objectif global de ce mémoire est d'explorer et de comparer ces deux approches de la crédibilité bayésienne afin de mieux comprendre leurs principes, leurs performances et leurs applications respectives. En examinant les avantages et les limitations de chaque approche, nous espérons contribuer à l'amélioration de la modélisation statistique et à la prise de décision dans des contextes où l'incertitude est omniprésente.

CHAPITRE 1 Primes de Crédibilité Bayésiennes Obtenues Sous la méthodologie de Γ-Minimax postérieure

La théorie de la crédibilité est une technique de tarification par expérience qui a été développée dans le domaine de l'actuariat et qui est fréquemment utilisée dans l'évaluation de l'assurance automobile, des primes d'indemnisation des travailleurs, du provisionnement des pertes et des sinistres IBNR-Incurred But Not Reported. Selon cette théorie, les primes sont établies en fonction des sinistres passés accumulés dans un portefeuille. Par conséquent, la prime d'un assuré de la classe j, $j = 1, ..., l$, est calculée en combinant l'expérience de l'individu (contrat ou titulaire de la police) avec l'expérience d'un collectif (portefeuille) en utilisant l'expression suivante

$$P_j = (1 - Z_j)\, m + ZM_j, j = 1, 2, ..., l. \tag{1.1}$$

Où P_j est la prime ajustée en fonction de la crédibilité, m est la moyenne globale (le montant des sinistres attendus pour l'ensemble du portefeuille), M_j est la moyenne pour le risque individuel j et Z_j est le facteur de crédibilité, un nombre compris entre 0 et 1. Cette expression a été suggérée par Whitney (1918) sous une forme heuristique, mais peut également être obtenue selon différentes méthodologies bayésiennes. À cet égard, la théorie de la crédibilité est utilisée pour déterminer la sinistralité attendue d'un risque individuel lorsque les risques ne sont pas homogènes, puisque le risque individuel appartient à un collectif hétérogène. L'objectif principal de la théorie de la crédibilité est de calculer le poids à attribuer aux données du risque individuel afin de déterminer une prime équitable.

Divers résultats utiles, non présentés dans ce travail, ont été proposés concernant la manière de choisir le facteur de crédibilité. Il s'agit notamment de la crédibilité des fluctuations limitées, du modèle de régression à coefficient aléatoire de Hachemeister, de la crédibilité multidimensionnelle et des méthodes des espaces de Hilbert. La contribution la plus importante à ce jour a été proposée par Bühlmann (1967, 1969), qui, sous une forme simple et élégante, a dérivé un résultat général sous la fonction de perte d'erreur quadratique sans supposer de distribution de probabilité pour la modélisation du risque. Ce résultat est connu sous le nom de modèle classique de Bühlmann (voir Bühlmann (1967, 1969) ; et voir également Bühlmann et Gisler (1967) pour les contributions récentes dans ce domaine).

Évidemment, l'expression (1.1) peut aussi être considérée comme un compromis entre la moyenne des observations actuelles, les données, et la moyenne à priori, une estimation basée sur l'opinion préalable de l'actuaire. Cette expression inclut le concept de connaissance préalable, dans l'esprit du paradigme bayésien. Tout d'abord, Bailey (1945), puis d'autres auteurs (Jewell (1974) ; Gerber et Arbor (1980) ; Heilmann (1989) ; Landsman et Makov (1998, 2000) ; entre autres) ont obtenu certaines approches du problème de crédibilité calculées selon des méthodologies bayésiennes standard et robustes (Eichenauer et al. (1988) et Gómez et al. (2006)).

Dans ce chapitre, nous appliquons l'idée proposée dans Zen et DasGupta (1993) et Ros Insua et al. (1995) au problème de la sélection d'une distribution à priori dans une classe de distributions à prioris possibles lorsque l'analyse de robustesse bayésienne globale est terminée. Le décideur est intéressé par le choix d'une action unique parmi l'ensemble des actions fournies par une procédure globale. L'idée est de sélectionner l'action à regret postérieur **Γ**- minimax (voir Zen et DasGupta (1993) ; Ros Insua et al. (1995) et Gómez et al. (2006)). Cette procédure présente l'avantage, par rapport à l'action **Γ**-minimax (également appelée **Γ**-minimax conditionnel), que l'estimateur est toujours bayésien lorsqu'une classe paramétrique est utilisée, les paramètres variant sur un ensemble connecté de la ligne réelle (Zen et DasGupta (1993) et Ros Insua et al. (1995)).

Cette méthodologie consiste à choisir une estimation qui se situe entre la méthodologie Bayes action et Bayes robust. En utilisant cette procédure (voir Gómez et al. (2006)), nous avons dérivé de nouvelles expressions de crédibilité sous le principe de la prime pure et le modèle gamma-gamma comme vraisemblance et antériorité, respectivement. Une généralisation des résultats obtenus dans l'étude précédente est complétée dans le présent document pour obtenir de nouvelles primes de crédibilité sous la famille de distributions à dispersion exponentielle et la fonction de perte à erreur carrée. La procédure exposée ici est réalisée en choisissant la fonction de perte d'erreur carrée pondérée.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons la méthodologie à appliquer pour obtenir des primes et mettre en œuvre la procédure de $\mathbf{\Gamma}$-minimax à regret postérieur. Dans la section 3, nous dérivons les primes de crédibilité dans le cadre de cette procédure, en tenant compte de la fonction de perte d'erreur carrée et de la famille de distributions à dispersion exponentielle. Cette dernière comprend, comme un cas particulier, la famille de distributions exponentielles naturelles. Dans la section 4, une extension est obtenue en utilisant la fonction de perte d'erreur quadratique pondérée. La section 5 contient une application numérique dans le cadre du modèle classique de Poisson avec distribution à priori gamma lorsque la perte pondérée par erreur quadratique est utilisée. Enfin, la section 6 présente quelques remarques finales.

1.1 La méthodologie

Dans la théorie du risque, la procédure de calcul de la prime est modélisée comme suit. Le nombre de sinistres d'un contrat au cours d'une période est spécifié par une variable aléatoire $X \in \chi$ suivant une fonction de densité de probabilité $f(x \mid \theta)$ dépendant d'un paramètre de risque inconnu $\theta \in \ominus$. Un principe de calcul de prime (par exemple Eichenauer et al. (1988) et Heilmann (1989)) attribue à chaque paramètre de risque θ une prime au sein de l'ensemble $P \in \mathbb{R}$ l'espace d'action.

Soit $L : \ominus * P \to \mathbb{R}$ une fonction de perte qui attribue à tout $(\theta, P) \in \ominus * P$ la perte subie par un décideur qui prend l'action P et est confronté au résultat θ d'une expérience aléatoire. La prime doit être déterminée de telle sorte que la perte attendue soit minimisée.

À partir de ce paramètre, la prime inconnue $P \equiv P(\theta)$ appelée prime de risque, peut être obtenue en minimisant la perte attendue $E_f\left[L(P(\theta), \theta\right]$. L est généralement considérée comme la fonction de perte par erreur carrée pondérée, c'est-à-dire $L(a, x) =$

$h(x)(x-a)^2$. En utilisant différentes formes fonctionnelles pour $h(x)$, nous avons différents principes de prime. Par exemple, pour $h(x) = 1$, $h(x) = exp(cx)$, $c > 0$ et $h(x) = x$, on obtient les principes de prime pure, d'Esscher et de variance, respectivement (Heilmann (1989) et Gómez et al. (2006), entre autres).

Si l'expérience n'est pas disponible, l'actuaire calcule la prime collective, $P(\pi)$, qui est donnée en minimisant la fonction de risque, c'est-à-dire en minimisant $E_\pi[L(P(\theta), \theta)]$, où π est la distribution à priori sur le paramètre inconnu $\boldsymbol{\theta} \in \ominus$. D'autre part, si l'expérience est disponible, l'actuaire prend un échantillon x parmi les variables aléatoires $X_i, i = 1, 2, ..., t$, en supposant que X_i i.i.d., et utilise cette information pour estimer le paramètre inconnu prime de risque $P(\theta)$, par la prime de Bayes $P(\boldsymbol{\pi}_x)$, obtenue en minimisant le risque de Bayes, c'est-à-dire en minimisant $E_{\boldsymbol{\pi}_x}[L(P(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta})]$. Ici, $\boldsymbol{\pi}_x$ est la distribution postérieure du paramètre de risque, $\boldsymbol{\theta}$, compte tenu des informations de l'échantillon X.

Une autre approche de la configuration de Bayes analysée ci-dessus peut être trouvée lorsque les praticiens supposent qu'une priorité correcte $\boldsymbol{\pi}$ existe, mais qu'ils ne sont pas en mesure d'appliquer l'hypothèse bayésienne pure, peut-être parce qu'ils ne sont pas assez confiants pour la spécifier de manière complète. Ainsi, une antériorité $\boldsymbol{\pi}$ est attribuée au paramètre de risque $\boldsymbol{\theta}$, ce qui constitue une bonne approche pour la véritable antériorité. Une situation similaire se présente lorsqu'un problème doit être résolu par deux ou plusieurs décideurs et qu'ils ne sont pas d'accord sur la distribution à priori à utiliser. Une approche courante de l'incertitude des antériorités dans l'analyse bayésienne consiste à choisir une classe $\boldsymbol{\Gamma}$ de distributions à prioris, puis à calculer la gamme des actions de Bayes au fur et à mesure que les antériorités s'étendent sur $\boldsymbol{\Gamma}$. Cette méthode est connue sous le nom de méthode bayésienne robuste (voir Berger (1994) et Ros Insua et Ruggeri (2000), pour un examen de cette question). Une alternative à cette approche consiste à choisir une procédure qui se situe entre l'action de Bayes et la méthodologie bayésienne robuste. Une telle approche hybride est connue sous le nom de principe de $\boldsymbol{\Gamma}$-minimax à regret postérieur.

Si $\rho(\boldsymbol{\pi}_x, P)$ est la perte attendue postérieure d'une action P sous $\boldsymbol{\pi}_x$, le regret postérieur de P est défini comme (voir Zen et DasGupta (1993) et Ros Insua et al. (1995))

$$r\left(\pi_x, P\right) = \rho\left(\pi_x, P\right) - \rho\left(\pi_x, P(\pi_x)\right), \tag{1.2}$$

qui mesure la perte d'optimalité subie lorsque P est choisi à la place de l'optimum action $P(\boldsymbol{\pi}_x)$.

$RP(\boldsymbol{\pi}_x) \in P$ est l'action de $\boldsymbol{\Gamma}$-minimax à regret postérieur si

$$\inf_{P \in P} \sup_{\pi \in \Gamma} r\left(\pi_x, P\right) = \sup r\left(\pi_x, RP(\pi_x)\right). \tag{1.3}$$

Cette méthodologie repose sur l'idée que l'action optimale minimise la supre- mité de la fonction sur les distributions de la classe $\boldsymbol{\Gamma}$. Par conséquent, dans le cadre de l'assurance, l'actuaire doit chercher à faire en sorte que la plus grande augmentation possible du risque, en cas de mauvais choix de la distribution à priori, soit la plus faible possible.

Il est facile de montrer (voir Ros Insua et al. (1995) et Zen et DasGupta (1993)) que si nous choisissons $h(x) = 1$, c'est-à-dire que la prime considérée est la prime pure principle, et que le regret postérieur $\boldsymbol{\Gamma}$ action-minimax est le point médian de l'intervalle $\left[\inf_{\pi \in \boldsymbol{\Gamma}} P(\boldsymbol{\pi}_x), \sup_{\pi \in \boldsymbol{\Gamma}} P(\boldsymbol{\pi}_x)\right]$.

Dans les sections suivantes, nous présentons certaines classes de distributions pour lesquelles les primes de $\boldsymbol{\Gamma}$-minimax à regret postérieur sont des primes de Bayes et peuvent être écrites sous la forme d'une formule de crédibilité, comme dans (1.1). L'idée d'obtenir des expressions de crédibilité à partir des primes de Bayes standard est basée sur le choix correct de la vraisemblance et de ses distributions à priori conjuguées.

1.2 Primes de crédibilité de Γ-minimax sous la fonction de perte quadratique

L'action qui minimise la perte attendue $E\boldsymbol{\pi}\ [L(\boldsymbol{\theta}, P)]$ est appelée principe de la prime pure. Dans ce cas, les primes individuelles et collectives sont données par (voir Eichenauer et al. (1988) ; Heilmann (1989) et Gómez et al. (2006), entre autres):

$$P(\theta) = E_f(X\,|\theta) = \int\limits_x x f(x\,|\theta) dx,$$

$$P(\pi) = E_\pi\left[E_f(X\,|\theta)\right] = \int\limits_\theta P(\theta)\pi(\theta) d\theta, \tag{1.4}$$

Respectivement. La prime de Bayes, $P(\pi^x)$, est obtenue en remplaçant $\boldsymbol{\pi}(\theta)$ dans (1.4) par $\boldsymbol{\pi}^x(\theta)$.

Bailey (1945) a montré que si la probabilité est la distribution binomiale et l'antériorité la distribution Bêta, alors la crédibilité se produit selon le principe de la prime pure. Dans le même article, l'expression de la crédibilité dans le cas Poisson- gamma a été obtenue. Des résultats similaires ont été obtenus plus tard par Mayerson (1964). Jewell (1974) a généralisé ces résultats et a montré que pour la famille de distributions exponentielles naturelles (NEF, dorénavant) et ses prieurs conjugués, des primes de crédibilité exactes ont été dérivées. Enfin, Landsman et Makov (1998, 2000) ont obtenu un résultat plus général en utilisant la famille de distributions exponentielles de dispersion (EDF, dorénavant) (voir aussi Jorgensen (1986)). Dans cette travail, la famille EDF avec paramétrisation

$$f(x\,|\theta,\lambda) = \exp\left\{\lambda(x\theta - k(\theta))\right\} q(x\,|\lambda), \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+ \tag{1.5}$$

et une distribution à priori conjuguée donnée par la densité

$$\pi(\theta) = \ltimes \exp\left\{x_0\theta - t_0 k(\theta)\right\}, \tag{1.6}$$

sont utilisés.

Landsman et Makov (1998, 2000) ont prouvé qu'étant donné t années d'expérience individuelle $x_1, x_2, ..., x_t$, la prime bayésienne est donnée par

$$P(\pi_x) = \frac{x_0 + \lambda \sum_{i=1}^{t} x_i}{t_0 + t\lambda} = Z(t)\bar{X} + (1 - Z(t))P(\pi), \quad \bar{X} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} x_i. \tag{1.7}$$

Ici,

$$Z(t) = \frac{t\lambda}{t_0 + t\boldsymbol{\lambda}}$$

avec $Z(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$ et $Z(t) \to 1$ lorsque $t \to \infty$, tandis que

$$P(\boldsymbol{\pi}) = \int_{\Theta} P(\theta)\pi(\theta)d\theta = x_0 t_0$$

avec $P(\boldsymbol{\theta}) = E_f(X|\boldsymbol{\theta}) = k^{'}(\boldsymbol{\theta})$.

En prenant $\boldsymbol{\lambda} = 1$, la EDF se réduit à la NEF et évidemment (1.7) coïncide avec le résultat de Jewell (1974). Il est facile de montrer (voir Jewell (1974)) que ce facteur de crédibilité admet la même formulation que dans Bühlmann (1967, 1969), qui est :

$$Z(t) = \frac{tVar_\pi(E_f(X\,|\theta))}{tVar_\pi(E_f(X\,|\theta)) + E_\pi(Var_f(X\,|\theta))}, \tag{1.8}$$

Exemple 1.2.1 *Le tableau 1 présente quelques vraisemblances naturelles et leurs distributions à priori. L'expression de crédibilité et le facteur de crédibilité correspondant sont également indiqués.*

La méthodologie bayésienne exige la spécification de la distribution à priori. Ainsi, après une procédure d'élicitation par laquelle une loi à priori π est obtenue, toute loi à priori proche de π pourrait également constituer une bonne représentation des croyances à prioris. Conformément à la notion de robustesse bayésienne, nous considérerons que le praticien ne veut pas ou ne peut pas choisir une forme fonctionnelle pour la loi à priori π. L'ignorance totale de la distribution à priori pourrait être résolue en choisissant la classe suivante de distributions à prioris

$$Q_1 = \{Toutes\ les\ distributions\ de\ probabilit\acute{e}\}$$

Il est bien connu (voir Sivaganesan et Berger (1989) et Gómez et al. (2000), entre autres) que dans le cadre d'une méthodologie bayésienne globale, la variation de la prime de Bayes lorsque la distribution à priori entre Q_1 est donnée par

$$[\inf_{\theta\in\mathbb{R}^+} k^{'}(\boldsymbol{\theta}) + k^{'}(\boldsymbol{\theta}), \sup_{\theta\infty\mathbb{R}^+} k^{'}(\boldsymbol{\theta})]$$

. et donc la prime pure de gamma-minimax de regret est

$$RP(\pi_x; Q_1) = \frac{1}{2}[\inf_{\theta\in\mathbb{R}^+} k^{'}(\boldsymbol{\theta}) + k^{'}(\boldsymbol{\theta}), \sup_{\theta\infty\mathbb{R}^+} k^{'}(\boldsymbol{\theta})]$$

où l'on suppose que $\ominus$ est limité à prendre des valeurs dans $(0, +\infty)$.

Probabilité Prior	Postérieur	$P(\pi)$	$P(\pi_x)$	$Z(t)$
$\begin{cases} X \sim Po(\theta) \\ \theta \sim g(a,b) \end{cases}$	$g(a+t, b+t\bar{X})$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a+t\bar{X}}{b+t}$	$\frac{t}{b+t}$
$\begin{cases} X \sim N\beta(r,\theta) \\ \theta \sim \beta(a,b) \end{cases}$	$B(a+tr, b+t\bar{X})$	$\frac{rb}{a-1}$	$\frac{r(b+t\bar{X})}{a+tr-1}$	$\frac{rt}{a+tr-1}$
$\begin{cases} X \sim \beta i\,(m,\theta) \\ \theta \sim \beta(a,b) \end{cases}$	$B(a+t\bar{X}, b+mt-t\bar{X})$	$\frac{ma}{a+b}$	$\frac{m(b+t\bar{X})}{a+b+tm}$	$\frac{mt}{a+b+mt}$
$\begin{cases} X \sim G(\theta,v) \\ \theta \sim G(a,b) \end{cases}$	$g(a+t\bar{X}, b+tv)$	$\frac{va}{b-1}$	$\frac{v(b+t\bar{X})}{b+tv-1}$	$\frac{tv}{b+tv-1}$
$\begin{cases} X \sim N(\theta,\sigma^2) \\ \theta \sim N(a,\tau^2) \end{cases}$	$N(\frac{a\sigma^2+t\bar{X}\tau^2}{\sigma^2+t\tau^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+t\tau^2})$	a	$\frac{a\sigma^2+t\bar{X}\tau^2}{\sigma^2+t\tau^2}$	$\frac{t\tau^2}{\sigma^2+t\tau^2}$

Po : Poisson , G : Gamma , $N\beta$: Negative binomial, βi : Binomial, β : Beta, N : Normal

Tableau 1 : Primes de crédibilité selon le principe de la NEF et de la prime pure

Si la classe Q_1 est utilisée, aucune information supplémentaire n'est nécessaire. Toutefois, si l'intervalle de variation est très important, des informations supplémentaires sont nécessaires. Dans ce cas, nous pourrions acquérir des informations partielles sur l'antériorité (par exemple, le mode) et considérer toutes les distributionsà priori compatibles avec ces informations, en utilisant

$$Q_2 = \{\text{Toutes les distributions avec un mode donné } \theta_0\}.$$

Le domaine de variation de la prime pure de Bayes lorsque la distribution à priori entre dans Q_2 est donné par (voir Sivaganesan (1991) et Gómez et al. (2000)) $[M_1, M_2]$, où $M_1 = \inf_{z\in\mathbb{R}^+} R(z)$ et $M_2 = \sup_{z\in\mathbb{R}^+} R(z)$, avec

$$R(z) = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_0+z} \acute{k}(\theta) f(x\,|\theta,\lambda)\, d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_0+z} f(x\,|\theta,\lambda) d\theta}, \quad z \succ 0 \tag{1.9}$$

$$R(z) = \acute{k}(\theta_0), \quad z = 0 \tag{1.10}$$

La prime pure de gamma-minimax est $RP(\pi_x; Q_2) = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$. Comme on pouvait s'y attendre, d'autres classes de distributions à priori peuvent également être considérées. Par exemple, la classe définie par le quantile (Lavine (1991) et Sivaganesan (1991)) ou la classe donnée par les conditions de moment généralisées Betro et al. (1994) et Goutis (1994) ; entre autres). D'excellentes études sur ce sujet peuvent être trouvées dans Berger (1994) et Ros Insua et Ruggeri (2000).

Évidemment, cette méthodologie ne fournit pas d'expressions simples pour les primes qui sont réécrites comme une formule de crédibilité. À cette fin, nous supposerons dorénavant que l'actuaire peut affirmer que la distribution à priori est un élément de la famille définie par (1.6), mais qu'il ne connaît pas les valeurs simultanées des paramètres x_0 et t_0. En conséquence, les classes suivantes de distributions à priori seront utilisées:

$$\Gamma_1 = \left\{\pi(\theta) : x_0^{(1)} \leq x_0 \leq x_0^{(2)}, t_0 \quad \text{fixé}\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{\pi(\theta) : t_0^{(1)} \leq t_0 \leq t_0^{(2)}, x_0 \quad \text{fixé}\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{\pi(\theta) : \gamma_1 \leq P(\pi) \leq \gamma_2, t_0 \quad \text{fixé}\right\}.$$

On peut remarquer que Γ_3 a la caractéristique d'une spécification de moment, en particulier une condition de moment généralisée, une classe similaire apparaît dans Eichenauer et al. (1988). Si l'on dispose d'une information subjective sur la distribution du paramètre θ, il semble raisonnable de considérer que cette information est valable pour la prime de individuelle, qui est une caractéristique de la distribution à priori. Les primes pures $\mathbf{\Gamma}$-minimax à regret postérieur pour les classes $\Gamma_j, j = 1, 2, 3$ sont données dans le résultat suivant.

Théorème 1.2.1 *Si l'on considère la FED dans (1.5) et la distribution à priori conjuguée (1.6), alors le regret postérieur $\mathbf{\Gamma}$-minimax des primes pures pour $\Gamma_i, i = 1, 2, 3,$ classes sont donnés par :*

$$RP(\pi_x; \Gamma_j) = \frac{X_j + t\lambda\bar{x}}{T_j + t\lambda}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.11}$$

Ou

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(x_0^{(1)} + x_0^{(2)}\right), \quad T_1 = t_0,$$

$$X_2 = x_0,\ T_2 = \frac{t\lambda\left(t_0^{(1)} + t_0^{(2)}\right) + 2t_0^{(1)}t_0^{(2)}}{2t\lambda + t_0^{(1)} + t_0^{(2)}},$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 + \gamma_2\right)t_0, \quad T_3 = t_0,$$

Preuve *La prime de Bayes est donnée par*

$$P(\pi_x) = \frac{x_0 + \lambda t\bar{x}}{t_0 + t\lambda} \tag{1.12}$$

Alors, pour la classe Γ_1, l'infima et le suprema de (1.12) sont donnés par

$$\inf_{\pi\in\Gamma_1} P(\pi_x) = \frac{x_0^{(1)} + \lambda t\bar{x}}{t_0 + t\lambda}, \quad \sup_{\pi\in\Gamma_1} P(\pi_x) = \frac{x_0^{(2)} + \lambda t\bar{x}}{t_0 + t\lambda},$$

tandis que pour la classe Γ_2, elles sont

$$\inf\nolimits_{\pi\in\Gamma_2} P(\pi_x) = \tfrac{x_0+\lambda t\bar{x}}{t_0^{(2)}+t\lambda}, \quad \sup\nolimits_{\pi\in\Gamma_2} P(\pi_x) = \tfrac{x_0+\lambda t\bar{x}}{t_0^{(1)}+t\lambda},$$

Pour la classe Γ_3, la restriction $\gamma_1 \leq P(\pi) \leq \gamma_2$ est équivalente à $\gamma_1 t_0 \leq x_0 \leq t_0\ \gamma_2$, donc l'infima et le suprema sont donnés par

$$\inf_{\pi\in\Gamma_3} P(\pi_x) = \frac{\gamma_1 t_0 + \lambda t\bar{x}}{t_0 + t\lambda}, \quad \sup_{\pi\in\Gamma_1} P(\pi_x) = \frac{t_0\gamma_2 + \lambda t\bar{x}}{t_0 + t\lambda}$$

Enfin, après un peu d'algèbre, il est facile d'obtenir le résultat souhaité en choisissant

$$PR\left(\pi;\Gamma j\right) = \frac{1}{2}\left(\inf_{\pi\in\Gamma_j} P(\pi_x) + \sup_{\pi\in\Gamma j} P(\pi_x)\right), \qquad j = 1, 2, 3.$$

Étant donné que les intervalles fermés sur la droite réelle sont des ensembles connexes, et en utilisant la proposition 3.2 de Ros Insua et al. (1995), nous pouvons conclure que $PR\left(\pi;\Gamma j\right)$, $j = 1, 2, 3$, sont des primes de Bayes sous la loi à priori (1.6) avec les paramètres $(X_j;T_j)$; $j = 1, 2, 3$. On peut remarquer que la loi à priori dans Γ_2 dépend de la taille de l'échantillon, mais pas des observations réelles.

Le résultat suivant montre que l'expression (1.11) peut être écrite sous la forme d'une formule de crédibilité.

Corollaire 1.

Le regret postérieur Γ-minimax des primes pures dans (1.11) peut être réécrit sous la forme d'une formule de crédibilité.

$$Z_i(t)g(\bar{x}) + (1 - Z_i(t))P_i(\pi), \;\; i = 1, 2, 3,$$

où $g(\bar{x}) = \bar{x}$,

$$P_1(\pi) = \frac{x_0^{(1)} + x_0^{(2)}}{2t_0}$$

$$P_2(\pi) = \frac{x_0 \left(2t\lambda + t_0^{(1)} + t_0^{(2)}\right)}{t\lambda(t_0^{(1)} + t_0^{(2)}) + 2t_0^{(1)}t_0^{(2)}},$$
$$P_3(\pi) = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$$

et le facteur de crédibilité est donné par :

$$Z_i(t) = \frac{t\lambda}{t_0 + t\lambda}, \quad \textit{pour } i = 1, 3,$$

$$Z_i(t) = \frac{t\lambda(2t\lambda + t_0^{(1)} + t_0^{(2)})}{2t\lambda\left(t_0^{(1)} + t_0^{(2)}\right) + 2t_0^{(1)}t_0^{(2)} + 2t^2\lambda^2}, \quad \textit{pour } i = 2.$$

La preuve : La preuve est évidente

1.3 Primes de crédibilité sous la technique minimax sous la fonction de perte d'erreur quadratique pondérée

Dans la littérature sur la robustesse bayésienne, peu d'attention a été accordée à la fonction de perte d'erreur quadratique pondérée. Dans le cadre de la méthodologie de Γ−minimax à posteriori, Boratynska (2008) a étudié son effet sur les primes d'assurance dans le modèle de risque collectif. Habituellement, dans l'analyse de robustesse bayésiennel'analyse de robustesse bayésienne, l'objectif principal concerne la moyenne postérieure d'une fonction du paramètre inconnu θ, c'est-à-dire

$$P\int_{\Theta} m(\theta)\pi_x(\theta)d\theta.$$

Cette moyenne postérieure est obtenue avec la fonction de perte de l'erreur quadratique, i.e. $h(x) = 1$.

Si nous utilisons la fonction de perte d'erreur quadratique pondérée avec une fonction de poids arbitraire $h(x)$, en minimisant la perte attendue $E[L(\boldsymbol{\theta}, P)]$, alors les primes de risque et collective sont données par (voir Eichenauer et al. (1988), Heilmann (1989) et Gómez et al. (2006)):

$$P(\theta) = \frac{\int_x xh(x)f(x|\theta)dx}{\int_x h(x)f(x|\theta)dx}$$

$$P(\pi) = \frac{\int_\Theta P(\theta)\, h(P(\theta))\pi(\theta)d\theta}{\int_\Theta h(P(\theta))\pi(\theta)d\theta} \tag{1.13}$$

respectivement. De nouveau, la prime de Bayes, $P(\pi^x)$, est obtenue en remplaçant $\pi(\theta)$ dans (1.13) par $\pi^x(\theta)$.

Il convient de noter que la prime collective peut être exprimée comme suit :

$$P(\pi) = \frac{\int_\Theta P(\theta)\, h(P(\theta))\pi(\theta)d\theta}{\int_\Theta h(P(\theta))\pi(\theta)d\theta} = \int_\Theta P(\theta)\,\pi^*(\theta)d\theta,$$

qui peut être réécrite comme une espérance de $P(\boldsymbol{\theta})$ par rapport à la fonction de densité de probabilité

$$\pi^*(\theta) = \frac{h(P(\theta))\,\pi(\theta)}{\int_\Theta h(P(\theta))\,\pi(\theta)d\theta} \tag{1.14}$$

et la prime de Bayes est également obtenue en remplaçant π et π^* par π_x et π_x^*, respectivement. La prime de Bayes peut alors être considérée comme une espérance à posteriori, c'est-à-dire la prime pure, par rapport à la nouvelle distribution à priori $\pi^*(\theta)$. Par conséquent, le regret postérieur des actions P et le regret postérieur de Γ-minimax sont les mêmes que dans (1.2) et dans (1.3), en remplaçant π par π^*, respectivement. Nous avons maintenant le résultat suivant

Proposition 1. Supposons que le risque$X$ suit une distribution comme dans (1.5) et que $\boldsymbol{\theta}$ suit une distribution à priori comme dans (1.14),où $\boldsymbol{\pi}$ est comme dans (1.6) et que la prime de individuelle est donnée par $P(\boldsymbol{\theta}) = mk'(\boldsymbol{\theta}), m \in \mathbb{R}^+$ Alors, les primes collectives et de Bayes sont données par

$$P\left(\pi^*\right) = m\frac{\alpha m + x_0}{t_0},$$

$$P\left(\pi_x^*\right) = m\frac{\alpha m + x_0 + \lambda t\bar{x}}{\lambda t + t_0}, \tag{1.15}$$

respectivement.

Preuve: Il est facile de voir que

$$\pi^*(\theta) \propto \exp\left\{(x_0 + \alpha m)\theta - t_0 k(\theta)\right\},$$

tandis que la distribution postérieure est donnée par

$$\pi^*(\theta\,|x) \propto \exp\left\{(x_0 + \alpha m + \lambda t\bar{x})\theta - (t_0 + \lambda tk)\,(\theta)\right\}.$$

Maintenant, en suivant un raisonnement similaire à celui exprimé dans Jewell (1974) et Landsman et Makov (1998), nous obtenons le résultat.

On remarque que l'expression (1.15) peut être écrite comme une formule de crédibilité

$$Z(t) = Z(t)g(\bar{x}) + \left[1 - Z(t)\right]P(\pi^*),$$

où $g(x) = m\bar{x}$ et $Z(t) = \frac{t_0}{\lambda t + t_0}$.

Le résultat suivant est une conséquence de la Proposition 1 et est similaire à celui exposé dans le Théorème 1 et par conséquent, la preuve sera omise.

Théorème 2. Sous les hypothèses de la Proposition 1, les primes pures de Γ-minimax à regret postérieur pour Γ_i, $i = 1, 2, 3$, classes sont données par:

$$PR\left(\pi_x^*; \Gamma j\right) = m\frac{\alpha m + X_j + t\lambda\bar{x}}{T_j + t\lambda}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.16}$$

où

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(x_0^{(1)} + x_0^{(2)}\right), \quad T_1 = t_0,$$

$$X_2 = x_0, \quad T_2 = \frac{t\lambda\left(t_0^{(1)} + t_0^{(2)}\right) + 2t_0^{(1)}t_0^{(2)}}{2t\lambda + t_0^{(1)} + t_0^{(2)}},$$

$$X_3 = \frac{1}{2m}\left(\gamma_1 + \gamma_2\right)t_0, \quad T_3 = t_0,$$

Il est facile de prouver que l'expression (1.16) peut être réécrite comme une formule de crédibilité.

1.4 Le principe d'Esscher

Supposons que l'actuaire décide de calculer la prime en utilisant le principe de la prime d'Esscher (voir Gerber et Arbor (1980), Heilmann (1989) et Zehnwirth (1981)). Dans ce cas, $h(x) = e^{\alpha x}$, où le paramètre $\alpha > 0$ est connu comme le chargement de sécurité.

Comme le principe de la prime d'Esscher tend vers le principe de la prime pure lorsque $\alpha \to 0$ (voir Zehnwirth (1981)), les résultats du théorème 2 coïncident avec ceux du théorème 1 lorsque α est choisi proche de 0 et $m = 1$.

Considérons maintenant le cas particulier où le risque X suit une distribution de Poisson avec le paramètre $\boldsymbol{\theta} > 0$ et la distribution à priori est une distribution gamma avec les paramètres $a > 0$ et $b > 0$. Après quelques calculs simples, il est direct de voir que $\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta})$ est une distribution gamma avec des paramètres a et $b - \alpha e^{\alpha}$, $b > \alpha e^{\alpha}$. Ensuite, les primes de individuelle, collective et de Bayes sont données par:

$$P(\theta) = \theta e^{\alpha},$$

$$P\left(\pi^*\right) = \frac{\alpha e^{\alpha}}{b - \alpha e^{\alpha}}, \quad b > \alpha e^{\alpha}, \tag{1.17}$$

$$P\left(\pi_x^*\right) = \frac{\left(\alpha + t\bar{x}\right) e^{\alpha}}{b + t - \alpha e^{\alpha}}, \quad b + t > \alpha e^{\alpha}. \tag{1.18}$$

On remarque que l'expression (1.18) peut être réécrite comme:

$$Z(t)g(\bar{x}) + (1 - Z(t))\, P\left(\pi^*\right),$$

où

$$Z(t) = \frac{t}{b + t - \alpha e^{\alpha}} \tag{1.19}$$

est le facteur de crédibilité,

$$g(\bar{x}) = e^{\alpha}\bar{x} \tag{1.20}$$

Proposition 2. Dans le cas de WBLF et de la loi à priori π, les primes de risque et de collectives sont données par:

$$P_R^{L_2}(\theta) \equiv P_R^{L_2} = \omega \frac{E_{f(x|\theta)}\left[\delta_0\left(X\right) h\left(X\right) \mid \theta\right]}{E_{f(x|\theta)}\left[h\left(X\right) \mid \theta\right]} + (1 - \omega)\, \frac{E_{f(x|\theta)}\left[X h\left(X\right) \mid \theta\right]}{E_{f(x|\theta)}\left[h\left(X\right) \mid \theta\right]}$$

$$P_C^{L_2}(\theta) = \omega\delta_0^* + (1-\omega)\frac{E_\pi\left[P_R^{L_2}h\left(P_R^{L_2}\right)\right]}{E_\pi\left[h\left(P_R^{L_2}\right)\right]}$$

respectivement et et où δ_0^* est un estimateur de la prime de risque $P_R^{L_2}$.

Lorsque $h(x) = 1$ est utilisée, la fonction de perte de l'erreur quadratique pondérée se réduit à la fonction de perte l'erreur quadratique simple.

maintenant on remplace $h(x)$ par $e^{\alpha x}$, on obtient alors

$$P_R^{L_2}(\theta) \equiv P_R^{L_2} = \omega\frac{E_{f(x|\theta)}\left[\delta_0(X)\, e^{\alpha x} \mid \theta\right]}{E_{f(x|\theta)}\left[e^{\alpha x} \mid \theta\right]} + (1-\omega)\frac{E_{f(x|\theta)}\left[X e^{\alpha x} \mid \theta\right]}{E_{f(x|\theta)}\left[e^{\alpha x} \mid \theta\right]}$$

on va essayer d'écrire la formule (1.18) sous WBLF

on a

$$P_B^{L_2} = \omega\delta_0^* + (1-\omega)\left[\frac{t}{\alpha+t-ce^c}e^c\bar{X} + \frac{\beta e^c}{\alpha-ce^c}\frac{\alpha-ce^c}{\alpha+t-ce^c}\right]$$

$$= \omega\delta_0^* + (1-\omega)\left[\frac{t}{\alpha+t-ce^c}e^c\bar{X} + \frac{\beta e^c}{\alpha+t-ce^c}\right]$$

$$= \omega\delta_0^* + (1-\omega)\left[\frac{te^c\bar{X}+\beta e^c}{\alpha+t-ce^c}\right]$$

$$= \omega\delta_0^* + (1-\omega)\left[\frac{(t\bar{X}+\beta)e^c}{\alpha+t-ce^c}\right] \tag{1.18(2)}$$

la formule 1.18(2) représente la formule 1.18 sous WBLF

Remarque 1.4.1 *Cette proprité n'est valable que pour la combinaison de poisson-gamma*

et $P(\boldsymbol{\pi})$ est la prime collective donnée par (1.15). Celle-ci correspond à la prime demandée à un assuré du portefeuille, quelle que soit l'information de l'échantillon le concernant. Par conséquent, la prime de Bayes est une expression de crédibilité avec la même formulation que dans (1.8) comme on peut le prouver facilement.

En suivant le paradigme de la robustesse bayésienne, nous supposerons une classe de distributions à priori au lieu d'une seule, de la manière suivante :

$$\Gamma_1 = \{\pi^*(\theta) = g(a, b-\alpha e^\alpha) : a_1 \leq a \leq a_2, b \ \text{ fixé}\} \tag{1.21}$$

$$\Gamma_2 = \{\pi^*(\theta) = g(a, b - \alpha e^{\alpha}) : b_1 \leq b \leq b_2, a \text{ fixé}\} \tag{1.22}$$

$$\Gamma_3 = \{\pi^*(\theta) = g(a, b - \alpha e^{\alpha}) : \gamma_1 \leq P(\pi) \leq \gamma_2, b \text{ fixé}\} \tag{1.23}$$

Le résultat suivant fournit un guide pour atteindre le regret postérieur Γ action- minimax dans le modèle Poisson-gamma sous le principe de la prime d'Esscher.

Proposition 3. Dans le cadre du couple Poisson-gamma et des classes Γ_i , $i = 1, 2, 2$, les primes d'Esscher de regret-Γ-minimax postérieures sont données par

$$RP(\pi_x; \Gamma_j) = \frac{(\delta_j + t\bar{x})\, e^{\alpha}}{\beta_i + t - \alpha e^{\alpha}}, i = 1, 2, 3, \tag{1.24}$$

Où

$$\delta_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \beta_1 = b,$$

$$\delta_2 = a, \beta_2 = \frac{2b_1b_2 + (b_1 + b_2)(t - \alpha e^{\alpha})}{b_1b_2 + 2(t - \alpha e^{\alpha})},$$

$$\delta_3 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{b - \alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha}}, \beta_3 = b.$$

Preuve: La preuve est une conséquence directe de l'application des résultats du théorème 2.

Là encore, les primes d'Esscher **Γ**-minimax à regret postérieur sous $\boldsymbol{\Gamma}_i, i = 1, 2, 3$, sont des primes de Bayes par rapport aux lois à priori $\Gamma(\delta_i, \beta_i)$, pour $i = 1, 2, 3$, et la loi à priori dans Γ_2 dépend de la taille de l'échantillon mais pas des observations réelles.

Corollaire 2. Le regret postérieur **Γ**-minimax des primes d'Esscher dans (1.24) peut être réécrit comme une formule de crédibilité:

$$Z_i(t)g(\bar{x}) + (1 - Z_i(t))P_i(\pi^*),\ i = 1, 2, 3$$

Où $g(\bar{x}) = e^{\alpha}\bar{x}$,

$$P_1(\pi^*) = \frac{(a_1 + a_2)e^{a}}{2(b - \alpha e^{\alpha})},$$

$$P_2(\pi^*) = \frac{\alpha e^{\alpha}}{\frac{2b_1b_2+(b_1+b_2)(t-\alpha e^{\alpha})}{b_1b_2+2(t-\alpha e^{\alpha})}, \alpha e^{\alpha}},$$

$$P_3(\pi^*) = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2},$$

et les facteurs de crédibilité correspondants sont donnés par:

$$Z_i(t) = \frac{t}{b + t - \alpha e^{\alpha}}, \quad \text{for } i = 1, 3,$$

$$Z_i(t) = \frac{t}{\frac{2b_1b_2+(b_1+b_2)(t-\alpha e^{\alpha})}{b_1b_2+2(t-\alpha e^{\alpha})} + t - \alpha e^{\alpha}}, \quad \text{for } i = 2.$$

Preuve: La preuve est évidente.

1.5 Le principe de la prime de variance

Supposons que le praticien souhaite maintenant calculer la prime en utilisant le principe de la prime de variance $h(x) = x$ (voir Heilmann (1989) et Caldern et al. (2006) ; entre autres). Un effort supplémentaire sera nécessaire pour obtenir un résultat général pour la NEF similaire à celui obtenu avec le principe de la prime d'Esscher. Pour cette raison, nous supposerons que le risque X suit une distribution gamma avec les paramètres $v > 0$ et $\boldsymbol{\theta} > 0$ et que la distribution à priori est une distribution gamma avec les paramètres $a > 0$ et $b > 0$. Après quelques calculs simples, il est facile d'obtenir que $\boldsymbol{\pi} * (\boldsymbol{\theta})$est une distribution gamma avec les paramètres $a - 1, a > 1$ et b. Ensuite, il est facile de prouver que les primes de risque, collective et de Bayes sont données par :

$$P(\theta) = \frac{v + 1}{\theta},$$

$$P(\pi^*) = (v + 1)\frac{b}{a - 2}, \quad a \succ 2, \tag{1.25}$$

$$P(\pi_x^*) = (v + 1)\frac{b + t\bar{x}}{a + tv - 2}, \quad a + tv \succ 2, \tag{1.26}$$

On remarque que l'expression (1.26) peut être réécrite comme:

$$Z(t)g(\bar{x}) + (1 - Z(t))P(\pi^*),$$

où $Z(t) = \frac{tv}{a+tv-2}$ est le facteur de crédibilité, $g(\bar{x}) = \frac{(v+1)\bar{x}}{v}$ et $P(\pi^*)$ est la prime collective donnée par (1.22). Par conséquent, la prime de Bayes est une expression de crédibilité avec la même formulation que dans (1.8).

En supposant que la distribution à priori se situe dans les classes (1.21), (1.22) et (1.23), les primes de variance de $\mathbf{\Gamma}-$minimax à regret postérieur sont obtenues dans le résultat suivant.

Théorème 3. Dans le cadre du modèle gamma-gamma et des classes $\mathbf{\Gamma}_i, i = 1, 2, 3,$ les primes de variance postérieures de $\mathbf{\Gamma}$-minimax sont données par

$$RP(\pi_x; \Gamma_j) = (v+1)\frac{\beta_i + t\bar{x}}{\delta_i + tv - 2}, i = 1, 2, 3, \tag{1.27}$$

Où

$$\delta_1 = \frac{2a_1a_2 + (a_1 + a_2)(tv - 2)}{a_1 + a_2 + 2tv - 4}, \beta_1 = b,$$

$$\delta_2 = a, \beta_2 = \frac{b_1 + b_2}{2},$$

$$\delta_3 = a, \beta_3 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\frac{a-2}{v+1}$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du théorème 1.

Là encore, les primes de variance $\mathbf{\Gamma}$-minimax à regret postérieur pour $\mathbf{\Gamma}i, i = 1, 2, 3,$ sont des primes de Bayes par rapport aux lois à priori $\Gamma(\delta_i, \beta_i)$, pour $i = 1, 2, 3$, et la loi à priori dans $\mathbf{\Gamma}_1$ dépend de la taille de l'échantillon mais pas des observations réelles.

Corollaire 3. Le regret postérieur de $\mathbf{\Gamma}-$minimax des primes de variance dans (1.27) peut être réécrit comme une formule de crédibilité

$$Z_i(t)g(\bar{x}) + (1 - Z_i(t))P_i(\pi^*),\ i = 1, 2, 3,$$

où $g(\bar{x}) = (v+1)\bar{x}/v$,

$$P_1(\pi^*) = \frac{(v+1)b}{\frac{2a_1a_2+(a_1+a_2)(tv-2)}{a_1+a_2+2tv-4} - 2},$$

$$P_2(\pi^*) = \frac{(v+1)(b_1+b_2)}{2(a-2)},$$

$$P_3(\pi^*) = \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2},$$

et les facteurs de crédibilité correspondants sont donnés par :

$$Z_i(t) = \frac{tv}{\frac{2a_1a_2+(a_1+a_2)(tv-2)}{a_1+a_2+2tv-4} + tv - 2}, \text{ for } i = 1,$$

$$Z_i(t) = \frac{tv}{a+tv-2}, \text{ for } i = 2, 3.$$

Preuve: La preuve est évidente.

Remarque 1. Tous les nouveaux facteurs de crédibilité obtenus, lorsque les distributions à priori $\boldsymbol{\pi}$ ou $\boldsymbol{\pi}^*$sont considérées, ont la même forme que (1.8).

CHAPITRE 2 Théorie de la crédibilité imprécise

La distribution des montants des sinistres dépend des caractéristiques de risque de l'assuré, une caractéristique qui ne peut être entièrement connue au cours du processus de souscription. Cependant, il est possible de connaître les caractéristiques de risque sous-jacentes des assurés à partir des pertes observées, et une approche bayésienne est intéressante pour les assureurs pour un certain nombre de raisons. En particulier, cette approche permet à l'assureur d'intégrer de manière transparente toute information préalable disponible sur le paramètre de risque dans l'analyse et de construire des distributions à postériori et prédictives complètes qui quantifient l'incertitude pour l'inférence sur le paramètre de risque et pour les valeurs des sinistres futurs, respectivement. Au- delà de ces avantages fondamentaux, Hong et Martin (2017b) montrent qu'une distribution postérieure bayésienne possède plusieurs propriétés asymptotiques souhaitables, et Hong et Martin (2017a, 2018), Huang et Meng (2020), Li et Liu (2018), et Richardson et Hartman (2018) démontrent qu'un modèle non paramétrique bayésien est efficace pour prédire la mortalité dans l'assurance-vie ainsi que pour prédire les sinistres futurs dans l'assurance-maladie et l'assurance générale. Cependant, malgré ses avantages, une analyse bayésienne complète présente également des inconvénients. Premièrement, l'actuaire est tenu de spécifier la distribution conditionnelle et à priori des sinistres et du paramètre de risque, en d'autres termes, le modèle qu'il propose doit reproduire fidèlement la véritable distribution des sinistres, faute de quoi les déductions et les prédictions pourraient être faussées, voire gravement faussées. Deuxièmement, à moins que le modèle ne soit d'une forme particulièrement simple, les calculs des distributions postérieures et prédictives nécessiteront une chaîne de Markov Monte Carlo (MCMC), qui peut être utilisée, il n'est pas possible de tirer un avantage pratique de la propriété théorique selon laquelle la distribution postérieure bayésienne peut être mise à jour au fur et à mesure que de nouvelles données sont disponibles (voir Hahn et al. (2018) et Hong & Martin (2019) pour certaines formules récursives/approximations).

Bühlmann (1967) a reconnu que, si seule une prévision ponctuelle d'une perte future est requise, au lieu d'une distribution prédictive complète, une approximation très simple et robuste est disponible. En effet, ce que l'on appelle l'estimateur de crédibilité de Bühlmann de la moyenne de la distribution prédictive correspond à l'estimateur linéaire optimal de Bayes et se résume à une simple combinaison convexe de la moyenne préalable de la distribution des pertes et de la moyenne de l'échantillon des pertes observées. Grâce à son attrait intuitif, à sa simplicité de calcul et à ses exigences minimales en matière de modélisation, l'estimateur de crédibilité a été adopté par la communauté actuarielle depuis son origine, et il est encore largement utilisé dans la pratique actuarielle.

Un obstacle non trivial à la mise en pratique de la théorie bayésienne est la spécification d'une distribution préalable, il en va de même pour la théorie de la crédibilité, bien que dans une moindre mesure. Les arguments asymptotiques suggèrent que l'antériorité n'est en grande partie pas pertinente - et même que des antériorités par défaut ou "non informatives" pourraient être utilisées - mais cela ne devrait pas être une réponse entièrement satisfaisante pour l'actuaire dont la motivation pour adopter une approche bayésienne en premier lieu était sa capacité à incorporer des informations préalables. Lorsque l'on n'est pas sûr de l'antériorité, il existe alors, au moins implicitement, une classe C de distributions à prioris plausibles à l'étude, nous appellerons cette classe un ensemble crédal. Il existe plusieurs possibilités de procéder avec $\boldsymbol{\zeta}$:

- Bayes hiérarchique (Berger, 2006, section 3.6 ; Ghosh et al., 2006, section 9.1). Définir $\boldsymbol{\zeta} = \{\Pi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ pour être indexé par un hyperparamètre λ, spécifier un a priori Q pour λ, et utiliser l'a priori marginal $\int \Pi_\lambda Q(d\lambda)$ pour l'analyse bayésienne ultérieure. L'avantage est que le postérieur peut être moins sensible au choix de Q qu'à un choix direct de λ, mais cela ne fait que déplacer la responsabilité de l'actuaire du choix de λ au choix de Q.

- Bayes empirique (Berger, 2006, section 4.5 ; Ghosh et al., 2006, section 9.2). Pour $\boldsymbol{\zeta}$ indexé par un hyper paramètre λ comme ci-dessus, laissons les données aider à la sélection d'un seul a priori de $\boldsymbol{\zeta}$ en laissant λ' être l'estimateur du maximum de vraisemblance marginale de λ, et utilisons ensuite l'a priori $\Pi_{\lambda'}$ pour l'analyse bayésienne ultérieure. L'avantage est qu'un choix de l'antériorité assisté par les données est une solution intéressante. mais c'est ignorer l'incertitude de l'antériorité qui a initialement motivé cette discussion, en exagérant considérablement la précision.

- Bayes robuste (Berger, 2006, section 4.7 ; Ghosh et al., 2006, section 3.8). Plutôt que d'établir une moyenne sur $\boldsymbol{\zeta}$ ou de sélectionner un a priori individuel dans $\boldsymbol{\zeta}$, il existe une troisième option consistant à traiter l'ensemble des données crédibles comme un a priori, c'est-à-dire à construire une distribution a posteriori pour θ basée sur chaque a priori dans $\boldsymbol{\zeta}$. L'avantage est que l'incertitude sur l'a priori est reconnue dans la formulation et que la distribution a posteriori de la distribution a posteriori de la distribution a posteriori de la distribution a posteriori de la distribution a posteriori de la distribution a été établie. Mais l'obtention d'un éventail de réponses à chaque question en particulier.

Les deux premières méthodes sont standards et ont été largement utilisées dans la littérature actuarielle et au-delà. La troisième approche est plus obscure, mais elle a également fait l'objet d'une certaine attention dans la littérature actuarielle, voir la section 2.2. Il convient toutefois de noter que Bayes robuste n'est robuste qu'en ce qui concerne les antécédents de l'ensemble crédal. Pour mettre la théorie en pratique, des hypothèses très spécifiques sur le modèle et/ou l'ensemble de crédos sont nécessaires, de sorte que la solution de Bayes robuste serait toujours sensible aux écarts par rapport à ces hypothèses.

Notre évaluation globale de ce qui est disponible dans la littérature est la suivante. La solution classique de Bayes est optimale, mais impose à l'actuaire le fardeau de spécifier un modèle solide et une loi à priori précise, la solution robuste de Bayes allège en partie ce fardeau en n'exigeant qu'une loi à priori imprécise, mais conserve la sensibilité au modèle et augmente les coûts de calcul, et la théorie de la crédibilité allège presque complètement le fardeau de la spécification du modèle et du calcul, mais conserve la sensibilité à l'à priori. La question posée dans le présent document est de savoir si la robustesse préalable offerte par l'utilisation d'un ensemble crédal pourrait être intégrée à la simplicité et à la robustesse du modèle du cadre de crédibilité de Bühlmann. (La robustesse de la perte n'est pas pertinente dans la théorie de la crédibilité où la perte d'erreur quadratique est la fonction de perte standard). En effet, l'estimateur de crédibilité dépend de la distribution préalable à travers un petit nombre de quantités interprétables, de sorte que la spécification d'un ensemble de crédos est relativement simple. En outre, la simplicité de l'estimateur de crédibilité rend son calcul sur l'ensemble des crédos presque trivial. Par conséquent, étant donné qu'il existe une imprécision inhérente à la formulation des antécédents - une conséquence du fait que l'on ne dispose que d'informations a priori limitées sur le phénomène étudié - nous proposons de reconnaître directement l'imprécision par le biais d'un ensemble de crédos approprié, et de retourner ce que nous appelons l'estimateur de crédibilité imprécis, qui est un intervalle d'estimateurs de crédibilité correspondant à chaque antécédent de l'ensemble de crédos. Nous affirmons que l'estimateur de crédibilité imprécis proposé est doublement robuste en ce sens que ses performances ne sont pas affectées par le choix du modèle ou de l'antériorité de l'actuaire, en grande partie parce que l'actuaire n'est pas tenu de faire de telles spécifications. Par conséquent, ce nouveau estimateur de crédibilité imprécise offre à l'actuaire le meilleur des deux mondes: un estimateur facile à calculer de la moyenne prédictive qui tient compte de manière souple et honnête des informations préalables disponibles et qui est robuste aux biais résultant d'une mauvaise spécification du modèle.

Il est important de souligner que, dans notre contexte, le terme "imprécis" n'est pas synonyme d'"inexact", "non scientifique", etc. Au contraire, la solution que nous proposons est imprécise dans le sens où l'actuaire a soigneusement examiné les informations a priori disponibles et les hypothèses qu'il était prêt à faire, a codé tout cela dans un ensemble crédible bien défini et a préservé cette incertitude tout au long de son analyse.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous donnons un bref aperçu de la théorie de la décision bayésienne, des probabilités imprécises et de Bayes robuste, ainsi que de la formule de crédibilité de Bühlmann. Ensuite, dans la section 3, nous proposons notre estimateur de crédibilité imprécise et montrons plusieurs propriétés souhaitables pour justifier nos affirmations de "double robustesse". Dans la section 4, nous donnons une brève illustration numérique pour montrer comment le niveau d'imprécision peut affecter l'estimateur de crédibilité imprécis par rapport à une solution de Bayes robuste typique. La section 5 décrit certaines extensions de la théorie de la crédibilité imprécise proposée et d'autres perspectives, et la section 6 présente quelques remarques finales .

2.1 Contexte

2.1.1 Théorie de la décision bayésienne

Soit $X^n = (X_1, ..., X_n)$ les données observables sur les pertes, où $X_1, ..., X_n$ sont des données indépendantes et identiquement distribuée (iid) selon une distribution P^*. Dans l'approche bayésienne, l'actuaire commence par proposer un modèle $P = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ où Θ est l'espace des paramètres et suppose que les pertes sont conditionnellement iid étant donné θ, c'est-à-dire

$$(X_1, ..., X_n \mid \theta) \sim P_\theta$$

Bien entendu, il est possible que $P^* \notin P$, ce qui échappe au contrôle de l'actuaire. Ensuite, l'actuaire tient compte de l'incertitude quant à la valeur de θ en lui attribuant une distribution préalable Π. Soit

$$\mu(\theta) = E_\theta(x)$$

et

$$\sigma^2(\theta) = V_\theta(x)$$

sont respectivement la moyenne et la variance de P_θ . Définissons alors

$$m_1(\Pi) = E_\Pi \left\{\mu(\theta)\right\}, \quad m_2(\Pi) = V_\Pi \left\{\mu(\theta)\right\},$$

et

$$v(\Pi) = E_\Pi \left\{(\sigma^2\theta)\right\}$$

où l'espérance et la variance sont prises par rapport à la distribution préalable Π. Dans la littérature sur actuarielle, $\mu(\theta)$,$\sigma^2(\theta)$,$m_1(\Pi)$,$m_2(\Pi)$ et $v(\Pi)$ sont souvent appelés respectivement la moyenne hypothétique, la variance du processus, la prime collective, la variance de la moyenne hypothétique et la moyenne de la variance du processus. Nous supposons que Π est tel que $m_1(\Pi)$,$m_2(\Pi)$ et $v(\Pi)$ existent et sont finis.

L'objectif habituel de l'actuaire est d'obtenir une prévision ponctuelle de la prochaine perte X_{n+1}. Dans la théorie de la décision bayésienne, ce problème est souvent formulé comme un problème d'optimisation: trouver l'estimateur δ qui minimise la perte d'erreur quadratique attendue

$$E\left\{X_{n+1} - \delta(X_n)\right\}^2$$

où l'espérance est prise par rapport à la distribution conjointe de (X^n, X_{n+1}) dans le cadre du modèle susmentionné. Une fois que la fonction optimale δ_{opt} est obtenue et que les données de perte $X^n = x^n$ sont observées, $\delta_{opt}(x^n)$ sera utilisé pour prédire X_{n+1}. Le problème se résume donc à trouver δ_{opt}. nous appliquons la formule de l'espérance itérée et l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles à obtenir

$$E\left\{X_{n+1} - \delta(X_n)\right\}^2 = E(E\left[\left\{X_{n+1} - \delta(X_n)\right\}^2 \mid X^n, \theta\right])$$

$$\geq E(E\left[\left\{X_{n+1} - \delta(X_n)\right\} \mid X^n, \theta\right])^2$$

$$= r(\Pi, \delta)$$

où

$$r(\Pi, \delta) = E\left[\left\{\mu(\theta - \delta(X^n)\right\}^2\right] \tag{2.1}$$

et l'espérance est prise par rapport à la distribution conjointe de (θ, X_n). La quantité $r(\Pi, \delta)$ est appelée le risque de Bayes de l'estimateur δ sous l'a priori Π par rapport à la perte d'erreur quadratique. D'autre part, la théorie de la projection dans l'espace de Hilbert L_2 (par exemple Shiryaev, 1996, section II.11 ou van der Vaart, 1998, section 11.2) implique que

$$r(\Pi, \delta) = E\left[\{\mu(\theta - \delta(X^n)\}^2\right] \geq r(\Pi, \delta) = E\left[\{\mu(\theta - E\{\mu(\theta) \mid X^n\}\}^2\right]$$

où l'égalité est valable si et seulement si $\delta(X^n) = E\{\mu(\theta) \mid X^n\}$. Il s'ensuit que

$$\delta_{opt}(X^n) = E\left\{\mu(\theta)\left|X^n\right.\right\} \tag{2.2}$$

Alors δ_{opt} est la règle de Bayes, l'estimateur qui est optimal dans le sens où il minimise le risque de Bayes par rapport à l'a priori supposé Π.

2.1.2 Robustesse de l'a priori : probabilité imprécise

Un point important est que, dans la plupart des cas, le paramètre inconnu θ est déterminé par le modèle spécifié P. Par conséquent, les questions concernant les prieurs pour θ ne peuvent généralement être envisagées qu'après la spécification du modèle. Pour la présente discussion, nous supposons que les modèles P et Les paramètres correspondants du modèle ont été déterminés, mais nous reviendrons sur ce point subtil dans la section 3 ci-dessous.

Comme nous l'avons vu à la section 1, si l'application en question ne dispose pas d'informations suffisantes pour déterminer complètement un (modèle et) une distribution préalable pour le paramètre de risque, il existe alors un ensemble crédal composé de distributions préalables candidates. Bien entendu, l'ensemble crédal peut prendre toutes sortes de formes. Voici deux cas extrêmes :

- Connaissance complète: $\boldsymbol{\zeta} = \{\Pi\}$;
- Ignorance complète: $\boldsymbol{\zeta} = \{$toutes les distributions de probabilité Π sur $\Theta\}$.

La plupart des applications réelles se situent entre ces deux extrêmes. Par exemple, il n'est pas déraisonnable que l'actuaire puisse spécifier des fourchettes A_j pour quelques fonctions $f_j = 1, ..., J$, de l'antériorité et, dans ce cas, l'ensemble crédal serait donné par

$$\boldsymbol{\zeta} = \{\Pi : f_j(\Pi) \in A_j, j = 1, ..., J\}$$

Ces fonctionnelles peuvent être des moments, des quantiles ou d'autres résumés, dans les cas où θ est multidimensionnel, les résumés peuvent être des moments ou des quantiles associés à une fonction scalaire de θ, par exemple, la moyenne $\mu(\theta)$ sous la distribution P_θ.

Comprendre le rôle joué par l'ensemble crédal, et comment il est lié aux notions de précision et l'imprécision, il est nécessaire de faire une brève incursion dans le domaine des probabilités imprécises. Étant donné un crédal $\boldsymbol{\zeta}$, dont l'élément générique Π est une mesure de probabilité sur Θ, nous définissons les probabilités inférieures et supérieures correspondantes :

$$\Pi(A) = \inf_{\Pi \in \boldsymbol{\zeta}} \Pi(A) \quad \text{et} \quad \bar{\Pi}(A) = \max_{\Pi \in \boldsymbol{\zeta}} \Pi(A), \quad A \subseteq \Theta \tag{2.3}$$

Il devrait être immédiatement clair que l'interprétation et les propriétés mathématiques de Π sont très différentes de celles de l'individu $\Pi \in \boldsymbol{\zeta}$. En effet, il y a beaucoup à dire sur cette définition et les développements ultérieurs. Nous ne mentionnerons ici que ce qui est essentiel pour Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'introduction générale aux probabilités imprécises dans Augustin et al. (2014) et aux travaux plus complets et techniques de Walley (1991) et Troffaes & de Cooman (2014). Une conséquence évidente de (2.3) est que

$$\Pi(A) \leq \bar{\Pi}(A), \; A \subseteq \Theta$$

La notion d'(im)précision peut alors être comprise en examinant l'écart entre les probabilités inférieures et supérieures. Dans le cas extrême de la "connaissance complète", les probabilités inférieures et supérieures sont identiques, et l'écart est donc de 0. Cela signifie qu'il n'y a pas d'incertitude quant à la manière d'attribuer une probabilité à A, on dit donc que l'a priori est précis. Dans le cas extrême de l'"ignorance complète", la probabilité inférieure pour chaque A (sauf Θ) est de 0 et la probabilité supérieure est de 1.

Cela signifie qu'il existe une incertitude quant à la manière d'attribuer une probabilité à A ; on dit alors que l'a priori est imprécis. La plupart des exemples du monde réel se situent quelque part entre ces deux extrêmes, c'est-à-dire que la différence $\bar{\Pi}(A) - \Pi(A)$ est strictement comprise entre 0 et 1 pour certains A.

Lorsqu'un a priori imprécis est spécifié, par le biais d'un ensemble crédal $\boldsymbol{\zeta}$, les mises à jour postérieures sont basées sur la règle de Bayes généralisée (par exemple, Walley, 1991, section 6.4), qui revient à appliquer la mise à jour de Bayes habituelle à chaque $\Pi \in \boldsymbol{\zeta}$, ce qui se traduit par un ensemble crédal postérieur

$$\boldsymbol{\zeta}(X^n) = \{\Pi\,(. \mid X^n) : \Pi \in \boldsymbol{\zeta}\}$$

Étant donné que toutes les distributions contenues dans $\boldsymbol{\zeta}(X^n)$ sont des solutions plausibles, la stratégie la plus naturelle consiste, pour tout résumé postérieur pertinent, à renvoyer l'intervalle de ce résumé sur $\boldsymbol{\zeta}(X^n)$. Par exemple, dans les applications d'assurance, la moyenne a priori-Π a posteriori $\delta_{opt}^{\Pi}(X^n) = E\left[\mu\left(\theta\right) \mid (X^n)\right]$ est un résumé a posteriori pertinent. et l'actuaire pourrait indiquer dans son rapport l'intervalle

$$\left[\inf_{\Pi \in \boldsymbol{\zeta}} \delta_{opt}^{\Pi}(X^n), \sup_{\Pi \in \boldsymbol{\zeta}} \delta_{opt}^{\Pi}(X^n)\right]$$

des valeurs moyennes postérieures plausibles, compte tenu du modèle supposé et des données observées X^n, qui tient honnêtement compte de l'imprécision inhérente à la spécification préalable. Le calcul des extrémités de cet intervalle n'est pas trivial, mais des formules générales et des approximations sont disponibles pour des classes d'antériorité spécifiques ; voir, par exemple, Wasserman (1990), Berger (2006, section 4.7), et Ghosh et al. (2006, section 3.8).

Selon l'application, il peut être nécessaire d'indiquer une seule réponse plutôt qu'une série de réponses. Dans ce cas, une solution de Bayes robuste standard est la règle $\boldsymbol{\Gamma}$-minimax (par exemple Berger, 2006 ; Vidakovic, 2000), où Γ est l'ensemble des antécédents, ce que nous appelons l'ensemble crédal $\boldsymbol{\zeta}$. L'idée est de définir le risque de Bayes,

$r(\Pi, \delta)$, pour un antécédent Π et une règle de décision δ donnés. Lorsque l'a priori est incertain, une solution robuste consiste à utiliser une règle qui est "bonne" pour tous les $\Pi \in \boldsymbol{\zeta}$, de sorte que la proposition $\boldsymbol{\Gamma}-$minimax consiste à trouver $\delta = \delta_{opt}^{\boldsymbol{\zeta}}$ qui minimise le risque maximal, c'est-à-dire,

$$\sup_{\Pi \in \boldsymbol{\zeta}} r(\Pi, \delta_{opt}^{\boldsymbol{\zeta}}) = \inf_{\delta} \sup_{\Pi \in \boldsymbol{\zeta}} r(\Pi, \delta)$$

Comme on peut s'y attendre, la résolution de ce problème d'optimisation est un défi pratique, et les solutions disponibles reposent sur des hypothèses très spécifiques concernant le modèle et les antécédents, dans la littérature actuarielle, voir Young (1998), Gómez-Déniz et al. (2006), et Gómez-Déniz (2009).

2.1.3 Robustesse du modèle : théorie de la crédibilité

Malgré l'optimalité théorique de la règle de Bayes δ_{opt} dans (2.2), il existe plusieurs inconvénients. Tout d'abord, il est rare que la règle de Bayes soit disponible sous une forme simple, en général, la méthode MCMC est nécessaire. serait nécessaire. Deuxièmement, et peut-être plus important encore, δ_{opt} dépend fortement du choix du modèle et de la distribution préalable supposée. S'il s'avère que le modèle est mal spécifié ou que la distribution préalable ne représente pas correctement l'incertitude a priori, la règle de Bayes serait alors affligée par un biais de mauvaise spécification du modèle, ce qui rendrait ces propriétés d'optimalité théoriques virtuellement dénuées de sens. Bühlmann (1967) a proposé une simple approximation linéaire de δ_{opt} qui simultanément ces deux défis

Plus précisément, restreignons l'attention dans (2.1) aux estimateurs linéaires de $\mu(\theta)$, c'est-à-dire,

$$\hat{\delta}(X^n) = a_0 + a_1 X_1 + ... a_n X_n$$

où $a_0, ..., a_n$ sont des nombres réels. Puisque le modèle de Bayes suppose que X^n est conditionnellement iid, le théorème de Finetti (par exemple Kallenberg, 2002, Théorème 11.10) implique que $X_1, ..., X_n$ sont échangeables, c'est-à-dire que les distributions de $(X_1, ..., X_n)$ et $(X_{k1}, ..., X_{kn})$ sont les mêmes pour toute permutation $(k_1, ..., k_n)$ de $(1, ..., n)$.

Il s'ensuit que le $\hat{\delta}$ optimal aura $a_1 = ... = a_n$, de sorte qu'il suffit de considérer un estimateur linéaire de la forme $\hat{\delta}(X^n) = \alpha + \beta \bar{X}_n$ est $\bar{X}_n$ la moyenne de l'échantillon. En substituant $\hat{\delta}(X^n)$ pour $\delta(X^n)$ dans (2.1), en décomposant le risque de Bayes correspondant et en utilisant les formules familières de la moyenne et de la variance pour $\bar{X}_n$ nous obtenons

$$r\left(\Pi, \hat{\delta}\right) = \beta^2 n^{-1} v(\Pi) + (\beta - 1)^2 m_2(\Pi) + \{\alpha + (\beta - 1) m_1(\Pi)\}^2$$

Il découle du calcul de routine que

$$\hat{\delta}_{opt}(X^n) = \alpha_n + \beta_n \bar{X}_n \tag{2.4}$$

où

$$\alpha_n = \alpha_n(\Pi) = \frac{v(\Pi) m_1(\Pi)}{n m_2(\Pi) + v(\Pi)}$$

et

$$\beta_n = \beta_n(\Pi) = \frac{n m_2(\Pi)}{n m_2(\Pi) + v(\Pi)}$$

La formule (2.4) est appelée la formule de crédibilité (Bühlmann) et $\hat{\delta}_{opt}$ est appelé l'estimateur de crédibilité (Bühlmann). L'estimateur de crédibilité présente un certain nombre d'avantages :Premièrement, elle est facile à mettre en œuvre numériquement, aucun calcul sophistiqué de Monte Carlo n'étant nécessaire ; deuxièmement, elle est interprétée de manière agréable comme une moyenne pondérée du risque individuel et du risque de groupe dans le contexte de la tarification par expérience (par exemple, Bühlmann et Gisler, 2005, section 3.1 ; Klugman et al., 2008, section 16.4.4) ; troisièmement, elle ne dépend que de quelques caractéristiques à faible dimension de l'antériorité. de la distribution Π pour le paramètre θ du modèle complet ; et, quatrièmement, lorsque $n \to \infty$, il s'agit d'un estimateur fortement cohérent de la vraie moyenne, μ^* , indépendamment du modèle et de l'a priori (par exemple, Hong et Martin, 2020). Compte tenu des troisième et quatrième propriétés, l'estimateur de crédibilité peut être appliqué sans trop de difficultés. le risque de mauvaise spécification du modèle, du moins dans les cas où la taille de l'échantillon n est raisonnablement grande.

2.2 Estimation imprécise de la crédibilité

Malgré sa flexibilité, l'estimateur de crédibilité dépend toujours, dans une certaine mesure, du modèle posé P et de la distribution préalable Π. En effet, le modèle définit le paramètre inconnu θ dans Θ et, à son tour, les fonctions de moyenne et de variance $\mu(\theta)$ et $\delta^2(\theta)$ sous le modèle P_θ . Ensuite, l'a priori Π, ainsi que le modèle P , déterminent les trois quantités clés,

$$Q(\pi) = \{m_1(\Pi), m_2(\Pi), v(\Pi)\}$$

qui apparaissent dans la formule de crédibilité (2.4). Une observation importante est que les informations préalables requises sont en termes de fonctions de moyenne et de variance, des quantités directement liées à la formule de crédibilité (2.4).observables. Cela simplifie l'obtention d'informations préalables significatives, provenant soit d'experts, soit d'expériences à prioris, sur les données observées. Cependant, trois choses sont claires : premièrement, il y aura des incertitudes quant à l'interprétation des données.

Deuxièmement, la formule de crédibilité exige que ces valeurs soient spécifiées et, troisièmement, la qualité de l'estimation en dépend, dans une certaine mesure, sur ces valeurs spécifiées. Comment le choix de ces valeurs peut-il être effectué selon des principes qui réduisent le fardeau de l'actuaire ?

Étant donné que les quantités de $Q(\Pi)$ sont directement liées aux informations contenues dans les observations, il serait tentant d'utiliser les données observées réelles pour guider le choix de $Q(\Pi)$ dans une application. Cela se résume à un estimateur de crédibilité empirique comme dans, par exemple, Klugman et al. (2008, section 20.4). Il est avantageux de laisser les données contribuer au choix de ces caractéristiques préalables, ce qui donné lieu à une estimation $Q(\Pi)$, mais intégrer directement ces valeurs dans la formule de crédibilité revient à ignorer l'incertitude liée au choix de $\hat{Q}(\Pi)$. Pour illustrer ce point, supposons que l'actuaire A n'est pas certain de $Q(\Pi)$ et qu'il utilise les données pour obtenir un estimateur enfichable $\hat{Q}(\Pi) = (7, 2, 18)$. Supposons maintenant que l'actuaire B dispose de renseignements préalables très détaillés et qu'il est certain du choix $Q(\Pi) = (7, 2, 18)$. Les deux actuaires produiraient exactement le même estimateur de crédibilité malgré des informations et des niveaux de certitude a priori très différents. Le problème n'est pas l'utilisation de données pour guider le choix de $Q(\Pi)$ - voir section

5.1 ci-dessous - mais plutôt le fait que l'utilisation d'un estimateur enfichable revient à fabriquer de la précision/certitude alors qu'il n'y en a pas.

Pour éviter la précision de fabrication de l'estimateur de crédibilité, nous proposons une variante de l'approche bayésienne robuste. Considérons un ensemble de crédibilité déterminé par

un intervalle spécifié pour chacune des trois quantités dans $Q(\Pi)$, c'est-à-dire,

$$\boldsymbol{\zeta} = \{\boldsymbol{\Pi} : \underline{m}_1 \leq m_1(\pi) \leq \bar{m}_1, \underline{m}_2 \leq \mathbf{m}_2(\Pi) \leq \bar{m}_2, \underline{v} \leq v(\Pi) \leq \bar{v}\} \tag{2.5}$$

où $\underline{m}_1$, $\bar{m}_1$,$\underline{m}_2$, $\bar{m}_2$, $\underline{v}$ et $\bar{v}$ sont des nombres positifs choisis à la discrétion de l'actuaire. Étant donné que l'estimateur de crédibilité ne dépend de l'antériorité Π que par le biais de la valeur de $Q(\Pi)$, nous pouvons le formuler de manière équivalente avec un ensemble

$$Q = \{q = (m_1 m_2, v) : \underline{m}_1 \leq m_1 \leq \bar{m}_1, \underline{m}_2 \leq m_2 \leq \bar{m}_2, \underline{v} \leq v \leq \bar{v}\} \tag{2.6}$$

Il est clair que l'incorporation de l'imprécision dans ce contexte de crédibilité est beaucoup plus simple que dans le cadre bayésien robuste. En effet, au lieu de fixer des valeurs spécifiques pour (m_1, m_2, v), l'actuaire considère maintenant une fourchette de ces valeurs. Et le fait de n'avoir à spécifier qu'une fourchette de valeurs pour $(m_1, m_2,\ v)$ réduit le fardeau de l'actuaire qui doit faire un seul "bon" choix. En outre, il est sans doute plus facile d'obtenir des informations sur (m_1, m_2, v) sous la forme d'intervalles : entre les deux déclarations "la prime collective est égale à m_1 " et "la prime collective se situe entre $\underline{m}_1$ et $\bar{m}_1$ ", un expert est beaucoup plus susceptible d'être confiant dans la seconde.

Il est clair que l'ensemble crédible Q donné par (2.5) ou, de manière équivalente, l'ensemble Q de $q = (m_1, m_2, v)$ valeurs dans (2.6), correspond à une gamme d'estimateurs de crédibilité. En effet, pour chaque $q = (m_1, m_2,\ v) \in Q$, il existe un estimateur de crédibilité correspondant :

$$\hat{\delta}^q_{opt}(X^n) = \frac{v m_1}{n m_2 + v} + \frac{n m_2}{n m_2 + v} \bar{X}_n$$

Le résultat suivant montre que cet intervalle est en fait un intervalle dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.1 *Étant donné Q dans (2.6), qui est déterminé par l'ensemble crédible* $\boldsymbol{\zeta}$ *dans (2.5), l'éventail des estimateurs de crédibilité correspondants forme un intervalle fermé et borné dans* $\mathbb{R}$.

Preuve *L'ensemble Q est un hyper-rectangle fermé dans* $\mathbb{R}^3$ *, donc évidemment connecté et compact. Puisque la fonction à valeurs réelles* $q \mapsto \hat{\delta}^q_{opt}(X^n)$ *est continue, l'image correspondante de Q est connectée et compact, donc un intervalle fermé et borné.*

Par la suite, nous appellerons cet intervalle l'estimateur de crédibilité imprécis et le désignerons par

$I(X^n;Q)$ ou $I(X^n;\boldsymbol{\zeta})$, ou simplement I_n . En particulier,

$$I_n = [\min_{q\in} \hat{\delta}^q_{opt}(X^n), \max_{q\in} \hat{\delta}^q_{opt}(X^n)] \tag{2.7}$$

L'estimateur de crédibilité imprécis présente plusieurs caractéristiques intéressantes. Tout d'abord, rappelons que la dépendance de l'estimateur de crédibilité de Bühlmann vis-à-vis du modèle statistique P n'était qu'indirecte, par le biais de la dépendance implicite de l'antériorité vis-à-vis du modèle. Cette dépendance indirecte est éliminée en paramétrisant l'estimateur en termes de quantité générique q, dont les valeurs peuvent être interprétées indépendamment d'un modèle. Cela implique que l'estimateur de crédibilité imprécis ne dépend pas d'un modèle et, par conséquent, n'est pas susceptible d'être biaisé par une mauvaise spécification du modèle. Deuxièmement, en ramenant la fourchette de valeurs q spécifiée par l'actuaire à l'ensemble de crédibilité (2.5), il est clair que $\boldsymbol{\zeta}$ couvre une très large gamme de distributions préalables, et pas seulement celles d'une forme paramétrique particulière, de sorte que (2.7) n'est pas non plus sensible au choix de la forme préalable. Par conséquent, nous concluons que la crédibilité imprécise est doublement robuste en ce sens que ses résultats ne sont pas sensibles au choix du modèle ou de la distribution préalable de l'actuaire - parce que l'actuaire n'est même pas tenu de faire de telles spécifications.

Il convient de souligner à nouveau que, dans ce contexte, "imprécis" n'est pas synonyme d'"inaccoutumé". L'imprécision de l'estimateur de crédibilité imprécis que nous proposons est entièrement déterminée par la quantité d'information dont dispose l'actuaire. En effet, dans le cas extrême d'une certitude totale, l'actuaire peut choisir que Q soit un singleton et l'estimateur de crédibilité original de Bühlmann apparaît. Dans le cas plus réaliste où l'actuaire a un certain degré d'incertitude quant à la spécification préalable, l'estimateur de crédibilité imprécis en (2.7) semble être la généralisation naturelle des développements de Bühlmann. En d'autres termes, notre estimateur de crédibilité imprécis combine les avantages de Bühlmann avec une évaluation honnête de l'incertitude de l'actuaire concernant la spécification à priori.

Il convient également de souligner que l'estimateur de crédibilité imprécis, tout en étant un intervalle, n'est pas un estimateur d'intervalle au sens traditionnel du terme. En d'autres termes, la plage de valeurs dans (2.7) est entièrement déterminée par l'imprécision préalable. Cela n'a rien à voir avec les propriétés de distribution d'échantillonnage d'un estimateur, et on ne peut donc pas s'attendre à ce qu'il ait des garanties de probabilité de couverture fréquentiste comme le ferait un intervalle de confiance. En outre, il n'a rien à voir avec une distribution postérieure, et on ne peut donc pas s'attendre à ce qu'une certaine quantité de probabilité postérieure lui soit attribuée, comme le ferait un intervalle de crédibilité postérieur bayésien. Au lieu de cela, l'estimateur de crédibilité imprécis est simplement l'ensemble de tous les estimateurs de crédibilité correspondant à l'éventail des spécifications préalables que l'actuaire veut ou peut établir.

Ensuite, le calcul de l'estimateur de crédibilité imprécis I_n dans (2.7) est simple, pas plus difficile que celui de l'estimateur de crédibilité de Bühlmann.

Proposition 2.2.2 *Étant donné* $(\underline{m}_1, \bar{m}_1, \underline{m}_2, \bar{m}_2, \underline{v}, \bar{v})$, *les extrémités de l'estimateur de crédibilité imprécis satisfont aux conditions suivantes*

$$\min_{q\in} \hat{\delta}^{q}_{opt}(X^n) = \min\{\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \boldsymbol{\zeta}_3, \boldsymbol{\zeta}_4\}$$

et

$$\max_{q\in} \hat{\delta}^{q}_{opt}(X^n) = \max\{\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \boldsymbol{\zeta}_3, \boldsymbol{\zeta}_4\}$$

Où

$$\boldsymbol{\zeta}_1 = \frac{n}{n + \bar{v}/\underline{m}_2} \bar{X}_n \frac{\bar{v}/\underline{m}_2}{n + \bar{v}/\underline{m}_2} \underline{m}_1,$$

$$\boldsymbol{\zeta}_2 = \frac{n}{n + \bar{v}/\underline{m}_2} \bar{X}_n \frac{\bar{v}/\underline{m}_2}{n + \bar{v}/\underline{m}_2} \bar{m}_1,$$

Table 1. Summary statistics for scaled Norwegian fire claims data, 1990–1991

Year	n	Min	1st Qu	Median	Mean	3rd Qu	Max
1990	628	1.000	1.577	2.300	3.947	3.611	157.074
1991	624	1.000	1.506	2.197	3.641	3.818	99.384

$$\boldsymbol{\zeta}_3 = \frac{n}{n+\underline{\mathrm{v}}/\bar{\mathrm{m}}_2}\bar{X}_n\frac{\underline{\mathrm{v}}/\bar{m}_2}{n+\underline{\mathrm{v}}/\bar{m}_2}\underline{\mathrm{m}}_1,$$

$$\boldsymbol{\zeta}_4 = \frac{n}{n+\underline{\mathrm{v}}/\bar{\mathrm{m}}_2}\bar{X}_n\frac{\underline{\mathrm{v}}/\bar{\mathrm{m}}_2}{n+\underline{\mathrm{v}}/\bar{\mathrm{m}}_2}\bar{m}_1,$$

Preuve *écrire*

$$\delta^q_{opt}(X_n) = \frac{n\bar{X} + (v/m_2)m_1}{n+v/m_2}$$

Le théorème découle alors du fait que $\delta^q_{opt}(X_n)$ est monotone en m_1 et v/m_2 .

Il n'existe pas de règle simple et générale pour choisir l'ensemble Q ou l'ensemble crédal correspondant (2.5) dans la pratique. La raison en est que Q est censé représenter le degré d'incertitude de l'actuaire dans une application particulière, de sorte qu'il est clair que nous ne pouvons pas donner de conseils précis sur la façon dont il devrait choisir Q. On peut utiliser les données réelles pour guider ce choix, et nous faisons quelques remarques à ce sujet. Ici, cependant, tout ce que nous pouvons dire, c'est que, de toute évidence, la taille de Q est directement liée à la longueur de I_n , de sorte que l'actuaire a intérêt à choisir Q aussi petit qu'il peut le justifier.

Proposition 2.2.3 *Supposons que les variables de perte $X_1, X_2, ...$ soient iid de la distribution P^*, avec une moyenne μ^* . Soit $I_n = I(X^n; Q)$ est l'estimateur de crédibilité imprécis de (2.7). Dans ce cas*

$$\max\{|\max I_n - \mu^*|\,, |\min I_n - \mu^*|\} = O(n^{-\frac{1}{2}}) \text{ en probabilité } P^* \text{ lorsque } n \to \infty$$

Preuve *Pour $\boldsymbol{\zeta}_k, k = 1, 2, 3, 4,$ tels que définis dans la proposition 2, il est facile* de vérifier que,

$$\zeta_k - \mu^* = \bar{X}_n - \mu^* + O(n^{-1})$$

en probabilité $P^*, k = 1, 2, 3, 4$

L'inégalité de Tchebychev implique que $\bar{X}_n - \mu^*$ est $O(n^{-\frac{1}{2}})$ en probabilité P^*, donc la même chose vaut pour chaque $\zeta_k - \mu^*$. Comme les opérateurs max et min sont continus, on obtient

min

$$\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\} - \mu^* = O(n^{-\frac{1}{2}}) \text{ et } \max\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\} - \mu^* = O(n^{-\frac{1}{2}})$$

en probabilité P^*par le théorème de la cartographie continue. L'affirmation s'ensuit puisque les min et max ci-dessus correspondent aux extrémités de I_n.

Par conséquent, l'estimateur de crédibilité imprécis présente tous les avantages de la proposition initiale de Bühlmann, à savoir l'insensibilité aux spécifications du modèle et des antécédents et la cohérence asymptotique rapide, , tout en intégrant une évaluation honnête de l'incertitude préalable de l'actuaire.

2.3 Exemple

Considérons les données norvégiennes sur les sinistres d'incendie qui ont été récemment analysées par plusieurs auteurs, notamment Brazauskas & Kleefeld (2016), Mdziniso & Cooray (2018), Hong & Martin (2018, 2020) et Syring et al. (2019). Les ensembles de données de 1990 et 1991 contiennent $n = 628$ et $n = 624$ entrées, respectivement, et sont disponibles à l'adresse http://lstat.kuleuven.be/Wiley/ ou dans le paquet R CASdatasets. Nous avons d'abord redimensionné les ensembles de données en divisant chaque entrée par 500. Le tableau 1 présente les statistiques récapitulatives pour les deux ensembles de données mis à l'échelle.

La situation que nous avons à l'esprit ici est celle où les données de 1990 fournissent des "informations préalables" que nous utilisons pour aider à construire un ensemble crédible, qui sera ensuite converti en une estimation de crédibilité imprécise basée sur les données de 1991. Cela nécessite la spécification de bornes sur les trois hyperparamètres antérieurs $(m1, m2, v)$, ce que nous faisons comme suit. Il convient de souligner que l'évaluation de l'imprécision est subjective (voir section 5.1) et doit être examinée au cas par cas. Ce que nous présentons ci-dessous est une illustration des types de considérations à prendre en compte, plutôt qu'une recommandation quant à l'ensemble crédal à utiliser.

- L'interprétation de m_1 étant la plus simple des trois, afin de garder nos comparaisons relativement simples et brèves, nous avons choisi d'utiliser le jeu de crédos le plus simple des trois comparaisons relativement simples et brèves, nous suggérons ici de définir $[\underline{m}_1, \bar{m}_1]$ comme l'intervalle de confiance standard de 95 % basé sur une approximation normale intervalle de confiance standard à 95% basé sur une approximation normale de la distribution de

moyenne de l'échantillon qui, dans ce cas, est $[\underline{m}_1, \bar{m}_1] = [3,28,4,61]$. Étant donné que la taille de l'échantillon est relativement importante, une approximation fondée sur le théorème de la limite centrale devrait être utilisée une approximation par le théorème central limite devrait être raisonnable, mais nous insistons à nouveau sur le fait que nous ne recommandons pas aux praticiens de faire ce choix.

- Étant donné que m_2 est plus difficile à interpréter que m_1, nous faisons preuve de plus de prudence dans la fixation de la limite. Il n'y a aucune raison de penser que la variance de la moyenne du processus serait particulièrement grande, nous procédons donc à la fixation d'une estimation $\hat{m}^2$ égale au troisième quartile des données de 1990, qui est de $3,61$. Ensuite nous fixons les limites comme $\underline{m}_2 = \phi^{-1}\hat{m}^2$ et $\bar{m}_2 = \phi\hat{m}^2$, respectivement, où $\varphi > 1$ est un facteur d'imprécision décrit plus en détail ci-dessous.

- Comme pour m_2, nous procédons en prenant une estimation $\hat{v}$ égale à la variance de l'échantillon des données de 1990, qui est de 72,5. Ensuite, les limites de v sont fixées à $\underline{v} = \phi^{-1}\hat{v}$ et $\bar{v} = \phi\hat{v}$, respectivement, où $\phi \succ 1$ est un facteur d'imprécision, qui n'est pas nécessairement le même que celui de m_2 introduit ci-dessus.

On considère trois niveaux qui correspondent aux valeurs de du facteur ϕ:

Niveau 1. $\phi = 2$

Niveau 2. $\phi = 3$

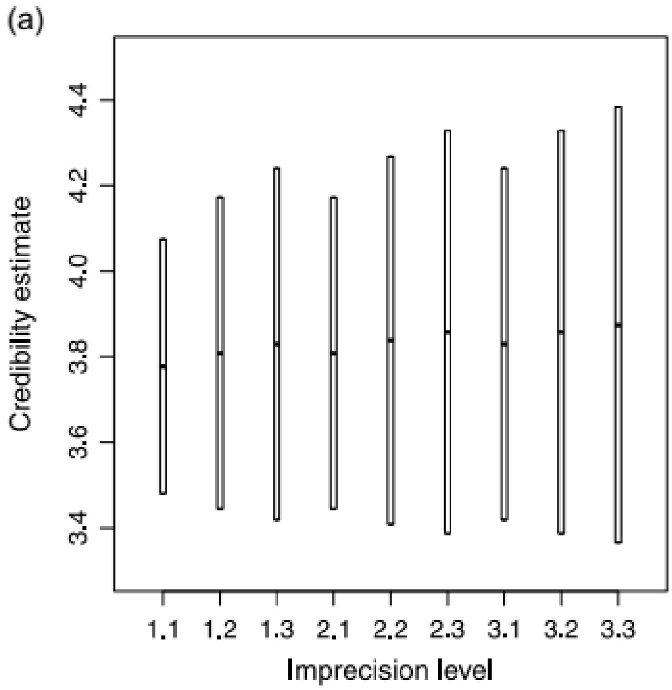
Niveau 3. $\phi = 4$.

Étant donné que nous avons deux facteurs d'imprécision de ce type dans notre construction d'ensemble crédal - un pour chacune des bornes m_2 et v - chacun avec trois niveaux, il y a neuf combinaisons totales de niveaux d'imprécision. Dans les figures, nous désignons les différentes combinaisons par A.B, ce qui signifie que m_2 et v ont des niveaux d'imprécision A et B, respectivement. Notre objectif est d'étudier les effets des niveaux d'imprécision et de la taille de l'échantillon sur l'estimateur de crédibilité imprécis.

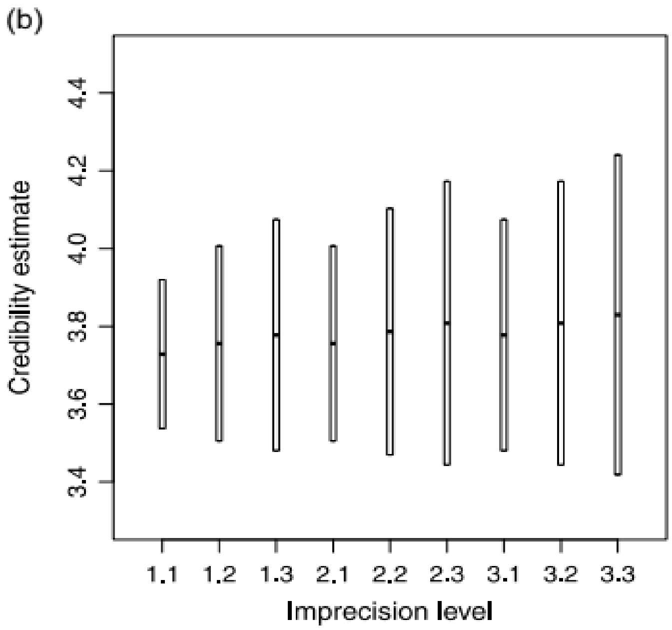
Les graphiques de la figure 1 montrent l'estimateur de crédibilité imprécis appliqué aux données qui ont la même moyenne d'échantillon (3,64) que les données sur les incendies en Norvège en

1990, mais avec des tailles d'échantillon différentes : $n \in \{100, 200, 400\}$. La barre verticale représente l'intervalle I_n lui-même. Comme prévu, les échantillons de petite taille et des niveaux d'imprécision plus élevés correspondent à des intervalles plus grands. Bien que les intervalles de chaque ne varient pas beaucoup avec le niveau d'imprécision, en particulier lorsque la taille de l'échantillon est relativement importante, elles varient et l'étendue de cette variabilité est contrôlée par le choix d'un facteur d'imprécision ϕ par le praticien. En fonction de l'application, même notre facteur d'imprécision le plus conservateur à savoir 3,3, pourrait être trop libéral, auquel cas des bornes encore plus larges sur les hyperparamètres (m_1, m_2, v) pourrait être justifiée, ce qui conduirait à des estimateurs de crédibilité encore plus imprécis.

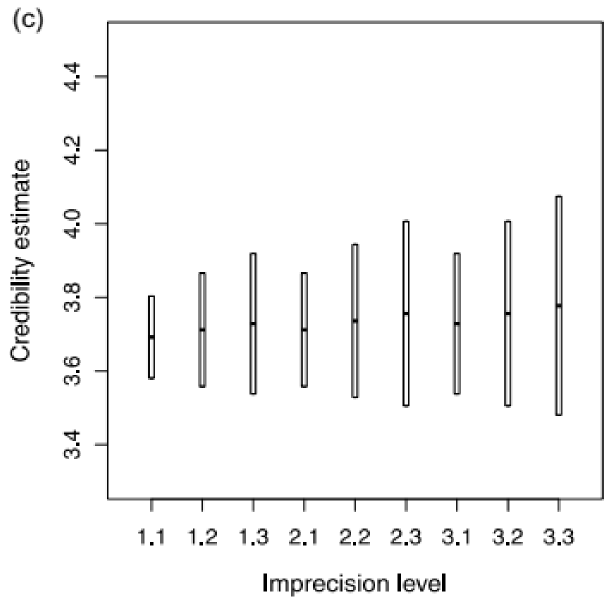
À titre de comparaison, considérons l'une des solutions de Bayes robustes présentées dans Gómez-Déniz (2009), qui suppose un modèle de famille exponentielle avec un a priori conjugué. Bien sûr, comme ces données semblent avoir été échantillonnées à partir d'une distribution à queue lourde, un modèle de famille exponentielle est discutable. La raison pour laquelle nous avons introduit le modèle de la famille exponentielle est de faire valoir un point différent, qui est indépendant de la question de savoir si ce modèle est approprié ou non, mais il convient de souligner qu'il n'existe pas de "modèles standard" qui conviendraient à ces données, de sorte que la méthode proposée présente l'avantage de ne pas exiger du praticien qu'il spécifie un modèle du tout. Pour revenir à notre point principal avec le modèle de la famille exponentielle, la méthode robuste de Bayes


(a)
Credibility estimate
3.4
3.6
3.8
4.0
4.2
4.4
1.1
1.2
1.3
2.1
2.2
2.3
3.1
3.2
3.3
Imprecision level

$n = 100$


(b)
Credibility estimate
3.4
3.6
3.8
4.0
4.2
4.4
1.1
1.2
1.3
2.1
2.2
2.3
3.1
3.2
3.3
Imprecision level

$n = 200$



$n = 400$

Figure 1. Graphiques de l'estimateur de crédibilité imprécis In basé sur la moyenne de l'échantillon des données sur les incendies en Norvège en 1991, avec une taille d'échantillon n variable et des niveaux d'imprécision variables dans la construction de l'ensemble de crédibilité correspondant aux valeurs plausibles de (m_1, m_2, v).

Les solutions dérivées de Gómez-Déniz (2009), Théorème 1, renvoient toutes des valeurs uniques, toutes très proches de la moyenne de l'échantillon. Par conséquent, il n'y a aucun signe d'imprécision préalable dans la réponse renvoyée par la procédure de Bayes robuste, c'est-à-dire que la réponse est largement insensible au choix de l'ensemble crédal, en particulier lorsque n est grand.

2.4 Remarques

2.4.1 Choix par défaut de l'ensemble crédal ?

Comme indiqué ci-dessus, l'ensemble crédal de (2.5) ou, de manière équivalente, l'ensemble Q de (2.6) représente ce que l'actuaire est prêt à assumer sur la base des informations préalables disponibles dans une application donnée. Nous ne pouvons donc pas donner de conseils fermes sur la manière de faire ce choix. Tout ce que nous pouvons faire, c'est formuler quelques remarques sur la manière dont les données peuvent être utilisées pour guider ce choix. Nous demandons instamment au lecteur de garder à l'esprit que nous ne recommandons pas à l'actuaire de choisir Q de cette façon.

Conformément à la théorie de la crédibilité empirique non paramétrique ou semi-paramétrique désormais bien développée (Bühlmann et Gisler, 2005, section 4.9 ; Klugman et al., 2008, section 20.4), des estimations des trois quantités $m1, m2$, et v de la formule de crédibilité sont disponibles. Comme il s'agit de fonctions relativement simples des données actuelles et peut-être historiques, une stratégie naïve consisterait à utiliser les distributions d'échantillonnage de ces fonctions, peut-être en vertu de certaines hypothèses simplificatrices, pour construire des " intervalles de confiance " approximatifs pour $m1, m2$ et v. Ces intervalles de confiance peuvent ne pas être particulièrement fiables, puisqu'ils ont été calculés sur la base de certaines hypothèses simplificatrices. Par conséquent, l'actuaire pourrait envisager d'étirer ces intervalles dans une certaine mesure avant de les utiliser pour définir la fourchette des trois quantités de Q.

De même, supposons que nous disposions d'un modèle paramétrique P_θ et d'une classe d'antécédents Π_λ indexés par l'hyperparamètre λ. En principe, il serait possible d'évaluer la vraisemblance marginale pour λ, compte tenu des données X^n, et de produire un estimateur du maximum de vraisemblance marginale $\hat{\lambda}$. Ensuite, $(m1, m2, v)\,(\Pi_\lambda)$ sont des fonctions de λ, de sorte qu'il est possible d'orienter le choix de Q en trouvant un ensemble de valeurs plausibles pour λ. Comme ci-dessus, on pourrait utiliser la normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance pour construire une "région de confiance" approximative pour λ qui, à son tour, pourrait être utilisée pour guider le choix de Q.

2.4.2 Extension aux cas d'exposition à des risques non constants

Dans ce qui précède, notre discussion s'inscrit dans le cadre de l'estimation de crédibilité de Bühlmann, où l'exposition au risque est supposée égale à un. Dans certaines applications réelles, cette hypothèse peut ne pas être appropriée. Par exemple, si un assuré souscrit une police d'assurance au milieu de l'année, ses prestations seront effectives à partir de la date de souscription jusqu'à la fin de l'année et l'exposition au risque correspondante ne sera pas égale à un ; si certains assurés abandonnent une assurance de groupe au cours d'une année et que d'autres la rejoignent l'année suivante, l'exposition au risque pour cette assurance de groupe variera d'une année à l'autre. Pour tenir compte de ces cas, Bühlmann & Straub (1970) proposent une généralisation de l'estimateur de crédibilité de Bühlmann. Cette généralisation suppose que les pertes $X_1, ..., X_n$ sont identiques, étant donné θ, avec une prime individiuelle $\mu(\theta) = E_\theta(X)$ et la variante de processus $k_i^{-1} V_\theta(X)$, où k_i est une constante proportionnelle à la taille du risque, c'est-à-dire qu'elle représente l'exposition au risque pour X_i . Laissons $k_1, ..., k_n$ être l'exposition au risque pour $X_1, ..., X_n$, respectivement, et $k = k_1, ..., k_n$ est l'exposition totale au risque. Comme dans l'estimation de la crédibilité de $m_1(\Pi) = E_\Pi\{\mu(\theta)\}$,

$m_2(\Pi) = V_\Pi\{\mu(\theta)\}$, et $v(\Pi) = E_\Pi\{\sigma^2(\theta)\}$ mais prenez $\bar{X}_n = k^{-1} \sum_{i=1}^{n} k_i X_{i.}$ L'estimateur de crédibilité de Bühlmann-Straub est alors donné par

$$\hat{\mu}_{BS}^c = \frac{v(\Pi)m_1(\Pi)}{km_2(\Pi) + v(\Pi)} + \frac{km_2(\Pi)}{km_2(\Pi) + v(\Pi)} \bar{X}_n \tag{2.8}$$

Si X_i est interprété comme la perte moyenne pour un groupe de k_i membres au cours de la $i^{ème}$ année, alors la prime de crédibilité à facturer à chaque membre du groupe pour la

$(n+1)^{ème}$ année est $\hat{\mu}_{BS}^c$, tandis que la prime totale à facturer à ce groupe de k_{n+1} membres devrait être de $k_n + \hat{\mu}_{BS}^c$.

L'estimateur de crédibilité imprécis peut également être construit pour l'estimateur de crédibilité de Bühlmann-Straub. La procédure est entièrement similaire à celle de l'estimateur de crédibilité de Bühlmann. Après avoir choisi un ensemble de crédibilité Q sur la base de ses connaissances préalables, l'actuaire obtient l'estimateur de crédibilité imprécis correspondant $I_{BS}(X_n, \zeta)$ par le biais de (2.8) comme précédemment. Il est également facile de voir que les propositions s'étendent toutes de manière directe à l'estimateur de crédibilité imprécis de Bühlmann-Straub .

Conclusion et perspectives

L'incertitude préalable et la mauvaise spécification du modèle sont deux préoccupations majeures des actuaires lorsqu'ils souhaitent utiliser l'estimateur de crédibilité de Bühlmann. Dans ce mémoire, nous avons proposé une méthode d'estimation de la crédibilité en représentant l'incertitude préalable en termes d'un ensemble de crédos. La méthode proposée conduit à un intervalle d'estimateurs de crédibilité, que nous appelons l'estimateur de crédibilité imprécis, qui préserve les principales caractéristiques de l'estimateur de crédibilité classique, tout en étant honnête quant à l'imprécision préalable inhérente. Cela rend notre méthode doublement robuste dans le sens où elle est robuste à la fois à la missepcification du modèle et à l'incertitude préalable. Notre méthode s'étend également au modèle de crédibilité de Bühlmann-Straub.

Une fois encore, nous tenons à souligner que l'imprécision n'est pas synonyme d'"inexactitude" dans le présent contexte. Le plus souvent, les informations préalables disponibles ne sont pas suffisamment détaillées pour identifier exactement une distribution préalable à utiliser dans une analyse bayésienne, de sorte que cette imprécision est inhérente et doit être prise en compte. En ne travaillant pas avec l'ensemble des distributions préalables compatibles avec les renseignements disponibles, que ce soit par souci de simplicité ou pour toute autre raison, l'actuaire émet des hypothèses potentiellement injustifiables qui peuvent fausser ses estimations et ses prévisions. En travaillant avec l'estimateur de crédibilité imprécis proposé, l'actuaire peut éviter ces biais potentiels.

Une vue d'ensemble de ce qui est proposé ici suggère quelques recherches futures potentiellement intéressantes. Le cadre original de Bayes part d'un modèle statistique et d'une distribution préalable entièrement spécifiés, produisant des procédures de décision optimales par rapport au modèle supposé, etc. Bühlmann, s'appuyant sur les premiers travaux de Whitney (1918), a reconnu qu'il était difficile de spécifier un modèle statistique complet et que de telles spécifications n'étaient pas nécessaires pour le problème d'estimation en question, de sorte qu'il a assoupli la formulation entièrement bayésienne. Plus tard, d'autres chercheurs ont reconnu la difficulté de spécifier une distribution préalable et ont développé un modèle bayésien robuste correspondant qui conduit à des procédures de décision optimales de type $\mathbf{\Gamma}-$minimax. Ici, nous avons combiné ces deux dernières modifications pratiques du cadre bayésien original pour fournir un nouvel outil qui est à la fois efficace sur le plan statistique et tient compte des renseignements préalables disponibles, sans exiger de l'actuaire qu'il précise un modèle statistique ou qu'il assume une forme particulière de renseignements préalables. Pour généraliser ce "meilleur des deux mondes" au-delà de ce contexte relativement simple d'estimation de la crédibilité, la formulation en termes de postériorité imprécise de Gibbs, telle que décrite à la section 5.3 ci-dessus, semble particulièrement prometteuse et mérite d'être étudiée plus avant.

Bibliographie

[1] Augustin, T., Coolen, F., de Cooman, G. & Troffaes, M. (Eds.) (2014). Introduction to Imprecise Probabilities. John Wiley & Sons, Chichester.

[2] Bailey, A. (1945). "A generalized theory of credibility." Proceedings of the Casualty Actuarial Society, XXXII, 13: 13–20. 224, 226

[3] Berger, J. (1994). "An overview of robust Bayesian analysis (with discussion)." Test, 3: 5–125. 225, 228

[4] Berger, J.O. (2006). Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2nd edition. Springer, New York.

[5] Betrò, B., Ruggeri, F. and M¸ezarski, M. (1994). "Robust Bayesian analysis under gen eralized moments conditions." Journal of Statistical Planning and Inference, 41: 257– 266. 228

[6] Bhattachary, I. & Martin, R. (2020). Gibbs posterior inference on multivariate quantiles, arXiv:2002.01052.

[7] Bissiri, P., Holmes, C. & Walker, S. (2016). A general framework for updating belief distribution. Journal of Royal Statistical Society, Series B–Statistical Methodology, 78(5), 1103–1130.

[8] Boratyńska, A. (2008). "Posterior regret Γ-minimax estimation of insurance premium in collective risk model." Astin Bulletin, 38, 1: 277–291. 230

[9] Bühlmann, H. (1967). Experience rating and credibility. ASTIN Bulletin, 4, 199–207.

[10] Bühlmann, H. (1969). "Experience rating and credibility." Astin Bulletin, 5: 157–165.

[11] Bühlmann, H. & Gisler, A. (2005). A Course in Credibility Theory and its Applications. Springer, New York

[12] Bühlmann, H. & Straub, E. (1970). Glaubwürdigkeit für Schadensätze. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungs-Mathematiker, 70, 111–133.

[13] Caldern, E.; G´omez, E. and Cabrera, I. (2006). "Bayesian local robustness under weighted squared-error loss function incorporating unimodality." Statistics & Proba bility Letters, 77: 69–74

[14] Eichenauer, J.; Lehn, J. and Rettig, S. (1988). "A gamma-minimax result in credibility theory." Insurance: Mathematics and Economics, 7: 49–57. 224, 225, 226, 229, 231, 240

[15] Gerber, H.U. and Arbor, A. (1980). "Credibility for Esscher premiums." Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicher ungsmathematiker, Heft 3: 307–312. 224, 232

[16] Ghosh, J.K., Delampady, M. & Samanta, T. (2006). An Introduction to Bayesian Analysis. Springer, New York.

[17] Gómez, E., Hernndez, A. and Vzquez, F. (2000). "Robust bayesian premium principles in actuarial science." Journal of the Royal Statistical Society D, 49: 241–252. 227, 228

[18] Gómez-Déniz, E., Pérez-Sánchez, J.M. & Vázquez-Polo, J.F. (2006). On the use of posterior regret Γ-minimax actions to obtain credibility premiums. Insurance Mathematics and Economics, 39, 115–121.

[19] Goutis, C. (1994). "Ranges of posterior measures for some classes of priors with specified moments." International Statistical Review, 62, 2: 245–256. 228

[20] Grünwald, P.D. (2012). The safe Bayesian: Learning the learning rate via the mixability gap. In Proceedings of the 23rd International Conference on Algorithmic Learning Theory (pp. 169–183).

[21] Hahn, P.R., Martin, R. & Walker, S.G. (2018). On recursive Bayesian predictive distributions. Journal of the American Statistical Association, 113(523), 1085–1093.

[22] Heilmann, W. (1989). "Decision theoretic foundations of credibility theory." Insurance: Mathematics and Economics, 8: 77–95. 224, 225, 226, 231, 232, 234

[23] Hong, L. & Martin, R. (2017a). A flexible Bayesian nonparametrics model for predicting future insurance claims. North American Actuarial Journal, 21, 228–241.

[24] Hong, L. & Martin, R. (2017b). A review of Bayesian asymptotics in general insurance applications. European Actuarial Journal, 7, 231–255.

[25] Hong, L. & Martin, R. (2018). Dirichlet process mixture models for insurance loss data. Scandinavian Actuarial Journal, 6, 545–554.

[26] Hong, L. & Martin, R. (2019). Real-time Bayesian nonparametric prediction of solvency risk. Annals of Actuarial Science, 13, 67–79.

[27] Hong, L. & Martin, R. (2020). Model misspecification, Bayesian versus credibility estimation, and Gibbs posteriors. Scandinavian Actuarial Journal, 7, 634–649.

[28] Huang,Y. & Meng, S. W.(2020). A Bayesian nonparametric model and its application in insurance loss prediction. Insurance: Mathematics and Economics, 93, 84–94.

[29] Jewell, W. (1974). "Credible means are exact Bayesian for exponential families." Astin Bulletin, 8, 1: 77–90. 224, 226, 227, 232

[30] Jorgensen, B. (1986). "Some properties of exponential dispersion models." Scandinavian Journal of Statistics, 13: 187–198. 226

[31] Kallenberg, O. (2002). Foundations of Modern Probability, 2nd edition. Springer, New York.

[32] Klugman, S.A., Panjer, H.H. & Willmot, G.E. (2008). Loss Models: from Data to Decisions, 3rd edition. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

[33] Landsman, Z. and Makov. U.E. (1998). "Exponential dispersion models and credibility." Scandinavian Actuarial Journal, 1: 89–96. 224, 226, 227, 232

[34] Landsman, Z. and Makov. U.E. (2000). "On credibility evaluation and the tail area of the exponential dispersion family." Insurance: Mathematics and Economics, 27: 277–283. 224, 226, 227

[35] Lavine, M. (1991). "Sensitivity in Bayesian statistics; the prior and the likelihood." Journal of the American Statistical Association, 86: 396–399. 228

[36] Lemaire, J., 1979. "How to define a Bonus–Malus system with an exponential utility function." Astin Bulletin, 10: 274–282. 236

[37] Li, H. and Lu, Y. (2018). A Bayesian non-parametric model for small population mortality. Scandinavian Actuarial Journal, 7, 605–628.

[38] Mayerson, A.L. (1964). "A Bayesian view of credibility." Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 51: 85–104. 226

[39] Mdziniso, N.C. & Cooray, K. (2018). Odd Pareto families of distributions for modeling loss payment data. Scandinavian Actuarial Journal, 1, 42–63.

[40] Richardson, R. & Hartman, B. (2018). Bayesian nonparametric regression models for modeling and predicting healthcare claims. Insurance: Mathematics and Economics, 83, 1–8.

[41] Ríos Insua, D.; Ruggeri, F. and Vidakovic, B. (1995). "Some results on posterior regret Γ-minimax estimation." Statistics & Decisions, 13: 315–331. 224, 225, 226, 230

[42] Ros Insua D. and Ruggeri, F. (2000). Robust Bayesian Analysis. Lecture Notes in Statistics. Springer–New York. 225, 22

[43] Scollnik, D. P. M. (1995). "The Bayesian analysis of generalized Poisson models for claim frequency data utilising Markov chain Monte Carlo methods." Actuarial Research Clearing House, 1: 339–356. 236

[44] Shafer, G. (1976). A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[45] Shiryaev, A.N. (1996). Probability, 2nd edition. Springer, New York.

[46] Sivaganesan, S. (1991). "Sensitivity of some posterior summaries when the prior is unimodal with specified quantiles." The Canadian Journal of Statistics, 19, 1: 57–65. 228

[47] Sivaganesan, S. and Berger, O. (1989). "Ranges of posterior measures for priors with unimodal contaminations." The Annals of Statistics, 17, 2: 868–889. 227

[48] Syring, N., Hong, L. & Martin, R. (2019). Gibbs posterior inference on value-at-risk. Scandinavian Actuarial Journal, 2019(7), 548–557.

[49] Syring, N. & Martin, R. (2017). Gibbs posterior inference on the minimum clinically important difference. Journal of Statistical Planning and Inference, 187, 67–77.

[50] Syring, N. & Martin, R. (2019). Calibrating general posterior credible regions. Biometrika, 106(2), 479–486.

[51] Syring, N. & Martin, R. (2020). Robust and rate-optimal Gibbs posterior inference on the boundary of a noisy image. The Annals of Statistics, 48(3), 1498–1513.

[52] Troffaes, M. & de Cooman, G. (2014). Lower Previsions. John Wiley & Sons, Chichester.

[53] van der Vaart, A.W. (1998). Asymptotic Statistics. Cambridge University Press, New York.

[54] Vidakovic, B. (2000). Γ-minimax: A paradigm for conservative robust Bayesians. In D. Ríos Insua & F. Ruggeri (Eds.), Robust Bayesian Analysis (pp. 241–259). Springer, New York.

[55] Walley, P. (1991). Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities. Chapman & Hall, London.

[56] Wasserman, L.A. (1990), Prior envelopes based on belief functions. Annals of Statistics, 18, 454–464.

[57] Whitney, A. (1918). The theory of experience rating. Proceedings of Casualty Actuarial Society, 4, 274–292

[58] Young, V.R. (1998). Robust Bayesian credibility using semiparametric models. ASTIN Bulletin, 28(2), 187–203.

[59] Zehnwirth, B. (1981). "The Esscher premium principle: a criticism." Astin Bulletin, 12: 77–78. 232, 239

[60] Zen, M.M. and DasGupta, A. (1993). "Estimating a binomial parameter: is robust Bayes real Bayes?" Statistics & Decisions, 11: 37–60. 224, 225, 226, 239