الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY

جامعة باجي مختار – عنابـــــــــــة

Faculté : Science
Département : Mathématique
Domaine : Mathématique et informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité Contrôle optimal théorie et approximation

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème:

Comportment asymptotique en norme L∞ pour une approximation par la méthode des éléments finis d'une classe d'inéquation quasi-variationnelles parabolique.

Présenté par : *GEUDAIBIA Hadjira*

Encadrant : *HARBI Abida* *MCA* *UBMA*

Jury de Soutenance :

HAIOUR Mohamed	Prof	UBMA	Président
HARBI Abida	MCA	UBMA	Encadrant
BOURAS Cherif	Prof	UBMA	Examinateur

Année Universitaire : 2022/2023

Remerciements

Alhamdo pour Allah,

car il m'a donne le courage et la vrai trajectoire

dans ma vie et donne tous les forces pour terminer ma trajectoire.

J'exprime mon gratitude

à mes chers parents qu'ont fait de leur mieux m'aider

Je tiens à remercier

ma directrice de ma thèse le docteur ''Harbi Abida''

pour son soutient et sin aide, qui m'ont permis de mènera bien ces travaux.

Dédicaces

A ma mère l'amour de mon cœur,

tu as fait plus qu'une mère, puisse faire pour que ses enfants

suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

A mes très chérés sœurs

" Theldja, Karima, Loubna, Noura "

avec ma belle *''Dr Rania''*, et mes frères '

'Salah et Nakib'', et ma belle amie *''Masouda''*,

qui n'ont cassé d'être pour moi des exemple de persévérance de courage.

Je vous d'édite ce travail avec tous mes bonheur, de santé et réussite.

A tous les gens m'aiment

''Aya'', ''Salsabile'', ''Wafa'', et ' *'Chaima''*...

soyez remerciés pour vos encouragement et votre soutien.

Aussi, je le présent à ceux qui on rempli ma vie

de chaos à tous les enfants dans ma vie, *''Salsabile, Raounak, Mouataz, Djihed''.*

RESUME

Le travail porte sur le comportement asymptotique d'une classe d'inéquations quasi-variationnelles paraboliques avec un terme source dépendant de la solution. L'inéquation quasi-variationnelle parabolique est transformée en un système de d'inéquations variationnelles elliptiques. Le travail porte sur l'existence et l'unicité de la solution et une démonstration du comportement asymptotique en utilisant la norme uniforme en combinant un schéma numérique par la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis

Mots clés : Inéquations quasi-variationnelles, Méthode des éléments finis, Méthode des différences finies, Estimation de l'erreur d'approximation, Norme uniforme.

Abstract

the proposed work relates to the asymptotic behavior of a class of parabolic quasi-variational inequalities with one source term depending on the solution. The parabolic quasi-variational inequality is transformed into a system of elliptical variational inequalities. THE work focuses on the existence and uniqueness of the solution and a demonstration of the asymptotic behavior using the uniform norm by combining a numerical scheme by the method of finite differences and the method of Finished elements

Keywords: Quasi-variational inequalities, Finite element method, Finite Difference Method, Approximation Error Estimation, Norm uniform.

الملخص

يتعلق العمل المقترح بالسلوك المقارب لـ

فئة المتباينات شبه المتغيرة المكافئة بمصطلح مصدر واحد

حسب الحل. عدم المساواة شبه المتغيرة المكافئ هو

تحولت إلى نظام من عدم المساواة المتغيرة الا هليلجية.

يركز العمل على وجود الحل وتفرده وإظهار

السلوك المقارب باستخدام القاعدة الموحدة من خلال الجمع بين أ

المخطط العددي بطريقة الفروق المحدودة وطريقة

العناصر النهائية

الكلمات المفتاحية: عدم المساواة شبه المتغيرة ، طريقة العناصر المحدودة ،

طريقة الفروق المحدودة ، تقدير الخطأ التقريبي ، القاعدة

زي مُوحد.

TABLE DES MATIÈRES

1 Introduction 2
2 Préliminaires 4
  2.1 Les inéquations variationnelles elliptiques 4
3 Le problème continue 6
4 Discrétisation 7
  4.1 Semi-discrétisation en temps 7
  4.2 Application de point fixe associée à l'algorithme (4.9) 10
  4.3 Convergence géométrique de l'algorithme (4.9) 12
  4.4 Discrétisation totale temps-espace 13
  4.5 Application de point fixe associée à l'algorithme discret (4.24) 14
  4.6 Convergence géométrique de l'algorithme (4.24) 15
5 Comportement asymptotique en norme L^∞ de la solution de l'équation parabolique nonlinéaire (1.1) 15

1 Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution numérique et au comportement asymptotique de la solution d'une classe d'inéquations variationnelles d'évolutions avec un terme source nonlinéaire dépendant de la solution

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u\,(t,.)}{\partial t},\ u\,(t,.)-v\right)+a\,(u\,(t,.)\,,u\,(t,.)-v)\geq (f(u\,(t,.)),u\,(t,.)-v)\,,\ (t,x)\in[0,T]\times[0,1] \\ u(0,x)=u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t,0)=u(t,1)=0. \text{ Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes.} \\ u\,(t,.)\,,\ v\leq\Psi\,(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

L'une des techniques utilisées pour la résolution numérique des problèmes d'évolutions consiste à appliquer la méthode des différences finies pour la variable temporelle ainsi qu'une combinaison de discrétisation par la méthode des éléments finis pour la variable spatiale.

Cette technique de discrétisation des problèmes d'évolutions a été l'objet de travail de plusieurs auteurs on cite entre autres le livre de [5] où l'auteur a étudié plusieurs équations d'évolutions paraboliques et hyperbolique mais avec des termes sources indépendants de la solution. On cite également le travail de [1] où il a été question de l'étude numérique et comportement asymptotique d'une inéquation variationnelle d'évolution avec terme source indépendant de la solution.

Pour des résultats pour des problèmes d'évolutions avec des termes sources nonlinéaires et dépendants de la solution on cite le travail de [2].

Le comportement asymptotique de la solution consiste à mesurer l'erreur entre la solution du problème stationnaire associé au problème (1.1) et la solution discrète à l'instant final T.

L'approche repose en premier lieu, sur une semi-discrétisation en temps où la méthode des différences finie est utilisée pour approcher la dérivée partielle d'ordre un par rapport à la variable temporelle laquelle semi-discrétisation génère un système d'inéquations variationnelles elliptiques avec également des termes sources dépendants de la solution.

Ainsi la solution de l'inéquation variationnelle parabolique (1.1) est approchée par une suite finie résultat de la résolution séquentielle du système d'inéquations variationnelles elliptiques avec des termes sources dépendants de la solution issu de la semi-discrétisation.

La propriété de Lipschitzienneté de la solution par rapport au terme source et aux conditions aux limites pour des inéquations variationnelles elliptiques démontrée dans [6] a permit d'obtenir une convergence géométrique de cette suite finie vers la solution de l'inéquation variationnelle stationnaire associée à l'inéquation variationnelle d'évolution (1.1).

La deuxième étape consiste à discrétiser chaque inéquation variationnelle elliptique du système généré par la semi-discrétisation par différence finies, par la méthode des éléments finis.

L'analogue discret de la propriété de Lipschitzienneté par rapport au terme source et aux conditions aux limites a permit de démontrer également la convergence géométrique de la suite discrète vers la solution discrète de l'inéquation variationnelle stationnaire associée à l'inéquation variationnelle d'évolution (1.1).

Le comportement asymptotique est alors obtenu en combinant l'estimation de l'erreur d'approximation par la méthode des éléments finis obtenue dans [3] à l'inéquation variationnelle stationnaire elliptique associé à au problème (1.1)

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2$$

et la convergence géométrique de l'algorithme discret issu de la semi discrétisation temporelle, on obtient

$$\|u^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{1}{1 + (\beta - k)\,\Delta t}\right)^N ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}.$$

2 Préliminaires

Cette section est un rappel sur les définitions de base et des résultats classiques pour des inéquations variationnelles elliptiques.

2.1 Les inéquations variationnelles elliptiques

On considère la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \right) dx,$$

la forme linéaire

$$(f,v) = \int_0^1 f\left(x\right) v\left(x\right) dx$$

où le second membre

$$f \in L^{\infty}\left([0,1]\right)$$

l'obstacle $\Psi \in W^{2,\infty}\left([0,1]\right)$ et le convexe

$$K^{(g)} = \left\{ v \in H^1\left([0,1]\right) \text{ tel que } v \leq \Psi \text{ et } v\left(0\right) = v\left(1\right) = g \right\}$$

On considère l'inéquation variationnelle elliptique

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \zeta \in K^{(g)} \text{ tel que} \\ a(\zeta, v-\zeta) + c(\zeta, v-\zeta) \geq \left(f, v-\zeta\right), \ \forall v \in K^{(g)} \end{array} \tag{2.1}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et telle que :

$$c \geq \beta > 0$$

Soit V_h l'espace des éléments finis constitué de fonctions linéaires continues par morceaux et s'annulant sur la frontière et $\phi_i, \ i = 1, 2, ..., m\left(h\right)$ les fonctions de bases de

V_h. L'analogue discret du problème continu (2.1) est défini par

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \zeta_h \in K_h^{(g)} \text{ tel que}\\ &a(\zeta_h, v-\zeta_h) + c(\zeta_h, v-\zeta_h) \geq (f, v-\zeta_h)\,,\ \forall v \in K_h^{(g)}\end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$K_h^{(g)} = \{v \in V_h \text{ tel que } v \leq r_h\Psi \text{ et } v\,(0) = v\,(1) = g\}$$

où g est une constante.

Théorème 2.1 (cf. [4]) Soient ζ solution de (2.1) et ζ_h solution de (2.2) alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|\zeta - \zeta_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2\,|\log h|^2\,.$$

Sous réserve que le principe du maximum continu est vérifié. Alors

Proposition 2.1(cf. [6]) Soient (f,g) et $\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux données telles que $\zeta = \sigma\,(f,g)$ et $\widetilde{\zeta} = \sigma\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux solutions relatives au problème (2.1), alors on a

$$\left\|\zeta - \widetilde{\zeta}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, |g-\widetilde{g}|\right\}. \tag{2.3}$$

0n suppose que le principe du maximum discret (p.m.d.) est satisfait, c'est-à-dire que la matrice résultante du problème discret (2.2*)* est une M matrice. Alors

Proposition 2.2 Soient (f,g) et $\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux données discrètes telles que $\zeta_h = \sigma_h\,(f,g)$ et $\widetilde{\zeta}_h = \sigma_h\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux solutions discrètes relatives au problème discret (2.2), alors on

$$\left\|\zeta_h - \widetilde{\zeta}_h\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left\{\frac{1}{\beta}\left\|f-\widetilde{f}\right\|_{L^\infty(\Omega)},\ |g-\widetilde{g}|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}. \tag{2.4}$$

3 Le problème continue

Dans ce mémoire de master on considère une classe d'inéquations variationnelles d'évolution avec terme source dépendant de la solution

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u\left(t,.\right)}{\partial t},\ u\left(t,.\right)-v\right)+a\left(u\left(t,.\right),u\left(t,.\right)-v\right)\geq\left(f(u\left(t,.\right)),u\left(t,.\right)-v\right),\ \left(t,x\right)\in\left[0,T\right]\times\left[0,1\right] \\ u(0,x)=u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t,0)=u(t,1)=0. \text{ Conditions aux limites de type Dirichlet.} \\ u\left(t,.\right),\ v\leq\Psi\left(x\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

Où la solution

$$u(t,x)\in K$$

et

$$K=\left\{v\in L^2\left(\left[0,T\right],H_0^1\left(\left[0,1\right]\right)\right)\ \text{tel que } v\leq\Psi\left(x\right)\ \text{ et } v\left(0,x\right)=u_0(x)\right\},$$

$f\in L^2\left(\left[0,T\right],L^\infty[0,1]\right)$ une fonctionnelle nonlinéaire, croissante et Lipschitzienne de constante de Lipschitz k

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq k\left|x-y\right|,\ \forall x,y\in\mathbb{R} \tag{3.2}$$

c une constante positive telle que

$$c\geq\beta>k \tag{3.3}$$

$a(.,.)$ est la forme bilinéaire coécrive définie par

$$a(u(t,x),v(x))=\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dv}{dx}+cuv\right)dx$$

$(.,.)$ est le produit scalaire dans $L^2([0,1])$. Le problème stationnaire associé au problème d'évolution (1.1) est défini par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\infty \in K^\infty \text{ solution de} \\ a(u^\infty, v - u^\infty) \geq (f(u^\infty), v - u^\infty), \forall v \in K. \end{cases} \tag{3.4}$$

où

$$K^\infty = \left\{ v \in H_0^1([0,1]) \text{ tel que } v \leq \Psi \right\}. \tag{3.5}$$

4 Discrétisation

La discrétisation du problème d'évolution (1.1) s'effectue en deux étapes. Dans la première étape une semi-discrétisation en temps est établie où la méthode des différences finie est utilisée pour approcher la dérivée partielle d'ordre un par rapport à la variable temporelle t laquelle semi-discrétisation génère un système fini d'équations elliptiques avec également des termes sources dépendants de la solution. La deuxième étape consiste à effectuer une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis à chaque équation du système issu de la première semi-discrétisation.

4.1 Semi-discrétisation en temps

On discrétise le domaine $[0,T]$ de manière uniforme où les points du maillage sont $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, $i = 0, ..., N-1$, le pas de discrétisation est $\Delta t = \dfrac{T}{N}$ avec N un entier naturel.

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < ... < t_N = T. \tag{4.1}$$

La dérivée partielle $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ est approchée par la différence finie rétrograde

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \simeq \frac{u(t,x) - u(t-\Delta t, x)}{\Delta t} \tag{4.2}$$

On remplace (4.2) dans (1.1) en obtient

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u(t,x)-u(t-\Delta t,x)}{\Delta t},\ u(t,x)-v\,(x)\right)+a\,(u(t,x),u(t,x)-v\,(x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \geq (f(u(t,x)),u(t,x)-v\,(x)) \\ u(0,x)=u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t,0)=\ u(t,1)=0 \text{ Conditions aux limites de type Dirichlet.} \\ u(t,.),v\leq\Psi\,(x) \end{cases} \tag{4.3}$$

On remplace t par les nœuds de la discrétisation t_{i+1}

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u(t_{i+1},x)-u(t_{i+1}-\Delta t,x)}{\Delta t},\ u(t_{i+1},x)-v\right)+a\,(u(t_{i+1},x),u(t_{i+1},x)-v) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \geq (f(u(t_{i+1},x)),u(t_{i+1},x)-v) \\ u(t_0,x)=u(0,x)=u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t_{i+1},0)=u(t_{i+1},1)=0. \\ u,v\leq\Psi\,(x) \end{cases} \tag{4.4}$$

ce qui implique pour $i=0,...,N-1$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\int\limits_0^1 u(t_{i+1},x)\,(u(t_{i+1},x)-v)\,dx+a(u(t_{i+1},x),u(t_{i+1},x)-v) \\ \qquad\qquad \geq \int\limits_0^1 f(u(t_{i+1},x))\,(u(t_{i+1},x)-v)\,dx+\dfrac{1}{\Delta t}\int\limits_0^1 u(t_i,x)\,(u(t_{i+1},x)-v)\,dx \\ u(t_0,x)=u(0,x)=u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t_{i+1},0)=u(t_{i+1},1)=0. \\ u(t_{i+1},0),\ v\leq\Psi\,(x) \end{cases} \tag{4.5}$$

En utilisant la notation

$$u(t_i,x)=u_i\,(x)\,,\ i=0,1,...,N. \tag{4.6}$$

on obtient le schéma numérique suivant, pour tout $i = 0, 1, ..., N-1$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 u_{i+1}(x)\left(u_{i+1}(x) - v(x)\right)dx + a(u_{i+1}, u_{i+1}(x) - v) \\ \qquad\qquad\qquad \geq \int_0^1 f(u_{i+1})\left(u_{i+1}(x) - v\right)dx + \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 u_i(x)\left(u_{i+1}(x) - v\right)dx \\ u(t_0, x) = u(0, x) = u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u_{i+1}(0) = u_{i+1}(1) = 0. \\ u_{i+1},\ v \leq \Psi(x). \end{cases} \tag{4.7}$$

Le schéma numérique (4.7) représente un système fini d'inéquations variationnelles elliptiques avec second membre dépendant de la solution qu'on peut écrire sous la forme suivante en prenant

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t} \tag{4.8}$$

pour tout $i = 0, 1, ..., N-1$

$$\begin{cases} b(u_{i+1}, u_{i+1} - v) \geq (f(u_{i+1}) + \lambda u_i, u_{i+1} - v) \\ u(t_0, x) = u(0, x) = u_0(x) \text{ en } [0,1] \text{ La condition initiale.} \\ u(t_{i+1}, 0) = u(t_{i+1}, 1) = 0. \\ u_{i+1}, v \leq \Psi(x) \end{cases} \tag{4.9}$$

où $b(.,.)$ est la forme bilinéaire définie par

$$b(u_{i+1}, v) = a(u_{i+1}, v) + \lambda\int_0^1 u_{i+1}v(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}\frac{dv}{dx} + (c+\lambda)\,u_{i+1}v\right)dx \tag{4.10}$$

On peut facilement voir que la solution de l'inéquation variationnelle stationnaire $u^\infty \in K^\infty$ satisfait

$$b(u^\infty, v - u^\infty) \geq \left(f(u^\infty) + \lambda u^\infty, v - u^\infty\right),\ \forall v \in K. \tag{4.11}$$

On note

$$F(u^{\infty}) = f(u^{\infty}) + \lambda u^{\infty} \tag{4.12}$$

Compte tenu de la Lipschitzenneté de f de constante de Lipschitz (3.2) , la fonctionnelle F est également Lipschitzienne de constante de Lipschitz $k+\lambda$. Il est clair qu'on peut facilement adapter (2.3) défini par rapport à la fonction f à la fonctionnelle F et on obtient

$$\left\|\zeta^{\infty} - \widetilde{\zeta}^{\infty}\right\|_{L^{\infty}([0,1])} \leq \left(\frac{1}{\beta+\lambda}\right) \left\|F - \widetilde{F}\right\|_{L^{\infty}([0,1])}. \tag{4.13}$$

où ζ^{∞} et $\widetilde{\zeta}^{\infty}$ sont solutions relatives au problème (4.11) avec respectivement des second membres F et $\widetilde{F}$.

4.2 Application de point fixe associée à l'algorithme (4.9)

On considère l'application T suivante

$$\begin{aligned} T : L^{\infty}([0,1]) &\rightarrow L^{\infty}([0,1]) \\ w &\rightarrow T(w) = \varepsilon \end{aligned} \tag{4.14}$$

où ε est solution du problème suivant

$$\begin{gathered} b(\varepsilon, v-\varepsilon) \geq (f(\varepsilon) + \lambda w,\ v-\varepsilon) \\ v \leq \Psi,\ \varepsilon \leq \Psi. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Il est clair alors que pour u_{i+1} solution de (4.9) vérifie

$$u_{i+1} = Tu_i,\ i = 0, ..., N-1. \tag{4.16}$$

Théorème 4.1 L'application T définie dans (4.14) est une application contractante de constante de contraction

$$0 < K = \frac{\lambda}{\lambda+\beta-k} < 1 \tag{4.17}$$

telle que pour tous w et $\widetilde{w}$ dans $L^{\infty}([0,1])$, on a

$$||Tw - T\widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])} \leq K||w - \widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])}. \tag{4.18}$$

et u^{∞} solution de (4.11) est l'unique point fixe de cette application T.

$$u^{\infty} = Tu^{\infty}.$$

Démonstration Soient w et $\widetilde{w}$ dans $L^{\infty}([0,1])$ et $\varepsilon = \partial(f(\varepsilon) + \lambda w)$ et $\widetilde{\varepsilon} = (f(\widetilde{\varepsilon}) + \lambda\widetilde{w})$ sont solutions de (4.15). Alors

$$||Tw - T\widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])} = ||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^{\infty}([0,1])}.$$

En appliquant la dépendance Lipschitzienne (4.13) appliquée à la fonctionnelle F avec des conditions aux limites de types Dirichlet homogènes, on obtient

$$\begin{aligned} ||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^{\infty}([0,1])} &\leq \left(\frac{1}{\lambda+\beta}\right) ||\left(f(\varepsilon) + \lambda w\right) - \left(f(\widetilde{\varepsilon}) + \lambda\widetilde{w}\right)||_{L^{\infty}([0,1])} \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda+\beta}\right) ||(f(\varepsilon) - f(\widetilde{\varepsilon})) + \lambda\left(w - \widetilde{w}\right)||_{L^{\infty}([0,1])} \end{aligned}$$

Puisque $f(.)$ est une fonction Lipschitzienne, alors

$$||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^{\infty}([0,1])} \leq \frac{k}{\lambda+\beta}||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^{\infty}([0,1])} + \frac{\lambda}{\lambda+\beta}||w - \widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])}$$

Ce qui implique

$$\left(1 - \frac{k}{\lambda+\beta}\right)||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^{\infty}([0,1])} \leq \frac{\lambda}{\lambda+\beta}||w - \widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])}.$$

Donc

$$||\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}||_{L^{\infty}([0,1])} \leq \frac{\dfrac{\lambda}{\lambda+\beta}}{\left(1 - \dfrac{k}{\lambda+\beta}\right)}||w - \widetilde{w}||_{L^{\infty}([0,1])},$$

et ainsi
$$||Tw - T\widetilde{w}||_{L^\infty([0,1])} \leq \frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}||w-\widetilde{w}||_{L^\infty([0,1])}.$$

4.3 Convergence géométrique de l'algorithme (4.9)

Dans ce qui suit on démontre la convergence de l'algorithme (4.9) vers u^∞ solution de (4.11) et on en déduit sa vitesse de convergence.

Proposition 4.1 Soient u^∞ solution de (4.11) et u_{i+1} solution de (4.9). Alors pour tout $i = 0, ..., N-1$

$$||u^\infty - u_{i+1}||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right)^{i+1} ||u^\infty - u_0||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.19}$$

où u_0 est la condition initiale du problème (1.1).

Démonstration On démontre (4.19) par récurrence. Lorsque $i = 0$, alors d'après (4.18) on obtient.

$$||u^\infty - u_1||_{L^\infty([0,1])} = ||Tu^\infty - Tu_0||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right) ||u^\infty - u_0||_{L^\infty([0,1])}.$$

Ainsi (4.19) est vérifiée pour $i = 0$. On suppose que (4.19) est vérifiée pour i, c'est-à-dire
$$||u^\infty - u_i||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right)^{i} ||u^\infty - u_0||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.20}$$

Sachant que
$$||u^\infty - u_{i+1}||_{L^\infty([0,1])} = ||Tu^\infty - Tu_i||_{L^\infty([0,1])}$$

et en utilisant (4.18), on obtient

$$||Tu^\infty - Tu_i||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right) ||u^\infty - u_i||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.21}$$

On substitue (4.20) dans (4.21) on obtient (4.19).

4.4 Discrétisation totale temps-espace

Dans cette section on étudie la discrétisation du système (4.9) par la méthode des éléments finis P_1 linéaire par morceaux. On décompose l'intervalle $\Omega = [0, 1]$ en $n - 1$ segments

$$\Omega = [0, 1] = \underset{i=0}{\overset{N-1}{\cup}} [x_i, x_{i+1}] = \underset{i=0}{\overset{N-1}{\cup}} E_i$$

avec les nœuds

$$0 = x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < ... < x_N = 1.$$

Les segments

$$E_i = [x_i, x_{i+1}]$$

sont les éléments du maillage. Soient V_h l'espace d'éléments finis des fonctions linéaires par morceaux v s'annulant sur $\partial\Omega$

$$V_h = \left\{ v \in H_0^1 ([0, 1]) \cap C ([0, 1]) \, ; \text{ tel que } v/E_i \in P_1 \right\} \tag{4.22}$$

et le convexe discret

$$K_h = \{ v \in V_h ; \; v \leq r_h \Psi \} \, .$$

Les fonctions de base de $V_{h\ ,}$ $\varphi_i, \; i = 1, ..., m_h$ sont définies par

$$\varphi_i (x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h} \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \text{ si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases} \tag{4.23}$$

et h est le pas de discrétisation. Le système discret associé au système (4.9) consiste à résoudre pour tout $i = 0, ..., N - 1$

$$\begin{cases} u_{i+1,h} \in K_h \text{ solution de} \\ b(u_{i+1,h}, v_h - u_{i+1,h}) \geq (f (u_{i+1,h}) + \lambda u_{i,h}, \; v_h - u_{i+1,h}) \end{cases} \tag{4.24}$$

où

$$u_{i+1,h}(x) = \sum_{k=1}^{N-1} u_{i+1,h}(x_k)\,\varphi_i(x)$$

avec $u_{0,h} = \pi_h(u_0)$ ou π_h fait référence à l'opérateur d'interpolation dans $[0,1]$. Le problème discret associé au problème continue (4.11) consiste à résoudre le problème discret suivant

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^{\infty} \in K_h \text{ solution de} \\ b(u_h^{\infty}, v - u_h^{\infty}) \geq (f(u_h^{\infty}) + \lambda u_h^{\infty},\ v - u_h^{\infty})\ \ \forall v \in K_h\,. \end{array} \tag{4.25}$$

On énonce dans ce qui suit un résultat de l'estimation de l'erreur d'approximation pour les inéquations variationnelles avec des termes sources dépendants de la solution.

Théorème 4.2 (cf [3]) Soient u^{∞} solution de et u_h^{∞} solution de (4.25). Alors il existe un constante C positive indépendante de h telle que

$$\|u^{\infty} - u_h^{\infty}\|_{L^{\infty}([0,1])} \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2. \tag{4.26}$$

4.5 Application de point fixe associée à l'algorithme discret (4.24)

On considère l'application T_h suivante

$$\begin{aligned} T_h : K_h &\to K_h \\ w_h &\to T_h(w_h) = \varepsilon_h \end{aligned} \tag{4.27}$$

où ε_h est solution du problème suivant

$$b(\varepsilon_h,\ v - \varepsilon_h) = (f(\varepsilon_h) + \lambda w_h,\ v - \varepsilon_h)\,. \tag{4.28}$$

Il est clair alors que pour $u_{i+1,h}$ solution de (4.24) vérifie

$$u_{i+1,h} = T_h u_{i,h},\ \ i = 0, ..., N-1. \tag{4.29}$$

Théorème 4.2 L'application T_h définie dans (4.27) est une application contractante de constante de contraction K définie dans (4.17) telle que pour tous w_h et $\widetilde{w}_h$ dans K_h , on a

$$||T_h w_h - T_h \widetilde{w}_h||_{L^\infty([0,1])} \leq K||w_h - \widetilde{w}_h|||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.30}$$

et u_h^∞ solution de (4.25) est l'unique point fixe de cette application T_h.

$$u_h^\infty = T_h u_h^\infty. \tag{4.31}$$

Démonstration La démonstration est similaire à celle établie pour le théorème 4.1.

4.6 Convergence géométrique de l'algorithme (4.24)

Par une étude similaire effectuée dans le cadre continu, on démontre la convergence géométrique de l'algorithme (4.24) vers u_h^∞ solution de (4.25) et on en déduit sa vitesse de convergence.

Proposition 4.2 Soient u_h^∞ solution de (4.25) et $u_{i+1,h}$ solution de (4.24) . Alors pour tout $i = 0, ..., N-1$

$$||u_h^\infty - u_{i+1,h}||_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta - k}\right)^{i+1} ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}. \tag{4.32}$$

Démonstration La démonstration repose sur le raisonnement par récurrence et est similaire à celle établie pour la proposition 4.1.

5 Comportement asymptotique en norme L^∞ de la solution de l'équation parabolique nonlinéaire (1.1)

Cette section est dédiée au résultat principal de ce travail, à savoir le comportement asymptotique de la solution du problème d'évolution (1.1) .

Sachant que le comportement asymptotique de la solution du problème d'évolution (1.1) consiste à mesurer l'erreur par la nome L^∞ entre u^∞ la solution du problème stationnaire (4.11) associé au problème (1.1) et $u_{N,h}$ la solution discrète à l'instant final T.

Le résultat principal

Théorème 5.2 Soient u^∞ la solution du problème stationnaire (4.11) et $u_{N,h}$ la solution de (4.24) à l'instant final $t = T$, alors il existe une constante positive C indépendante de h et de Δt telle que

$$\|u^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2 + \left(\frac{1}{1+(\beta-k)\,\Delta t}\right)^N ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}. \quad (5.1)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on retrouve, compte tenu de

$$0 < K = \frac{\lambda}{\lambda+\beta-k} = \frac{1}{1+(\beta-k)\,\Delta t} < 1$$

l'estimation de l'erreur d'approximation suivante

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2 .$$

Démonstration L'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_{L^\infty([0,1])}$ nous permet d'écrire

$$\|u^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq \|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} + \|u_h^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} . \quad (5.2)$$

Où d'après (4.26)

$$\|u^\infty - u_h^\infty\|_{L^\infty([0,1])} \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2 \quad (5.3)$$

et d'après (4.32)

$$\|u_h^\infty - u_{N,h}\|_{L^\infty([0,1])} \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta-k}\right)^N ||u_h^\infty - u_{0,h}||_{L^\infty([0,1])}. \quad (5.4)$$

En remplaçant $\lambda = \dfrac{1}{\Delta t}$, (5.4) devient

$$\|u_h^{\infty} - u_{N,h}\|_{L^{\infty}([0,1])} \leq \left(\frac{1}{1+(\beta-k)\,\Delta t}\right)^{N} ||u_h^{\infty} - u_{0,h}||_{L^{\infty}([0,1])}. \tag{5.5}$$

En substituant (5.3) et (5.5) dans (5.2) obtient le résultat principal de ce travail à savoir l'inégalité (5.1) .

Application

On considère l'inéquation quasi-variationnelle parabolique suivante

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t},\; u\,(t,x) - v\,(x)\right) + a\,(u\,(t,x)\,, u\,(t,x) - v\,(x)) \geq (\sin(u\,(t,x)), u\,(t,x) - v\,(x))\\ &u\,(t,x) \leq 4.\end{aligned}$$

où

$$a(u(t,x), v(x)) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dv}{dx} + 2uv\right) dx$$

La semi-discrétisation de la variable temporelle t par la méthode des différences finies nous conduit à la résolution du système d'inéquation quasi-variationnelles suivant, où le pas $\Delta t = \dfrac{1}{4}$

$$b(u_{i+1}, u_{i+1} - v) \geq (\sin(u_{i+1}) + 4u_i, u_{i+1} - v)\,;\; i = 0, 1, 2, 3.$$

où

$$b(u_{i+1}, v) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}\frac{dv}{dx} + (2+\lambda)\,u_{i+1}v\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}\frac{dv}{dx} + 6u_{i+1}v\right) dx.$$

La discrétisation du domaine $\Omega = [0, 1]$ par la méthode des éléments finis où le pas

$$h = \frac{1}{3}$$

nous conduit à la résolution séquentielle du système discret suivant

$$b(u_{i+1,h}, u_{i+1,h} - v) \geq (\sin(u_{i+1,h}) + 4u_{i,h}, u_{i+1,h} - v)\,;\ \ i = 0, 1, 2, 3. \tag{5.6}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Boulaaras and M. Haiour, A New Approach to Asymptotic Behavior for a Finite Element Approximation in Parabolic Variational Inequalities. International Scholarly Research Network ISRN Mathematical Analysis Volume 2011, Article ID 703670, 15 pages doi :10.5402/2011/703670.

[2] S. Boulaaras and M. Haiour, The finite element approximation of evolutionary Hamilton–Jacobi–Bellman equations with nonlinear source terms. Indagationes Mathematicae 24 (2013) 161–173.

[3] M. Boulbrachene, Pointwise error estimates for a class of elliptic quasi-variational inequalities with nonlinear source terms. Applied Mathematics and Computation 161 (2005) 129–138.

[4] P. Cortey-Dumont, On finite element approximation in the L^{∞}-norm of variational inequalities. Numer. Math. 47(1), 45-57 (1985)

[5] Grégoire Allaire, Analyse numérique et optimisation. Les éditions de l'ecole polytechnique. ISBN 978-2-7302-1255-7.

[6] A. Harbi, Maximum norm analysis of a nonmatching grids method for a class of variational inequalities with nonlinear source terms. Journal of Inequalities and Applications (2016) 2016 :181 DOI 10.1186/s13660-016-1110-4.