



République Algérienne  
Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique



Badji Mokhtar-Annaba University  
Université Badji Mokhtar-Annaba

جامعة باجي مختار-عناابة

*Faculté des Sciences*  
*Département de Mathématique*



## **MÉMOIRE**

**En vue de l'obtention du diplôme de Master**  
**Option : Systèmes Dynamiques**

### ***Construction de la fonction de Liapunov pour des systèmes dynamiques***

*Présentée et soutenue par*  
**Belazizia Mohamed Fouad**

**Directeur** : Dr.Djerrai Asma

MCB

Université de Badji Mokhtar-Annaba

#### **Membres du Jury**

**Président** : Dr.Makhlouf Amar

Prof

Université de Badji Mokhtar-Annaba

**Examineur** : Dr.Hmamda Meriem

MCB

Université de Badji Mokhtar-Annaba

Juin 2023

# Dédicaces

Je dédie ce Mémoire de Master en Mathématiques, option Systèmes Dynamiques :

- à ma mère, et à mon père ;
- à mes grand-mère et grand-père ;
- à ma sœur et mes frères ;
- à mes cousines et cousins ;
- à mes amis, et à mes condisciples.



# Remerciements

Mes sincères remerciements sont adressés à Madame Asma DJERRAI, Docteur et Maître de Conférences au sein du Département de Mathématiques, pour sa précieuse supervision, ses conseils éclairés et son orientation bienveillante tout au long de ma préparation de ce Mémoire de Master.

Je tiens à exprimer ma plus chaleureuse gratitude au Professeur Amar MAKHLOUF pour sa gentillesse, sa disponibilité et son dévouement sans faille envers son travail. Je suis également extrêmement reconnaissant qu'il ait accepté de présider le jury de soutenance.

De plus, mes remerciements les plus empreints de respect sont adressés à Madame Meriem HMAMDA, Docteur et Maître de Conférences qui a consacré son temps précieux à la lecture attentive de ce manuscrit de Master et qui a généreusement accepté de faire partie du jury de soutenance.

Enfin, j'aimerais exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants du Département de Mathématiques de l'Université Badji Mokhtar - Annaba, qui m'ont transmis des cours et des connaissances essentiels pour mon développement futur. Je suis sincèrement reconnaissant pour leur contribution précieuse.

### ***Le résumé***

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires via la fonction de Liapunov faite l'objet de ce travail. Cette étude comporte quatre parties. Dans la première partie, on donne quelques notions de base concernant les systèmes dynamiques et la stabilité. La deuxième partie est une présentation de la théorie de la stabilité pour les systèmes non linéaires par la fonction de Liapunov où on basant sur la définition d'une fonction définie positive et on discute les conditions nécessaires pour construire la fonction de Liapunov. La troisième partie, traite la stabilité et la construction de la fonction de Liapunov pour l'équation de Duffing par la méthode de Cartwright et des valeurs propres. la dernière partie est consacré au problème de la stabilité asymptotique des systèmes polynômiaux avec une fonction de Liapunov non polynomial. On essaye de traiter des exemples pour valider les résultats théoriques obtenus.

### ***Mots clés***

Systèmes dynamiques ; La stabilité ; Fonction définie positive ; La fonction de Liapunov ; L'équation de Duffing ; Fonction polynomiale.

### ***Abstract***

The study of stability in non-linear dynamical systems with the Liapunov function is the subject of this work. This study consists of four parts. In the first part, Some basic notions about dynamical systems and stability are given. The second part is a presentation of the stability theory for non-linear systems using the Liapunov function, where we base on the definition of a positive definite function and discuss the necessary conditions for constructing the Liapunov function. The third part, deals with the stability and the construction of the Liapunov function for the Duffing equation using the Cartwraht method and eigenvalues. The last part is dedicated to the problem of asymptotic stability in polynomial systems with a no polynomial Liapunov function. We try to process examples to validate the theoretical results obtained.

### ***Keywords***

Dynamical systèmes; The stabilité; Positive defined fonction; Lyapunov function; Duffing's equation; Polynomial function.

# ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة استقرار الانظمة الديناميكية غير الخطية باستعمال دالة ليابونوف. هذه الدراسة تتضمن أربعة اجزاء. في الفصل الاول، نقدم بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالأنظمة الديناميكية والاستقرار. الفصل الثاني، مخصص للمشكلة الرئيسية والمتمثلة في دراسة استقرار الانظمة الديناميكية غير الخطية بواسطة دالة ليابونوف. الفصل الثالث، استقرار وبناء وظيفة ليابونوف لمعادلة دوفينج باستخدام طريقة كارترايت والقيم الذاتية. الفصل الرابع، يهتم بمشكلة الاستقرار المقارب للأنظمة الجبرية مع وظيفة ليابونوف غير جبرية. نحاول معالجة أمثلة لتأكيد النتائج النظرية المحصل عليها.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1	Systèmes dynamiques . . . . .	3
1.1.1	Définition . . . . .	3
1.1.2	Définition . . . . .	3
1.2	Système autonome . . . . .	3
1.2.1	Définition . . . . .	3
1.3	Point critique . . . . .	4
1.3.1	Définition . . . . .	4
1.3.2	Définition . . . . .	4
1.4	Plan et portrait de phase . . . . .	4
1.4.1	Définition . . . . .	4
1.5	Flot . . . . .	4
1.5.1	Définition . . . . .	4
1.6	Linéarisation . . . . .	4
1.6.1	Définition . . . . .	4
1.7	Classification des points d'équilibre . . . . .	5
1.8	Stabilité des points d'équilibres . . . . .	10
1.8.1	Théorème . . . . .	10
1.8.2	Stabilité au sens de Liapunov . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Fonction de Liapunov</b>	<b>11</b>
2.1	Définition . . . . .	12
2.2	Lemme . . . . .	14
2.3	Définition . . . . .	14
2.4	Théorème de la stabilité de Liapunov . . . . .	14
2.5	Théorème(Instabilité) . . . . .	16
2.5.1	Remarque . . . . .	16
2.6	Exemples : . . . . .	16
2.7	Conclusion . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Étude de la stabilité des points d'équilibres de certaines équation de Duffing</b>	<b>25</b>
3.1	Construction de la fonction de Liapunov pour l'équation de Duffing à l'aide de la méthode de Cartwright . . . . .	26
3.1.1	Application de la méthode . . . . .	27
3.1.2	Remarque . . . . .	33
3.2	Étude de la stabilité de l'équation de Duffing à l'aide de l'approche des valeurs propres . . . . .	34

3.3	Stabilité de l'équation de Duffing en utilisant Maple . . . . .	37
3.4	Étude de stabilité de l'équation de Duffing sous Oyesanya et Nwamba . . .	38
3.5	Portrait de phases . . . . .	41
3.6	Conclusion . . . . .	43
<b>4</b>	<b>La stabilité asymptotique d'un système polynomial sans fonction de Liapunov polynomiale</b>	<b>45</b>
4.1	Définition . . . . .	46
4.2	Théorème . . . . .	46
4.3	Théorème (Barbashin-Krasovskii) . . . . .	46
4.4	Sommes des carrés . . . . .	46
4.5	Théorème . . . . .	47
4.6	Définition . . . . .	47
4.7	Théorème . . . . .	47
	4.7.1 Corollaire . . . . .	47
4.8	Théorème . . . . .	47
	4.8.1 Preuve . . . . .	48
4.9	Conclusions . . . . .	49

# Introduction

L'analyse des systèmes dynamiques est un domaine fascinant des mathématiques qui vise à étudier l'évolution et le comportement des systèmes qui évoluent dans le temps. Ces systèmes peuvent représenter divers phénomènes naturels, tels que les mouvements planétaires, les réactions chimiques, les populations biologiques, ou même les circuits électriques. Comprendre et prédire le comportement de ces systèmes est d'une importance capitale dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques.

Dans ce contexte, la fonction de Liapunov joue un rôle crucial. Elle est nommée en l'honneur du mathématicien russe Aleksandr Lyapunov, qui a développé cette notion au début du XXe siècle. La fonction de Liapunov est utilisée pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques en fournissant un critère permettant de déterminer si les trajectoires du système convergent vers un état d'équilibre, divergent ou restent confinées dans certaines régions de l'espace.

Dans cette mémoire, nous nous penchons sur la construction de la fonction de Liapunov et son utilisation dans l'analyse des systèmes dynamiques. Notre étude se divise en quatre chapitres qui abordent différents aspects de cette thématique.

Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques notions préliminaires importantes pour comprendre le sujet.

Le deuxième chapitre est consacré à la fonction de Liapunov elle-même, où nous explorons ses propriétés et ses applications dans l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques.

Dans le troisième chapitre, nous étudions spécifiquement le cas des champs vectoriels polynomiaux qui sont globalement asymptotiquement stables, même en l'absence de fonction de Liapunov polynomiale.

Enfin, le quatrième chapitre se concentre sur l'analyse de la stabilité des solutions périodiques de certaines équations de Duffing, un type spécifique de système dynamique. Nous examinons les méthodes utilisées pour étudier la stabilité de ces solutions, telles que l'utilisation de fonctions de Lyapunov. Nous présentons des résultats théoriques ainsi que des exemples numériques ou des études de cas pour illustrer notre propos.



# Chapitre 1

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on présente des notions préliminaires sur les systèmes dynamiques : définition d'un système dynamique ; système autonome ; point critique ; plan et portrait de phase ; flot ; linéarisation ; classification des points d'équilibre ; stabilité des points d'équilibre ; stabilité au sens de Liapunov...

### 1.1 Systèmes dynamiques

#### 1.1.1 Définition

Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tel que :

1.  $\mu(\cdot, x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est continue
2.  $\mu(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est continue
3.  $\mu(0, x) = x$
4.  $\mu(t + s, x) = \mu(t, \mu(s, x)) \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

#### 1.1.2 Définition

Un système dynamique  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  est **linéaire** si :

$$\mu(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \mu(t, x) + \beta \mu(t, y)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

### 1.2 Système autonome

#### 1.2.1 Définition

On appelle système différentiel autonome un système différentiel pour lequel  $f$  ne dépend pas du temps :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

## 1.3 Point critique

### 1.3.1 Définition

On appelle point critique, point d'équilibre, point singulier ou point fixe du système différentiel (1.1) un point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x_0) = 0$ .

### 1.3.2 Définition

Le point d'équilibre  $x_0$  est **hyperbolique** si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x_0)$  n'a une partie réelle nulle.

## 1.4 Plan et portrait de phase

### 1.4.1 Définition

Soit le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.2) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites. Les points critique de ce système sont des solution constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan  $(x \circ y)$  est le plan de phase.

## 1.5 Flot

### 1.5.1 Définition

Soit le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Où  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Soit  $\phi(t, x_0)$  la solution de (1.3).

L'ensemble des application  $\phi_t$  définie par :

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

est appelé le **flot** du système non linéaire (1.3).

## 1.6 Linéarisation

### 1.6.1 Définition

Soit le système :

$$\dot{x} = Ax \quad (1.4)$$

Où

$$A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

est appelé linéarisation de système (1.1) en  $x_0$ .

## 1.7 Classification des points d'équilibre

### Cas des systèmes linéaires

Considérons le système différentiel linéaire :

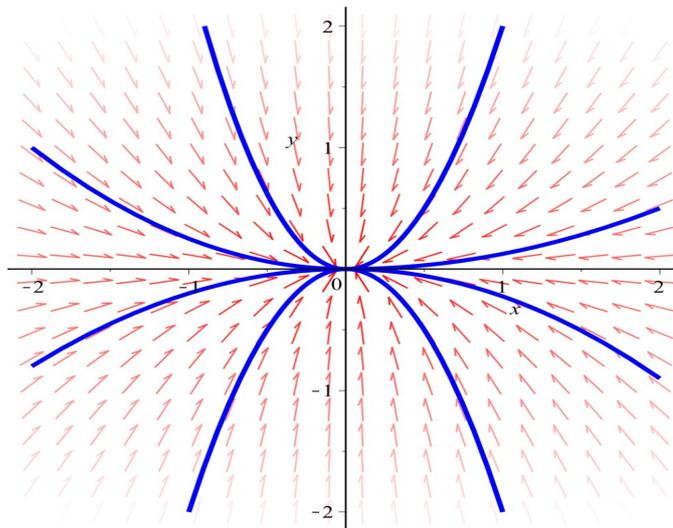
$$\dot{x} = Ax$$

où  $x \in \mathbb{R}^2$ . On supposera  $\det A \neq 0$ .

L'origine est un point critique de ce système.

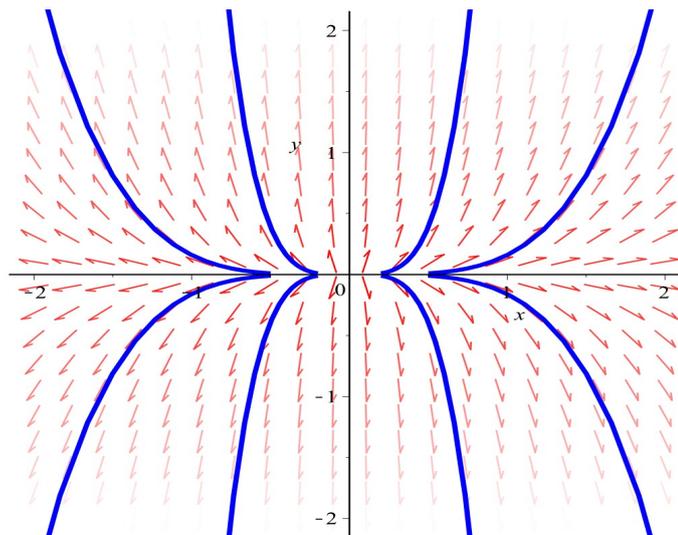
#### 1. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2$ de $A$ sont réelles

si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont  $< 0$ , ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) le points d'équilibre  $(0,0)$  est un nœud impropre stable



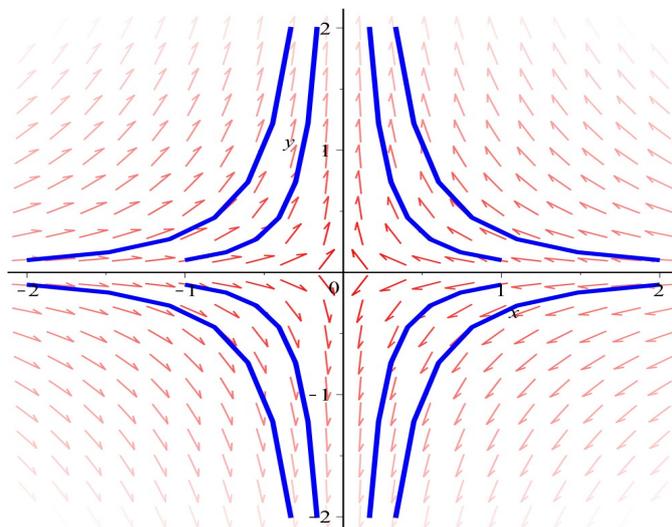
*Figure 1.1 Nœud impropre stable*

si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont  $> 0$ , ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) le points d'équilibre  $(0,0)$  est un nœud impropre instable



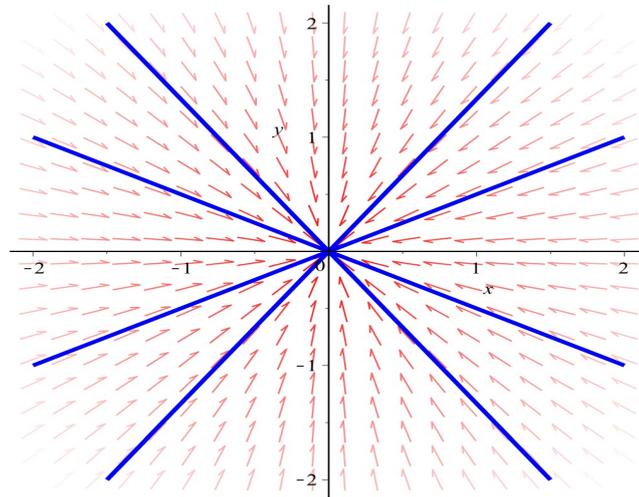
**Figure 1.2** *Nœud impropre instable*

si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de signe opposés, par exemple  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$ . Il s'agit d'un selle (toujours instable)

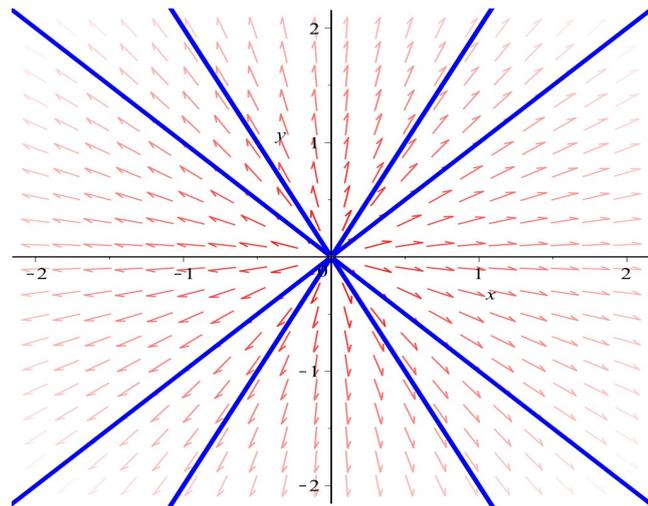


**Figure 1.3** *Selle*

si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . On a deux cas possibles :  
(a)  $A$  est diagonalisable, le point d'équilibre  $(0,0)$  est un nœud propre.

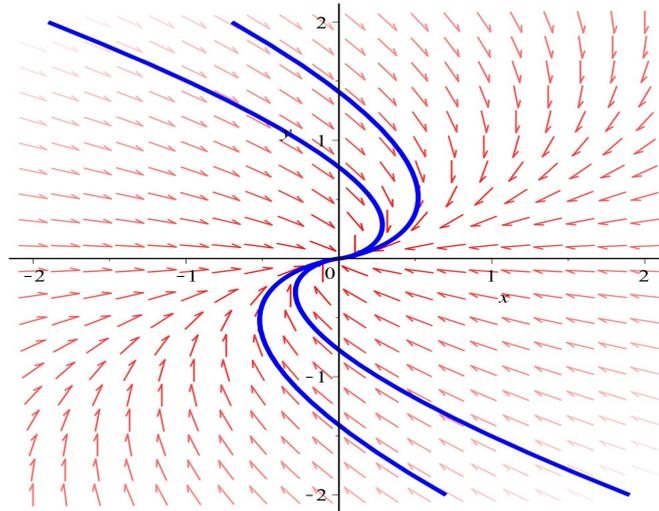


*Figure 1.4 Nœud propre stable si :  $\lambda < 0$*

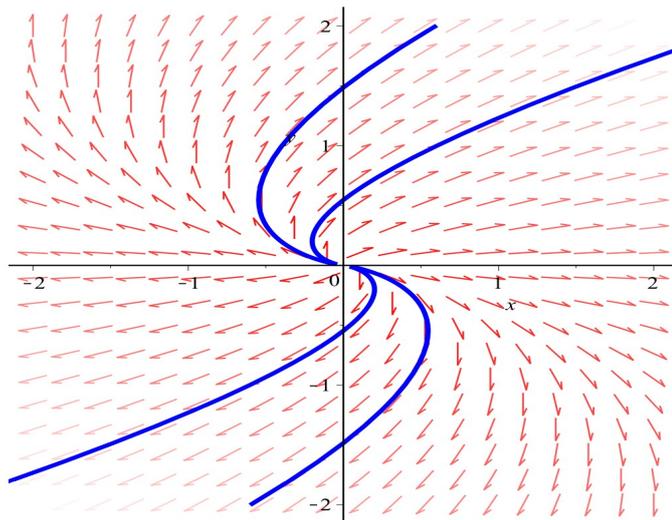


*Figure 1.5 Nœud propre instable si :  $\lambda > 0$*

(b)  $A$  est non diagonalisable, le point d'équilibre  $(0,0)$  est un nœud exceptionnel.



*Figure 1.6 Nœud exceptionnel stable si :  $\lambda < 0$*

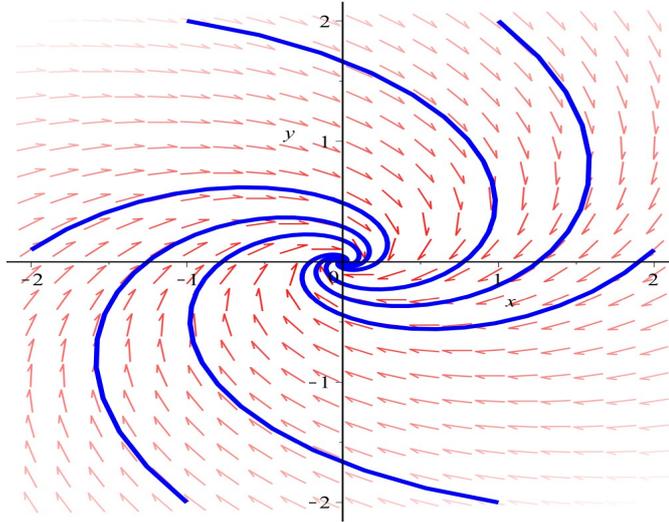


*Figure 1.7 Nœud exceptionnel instable si :  $\lambda > 0$*

## 2. Les valeurs propres de $A$ sont complexes

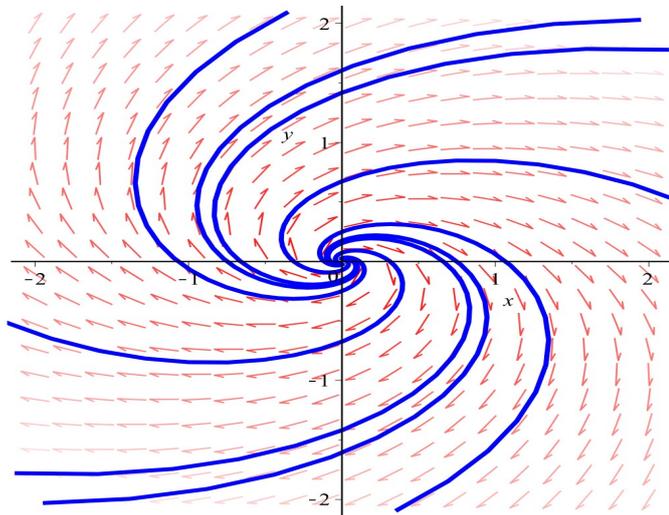
(a) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  complexe conjuguées avec la partie réelle non nulle, ( $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ ), alors :

Le point d'équilibre  $(0,0)$  est un foyer stable si  $\alpha < 0$ .



*Figure 1.8 Foyer stable*

Le point d'équilibre  $(0,0)$  est un foyer instable



*Figure 1.9 Foyer instable*

(b) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  imaginaires pures, ( $\lambda_1 = i\beta$ ,  $\lambda_2 = -i\beta$ ), alors :  
le point d'équilibre  $(0,0)$  est un centre.

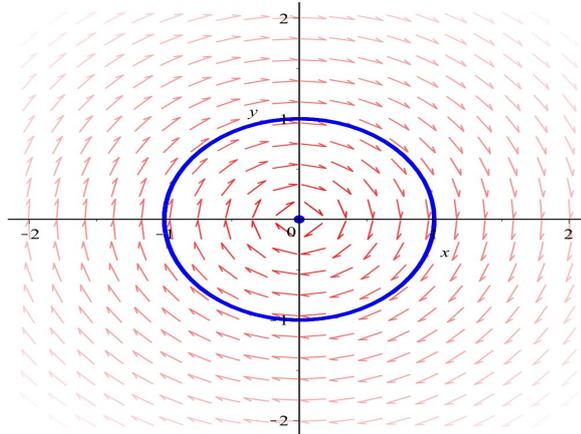


Figure 1.10 Centre

## Cas des systèmes non-linéaires

Un point critique  $x_0$  de (1.1) est appelé **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives; Il est appelé **source** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles positives; Il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x_0)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

## 1.8 Stabilité des points d'équilibres

### 1.8.1 Théorème

Soit  $x_0$  un point d'équilibre pour (1.1)

1) Si  $x_0$  un **puît**, alors il est **asymptotiquement stable**.

2) Si  $x_0$  une **source** ou **selle**, alors il est **instable**.

### Remarque

Si  $x_0$  est **non hyperbolique** on ne peut rien dire.

### 1.8.2 Stabilité au sens de Liapunov

Un point d'équilibre  $x_0$  du système (1.1) est **stable** si :  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

où  $x(t)$  est une solution de (1.1) et  $x(t_0)$  la valeur initiale.

Si on plus on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0$$

alors  $x_0$  est **asymptotiquement stable**.

## Chapitre 2

# Fonction de Liapunov

### Introduction

En mathématiques, la fonction de Liapunov présentée par le physicien et mathématicien **Alexandre Mikhailovic Liapunov**, est une fonction scalaire qui permet d'évaluer la stabilité d'un système dynamique en déterminant si les trajectoires du système divergent ou convergent vers un point d'équilibre. Elle est définie comme une fonction positive qui décroît le long des trajectoires du système dynamique. Plus précisément, si la dérivée de la fonction de Liapunov le long des trajectoires est négative, alors le système est stable.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité des points d'équilibre du système dynamique décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

Où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ), avec  $x_0$  est un point d'équilibre de ce système.

Si le point d'équilibre  $x_0$  n'est pas hyperbolique, il peut être difficile de déterminer sa stabilité. En général, la stabilité des points d'équilibre non hyperboliques est plus difficile à déterminer. Cependant, la méthode de Liapunov peut souvent être utilisée pour déterminer la stabilité des points d'équilibre lorsque les informations obtenues à partir de la linéarisation ne sont pas concluantes (c'est-à-dire lorsque le point d'équilibre n'est pas hyperbolique). Cette méthode sera l'objet de ce chapitre.

## 2.1 Définition

Soit  $U$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine. Une fonction  $V$  à valeur réelle de  $C^1$  telle que :

$$\begin{cases} V : U \rightarrow \mathbb{R} \\ X \rightarrow V(X) \end{cases} \quad (2.2)$$

est dit :

**i)** Défini positive si :

$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in U, X \neq (0, \dots, 0)$ , on a  $V(X) > 0$  et  $V(0, \dots, 0) = 0$ .

**ii)** Défini négative si :

$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in U, X \neq (0, \dots, 0)$ , on a  $V(X) < 0$  et  $V(0, \dots, 0) = 0$ .

**iii)** Semi défini positive si :

$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in U, X \neq (0, \dots, 0)$ , on a  $V(X) \geq 0$  et  $V(0, \dots, 0) = 0$ .

**iv)** Semi défini négative si :

$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in U, X \neq (0, \dots, 0)$ , on a  $V(X) \leq 0$  et  $V(0, \dots, 0) = 0$ .

**Exemple des fonction définie positive :**

$$I- V_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

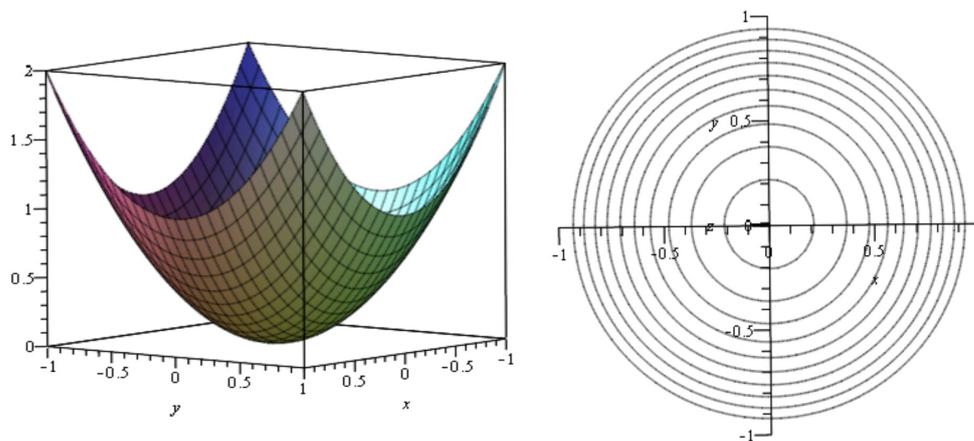


Figure 2.1. Portrait de phase de la fonction  $V_1$

2-  $V_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_2^2}$

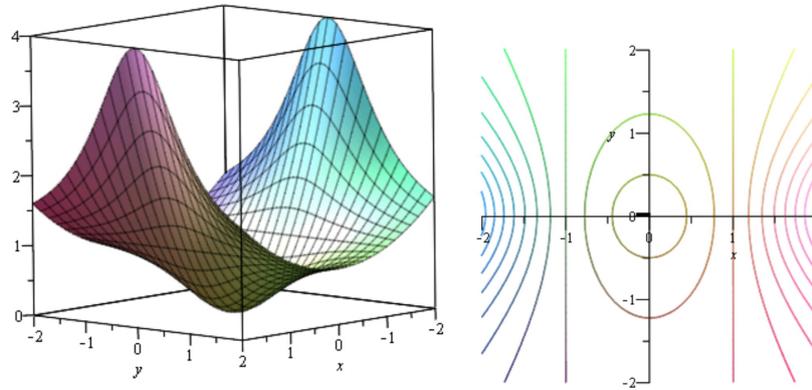


Figure 2.2. Portrait de phase de la fonction  $V_2$

3-  $V_3(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2^4)^2 + 2x_1^2 + 12x_2^2$

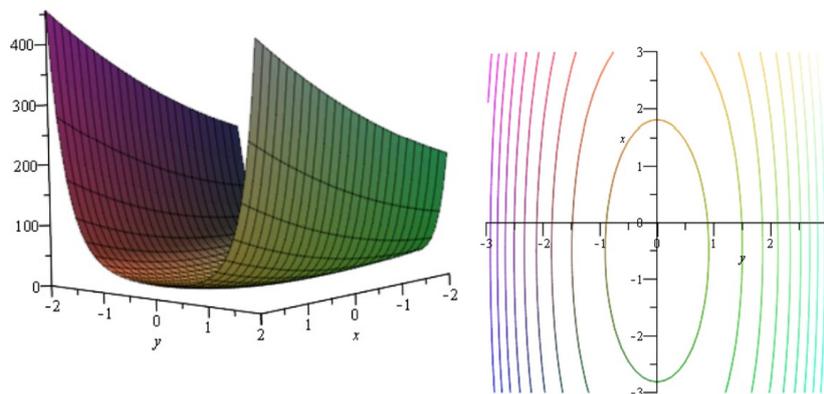


Figure 2.3. Portrait de phase de la fonction  $V_3$

4-  $V_4(x_1, x_2) = (1 - e^{x_1})^2 + 2x_2^4$

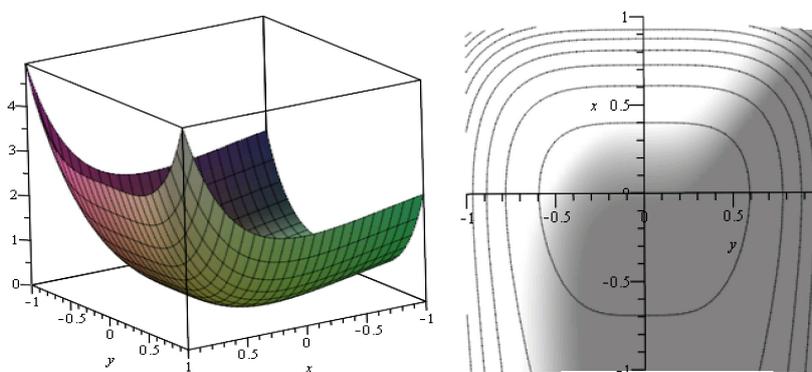


Figure 3.4. Portrait de phase de la fonction  $V_4$

## 2.2 Lemme

La fonction quadratique homogène  $V(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$  où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels, est définie positive si et seulement si  $a > 0$  et  $ac - b^2 > 0$ .

**Remarque :** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction et  $\dot{x} = f(x)$  un système dynamique, avec  $\bar{x}$  un point d'équilibre de ce système, c'est-à-dire que  $f(\bar{x}) = 0$ . par un changement de variable  $y = x - \bar{x}$  on peut se ramener au cas où l'origine est un point d'équilibre ( $f(0) = 0$ ).

## 2.3 Définition

Soit  $x(t) = (x_1, x_2)$  la solution du système  $\dot{x} = f(x)$  et  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction candidate de Liapunov définie positive pour un certain voisinage  $U$  de l'origine.

La dérivée  $\dot{V}$  d'une fonction  $V$  le long du champ de vecteurs  $f$ .

Alors

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x(t))\dot{x}_1(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x(t))\dot{x}_2(t)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \nabla V(x)f(x)$$

où  $\nabla V(x)$  le gradient de  $V$ , et il est perpendiculaire à  $V$ .

On peut savoir comment la solution  $x(t)$  traverse les ensembles de niveau de  $V$ .

- Si  $\dot{V}(x) < 0$ , alors l'orbite traverse la courbe de l'extérieur vers l'intérieur.
- Si  $\dot{V}(x) = 0$ , alors l'orbite est tangente à la courbe.
- Si  $\dot{V}(x) > 0$ , alors l'orbite traverse la courbe de l'intérieur vers l'extérieur.

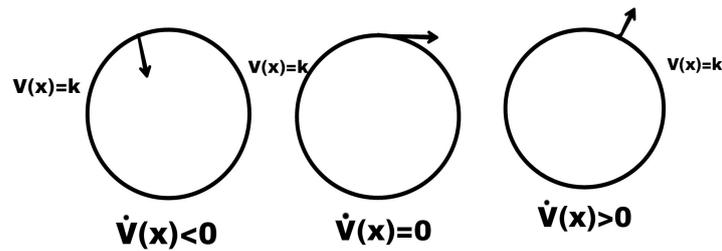


Figure 2.5. Les orbites et les courbes de niveau

## 2.4 Théorème de la stabilité de Liapunov

Soit  $U$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , contenant un point critique  $x_0$ . Supposons que  $f$  est de classe  $C^k, (k \geq 1)$ , et qu'il existe une fonction  $V(x)$  de classe  $C^1$ , qui satisfait les condition :

- $V(x_0) = 0$
  - $V(x) > 0$ , si  $x \neq x_0$
- où  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a :

1. si  $\dot{V}(x) \leq 0$ , pour toute  $x \in U - \{0\}$ ,  $x_0$  est stable.
2. si  $\dot{V}(x) < 0$ , pour toute  $x \in U - \{0\}$ ,  $x_0$  est asymptotiquement stable.
3. si  $\dot{V}(x) > 0$ , pour toute  $x \in U - \{0\}$ ,  $x_0$  est instable.

**Prouve :**

1. on choisit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $\overline{N_\varepsilon(0)} \subset E$  et soit  $m_\varepsilon$  est le minimum de la fonction continue  $V(x)$  sur l'ensemble compact

$$\delta_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = \varepsilon\} \quad (2.3)$$

Alors, comme  $V(x) > 0$  pour  $x \neq 0$ , il suit que  $m_\varepsilon > 0$ .

Comme  $V(x)$  est continue et  $V(0) = 0$ , il suit qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x| < \delta$  implique que  $V(x) < m_\varepsilon$ .

Comme  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour  $x \in E$ , alors elle est décroissante le long des trajectoires de (2.1). Ainsi, si  $\phi_t$  est le flot de l'équation différentielle (2.1), alors pour tout  $x_0 \in N_\varepsilon(0)$  et  $t \geq 0$ , on a

$$V(\phi_t(x_0)) \leq V(x_0) < m_\varepsilon \quad (2.4)$$

Maintenant, on suppose que pour  $|x_0| < \delta$ , il existe un  $t_1 > 0$  tel que  $|\phi_{t_1}(x_0)| = \varepsilon$ , donc  $\phi_{t_1}(x_0) \in \delta_\varepsilon$ . Alors comme  $m_\varepsilon$  est le minimum de  $V(x)$  sur  $\delta_\varepsilon$ , ça implique que

$$V(\phi_{t_1}(x_0)) \geq m_\varepsilon \quad (2.5)$$

qui est une contradiction avec l'inégalité précédente. Donc pour  $|x_0| < \delta$  et  $t \geq 0$ , il suit que  $|\phi_t(x_0)| < \varepsilon$  i.e. 0 est un point d'équilibre stable.

2. On suppose que :

$\dot{V} < 0$ , pour toute  $x \in E$ . Alors  $V(x)$  est strictement décroissante le long des trajectoires du système (2.1).

Soit  $\Phi(t)$  le flot de (2.1) et soit  $x_0 \in N_\varepsilon(0)$ , le voisinage définie dans la partie (1). Donc selon la partie (1), si  $|x_0| < \delta$ ,  $\phi_t(x_0) \in N_\varepsilon(0)$  pour tout  $t \geq 0$ . Soit  $\{t_k\}$  une suite avec  $t \rightarrow \infty$ . Alors comme  $\overline{N_\varepsilon(0)}$  est compact, donc il existe une sous suite de  $\phi_{t_k}(x_0)$  qui converge vers un point dans  $\overline{N_\varepsilon(0)}$ . Mais pour tout sous suite  $\{t_n\}$  de  $\{t_k\}$  tel que  $\phi_{t_n}(x_0)$  converge, on montre que la limite est zéro. Alors il suit que  $\phi_{t_k}(x_0) \rightarrow 0$  pour toute suite  $t_k \rightarrow \infty$  et cela implique que  $\phi_t(x_0) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ ; c'est-à-dire que le zéro est asymptotiquement stable. Il reste à démontrer que  $\phi_{t_n}(x_0) \rightarrow y_0$ , alors  $y_0 = 0$ . comme  $V(x)$  est strictement décroissante le long des trajectoires de (2.1) et comme  $V(\phi_{t_n}(x_0)) \rightarrow V(y_0)$  par continuité de  $V$ , donc :

$$V(\phi_t(x_0)) > V(y_0)$$

pour tout  $t > 0$ . Mais si  $y_0 \neq 0$ , alors pour tout  $s > 0$ , on a :

$V(\phi_s(y_0)) < V(y_0)$  et par continuité, il suit que pour tout  $y$  près de  $y_0$ . On a  $V(\phi_s(y)) < V(y_0)$ . Mais pour  $y = \phi_{t_n}(x_0)$  et  $n$  suffisamment large, on obtient :

$$V(\phi_{s+t_n}) < V(y_0)$$

qui est une contradiction avec l'inégalité ci-dessus. Donc  $y_0$  et il suit que 0 est asymptotiquement stable.

3. Soit  $M$  le maximum de la fonction continue  $V(x)$  dans l'ensemble compact  $\overline{N_\varepsilon(0)}$ . comme  $\dot{V}(x) > 0$ ,  $V(x)$  est strictement croissante le long des trajectoire de (2.1). Ainsi, si  $\phi_t$  est le flot de (2.1), alors pour tout  $\delta > 0$  et  $x_0 \in N_\delta(0) \sim 0$ , on obtient :

$$V(\phi_t(x_0)) > V(x_0) > 0$$

pour tout  $t > 0$ , et comme  $\dot{V}(x)$  est définie positive, implique que :

$$\inf_{t \geq 0} \dot{V}(\phi_t(x_0)) = m > 0$$

Ainsi,

$$V(\phi_t(x_0)) - V(x_0) \geq mt$$

pour tout  $t \geq 0$ . Donc :

$$V(\phi_t(x_0)) > mt > M$$

pour tout  $t$  suffisamment large. C'est-à-dire,  $\phi_t(x_0)$  se trouve à l'extérieur de l'ensemble fermé  $\overline{N_\varepsilon(0)}$ . Ainsi, 0 est instable.

### Remarque

si  $\dot{V}(x) = 0$  pour tout  $x \in E$  alors les trajectoires de (2.1) se trouve sur les surfaces dans  $\mathbb{R}^n$  (ou les courbes dans  $\mathbb{R}^2$ ) définies par :  $V(x) = C$

## 2.5 Théorème(Instabilité)

Supposons que pour le système (2.1), il existe une fonction  $V(x_1, \dots, x_n)$  différentiable dans un voisinage de l'origine et telle que  $V(0, \dots, 0) = 0$ . Si :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot f_n$$

est définie positive et s'il existe dans un voisinage de  $(0, \dots, 0)$  des points en lesquels

$$V(x_1, \dots, x_n) > 0$$

alors le point d'équilibre  $(0, \dots, 0)$  est instable.

### 2.5.1 Remarque

Il n'existe pas une méthode générale pour trouver les fonction de Liapunov, dans les cas simples on les cherche sur la forme :  $V(x, y) = ax^2 + by^2$ , ( $a > 0, b > 0$ )...

## 2.6 Exemples :

### Exemple 01

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2^4 \\ \dot{x}_2 = x_1^4 x_2 \end{cases}$$

$(0,0)$  est le seul point d'équilibre de ce système.

on pose  $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$  est la fonction de Liapunov définie positive pour ce système .

Soit  $U = \mathbb{R}^2$  ,  $V(0,0) = 0$  et  $V(x_1, x_2) > 0$  pour  $(x_1, x_2) \in U \setminus (0,0)$

On a  $\dot{V}(x_1, x_2) = 4x_1^3 \dot{x}_1 + 4x_2^3 \dot{x}_2 = -4x_1^4 x_2^4 + 4x_1^4 x_2^4 = 0$

Donc les courbes de solution se trouvent sur les courbes fermées  $x_1^4 + x_2^4 = c^2$  qui encerclent l'origine . Donc l'origine est un point d'équilibre stable .

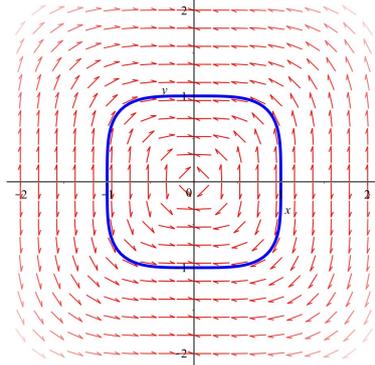


Figure 2.6. Portrait de phase de l'exemple 01

### Exemple 02

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{cases}$$

$(0,0)$  est le seul point d'équilibre de ce système.

on pose  $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$  est la fonction de Liapunov définie positive pour ce système .

Soit  $U = \mathbb{R}^2$  ,  $V(0,0) = 0$  et  $V(x_1, x_2) > 0$  pour  $(x_1, x_2) \in U \setminus (0,0)$

On a  $\dot{V}(x_1, x_2) = 4x_1^3 \dot{x}_1 + 4x_2^3 \dot{x}_2 = 4x_1^3 x_2^3 - 4x_1^3 x_2^3 = 0$

Donc les courbes de solution se trouvent sur les courbes fermées  $x_1^4 + x_2^4 = c^2$  qui encerclent l'origine .

Donc l'origine est un point d'équilibre stable .

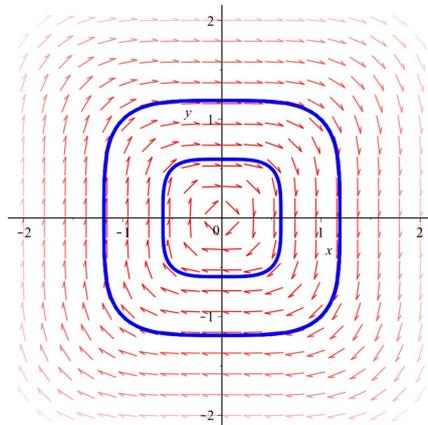


Figure 2.7. Portrait de phase de l'exemple 02

### Exemple 03

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

$(0, 0)$  est le point d'équilibre de ce système.

soit  $V(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_1x_2^4 + x_2^8$ . On peut écrire cette quantité sous la forme  $V(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2^4)^2 + 2x_1^2 + 12x_2^2$  elle est donc définie positive sur  $\mathbb{R}^2$ .

On a

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = (12x_1 + 4x_2^4)(-2x_1 + 2x_2^4) + (24x_2 + 16x_1x_2^3 + 8x_2^7)(-x_2) = -24(x_1^2 + x_2^2) < 0$$

$\dot{V}$  est donc défini négatif. On conclut que le point d'équilibre  $(0, 0)$  est asymptotiquement stable.

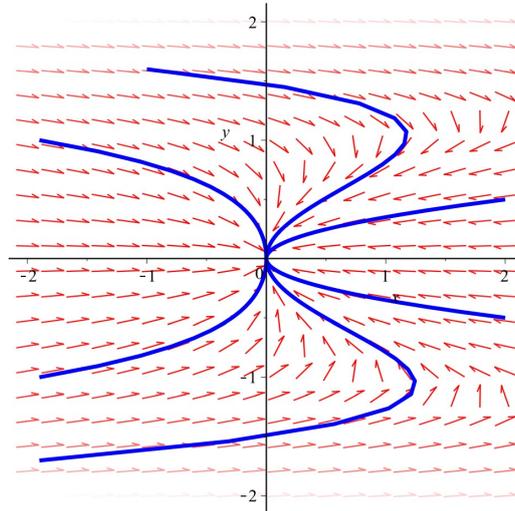


Figure 2.8. Portrait de phase de l'exemple 03

### Exemple 04

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

On a  $(0, 0)$  est le point d'équilibre de ce système.

Soit  $V(x_1, x_2) = x_1^4 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$ , c'est une fonction définie positive.

Soit  $U = \mathbb{R}^2$ . On a

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = (4x_1^3 + 2x_1 + 2x_2)(x_2) + (2x_1 + 4x_2)(-x_2 - x_1^3)$$

alors

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2(x_1^4 + x_2^2)$$

donc  $\dot{V} < 0$ , (définit négative)

Alors, le point d'équilibre  $(0, 0)$  est asymptotiquement stable .

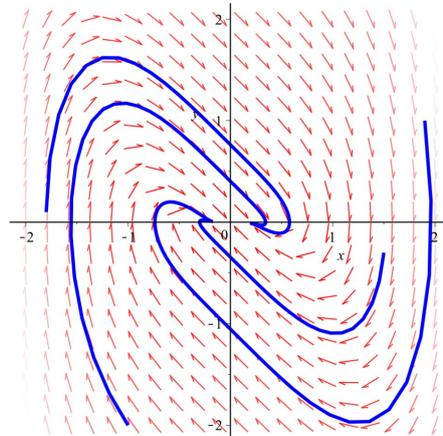


Figure 2.9. Portrait de phase de l'exemple 04

### Exemple 05

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_1^2x_2 \end{cases}$$

$(0, 0)$  est le point d'équilibre de ce système.

Soit  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  définie positive et soit  $U = \mathbb{R}^2$ .

On a

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = (2x_1)(-x_1 + 2x_2 - x_1x_2^2) + (2x_2)(-2x_1 - x_2 - x_1^2x_2) \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2x_2^2) < 0 \end{aligned}$$

$\dot{V}$  est donc définit négative. On conclut que le point d'équilibre  $(0, 0)$  est asymptotiquement stable.

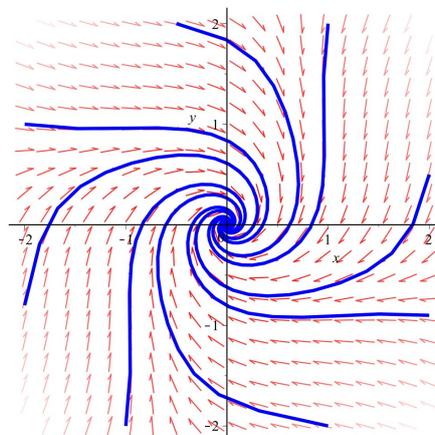


Figure 2.10. Portrait de phase de l'exemple 05

### Exemple 06

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1x_2^4 + 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_2^5 + 2x_2^3 \end{cases}$$

On a  $(0,0)$  est le point d'équilibre de ce système.

Soit  $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_2^2}$  définie positive et soit  $U = \mathbb{R}^2$ .

On a

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= \left( \frac{2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)^2} \right) (x_1 + x_1x_2^4 + 2x_1x_2^2) + \left( \frac{2x_2(1+x_2^2) - 2x_2(x_1^2 + x_2^2)}{(1+x_2^2)^2} \right) (x_2 + x_2^5 + 2x_2^3) \end{aligned}$$

alors

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

donc  $\dot{V} > 0$ , (définit positive)

Alors, le point d'équilibre  $(0,0)$  est instable .

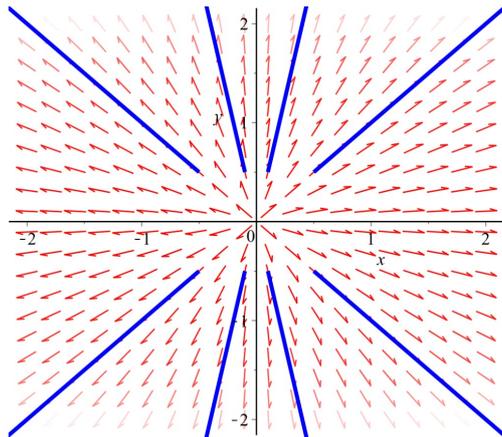


Figure 2.11. Portrait de phase de l'exemple 06

### Exemple 07

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_2^2x_1^5 + x_2 \end{cases}$$

l'origine c'est le point d'équilibre de ce système.

Posons la fonction de Liapunov  $V(x_1, x_2) = x_1^6 + \frac{x_2^2}{2}$  elle est définie positive sur  $\mathbb{R}^2$ . On a :

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = (x_1^5)(5x_1 - x_2^3) + (x_2)(x_2^2x_1^5 + x_2)$$

alors

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 5x_1^6 + x_2^2$$

donc  $\dot{V} > 0$ , (définit positive)

Alors, le point d'équilibre  $(0,0)$  est instable .

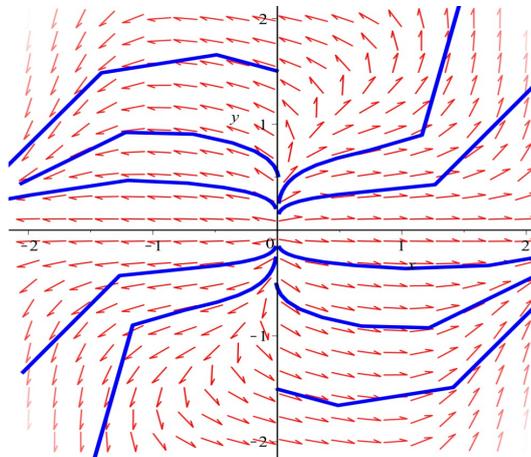


Figure 2.12. Portrait de phase de l'exemple 07

### Exemple 08

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2^2 + x_1^5 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + 5x_1^4 x_2^2 \end{cases}$$

on a  $(0,0)$  est le point d'équilibre.  $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^3}{3}$  est la fonction de Liapunov pour ce système. Soit  $\Omega = \{(x_1, x_2), -x_1 < x_2 < x_1\}$  une région, pour  $(x_1, x_2) \in \Omega, V(x_1, x_2) > 0$ . On a :

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = (x_1^3)(-x_2^2 + x_1^5) + (x_2^2)(x_1^3 + 5x_1^4 x_2^2)$$

alors

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1^8 + 5x_1^4 x_2^4$$

donc  $\dot{V} > 0$ , (définit positive)

Alors, le point d'équilibre  $(0,0)$  est instable .

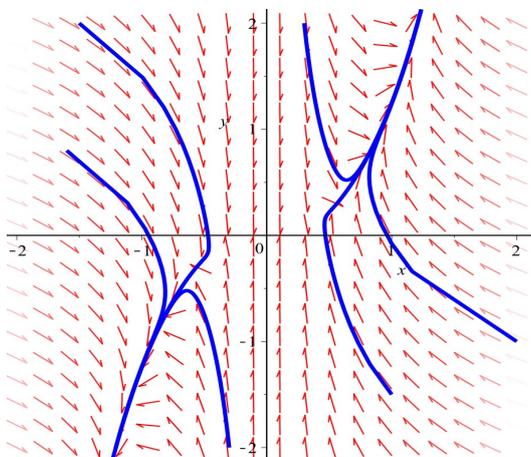


Figure 2.13. Portrait de phase de l'exemple 08

### Exemple 09

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1x_2^2 + 5x_3^2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 5x_3^2 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 = -x_1x_3 - x_3x_1^2 - x_2x_3^2 - x_3^3 \end{cases}$$

L'origine c'est le point d'équilibre de ce système.

$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2$  est la fonction de Liapunov, elle est définie positive dans  $\mathbb{R}^3$ .

Le calcul de  $\dot{V}(x_1, x_2, x_3)$  donne :

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + 10x_3\dot{x}_3 = -2x_1^2x_2^2 - 10x_1^2x_3^2 - 2(x_1^4 + x_2^4 + 5x_3^4) < 0$$

Donc l'origine est asymptotiquement stable.

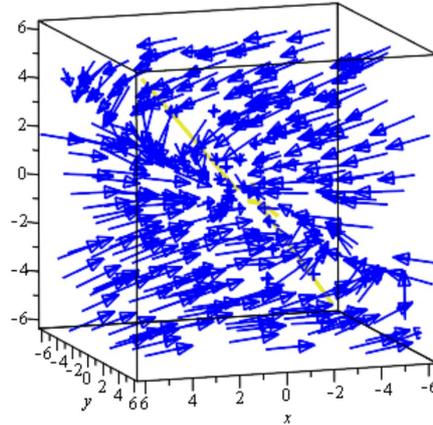


Figure 2.14. Portrait de phase de l'exemple 09

### Exemple 10

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_1x_3 - 2x_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - x_3^3 \end{cases}$$

L'origine c'est le point d'équilibre de ce système.

$V(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$  est la fonction de Liapunov, elle est définie positive dans  $\mathbb{R}^3$ .

Le calcul de  $\dot{V}(x_1, x_2, x_3)$  donne :

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = 4x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + 4x_3\dot{x}_3 = -4(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) < 0$$

Donc l'origine est asymptotiquement stable.

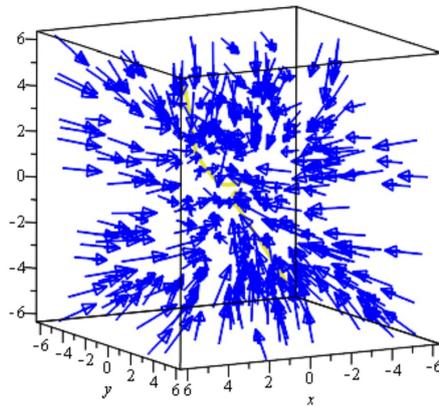


Figure 2.15. Portrait de phase de l'exemple 10

**Exemple 11**

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

L'origine c'est le point d'équilibre de ce système.

On a  $V(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$ , on peut écrire cette quantité sous la forme :  $V(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + \frac{x_2}{4})^2 + \frac{15}{8}x_2^2 + x_3^2$  elle est définie positive dans  $\mathbb{R}^3$ .

Le calcul de  $\dot{V}(x_1, x_2, x_3)$  donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2, x_3) &= (4x_1 + x_2)\dot{x}_1 + (4x_2 + x_1)\dot{x}_2 + 2x_3\dot{x}_3 = \\ &= (4x_1 + x_2)(2x_3) + (4x_2 + x_1)(-2x_3) + 2x_3(-3x_1 + 3x_2) = 8x_1x_3 + 8x_2x_3 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 = 0 \end{aligned}$$

Donc l'origine est stable.

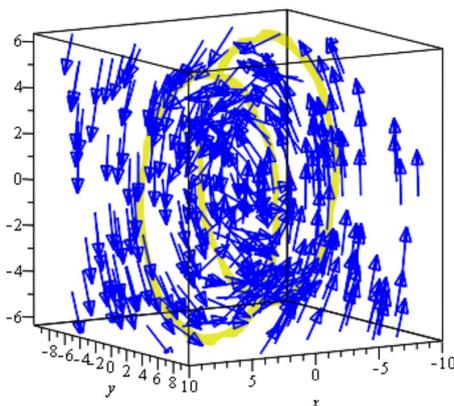


Figure 2.16. Portrait de phase de l'exemple 11

## **2.7 Conclusion**

La fonction de Liapunov est un outil mathématique important pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques.

## Chapitre 3

# Étude de la stabilité des points d'équilibres de certaines équation de Duffing

### Introduction

Les équations de Duffing sont des équations différentielles non linéaires qui modélisent les mouvements de systèmes oscillants. Elle ont été introduites par Georg Duffing en 1918 pour modéliser le comportement des oscillateurs électromécaniques. Les équation de Duffing sont de la forme :

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(t, x) = p(t)$$

où  $x$  représente la position de l'oscillateur,  $c$  est un constantes de frottement et  $P(t)$  est une fonction continue et  $2\pi$ -périodique.

Les équation de Duffing ont des solutions périodiques lorsque la fréquence de la force externe est proche d'une fréquence naturelle de l'oscillateur.

L'analyse de stabilité des solutions périodiques des équation de Duffing peut se faire à l'aide de la fonction de Liapunov.

La méthode de Cartwright est une approche graphique qui permet de construire une fonction de Liapunov pour une équation différentielle donnée. Pour l'équation de Duffing, cette méthode peut être utilisée pour construire une fonction de Liapunov pour étudier la stabilité.

L'approche des valeurs propres est une méthode qui permet de déterminer la stabilité de la solution périodique de l'équation. Cette approche consiste à analyser les valeurs propres de la matrice Jacobienne de l'équation autour des points d'équilibre.

L'objet de ce chapitre est d'étudier la stabilité des systèmes de type Duffing de la forme :

$$\ddot{x} + c\dot{x} + ax + bx^2 + 2x^3 = p(t)$$

où  $a, b, c$  sont des constantes, avec des condition aux limites  $x(0) = x(2\pi)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$ .

### 3.1 Construction de la fonction de Liapunov pour l'équation de Duffing à l'aide de la méthode de Cartwright

Cette méthode peut être utilisée pour construire une fonction de Liapunov pour étudier la stabilité de l'équation de Duffing.

On considère l'équation de Duffing de la forme :

$$\ddot{x} + c\dot{x} + ax + bx^2 + 2x^3 = p(t) \quad (3.1)$$

Le système équivalent à l'équation (3.1) est :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -cy - ax - h(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $h(x) = bx^2 + 2x^3$  et  $p(t) = 0$ .

La matrice Jacobienne du système (3.2) est  $J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a - h'(x) & -c \end{bmatrix}$

$(0,0)$  est un point d'équilibre de (3.2).

On suppose que toutes les valeurs propre de la matrice  $J$  au point  $(0,0)$  ont des parties réelles négatives. Alors d'après la théorie générale qui correspond à tout forme quadratique positive  $U(x)$ , il existe une autre forme quadratique définie positive  $V(x)$  telle que :

$$\dot{V} = -U \quad (3.3)$$

On choisit la forme quadratique la plus générale d'ordre deux et on choisit le coefficient sous la forme quadratique pour satisfaire l'équation (3.3) le long des étapes de la solution de l'équation (3.3), nous supposons que  $V$  est défini par :

$$2V = Ax^2 + By^2 + 2Kxy \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Ax\dot{x} + By\dot{y} + K(\dot{x}y + y\dot{x}) \\ &= Axy + By(-cy - ax - h(x)) + Ky^2 + Kx(-cy - ax - h(x)) \\ &= Axy - Bcy^2 - Baxy - h(x)By + Ky^2 - Kcxy - Kax^2 - h(x)Kx \end{aligned}$$

On simplifie les coefficients, on obtient :

$$\dot{V} = (A - Ba - Kc)xy + (K - Bc)y^2 - (Ka)x^2 - (Kx + By)h(x) \quad (3.5)$$

Termes	Coefficient
$xy$	$A - Ba - Kc$
$y^2$	$K - Bc$
$x^2$	$-Ka$
$h(x)$	$-(Kx + By)$

**Tableau 1.** Les termes et les coefficients de (3.5)

Pour rendre  $\dot{V}$  définit négative, nous assimilons le coefficient de la variable mixte à zéro et les coefficients de  $x^2$  et  $y^2$  à toute constante ( $\delta$ ) comme indiqué dans le tableau 1.

$$A - Ba - Kc = 0 \quad (1)$$

$$K - Bc = \delta \quad (2)$$

$$-Ka = \delta \quad (3)$$

$$-(Kx + By) = 0 \quad (4)$$

à partir de l'équation (3) ci-dessus

$$-Ka = \delta$$

$$K = -\frac{\delta}{a}$$

Ensuite, On substitut la valeur de  $K$  dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{a} - Bc &= \delta \\ -Bc &= \delta + \frac{\delta}{a} \end{aligned}$$

$$B = -\frac{\delta(a+1)}{ca}$$

On remplace  $K$  et  $B$  dans (1) on obtient :

$$A = Ba + Kc = -\frac{\delta(a+1)}{c} - \frac{\delta c}{a}$$

par simplification, on a :

$$A = -\frac{\delta}{ca} [(a+1)a + c^2]$$

la substitution des valeurs des constantes  $A, B, K$  dans l'équation (3.4), donne :

$$2V = -\frac{\delta}{ca} [(a+1)a + c^2] x^2 - \frac{\delta}{ca} [a+1] y^2 - 2\frac{\delta}{a} xy$$

$$V = -\frac{\delta}{2ca} [((a+1)a + c^2)x^2 + (a+1)y^2 + 2cxy]$$

on choisit  $\frac{\delta}{ca} = -1$

$$V = \frac{1}{2} [((a+1)a + c^2)x^2 + (a+1)y^2 + 2cxy] > 0 \quad (3.6)$$

L'utilisation de l'équation (3.6) et le fait que  $\dot{V} < 0$ , le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

### 3.1.1 Application de la méthode

On présente quelques exemples pour illustrer l'application de la méthode de Cartwright pour construire la fonction de Liapunov :

### Exemple 01

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2y - x - 2x^3 \end{cases} \quad (3.7)$$

$(0,0)$  est un point d'équilibre.

la matrice jacobienne du système (3.7) au point  $(0,0)$  :

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 6x^2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

les valeurs propre de la matrice  $J_{(0,0)}$  :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 1 \quad (3.8)$$

où  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  sont les racines de (3.8).

Alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

On suppose que  $V$  est défini par :

$$2V = Ax^2 + By^2 + 2Kxy \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (Ax + Ky)\dot{x} + (By + Kx)\dot{y} \\ &= (Ax + Ky)y + (By + Kx)(-2y - x - 2x^3) \\ &= Axy + Ky^2 - 2By^2 - Bxy - 2Bx^3y - 2Kxy - Kx^2 - 2Kx^4 \\ &= (A - B - 2K)xy + (-K)x^2 + (K - 2B)y^2 + h(x)(-By - Kx) \end{aligned}$$

où  $h(x) = 2x^3$ .

Pour rendre  $\dot{V}$  définit négative :

$$A - B - 2K = 0 \quad (1)$$

$$K - 2B = \delta \quad (2)$$

$$-K = \delta \quad (3)$$

$$-(Kx + By) = 0 \quad (4)$$

à partir de l'équation (3) ci-dessus

$$K = -\delta$$

Ensuite, On substitut la valeur de  $K$  dans l'équation (2), on obtient :

$$-\delta - 2B = \delta$$

$$B = -\delta$$

On remplace  $K$  et  $B$  dans (1) on obtient :

$$A - B - 2K = 0$$

$$A + \delta + 2\delta = 0$$

$$A = -3\delta$$

la substitution des valeurs des constantes  $A, B, K$  dans l'équation (3.9)

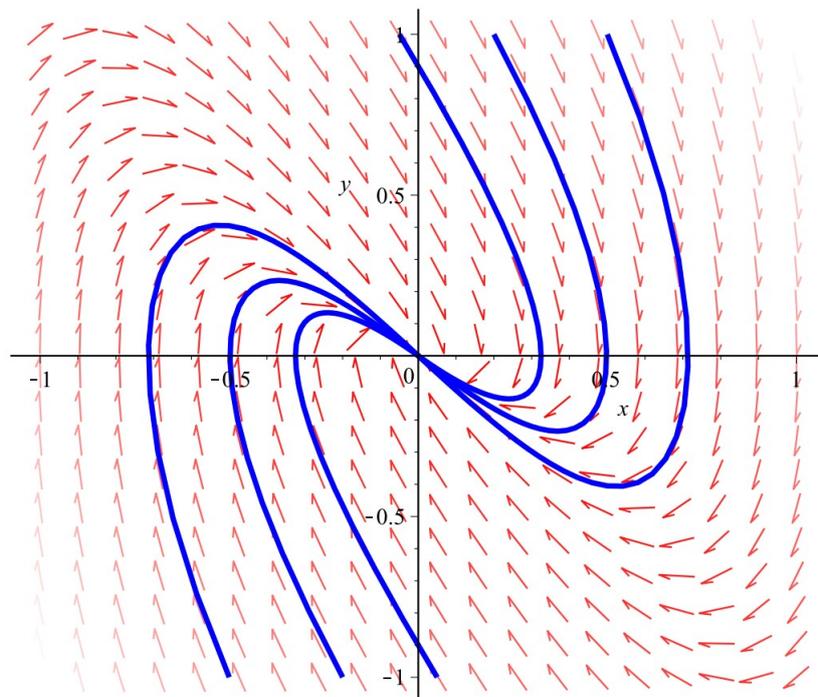
$$2V = -3\delta x^2 - \delta y^2 - 2\delta xy$$

$$V = -\frac{\delta}{2} [3x^2 + y^2 + 2xy]$$

on choisit  $\delta = -2$

$$V = 3x^2 + y^2 + 2xy > 0 \quad (3.10)$$

Par l'utilisation de l'équation (3.10) et le fait que  $\dot{V} < 0$ , on confirme que le point d'équilibre est asymptotiquement stable.



**Figure 3.1. Portrait de phase de l'exemple 01**

**Exemple 02**

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - x - x^2 - 2x^3 \end{cases} \quad (3.11)$$

(0,0) est un point d'équilibre.

la matrice jacobienne du système (3.11) aux point (0,0) :

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x - 6x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

les valeurs propre de la matrice  $J_{(0,0)}$  :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 \quad (3.12)$$

où  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$  sont les racines de (3.12).

Alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

On suppose que  $V$  est défini par :

$$2V = Ax^2 + By^2 + 2Kxy \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (Ax + Ky)\dot{x} + (By + Kx)\dot{y} \\ &= (Ax + Ky)y + (By + Kx)(-y - x - h(x)) \\ &= Axy + Ky^2 - By^2 - Bxy - h(x)By - Kxy - Kx^2 - h(x)Kx \\ &= (A - B - K)xy + (-K)x^2 + (K - B)y^2 + h(x)(-By - Kx) \end{aligned}$$

où  $h(x) = x^2 + 2x^3$ .

Pour rendre  $\dot{V}$  définit négative :

$$A - B - K = 0 \quad (1)$$

$$K - B = \delta \quad (2)$$

$$-K = \delta \quad (3)$$

$$-(Kx + By) = 0 \quad (4)$$

à partir de l'équation (3) ci-dessus

$$K = -\delta$$

Ensuite, On substitut la valeur de  $K$  dans l'équation (2), on obtient :

$$-\delta - B = \delta$$

$$B = -2\delta$$

On remplace  $K$  et  $B$  dans (1) on obtient :

$$A - B - K = 0$$

$$A + 2\delta + \delta = 0$$

$$A = -3\delta$$

la substitution des valeurs des constantes  $A, B, K$  dans l'équation (3.13)

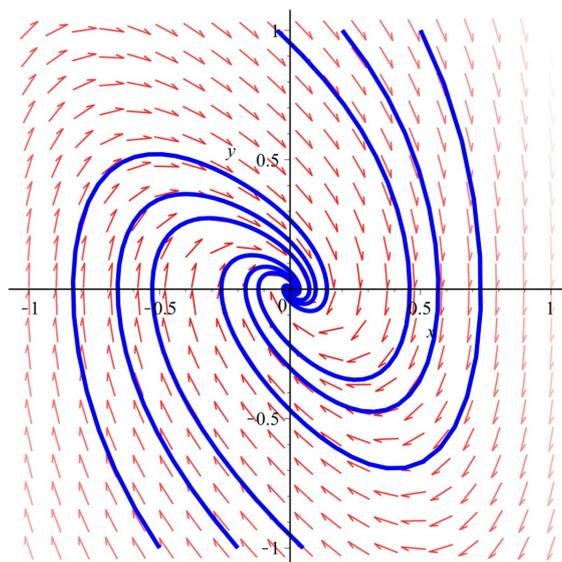
$$2V = -3\delta x^2 - 2\delta y^2 - 2\delta xy$$

$$V = -\frac{\delta}{2} [3x^2 + 2y^2 + 2xy]$$

on choisit  $\delta = -2$

$$V = 3x^2 + 2y^2 + 2xy > 0 \quad (3.14)$$

Par l'utilisation de l'équation (3.14) et le fait que  $\dot{V} < 0$ , on confirme que le point d'équilibre est asymptotiquement stable.



**Figure 4.2. Portrait de phase de l'exemple 02**

### Exemple 03

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - 3x - 4x^2 - 2x^3 \end{cases} \quad (3.15)$$

$(0, 0)$  est un point d'équilibre.

la matrice jacobienne du système (3.15) aux point  $(0, 0)$  :

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 - 8x - 6x^2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

les valeurs propre de la matrice  $J_{(0,0)}$  :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + 3 \quad (3.16)$$

où  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11.75}}{2}$  sont les racines de (3.16).

Alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

On suppose que  $V$  est défini par :

$$2V = Ax^2 + By^2 + 2Kxy \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (Ax + Ky)\dot{x} + (By + Kx)\dot{y} \\ &= (Ax + Ky)y + (By + Kx)(-\frac{1}{2}y - 3x - h(x)) \\ &= Axy + Ky^2 - \frac{1}{2}By^2 - 3Bxy - h(x)By - \frac{1}{2}Kxy - 3Kx^2 - h(x)Kx \\ &= (A - 3B - \frac{1}{2}K)xy + (-3K)x^2 + (K - \frac{1}{2}B)y^2 + h(x)(-By - Kx) \end{aligned}$$

où  $h(x) = 4x^2 + 2x^3$ .

Pour rendre  $\dot{V}$  définit négative :

$$A - 3B - \frac{1}{2}K = 0 \quad (1)$$

$$K - \frac{1}{2}B = \delta \quad (2)$$

$$-3K = \delta \quad (3)$$

$$-(Kx + By) = 0 \quad (4)$$

à partir de l'équation (3) ci-dessus

$$K = -\frac{\delta}{3}$$

Ensuite, On substitut la valeur de  $K$  dans l'équation (2), on obtient :

$$-\frac{\delta}{3} - \frac{1}{2}B = \delta$$

$$B = -\frac{8\delta}{3}$$

On remplace  $K$  et  $B$  dans (1) on obtient :

$$A - 3B - \frac{1}{2}K = 0$$

$$A + 8\delta + \frac{1}{6}\delta = 0$$

$$A = -\frac{49}{6}\delta$$

la substitution des valeurs des constantes  $A, B, K$  dans l'équation (3.17)

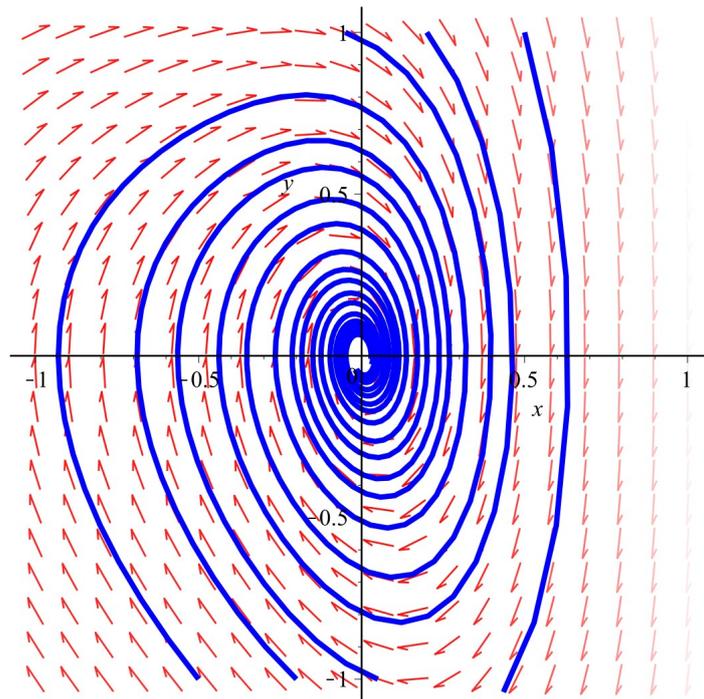
$$2V = -\frac{49}{6}\delta x^2 - \frac{8}{3}\delta y^2 - \frac{2}{3}\delta xy$$

$$V = -\frac{\delta}{6} \left[ \frac{49}{2}x^2 + 8y^2 - 2xy \right]$$

on choisit  $\delta = -6$

$$V = \frac{49}{2}x^2 + 8y^2 - 2xy > 0 \quad (3.18)$$

Par l'utilisation de l'équation (3.18) et le fait que  $\dot{V} < 0$ , on confirme que le point d'équilibre est asymptotiquement stable.



*Figure 3.3. Portrait de phase de l'exemple 03*

### 3.1.2 Remarque

Pour appliquer la méthode de Cartwright pour construire la fonction de Liapunov, il est nécessaire que  $a > 0$ ,  $c > 0$   $g > 0$ .

### 3.2 Étude de la stabilité de l'équation de Duffing à l'aide de l'approche des valeurs propres

L'approche des valeurs propres est une méthode qui permet de déterminer la stabilité de l'équation de Duffing. Cette approche consiste à analyser les valeurs propres de la matrice Jacobienne linéarisée de l'équation autour des points d'équilibre.

Considérons le système (3.2)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -cy - ax - bx^2 - 2x^3 \end{cases} \quad (3.19)$$

Cherchons les points d'équilibre, nous avons :

$\dot{x} = y = 0$  alors  $y = 0$  et  $\dot{y} = -ax - bx^2 - 2x^3 = x(-a - bx - 2x^2)$ , qui donne :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8a}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8a}}{4}.$$

Donc, les points d'équilibres de (3.19) sont :  $(0, 0)$ ,  $(x_1, 0)$  et  $(x_2, 0)$ .

L'étude de la stabilité des points d'équilibre peut se faire en linéarisant le système (3.19) qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -cy - (a + 2bx + 6x^2)x \end{cases} \quad (3.20)$$

la matrice Jacobienne est :

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a + 2bx + 6x^2) & -c \end{bmatrix}$$

Nous étudions la stabilité des points d'équilibres pour des différentes valeurs de  $a, b, c$ .

L'équation satisfaite par les valeurs propres de la matrice de stabilité de nos système est :

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -(a + 2bx + 6x^2) & -c - \lambda \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\lambda^2 + \lambda c + g = 0$$

où  $g = a + 2bx + 6x^2$ .

Nous discutons la stabilité selon les valeurs de  $\delta$  et  $g$ , avec  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[ -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right]$ .

A) Pour  $c > 0$ , on a  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right)$ , nous considérons les cas suivants :

1) Pour  $g = 0$ , on a  $\lambda_{1,2} = 0, -2c$ , nous ne pouvons rien dire.

2) Pour  $g > 0$ , on a  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right)$ , nous avons les cas suivants :

a) si  $c^2 < 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm i\sqrt{c^2 - 4g} \right)$  sont complexes conjuguées avec une partie réelle négative, donc la stabilité est asymptotique.

b) si  $c^2 > 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right)$  sont réelles et négatives, donc la stabilité est asymptotique.

c) si  $c^2 = 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2}$  sont réelles et négatives, donc la stabilité est asymptotique.

3) Pour  $g < 0$ , on a  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right)$  sont réelles de signe opposées, donc le point d'équilibre est un selle et on a l'instabilité.

**B)** Pour  $c < 0$ , on a  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right)$ , nous considérons les cas suivants :

1) Pour  $g = 0$ , on a  $\lambda_{1,2} = 0, -2c$  nous ne pouvons rien dire.

2) Pour  $g > 0$ , on a  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right)$ , nous avons les cas suivants :

a) si  $c^2 < 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm i\sqrt{c^2 - 4g} \right)$  sont complexes conjuguées avec une partie réelle positive, donc l'instabilité.

b) si  $c^2 > 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right)$  sont réelles et positives, donc l'instabilité.

c) si  $c^2 = 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2}$  sont réelles et positives, donc l'instabilité.

3) Pour  $g < 0$ , on a  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -c \pm \sqrt{c^2 - 4g} \right)$  sont réelles et de signe opposées, donc le point d'équilibre est un selle et on a l'instabilité.

Cas particulier, si  $c = 0$ , le système (3.11) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax - bx^2 - 2x^3 \end{cases} \quad (3.22)$$

de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases}$$

c'est un système hamiltonien (conservatif) où  $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int f(x) dx$

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + v(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

où  $v$  est appelé potentiel ou fonction énergie,  $H(x, y)$  est appelée intégral première.

$$y = \pm \sqrt{2(c - v(x))}$$

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + v(x)$$

$$\dot{x}^2 = 2H - 2v(x)$$

$$t = \int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2H - ax^2 - \frac{2}{3}bx^3 - x^4}}$$

Nous présentons la discussion de la stabilité de l'équation de Duffing selon les valeurs des paramètres  $a, b, c$  dans le tableau suivant :

Les valeurs des paramètres	Les points d'équilibres	Les valeurs propres	Nature	Stabilité
$a = 0.1$ $b = 0.9$ $c = 0.1$	$x_0 = 0$	0.1 -0.2	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
	$x_1 = -0.2$	-0.05 + 0.96i -0.05 - 0.96i	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
	$x_2 = -0.25$	-0.05 + 0.31i -0.05 - 0.31i	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
$a = 0.02$ $b = 0.4$ $c = 0.3$	$x_0 = 0$	-0.1 -0.2	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
	$x_1 = -0.1$	-0.15 + 0.37i -0.15 - 0.37i	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
	$x_2 = -0.1$	-0.15 + 0.37i -0.15 - 0.37i	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
$a = -0.01$ $b = -0.6$ $c = 0.02$	$x_0 = 0$	0.09 -0.1	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
	$x_1 = 0.31$	-0.01 + 0.96i -0.01 - 0.96i	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
	$x_2 = -0.01$	0.13 -0.15	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
$a = -0.3$ $b = -0.1$ $c = -0.2$	$x_0 = 0$	0.65 -0.45	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
	$x_1 = 0.41$	0.1 + 0.88i 0.1 - 0.88i	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
	$x_2 = -0.36$	0.1 + 0.62i 0.1 - 0.62i	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>

**Tableau 2.** L'étude de stabilité et les solutions numériques de l'équation de Duffing à différentes valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

### 3.3 Stabilité de l'équation de Duffing en utilisant Maple

```

> restart;
> # a=0.1 b=0.2 c=0.1
> # t0=0 t1=150
>
> # On Considère le système:
> p := ẋ=y;

```

$$p := \frac{d}{dt} x(t) = y \quad (1)$$

```

> q := ẏ=-0.1·y - (0.1·x + 0.2·x2 + 2·x3);

```

$$q := \frac{d}{dt} y(t) = -0.1 y(t) - 0.1 x - 0.2 x^2 - 2 x^3 \quad (2)$$

```

>
> # (0,0) est un point d'équilibre de ce système
>
> # on calcule la matrice Jacobienne:
> with(Student[MultivariateCalculus]) :
> Jx,y := Jacobian([y, -0.1·y - 0.1·x - 0.2·x2 - 2·x3], [x, y], output = matrix);

```

$$J_{x,y} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 - 0.4x - 6x^2 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```

> J0,0 := eval(Jx,y, [x=0, y=0]);

```

$$J_{0,0} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```

> # on calcule les valeurs propres
> with(LinearAlgebra) :
> P := CharacteristicPolynomial(J0,0, λ);

```

$$P := 0.1 \lambda + \lambda^2 + 0.1 \quad (5)$$

```

> solve(P, λ);

```

$$-0.050000000000 + 0.3122498999 I, -0.050000000000 - 0.3122498999 I \quad (6)$$

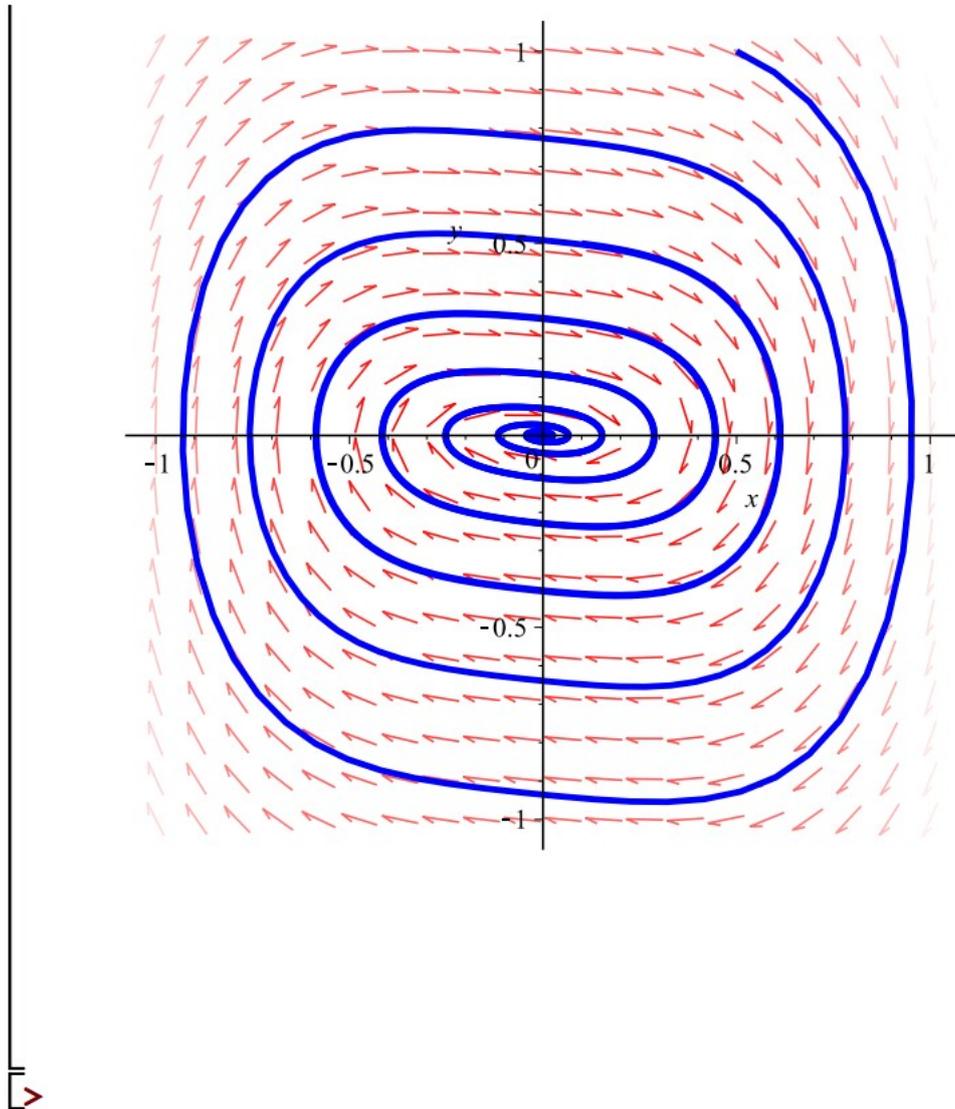
```

>
> # La figure
> with(DEtools) :
> DEplot([p, q], [x(t), y(t)], t=0..150, x=-1..1, y=-1..1, [[x(0)=0.5, y(0)=1], [x(0)=0.1,
y(0)=0.5], [x(0)=0.29, y(0)=0.24]], stepsize=0.1, linecolor=blue, color
=magnitude[red, white]);

```

Warning, y is present as both a dependent variable and a name. Inconsistent specification of the dependent variable is deprecated, and it is assumed that the name is being used in place of the dependent variable.

Warning, x is present as both a dependent variable and a name. Inconsistent specification of the dependent variable is deprecated, and it is assumed that the name is being used in place of the dependent variable.



### 3.4 Étude de stabilité de l'équation de Duffing sous Oyesanya et Nwamba

L'oscillateur de Duffing cubique-quintique est donné par :

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 + \mu x^5 = 0 \quad (3.23)$$

on peut écrire l'équation (3.23) sous le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\delta y - \alpha x - \beta x^3 - \mu x^5 \end{cases} \quad (3.24)$$

On cherche les points d'équilibres. A partir de la condition  $\dot{x} = 0$ , nous obtenons  $y = 0$ , on substitue dans  $\dot{y}$  on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta x^3 + \mu x^5 &= 0 \\ x [\alpha + \beta x^2 + \mu x^4] &= 0\end{aligned}\quad (3.25)$$

Les racines de (3.25) sont :

$$x_0 = 0, \quad x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2\mu} \left[ -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\mu\alpha} \right]}\quad (3.26)$$

Donc, les points d'équilibre sont :  $(x_0, 0), (x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0)$ .

L'équation satisfaite par les valeurs propres de la matrice de stabilité du système est :

$$\lambda^2 + \delta\lambda = -\alpha - 3\beta x^2 - 5\mu x^4\quad (3.27)$$

où  $x$  représente  $x_0, x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  ou la coordonnée  $x$  d'un point d'équilibre  $(x, 0)$ .

Le fait que nos valeurs propres soient complexes ou réelles sera déterminé par les valeurs de  $\delta$  et  $g = \alpha + 3\beta x^2 + 5\mu x^4$ , avec  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[ \delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4g} \right]$ .

**A)** Pour  $\delta = 0$ , on considère les cas suivants :

1) si  $g = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$ .

Ceci contredit l'hypothèse que  $\det J \neq 0$  et implique également que  $\alpha, \beta, \mu$  sont tous nuls, où  $J$  est la matrice Jacobienne du système (4.18).

2) si  $g > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{4g}$ .

Cela correspond à des points d'équilibres qui sont des centres pour lesquels la stabilité est non assurée.

3) si  $g < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-4g}$  qui correspond à des selles donnant l'instabilité.

**B)** Pour  $\delta > 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4g} \right]$ , on a les cas suivants :

1) si  $g = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, -2\delta$  ce qui contredit notre hypothèse selon laquelle  $\det J \neq 0$ . Cela implique également que  $\alpha, \beta, \mu$  sont tous nuls.

2) si  $g > 0$ , on a trois cas :

a) si  $\delta^2 < 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -\delta \pm i\sqrt{\delta^2 - 4g} \right]$  qui correspond à la stabilité asymptotique.

b) si  $\delta^2 > 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4g} \right]$  sont réelles et négatives, donc la stabilité est asymptotique.

c) si  $\delta^2 = 4g \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\delta}{2}$ , donc on a des nœud, stabilité asymptotique.

3) si  $g < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4g} \right]$ , on a toujours  $\delta < \sqrt{\delta^2 - 4g}$  qui correspond à des selles, donc l'instabilité.

On considère maintenant l'étude de la stabilité de la dynamique pour quelques choix de  $\alpha, \beta, \mu$  et  $\delta$  en utilisant les équations (3.25) et (3.27). Ces choix sont illustrés dans le tableau 3.

Les valeurs des paramètres	Les points d'équilibres	Les valeurs propres	Nature	Stabilité
$\alpha = 1$ $\beta = -1$ $\mu = 0.01$ $\delta = 1$	$x_0 = 0$	$-0.5 + 0.86i$ $-0.5 - 0.86i$	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
	$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 0.04}}{0.02}}$	$-0.5 + 13.87i$ $-0.5 - 13.87i$	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
	$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 0.04}}{0.02}}$	$0.98$ $-1.98$	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
$\alpha = -1$ $\beta = 5$ $\mu = -1$ $\delta = 0.01$	$x_0 = 0$	$0.99$ $-1$	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
	$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{25 - 4}}{-2}}$	$-0.005 + 1.38i$ $-0.5 - 1.38i$	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
	$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-5 - \sqrt{25 - 4}}{-2}}$	$6.62$ $-6.63$	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\mu = -0.02$ $\delta = -5$	$x_0 = 0$	$5.19$ $-0.19$	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
	$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 0.08}}{-0.04}}$	$4.57$ $0.42$	<i>Foyer</i>	<i>Instable</i>
	$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 0.04}}{0.02}}$	$12.46$ $-7.46$	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
$\alpha = -1.5$ $\beta = 0.6$ $\mu = -0.05$ $\delta = 0.1$	$x_0 = 0$	$1.17$ $-1.27$	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>
	$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-0.6 + \sqrt{0.36 - 0.3}}{-0.1}}$	$-0.05 + 1.31i$ $-0.05 - 1.31i$	<i>Foyer</i>	<i>Asymptotiquement stable</i>
	$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-0.6 - \sqrt{0.36 - 0.3}}{-0.1}}$	$1.96$ $-2.06$	<i>Selle</i>	<i>Instable</i>

**Tableau 3.** Étude de la stabilité de la dynamique de l'oscillateur pour quelques choix des paramètres  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\mu$ .

### 3.5 Portrait de phases

Considérons l'équation de Duffing de la forme :

$$\ddot{x} + c\dot{x} + ax + bx^2 + 2x^3 = 0 \quad (3.28)$$

Nous disposons de figures représentant le portrait de phase de l'équation (3.24) pour différentes valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

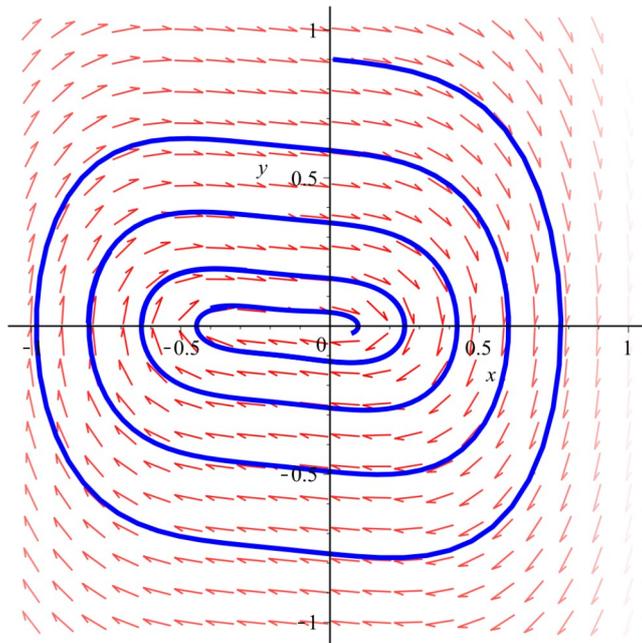


Figure 3.4. Portrait de phase de l'équation (3.24) pour les valeurs  $a=0.1$ ,  $b=0.9$ ,  $c=0.1$

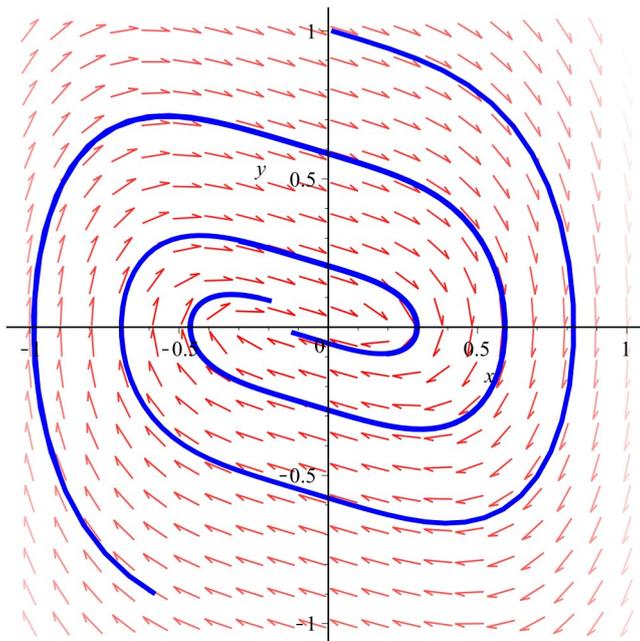
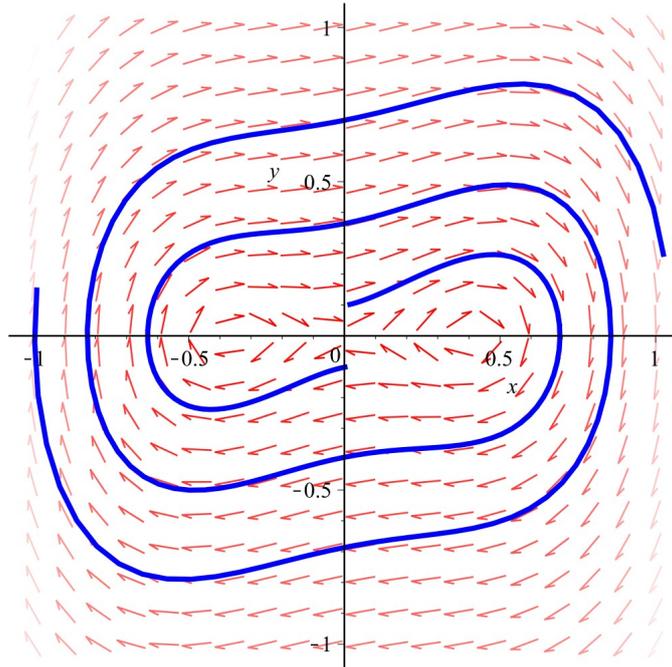


Figure 3.5. Portrait de phase de l'équation (3.24) pour les valeurs  $a=0.02$ ,  $b=0.4$ ,  $c=0.3$

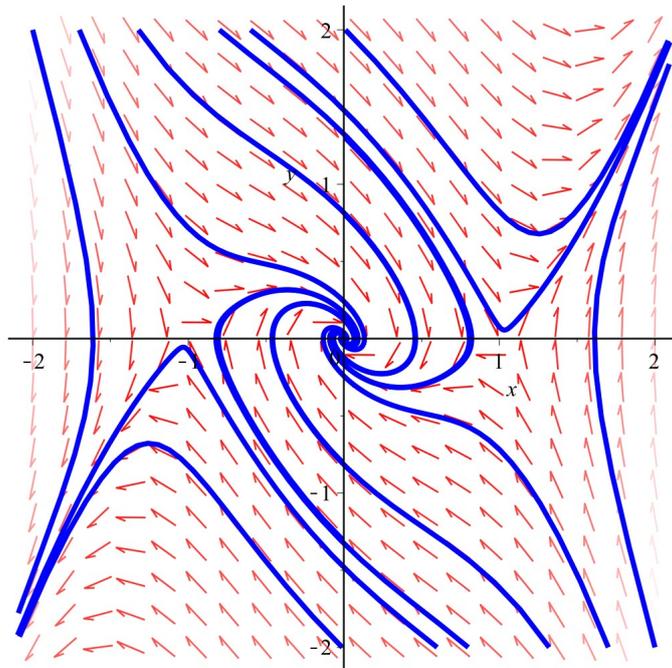


**Figure 3.7. Portrait de phase de l'équation (3.24) pour les valeurs  $a=-0.3, b=-0.1, c=-0.2$**

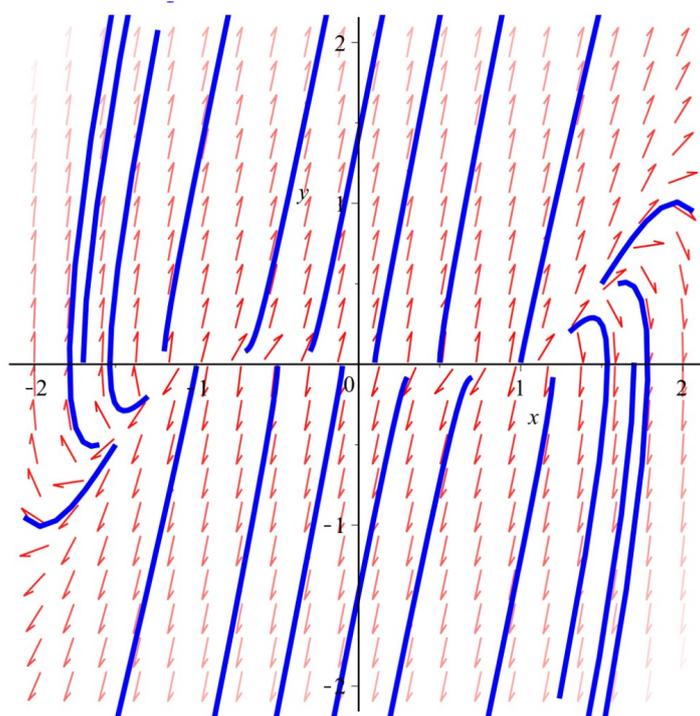
Nous disposons également de figures représentant le portrait de phase de l'équation :

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 + \mu x^5 = 0 \quad (3.29)$$

pour différentes valeurs des variables  $\delta, \alpha, \beta, \mu$ .



**Figure 3.8. Portrait de phase de l'équation (3.25) pour les valeurs  $\alpha = 1, \beta = -1, \mu = 0.01, \delta = 1$**



**Figure 3.10.** *Portrait de phase de l'équation (3.25) pour les valeurs  $\alpha = -1, \beta = 1, \mu = -0.02, \delta = -5$*

### 3.6 Conclusion

l'étude de la stabilité des points d'équilibre des équations de Duffing nous a permis de mieux comprendre le comportement dynamique de ces systèmes non linéaires. Nous avons observé que la stabilité des points d'équilibre dépend de la valeur des coefficients dans l'équation de Duffing.



## Chapitre 4

# La stabilité asymptotique d'un système polynomial sans fonction de Liapunov polynomiale

### Introduction

L'étude des systèmes dynamiques et de leur stabilité revêt une importance fondamentale dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. L'un des concepts clés dans cette discipline est celui des champs de vecteurs et des fonctions de Liapunov. Les champs de vecteurs polynomial sont des systèmes dynamiques caractérisés par des équations différentielles polynomiales. Lorsqu'un tel champ de vecteurs est globalement asymptotiquement stable, cela signifie que toutes les trajectoires du système convergent vers un état d'équilibre stable à mesure que le temps avance. Traditionnellement, la stabilité d'un tel système est démontrée à l'aide d'une fonction de Liapunov polynomiale, qui permet de quantifier la décroissance de l'énergie du système le long des trajectoires. Cependant, il a été démontré que dans certains cas, un champ de vecteurs polynomial peut être globalement asymptotiquement stable sans posséder de fonction de Liapunov polynomiale. Cela signifie qu'il existe des systèmes pour lesquels aucune fonction de Liapunov polynomiale ne peut être trouvée pour prouver leur stabilité. De plus, il a été démontré qu'un système avec un champ de vecteurs polynomial peut être exponentiellement stable sur une région bornée non vide. Un résultat intéressant est le théorème établissant que si un système est exponentiellement stable sur une région bornée, alors il existe un polynôme somme de carrés qui peut être utilisé comme fonction de Liapunov pour prouver la stabilité du système. Cependant, il est intéressant d'explorer les cas où un champ de vecteurs polynomial est globalement asymptotiquement stable, mais où aucune fonction de Liapunov polynomiale ne peut être trouvée pour le prouver. Cette situation pose un défi théorique et pratique important et soulève des questions sur la nature même de la stabilité dans les systèmes dynamiques. Dans cette étude, nous examinons un tel champ de vecteurs et explorons les caractéristiques qui le rendent globalement asymptotiquement stable sans qu'une fonction de Liapunov polynomiale ne puisse être définie.

## 4.1 Définition

une forme est un polynôme dans lequel tous les monômes ont le même degré  $d := \sum_i \alpha_i$ . Dans ce cas, le polynôme est homogène de degré  $d$ , car il vérifie

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n).$$

## 4.2 Théorème

Soit  $x = 0$  un point d'équilibre pour (2.1) et  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine contenant  $x = 0$ . Soit  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable telle que :

$$v(0) = 0 \text{ et } v(x) > 0 \text{ dans } D - \{0\}$$

$$\dot{v}(x) < 0 \text{ dans } D$$

Alors,  $x = 0$  est stable. De plus, si  $\dot{v}(x) < 0$  dans  $D - \{0\}$ , alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

## 4.3 Théorème (Barbashin-Krasovskii)

Soit  $x = 0$  un point d'équilibre pour (2.1). Soit  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable telle que :

$$v(0) = 0 \text{ et } v(x) > 0, \forall x \neq 0$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow v(x) \rightarrow \infty$$

$$\dot{v}(x) < 0, \forall x \neq 0$$

Alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

## 4.4 Sommes des carrés

soit  $F$  un polynôme satisfait  $F(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , alors une condition nécessaire évidente est que le degré du polynôme soit pair. Une condition suffisante pour qu'une fonction à valeur réelle  $F(x)$  soit définie positive est donnée par l'existence d'une décomposition en somme des carrés :

$$F(x) = \sum_i f_i^2.$$

Il est clair que si une fonction donnée  $F(x)$  peut s'écrire comme ci-dessus, pour certains  $f_i$ , alors elle est positive pour toutes les valeurs de  $x$ .

## 4.5 Théorème

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (4.1)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(0) = 0$  et  $x(0) = x_0$ .

Supposons qu'il existe un  $r \geq 0$  tel que pour tout  $\|x_0\|_\infty \leq r$ , alors l'équation (4.1) a une solution unique pour tout  $t \geq 0$ . On définit l'application solution  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow C([0, \infty])$  par :

$$(Ay)(t) = x(t), \text{ pour } t \geq 0$$

où  $x$  est l'unique solution de l'équation (4.1) avec la condition initial  $y$ .

## 4.6 Définition

On dit que le système défini par les équations en (4.1) est exponentiellement stable sur une région bornée non vide  $M$  s'il existe  $\gamma, K > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in M$ ,

$$\|x(t)\| \leq K\|x_0\|e^{-\gamma t}, \forall t \geq 0$$

## 4.7 Théorème

Supposons que  $f$  soit un polynôme et que le système (4.1) soit exponentiellement stable sur une région bornée non vide  $M$ .

Alors il existe  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  et un polynôme somme des carrés  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in M$ ,

$$\begin{aligned} \alpha\|x\|^2 &\leq V(x) \leq \beta\|x\|^2 \\ \nabla V(x)^T \cdot f(x) &\leq -\gamma\|x\|^2 \end{aligned}$$

**Remarque :** La stabilité exponentielle est une condition plus forte que la stabilité asymptotique. Par conséquent, la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique.

### 4.7.1 Corollaire

La stabilité asymptotique locale d'un champ de vecteurs polynomiaux implique l'existence d'une fonction de Liapunov qui est somme des carrés de polynômes.

Maintenant, la question est de savoir si la stabilité asymptotique globale implique l'existence d'une fonction de Liapunov polynomiale. Nous donnons un exemple simple et explicite d'un champ de vecteurs polynomial bidimensionnel qui est globalement asymptotiquement stable (GAS) mais n'admet pas de fonction polynomiale de Liapunov.

## 4.8 Théorème

Considérons le champ vecteur polynomial :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + xy \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (4.2)$$

L'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable (GAS), mais le système n'admet pas de fonction polynomial de Liapunov.

#### 4.8.1 Preuve

Montrons d'abord que le système est globalement asymptotiquement stable (GAS). Pour cela, considérons la fonction de Liapunov définie positive :

$$V(x, y) = \ln(1 + x^2) + y^2$$

La dérivée de  $V(x, y)$  le long des trajectoires de (4.2) est donnée par :

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = \frac{2x^2(y-1)}{1+x^2} - 2y^2 = - \left( \frac{x^2 + 2y^2 + x^2 y^2 + (x-xy)^2}{1+x^2} \right) < 0,$$

qui est définie négative pour tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Par conséquent, l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'une fonction polynomial de Liapunov définie positive (de n'importe quel degré) ne peut décroître le long des trajectoires du système (4.2). La preuve se basera simplement sur l'examen de la valeur d'une fonction de Liapunov candidate en deux points spécifiques. Nous examinerons les trajectoires dans l'orthant positive, avec des conditions initiales sur la droite  $(k, \alpha k)$  pour une constante  $\alpha > 0$ , puis nous observons le point où la trajectoire croise la droite horizontale  $y = \alpha$ .

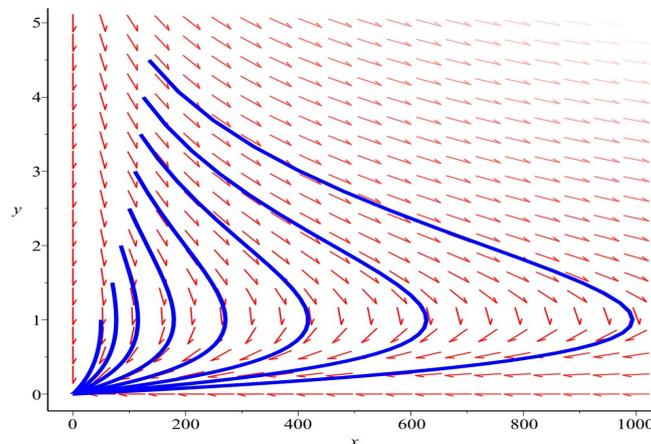
Nous montrons qu'en prenant un  $k$  suffisamment grand, la trajectoire devra se déplacer "trop loin vers l'est" (voire figure 3.1), ce qui rendra impossible à toute fonction de Liapunov polynomial de décroître.

On commence par trouver la solution  $(x(t), y(t))$  du champ de vecteurs en (4.2) à partir de n'importe quel condition initiale  $(x(0), y(0))$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{[y(0)-y(0)]e^{-t}-t} \\ y(t) &= y(0)e^{-t} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Considérons les conditions initiales :

$$(x(0), y(0)) = (k, \alpha k)$$



**Fig 4.1. Trajectoires typiques du champ de vecteurs dans (4.2) à partir des conditions initiales dans l'orthante positive.**

paramétrisé par  $k > 1$  et pour une constante fixe  $\alpha > 0$ .

À partir de la solution explicite dans (4.3), nous avons que le temps  $t^*$  qu'il prend pour que la trajectoire traverse la droite  $y = \alpha$  est

$$t^* = \ln(k),$$

et que l'emplacement de cette traversée est donné par

$$(x(t^*), y(t^*)) = (e^{\alpha(k-1)}, \alpha).$$

Considérons maintenant n'importe quelle fonction polynomiale candidate  $V(x, y)$  définie positive. Comme  $k > 1$  (et donc  $t^* > 0$ ), pour que  $V(x, y)$  soit une fonction de Liapunov valide, elle doit satisfaire  $V(x(t^*), y(t^*)) < V(x(0), y(0))$ , c'est-à-dire

$$V(e^{\alpha(k-1)}, \alpha) < V(k, \alpha k).$$

Cependant, cette inégalité ne peut pas être maintenue pour un  $k$  suffisamment grand, car pour une constante  $\alpha$  fixée, le membre de gauche croît de manière exponentielle en  $k$ , tandis que le membre de droite ne croît que de manière polynomiale en  $k$ . La seule subtilité réside dans le fait que  $V(e^{\alpha(k-1)}, \alpha)$  pourrait éventuellement être une constante pour certains choix particuliers de  $\alpha$ . Cependant, pour tout polynôme  $V(x, y)$  avec une dépendance non triviale par rapport à  $y$ , cela peut se produire pour un nombre fini de valeurs de  $\alpha$  au maximum. Par conséquent, tout choix générique de  $\alpha$  permettrait à l'argument de fonctionner.

## 4.9 Conclusions

L'existence de la fonction polynomiale de Liapunov est nécessaire (resp. n'est pas nécessaire) pour la stabilité asymptotique locale (resp. global) d'un champ de vecteurs polynomiaux.



# Bibliographie

- [1] A. Ahmadi, Miroslav Krstic, and Pablo A. Parrilo. *A Globally Asymptotically Stable Polynomial Vector Field With no Polynomial Lyapunov Function*
- [2] A. A. Ahmadi and P. A. Parrilo. *Converse results on existence of sum of squares Lyapunov functions. 2011. Submitted to the 50th IEEE Conference on Decision and Control.*
- [3] A. Djerrai, A. Zaiem, Z. Bouguessas. *La stabilité des systèmes dynamiques et la fonction de Liapunov*(2020)
- [4] H. Khalil. *Nonlinear systems. Prentice Hall, 2002. Third edition.*
- [5] Eze.E.O, Obasi.U.E, Agwu.E.U.(2019). *Stability Analysis of Periodic Solutions of Some Duffing's Equations. Open Journal of Applied Sciences, 9(4), 198-214.*
- [6] P. A. Parrilo. *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization. PhD thesis, California Institute of Technology, May 2000.*
- [7] A. Papachristodoulou and S. Prajna. *On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition. In IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*
- [8] M. M. Peet. *Exponentially stable nonlinear systems have polynomial Lyapunov functions on bounded regions. IEEE Trans. Automat. Control, 54(5) :979â€“987, 2009.*
- [9] M. M. Peet and A. Papachristodoulou. *A converse sum of squares Lyapunov result : an existence proof based on the Picard iteration. In Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010.*
- [10] M. M. Peet and A. Papachristodoulou. *A converse sum of squares Lyapunov result with a degree bound. IEEE Trans. Automat. Control, 2011. To appear.*
- [11] Perko. L. (2013). *Differential equations and dynamical systems (Vol.7). Springer Science and Business Media.*