الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY

جامعة باجي مختار – عنابــــــــــــة

Faculté : des sciences
Département : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Systèmes dynamiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème:

Étude de l'existence, de l 'unicité et la stabilité au sens Ulam des solutions d'une classe d'équations non linéaires sur une échelle de temps arbitraire et applications

Présenté par : ALI RACHEDI Manel

Encadrant : ***BOUKERRIOUA Khaled*** **Prof.** ***U.B.M Annaba***

Jury de Soutenance:

SALAH DERRADJI Lilia	**MCA**	**U.B.M Annaba**	**Président**
NEGGAL Bilel	**MCA**	**U.B.M Annaba**	**Examinateur**

Année Universitaire : 2022/2023

Remerciements

Tout d’abords je remercie DIEU qui m’a béni de la santé, qui m’a comblé de la volonté, du courage et de la patience pour surmonter tous les obstacles que j’ai rencontrés le long de notre formation et pour arriver à réaliser ce travail "EL HAMDOU WA CHOUKROU LI ALLAHI".
Je tiens tout d’abord à exprimer mes profondes gratitudes à mon encadreur PR Khaled BOUKERRIOUA, d’avoir bien voulu diriger ce travail. C’est grâce à ses qualités scientifiques que j’ai pues mener ce travail à bien. J’ai apprécié beaucoup ses précieux conseils, son soutien permanent, ses encouragements et surtout la pertinence des jugements et le bien fondé de ces suggestions, qu’il trouve ici le témoignage de mes sincères reconnaissances.
Mes remerciements vont également au Mme. **SALAH DARRADJI Lilia**, au MR. **NEGGAL Bilel** de l’Université Badji Mokhtar-Annaba, qui ont accepté de faire partie du jury de ce mémoire de Master.
Et en fin j’adresse mes sincère remerciement à mon père et ma mère, mes frères, ma cousine, mes amis et à tous qui sont contribué de près ou loin à l’élaboration de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, nous considérons l'étude d'une équation intégro-dynamique non linéaire aux échelles de temps avec condition initiale locale. Le but de ce mémoire est de présenter l'existence et l'unicité des solutions et d'étudier les propriétés qualitatives des solutions de cette équation telles que l'estimation, la dépendance des solutions aux conditions initiales, les fonctions et les paramètres et la stabilité d'Ulam. L'analyse est basée sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii et les inégalités dynamiques de type Gronwall. Finalement, on va présenter quelques exemples d'applications.

Mots clés : échelles de temps, équations intégro-dynamiques, in- égalité de Granwall, Théorème du point fixe de Krasnoselskii, existence et unicité, dépendance de solutions, stabilité de Hyers-Ulam, stabilité de Hyers-Ulam-Rassias

Abstract

In this memory, we consider the study of a nonlinear integro-dynamic equation on time scales with local initial condition. The purpose of this thesis is to present the existence and the uniqueness of the solutions and to study the qualitative properties of the solutions of this equation such as the estimation, the dependence of the solutions on the initial conditions, the functions and the parameters and the stability of Ulam. The analysis is based on Krasnoselski'i's fixed point theorem and Gronwall-type dynamical inequalities. Finally, we will present some examples of applications.

Keywords : time scales, integro-dynamic equations, Gronwall inequaity, Krasnoselskii's fixed point theorem, existence and uniqueness, dependence of solutions, HyersUlam stability, Hyers-Ulam-Rassias stability

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le mathématicien français H. Poincaré $(1854 - 1912)$ est le premier qui a utilisé une approche du point fixe. Poincaré a aussi prévu l'importance et l'avenir prometteur du point fixe dans les problèmes de l'analyse mathématique. Aujourd'hui la théorie du point fixe s'intersecte et rencontre pratiquement tout les domaines de la recherche en mathématiques.

En 1892 Liapunov publia un travail sur la stabilité des équations différentielles ordinaires basé sur les fonctions définies positives. Son oeuvre fut la fondation de la théorie de la stabilité telle que nous la connaissons aujourd'hui pour les équations différentielles, les équations intégrales dynamiques aux échèles de temps, de même que dans la théorie du contrôle.

Durant cette dernière décennie plusieurs investigateurs ont entrepris une étude de quelques équations integro-différentielles sur des échèlles de temps appelées équations intégro-dynamiques.Plusieurs oeuvres sur ce sujet ont été publiées et nous conseillons de voir ([1] , [6], [9]).

La théorie des équations dynamiques aux échelles de temps a été introduite en 1988 par Stefan Hilger[5] dans sa thèse de doctorat où il a notamment définie la Δ-dérivée de la façon suivante.

Définition 0.1 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *une fonction et* $t \in \mathbb{T}^k$, f *est dite* $\Delta-$*différentiable en* t *s'il existe un vecteur* $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}^n$ *tel que pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un voisinage*

U de t tel que

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \epsilon \mid \sigma(t) - s \mid,$$

pour tout $s \in U$. *On appelle* $f^{\Delta}(t)$ *la* $\Delta-$*dérivée de* f *en* t. *Si* f *est* $\Delta-$*différentiable en* t *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$, *alors* $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ *est dite la* $\Delta-$*dérivée de* f *sur* $\mathbb{T}^k$.

Ici, $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ et

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}/\,]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & \text{si} \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si} \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}.$$

C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle à l'exception que par exemple, dans une équation du premier ordre, la dérivée d'une fonction x (x') est remplacée par la Δ-dérivée (x^{Δ}) de cette fonction. Nous verrons plus loin dans le texte que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies, pour plus de détails, on peut consulter le livre [2]. D'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, psychologie et génie. La théorie des équations aux échelles de temps vient dans un premier temps unifier ce qui peut être fait dans les domaines des équations différentielles et les équations aux différences finies. En travaillant sous l'angle d'une échelle de temps générale, il est possible de faire progresser simultanément ces deux champs des mathématiques. Dans un deuxième temps, la théorie développée autour des échelles de temps permet l'étude de phénomènes se modélisant d'une façon qui fait appel simultanément au discret et au continu. Ainsi, une équation définie sur une échelle de temps de la forme $\cup_{k=0}^{k=\infty} [2k, 2k+1]$ est très utile pour décrire des phénomènes saisonniers. Par exemple, ce pourrait être pour l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoir été pendant un certain temps sous forme de larve. Motivé par cette théorie, on va aborder une étude qualitative de l 'équation intégro-dynamique non linéaire suivante :

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t)+p(t)x^{\sigma}(t) &= \mathcal{F}\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t,s,x(s))\Delta s\right), \qquad t\in\mathbb{I}^k, \\ x(t_0) &= x_0\in\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{P}$$

sur l' échèlle de temps $\cup_{k=0}^{k=\infty}[2k, 2k+1]$.

Ce mémoire est composé en trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, sont présentés les notions générales sur les échelles de temps et outils mathématiques nécessaires à la compréhension de la suite du mémoire.

Le deuxième chapitre expose la problématique du mémoire qui est l'étude de l'existence, l 'unicité et l 'investigation de quelques propriétés qualitative de la solution de l 'équation (1) telles que la bornitude, la dépendance des solutions des conditions initiales, et l 'Ulam stabilité. Cette étude est basée sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii et l' inégalité intégrale dynamique de Gronwall.

Dans le troisième chapitre, on va exposer quelques examples illustratifs pour mettre en évidence l'utilité des résultats présentés dans le chapitre 2.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on introduit des définitions, notations, lemmes et quelque théorèmes qui sont utilisées le long de ce mémoire.

1 Généralité sur les échelles de temps

Dans cette section nous nous contenterons de donner quelque notions de base concernant cette théorie, pour plus de détails nous pouvons consulter le livre de **Bohner** [1].

1.1 Terminologie

Définition 1.1 *Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un sous-ensemble fermé non vide de l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *Les ensembles* $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \cup [2,3], [1,2]$ *et les ensembles de Cantor sont des échelles de temps.*

Exemple 1.2 *Les ensembles* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $]1,2[$, $]2,3]$ *ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1 *La topologie de $\mathbb{T}$est induite par la topologie de $\mathbb{R}$.*

1.2 Opérateurs de saut

Définition 1.2 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. On définit :*

1. *L'opérateur de saut avant (fordward jump operator) $\sigma(t) : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par*

$$\sigma(t) = \inf\{l \in \mathbb{T} : l > t\}. \tag{1.1}$$

2. *L'opérateur de saut arrière (backward jump operator) $\rho(t) : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{T}$ par*

$$\rho(t) = \sup\{l \in \mathbb{T} : l < t\}. \tag{1.2}$$

Dans cette définition, nous posons $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$, (c-à-d,$\rho(t) = t$ si $\mathbb{T}$ a un minimum en t) et $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$,(i.e, $\sigma(t) = t$ si $\mathbb{T}$ a un maximum en t). Où $\emptyset$ désigne l'ensemble vide.

Exemple 1.3 *Soit $\mathbb{T} = \left\{\sqrt{2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ si $t{=}\sqrt{2n+1} \implies n = \frac{t^2-1}{2}$, on a l'opérateur de saut avant :*

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \inf\{\sqrt{2l+1} : \sqrt{2l+1} > \sqrt{2n+1}, l \in \mathbb{N}\} \\
&= \sqrt{2(n+1)+1} = \sqrt{2n+3} \\
&= \sqrt{2\frac{t^2-1}{2}+3} = \sqrt{t^2+2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

et on a l'opérateur de saut arrière :

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \sup\{\sqrt{2l+1} : \sqrt{2l+1} < \sqrt{2n+1}, l \in \mathbb{N}\} \\
&= \sqrt{2(n-1)+1} = \sqrt{2n-1} \\
&= \sqrt{2\frac{t^2-1}{2}-1} = \sqrt{t^2-2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.4 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps telle que $\mathbb{T} = \{2^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, soit*

$t = 2^{n+1}$ *pour quelques* $n \in \mathbb{N}$. *Alors :*

$$\sigma(t) = \inf\{2^{l+1} : 2^{l+1} > 2^{n+1}, l \in \mathbb{N}\} = 2^{n+2} = 2 \times 2^{n+1} = 2t.$$

et

$$\rho(t) = \sup\{2^{l+1} : 2^{l+1} < 2^{n+1}, l \in \mathbb{N}\} = 2^{n} = \frac{t}{2}.$$

1.3 Classification des points dans une échelle de temps $\mathbb{T}$

Soit $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$une échelle de temps.

Définition 1.3 *On dit que* t *est un point dispersé à gauché de* $\mathbb{T}$*(resp. Un point dispersé à droite de* $\mathbb{T}$*),si* $\rho(t) < t$ *(resp.*$\sigma(t) > t$ *).*

Définition 1.4 t *est dit point isolé s'il est simultanément dispersé à gauche et à droite .*

Définition 1.5 *On dit que* t *est un point dense à gauche de* $\mathbb{T}$*(resp. un point dense à droite de* $\mathbb{T}$*), si* $\rho(t) = t$ *(resp.*$\sigma(t) = t$*).*

Définition 1.6 t *est dit un point dense s'il est simultanément dense à gauche et à droite.*

Définition 1.7 *Nous définissons la fonction de granulation* $\mu : \mathbb{T} \longrightarrow [0, +\infty[$ *par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t. \tag{1.3}$$

Exemple 1.5 *soit* $\mathbb{T} = \{\sqrt{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, *si* $t = \sqrt{n+1}$, *pour* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $n = t^2 - 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{\sqrt{l+1} : \sqrt{l+1} > \sqrt{n+1}, l \in \mathbb{N}\} = \sqrt{t^2+1}, \\ \mu(t) &= \sigma(t) - t = \sqrt{t^2+1} - t. \end{aligned}$$

Le tableau suivant résume la classification des points dans une échelle de temps.

Points	*La description*
dispersé à gauche	$\rho(t) < t$
despersé à droite	$t < \sigma(t)$
isolé	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
dense à gauche	$\rho(t) = t$
dense à droite	$\sigma(t) = t$
dense	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Maintenant, nous utilisons les définitions précédentes pour déterminr les caractéristiques (operateur de saut, fonction de granulation) de quelques échelles de temps, indiqués dans le tableau suivant :

$\mathbb{T}$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$	$\mu(t)$
$\mathbb{R}$	t	t	0
$\mathbb{Z}$	$t+1$	$t-1$	1
$q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$	qt	$\frac{t}{q}$	$(q-1)t$
$\mathbb{N}^k$	$(1+\sqrt[k]{t})^k$	$(\sqrt[k]{t}-1)^k$	$(1+\sqrt[k]{t})^k - t$
$\frac{n}{2}$	$t+\frac{1}{2}$	$t-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Définition 1.8 *Soit* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction, alors nous définissons la fonction* $f^\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *par :*

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) \text{ , pour } \forall t \in \mathbb{T}, \text{ c-à-d, } f^\sigma = f \circ \sigma.$$

Exemple 1.6 *Soient* $\mathbb{T} = \{t = 2^{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$, $f(t) = t^2 + t - 1$, *alors on a :*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{2^{l+2} : 2^{l+2} < 2^{n+2}, l \in \mathbb{N}\} = 2^{n+3} = 2t \text{ ,} \\ \text{donc } f^\sigma(t) &= f(\sigma(t)) = (\sigma(t))^2 + \sigma(t) - 1 \\ f^\sigma(t) &= 4t^2 + 2t - 1. \end{aligned}$$

1.4 Sous ensembles dérivés d'une échelle de temps

Nous notons que de chaque échelle de temps, nous pouvons extraire les sous ensembles suivants :

Définition 1.9 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, on définit l'ensemble* $\mathbb{T}^k$ *par :*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}\backslash\,]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & si \ \sup \mathbb{T} < +\infty \\ \mathbb{T} & si \ \sup \mathbb{T} = +\infty \end{cases} . \tag{1.4}$$

Définition 1.10 *Soient a,b deux points de* $\mathbb{T}$ *tels que* $a < b$*, nous définissons l'intervale* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{T}$ *par :*

$$[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}. \tag{1.5}$$

Exemple 1.7 *Soit* $\mathbb{T} = \{\frac{1}{n^2+3} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $\sup \mathbb{T} = \frac{1}{4} < +\infty$*, alors :*

$$\begin{aligned} \rho(\frac{1}{4}) \quad &= \quad \sup\{\frac{1}{l^2+3}, 0 : \frac{1}{l^2+3}, 0 < \frac{1}{4}, l \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{7} \\ \Longrightarrow \quad & \mathbb{T}^K = \mathbb{T}\backslash \left]\frac{1}{7}, \frac{1}{4}\right] = \{\frac{1}{n^2+3} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Exemple 1.8 *Soit* $\mathbb{T} = \{n : n \in \mathbb{N}\}$*,alors* $\sup \mathbb{T} = +\infty \implies \mathbb{T}^k = \mathbb{T}$

Exemple 1.9 *Soit* $[a, b]$ *un intervale dans* $\mathbb{T}$*, et soit b un point dense à gauche de* $\mathbb{T}$*. Alors*

$$\sup \mathbb{T} = b,$$

et puisque b est dense à gauche on a :

$$\rho(b) = b.$$

Donc

$$[a, b]^k = [a, b]\backslash\,]b, b] = [a, b]\backslash\emptyset = [a, b].$$

1.5 Dérivation sur les échelles de temps

Dans cette partie nous donnons la défintion de la $\Delta - dérivée$ dite aussi la dérivée au sense de **Hilger.**

Définition 1.11 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction, $t \in \mathbb{T}^k$. On dira que f est $\Delta - différentiable$ en t s'il existe un nombre $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de t où :*

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)\left[\sigma(t) - s\right]\right| \leq \epsilon \left|\sigma(t) - s\right| \quad , \textit{pour tout } s \in U. \tag{1.6}$$

Pour tout $s \in U$. Si f est $\Delta - différentiable$ en tout point $t \in \mathbb{T}$, alors la fonction $f^\triangle : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}$ est dite la $\Delta - dérivée$ (dérivée au sens de Hilger) de f sur $\mathbb{T}^k$.

Exemple 1.10 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps quelconque et soit $f(t) = \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{T}$, nous preuverons que $f^\Delta(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{T}^k$.*

Pour $t \in \mathbb{T}^k, \forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $s \in \left]t - \delta, t + \delta\right[\cap \mathbb{T}$, $s \neq \sigma(t)$, implique :

$$\begin{aligned} & \left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - 0\left[\sigma(t) - s\right]\right| \\ = & \left|[\alpha - \alpha] - 0\left[\alpha - \alpha\right]\right| = \left|\alpha - \alpha\right| \leq \epsilon \left|\sigma(t) - s\right|. \end{aligned}$$

Théorème 1.1 *La $\Delta - dérivée$ est bien définie.*

Preuve. Soit $t \in \mathbb{T}^k$ et $f_i^\Delta(t)$, $i = 1, 2$, tel que

$$\begin{aligned} \left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f_1^\Delta(t)\left[\sigma(t) - s\right]\right| & \leq \frac{\epsilon}{2}\left|\sigma(t) - s\right| \\ \left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f_2^\Delta(t)\left[\sigma(t) - s\right]\right| & \leq \frac{\epsilon}{2}\left|\sigma(t) - s\right|, \end{aligned}$$

■

pour $\forall \epsilon > 0$ et $\forall s \in U$ (voisinage de t) $U =]t-\delta, t+\delta[\cap T$ pour quelques $\delta > 0$, $s \neq \sigma(t)$, ainsi :

$$\begin{aligned}
\left| f_1^{\triangle}(t) - f_2^{\triangle}(t) \right| &= \left| f_1^{\Delta}(t) - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} + \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f_2^{\triangle}(t) \right| \\
&\leq \left| f_1^{\Delta}(t) - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \right| + \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f_2^{\Delta}(t) \right| \\
&= \frac{\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f_1^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \right|}{|\sigma(t) - s|} \\
&\quad + \frac{\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f_2^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \right|}{|\sigma(t) - s|} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire choix, on déduit que :

$$f_1^{\Delta}(t) = f_2^{\Delta}(t),$$

d'où le résultat.

Théorème 1.2 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

i) Si f est $\Delta - \textit{différentiable}$ en t, alors f est continue en t.

ii) Si f est continue en t et si t est un point dispersé à droite , alors f est $\Delta - \textit{différentiable}$ en t avec :

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.7}$$

iii) Si t est dense à droite , alors f est $\Delta - différentiable$ si et seulemnet si ,

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et finie. Dans ce cas nous avons :

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

iv) Si f est $\Delta - différentiable$ en t, alors :

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.8}$$

Exemples de calcul des dérivées

1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{R}$ est point dense à droite ($\sigma(t) = t$)

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

2. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{Z}$ est un pont isolé ($\sigma(t) = t + 1$), donc

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

3. Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = h\mathbb{Z}$ est un point isolé ($\sigma(t) = t + h$), donc

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f(t+h) - f(t) = \Delta_h f(t)$$

Exemple 1.11 *Soient* $\mathbb{T} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}, f(t) = t^2, g(t) = \sigma(t)$.*Pour* $t \in \mathbb{T}^k$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$,$t = n^2$: $n = \sqrt{t}$,*et on a*

$$\sigma(t) = \inf\{l^2 : l^2 > n^2, l \in \mathbb{N}_0\} = (n+1)^2 = (\sqrt{t} + 1)^2 > t, \forall t \in \mathbb{T}^k,$$

alors pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, t est un point dispersé à droite , donc :

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t} = \frac{\sigma^2(t)-t^2}{\sigma(t)-t} = \frac{(\sigma(t)-t)(\sigma(t)+t)}{\sigma(t)-t} = \sigma(t)+t \\ &= (\sqrt{t}+1)^2 + t = 1+2t+2\sqrt{t}. \\ g^{\Delta}(t) &= \frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\sigma(t)-t} = \frac{\sigma(\sigma(t))-\sigma(t)}{\sigma(t)-t} = \frac{(\sqrt{\sigma(t)}+1)^2-\sigma(t)}{\sigma(t)-t} = \frac{2\sqrt{\sigma(t)}+1}{\sigma(t)-t} \\ &= \frac{2\sqrt{t}+3}{2\sqrt{t}+1}. \end{aligned}$$

Propriétés de la $\triangle -$ *dérivée*

Théorème 1.3 *Soient $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\Delta - differentiable$ en $t \in \mathbb{T}^k$.*

Alors, nous avons les propriétés suivantes :

1. La somme $f+g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est $\Delta - différentiable$ en t , de plus

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons $(\alpha f) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est detla-différentiable, avec

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

3. Si $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est delta différentiable , et nous avons

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

4. Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, alors $(\frac{f}{g})$ est delta différentiable, de plus

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

5. Le produit $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est différentiable en t avec

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est delta-différentiable , alors on a les résultats :

a)

$$(f^n)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) \sum_{k=0}^{n-1} f^k(t)(f^{\sigma})^{n-n-k}(t) \quad \text{, pour quelques } n \in \mathbb{N}.$$

b)

i) Soit $f(t) = (t-a)^m$, $a \in \mathbb{R}$ alors :

$$f^{\Delta}(t) = h^{\Delta}(t) \sum_{k=0}^{m-1} h^k(t)(h^{\sigma})^{m-1-k}(t),$$

où $h(t) = (t-a)$, $h^{\Delta}(t) = 1$, $h^k(t) = (t-a)^k$.

ii) Soit $g(t) = \frac{1}{f(t)}$, alors

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(t-a)^{m-k}} \frac{1}{(\sigma(t)-a)^{k+1}}.$$

Définition 1.12 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $t \in (\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$. Nous définissons la deusième dérivée de f en t par :*

$$\left(f^{\Delta}\right)^2 = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta} : T^{k^2} \to \mathbb{R},$$

de la meme manière, définissons la dérivée $\mathrm{n}^{\mathrm{eme}}$: $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{k^n} \to \mathbb{R}$.

Dérivation des fonctions composées

Nous énonçons les théorèmes suivants :

Théorème 1.4 *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue,* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* $\Delta - differentiable$ *et si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continument différentiable, alors* $\exists\ c \in [t, \sigma(t)]$*, satisfaisant :*

$$\left(f \circ g\right)^{\Delta}(t) = f'(g(c))g^{\Delta}(t).$$

Exemple 1.12 *Soient* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = t^3 + 1$, $g(t) = t^2$, *on a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue,* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est delta-différentiable sur* $\mathbb{T}^k$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continument différentiable,* $\sigma(t) = t + 1$*, alors on a :*

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= \sigma(t) + t \\
\left(f \circ g\right)^{\Delta}(1) &= f'(g(c))g^{\Delta}(1) = 3g^2(c)(\sigma(1) + 1) = 9c^4 \\
Ainsi\ c &\in [1, \sigma(1)] = [1, 2],\ aussi\ (f \circ g)(t) = t^6 + 1 \\
(f \circ g)^{\Delta}(t) &= \sigma^5(t) + t\sigma^4(t) + t^2\sigma^3(t) + t^3\sigma^2(t) + t^4\sigma(t) + t^5 \\
(f \circ g)^{\Delta}(1) &= 63 \implies 9c^4 = 63 \implies c^4 = \frac{63}{9} = 7\ donc\ c = \sqrt[4]{7} \in [1, 2]\,.
\end{aligned}$$

Théorème 1.5 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continument différentiable et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\Delta - differentiable$*. Alors* $(f \circ g)$ *est delta-différentiable et on a la formule suivante :*

$$\left(f \circ g\right)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t)$$

Exemple 1.13 *soit* $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *telles que* $g(t) = t^2$, *et* $f(t) = e^t$. *Alors*

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^t \\ g^{\Delta}(t) &= g(t+1) - g(t) = (t+1)^2 - t^2 = 2t+1, \ et \\ (f \circ g)^{\Delta}(t) &= g^{\Delta}(t)\int_0^1 f'(g(t) + hg^{\Delta}(t))dh = g^{\Delta}(t)\int_0^1 e^{t^2+h(2t+1)}dh \\ &= (2t+1)e^{t^2}[\frac{e^{2t+1}}{2t+1} - \frac{1}{2t+1}] \\ &= e^{t^2}(e^{2t+1} - 1). \end{aligned}$$

Puisque $(f \circ g)$ est défini sur $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, on peut déduire que

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = (f \circ g)(t+1) - (f \circ g)(t) = e^{(t+1)^2} - e^{t^2} = e^{t^2}(e^{2t+1} - 1).$$

Théorème 1.6 *Soit* $V : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction strictement croissante et* $\tilde{\mathbb{T}} = V(\mathbb{T})$ *une échelle de temps. Soit* $W : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Si* $V^{\Delta}(\mathbb{T})$ *et* $W^{\tilde{\Delta}}(V(t))$ *existe pour* $t \in \mathbb{T}^k$. *Alors :*

$$(W \circ V)^{\Delta}(t) = (W^{\tilde{\Delta}} \circ V)(t)V^{\Delta}(t)$$

Théorème 1.7 *(La dérivée de l'inverse) : Soit* $v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction strictement croissante et* $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ *une échelle de temps. Alors on a :*

$$(v^{-1})^{\tilde{\Delta}} \circ v(t) = \frac{1}{v^{\Delta}(t)},$$

pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, tq : $v^{\Delta}(t) \neq 0$.

Corollaire 1.1 *Soit* f *est une fonction continue sur* $[a, b]$ *qui a une delta-dérivée en tout point de* $[a, b[$.*Si* $f^{\Delta}(t) = 0$ $\forall t \in [a, b[$, *alors* f *est une fonction constante sur* $[a, b]$.

Corollaire 1.2 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ qui a une delta-dérivée en tout point de $[a, b[$. Alors f est strictement croissante(resp. strictement décroissante) si $f^{\Delta}(t) > 0$ (resp.$f^{\Delta}(t) < 0$).*

1.6 Intégration

Définition 1.13 *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite régulière si sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$, et sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$.*

Définition 1.14 *Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$, et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Remarque 1.2 *L'ensemble de toutes les fonctions rd-continues sur $\mathbb{T}$ est noté par :*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Remarque 1.3 *L'ensemble de toutes les fonctions $\Delta-$différentiable et rd-continues sur $\mathbb{T}$ est noté par :*

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Calcul d'intégrales sur les échelles de temps

Définition 1.15 *La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite primitive de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, si elle vérifie*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Exemple 1.14 *Soit* $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}}$, *et* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est une fonction définie par* $f(t) = \frac{2}{t}\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2})$, $t \in \mathbb{T}$. *Soit* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(t) = \sin(t)$, $t \in \mathbb{T}$, *dans ce cas* $\sigma(t) = 2t$, *on a :*

$$\begin{aligned} g^{\Delta}(t) &= \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)} = \frac{\sin(2t) - \sin(t)}{t} \\ &= \frac{2}{t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right) \\ &= f(t), \end{aligned}$$

on dit que g est primitive de f sur $\mathbb{T}$.

Théorème 1.8 *Toute fonction rd-continue admet une primitive* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, *et nous notons :*

$$\int_s^r f(t)\ \Delta t = F(r) - F(s) \qquad\qquad \forall s, r \in \mathbb{T}.$$

Théorème 1.9 *Si* $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ *et* $t \in \mathbb{T}^k$, *nous avons :*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\ \Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

Théorème 1.10 *Soient* $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T})$, *alors on a :*

1) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\ \Delta t = \int_a^b f(t)\ \Delta t + \int_a^b g(t)\ \Delta t$

1. $\int_a^b (\alpha f)(t)\ \Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\ \Delta t$
2. $\int_a^b f(t)\ \Delta t = -\int_b^a f(t)\ \Delta t$
3. $\int_a^b f(t)\ \Delta t = \int_a^c f(t)\ \Delta t + \int_c^b f(t)\ \Delta t$
4. $\int_a^a f(t)\ \Delta t = 0$

5. Si $|f(t)| \leq g(t)$, sur $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$$

6. Si $f(t) \geq 0$, $\forall\ a \leq t \leq b$, alors :

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$$

a) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, nous avons

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt.$$

b) Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t) & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t) & \text{si } a > b \end{cases}.$$

c) Si $\mathbb{T} = [a,b]$, contient des points isolés, alors :

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b[} \mu(t)f(t) & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ \sum\limits_{t\in[b,a[} \mu(t)f(t) & \text{si } a > b \end{cases}.$$

Théorème 1.11 *(Intégrale impropre) : Si* $a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = +\infty$ *et* f *est rd-continue sur* $[a,+\infty[$, *alors nous définissons l'intégrale impropre par :*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ \Delta t = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)\ \Delta t.$$

i)Si cette limite existe on dit que l'intégral impropre est converge.

ii)Si cette limite n'existe pas ,alors on dit que l'intégral est diverge.

Exemple 1.15 *Soit* $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$, $q > 1$. *Alors* $\sigma(t) = qt$. *Puisque tout point est isolé ,alors*

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\Delta t &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\Delta t \\
&= \lim_{b\to+\infty} \sum_{t\in[1,b[} \frac{1}{t^2}\mu(t) \\
&= (q-1)\sum_{k=0}^{k=n-1} q^{-k} = q.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, on dit que l'intégrale est converge.

Si $a, b \in \mathbb{T}$ et $f, g \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^\sigma(t) g^\Delta(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t) g(t)\,\Delta t \\
\int_a^b f(t) g^\Delta(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^\Delta(t) g^\sigma(t)\,\Delta t.
\end{aligned}$$

1.7 Fonction exponentielle aux échelles de temps

Cette sous section est consacré à la fonction exponentielle sur une échelle de temps, et quelques théorèmes importants.

Définition 1.16 *Soit* $h > 0$, *on définit les nombres complexes de* ***Hilger*** *par :*

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h} \right\}$$

et l'axe imaginaire de Hilger

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Pour $h = 0$, *on pose par définition* $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Définition 1.17 *On dit que la fonction* $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est régressive si*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

L'ensemble de toutes les fonctions régressives et rd-continues est noté par $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. *L'ensemble de toute les fonctions régressives positives est défini par :*

$$\mathcal{R}^+ = \{p \in \mathcal{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k\}. \tag{1.9}$$

Proposition 1.1 *L'ensemble* $\mathcal{R}$ *muni de l'addition* $\oplus$ *définie par*

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t) p(t) q(t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, p, q \in \mathcal{R}.$$

est un groupe abélien. On l'appelle le groupe régressif, le conjugé de chaque élément p *du groupe* $\mathcal{R}$ *noté par* $\ominus p$ *est donné par :*

$$\ominus p = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t) p(t)}, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

et

$$p \ominus q := p \oplus (\ominus p).$$

Nous utilisons la transformation cylindrique pour définir la fonction exponentielle sur une échelle de temps arbitraire $\mathbb{T}$.

Définition 1.18 *Si* $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *alors nous définissons la fonction exponentielle*

$e_p(t,t_0)$ par

$$e_p(t,t_0) = exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \text{ pour } t,t_0 \in \mathbb{T}, \tag{1.10}$$

où $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ est la transformation cylindrique donnée par

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \frac{1}{h} log(1+zh) & si\ h \neq 0, \\ z & si\ h = 0 \end{cases}$$

Ici, log *est la fonction logarithme principale.*

Théorème 1.12 *Nous supposons que $p \in \mathcal{R}$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\,y(t)\,, \quad y(t_0) = 1,$$

admet une solution unique dans $\mathbb{T}$.

Remarque 1.4 *Soit $p \in \mathcal{R}$, la fonction exponentielle est l'unique solution du problème* (1.7) , *et nous avons*

$$y(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \text{ pour } t,t_0 \in \mathbb{T}, \tag{1.11}$$

Proposition 1.2 *Soit $p,q \in \mathcal{R}$ et $t,t_0,s \in \mathbb{T}$, alors*

1) $e_0(t,t_0) \equiv 1$ et $e_p(t,t) \equiv 1$,
2) $e_p(\sigma(t),t_0) = (1+\mu(t)\,p(t))\,e_p(t,t_0)\,,$
3) $e_p(t,t_0)\,e_p(t_0,s) = e_p(t,s)\,,$
4) $e_p(t,t_0) = \frac{1}{e_p(t_0,t)},$
5) Si $p \in \mathcal{R}^+, q \in \mathcal{R}^+$ et $p \leq q$, alors $e_p(t,t_0) \leq e_q(t,t_0)\,,$
6) Si $p \geq 0$ alors $e_p(.,t_0)$ est une fonction croissante et $e_p(t,t_0) \geq 1$,
7) Si $p \in \Re^+$,alors $e_p(t,t_0) > 0$,
8) $e_p(t,t_0)\,e_q(t,t_0) = e_{p\oplus q}(t,t_0)$ où $(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)\,p(t)\,q(t)\,,$
9) $\frac{e_p(t,t_0)}{e_q(t,t_0)} = e_{p\ominus q}(t,t_0)\,,$

10) La fonction $e_p(., s)$ est Δ-différentiable en t et $(e_p(., s))^{\Delta}(t) = p(t)\, e_p(t, s)$.

Exemple 1.16 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous supposons que les deux fonctions exponentielles*

$$e_f(t, t_0) \quad et \quad e_g(t, t_0) \quad avec \quad f(t) = \frac{\alpha^2}{t} - \frac{(\alpha-1)^2}{\sigma(t)}, \quad g(t) = \frac{\alpha}{t}$$

existes pour tout $t \in \mathbb{T} \cap (0, \infty)$. Alors nous montrons que

$$\frac{e_f(t, t_0)}{e_g(t, t_0)} = e_{\frac{\alpha-1}{\sigma}}(t, t_0),$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
(f \ominus g)(t) &= \frac{f(t) - g(t)}{1 + \mu(t)\, g(t)} \\
&= \frac{\frac{\alpha^2}{t} - \frac{(\alpha-1)^2}{\sigma(t)} - \frac{\alpha}{t}}{1 + \mu(t)\, \frac{\alpha}{t}} \\
&= \frac{1}{\sigma(t)} \frac{\alpha(\alpha-1)\,\sigma(t) - (\alpha-1)^2\, t}{t + \alpha\mu(t)} \\
&= \frac{\alpha-1}{\sigma(t)} \frac{\alpha\sigma(t) - (\alpha-1)\, t}{t + \alpha\mu(t)} \\
&= \frac{\alpha-1}{\sigma(t)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{e_f(t, t_0)}{e_g(t, t_0)} = e_{f \ominus g}(t, t_0) = e_{\frac{\alpha-1}{\sigma}}(t, t_0).$$

1.8 Equations dynamiques

Théorème 1.13 *Soit $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction rd-continue et $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{T}$. Soit $t_0 \in \mathbb{T}$, $X_0 \in \mathbb{C}$. Alors, le problème à valeur initiale :*

$$X^{\Delta}(t) = p(t)X, \qquad X(t_0) = X_0, \tag{1.12}$$

a une solution unique donnée par :

$$X(t) = X_0 e_p(t, t_0) \qquad \text{sur } \mathbb{T}. \tag{1.13}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} X^{\Delta}(t) &= (X_0 e_p(t, t_0))^{\Delta} \\ &= X_0 e_p^{\Delta}(t, t_0) \\ &= X_0 p(t) e_p(t, t_0) \\ &= p(t) X(t) \ , \quad t \in \mathbb{T}, \end{aligned}$$

■

avec

$$X(t_0) = X_0 e_p(t_0, t_0) = X_0.$$

Maintenant, nous prouvons que l'équation (12) a une solution unique. Supposons que $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux solution de (12). Alors

$$\Psi(t) = X_1(t) - X_2(t) \quad t \in \mathbb{T}$$

satisfait le problème :

$$\Psi^{\Delta}(t) = p(t)\Psi \qquad , \ \Psi(t_0) = 0$$

Par conséquent : $\quad \Psi(t) \equiv 0 \quad$ sur $\mathbb{T} \implies X_1(t) = X_2(t)$.

Théorème 1.14 *(Variation de la constante) : Soient $f, p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions rd-continues et $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ pour $\forall \ \ t \in \mathbb{T}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ et $X_0 \in \mathbb{C}$. Alors la seule olution du problème à valeur initiale*

$$X^{\Delta}(t) = -p(t)X(\sigma(t)) + f(t) \ , \qquad X(t_0) = X_0 \tag{1.14}$$

est donnée par :

$$X(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau) \quad \Delta\tau \tag{1.15}$$

Corollaire 1.3 *(Variation de la constante) :*

Soit $f, p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions rd-continues avec $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ pour $\forall$ $t \in \mathbb{T}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ et $X_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'unique solution du problème à valeur intiale

$$X^{\Delta}(t) = p(t)X + f(t), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{1.16}$$

est donnée par :

$$X(t) = e_p(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau) \quad \Delta\tau, \tag{1.17}$$

Exemple 1.17 *Considérons le problème :*

$$X^{\Delta}(t) = 2X + 3^t \qquad , X(0) = 0 \quad , \mathbb{T} = \mathbb{Z},$$

on a : $\quad p(t) = 2,\ f(t) = 3^t,\ X_0 = 0,\ \sigma(t) = t + 1,\ \mu(t) = 1.$

Utilisons le corollaire au-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
X(t) &= \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau))f(\tau) \quad \Delta\tau \\
&= \int_{0}^{t} e_2(t,\tau+1)3^{\tau} \quad \Delta\tau \\
&= \int 3^{t-\tau-1}3^{\tau} \qquad \Delta\tau \\
&= \int_{0}^{t} 3^{t-1} \quad \Delta\tau = 3^{t-1}\int_{0}^{t} \Delta\tau \\
&= t3^{t-1}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.18 *Soit l'équation*

$$X^{\Delta}(t) = p(t)X + e_p(t,t_0), \ \ X(t_0) = 0,$$

où $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction rd-continue et $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ pour $t \in \mathbb{T}$.
Utilisons le corollaire précédent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
X(t) &= \int_{0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau))e_p(\tau,t_0)\Delta\tau \\
&= \int_{0}^{t} \frac{1}{e_p(\sigma(\tau),t)}e_p(\tau,t_0)\Delta\tau \\
&= \int_{0}^{t} \frac{1}{[1+p(\tau)\mu(\tau)]e_p(\tau,t)}e_p(\tau,t_0)\Delta\tau \\
&= \int_{0}^{t} \frac{e_p(t,t_0)}{1+p(\tau)\mu(\tau)}\Delta\tau.
\end{aligned}$$

1.9 Inégalité de Gronwall

Théorème 1.15 *Soient* $y, f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$ *avec* f *une fonction non décroissante et* g*,*$h \in \mathcal{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *telles que* $g \geq 0, h \geq 0$*. Si on a :*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t h(s) \left[y(s) + \int_a^s g(\tau) y(\tau) \quad \Delta\tau \right] \Delta s \qquad pour\ t \in \mathbb{T}^k.$$

Alors les inégalités suivantes sont vérifiées :

1)

$$y(t) \leq f(t) \left[1 + \int_a^t h(s) e_{h+g}(s, a)\ \Delta s \right] \ , pour t \in \mathbb{T}^k,$$

2)

$$y(t) \leq f(t) e_{h+g}(t, a), pour t \in \mathbb{T}^k.$$

Remarque 1.5 *Si* $f(t) \equiv 0$*, alore* $y(t) \equiv 0$ *pour* $t \in \mathbb{T}^k$*.*

2 Théorème du point fixe

Dans cette section on rappelle le théorème de point fixe qu'on va utiliser dans ce travail. Soit $C \subset B$ où B est un espace de banach.

Définition 2.1 *Soit* p *une application d'un ensemble* C *dans lui même. On appelle point fixe de* p *tout point* u *tel que* $pu = u$*. Si un tel* u *existe on dit que* p *possède un point fixe. Il est claire que la recherche d'un point fixe pour* p *est équivalent à la recherche d'un* u *dans* C *tel que* $pu - u = 0$*.*

Définition 2.2 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est dite contraction si*

$$\text{il existe une constante } 0 \leq k < 1 \text{ telle que } \|f(x) - f(y)\|_n \leq k \|x - y\|_n \ , \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.18}$$

Définition 2.3 *Soit f une fonction , $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$*

$$f \text{ est équcontinue si pour tout } \epsilon \;\; > \;\; 0 \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que } t_1, t_2 \in \mathbb{T} \text{ et } |t_1 - t_2| < \delta$$
$$\text{on a } |f(t_1) - f(t_2)| \;\; < \;\; \epsilon \text{ , pour tout } t_1, t_2 \in \mathbb{T}.$$

Théorème 2.1 *(théorème d'Arzelà-Ascoli) Un sous ensemble de $C_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ qui est équicontinu et borné est relativement compact,($\mathbb{I} \subset \mathbb{T}$).*

2.1 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 2.2 ($Krasnoselskii\, fixed\, point\, theorem$) *Soit B un espace de Banach,, $C \subset B$ fermée, non vide et convexe. Soient $F_1, F_2 : C \to B$ telles que :*

(i) F_1 est continue et $F_1(c)$ est relativement compacte.

(ii) F_2 est une contraction.

(iii) $F_1(x) + F_2(y) \in C$ pour $\forall\ x, y \in C$.

$$\text{Alors il existe } \bar{x} \in C \text{ telque } F_1(\bar{x}) + F_2(\bar{x}) = \bar{x}$$

CHAPITRE 2

Étude de quelque propriétés qualitatives des solutions de certaines classes d'equations dÿnamiques

Dans ce chapitre on va étudier l'existence, l'unicité et la stabilité d'une classe d' équations intégro-dynamiques non linéaires de la forme :

$$x^{\Delta}(t) + p(t)x^{\sigma}(t) = \mathcal{F}\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, s, x(s))\Delta s\right), \qquad t \in \mathbb{I}^k \tag{P}$$

avec la condition initiale

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

où $\mathbb{I} := [t_0, T] \cap \mathbb{T}$ et $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ est une échelle de temps, $t_0, T \in \mathbb{T}$ avec $t_0 < T, x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ fonction inconnue àdéterminer ,$x^{\sigma} = x \circ \sigma, x^{\triangle}$est la Δ dérivae de $x, p : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction regressive rd-continue ,$\mathcal{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est rd-continuous pour la première variable et continue pour la deuxième et la troisième variable,$\mathcal{H} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est rd-continuous pour la première et la deuxième variable et continue pour la troisième variable. De plus, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ sont supposés des fonctions non linéaires.$C_{rd}(\mathbb{I},\mathbb{R})$ est la famille de toutes les fonctions rd-continues définie sur $\mathbb{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, c'est un éspace de Banach mini de la norme $\|.\|$ définie comme suit $\|x\| := \sup\limits_{t\in\mathbb{I}} \|x(t)\|_n$.

Soit

$$E := \sup_{s,t\in\mathbb{I}} |e_{\ominus p}(t,s)| > 0$$

et

$$\eta := \sup \int_{t0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \ \ \Delta s \ \ > 0$$

Nous supposons aussi que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H_1) Soit $p \in \mathcal{R}(\mathbb{I},\mathbb{R})$.

($\mathbf{H}_2$) Soit $\mathcal{F} : \mathbb{I}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction rd-continue pour la première variable et continue pour la deuxième et troisième variable telle que

$$\|\mathcal{F}(t,x_1,y_1) - \mathcal{F}(t,x_2,y_2)\|_n \le L_{\mathcal{F}(t)}(\|x_1-x_2\|_n + \|y_1-y_2\|_n \tag{2.2}$$

$\forall\ t \in \mathbb{I}$ et $x_i, y_i, \in \mathbb{R}^n (i = 1, 2)$, où $L_{\mathcal{F}} \in R^+(\mathbb{I},\mathbb{R}^+)$.

($\mathbf{H}_3$) Soit $H : \mathbb{I}\times\mathbb{I}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction rd-continue dans ses première et deuxième variables et continue dans sa troisième variable telle que

$$\|H(t,s,x_1) - H(t,s,x_2)\|_n \le L_{H(t)} \|x_1-x_2\|_n \tag{2.3}$$

pour tout $t, s \in \mathbb{I}$ et $x_i \in \mathbb{R}^n (i = 1, 2)$, où $L_H \in R^+(\mathbb{I},\mathbb{R}^+)$.

($\mathbf{H}_4$) $\eta \le \frac{1}{L^*_{\mathcal{F}}(1+L^*_H(T-t_0))}$, où $L^*_{\mathcal{F}} := \sup_{t\in\mathbb{I}} L_{\mathcal{F}}(t)$ et $L^*_H := \sup_{s\in\mathbb{I}} L_H(s)$.

($\mathbf{H}_5$) $E \le \frac{1}{2L^*_{\mathcal{F}}(T-t_0)(1+L^*_H(T-t_0))}$ où $L^*_{\mathcal{F}} := \sup_{t\in\mathbb{I}} L_{\mathcal{F}}(t)$ rt $L^*_H := \sup_{s\in\mathbb{I}} L_H(s)$.

1 L'existence et l'unicité de la solution

Lemme 1.1 *Soient* $\rho \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \in C_{rd}(\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, *et* $H \in C_{rd}(\mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. *Alors,* x *est une solution de* $(P) - (2.1)$ *si et seulement si* x *est une solution de l'équation delta intégrale :*

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s, \tau, x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s, \quad t \in \mathbb{I}^k \quad (2.4)$$

Preuve. Supposons que x est une solution de $(P)-(2.1)$.Multiplions (P) par $e_p(t, t_0)$,

on obtient

$$x^{\Delta}(t)e_p(t, t_0) + p(t)e_p(t, t_0)x^{\sigma}(t) = e_p(t, t_0)\mathcal{F}\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, s, x(s))\Delta s\right)$$

$$(e_p(., t_0)x)^{\Delta}(t) = e_p(t, t_0)\mathcal{F}\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, s, x(s))\Delta s\right)$$

En intégrant l'équation ci-dessus de t_0 à t et en multipliant les deux côtés par $e_{\ominus p}(t, t_0)$, on obtient

$$e_p(t, t_0)x(t) - \underbrace{e_p(t_0, t_0)x(t_0)}_{\substack{\parallel \\ x(t_0)}} = \int_{t_0}^{t} e_p(s, t_0)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, \tau, x(\tau))\Delta\tau\right) \Delta s,$$

$$e_{\ominus p}(t, t_0)e_p(t, t_0)x(t) =$$
$$e_{\ominus p}(t, t_0)x(t_0) + e_{\ominus p}(t, t_0) \int_{t_0}^{t} e_p(s, t_0)F\left(s, x(s), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(s, \tau, x(\tau))\Delta\tau\right) \Delta s$$

$$x(t) = e_{\ominus p}(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s.$$

Supposons que (2.4) est verifiée. posons $t = t_0$ dans (2.4), on trouve (2.1) .La Δ dérivée de l'équation ci-dessus donne

$$(e_p(.,t_0)x(t))^{\Delta} =$$

$$\underbrace{(x(t_0))^{\Delta}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \left(\int_{t_0}^{t} e_p(s,t_0)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{t} H(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s\right)^{\Delta}$$

$$(e_p(.,t_0)x)^{\triangle}(t) = e_p(t,t_0)\mathcal{F}\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right).$$

Donc l 'équation (P) est vérifiée.Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Théorème 1.1 *Supposons que les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$ *sont satisfaites. De plus si*

$$M_{\mathcal{F}} := \sup\left\{\|\mathcal{F}(s,0,\psi\|_n : s \in \mathbb{I}, \psi \in \mathbb{R}^n\right\} < +\infty. \tag{2.5}$$

Alors, le problème dynamique $(P) - (2.1)$ a une solution unique dans $C_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$.

Preuve. (Existence) On définit le sous ensemble $B_r \subset C_{rd}$ tel que :

$$B_r := \{x \in C_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n) : \|x\| \leq r\},$$

où

$$r = 2(E\|x(t_0)\|_n + \eta M_{\mathcal{F}}),$$

En considérant l'opérateur $\mathcal{W} : B_r \to C_{rd}$ définit par :

$$\begin{aligned} & W[x](t) \\ = \;& e_{\ominus p}(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(s,t_0)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s \end{aligned} \tag{2.6}$$

il est claire que cet opérateur est bien défini sur B_r.D'aprés Lemme 1.1 , le point fixe de $\mathcal{W}$ est une solution de $(P) - (2.1)$. Afin d'utiliser le théorème du point fixe de Krasnoselskii, nous exprimons (2.6) comme suit :

$$W[x](t) = W_1[x](t) + W_2[x](t),$$

où :

$$W_1[x](t) = e_{\ominus p}(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(s,t_0)\mathcal{F}\left(s, 0, \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0) \triangle \tau\right) \triangle s \tag{2.7}$$

et

$$\begin{aligned} & W_2[x](t) = \\ & \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(s,t_0)\left[\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) - \mathcal{F}\left(s, 0, \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0) \triangle \tau\right)\right] \triangle s. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{W}_1 : B_r \to C_{rd}$ est complètement continu et $\mathcal{W}_2 : B_r \to C_{rd}$ est une contraction. Plus tard, nous montrons que si $x, y \in B_r$, alors $\mathcal{W}_1[x] + \mathcal{W}_2[y] \in B_r$.

La preuve sera donnée dans par les étapes suivantes : ■

étape n°1 : $\mathcal{W}_1 : B_r \to C_{rd}$ est complètement continu.($\mathcal{W}_1$ est complètement continu si il est borné et équicontinue).

Il est claire que $\mathcal{W}_1$ est continu. On montre que $\mathcal{W}_1$ est borné. Pour $x \in B_r$ on a :

$$\|W_1[x]\| = \sup_{t\in\mathbb{I}} \left\| e_{\ominus p}(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(s,t_0)\mathcal{F}\left(s,0,\int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0)\triangle\tau\right)\triangle s\right\|_n$$

$$\begin{aligned}
&\|W_1[x]\| \\
\leq\ & \sup_{t\in\mathbb{I}}\left\{ |e_{\ominus p}(t,t_0)|\,\|x(t_0)\|_n + \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,t_0)| \left\|\mathcal{F}\left(s,0,\int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0)\triangle\tau\right)\right\|_n \triangle s\right\} \\
\leq\ & E\,\|x(t_0)\|_n + \eta M_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2}r.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{W}_1[x]$ est borné pour $x \in B_r$. Maintenant, pour l'équicontinuité de $\mathcal{W}_1$,soient $t_1,t_2 \in \mathbb{I}$ et $x \in B_r$. Alors

$$\|W_1[x](t_2) - W_1[x](t_1)\|_n$$

$$\leq |e_{\ominus p}(t_2,t_0) - e_{\ominus p}(t_1,t_0)|\,\|x(t_0)\|_n + \left\| \begin{array}{c} \int_{t_0}^{t_2} |e_{\ominus p}(t_2,t_0)|\,\mathcal{F}\left(s,0,\int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0)\triangle\tau\right) \\ -\int_{t_0}^{t_1} |e_{\ominus p}(t_1,t_0)|\,\mathcal{F}\left(s,0,\int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0)\triangle\tau\right)\triangle s \end{array}\right\|$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & |e_{\ominus p}(t_2,t_0) - e_{\ominus p}(t_1,t_0)|\,\|x(t_0)\|_n \\
& + |e_{\ominus p}(t_2,t_0) - e_{\ominus p}(t_1,t_0)| \int_{t_0}^{t_1} |e_p(s,t_0)| \left\|\mathcal{F}\left(s,0,\int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0)\triangle\tau\right)\right\|_n \triangle s
\end{aligned}$$

$$+ |e_{\ominus p}(t_2,t_0)| \int_{\min\{t_1,t_2\}}^{\max\{t_1,t_2\}} |e_p(s,t_0)| \left\|\mathcal{F}\left(s,0,\int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0)\triangle\tau\right)\right\|_n \triangle s$$

$$\leq |e_{\ominus p}(t_2,t_0) - e_{\ominus p}(t_1,t_0)| \left(\|x(t_0)\|_n + M_{\mathcal{F}}\int_{t_0}^{t_1} |e_p(s,t_0)|\triangle s\right) +$$

$$M_{\mathcal{F}} \int\limits_{\min\{t_1,t_2\}}^{\max\{t_1,t_2\}} |e_p(t_2,t_0)| \triangle s$$
$$\leq |e_{\ominus p}(t_2,t_0) - e_{\ominus p}(t_1,t_0)| \left(\|x(t_0)\|_n + \eta M_{\mathcal{F}}\right) + EM_{\mathcal{F}} |t_2 - t_1| .$$

On constate que le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque $|t_2 - t_1| \to 0$. Ainsi, $W_1[x]$ est équicontinue pour $x \in B_r$, et application standard du théorème d'Arzelà– Ascoli , $Theorem 2.1$, garanties que W_1 est compacte et par la suite, est complètement continu.

étape n°2 : $\mathcal{W}_2 : B_r \to C_{rd}$ est un contraction.

Pour $x, y \in B_r$, on a :

$$\|W_2[x](t) - W_2[y](t)\|_n =$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \left\| \mathcal{F}\left(s, x(s), \int\limits_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) - \mathcal{F}\left(s, y(s), \int\limits_{t_0}^{s} H(s,\tau,y(\tau)) \triangle \tau\right) \right\|_n \triangle s$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| L_{\mathcal{F}}(s) \left(\|x(s) - y(s)\|_n + \int\limits_{t_0}^{s} L_{\mathcal{H}}(\tau) \|x(\tau) - y(\tau)\|_n \triangle \tau \right) \triangle s$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| L_{\mathcal{F}}(s)(1 + L_{\mathcal{H}}^*(s - t_0) \|x(s) - y(s)\|_n) \triangle s$$

$$\leq L_{\mathcal{F}}^*(1 + L_{\mathcal{H}}^*(T - t_0)) \int\limits_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \|x(s) - y(s)\|_n \triangle s$$

$$\leq L_{\mathcal{F}}^*(1 + L_{\mathcal{H}}^*(T - t_0)) \int\limits_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \triangle s \|x - y\|$$

$$\leq \eta L_{\mathcal{F}}^*(1 + L_{\mathcal{H}}^*(T - t_0)) \|x - y\| .$$

D'aprés (H_4), $\mathcal{W}_2$ est une contraction.

étape n°3 : Si $x, y \in B_r$, alors $W_1[x] + W_2[y] \in B_r$.
Soient $x, y \in B_r$, on a pour tout $t \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned}
\left\| W_1[x](t) + W_2[y](t) \right\|_n &= \\
&\leq E\left\| x(t_0) \right\|_n + +\eta M_{\mathcal{F}} + (\eta L^*_{\mathcal{F}}(1 + L^*_{\mathcal{H}}(T - t_0)))r.
\end{aligned}$$

$$\left\| \begin{array}{c} e_{\ominus p}(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, 0, \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0) \triangle \tau\right) \triangle s \\ + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s) \left[\begin{array}{c} \mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,y(s)) \triangle \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(s, 0, \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0) \triangle \tau\right) \end{array} \right] \triangle s \end{array} \right\|_n$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| e_{\ominus p}(t,t_0) \right| \left\| x(t_0) \right\|_n + \int_{t_0}^{t} \left| e_{\ominus p}(t,s) \right| \left\| \mathcal{F}\left(s, 0, \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0) \triangle \tau\right) \right\|_n \triangle s \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \left| e_{\ominus p}(t,s) \right| \left\| \begin{array}{c} \mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,y(s)) \triangle \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(s, 0, \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0) \triangle \tau\right) \end{array} \right\|_n \triangle s \\
&\leq E\left\| x(t_0) \right\|_n + +\eta M_{\mathcal{F}} + (\eta L^*_{\mathcal{F}}(1 + L^*_{\mathcal{H}}(T - t_0)))r.
\end{aligned}$$

On utilisant la définition de r et l'hypothèse (H_4), on pêut écrire :

$$\left\| W_1[x](t) + W_2[y](t) \right\|_n \leq r \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{I},$$

ce qui donne

$$\left\| W_1[x] + W_2[y] \right\|_n \leq r \qquad \text{pour tout } x, y \in B_r.$$

Donc, $\mathcal{W}_1[x] + \mathcal{W}_2[y] \in B_r$ pour tout $x, y \in B_r$.

unicité : Supposons que $x, y \in B_r$ sont deux solutions du problème (P) –

(2.1). Alors pour tout $t \in \mathbb{I}$, (H_2) et (H_3) donnent l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&\|x(t) - y(t)\|_n \\
\leq\ & \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \left\| \begin{array}{c} \mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,y(\tau)) \triangle \tau\right) \end{array} \right\|_n \triangle s \\
\leq\ & \int_{t_0}^{s} EL_{\mathcal{F}}(\|x(s) - y(s)\|_n + \int_{t_0}^{s} L_{\mathcal{H}} \|x(\tau) - y(\tau)\|_n \triangle \tau) \triangle s,
\end{aligned}$$

d'aprés le théorème 1.15, on obtient

$$\|x(t) - y(t)\|_n \leq 0 \qquad \text{for all } t \in \mathbb{I},$$

ce qui implique que $x = y$. D'où l'unicité.

Corollaire 1.1 *Supposons que* $(H_1) - (H_3)$ *et* (H_5) *sont satisfaites .Si* (2.5) *est vérifiée, alors le problème dynamique* $(P) - (2.1)$ *a une solution unique.*

Remarque 1.1 *Le Théorème* 1.1 *et le Corollaire* 1.1 *sont aussi vérifiés si* (H_2) *et* (H_3) *sont remplacés par :*

$(\mathbf{H}_{L2})$ Soit $\mathcal{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction qui est rd-continue dans sa première variable et continue dans ses deuxième et troisème variables telle que :

$$\|\mathcal{F}(t, x_1, y_1) - \mathcal{F}(t, x_2, y_2)\|_n \leq L_{\mathcal{F}(t)}(\|x_1 - x_2\|_n + \|y_1 - y_2\|_n \tag{2.9}$$

pour tout $t \in \mathbb{I}$ et $\|x_i\|_n < r, \|y_i\|_n < r (i = 1, 2)$, où $L_{\mathcal{F}} \in R^+(\mathbb{I}, \mathbb{R}^+)$.

$(\mathbf{H}_{L3})$ Soit $\mathcal{H} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction rd-continue pour la première et la deuxième variable et continue pour la troisème variable telle que

$$\|H(t, s, x_1) - H(t, s, x_2)\|_n \leq L_{H(t)} \|x_1 - x_2\|_n , \tag{2.10}$$

pour tout $t, s \in \mathbb{I}$ et $\|x_i\|_n < r, \|y_i\|_n < r (i = 1, 2)$, où $L_H \in R^+(\mathbb{I}, \mathbb{R}^+)$.

Remarque 1.2 *si* $\|\mathcal{F}(t, u, v)\|_n \leq K$ *pour tout* $t \in \mathbb{I}$ *et* $u, v \in \mathbb{R}^n$,*alors d'aprés le théorème* 2.1.1, *il est clair que chaque solution de* $(P) - (2.1)$ *vérifie*

$$\|x(t_2) - x(t_1)\|_n$$

$$= \left\| \begin{array}{c} e_{\ominus p}(t_2, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} e_{\ominus p}(t_2, s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s, \tau, x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s - e_{\ominus p}(t_1, t_0)x(t_0) \\ - \int_{t_0}^{t1} e_{\ominus p}(t_1, s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s, \tau, x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s \end{array} \right\|_n$$

$$\leq |e_{\ominus p}(t_2, t_0) - e_{\ominus p}(t_1, t_0)| \, \|x(t_0)\|_n + \left\| \begin{array}{c} \int_{t_0}^{t_2} e_{\ominus p}(t_2, s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s, \tau, x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s \\ - \int_{t_0}^{t1} e_{\ominus p}(t_1, s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s, \tau, x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s \end{array} \right\|_n$$

$$\begin{aligned} \leq \quad & |e_{\ominus p}(t_2, t_0) - e_{\ominus p}(t_1, t_0)| \, \|x(t_0)\|_n \\ & + |e_{\ominus p}(t_2, t_0) - e_{\ominus p}(t_1, t_0)| \int_{t_0}^{t_1} |e_p(s, t_0)| \left\| \mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s, \tau, x(\tau)) \triangle \tau\right) \right\|_n \triangle s \\ & + |e_{\ominus p}(t_2, t_0)| \int_{\min\{t_1, t_2\}}^{\max\{t_1, t_2\}} |e_p(s, t_0)| \left\| \mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s, \tau, x(\tau)) \triangle \tau\right) \right\|_n \triangle s \\ & \leq |e_{\ominus p}(t_2, t_0) - e_{\ominus p}(t_1, t_0)| \left(\|x(t_0)\|_n + EK |T - t_0| + EK |t_2 - t_1|\right). \end{aligned}$$

pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$.

2 Estimation et dépendance des solutions par rapport aux données initiales

Dans le reste du chapitre, nous notons par $\alpha = EL_{\mathcal{F}} + L_H$.

Le premier résultat dans cette section concerne l'estimation a priori des solutions possibles de $(P) - (2.1)$.

Théorème 2.1 *Supposons que* $(H_1)-(H_3)$ *sont satisfaites. Si* x *est une solution de* $(P)-(2.1)$ *défini par Théorème* 1.1, *alors*

$$\|x\| \leq (E\|x_0\|_n + \eta M_{\mathcal{F}})e_a(T,t_0). \tag{2.11}$$

Preuve. d'aprés Lemme 1.1, $x(t)$ est donnée par

$$x(t) = e_{\ominus p}(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s,$$

nous écrivons l'équation ci-dessus comme suit :

$$\begin{aligned} x(t) &= e_{\ominus p}(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s) \begin{bmatrix} \mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(s, 0, \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0) \triangle \tau\right) \end{bmatrix} \triangle s \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, 0, \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,0) \triangle \tau\right) \triangle s. \end{aligned}$$

Les hypothèses (H_2) et(H_3) donnent

$$\|x\|_n \leq E\|x_0\|_n + \eta M_{\mathcal{F}} + \int_{t_0}^{t} EL_{\mathcal{F}}(\|x\|_n + \int_{t_0}^{t} L_H(\tau)\|x(\tau)\|_n \triangle \tau) \triangle s.$$

Finallement, en utilisant l'inégalité de Gronwall donnée par le théorème 1.15(2) et tenant compte de la croissance de la fonction exponentielle pour la premiere variable, nous obtenons

$$\|x\|_n \leq (E\|x_0\|_n + \eta M_{\mathcal{F}})\, e_a(T,t_0).$$

L 'inégalité (2.11) découle facilement. ■

Remarque 2.1 *Sous la condition du Théorème* 2.1, *nous suivons la même méthode du calcul, et par application de l'inégalité du Théorème* 1.1.15(1), *nous déduisons* *que la solution x de $(P)-(2.1)$ satisfait l'estimation*

$$\|x\| \leq (E\|x_0\| + \eta M_{\mathcal{F}}) \left[1 + \int_{t_0}^{T} EL_{\mathcal{F}}(s) e_a(s,t_0) \triangle s \right].$$

2.1 Dépendance des solutions de l'état initial

Maintenant, nous intéressons aux résultats concernant la dépendance des solutions par rapport à plusieurs quantités. nous prouvons la dépendance des solutions par rapport aux conditions intiales. Pour cela, nous considérons d'abord l'équation dynamique :

$$y^{\triangle}(t) + p(t) y^{\sigma}(t) = \mathcal{F}\left(t, y(t), \int_{t_0}^{t} H(t,s,y(s)) \triangle s \right) \qquad t \in \mathbb{I}^k \tag{2.12}$$

sous la condition initiale :

$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Théorème 2.2 *On supposs que les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ dans NIDEs (P) et (2.12) satisfaisant (H_2) et (H_3). Si x et y sont des solutions de $(P)-(2.1)$ et $(2.12)-(2.13)$, respectivement, alors l'inégalité*

$$\|x-y\| \leq E\|x_0 - y_0\| e_a(T,t_0) \tag{2.14}$$

est vraie. Deplus, si $\|x_0 - y_0\|_n \leq \delta$ pour quelques $\delta > 0$, alors nous avons :

$$\|x-y\| \leq E\delta e_a(T,t_0). \tag{2.15}$$

Preuve. D'aprés le lemme 1.1, les solutions x et y de $(P)-(2.1)$ et $(2.12)-(2.13)$, respectivement, sont données par :

$$x(t) = e_{\ominus p}(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) \bigtriangleup s,$$

et

$$y(t) = e_{\ominus p}(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,y(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) \bigtriangleup s,$$

alors pour tout $t \in \mathbb{I}$, on a :

$$\|x(t) - y(t)\|_n$$

$$\leq |e_{\ominus p}(t,t_0)| \, \|x_0 - y_0\|_n + \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,t_0)| \left\| \begin{array}{c} \mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} H(s,\tau,y(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) \end{array} \right\|_n \bigtriangleup s.$$

Maintenant, (H_2) et (H_3) donnent :

$$\begin{aligned} & \|x(t) - y(t)\|_n \\ \leq \; & E\|x_0 - y_0\|_n + \int_{t_0}^{t} EL_{\mathcal{F}}(s) \left(\|x(s) - y(s)\|_n + \int_{t_0}^{s} L_H(\tau) \|x(\tau) - y(\tau) \bigtriangleup \tau\|_n \right) \bigtriangleup s, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Gronwall donnée par le Theorem1.15(2), et tenant compte de la la croissance de la fonction exponentielle par rapport à la première variable, nous obtenons pour tout $t \in \mathbb{I}$:

$$\|x(t) - y(t)\|_n \leq E\|x_0 - y_0\|_n e_a(T,t_0),$$

en effet,(2.14) et (2.15) découlent de l'inégalité ci-dessus. ■

Remarque 2.2 *Sous les conditions de Théorème* 2.2 *, nous suivons la même méthode du calcul et utilsant l'inégalité donnée par le théorème* 1.1.15(1)*, nous obtenons* *l'inégalité*

$$\|x-y\| \leq E\delta \left[1 + \int_{t_0}^{T} EL_{\mathcal{F}}(s) e_a(s,t_0) \triangle s \right],$$

où $\|x_0 - y_0\|_n \leq \delta$ *pour quelques* $\delta > 0$.

Maintenent, pour obtenir un résultat concernant la dépendance de la solution aux fonctions impliquées dans l'équation dynamique, nous considérons une variante de NIDEs

$$z^{\triangle}(t) + p(t) z^{\sigma}(t) = \hat{\mathcal{F}}\left(t, z(t), \int_{t_0}^{t} \hat{H}(s,\tau,z(\tau)) \triangle \tau \right) \qquad t \in \mathbb{I}^k \tag{2.16}$$

sous la condition initiale :

$$z(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.17}$$

2.2 Dépendance des solutions aux fonctions

Théorème 2.3 *On suppose que les fonctions* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{H}$ *dans l 'équation* (P) *satisfaisant* (H_2) *et* (H_3). *De plus, supposons qu'il existe une constante* $S > 0$ *telle que*

$$\left\| \mathcal{F}(t,u_1,v_1) - \hat{\mathcal{F}}(t,u_2,v_2) \right\| \leq S,$$

pour tout $t \in \mathbb{I}$ *et* $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n (i = 1,2)$. *Si* x *et* z *sont des solutions de* $(P) - (2.1)$ *et* $(2.16) - (2.17)$, *respectivement, alors :*

$$\|x - z\| \leq (E\delta + \eta S) e_\alpha(T, t_0), \tag{2.18}$$

où $\|x_0 - z_0\|_n \leq \delta$ *pour certain* $\delta > 0$.

Preuve. Puisque x et z sont des solutions de $(P) - (2.1)$ et $(2.16) - (2.17)$ (resp), en utilisant lemme 1.1, nous obtenons pour $t \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} & \|x(t)-z(t)\|_n \\ \leq\ & |e_{\ominus p}(t,t_0)|\, \|x_0 - z_0\|_n \end{aligned}$$

$$+\int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \left\| \mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,x(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) - \hat{\mathcal{F}}\left(s, z(s), \int_{t_0}^{s} \hat{\mathcal{H}}(s,\tau,z(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) \right\|_n \bigtriangleup s.$$

$$\leq |e_{\ominus p}(t,t_0)|\, \|x_0 - z_0\|_n$$

$$+\int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \left\| \mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,x(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) - \mathcal{F}\left(s, z(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,z(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) \right\|_n \bigtriangleup s$$

$$+\int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \left\| \mathcal{F}\left(s, z(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,z(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) - \hat{\mathcal{F}}\left(s, z(s), \int_{t_0}^{s} \hat{\mathcal{H}}(s,\tau,z(\tau)) \bigtriangleup \tau\right) \right\|_n \bigtriangleup s$$

$$\begin{aligned} \leq\ & E\, \|x_0 - y_0\|_n \\ & + \int_{t_0}^{t} E L_{\mathcal{F}}(s) \left(\|x(s)-z(s)\|_n + \int_{t_0}^{s} L_{\mathcal{H}}(\tau)\, \|x(\tau) - z(\tau) \bigtriangleup \tau\|_n \right) \bigtriangleup s \\ & + S \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)| \bigtriangleup s \end{aligned}$$

$$\leq E\, \|x_0 - y_0\|_n + \int_{t_0}^{t} E L_{\mathcal{F}}(s) \left(\|x(s)-z(s)\|_n + \int_{t_0}^{s} L_{\mathcal{H}}(\tau)\, \|x(\tau) - z(\tau) \bigtriangleup \tau\|_n \right) \bigtriangleup s + S\eta.$$

D'aprés l'inégalité de Gronwall donnée par le théorème 1.15(2) et tenant compte de la croissance de la fonction exponentielle par rapport à la le première variable, nous obtenons, pour tout $t \in \mathbb{I}$

$$\|x(t)-z(t)\|_n \leq (E\, \|x_0 - z_0\|_n + S\eta)\, e_a(T,t_0), \tag{2.19}$$

l 'inégalité (2.18) s'ensuit facilement. ■

Remarque 2.3 *Sous les conditions du théorème* 1.2.2 *avec le même calcul et on gardant l'inégalité dans le théorème* 1.15(1), *nous obtenons l'inégalité*

$$\|x-z\| \leq (E\delta + S\eta)\left[1+\int_{t_0}^{T} EL_{\mathcal{F}}(s)e_a(s,t_0)\triangle s\right]$$

où $\|x_0 - z_0\|_n \leq \delta$ *for some* $\delta > 0$

2.3 Dépendance des solutions aux paramètres

Enfin, pour prouver le résultat lié à la dépendance aux paramètre, nous considérons les deux équations dynamiques impliquant des paramètres de la forme :

$$x^{\triangle}(t) + p(t)x^{\sigma}(t) = \mathcal{F}\left(t, \gamma_1, x(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t,s,x(s))\triangle s\right) \qquad t \in \mathbb{I}^k \qquad (2.20)$$

$$x^{\triangle}(t) + p(t)x^{\sigma}(t) = \mathcal{F}\left(t, \gamma_2, x(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t,s,x(s))\triangle s\right) \qquad t \in \mathbb{I}^k \qquad (2.21)$$

sous la condition initiale :

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \qquad (2.22)$$

où $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.4 *On suppose que la condition* (H_3) *est vérifiée, supposons aussi qu'il existe* $\Omega, \Omega_\gamma > 0$ *et* $\tilde{L}_{\mathcal{F}} \in \mathcal{R}^+(\mathbb{I}, \mathbb{R}^+)$ *telle que :*

$$\|\mathcal{F}(t,\gamma_i,u_1,v_1) - \mathcal{F}(t,\gamma_i,u_2,v_2)\|_n \leq \Omega_\gamma \tilde{L}_{\mathcal{F}}(t)(\|u_1-u_2\|_n + \|v_1-v_2\|_n),$$

et

$$\|\mathcal{F}(t,\gamma_1,u_1,v_1) - \mathcal{F}(t,\gamma_2,u_2,v_2)\|_n \leq \Omega\,|\gamma_1-\gamma_2|\,,$$

pour tout $t \in \mathbb{I}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ *et* $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n (i = 1, 2)$. *Si* x_1 *et* x_2 *sont des solutions de* $(2.20) - (2.22)$ *et* $(2.21) - (2.22)$, *respectivement, alors :*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \eta\Omega\, |\gamma_1 - \gamma_2|\, e_{\tilde{a}}(T, t_0) \quad \textit{tel que } \tilde{a} = E\Omega_\gamma \tilde{L}_{\mathcal{F}}(t) + L_{\mathcal{H}}. \tag{2.23}$$

Preuve. Puisque x_1 et x_2 sont des solutions de $(2.21) - (2.23)$ et $(2.22) - (2.23)$, respectivement, en utilisant Lemme 1.1, nous pouvons écrire pour tout $t \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} & \|x_1 - x_2\|_n \\ = & \left\| \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, s) \left[\begin{array}{c} \mathcal{F}\left(s, \gamma_1, x_1(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s, \tau, x_1(\tau)) \triangle \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(s, \gamma_2, x_2(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s, \tau, x_2(\tau)) \triangle \tau\right) \end{array} \right] \triangle s \right\|_n, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} & \|x_1 - x_2\|_n \\ \leq & \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t, s)| \left\| \begin{array}{c} \mathcal{F}\left(t, \gamma_1, x_1(t), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(t, \tau, x_1(\tau)) \triangle \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(t, \gamma_2, x_2(t), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(t, \tau, x_2(\tau)) \triangle \tau\right) \end{array} \right\|_n \triangle s \\ \leq & \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t, s)| \left\| \begin{array}{c} \mathcal{F}\left(t, \gamma_1, x_1(t), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(t, \tau, x_1(\tau)) \triangle \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(t, \gamma_2, x_1(t), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(t, \tau, x_1(\tau)) \triangle \tau\right) \end{array} \right\|_n \triangle s \\ & + \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t, s)| \left\| \begin{array}{c} \mathcal{F}\left(t, \gamma_2, x_1(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, \tau, x_1(\tau)) \triangle \tau\right) \\ -\mathcal{F}\left(t, \gamma_2, x_2(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, \tau, x_2(\tau)) \triangle \tau\right) \end{array} \right\|_n \Delta s \\ \leq & \ \Omega\, |\gamma_1 - \gamma_2| \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t, s)| \triangle s \\ & + \int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t, s)|\, \Omega_\gamma \tilde{L}_{\mathcal{F}}(t) (\|x_1(s) - x_2(s)\|_n + \int_{t_0}^{s} L_{\mathcal{H}} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\|_n) \triangle s \\ \leq & \ \eta\Omega\, |\gamma_1 - \gamma_2| + \int_{t_0}^{t} E\Omega_\gamma \tilde{L}_{\mathcal{F}}(t) (\|x_1(s) - x_2(s)\|_n + \int_{t_0}^{s} L_{\mathcal{H}} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\|_n) \triangle s. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Gronwall donnée par le théorème 1.1.15(2),et tenant compte de la la croissance de la fonction exponentielle par rapport à la première variable, nous obtenons (2.23). ■

Remarque 2.4 *Sous les conditions de théorème* 2.4*, suivons la même méthode du calcul, et en utisant l'inégalité donnée par le théorème*1.15(1)*, nous obtenons l'inégalité suivante :*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \eta\Omega\, |\gamma_1 - \gamma_2| \left[1 + \int_{t_0}^{T} E\Omega_\gamma \tilde{L}_{\mathcal{F}}(s) e_{\tilde{\alpha}}(s, t_0) \triangle s\right].$$

3 Stabilité d'Ulam

Dans cette section, nous présentons l 'étude de la stabilité d'Ulam pour l 'équation dynamique (P). Pour cela, nous allons d'abord introduire les définitions suivantes :

Définition 3.1 *On dit que NIDE* (P) *est stable au sensd e Hyers-Ulam s'il existe un nombre réel* $C_{\mathcal{F}} > 0$ *tel que pour tout* $\epsilon > 0$ *et pour toute* $y \in C^1_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ *satisfaisant :*

$$\left\| y^{\triangle}(t) + p(t) y^{\sigma}(t) - \mathcal{F}\left(t, y(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, s, y(s)) \triangle s\right) \right\|_n \leq \epsilon \tag{2.24}$$

pour tout $t \in \mathbb{I}^k$.

il existe une solution $x \in C_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ de (P) telle que

$$\|y(t) - x(t)\|_n \leq \epsilon C_{\mathcal{F}} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{I},$$

ici $C_{\mathcal{F}}$ est une constante de HUS.

Définition 3.2 *On dit que l 'équation dynamique* (P) *ets stable au sens de Hyers-Ulam généralisée s'il existe une fonction* $\theta_{\mathcal{F}} \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *avec* $\theta_{\mathcal{F}}(0) = 0$*, telle que* *pour tout* $y \in C_{rd}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ *satisfaisant* (2.24), *il existe une solution* $x \in C_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ *de* (P) *avec :*

$$\|y(t) - x(t)\|_n \leq \theta_{\mathcal{F}}(\epsilon) \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{I}.$$

Définition 3.3 *Soit* $\mathcal{N}$ *une famille de fonctions réelles, rd-continues, positives, non décroissantes définies sur* $\mathbb{I}$. *On dit que l 'équation dynamique* (P) *est stable au sens de Hyers-Ulam-Rassais généralisée de type* $\mathcal{N}$ *si pour tout* $\psi \in \mathcal{N}$, *il existe* $C_{\mathcal{F},\psi} > 0$ *tel que pour tout* $y \in C_{rd}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ *satisfaisant*

$$\left\| y^{\triangle}(t) + p(t)y^{\sigma}(t) - \mathcal{F}\left(t, y(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, s, y(s)) \triangle s\right) \right\|_n \leq \epsilon\psi(t) \tag{2.25}$$

pour tout $t \in \mathbb{I}^k$,

il existe une solution $x \in C_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ de (P) telle que :

$$\|y(t) - x(t)\|_n \leq \epsilon C_{\mathcal{F},\psi}\psi(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{I}$$

ici $C_{\mathcal{F},\psi}$ est une constante de $HURS_{\mathcal{N}}$

Définition 3.4 *Soit* $\mathcal{N}$ *une famille de fonctions réelles, rd-continues, positives, non décroissantes définies sur* $\mathbb{I}$. *On dit que l 'équation dynamique* (P) *est stable au sens de Hyers-Ulam-Rassais généralisée de type* $\mathcal{N}$ *si pour tout* $\psi \in \mathcal{N}$, *il existe* $C_{\mathcal{F},\psi} > 0$ *tel que pour tout* $y \in C_{rd}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ *satisfaisant*

$$\left\| y^{\triangle}(t) + p(t)y^{\sigma}(t) - \mathcal{F}\left(t, y(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t, s, y(s)) \triangle s\right) \right\|_n \leq \psi(t) \tag{2.26}$$

pour tout $t \in \mathbb{I}^k$,

il existe une solution $x \in C_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ de (P) avec :

$$\|y(t) - x(t)\|_n \leq C_{\mathcal{F},\psi}\psi(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{I}$$

ici $C_{\mathcal{F},\psi}$ est une constante de $GHURS_{\mathcal{N}}$.

Remarque 3.1 *Une fonction* $y \in C^1_{rd}(\mathbb{I},\mathbb{R}^n)$ *est une solution de* (2.25) *s'il existe une fonction* $\mathcal{G} \in C^1_{rd}(\mathbb{I},\mathbb{R}^n)$ *(qui dépend de* y*) telle que :*

- **(i)** $\|\mathcal{G}(t)\|_n \leq \epsilon\psi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{I}$
- **(ii)** $y^{\triangle}(t) + p(t)y^{\sigma}(t) = \mathcal{F}\left(t, y(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t,s,y(s)) \triangle s\right) + \mathcal{G}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{I}^k$.

Théorème 3.1 *On suppose que la condition* (H_1) *est vérifiée et les fonctions* $\mathcal{F},\mathcal{H}$ *dans l 'équation dynamique* (P) *satisfaisant* (H_2) *et* (H_3)*. Supposons qu'il existe* $\lambda > 0$ *tel que pour tout* $\psi \in \mathcal{N}$ *et pour tout* $t \in \mathbb{I}$*,*

$$\int_{t_0}^{t} |e_{\ominus p}(t,s)|\, \psi(s) \triangle s \leq \lambda\psi(t), \tag{2.27}$$

alors (P) *est stable au sens de Hyers-Ulam-Rassais de type* $\mathcal{N}$ *avec la constante de* $HURS_{\mathcal{N}}$ $\lambda e_{\alpha}(T,t_0)$.

Preuve. Soit $y \in C^1_{rd}(\mathbb{I},\mathbb{R}^n)$ satisfait (2.25). Alors, d'aprés la Remarque 3.1, on a :

$$y^{\triangle}(t) + p(t)y^{\sigma}(t) = \mathcal{F}\left(t, y(t), \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}(t,s,y(s)) \triangle s\right) + \mathcal{G}(t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{I}^k.$$

Le Lemme 1.1 implique :

$$\begin{aligned} y(t) &= e_{\ominus p}(t,t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\left[\mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,y(\tau)) \triangle \tau\right) + \mathcal{G}(s)\right] \triangle s \\ &= e_{\ominus p}(t,t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,y(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s \end{aligned}$$

$$+\int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{G}(s)\triangle s,$$

pour tout $t \in \mathbb{I}$, alors

$$\begin{aligned}&\left\| y(t) - e_{\ominus p}(t,t_0)y(t_0) - \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,y(\tau))\triangle \tau\right)\triangle s\right\|_n \\ \leq\ & \epsilon \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\psi(s)\triangle s.\end{aligned}$$

Ainsi, d'aprés (2.27), nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\left\| y(t) - e_{\ominus p}(t,t_0)y(t_0) - \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,y(\tau))\triangle \tau\right)\triangle s\right\|_n \\ \leq\ & \epsilon\lambda\psi(t),\end{aligned} \tag{2.28}$$

pour tout $t \in \mathbb{I}$ et soit $x \in C^1_{rd}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n)$ la solution du problème dynamique suivant :

$$\begin{aligned} x^{\triangle}(t) + p(t)x^{\sigma}(t) &= \mathcal{F}\left(t, x(t), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(t,s,x(s))\triangle s\right) \qquad \text{pour tout} \in \mathbb{I}^k \\ x(t_0) &= y(t_0), \end{aligned}$$

alors, on a

$$x(t) = e_{\ominus p}(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,x(\tau))\triangle \tau\right)\triangle s \tag{2.29}$$

pour tout $t \in \mathbb{I}$

de (2.29), (2.30), et en utilisant les conditions (H_2) et (H_3), on trouve :

$$\begin{aligned} & \|y(t)-x(t)\|_n \qquad (2.30) \\ \leq \ & \left\| y(t) - e_{\ominus p}(t,t_0)y(t_0) - \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,y(\tau)) \triangle \tau\right) \triangle s \right\|_n \end{aligned}$$

$$+\int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s) \left\| \mathcal{F}\left(s, y(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,y(\tau)) \triangle \tau\right) - \mathcal{F}\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} \mathcal{H}(s,\tau,x(\tau)) \triangle \tau\right) \right\|_n \Delta s$$

$$\leq \epsilon\lambda\psi(t) + \int_{t_0}^{t} EL_{\mathcal{F}}(s)(\|y(s)-x(s)\|_n + \int_{t_0}^{s} L_{\mathcal{H}} \|y(\tau)-x(\tau)\|_n \triangle \tau) \triangle s. \qquad (2.31)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall donnér par le théorème 1.15(2) et prenant compte de la croissance de la fonction exponentielle, nous obtenons :

$$\|y(t)-x(t)\|_n \leq \epsilon\lambda\psi(t)e_\alpha(T,t_0),$$

ce qui donne

$$\|y(t)-x(t)\|_n \leq \epsilon C_{\mathcal{F},\psi}\psi(t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{I}.$$

où $C_{\mathcal{F},\psi} = \lambda e_\alpha(T,t_0)$ .Par conséquent NIDE (P) est stable au sens de Hyers–Ulam–Rassias de type $\mathcal{N}$ avec la constante de $HURS_{\mathcal{N}}$ $\lambda e_\alpha(T,t_0)$. ■

Corollaire 3.1 *On suppose que la condition* $(H1)$ *est vérifiée et les fonctions* $\mathcal{F}$ *et* H *dans NIDE* (P) *satisfaisants les conditions de théorème* 3.1. *Alors, l 'équation dynamique* (P) *est stable au sens de Hyers–Ulam–Rassias généralisée de type* $\mathcal{N}$ *avec la constante de* $GHURS_{\mathcal{N}}$ $\lambda e_\alpha(T,t_0)$.

Preuve. On prend $\epsilon = 1$ dans la preuve du théorème3.1, on obtient que NIDE(P)

a la propriéte de la stabilité de Hyers–Ulam–Rassias généralisée de type $\mathcal{N}$ avec la constante de GHURS$_{\mathcal{N}}$ $\lambda e_\alpha(T,t_0)$. ■

Remarque 3.2 *En utilisant l'énigalité du théorème* 1.15(1) *à* (2.31), *nous déduisons que NIDE*(P) *a une stabilité de Hyers–Ulam–Rassias stability de type* $\mathcal{N}$ *ainsi qu'une stabilité de Hyers–Ulam–Rassias généralisée de type* N *avec*

$$\lambda\left[1+\int_{t_0}^{T} EL_{\mathcal{F}}(s)e_{\alpha}(T,t_0)\,\triangle\, s\right]$$

étant à la fois les $HURS_{\mathcal{N}}$ *et* $GHURS_{\mathcal{N}}$ *constantes.*

Corollaire 3.2 *On suppose que la condition* (H_1) *est vérifiée et les fonctions* $\mathcal{F}$ *et* H *dans NIDE*(P) *satisfaisant* (H_2) *et* (H_3). *Alors l 'équation dynamique* (P) *est stable au sens de Hyers–Ulam stable avec la constante de HUS* $\eta e_{\alpha}(T,t_0)$.

Preuve. On prend $\psi(t)=1$. Alors

$$\int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t,s)\psi(s)\,\triangle\, s\leq\eta \qquad \text{pour tout } t\in\mathbb{I},$$

d'aprés la preuve du théorème 3.1, on obtient

$$\|y(t)-x(t)\|_n\leq\epsilon C_{\mathcal{F}} \qquad \text{pour tout } t\in\mathbb{I} \tag{2.32}$$

cela montre que (P) est stable au sens de Hyers–Ulam avec la constante de HUS $C_{\mathcal{F}}:=\eta e_{\alpha}(T,t_0)$. ■

Corollaire 3.3 *On suppose que la condition* (H_1) *est vérifiée et que les fonctions* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{H}$ *dans* (P) *satisfaisant* (H_2) *et* (H_3).*Alors* (P) *est stable au sens de Hyers–Ulam généralisée de type* $\mathcal{N}$.

Preuve. Définissant $\theta_{\mathcal{F}}(\epsilon):=\epsilon C_{\mathcal{F}}$. Il est claire que $\theta_{\mathcal{F}}\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ et $\theta_{\mathcal{F}}(0)=0$.

Alors (2.32) s 'écrit sous la forme,

$$\|y(t) - x(t)\|_n \leq \theta_{\mathcal{F}}(\epsilon) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{I}.$$

Cela prouve que NIDE (P) est stable au sens de Hyers–Ulam généralisée de type $\mathcal{N}$.

∎

Remarque 3.3 *En utilisant l'inégalité du Théorème* 1.15(1) *à* (2.30), *nous déduisons que l 'équation dynamique* (P) *est stable au sens de Hyers–Ulam–Rassias de type* $\mathcal{N}$ *ainsi la stabilité au sens de Hyers–Ulam–Rassias generalisée de type* $\mathcal{N}$ *avec*

$$\eta \left[1 + \int_{t_0}^{T} EL_{\mathcal{F}}(s) e_\alpha(T, t_0) \triangle s \right],$$

est la constante de HUS.

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications des résultats prouvés dans le chapitre précédent.

Exemple 0.1 (Existence et unicité) *Soit l'échelle de temps* $\mathbb{T}$ *définie comme suit :* $\mathbb{T} := \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$. *Cette échelle de temps apparaît dans les modèles mathématiques de la dynamique des populations de certaines espèces qui se reproduisent à des intervalles de temps discrets et dont la durée de vie est d'une unité de temps. Considéreons*

$$\begin{aligned} x^{\triangle}(t) + x^{\sigma}(t) &= L_{\mathcal{F}} \sin\left(x(t) + \int_{t_0}^{t} (\sin x(s) + \cos x(s) + 2t) \triangle s \right), \\ t &\in [t_0, T]^k_{\mathbb{T}}, x_0 = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$L_{\mathcal{F}} \in \left(0, \frac{1}{(2e)^{m+1}(2m+1)(4m+3)}\right), \tag{3.2}$$

on prend $t_0 = 0, T = 2m+1, m \in \mathbb{N}$. *Ici* $p(t) \equiv 1$, *il est clair que* $p \in \mathcal{R}$,*donc* (H_1) *est vérifiée.*

On a aussi

$$H(t,s,x) = \sin x + \cos x + 2t \quad et \quad \mathcal{F}(t,x,y) = L_{\mathcal{F}} \sin\left(x(t) + y(t)\right).$$

On remarque que la condition (H_2) *est satisfaite car*

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(t,x_1(t),y_1(t)) - \mathcal{F}(t,x_2(t),y_2(t))| &= L_{\mathcal{F}} \left|\sin\left(x_1(t)+y_1(t)\right) - \sin\left(x_2(t)+y_2(t)\right)\right| \\ &\leq L_{\mathcal{F}} \left|(x_1(t) - x_2(t) + y_1(t) - y_2(t)\right| \\ &\leq L_{\mathcal{F}}(|x_1(t)-x_2(t)| + |y_1(t)-y_2(t)|). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(t,s,x_1(t)) - \mathcal{H}(t,s,x_2(t))| &\leq |\sin x_1(s) - \sin x_2(s)| + |\cos x_1(s) - \cos x_2(s)| \\ &\leq 2\left|x_1(s) - x_2(s)\right|. \end{aligned}$$

Donc, (H_3) *est satisfaite avec* $L_{\mathcal{H}} = 2$. *Maintenant on a*

$$\eta = \sup_{t\in[0,2m+1]_{\mathbb{T}}} \int_0^t e_{\ominus 1}(t,s) \bigtriangleup s = (2e)^{m+1}(2m+1),$$

ce qui montre que (H_4) *est satisfaite avec* $L_{\mathcal{H}} = 2$ *et* $L_{\mathcal{F}}$ *donnée par* (3.2). *Ainsi, toutes les conditions du théorème* 1.2.2 *sont satisfaites et donc l 'équation* (3.1) *a une solution unique sur* $[0, 2m+1]_{\mathbb{T}}$.

Exemple 0.2 (estimation de la solution) *De l'exemple 0.1, d'aprés le lemme* 1.1, *l'unique solution de l 'équation* (3.1) *est donnée par :*

$$\begin{aligned}
x(t) &= L_{\mathcal{F}} \int_0^t e_{\ominus 1}(t,s) \sin(x(s) + \int_0^t [\sin(x(\tau)) + \cos(x(\tau)) + 2s] \triangle \tau) \triangle s \\
&= L_{\mathcal{F}} \int_0^t e_{\ominus 1}(t,s) \sin(x(s) + \int_0^t \sin(x(\tau)) \triangle \tau + \int_0^t \cos(x(\tau)) \triangle \tau + 2s^2) \triangle s,
\end{aligned}$$

iPar conséquent, nous résultons de l'équation précédente que

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq L_{\mathcal{F}}(2e)^{m+1}(2m+1) \\
&< \frac{1}{4m+3}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution de l 'équation (3.1)*est bornée.*

Exemple 0.3 (.Stabilité) *Soit :*

$$T = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1],$$

Considèrons l'équation suivante :

$$x^{\triangle}(t) + x^{\sigma}(t) = L_{\mathcal{F}}(x(t)+3)^{\frac{1}{2}} + L_{\mathcal{F}} \int_{t_0}^{t} \frac{x(s)}{1+x(s)} \triangle s, \quad t \in [t_0, T]^k_{\mathbb{T}}, x(t_0) = 0, \quad (3.3)$$

où

$$L_{\mathcal{F}} \in \left(0, \frac{1}{(2e)^{m+1}(2m+1)(2m+2)}\right). \quad (3.4)$$

On prend $t_0 = 0, T = 2m+1, m \in \mathbb{N}$. *Ici* $p(t) \equiv 1$, *il est clair que* $p \in \mathcal{R}$, *donc* (H_1) *est satisfaie.De plus,*

$$H(t,s,x) = \frac{x(s)}{1+x(s)} \quad , \quad \mathcal{F}(t,x,y) = L_{\mathcal{F}}((x(t)+3)^{\frac{1}{2}} + y),$$

on remarque que (H_2) *est satisfaite, donc*

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}(t,x_1(t),y_1(t)) - \mathcal{F}(t,x_2(t),y_2(t))| \\ = \;& L_{\mathcal{F}} \left(\left| (x_1(t)+3)^{\frac{1}{2}} - (x_2(t)+3)^{\frac{1}{2}} \right| + |y_1(t)-y_2(t)| \right), \end{aligned}$$

d'après $[2, Corollary 1.68]$, *on peut écrire :*

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}(t,x_1(t),y_1(t)) - \mathcal{F}(t,x_2(t),y_2(t))| \\ \leq \;& L_{\mathcal{F}} \left(\sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \frac{z}{(z^2+3)^{1/2}} \right| |x_1(t)-x_2(t)| + |y_1(t)-y_2(t)| \right) \\ \leq \;& L_{\mathcal{F}} \left(|x_1(t)-x_2(t)| + |y_1(t)-y_2(t)| \right). \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(t,s,x_1(s)) - \mathcal{H}(t,s,x_2(s))| &= \left| \frac{x_1(s)}{1+x_1(s)} - \frac{x_2(s)}{1+x_2(s)} \right| \\ &= \left| \frac{x_1(s)-x_2(s)}{(1+x_1(s))(1+x_2(s))} \right| \\ &\leq |x_1(s)-x_2(s)| \end{aligned}$$

Donc, (H_3) *est satisfaite avec* $L_{\mathcal{H}} = 1$,*de plus*

$$\eta = \sup_{t\in[0,2m+1]_{\mathbb{T}}} \int_0^t e_{\ominus 1}(t,s) \triangle s = (2e)^{m+1}(2m+1),$$

ce qui montre que la condition (H_4) *est satisfaite avec* $L_{\mathcal{H}} = 1$ *et* $L_{\mathcal{F}}$ *est donnée par* (3.4). *Toutes les conditions du théorème* 2.2 *sont satisfaites,donc, l'équation* (3.3) *a une solution unique. En fait, d'aprés le lemme* 1.1 *l'unique solution est donnée par*

$$x(t) = L_{\mathcal{F}} \int_0^t e_{\ominus 1}(t,s) \left((x(s)+3)^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^t \frac{x(\tau)}{1+x(\tau)} \triangle \tau \right) \triangle s.$$

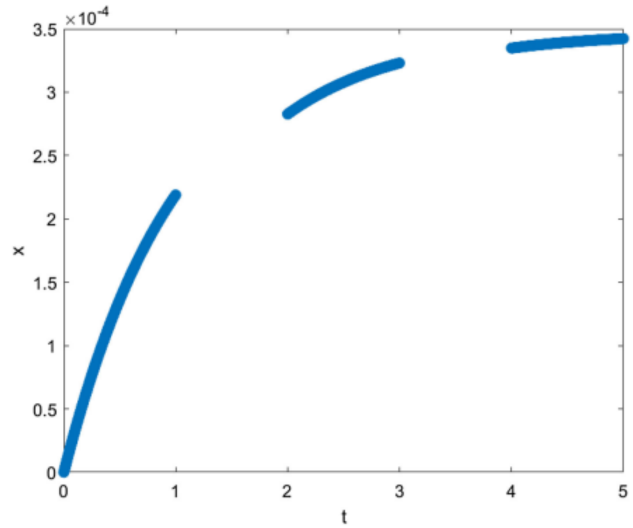
Si $y \in C^1_{rd}([0, 2m+1]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *satisfait :*

$$\left| y^{\triangle}(t) + y^{\sigma}(t) - L_{\mathcal{F}}(y(t)+3)^{\frac{1}{2}} - \int_{t_0}^{t} \frac{y(s)}{1+y(s)} \triangle s \right| \leq \epsilon,$$

alors d'aprés le Corollaire 3.2*, il existe une solution* x *de* (3.3) *satisfaisant :*

$$|y(t) - x(t)| \leq \epsilon(2e)^{m+1}(2m+1)e_{\alpha}(2m+1, 0),$$

où $\alpha = (2e)^{m+1}L_{\mathcal{F}} + 1$*. De plus, l'équation* (3.3) *est stable au sens de Hyers–Ulam avec la constante de* HUS *est* $(2e)^{m+1}(2m+1)e_a(2m+1, 0)$*. On se réfère à Fig.1 pour une décrire la solution*



$Fig.1$ *La solution* x *de*(3.3) *avec* $m = 2etLF = 0.0002$

de (3.3) où $m = 2$ et $L_{\mathcal{F}} = 0.0002$(qui satisfait (3.4)). Comme il n'existe pas de logiciel permettant de résoudre de tels problèmes sur les échelles de temps, nous expliquons maintenant comment nous avons pu représenté cette solution. Nous avons utilisé $MATLAB^{\circledR}$ à usage général $IDSOLVER$ de Gelmi et Jorquera [1], avec de légères modifications, en combinaison avec des calculs manuels afin de tenir compte de la structure spatiale de l'échelle de temps. Pour commencer, nous avons remplacer la dernière ligne du code $IDSOLVER$ par :

$$\mathrm{dy(n)= c(x, y(1)) + d(x) * quadl(@(s)}$$

$$\mathrm{k(x, s). * ys(s)./(1 + ys(s)), alpha(x), beta(x), TolQuad);}$$

Étape 1 D'abord, nous avons résolu (3.3) sur $[0, 1]$, avec la condition initiale $x(0) = 0$, en utilisant le code :

$$\begin{aligned}
\mathrm{xinterval} &= [0, 1];\\
\mathrm{n= 1;}\\
\mathrm{InitCond= 0;}\\
\mathrm{c= @(x, y)0.0002. * sqrt(y + 3) - y;}\\
\mathrm{d= @(x)1;}\\
\mathrm{k= @(x, s)0.0002;}\\
\mathrm{alpha= @(x)0;}\\
\mathrm{beta= @(x)x;}\\
\mathrm{Tol= 1e - 30;}\\
\mathrm{Flag= 0;}\\
& \mathrm{id\,solve\,r(xinterval,n,InitCond,c,d,k,}\\
& \mathrm{alpha,beta,Tol,Flag)}
\end{aligned}$$

cela a produit la partie gauche du graphique dans $Fig.1$, ansi que les valeurs

$$\begin{aligned}
x(1) &\approx 0.000218985443791 =: \xi_1,\\
x(1^-) &\approx 0.000218972695594 =: \xi_1^- \qquad \text{avec } 1^- := 0.999899989999,
\end{aligned}$$

qui ont servi à approximer

$$\begin{aligned}\lambda_1 \quad : \quad &= \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{1+x(s)} \Delta s \approx 5000\left(\xi_1 + \frac{\xi_1 - \xi_1^-}{1-1^-}\right) - \sqrt{\xi_1 + 3} \\ &\approx \ 0.000159305902866254537248695334952 21\end{aligned}$$

Étape 2

nous avons résolu manuellement (3.3) pour $t = 1$, avec la condition initiale $x(1) = \xi_1$, donc

$$\begin{aligned}x(2) \quad &= \quad \frac{\xi_1 + 0.0002\left(\sqrt{\xi_1+3} + \lambda_1\right)}{2} \\ &\approx \ 0.000282720054692563734610901563734 61 =: \xi_2,\end{aligned}$$

Étape 3

puis, nous avons résolu (3.3) sur $[2, 3]$, c-à-d :

$$x^{'}(t) + x(t) = 0.0002\sqrt{x(t)+3} + 0.0002\lambda_2 + 0.0002 \int\limits_2^t \frac{x(s)}{1+x(s)} ds,$$

où

$$\begin{aligned}\lambda_2 \quad : \quad &= \int\limits_0^2 \frac{x(s)}{1+x(s)} \Delta s = \lambda_1 + \frac{\xi_1}{1+\xi_1} \\ &\approx \ 0.000378243402531727801671845585900 68,\end{aligned}$$

avec la condition initiale $x(2) = \xi_2$, en utilisant le même code de l'**étape 1,** avec une modification évidente en ligne $1, 3, 4$ et 7. Cela produit la partie médiane du graphique de la $Fig.1$, ainsi que les valeurs :

$$\begin{aligned}x(3) \quad &\approx \quad 0.000323061106953 := \xi_3 \\ x(3^-) \quad &\approx \quad 0.000323058756143 =: \xi_3^- \qquad \text{avec} \ \ 3^- := 2.999899989999,\end{aligned}$$

qui ont servi à approximer :

$$\begin{aligned}\lambda_3 \quad : \quad &= \int\limits_0^3 \frac{x(s)}{1+x(s)}\Delta s = \lambda_2 + \int\limits_2^3 \frac{x(s)}{1+x(s)}\Delta s \\ &\approx 5000\left(\xi_3 + \frac{\xi_3 - \xi_3^-}{3-3^-}\right) - \sqrt{\xi_3+3} \\ &\approx 0.00069021594828844142473145045426559,\end{aligned}$$

Étape 4

maintenant, nous avons résolu manuellement (3.3) pour $t = 3$, avec la condition initiale $x(3) = \xi_3$, donc

$$\begin{aligned}x(4) \quad &= \quad \frac{\xi_3 + 0.0002\left(\sqrt{\xi_3+3} + \lambda_3\right)}{2} \\ &\approx \quad 0.00033481398154801175287459501175287 =: \xi_4,\end{aligned}$$

Étape 5

ensuite, nous avons résolu (3.3) sur $[4,5]$, c-à-d :

$$x^{'}(t) + x(t) = 0.0002\sqrt{x(t)+3} + 0.0002\lambda_4 + 0.0002\int\limits_4^t \frac{x(s)}{1+x(s)}ds,$$

où

$$\begin{aligned}\lambda_4 \quad : \quad &= \int\limits_0^4 \frac{x(s)}{1+x(s)}\Delta s = \lambda_3 + \frac{\xi_3}{1+\xi_3} \\ &\approx 0.0010131727204691227659816244 2032,\end{aligned}$$

avec la condition initiale $x(4) = \xi_4$, en utilisant le même code de l'**étape 1** avec une modification évidante dans les lignes $1, 3, 4$ et 7. Cela produit la partie droite du graphe dans *Figure* 1.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté une étude qualitative de certaines classes d'équations dynamique no linéaires, à travers cette étude, on a établi quelques propriétés telles que l'existence, l 'unicité, la dépendance de la solution par rapport aux données initiales et la stabilité au sens Ulam.Nous signalons que cette étude nous a donné quelques idées pour d'autres problèmes plus générales.

BIBLIOGRAPHIE

[1] 1.B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. A. Hammami, *On the stability of perturbed time scale systems using integral inequalities*, Appl. Sci, Vol. 16, 2014, 56–71.

[2] 2. Bohner, M., Peterson, A. : Dynamic equations on time scales. In : An introduction with applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston (2001).

[3] .Bohner, M., Pallavi S. Scindia, Sanket Tikare, Qualitative Results for Nonlinear Integro-Dynamic Equations via Integral Inequalities, Qualitative Theory of Dynamical Systems (2022).

[4] Gelmi, C.A., Jorquera, H. : IDSOLVER : a general purpose solver for nth-order integro-differential equations. Comput. Phys. Commun. 185(1), 392–397 (2014)

[5] Svetlin G.Georgiev,Integral Equations on Time Scales, 2016.

[6] Hilger, S., Ein Ma kettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[7] Liu, G., Xiang, X., Peng, Y. : Nonlinear integro-differential equations and optimal control problems on time scales. Comput. Math. Appl. 61(2), 155–169 (2011).

[8] Wong, F.-H., Yeh, C.-C., Hong, C.-H. : Gronwall inequalities on time scales.Math. Inequal. Appl. 9(1),75–86 (2006).

[9] Xing, Y., Han, M., Zheng, G. : Initial value problem for first-order integro-differential equation of Volterra type on time scales. Nonlinear Anal. 60(3), 429–442 (2005).

[10] Zhu, Z.-Q., Wang, Q.-R. : Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales. J. Math. Anal. Appl. 335(2), 751–762 (2007).