

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



جامعة باجي مختار عنابة

Faculté : Sciences

Département : Mathématiques

Spécialité : Systèmes dynamiques

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème

Étude des cycles limites des systèmes différentiels par la méthode de moyennisation et le facteur intégrant inverse

Présenté par: *Bessikri Ahmed*

Encadrante: *Touati Fatima* Dr. U.B.M. Annaba

JURY DE SOUTENANCE

Mr. Makhlouf Amar	Prof	U.B.M. ANNABA	Président
Mme. Djerrai Asma	Dr	U.B.M. ANNABA	Examinatrice

Année : 2022/2023

Table des matières

Introduction	
1 Notions Préliminaires	4
1.1 Equation différentielle	4
1.1.1 Différents types d'équations	4
1.1.2 Solution de l'équation différentielle	5
1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz	5
1.2.1 Problème de Cauchy	5
1.2.2 Existence et unicité de la solution	6
1.3 Stabilité de la solution	6
1.4 Système dynamique	8
1.5 Flot d'une équation différentielle	10
1.6 Point d'équilibre	10
1.7 Linéarisation des systèmes dynamiques	11
1.8 Classification des points d'équilibres	11
1.8.1 Cas 1: Système linéaire	11
1.8.2 Cas 2: Système non linéaire	16
1.9 Stabilité structurelle	16
1.10 Stabilité des points d'équilibres	17
1.11 Plan et portrait de phase	20
1.12 Orbite périodique et cycle limite	20
1.12.1 Orbite périodique	20
1.12.2 Cycle limite	20

1.13	Stabilité des cycles limites	21
1.14	Cycle limite hyperbolique	23
1.15	Système hamiltonien et intégrale première	24
1.16	Ensemble connexe et simplement connexe	24
1.17	Bifurcation	25
2	Méthode de moyennisation	26
2.1	Méthode de moyennisation du premier ordre	26
2.2	Méthode de moyennisation du second ordre	34
3	Les cycles limites pour une classe des équations différentielles du second ordre	40
3.1	Introduction	40
3.2	Une autre méthode de moyennisation du premier ordre	41
3.3	Résultats principaux	42
3.4	Preuve de résultats principaux	42
3.4.1	Preuve du Théorème 3.3.1	42
3.4.2	Preuve de la Proposition 3.3.1	44
3.4.3	Preuve de la Proposition 3.3.2	45
4	La méthode de facteur intégrant inverse pour la non existence des cycles limites	47
4.1	Facteur intégrant inverse	47
4.2	La non existence des cycles limites par la méthode de facteur intégrant inverse	49
	Conclusion	61
	Bibliographie	62

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'existence et de la non-existence de cycles limites pour les équations différentielles ordinaires.

Dans la première partie, nous appliquons la méthode de moyennisation du premier et du second ordre pour la détermination des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y; \dot{y} = -x$ perturbées par des équations différentielles ordinaires.

Dans la deuxième partie, nous utilisons la méthode du facteur intégrant inverse pour la non-existence de cycles limites des systèmes différentiels du second ordre. Notre travail est illustré par des applications.

Mots clé : Cycle limite, méthode de moyennisation, système différentiel, solution périodique, facteur intégrant inverse, divergence.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the existence and non-existence of limit cycles for ordinary differential equations.

In the first part, we apply the method of averaging of the first and the second order for the determination of the limit cycles which bifurcate from the periodic orbits of the linear center $\dot{x} = y; \dot{y} = -x$ perturbed by ordinary differential equations.

In the second part, we use the inverse integrating factor method for the non-existence of limit cycles of second-order differential systems. Our work is illustrated by applications.

Key words : Limit cycle, averaging method, differential system, periodic solution, inverse integrating factor, divergence.

ملخص

رسالة الماجستير هذه مكرسة لدراسة وجود وعدم وجود دورات حدودية للمعادلات التفاضلية العادية.

في الجزء الأول، نستخدم طريقة المتوسط من الدرجة الأولى والثانية لتحديد الدورات الحدودية التي تنشأ من المدارات الدورية للمركز الخفي $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ المضطربة من المعادلات التفاضلية العادية.

في الجزء الثاني، نستخدم طريقة عامل التكامل المعكوس لعدم وجود دورات حدودية في أنظمة التفاضل العادية من الدرجة الثانية. يتم توضيح عملنا من خلال تطبيقات.

الكلمات المفتاحية: دورة حدودية، طريقة المتوسط، نظام تفاضلي، حل دوري، عامل التكامل المعكوس، تباعد.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce mémoire de master. Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadreur Madame **Touati Fatima** Maitre de conférence à l'université Badji-Mokhtar d'Annaba pour sa précieuse orientation et ses conseils avisés tout au long du processus. Elle a été à l'écoute de mes nombreuses questions, s'est toujours intéressée à l'avancée de mes travaux, et m'a accordée sa confiance. Sa patience, sa disponibilité et son expertise m'ont été d'une grande aide pour avancer dans mes objectifs.

Je voudrais également remercier mes collègues et amis pour leur soutien constant. Leurs commentaires constructifs et leurs suggestions ont été inestimables pour améliorer la qualité de ce mémoire. Je tiens également remercier toutes les personnes qui ont accepté de participer à mes études et qui ont pris le temps de répondre à mes questions.

Mes respectueux remerciements vont à Monsieur **Makhlouf Amar** Professeur au département de mathématiques à l'université Badji-Mokhtar d'Annaba, pour ses efforts et son soutien tout au long du parcours académique. C'est un grand honneur que vous ayez accepté de présider le jury. De même je remercie très vivement Madame **Djerrai Asma** Maitre de conférence à l'université Badji-Mokhtar d'Annaba d'avoir accepté de juger ce travail.

Enfin, je voudrais remercier ma famille pour leur amour, leur soutien et leur patience. Sans eux cette expérience n'aurait pas été possible.

Encore une fois, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire de master. Je suis reconnaissant pour cette opportunité et je suis fier de partager mes conclusions avec vous aujourd'hui.

Introduction

La première apparition des équations différentielles remonte à l'année 1638 quand Florimond Debeaune (1601 – 1652) propose deux problèmes géométriques sur la construction des courbes à partir des propriétés de la tangente. La terminologie équation différentielle a été utilisée en 1676 par Leibnitz pour désigner une relation entre les différentielles dx et dy de deux quantités variables x et y . A leur début, les équations différentielles sont étroitement associées à la résolution des problèmes géométriques, à la physique newtonienne (dynamique du point, mouvements des planètes) et à la formalisation du calcul différentiel et intégral. Elles deviennent rapidement un instrument efficace d'analyse des phénomènes de la nature et une source de questionnements au sujet des concepts mathématiques comme celui de fonction. A base d'équations différentielles nous pouvons générer un système d'équations qui nous appelons un système dynamique.

La théorie des systèmes dynamiques est née avec l'étude du mouvement des planètes en astronomie au 15^{ème} siècle. Les mathématiciens développent cette théorie à l'aide de méthodes analytiques, elle a pour objet de modéliser les processus qui évoluent dans le temps et de pouvoir ainsi étudier leurs comportement. Ces processus peuvent être des phénomènes physiques, biologiques, économiques, et financiers aussi. Un système dynamique est fondamentalement ce que l'on appelle un « espace des phases » ou « espace des états », c'est-à-dire l'espace de tous les états possibles du système considéré, muni d'une équation d'évolution qui décrit l'évolution temporelle de l'état du système. La théorie des systèmes dynamiques cherche à comprendre les propriétés qualitatives et statistiques de l'évaluations à long terme d'un système dynamique, et plus particulièrement la notion de stabilité. Si l'étude des systèmes dynamiques en temps discret possède de nombreux intérêts, la plupart des phénomènes physiques nécessitent d'étudier le cas d'un système dynamique en temp continu. L'étude de ces systèmes se décrire en quelques étapes, la première est la recherche des points d'équilibres (c'est-à-dire les solutions stationnaires). Ensuite, on étudie la stabilité autour de ces points d'équilibres.

Dans l'étude des systèmes dynamiques, le coucept "Cycle limite" fut introduit par le mathématicien Henri Poincarré dans son second mémoire " Sur les courbes définies par

une équation différentielle " en 1882. Nous rappelons qu'un cycle limite est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques.

Une méthode classique pour produire des cycles limites est de perturber un système qui a un centre. La notion d'un centre a été définie par Poincaré comme étant un point isolé singulier entouré par des orbites périodiques.

Les chercheurs ont donnés cinq méthodes pour analyser le nombre de cycles limites bifurquant des orbites périodiques ayant un centre :

- La première méthode est basée sur l'application de retour de Poincaré.
- La deuxième méthode est basée sur l'intégrale de Poincaré Melnikov.
- La troisième est basée sur l'intégrale Abélienne.
- La quatrième est la méthode de facteur intégrant inverse.
- La cinquième est la méthode de moyennisation.

Les deux dernières méthodes sont parmi les techniques de calcul utile utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. La méthode de moyennisation elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 et Bogoliubov et Mitropolskii 1961. Elle a été ensuite développée par Verhulst, Sanders et Verhulst, Malkin en 1956, Roseau en 1966, Llibre et Buica en 2004. Par contre la relation entre les cycles limites des systèmes différentiels planaires et le facteur intégrant inverse a été montrée pour la première fois dans un article de Giacomini, Llibre et Viano paru en 1996. A partir de ce moment, de nombreux articles de recherche sont consacrés à l'étude des propriétés du facteur intégrant inverse et sa relation avec les cycles limites et leurs bifurcations.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres qui exposent le travail réalisé.

- Le premier chapitre: **Notions préliminaires.**

Dans ce chapitre nous introduisons les définitions nécessaires pour ce travail. Nous rappelons également quelques notions préliminaires sur les équations différentielles et les systèmes dynamiques.

- Le deuxième chapitre: **Méthode de moyennisation.**

Ce chapitre présente la théorie de moyennisation du premier et du second ordre pour la recherche des cycles limites des systèmes différentiels avec quelques exemples de cette méthode.

- Le troisième chapitre: **Les cycles limites pour une classe d'équations différentielles du second ordre.**

Ce chapitre est consacré à la recherche de cycles limites pour une classe d'équations différentielles du second ordre.

- Le quatrième chapitre: **La méthode de facteur intégrant inverse pour la non-existence des cycles limites**

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser le facteur intégrant inverse pour fournir des critères de non-existence des cycles limites pour les systèmes différentiels planaires.

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

1.1 Equation différentielle

1.1.1 Différents types d'équations

Définition 1.1.1 Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées $x', x'', \dots, x^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0,$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de \mathbb{R} (I peut être \mathbb{R} tout entier).

On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.1.2 On appelle une équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Définition 1.1.3 On appelle une équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}).$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t .

Remarque 1.1.1 *Les équations autonomes sont très importantes pour la recherche des solutions stationnaires et leur stabilité.*

1.1.2 Solution de l'équation différentielle

Définition 1.1.4 *On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction $x(t)$ définie sur cet intervalle I , n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I . On notera en général cette solution (x, I) . Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.*

Définition 1.1.5 *On appelle courbe intégrale l'ensemble des points $(t, x(t))$ où t parcourt I . Autrement dit, si x est à valeurs dans \mathbb{R}^n , la courbe intégrale est un ensemble de points de \mathbb{R}^{n+1} .*

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

1.2.1 Problème de Cauchy

Définition 1.2.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. Etant donné une équation différentielle du premier ordre sous la forme*

$$\dot{x} = f(t, x),$$

pour $(t, x(t)) \in U$, et un point $(t_0, x_0) \in U$. Le problème de Cauchy correspondant est la recherche des solutions $x(t)$ avec $x(t_0) = x_0$.

On note le problème de Cauchy de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Théorème 1.2.1 Soit le problème de Cauchy (1.1). Supposons que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue. Soit $(t_0, x_0) \in U$ et $x(t)$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et à valeurs dans \mathbb{R}^n . Une fonction $x(t)$ est solution de (1.1) sur I si et seulement si :

- i. $\forall t \in I, (t, x(t)) \in U,$
- ii. $x(t)$ est continue sur $I,$
- iii. $\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$

1.2.2 Existence et unicité de la solution

Théorème 1.2.2 (Cauchy-Lipschitz)

Soit $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $(t_0, x_0) \in U$. Supposons que f soit lipschitzienne par rapport à sa variable x sur un voisinage de (t_0, x_0) c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans U et $L > 0$, tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage on a

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \cdot \|x - y\|.$$

Alors, on a les propriétés suivantes :

1. Il existe un $T > 0$ et $x \in C^1([t_0 - T, t_0 + T], J)$ solution du problème de Cauchy (1.1).
2. Si y est une autre solution du problème de Cauchy (1.1), elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.
3. Si de plus f est de class C^k avec $k \geq 1$, alors x est de C^{k+1} .

1.3 Stabilité de la solution

Définition 1.3.1 Soit le problème à valeur initiale (1.1). Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution.

Une solution $\phi(t)$ du système (1.1) vérifiant $\phi(t_0) = \phi_0$ est dite stable au sens de *Lyapunov* si pour toute solution $x(t)$ de (1.1) vérifiant $x(t_0) = x_0$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \implies \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

De plus si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0,$$

alors la solution $\phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

Remarque 1.3.1 Une solution $\phi(t)$ qui n'est pas stable est dite instable.

Exemple 1.3.1 Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3 \\ x(0) = 3. \end{cases}$$

La solution de ce problème pour $x(0) = 3$ est $\phi(t) = 3$. On a aussi la solution générale pour la condition $x(0) = x_0$ est donnée par

$$x(t) = (x_0 - 3).e^{-t} + 3.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \|x(t) - \phi(t)\| &= \|(x_0 - 3).e^{-t} + 3 - 3\| \\ &= \|(x_0 - 3).e^{-t}\| \\ &\leq \|x_0 - 3\| < \delta, \end{aligned}$$

alors, pour que la solution $\phi(t)$ soit stable, il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

De plus, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x_0 - 3).e^{-t}\| = 0,$$

d'ici la solution $\phi(t)$ est asymptotiquement stable.

Remarque 1.3.2 Il est possible que la solution $\phi(t)$ soit non bornée et stable et même asymptotiquement stable. De même il est possible que la solution soit bornée et non stable.

1.4 Système dynamique

Définition 1.4.1 *Un système dynamique est défini par un triplet (D, T, φ) , constitué de l'espace d'état D , de domaine temporel T et d'une fonction de transition d'état $\varphi : D \times T \rightarrow D$, qui possède la propriété suivante pour tout $x \in D$ et $t_1, t_2 \in T$:*

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x, \\ \varphi(\varphi(x, t_1), t_2) = \varphi(x, t_1 + t_2). \end{cases}$$

On distingue deux grandes catégories de systèmes dynamiques, les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret.

Si $T = \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{R} , le système est dit à temps continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , le système est dit à temps discret.

Système dynamique continu

Dans le cas général, un système dynamique continu peut être représenté par une équation différentielle de type

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,
- $\frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)^t$,
- $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^t \in D \subset \mathbb{R}^n$,

permet de définir un système dynamique autonome à temps continu $(D, \mathbb{R}_+, \varphi)$ où φ est la solution de ce système.

Si la fonction f est une fonction de l'état $x(t)$ et de la variable du temps t c'est-à-dire $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$, on dit que le système dynamique est non autonome .

Système dynamique discret

Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence .

Définition 1.4.2 *On appelle système dynamique discret autonome d'ordre 1, l'équation aux différences suivante*

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Où

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: une fonction différentiable,
- $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$: valeur initiale,
- $x_t \in D$: vecteur des états du système.

Remarque 1.4.1 *Dans ce travail nous intéressons aux systèmes dynamiques autonomes et à temps continu du type*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.4.1 *Soit le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \\ \dot{x}_3 = -3x_3. \end{cases}$$

La solution générale est donnée par :

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^t \\ x_2(t) = c_2 \cdot e^{2t} \\ x_3(t) = c_3 \cdot e^{-3t}, \end{cases}$$

d'où le système dynamique défini par le système précédent est l'application $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(t, c) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} c.$$

1.5 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.5.1 *Considérons le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.2)$$

avec $f \in C^1(E)$ et E un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

Pour $x_0 \in E$, soit $\varphi(t, x_0)$ la solution de (1.2) avec la condition initiale $x(0) = x_0$ définie sur son intervalle maximale d'existence $I(x_0)$. Alors pour $t \in I(x_0)$, l'ensemble des applications $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par $\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$ s'appelle le flot du système (1.2).

Remarque 1.5.1 *Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps. Sinon il est dit non autonome.*

Exemple 1.5.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$\dot{x} = \frac{1}{x}$$

avec $f(x) = \frac{1}{x} \in C(E)$ et $E = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$.

La solution de cette équation avec la condition initiale $x(0) = x_0$ est donnée par

$$\varphi(t, x_0) = \sqrt{2t + x_0^2},$$

sur son intervalle maximal $I(x_0) =]-\frac{x_0^2}{2}, +\infty[$. D'où l'ensemble des applications $\varphi_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ défini par

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0) = \sqrt{2t + x_0^2}$$

est appelé le flot du système précédent.

1.6 Point d'équilibre

Définition 1.6.1 *On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.2), le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$f(x^*) = 0.$$

Remarque 1.6.1 *Un point qui n'est pas critique est dit régulier.*

1.7 Linéarisation des systèmes dynamiques

Définition 1.7.1 Soit x^* un point critique du système (1.2). Le système

$$\dot{x} = Ax \tag{1.3}$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) \right) = Df(x^*),$$

avec $1 \leq i, j \leq n$, est appelé le système linéarisé de (1.2) en x^* .

Définition 1.7.2 On appelle point critique hyperbolique de (1.2), le point x^* tel que $Df(x^*)$ n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

Remarque 1.7.1 La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points d'équilibres .

1.8 Classification des points d'équilibres

1.8.1 Cas 1: Système linéaire

Définition 1.8.1 Considérons le système linéaire (1.3)

$$\dot{x} = Ax$$

où A est une matrice constante inversible d'ordre 2.

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .

i) Si λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles et de même signe.

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point $x = x^*$ est un noeud stable. (Fig 1.1).

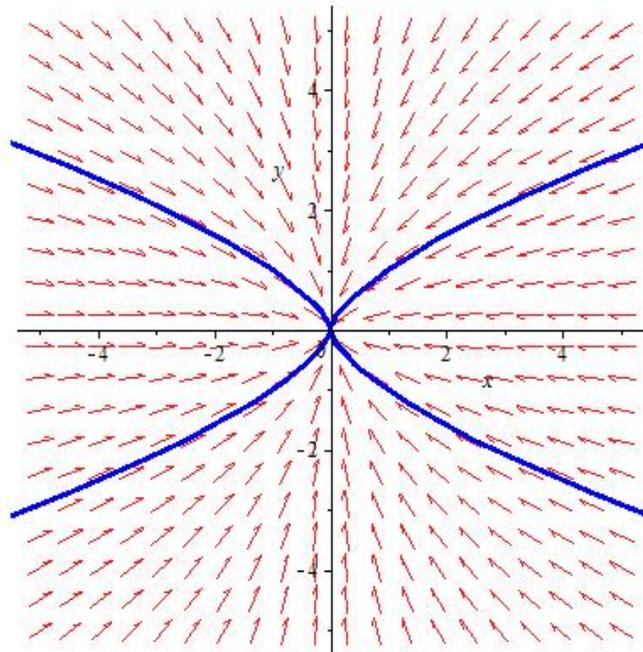


Fig 1.1: Noeud stable

- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point $x = x^*$ est un noeud instable. (*Fig 1.2*).

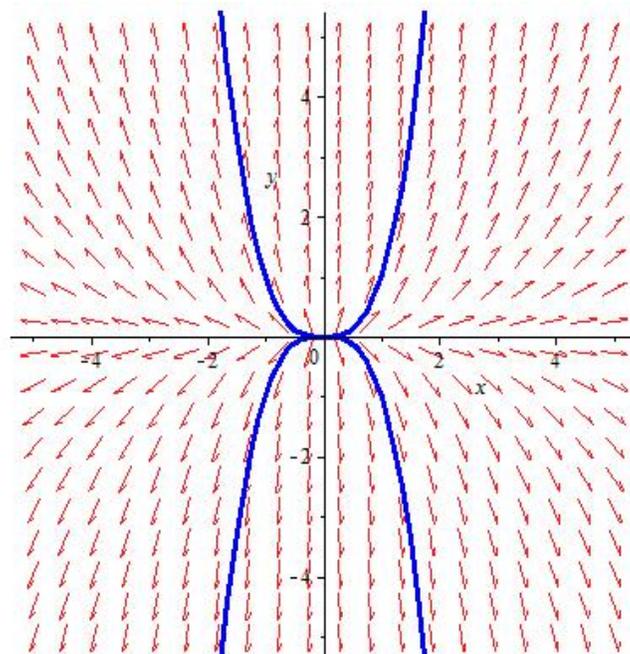


Fig 1.2: Noeud instable

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point $x = x^*$ est un noeud propre stable si $\lambda < 0$, et instable si $\lambda > 0$. (*Fig 1.3*) et (*Fig 1.4*).

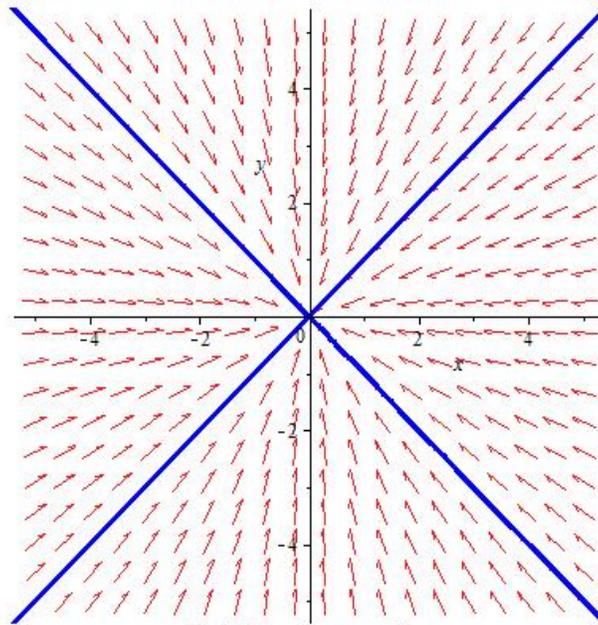


Fig 1.3: Noeud propre stable

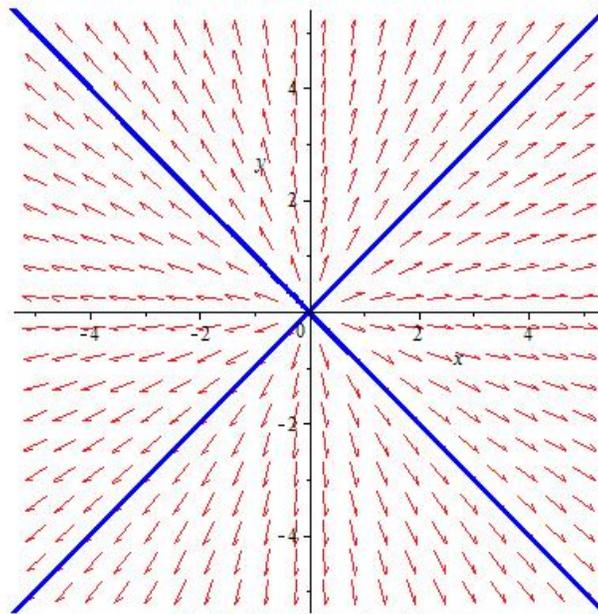


Fig 1.4: Noeud propre instable

- ii) Si λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles et de signes différents, le point critique $x = x^*$ est appelé selle, il est toujours instable. (Fig 1.5).

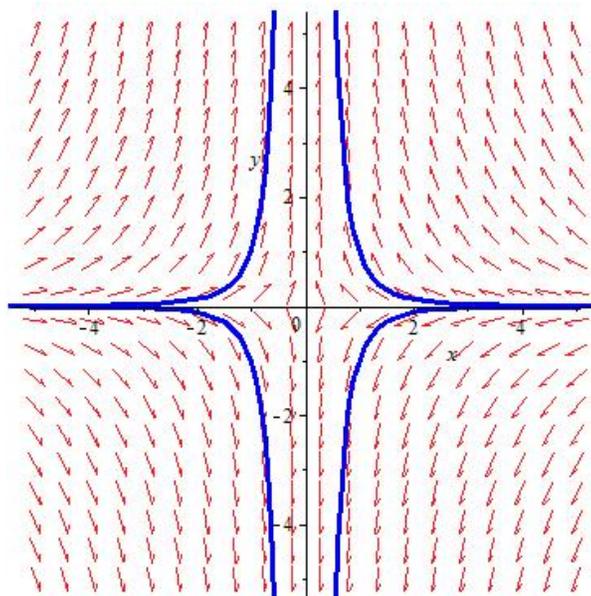


Fig 1.5: selle

- iii) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées c'est-à-dire $\forall j = \overline{1,2}, \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ avec $\text{Re}(\lambda_j) \neq 0$, alors le point critique $x = x^*$ est appelée foyer, il est instable si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ et stable si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$. (Fig 1.6) et (Fig 1.7).

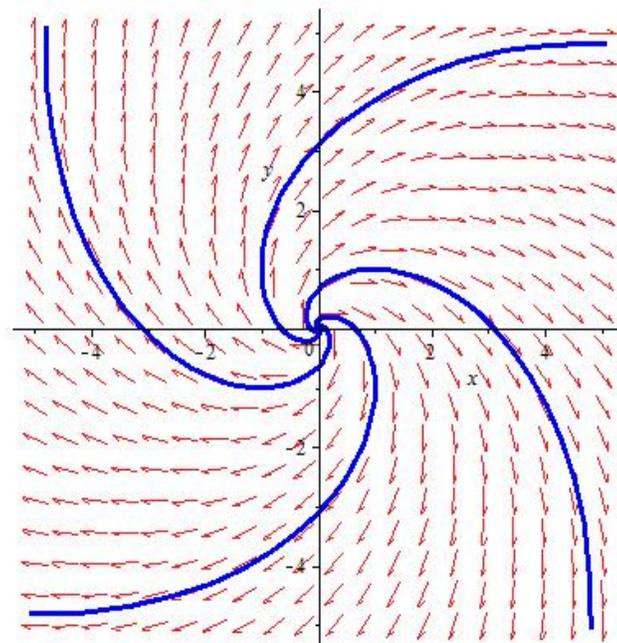


Fig 1.6: foyer instable

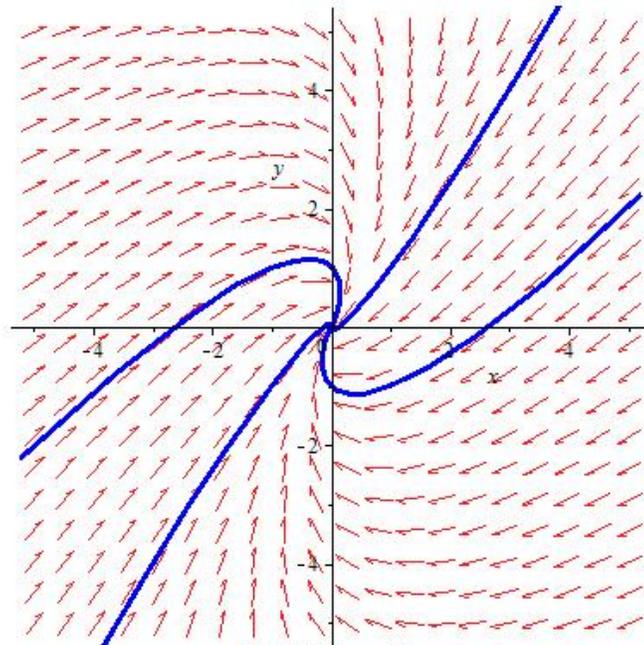


Fig 1.7: foyer stable

- iv) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures avec $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) = 0$, alors le point $x = x^*$ est un centre, il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable. (Fig 1.8).

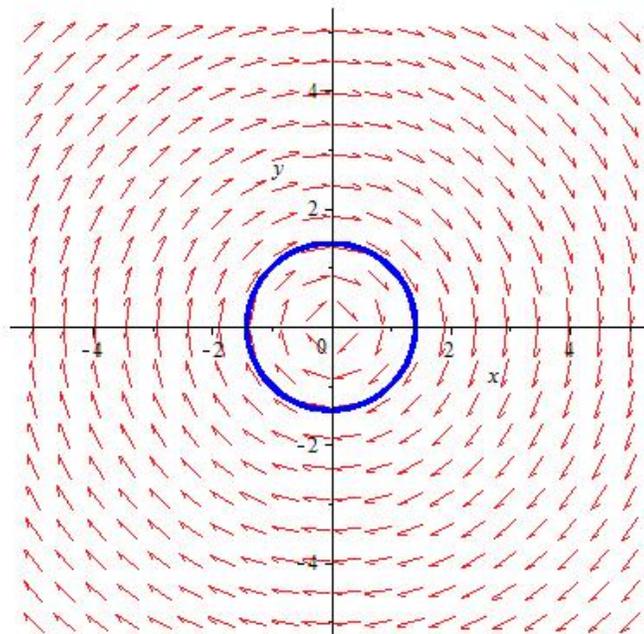


Fig 1.8: centre

1.8.2 Cas 2: Système non linéaire

Considérons le système non-linéaire (1.2) où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Définition 1.8.2 *Un point critique x^* de (1.2) est appelé puit si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives; Il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles positives; Il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.*

1.9 Stabilité structurelle

Définition 1.9.1 *Deux systèmes différentiels*

$$\dot{x} = p(x) \tag{1.4}$$

et

$$\dot{x} = q(x) \tag{1.5}$$

définis sur deux ouverts U et V respectivement, sont topologiquement équivalents, s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que h transforme les orbites de (1.4) en celles de (1.5) et préserve le sens du mouvement.

Théorème 1.9.1 *(Hartman-Grobman)*

Soit les deux systèmes (1.2) et (1.3). Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont toutes à partie réelle non nulle, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du système (1.2) vers celle du système (1.3) dans un voisinage de x^* .

Théorème 1.9.2 *Si x^* est un point d'équilibre hyperbolique de (1.2), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est topologiquement équivalent à son système linéarisé $\dot{x} = Ax$.*

1.10 Stabilité des points d'équilibres

Définition 1.10.1 On dit qu'un point d'équilibre x^* est stable, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \|\varphi_t(x_0) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.10.1 Soit le système linéaire (1.3).

Le point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ sont de partie réelle strictement négative. Si il existe au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors le point x^* est instable.

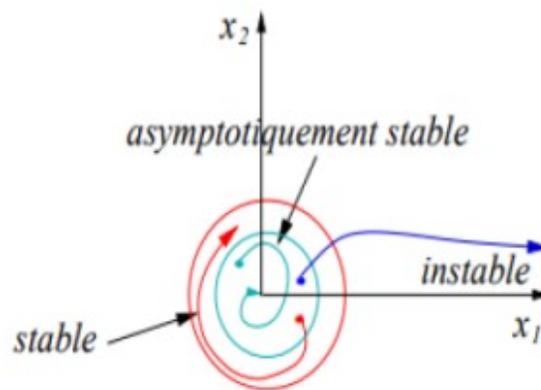


Fig 1.9 : Différents types de stabilité

Remarque 1.10.1 L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Exemple 1.10.1 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - by)x \\ \dot{y} = (cx - d)y \end{cases} \quad (1.6)$$

où a, b, c, d sont des paramètres strictement positifs. Les points d'équilibres (x^*, y^*) du système (1.6) sont $(0, 0)$ et $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$.

Soit la matrice associée au système linéarisé donnée par

$$A = Df(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ cy & cx - d \end{pmatrix}.$$

- Pour $(x^*, y^*) = (0, 0)$, on a

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

qui possède les valeurs propres $\lambda_1 = a > 0$ et $\lambda_2 = -d < 0$, d'ici $(0, 0)$ est une selle qui est toujours instable.

- Pour $(x^*, y^*) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$, on a

$$Df\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

les valeurs propres de cette matrice sont données par $\lambda_1 = i\sqrt{ad}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{ad}$, d'ici le point $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ est un centre pour le système linéarisé, mais on ne peut rien dire sur la stabilité du système (1.6).

Définition 1.10.2 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, et soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. V est dite définie positive si:

- i) $V(0) = 0$, et
- ii) $\forall u \in \Omega \setminus \{0\}$, $V(u) > 0$

2. V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.

3. V est dite semi-définie positive si:

- i) $V(0) = 0$, et
- ii) $\forall u \in \Omega \setminus \{0\}$, $V(u) \geq 0$.

4. V est dite semi-définie négative, si $-V$ est semi-définie positive.

Théorème 1.10.2 (*Théorème de Lyapunov*)

Soit le système différentiel (1.1) et soit $V(x)$ une fonction de classe C^1 .

1. S'il existe une fonction $V(x)$ de signe définie telle que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\dot{x}$ est semi-définie de signe inverse de $V(x)$ ou identiquement nulle, alors le point d'équilibre x^* est stable.
2. S'il existe une fonction $V(x)$ de signe définie telle que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\dot{x}$ est définie de signe inverse de $V(x)$, alors le point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable.
3. Sur un voisinage de x^* , s'il existe une fonction $V(x)$ de signe définie telle que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\dot{x}$ est définie de même signe, alors le point d'équilibre x^* est instable.

Remarque 1.10.2 Dans le cas (1) $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov faible, et dans le cas (2) $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov stricte.

Théorème 1.10.3 Considérons le système (1.1). S'il existe une fonction $V(x)$ différentiable dans un voisinage de l'origine tel que $V(0) = 0$. Si $\dot{V}(x)$ est définie positive et s'il existe dans un voisinage de 0 des points lesquels $V(x) > 0$, alors l'origine est instable.

Exemple 1.10.2 Considérons le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3. \end{cases}$$

L'origine $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre de ce système. Considérons la fonction de Lyapunov

$$V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

On a que $V(0, 0) = 0$ et $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

De plus

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \frac{dV}{dx}\dot{x} + \frac{dV}{dy}\dot{y} \\ &= x(-x^3 - y^2) + y(xy - y^3) \\ &= -(x^4 + y^4). \end{aligned}$$

D'ici $\dot{V}(x, y)$ est définie négative, alors d'après le Théorème (1.10.2), on déduit que le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

1.11 Plan et portrait de phase

Définition 1.11.1 Soit le système différentiel.

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

où $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$.

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase, en particulier pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.7) représentent dans le plan des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète ainsi que ces points critiques représente le portrait de phase et le plan (xoy) qui est le plan de phase.

1.12 Orbite périodique et cycle limite

1.12.1 Orbite périodique

Définition 1.12.1 On appelle orbite périodique toute trajectoire $\phi_t(x)$ de (1.7), telle qu'il existe $T > 0$, vérifiant

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x). \quad (1.8)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.8) est appelé période.

Proposition 1.12.1 Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.

1.12.2 Cycle limite

Définition 1.12.2 Un cycle limite du système (1.7) est une orbite périodique fermée isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système, autrement dit au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermée.

Définition 1.12.3 L'amplitude du cycle limite est la valeur maximale de la variable x .

Remarque 1.12.1 Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

1.13 Stabilité des cycles limites

Définition 1.13.1 Soit Γ la trajectoire d'un cycle limite.

1—Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de Γ pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle limite est stable (Fig 1.10).

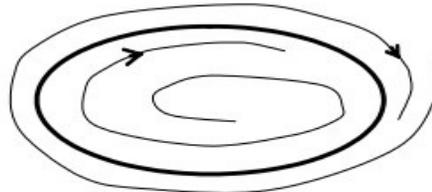


Fig 1.10: Cycle limite stable

2—Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de Γ pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle limite est dit instable (Fig 1.11).

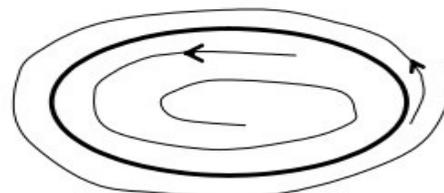


Fig 1.11: Cycle limite instable

3—S'il existe au voisinage de Γ des trajectoires convergentes et d'autres divergentes, le cycle limite est dit semi-stable (Fig 1.12).

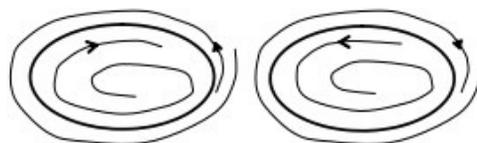


Fig 1.12: Cycle limite semi-stable

Exemple 1.13.1 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x \sin(\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \dot{y} = x + y \sin(\sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases} \quad (1.9)$$

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, avec

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}, \end{cases}$$

ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r \sin(r), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

On a $\dot{r} = r \sin(r) = 0 \Rightarrow r = n\pi$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui implique que les cycles limites du système (1.9) sont de rayons $r = n\pi$ avec $n = \{1, 2, \dots\}$.

- Si $(2n - 1)\pi < r < (2n)\pi$, on a $\dot{r} < 0 \Rightarrow r(t)$ est décroissante.
- Si $(2n)\pi < r < (2n + 1)\pi$, on a $\dot{r} > 0 \Rightarrow r(t)$ est croissante.

On a aussi

$$\begin{aligned} f'(n\pi) &= \sin(n\pi) + n\pi \cos(n\pi) \\ &= n\pi(-1)^n. \end{aligned}$$

D'ici tous les cycles limites de rayon $(2n + 1)\pi$ pour $n = \{0, 1, 2, \dots\}$ sont stables et tous les cycles limites de rayon $2n\pi$ pour $n = \{1, 2, \dots\}$ sont instables

- Pour $n = 1$, on a le cycle limite suivant qui est stable (Fig 1.13).

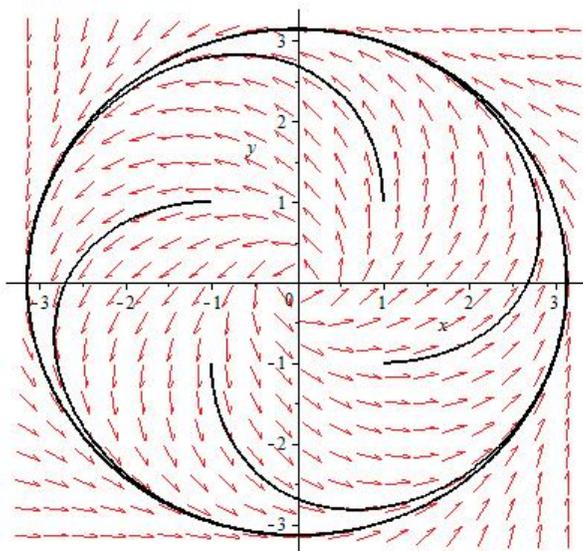


Fig 1.13: Cycle limite stable

1.14 Cycle limite hyperbolique

Définition 1.14.1 Supposons que le système (1.7) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période $T > 0$, et soit

$$S = \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt. \quad (1.10)$$

On dit que l'orbite périodique est un cycle limite hyperbolique si $S \neq 0$. De plus si $S > 0$ (respectivement $S < 0$), alors le cycle limite est instable (respectivement stable).

Exemple 1.14.1 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 3x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + 3y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.11)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système (1.11) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = -1, \end{cases}$$

d'où $\dot{r} = r(1 - r^2) = 0 \Rightarrow r = \pm 1$ ou $r = 0$. Pour $r = 1$ et $\theta_0 = 0$ on a $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, alors

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) (\cos(t), \sin(t)) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \sin^2(t) - 12 \cos^2(t) + 6) dt = -12\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Puisque $S = -12\pi < 0$, alors le système (1.11) a un cycle limite hyperbolique qui est stable (Fig 1.14)

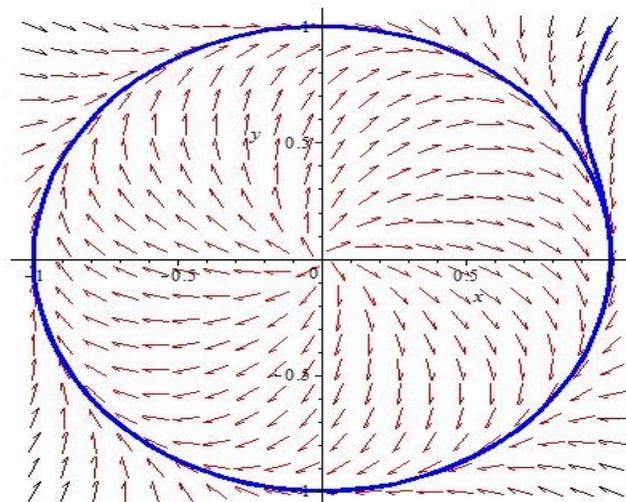


Fig 1.14: Cycle limite hyperbolique stable

1.15 Système hamiltonien et intégrale première

Définition 1.15.1 Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases} \quad (1.13)$$

est dit un système Hamiltonien.

Définition 1.15.2 Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert. Une fonction $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k avec $k = 0, 1, \dots, +\infty$ est une intégrale première du système (1.7) dans U , si H est constante sur chaque solution de ce système et H est non constant sur tout sous-ensemble ouvert de U . Si $k \geq 1$, alors on a

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}F + \frac{\partial H}{\partial y}G = 0. \quad (1.14)$$

Exemple 1.15.1 Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x. \end{cases} \quad (1.15)$$

La fonction $H(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-2y}$ est une intégrale première du système (1.15) puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}F + \frac{\partial H}{\partial y}G &= \frac{\partial(x^2 + y^2)e^{-2y}}{\partial x}(-y + x^2 + y^2) + \frac{\partial(x^2 + y^2)e^{-2y}}{\partial y}x \\ &= 2xe^{-2y}(-y + x^2 + y^2) + (2ye^{-2y} - 2(x^2 + y^2)e^{-2y})x = 0. \end{aligned}$$

1.16 Ensemble connexe et simplement connexe

Définition 1.16.1 Un ensemble $U \subset \mathbb{R}^2$ est connexe s'il n'existe pas une partition de U en deux ouverts non vides.

Proposition 1.16.1 On dira que un espace topologique (X, O) est connexe s'il vérifie l'un des conditions équivalentes suivantes:

1. Si X est une réunion de deux ouverts disjoints, alors l'un de ces deux ouverts est vide et l'autre égale X .
2. Si X est une réunion de deux fermés disjoints, alors l'un de ces deux fermés est vide et l'autre égale X .
3. Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés de X sont X lui-même et l'ensemble vide \emptyset .

Définition 1.16.2 *Un ensemble $U \subset \mathbb{R}^2$ est dit simplement connexe si toute courbe fermée simple qui se trouve dans U peut être réduite continûment à un point.*

1.17 Bifurcation

Définition 1.17.1 *Soit le système suivant*

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \tag{1.16}$$

où μ est un paramètre. Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution $x(t)$ lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Méthode de moyennisation

Nous présentons dans ce chapitre la méthode de moyennisation du premier et second ordre pour l'existence de cycles limites des systèmes différentiels ordinaires.

Cette méthode donne des conditions pour lesquelles les points d'équilibres du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre.

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

Ce théorème donne une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques des systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.1.1 *On considère les deux problèmes à valeurs initiales*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 G(t, x(t), \varepsilon) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

et

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y) \\ y(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$, $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, F et G sont des fonctions périodiques de période $T > 0$ par rapport à la variable t , et

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt. \quad (2.3)$$

Le système (2.2) est appelé le système moyenné du système (2.1). Supposons que

1. Les fonctions $F, D_x F, D_x^2 F, G$ et $D_x G$ sont continues et bornées par une constante C indépendante de ε dans $[0, \infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,
2. T est indépendant de ε .

Alors

- a) Pendant un temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$$

- b) Si p est un point d'équilibre du système moyenné (2.2), sachant que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0, \tag{2.4}$$

alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) tel que $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

- c) Si le point d'équilibre $y = p$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p .

Preuve Voir le théorème 1 de [7].

Exemple 2.1.1 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(\frac{2}{3}ax + 5cx^2 - \frac{7}{2}bx^4)y. \end{cases} \tag{2.5}$$

Le système non perturbé de (2.5) est

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

les orbites de ce système sont des cercles dans le plan de phase (xoy) .

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, avec

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}, \end{cases}$$

ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{6}(-21b.r^3 \cdot \cos^4(\theta) + 30c.r \cdot \cos^2(\theta) + 4a \cos(\theta)).r^2 \cdot \sin^2(\theta)\varepsilon, \\ \dot{\theta} = -1 + (\frac{2}{3} \sin(\theta) \cos^2(\theta).a.r + 5c \cdot \sin(\theta) \cdot \cos^3(\theta).r^2 - \frac{7}{2}b.r^4 \sin(\theta) \cdot \cos^5(\theta))\varepsilon, \end{cases}$$

d'ici

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta},$$

alors prenons θ comme une variable de temps, on obtient l'équation suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2).$$

où la fonction $F(r, \theta)$ est donnée par

$$F(r, \theta) = -\frac{1}{6}(-21b.r^3 \cdot \cos^4(\theta) + 30c.r \cdot \cos^2(\theta) + 4a \cos(\theta)).r^2 \cdot \sin^2(\theta).$$

D'après la formule (2.3), la fonction moyennée avec $T = 2\pi$ est donnée par

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta, \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}(-21b.r^3 \cdot \cos^4(\theta) + 30c.r \cdot \cos^2(\theta) + 4a \cos(\theta)).r^2 \cdot \sin^2(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$f^0(r) = \frac{1}{32}r^3(7br^2 - 20c).$$

Les racines non nulles de $f^0(r)$ sont

$$r_0 = \pm \frac{2\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{\sqrt{bc}}{b}$$

avec $\text{sgn}(bc) = +1$.

• Si $b > 0$, la racine positive de $f^0(r)$ est $r_0 = \frac{2\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{\sqrt{bc}}{b}$. Comme $df^0(r_0) = \frac{25c^2}{7b}$, d'après le théorème (2.1.1) il suit que le système (2.5) et pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, admet un

cycle limite qui est l'orbite périodique de rayon $\frac{2\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{\sqrt{bc}}{b}$ du système non perturbé avec $\varepsilon = 0$. De plus $df^0(r_0) > 0$, ce cycle limite est instable.

- Si $b < 0$, la racine positive de $f^0(r)$ est $r_0 = -\frac{2\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{\sqrt{bc}}{b}$, d'après le Théorème (2.1.1), le système (2.5) et pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, admet un cycle limite qui est l'orbite périodique de rayon $-\frac{2\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{\sqrt{bc}}{b}$ du système non perturbé avec $\varepsilon = 0$. De plus, $df^0(r_0) < 0$, ce cycle limite est stable.

- Pour $a = 2$, $b = -\frac{1}{7}$, $c = \frac{-1}{4}$, et $\varepsilon = 10^{-3}$, on a le cycle limite suivant qui est stable *(Fig 2.1)*

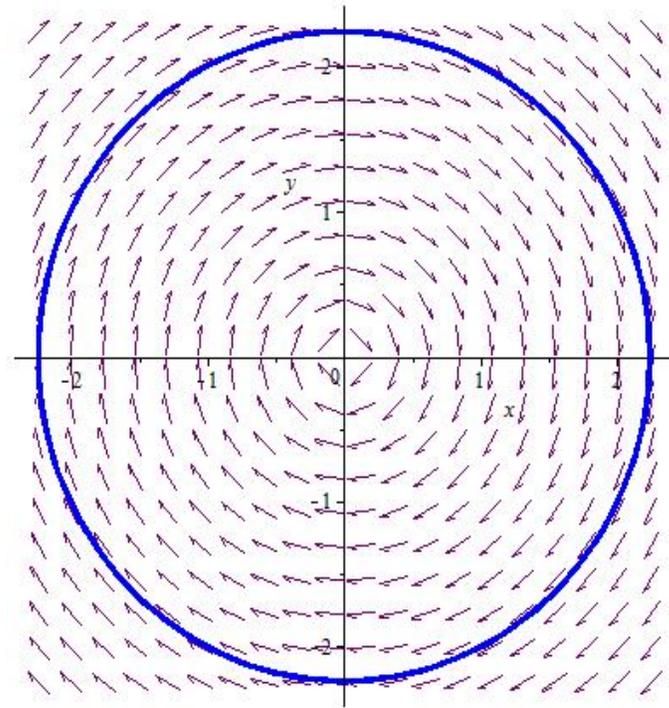


Fig 2.1: Cycle limite stable

Exemple 2.1.2 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(y^5 - y^4 - 3y^3 + y - 2). \end{cases} \quad (2.6)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système (2.6) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \sin(\theta)(r^5 \sin^5(\theta) - r^4 \sin^4(\theta) - 3r^3 \sin^3(\theta) + r \sin(\theta) - 2)\varepsilon, \\ \dot{\theta} = -1 + (r^4 \cos^5(\theta) \sin(\theta) - \cos^5(\theta)r^3 - 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta)r^4 + 3 \cos^3(\theta) \sin(\theta)r^2 \\ \quad + 2 \cos^3(\theta)r^3 + \cos(\theta) \sin(\theta)r^4 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)r^2 - \cos(\theta)r^3 + \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - \frac{2}{r} \cos(\theta))\varepsilon, \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -\sin(\theta)(\cos^4(\theta) \sin(\theta)r^5 - \cos^4(\theta)r^4 - 2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)r^5 + 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)r^3 \\ &\quad + 2 \cos^2(\theta)r^4 + r^5 \sin(\theta) - 3r^3 \sin(\theta) - r^4 + r \sin(\theta) - 2)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F(r, \theta) &= -\sin(\theta)(\cos^4(\theta) \sin(\theta)r^5 - \cos^4(\theta)r^4 - 2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)r^5 + 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)r^3 \\ &\quad + 2 \cos^2(\theta)r^4 + r^5 \sin(\theta) - 3r^3 \sin(\theta) - r^4 + r \sin(\theta) - 2). \end{aligned}$$

D'après la formule (2.3), la fonction moyennée est donnée par

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{-1}{16}(5r^5 - 18r^3 + 8r) \end{aligned}$$

qui admet deux racines positives

$$r_0 = \frac{1}{5}\sqrt{45 - 5\sqrt{41}} \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{45 + 5\sqrt{41}}.$$

Puisque $df^0(r_0) = \frac{-41}{20} + \frac{9}{20}\sqrt{41} > 0$ et $df^0(r_1) = \frac{-41}{20} - \frac{9}{20}\sqrt{41} < 0$, alors d'après le Théorème (2.1.1) et pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le système (2.6) possède deux solutions 2π -périodiques qui sont instable et stable respectivement.

Ci- dessous le cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-3}$. (Fig 2.2)

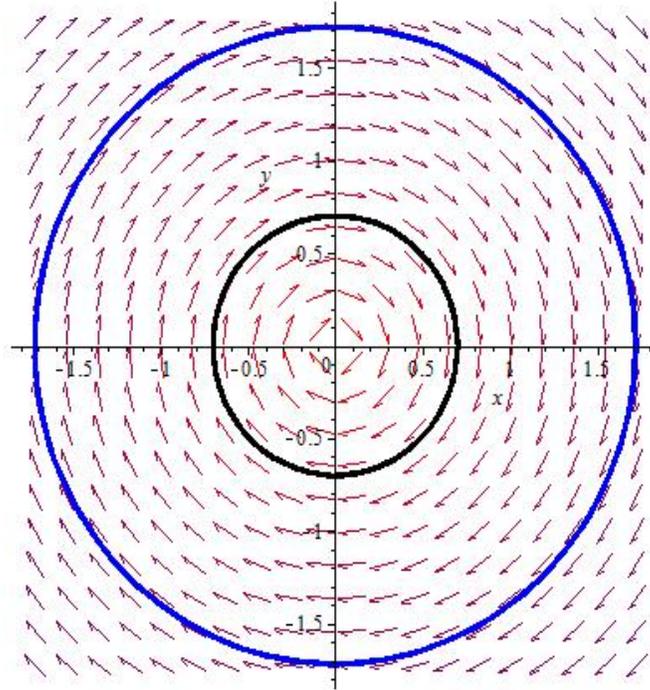


Fig 2.2: Cycles limites stable et instable

Exemple 2.1.3 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x + \frac{2}{7}xy + z^2) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(\frac{-5}{3}y + yz) \\ \dot{z} = \varepsilon(x^2 + yz - 6). \end{cases} \quad (2.7)$$

En coordonnées cylindriques $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ et $z = z$, le système (2.7) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{2}{7} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) r^2 \varepsilon - \cos^2(\theta) r z \varepsilon + \frac{2}{3} \cos^2(\theta) r \varepsilon + \cos(\theta) z^2 \varepsilon \\ \quad + r z \varepsilon + \frac{2}{3} \cos^2(\theta) \varepsilon - \frac{5}{3} r \varepsilon \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{2}{7} r \cos^3(\theta) \varepsilon + \cos(\theta) \sin(\theta) z \varepsilon - \frac{1}{r} \sin(\theta) z^2 \varepsilon - \frac{2}{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \varepsilon \\ \quad - \frac{2}{7} \cos(\theta) r \varepsilon - \frac{1}{r} z^2 \sin(\theta) \varepsilon \\ \dot{z} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) + r \sin(\theta) z - 6). \end{cases}$$

On considère θ comme nouvelle variable indépendante, d'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{2}{7} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) r^2 \varepsilon - \cos^2(\theta) r z \varepsilon + \frac{2}{3} \cos^2(\theta) r \varepsilon + \cos(\theta) z^2 \varepsilon \\ \quad + r z + \frac{2}{3} \cos^2(\theta) - \frac{5}{3} r \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = (r^2 \cos^2(\theta) + r \sin(\theta) z - 6) \varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} F_1(r, \theta) = \frac{2}{7} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) r^2 - \cos^2(\theta) r z + \frac{2}{3} \cos^2(\theta) r + \cos(\theta) z^2 \\ \quad + r z + \frac{2}{3} \cos^2(\theta) - \frac{5}{3} r, \\ F_2(r, \theta) = (r^2 \cos^2(\theta) + r \sin(\theta) z - 6). \end{cases}$$

Alors d'après (2.3), les fonctions moyennées de $F_{11}(r, \theta)$ et $F_{21}(r, \theta)$ sont

$$\begin{cases} f_1^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{7} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) r^2 - \cos^2(\theta) r z + \frac{2}{3} \cos^2(\theta) r + \cos(\theta) z^2 + r z \right. \\ \quad \left. + \frac{2}{3} \cos^2(\theta) - \frac{5}{3} r \right) d\theta, \\ f_2^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2(\theta) + r \sin(\theta) z - 6) d\theta, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} f_1^0(r) = \frac{1}{6} r (3z - 8), \\ f_2^0(r) = \frac{1}{2} r^2 - 6. \end{cases}$$

On résolvons le système précédent, on obtient les deux racines

$$(r_0, z_0) = (2\sqrt{3}, \frac{8}{3}) \text{ et } (r_1, z_1) = (-2\sqrt{3}, \frac{8}{3}),$$

comme r doit être positif, la solution (r_0, z_0) est la seule qui fournisse un cycle limite.

On a aussi

$$D_{r,z} f^0(r_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\det(D_{r,z}f^0(r_0, z_0)) = -6 \neq 0,$$

alors d'après le Théorème (2.1.1), le système (2.7) et pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit possède un seul cycle limite.

Le point singulier $(r_0, z_0) = (2\sqrt{3}, \frac{8}{3})$ du système moyenné est hyperbolique, donc la stabilité du cycle limite est de même stabilité que $(r_0, z_0) = (2\sqrt{3}, \frac{8}{3})$. Les valeurs propres de $D_{r,z}f^0(r_0, z_0)$ sont $\lambda_1 = \sqrt{6}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{6}$, alors (r_0, z_0) est un point selle qui est toujours instable, ce qui signifie que ce cycle limite est instable.

Ci-dessous le cycle limite pour $\varepsilon = 0.01$. (Fig 2.3).

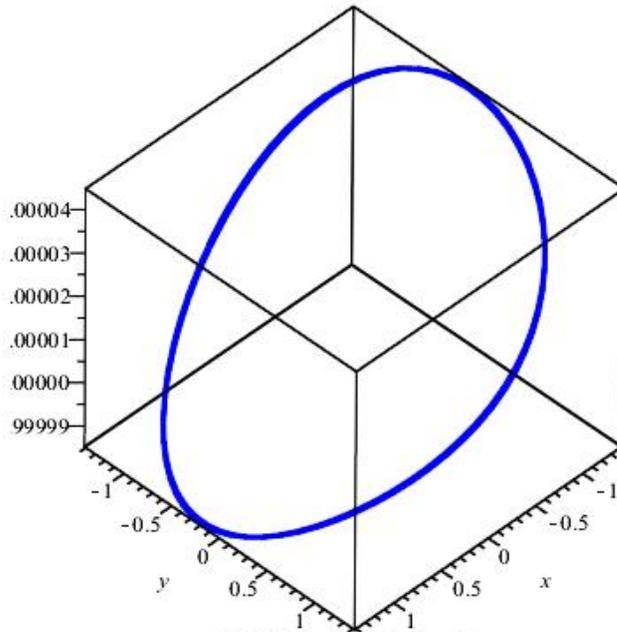


Fig 2.3: Cycle limite instable

2.2 Méthode de moyennisation du second ordre

Le théorème suivant donne une approximation du second ordre pour les solutions d'un certains systèmes différentiels.

Théorème 2.2.1 *Considérons le système*

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x) + \varepsilon^3 H(t, x, \varepsilon), \quad (2.8)$$

avec $F, G : [0, \infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H : [0, \infty[\times D \times [0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}^n$, D est un sous-espace ouvert de \mathbb{R}^n . Les fonctions F, G et H sont périodiques de période T par rapport à la variable t . Le système moyenné associé à (2.7) est

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y). \quad (2.9)$$

On défini $f^1(t, x)$ par

$$f^1(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x), \quad (2.10)$$

où

$$y^1(t, x) = \int_0^t (F(s, x) - f^0(x)) ds + z(x), \quad (2.11)$$

avec $z(x) \in C^1$ une fonction telle que la moyenne de y^1 est nulle.

f^0, f^{10} , et g^0 sont les fonctions moyennées de F, f^1 et G respectivement.

Supposons que

i- $\frac{\partial F}{\partial x}, G$ et H sont lipschitziennes en x et continues sur leurs domaines de définitions,

ii- $|H(t, x, \varepsilon)|$ est bornée par une constante uniformément dans $[0, \frac{T}{\varepsilon}[\times D \times [0, \varepsilon_0[$,

iii- T est indépendant de ε ,

iv- $y(t)$ appartient à D pendant un temps de l'ordre de $1 \setminus \varepsilon$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2),$$

pendant un temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.2.1 *Sous les hypothèses de théorème précédent, nous supposons que $f^0(y) \equiv 0$, alors*

a) Si p est un point d'équilibre du système moyenné (2.9) tel que

$$\frac{\partial}{\partial y}(f^{10}(y) + g^0(y))|_p \neq 0, \quad (2.12)$$

alors, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.8) tel que $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

b) Si le point d'équilibre $y = p$ du système moyenné (2.9) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .

Exemple 2.2.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + xy\varepsilon + (ax + bx^3 - cx^4)\varepsilon^2, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.13)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système (2.13) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = (-r^4 \cos^5(\theta)c + r^3 \cos^4(\theta)b + r \cos^2(\theta)a) \varepsilon^2 + (r \cos^2(\theta) \sin(\theta)) \varepsilon, \\ \dot{\theta} = -1 + (-a \cos(\theta) \sin(\theta) - br^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + cr^3 \cos^4(\theta) \sin(\theta))\varepsilon^2, \\ \quad + (\cos^3(\theta) - \cos(\theta))r\varepsilon. \end{cases}$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = F(r, \theta)\varepsilon + G(r, \theta)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{cases} F(r, \theta) = -\cos^2(\theta) \sin(\theta)r^2 \\ G(r, \theta) = -ar \cos^2(\theta) - br^3 \cos^4(\theta) + cr^4 \cos^5(\theta) - r^3 \cos^5(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta). \end{cases}$$

En appliquant maintenant Le théorème(2.2.1), on calcule la fonction moyennée $f^0(r)$

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\cos^2(\theta) \sin(\theta)r^2 d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'ici on peut passer à la méthode de moyennisation du second ordre.

On calcule $g^0(r)$ et $f^{10}(r)$, on trouve

$$\begin{aligned} g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -ar \cos^2(\theta) - br^3 \cos^4(\theta) + cr^4 \cos^5(\theta) - r^3 \cos^5(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad + r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{8}(4ar + bc r^3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^1(r, \theta) d\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f^1(r, \theta) &= \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) y^1(r, \theta) \\ &= \frac{-2r^3}{3} \cos^5(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= -2r \cos^2(\theta) \sin(\theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y^1(r, \theta) &= \int_0^t (F(r, s)) ds + z(r) \\ &= \int_0^t -\cos^2(s) \sin(t) r^2 ds + \frac{1}{3} r^2 \\ &= \frac{1}{3} r^2 (\cos^3(t) - 1) + \frac{1}{3} r^2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$f^{10}(r) + g^0(r) = -\frac{1}{8}(4ar + bc r^3), \quad (2.14)$$

les points d'équilibres non nulles de l'expression (2.14) sont $r_0 = \frac{2\sqrt{-3ab}}{3b}$ et $r_1 = -\frac{2\sqrt{-3ab}}{3b}$

avec $\text{sgn}(ab) = -1$ et $ab \neq 0$.

De plus

$$\frac{dg^0}{dr}(r_0) = a \neq 0.$$

- Si $ab < 0$ et $b > 0$, la seule racine positive est $r_0 = \frac{2\sqrt{-3ab}}{3b}$, alors il existe un cycle limite d'amplitude $\frac{2\sqrt{-3ab}}{3b}$ qui est stable.
- Si $ab < 0$ et $b < 0$, la seule racine positive est $r_1 = \frac{-2\sqrt{-3ab}}{3b}$, alors il existe un cycle limite d'amplitude $\frac{-2\sqrt{-3ab}}{3b}$ qui est instable.

Pour $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, et $\varepsilon = 10^{-12}$ on a le cycle limite stable suivant. (Fig 2.4)

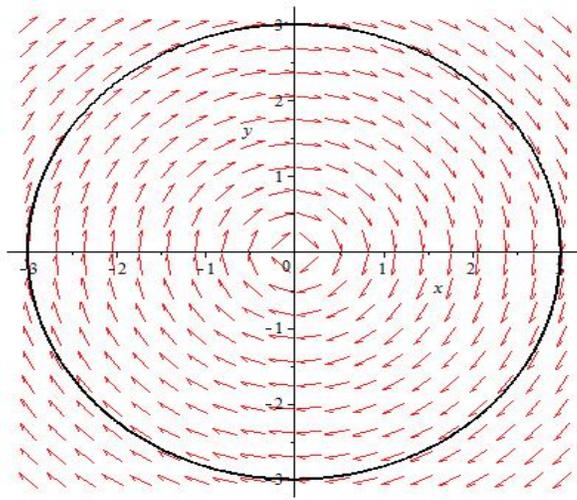


Fig 2.4: Cycle limite stable

Exemple 2.2.2 Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (4x^2 + \frac{8}{3}xy)\varepsilon + 3x\varepsilon^2, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.15)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système (2.15) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = (4 \cos^3(\theta)r^2 + \frac{8}{3} \cos^2(\theta) \sin(\theta)r^2)\varepsilon + 3r \cos^2(\theta) \varepsilon^2 \\ \dot{\theta} = -1 + (\frac{8}{3}r \cos^3(\theta) - \frac{8}{3}r \cos(\theta) - 4r \cos^2(\theta))\varepsilon - 3 \sin(\theta) \cos(\theta)\varepsilon^2 \end{cases}$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = F(r, \theta)\varepsilon + G(r, \theta)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

où

$$F(r, \theta) = -4 \cos^3(\theta)r^2 - \frac{8}{3} \cos^2(\theta) \sin(\theta) r^2$$

$$G(r, \theta) = -3 \cos^2(\theta)r + \frac{32}{3} \sin^2(\theta) \cos^4(\theta)r^3 + \frac{80}{9} \sin(\theta) \cos^5(\theta)r^3 - \frac{32}{3} \cos^6(\theta)r^3 \\ + \frac{64}{9} \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^3 - \frac{32}{3} \cos^4(\theta)r^3$$

En appliquant maintenant le Théorème(2.2.1), on calcule la fonction moyennée

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -4 \cos^3(\theta)r^2 - \frac{8}{3} \cos^2(\theta) \sin(\theta) r^2 d\theta, \\ &= 0. \end{aligned}$$

d'ici on peut passer à la méthode de moyennisation du second ordre.

On calcule $g^0(r)$ et $f^{10}(r)$, on trouve

$$\begin{aligned} g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -3 \cos^2(\theta)r + \frac{32}{3} \sin^2(\theta) \cos^4(\theta)r^3 + \frac{80}{9} \sin(\theta) \cos^5(\theta)r^3 \\ &\quad - \frac{32}{3} \cos^6(\theta)r^3 + \frac{64}{9} \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^3 - \frac{32}{3} \cos^4(\theta)r^3 d\theta \\ &= \frac{1}{6}r(8r^2 - 9) \end{aligned}$$

et

$$f^{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^1(r, \theta) d\theta = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} f^1(r, \theta) &= \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)y^1(r, \theta) \\ &= \frac{-128}{9} \cos^6(\theta)r^3 + \frac{160}{27} \cos^5(\theta) \sin(\theta)r^3 - \frac{64}{9} \cos^4(\theta)r^3 \\ &\quad + \frac{64}{3} \cos^3(\theta) \sin(\theta)r^3 + \frac{128}{9} \cos^2(\theta)r^3 \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = -8r \cos^3(\theta) - \frac{16}{3}r \sin(\theta) \cos^2(\theta).$$

$$\begin{aligned}
 y^1(r, \theta) &= \int_0^t (F(r, s)) ds + z(r), \\
 &= \int_0^t -4 \cos^3(s) r^2 - \frac{8}{3} \cos^2(s) \sin(s) r^2 ds + \frac{8}{9} r^2, \\
 &= \frac{4}{9} r^2 (2 \cos^3(t) - 3 \cos^2(t) \sin(t) - 6 \sin(t) - 2) + \frac{8}{9} r^2.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$f^{10}(r) + g^0(r) = \frac{1}{6} r (8r^2 - 9). \quad (2.16)$$

la seule racine positive de l'expression (2.16) est $r_0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. De plus

$$\frac{dg^0}{dr}(r_0) = 3 \neq 0,$$

alors il existe un cycle limite d'amplitude $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ du système (2.15) qui est instable.

Pour $\varepsilon = 10^{-12}$, on a le cycle limite stable suivant. (Voir Fig 2.5)

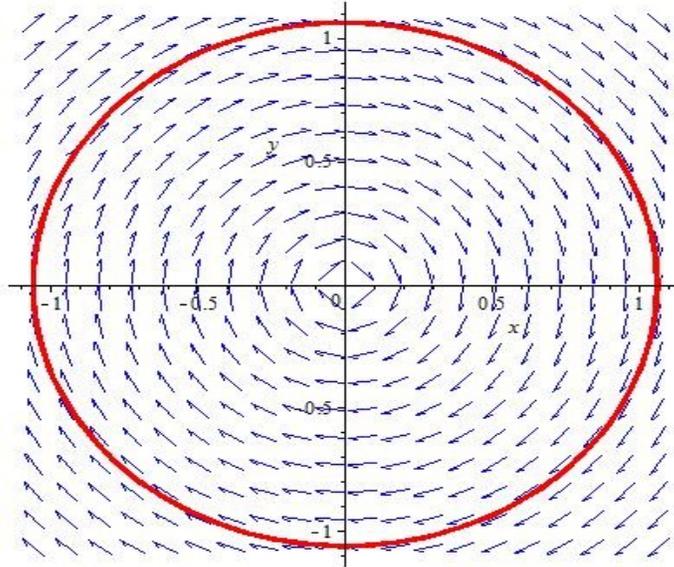


Fig 2.5: Cycle limite instable

Les cycles limites pour une classe des équations différentielles du second ordre

3.1 Introduction

Les équations différentielles du second ordre jouent un rôle très important dans de nombreux domaines de la science et de la technologie.

En général, il est impossible de déterminer la solution d'une équation différentielle du second ordre en termes de fonction explicite. Nous recherchons donc les propriétés de ce type d'équations qui peuvent être obtenues sans la résoudre. Le problème est plus pertinent dans la théorie des perturbations, où les orbites périodiques jouent un rôle principal.

Dans ce chapitre, nous posons ces questions pour une large classe d'équations différentielles du second ordre de la forme

$$\ddot{x} = -(1 + \varepsilon k \cos^2 t)x + \varepsilon f(t, x, \dot{x}) \quad (3.1)$$

où ε est un petit paramètre, $k \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de classe C^2 et T -périodique en t .

3.2 Une autre méthode de moyennisation du premier ordre

Considérons le système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (3.2)$$

où les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont de classe C^2 dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et T -périodique en t . Lorsque $\varepsilon = 0$ on obtient le système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}). \quad (3.3)$$

Nous supposons que le système non perturbé ci-dessus a un sous-ensemble ouvert de Ω rempli de solutions périodiques.

Soit $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ la solution du système (3.2) telle que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{z}$. La linéarisation du système non perturbé (3.3) le long des solutions périodiques est

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}))\mathbf{y}. \quad (3.4)$$

Soit $M_{\mathbf{z}}(t)$ une matrice fondamentale du système différentiel linéaire (3.4). Supposons que Ω contient un sous-ensemble ouvert W formé uniquement d'orbites périodiques, toutes ayant la même période T , c'est-à-dire que W est un ensemble isochrone du système (3.2). Alors on a le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 *Supposons que Ω contient un ensemble ouvert et borné W tel que $Cl(W) \subset \Omega$ et pour tout $z \in Cl(W)$, $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ est T -périodique.*

Soit la fonction $\mathcal{F} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)) dt. \quad (3.5)$$

S'il existe $p \in W$ avec $\mathcal{F}(p) = 0$ et $\det\left(\left(\frac{d\mathcal{F}}{dz}\right)(p)\right) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (3.2) telle que $\phi(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve Voir le Corollaire 1 de [2].

3.3 Résultats principaux

Dans cette section, nous allons appliquer le Théorème (3.2.1) pour l'étude des cycles limites de l'équation différentielle du second ordre (3.1).

$$\ddot{x} = -(1 + \varepsilon k \cos^2 t)x + \varepsilon f(t, x, \dot{x})$$

Théorème 3.3.1 *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, l'équation différentielle (3.1) a un cycle limite $x_\varepsilon(t)$, qui tend vers la solution 2π -périodique $r_0 \cos(a_0 - t)$ de l'équation (3.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Proposition 3.3.1 *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour tout $k > 0$, l'équation différentielle (3.1) avec $f(t, x, \dot{x}) = \cos t$ a un seul cycle limite $x_\varepsilon(t)$, tel que $x_\varepsilon(t) \rightarrow \frac{4}{3k} \cos t$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Proposition 3.3.2 *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et $k \in [0, 1]$, l'équation différentielle (3.1) avec $f(t, x, \dot{x}) = \sin x$ peut avoir une infinité de cycles limites.*

3.4 Preuve de résultats principaux

3.4.1 Preuve du Théorème 3.3.1

L'équation différentielle du second ordre (3.1) est équivalente au système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(-kx \cos^2(t) + f(t, x, y)). \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce système peut s'écrire sous la forme (3.2) où

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ F_0(t, x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \\ F_1(t, x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \cos^2(t)x + f(t, x, y) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Le système non perturbé du système (3.6) est

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (3.7)$$

il correspond à l'oscillateur harmonique simple dont la solution est

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \\ y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t. \end{cases}$$

Pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la solution correspondante est 2π -périodique et s'écrit comme suit

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(a - t) \\ y(t) = r \sin(a - t), \end{cases} \quad (3.8)$$

où $r > 0$ et a sont des constantes.

Soit $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ la solution du système (3.6) telle que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{z} = (r, a)$. La linéarisation du système non perturbé (3.7) le long de la solution périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ est

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)) \mathbf{y}. \quad (3.9)$$

Soit $M(t)$ une matrice fondamentale du système différentiel linéaire (3.9) avec

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$M^{-1}(t)F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})) = \begin{pmatrix} -h(t, r, a) \sin t \\ h(t, r, a) \cos t \end{pmatrix}.$$

où

$$h(t, r, a) = -k \cos(a - t) \cos^2 t + f(t, r \cos(a - t), r \sin(a - t)).$$

En faisant le changement de variable $t \rightarrow a + s$, l'expression ci-dessus devient

$$\begin{pmatrix} kr \cos s \cos^2(a + s) \sin(a + s) - f(a + s, r \cos(s), -r \sin(s)) \sin(a + s) \\ -kr \cos s \cos^3(a + s) + f(a + s, r \cos(s), -r \sin(s)) \cos(a + s) \end{pmatrix}.$$

D'après la formule (3.5), la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} f_1(r, a) \\ f_2(r, a) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{\mathbf{z}}^{-1}(t)F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0))dt. \quad 3.10$$

Soit $W \neq \emptyset$ un sous ensemble ouvert et bornée de \mathbb{R}^2 , formé uniquement d'orbites périodiques ayant toutes la même période 2π , c'est-à-dire que W est un ensemble isochrone du système (3.7). Soit $(r_0, a_0) \in W$ une solution simple du système

$$\begin{cases} f_1(r, a) = 0 \\ f_2(r, a) = 0, \end{cases}$$

avec le déterminant

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, a)}\right)(r_0, a_0) \neq 0.$$

Avec tout ce qui précède, nous avons vérifié les hypothèses du Théorème (3.2.1), alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, l'équation du second ordre (3.1) a un cycle limite $x_\varepsilon(t)$, qui tend vers la solution 2π -périodique $r_0 \cos(a_0 - t)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ceci termine la preuve du Théorème (3.3.1).

3.4.2 Preuve de la Proposition 3.3.1

En prenant $f(t, x, y) = \cos t$, le système (3.6) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(1 + k\varepsilon \cos^2 t)x + \varepsilon \cos t, \end{cases} \quad (3.11)$$

où k est une constante.

Par des calculs simples, la valeur de l'intégrale (3.10) pour la fonction ci-dessus à la condition initiale (r, a) est

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r, a) &= \begin{pmatrix} f_1(r, a) \\ f_2(r, a) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{\mathbf{z}}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)) dt \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{8}kr \sin a \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{8}kr \cos a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui possède une seule racine pour $r_0 > 0$ donnée par $(r_0, a_0) = (\frac{4}{3k}, 0)$ avec $k > 0$.

Le déterminant de la matrice jacobienne est

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial r \partial a}\right)(r_0, a_0) = \frac{1}{16k} \neq 0.$$

Alors d'après le Théorème (3.2.1) et pour $k > 0$, il existe une unique solution 2π -périodique $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ du système (3.11) telle que $x_\varepsilon(t) \rightarrow \frac{4}{3k} \cos t$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Donc la Proposition 3.3.1 est démontrée.

3.4.3 Preuve de la Proposition 3.3.2

Dans ce cas la fonction $f(t, x, y) = \sin x$ dépend uniquement de x . Alors on doit analyser le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(1 + \varepsilon k \cos^2 t)x + \varepsilon \sin x. \end{cases} \quad (3.12)$$

D'ici

$$M^{-1}(t)F_1(t, \mathbf{x}(t, (r, a))) = \begin{pmatrix} -\sin(t)(-kr \cos(a-t) \cos^2(t) + \sin(r \cos(a-t))) \\ \cos(t)(-kr \cos(a-t) \cos^2(t) + \sin(r \cos(a-t))) \end{pmatrix}.$$

Maintenant en faisant le changement de variable $t \rightarrow a + s$, nous avons

$$\begin{pmatrix} kr \cos(s) \cos^2(a+s) \sin(a+s) - \sin(a+s) \sin(r \cos(s)) \\ -kr \cos(s) \cos^3(a+s) + \cos(a+s) \sin(r \cos(s)) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Enfin en intégrant ces expressions par rapport à la variable s de 0 à 2π , en divisant par 2π et en supposant que $r > 0$, on obtient

$$\mathcal{F}(r, a) = \begin{pmatrix} f_1(r, a) \\ f_2(r, a) \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} kr - J_1(r) \sin a \\ -3kr + 8J_1(r) \cos a \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

où $J_1(r)$ est la fonction de Bessel du premier type.

Le système $f_1(r, a) = f_2(r, a) = 0$ est équivalent au système

$$\begin{pmatrix} 8 \cos a = 3 \sin a \\ kr - J_1(r) \sin a = 0. \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

En prenant $a = a^*$ une des valeurs de $\arctan(\frac{8}{3})$, le système précédent se réduit à l'unique équation

$$kr - J_1(r) \sin a^* = 0. \quad (3.16)$$

Alors, les solutions simples du système (3.15) correspondent aux solutions simples de l'équation (3.16) qui dépendent de la valeur du paramètre k .

Par exemple, pour $k = 1$, le système ci-dessus a exactement une racine simple à $r = 0$. Pour $k = 0$, il correspond à la fonction de Bessel qui a une infinité de racines simples. Nous pouvons avoir autant de solutions simples que nous voulons. Dans les figures ci-dessus, nous avons tracé les graphiques de quelques fonctions $kr - J_1(r) \sin a^*$ en changeant la valeur de k . La preuve de la Proposition (3.3.2) est complète.

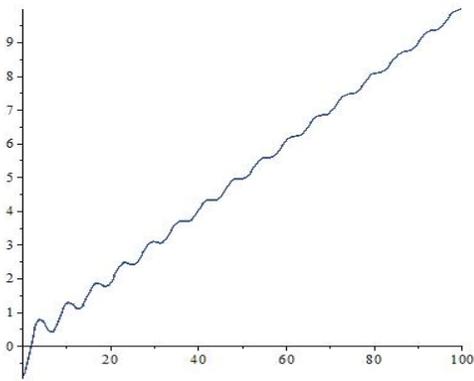


Fig 3.1: Le graphe de la fonction $kr - J_1(r) \sin a^*$, pour $k=0.1$

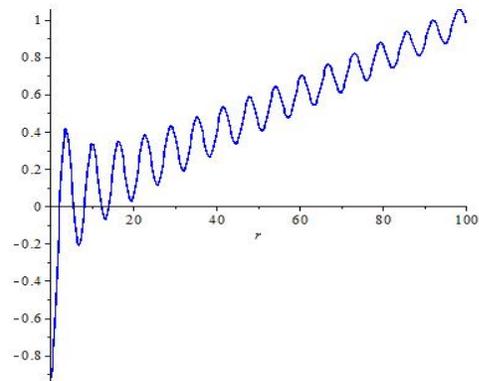


Fig 3.2: Le graphe de la fonction $kr - J_1(r) \sin a^*$, pour $k=10^{-2}$

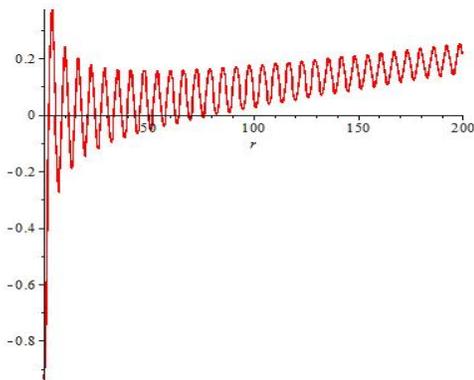


Fig 3.3: Le graphe de la fonction $kr - J_1(r) \sin a^*$, pour $k=10^{-3}$

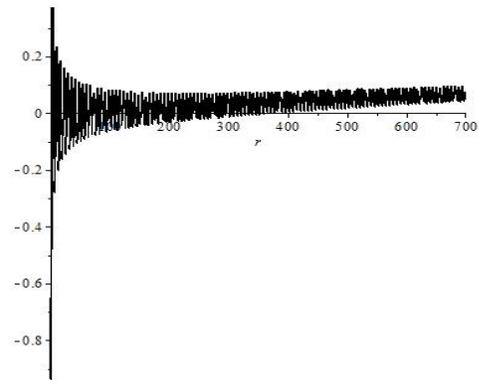


Fig 3.4: Le graphe de la fonction $kr - J_1(r) \sin a^*$, pour $k=10^{-4}$

La méthode de facteur intégrant inverse pour la non existence des cycles limites

Il est bien connu que le facteur intégrant inverse est un outil important dans l'étude qualitative des équations différentielles, mais leur détermination est un problème difficile (voir [6] et ses références).

La relation entre les cycles limites des systèmes différentiels planaires et le facteur intégrant inverse a été montrée pour la première fois dans un article de Giacomini, Llibre et Viano paru en 1996. A partir de ce moment, de nombreux articles de recherche sont consacrés à l'étude des propriétés du facteur intégrant inverse et sa relation avec les cycles limites et leurs bifurcations.

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser le facteur intégrant inverses pour donner des critères de non existence de cycles limites des systèmes différentiels planaires.

4.1 Facteur intégrant inverse

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $P, Q : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1 et U est un ensemble ouvert simplement connexe. Considérons le champ de vecteur

$$F = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.2)$$

alors, le système (4.1) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{X} = F(X) \quad (4.3)$$

où $X = (x, y) \in U$.

Définition 4.1.1 Une fonction $V : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est dite un facteur intégrant inverse du système (4.1), si elle n'est pas localement nulle et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V. \quad (4.4)$$

Remarque 4.1.1 L'équation (4.4) est équivalente à l'équation

$$\operatorname{div} \left(\frac{P}{V}, \frac{Q}{V} \right) = 0.$$

Remarque 4.1.2 Un facteur intégrant inverse est une solution de l'équation

$$FV = \operatorname{div}(F)V.$$

Le système (4.1) peut s'écrire sous la forme

$$\omega = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy = 0, \quad (4.5)$$

où $(x, y) \in U$.

L'équation ci-dessus est exactement l'équation différentielle des orbites du système (4.1).

Définition 4.1.2 Un facteur intégrant pour $\omega = 0$ est une fonction $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui rend $\mu\omega$ une forme exacte. Dans le cas où U est simplement connexe ceci est équivalent à

$$\frac{\partial(-\mu Q)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial x}$$

Remarque 4.1.3 μ est un facteur intégrant du système (4.5) si et seulement si $V = \frac{1}{\mu}$ est un facteur intégrant du système (4.1).

Proposition 4.1.1 Soit $V : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un facteur intégrant inverse du système (4.1), alors on a les propriétés suivantes

1- La fonction $\frac{1}{V} : U \setminus \{V^{-1}(0)\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est un facteur intégrant inverse

du système (4.1). De plus

$$H(x, y) = - \int \frac{P(x, y)}{V(x, y)} dy + \int \left(\frac{Q(x, y)}{V(x, y)} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{P(x, y)}{V(x, y)} dy \right) dx$$

est une intégrale première du système (4.1).

2- Si le système (4.1) a une intégrale première $H(x, y)$, alors la fonction

$$V_H(x, y) = \frac{P}{-H_y} = \frac{Q}{H_x}$$

est un facteur intégrant inverse du système (4.1). De plus le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{P}{V_H} = -H_y \\ \dot{y} = \frac{Q}{V_H} = H_x \end{cases}$$

est un système Hamiltonien.

4.2 La non existence des cycles limites par la méthode de facteur intégrant inverse

Le but de cette section est d'utiliser le facteur intégrant inverse pour produire de manière systématique des critères de non existence de cycles limites des équations différentielles planaires. Nous donnons quelques exemples pour illustrer les applications de ces résultats.

Théorème 4.2.1 Soit $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ un facteur intégrant inverse du système (4.1). Si $\Gamma \subset U$ est un cycle limite du système (4.1), alors Γ est contenu dans l'ensemble

$$V^{-1}(0) = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\}.$$

Proposition 4.2.1 Soit U un ensemble ouvert simplement connexe et soit le champ de vecteur donné par (4.2)

$$F = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y},$$

avec $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$.

Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite, alors le système (4.1) n'a pas de cycles limites dans U .

1– La fonction $\alpha_1 = \frac{\operatorname{div}(F(x,y))}{P(x,y)}$ ou $\alpha_2 = \frac{\operatorname{div}(F(x,y))}{Q(x,y)}$ ne dépend que de x ou de y respectivement et elle est continue.

2– La fonction $\beta = \frac{\operatorname{div}(F(x,y))}{P(x,y)y + Q(x,y)x}$ ne dépend que de $z = xy$ et elle est continue.

Preuve On considère le cas (1) avec α_1 dépendant uniquement de x . On cherche un facteur intégrant inverse V à l'aide de l'équation associée

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Supposons que V dépend uniquement de x . Ainsi l'équation précédente se réduit à

$$P \frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V,$$

qui est réécrit comme

$$\frac{\partial \log(V)}{\partial x} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = \alpha_1.$$

D'après notre hypothèse $V = \exp(\int^x \alpha_1(s) ds)$ est un facteur intégrant inverse et $V^{-1}(0) = \emptyset$, alors d'après le Théorème (4.2.1), le système (4.1) n'admet pas de cycles limites. La preuve est complète.

Exemple 4.2.1 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = ay \\ \dot{y} = -x + x^4 y^2 - b \cos(x) \end{cases} \quad (4.6)$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $a, b \neq 0$. Puisque

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) &= \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(ay)}{\partial x} + \frac{\partial(-x + x^4y^2 - b \cos(x))}{\partial y} \\ &= 2x^4y, \end{aligned}$$

d'ici

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{div}(F(x, y))}{P(x, y)} = \frac{2x^4y}{ay} = \frac{2}{a}x^4$$

qui dépend uniquement de x et elle est continue sur \mathbb{R} . Alors d'après le Proposition (4.2.1), le système (4.6) n'a pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 4.2.2 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^2x^2 + x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = -2xy \end{cases} \quad (4.7)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) &= \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(2y^2x^2 + x^2 + y^2 - 1)}{\partial x} + \frac{\partial(-2xy)}{\partial y} = 4xy^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_2 = \frac{\operatorname{div}(F(x, y))}{Q(x, y)} = 2y.$$

qui ne dépend que de y et elle est continue sur \mathbb{R} . Alors d'après le Proposition (4.2.1) le système (4.7) n'admet pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 .

Corollaire 4.2.1 Soit F un champ de vecteur de classe C^1 dans U .

$$F = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}.$$

Si $\operatorname{div}(F) = 0$, alors le système (4.1) n'a pas de cycles limites dans \mathbb{U} .

Exemple 4.2.3 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4y + 2x^2y^3 + x^2y + y^5 - y \\ \dot{y} = -x^5 - 2x^3y^2 - xy^4 - y^2x + x. \end{cases} \quad (4.8)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) &= \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(x^4y + 2x^2y^3 + x^2y + y^5 - y)}{\partial x} + \frac{\partial(-x^5 - 2x^3y^2 - xy^4 - y^2x + x)}{\partial y} \\ &= 4x^3y + 4xy^3 + 2xy - 4xy^3 - 2xy - 4x^3y = 0, \end{aligned}$$

alors le système (4.8) n'a pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 4.2.4 Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y + y^3 - y \\ \dot{y} = -x^3 - xy^2 \end{cases} \quad (4.9)$$

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) &= \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(x^2y + y^3 - y)}{\partial x} + \frac{\partial(-x^3 - xy^2)}{\partial y} \\ &= 2xy - 2xy = 0. \end{aligned}$$

Alors le système (4.9) n'a pas de cycles limites.

Utilisons maintenant la Proposition (4.2.1) pour étudier quelques systèmes particuliers.

Corollaire 4.2.2 Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1(x)r_2(y) \\ \dot{y} = s_1(x). \end{cases} \quad (4.10)$$

Si $r_1(x) > 0$ (ou < 0), alors le système (4.10) n'a pas de cycles limites dans U .

Preuve En effet, l'expression

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{div}(F)}{P(x, y)} = \frac{r_1'(x)}{r_1(x)}$$

est continue et ne dépend que de x . En utilisant l'équation (4.4), on trouve

$$(r_1(x)r_2(y)) \frac{\partial V}{\partial x} + s_1(x) \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial(r_1(x)r_2(y))}{\partial x} + \frac{\partial s_1(x)}{\partial y} \right) V.$$

Supposons que V dépend uniquement de x , alors l'équation (4.4) devient

$$(r_1(x)r_2(y)) \frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial r_1(x)r_2(y)}{\partial x} \right) V$$

qui est réécrit sous la forme

$$\frac{\partial \log(V)}{\partial x} = \frac{1}{r_1(x)r_2(y)} \left(\frac{\partial(r_1(x)r_2(y))}{\partial x} \right) = \frac{r_1'(x)}{r_1(x)} = \alpha_1.$$

D'après notre hypothèse $V = \exp(\int^x \alpha_1(s) ds)$ est un facteur intégrant inverse et $V^{-1}(0) = \emptyset$. Alors d'après le Théorème (4.2.1), le système (4.10) n'admet pas de cycles limites dans U , donc le résultat découle de la Proposition (4.2.1).

Exemple 4.2.5 Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x^2 + \frac{1}{4}x^4) \left(\frac{y}{y^2+1} \right) \\ \dot{y} = x + \frac{2}{3} \cos(x) \end{cases} \quad (4.11)$$

Puisque $r_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{4}x^4 > 0$, alors d'après le Corollaire (4.2.2), le système (4.11) n'a pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 4.2.6 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = (4 + \sin^2(x))(2y^4 - 3y^3 + 4y^2) \\ \dot{y} = x - \frac{1}{3}x^3 \end{cases} \quad (4.12)$$

Puisque $r_1(x) = 4 + \sin^2(x) > 0$. De plus

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{div}(F)}{P(x, y)} = \frac{r_1'(x)}{r_1(x)} = \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{4 + \sin^2(x)}$$

qui est continue et ne dépend que de x . Alors d'après la Proposition (4.2.1), le système (4.12) n'a pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 .

Remarque 4.2.1 *Le portrait de phase d'un système différentiel ne change pas si nous multiplions le champ de vecteur par une fonction non nulle.*

Lemme 4.2.1 *Supposons que le système (4.1) a un cycle limite Γ et soit $B : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle positive (négative). Alors Γ est un cycle limite du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = BP \\ \dot{y} = BQ. \end{cases} \quad (4.13)$$

Exemple 4.2.7 *Considérons le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.14)$$

On multiplions le système (4.14) par la fonction $B(x, y) = x^2 + y^2 > 0$, nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = (-x + \frac{1}{2}(1 - x^2)y)(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (4.15)$$

Les portrait de phases de ces deux systèmes sont donnés par les figures (4.1) et (4.2) respectivement.

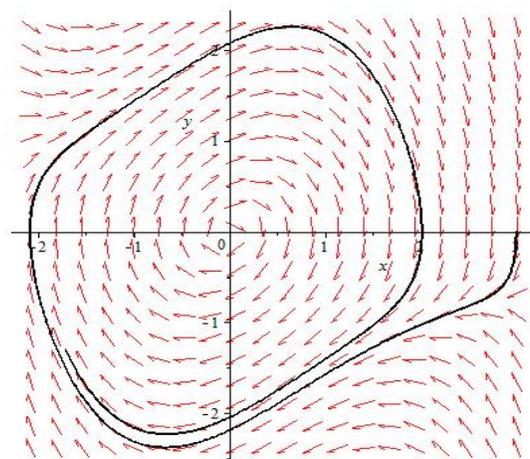


Fig 4.1: Portrait de phase du système (4.14).

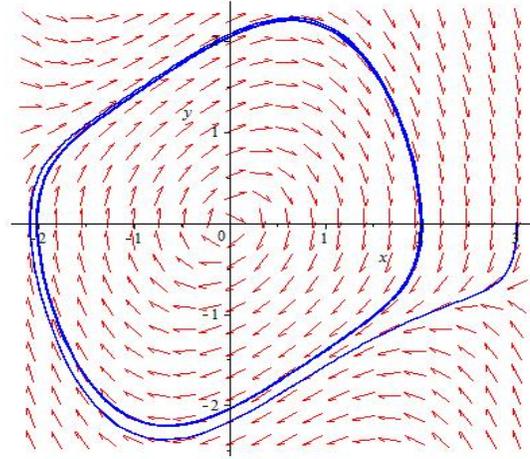


Fig 4.2: Portrait de phase du système

(4.15).

Nous remarquons que les deux portraits de phase ne changent pas même lorsque nous multiplions le système (4.14) par la fonction positive $B(x, y)$.

En utilisant maintenant le Lemme ci-dessus, nous obtenons les résultats suivants

Proposition 4.2.2 *Soit U un ensemble ouvert simplement connexe. Supposons que $B : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 positive (négative), telle que $\frac{\text{div}(BF)}{BP}$ ou $\frac{\text{div}(BF)}{BQ}$ ne dépend que de x ou de y (respectivement) et elle est continue. Alors le système (4.1) n'a pas de cycles limites dans U .*

Preuve *D'après la Proposition (4.2.1), supposons que l'expression*

$$\alpha_1 = \frac{\text{div}(BF)}{BP(x, y)}$$

est continue et dépend que de x . En utilisant l'équation (4.4), on obtient

$$PB \frac{\partial V}{\partial x} + QB \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial PB(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial QB(x, y)}{\partial y} \right) V.$$

Supposons que V dépend uniquement de x , alors l'équation (4.4) devient

$$PB \frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial PB}{\partial x} + \frac{\partial QB}{\partial y} \right) V$$

qui est réécrit sous la forme

$$\frac{\partial \log(V)}{\partial x} = \frac{1}{PB} \left(\frac{\partial PB}{\partial x} + \frac{\partial QB}{\partial y} \right) = \alpha_1$$

Puisque $V = \exp(\int \alpha_1(x) dx)$ est un facteur intégrant inverse et $V^{-1}(0) = \emptyset$, alors d'après le Théorème (4.2.1), le système (4.1) n'a pas de cycles limites dans U .

Exemple 4.2.8 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 2xy - 2x - y + 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Considérons la fonction $B(x, y) = e^{x+y} > 0$, on multiplie le système (4.16) par la fonction $B(x, y)$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = -ye^{x+y} \\ \dot{y} = (2xy - 2x - y + 1)e^{x+y}, \end{cases}$$

d'ici on a

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{div}(BF)}{BP} &= \frac{\frac{\partial(ye^{x+y})}{\partial x} + \frac{\partial((2xy-2x-y+1)e^{x+y})}{\partial y}}{ye^{x+y}} \\ &= -2x + 2, \end{aligned}$$

qui ne depend que de x et elle est continue sur \mathbb{R} . On conclut alors que le système (4.16) n'a pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 .

Corollaire 4.2.3 Soit U un ensemble ouvert simplement connexe. Supposons que $B : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 positive (négative) telle que $\operatorname{div}(BF) = 0$, alors le système (4.1) n'a pas de cycles limites dans U .

Exemple 4.2.9 Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -yx + x - y + x^2e^{-y} + 1 \end{cases} \quad (4.17)$$

4.2. La non existence des cycles limites par la méthode de facteur intégrant inverse

et soit la fonction $B(x, y) = e^{x+y} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On multiplie le système (4.17) par la fonction $B(x, y)$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = xy e^{x+y} \\ \dot{y} = e^{x+y} (-yx + x - y + x^2 e^{-y} + 1) \end{cases}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(BF) &= \frac{\partial(xy e^{x+y})}{\partial x} + \frac{\partial(e^{x+y}(-yx + x - y + x^2 e^{-y} + 1))}{\partial y} \\ &= ye^{x+y}(x+1) - ye^{x+y}(x+1) = 0. \end{aligned}$$

Alors d'après le Corollaire (4.2.3), ce système n'a pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 , d'où de même le système (4.17) n'a pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 .

Nous nous intéressons principalement dans cette partie à l'étude des champs de vecteurs polynomiaux.

Définition 4.2.1 Soit $\mathbb{R}[x, y]$ un anneau polynomial sur \mathbb{R} à deux variables. Etant donné $f \in \mathbb{R}[x, y]$, définir son ensemble des racines par

$$W(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Si $S \subset \mathbb{R}[x, y]$, soit $W(S)$ l'ensemble des racines communs

$$W(S) = \bigcap_{f \in S} W(f).$$

Un ensemble de cette forme est dit algébrique. En particulier $W(f)$ est appelé courbe algébrique.

Lemme 4.2.2 Soit $P \in \mathbb{R}[x, y]$ un polynôme homogène non nul, alors $W(P)$ ne contient aucun sous-ensemble homéomorphe à \mathbb{S}^1 .

En basant sur le Lemme précédent, nous pouvons démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.2.2 Si un polynôme homogène non nul est un facteur intégrant inverse du système (4.1), alors il n'a pas de cycles limites.

Preuve Soit V un facteur intégrant inverse du système (4.1), où V est un polynôme homogène. Supposons que le système (4.1) a un cycle limite Γ , alors $\Gamma \subset V^{-1}(0)$ ce qui contredit le Lemme (4.2.2). Ceci conclut la preuve.

Corollaire 4.2.4 Si P, Q sont des polynômes homogènes de même degré, alors le système (4.1) n'a pas de cycles limites.

Preuve On remarque que la fonction

$$V(x, y) = xQ(x, y) - yP(x, y),$$

est un facteur intégrant inverse du système (4.1). Il est clair que $V(x, y)$ est un polynôme homogène, alors on a le résultat du Théorème (4.2.2)

Exemple 4.2.10 Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x^4 + y^3x - 4x^2y^2, \\ \dot{y} = y^4 - 3xy^3 + x^3y - 2x^4. \end{cases} \quad (4.18)$$

La fonction

$$\begin{aligned} V(x, y) &= x(y^4 - 3xy^3 + x^3y - 2x^4) - y(-3x^4 + y^3x - 4x^2y^2) \\ &= -2x^5 + 4x^4y + x^2y^3, \end{aligned}$$

est un facteur intégrant inverse du système (4.18). Puisque $V(x, y)$ est un polynôme homogène non nul, alors d'après le Théorème (4.2.2) ce système n'a pas de cycles limites.

Exemple 4.2.11 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases} \quad (4.19)$$

La fonction

$$V(x, y) = cx^2 + (d - a)xy - by^2,$$

est un facteur intégrant inverse du système (4.19). Puisque $V(x, y)$ est un polynôme homogène non nul, alors d'après le Théorème (4.2.2) ce système n'a pas de cycles limites.

Théorème 4.2.3 *Soit le système polynomial*

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y) + xA_{m-1}(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y) + yA_{m-1}(x, y), \end{cases} \quad (4.20)$$

où P_n, Q_n et $A_{m-1} \in \mathbb{R}[x, y]$ sont homogènes et leurs degrés satisfont $m > n > 1$.

Supposons que $H(x, y)$ est une intégrale première homogène de degré p du système

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y), \end{cases}$$

alors la fonction

$$V(x, y) = (xQ_n(x, y) - yP_n(x, y))H(x, y)^{(m-n)\setminus p}, \quad (4.21)$$

est un facteur intégrant inverse du système (4.20).

Corollaire 4.2.5 *Sous les hypothèses du Théorème (4.2.3), si $\frac{m-n}{p} \in \mathbb{N}$, alors le système (4.20) n'a pas de cycles limites.*

Preuve *Des hypothèses du Théorème (4.2.3) et du fait que $\frac{m-n}{p} \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que $H(x, y)^{(m-n)\setminus p}$ est homogène, donc*

$$V(x, y) = (xQ_n(x, y) - yP_n(x, y))H(x, y)^{(m-n)\setminus p}$$

est un polynôme homogène. D'où le résultat découle du Théorème (4.2.2).

Exemple 4.2.12 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y + x^3 + x(x^8 + y^4x^4), \\ \dot{y} = -yx^2 - yx^2 + y(x^8 + y^4x^4). \end{cases} \quad (4.22)$$

Ce système s'écrit sous la forme (4.20) avec

$$\begin{cases} P_n(x, y) = x^2y + x^3, \\ Q_n(x, y) = -yx^2 - yx^2, \end{cases}$$

et

$$A_{m-1}(x, y) = x^8 + y^4x^4.$$

La fonction $H(x, y) = x^3y^3$ est une intégrale première du système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y + x^3, \\ \dot{y} = -y^2x - yx^2. \end{cases} \quad (4.23)$$

Alors d'après l'expression (4.21)

$$\begin{aligned} V(x, y) &= (xQ_n(x, y) - yP_n(x, y))H(x, y)^{(m-n)\setminus p}, \\ &= -2(x^6y^4 - x^5y^5), \end{aligned}$$

est un facteur intégrant inverse de (4.22).

Puisque V est un polynôme homogène et $\frac{m-n}{p} = \frac{9-3}{6} = 1 \in \mathbb{N}$. Alors sous l'hypothèse du Théorème (4.2.3) le système (4.22) n'a pas de cycles limites.

Proposition 4.2.3 *On considère le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1(x)r_2(y), \\ \dot{y} = s_1(x)s_2(y), \end{cases} \quad (4.24)$$

Si $r_1(x)$ et $s_2(y)$ sont des fonctions polynomiales, alors le système (4.24) n'a pas de cycles limites.

Preuve *Un calcul donne que la fonction*

$$V(x, y) = r_1(x)s_2(y),$$

est un facteur intégrant inverse du système (4.24). Maintenant $W(V) = W(r_1) \cup W(s_2)$. En prenant la factorisation en polynômes irréductibles, on a que $W(r_1)$ est constitué d'une union finie de droites verticales, de même $W(s_2)$ est une union finie de droites horizontales. Donc tout sous-ensemble de $W(V)$ homéomorphe à \mathbb{S}^1 doit contenir des points dans $W(r_1) \cap W(s_2)$; c'est-à-dire que les points critiques ne peuvent donc pas être des cycles limites.

Exemple 4.2.13 *Considérons le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 - \frac{1}{2}x^4)(y - \sin(y)), \\ \dot{y} = \cos(x)(1 - y + y^2), \end{cases} \quad (4.25)$$

qui s'écrit sous la forme (4.24), avec

$$\begin{aligned}r_1(x) &= x^2 - \frac{1}{2}x^4, \\s_2(y) &= 1 - y + y^2.\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $r_1(x)$ et $s_2(y)$ sont polynomiales, alors d'après la Proposition (4.2.3), le système (4.25) n'a pas de cycles limites dans \mathbb{R}^2 .

Conclusion

Dans notre travail, nous avons utilisé deux méthodes pour l'étude qualitative des systèmes différentiels, qui sont les suivantes: la première est la méthode de moyennisation et la deuxième est le facteur intégrant inverse.

La méthode du moyennisation est une technique qui consiste à remplacer un système différentiel dépendant d'un paramètre par un système moyenné qui est plus simple à analyser. L'idée de cette méthode est de considérer le paramètre comme une petite perturbation et de supposer que le comportement du système perturbé est proche de celui du système non perturbé. Elle permet de déterminer l'existence, le nombre, la stabilité et aussi la forme des cycles limite d'un système différentiel.

La méthode du facteur intégrant inverse est une autre technique qui utilise le fait que si un système différentiel plan a un facteur intégrant inverse, alors tous les cycles limite contenus dans le domaine de définition du facteur intégrant inverse sont contenus dans l'ensemble des zéros de cette fonction. La méthode du facteur intégrant inverse permet de donner des critères pour exclure l'existence de cycles limite d'un système différentiel.

La différence entre les deux méthodes est que la méthode du moyennisation s'applique aux systèmes différentiels dépendant d'un paramètre, tandis que la méthode du facteur intégrant inverse s'applique aux systèmes différentiels indépendants du paramètre. De plus, la méthode du moyennisation utilise le théorème de moyennisation de second ordre, qui est une généralisation du théorème de moyennisation de premier ordre, alors que la méthode du facteur intégrant inverse utilise le concept d'intégrabilité inverse, qui est une généralisation du concept d'intégrabilité classique.

On conclue alors que chaque méthode a ses avantages et son importance pour la recherche de cycles limites des systèmes différentielles .

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz, I. Stegun; Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National institute of Standards and Technology, Dover Publications, 1964.
- [2] A. Buica, J.P.François, J.Llibre. Commun. Pure Appl. Anal. 6(2007) 103.
- [3] J. Chavarriga, García I. A., Giné J; On the integrability of defferential equations defined by the sum of homogeneousvctors fieldswith degenerate infinity. Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng ., 11. (2001), 711-722.
- [4] A. M. Ferragut, I. Amengual; Polynomial inverse integrating factors of quadratic systems and other results. Departament de Matemàtica Universitat Autònoma de Barcelona.
- [5] FultonW.; Algebraic curves : An introduction to algebraic geometric, Addison Wesley P. , (1989), 226
- [6] I. Garcia, M. Grau, A survey on the inverse integrating factor, Qual. Theorem Dyn Syst., 9, no.1-2, (2010), 115-166.
- [7] Giacomini. H, J. Libre, M. Viano; On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles, Nonlinearity, 9, (1996). 501-516.
- [8] Leonard Laura-Guarachi, Osvaldo Osuna, Gaberiel Villasenor-Aguilar; Non-Existence of limit cycles via inverse integrating factors, Electronic Journal of differential Equations, Vol. 2011(2011), No. 124, pp 1-6.

- [9] J. Llibre; Averaging theory and limit cycles for quadratic systems, *Radovi, Math.* Vol 11 (2002), P. 1-14.
- [10] J. Llibre. "Periodic orbits via averaging theory". Cours donnés dans les "premières journées sur les equations différentielles et les systèmes dynamiques" 22, 23, 24 Octobre (2007) à l'université de Annaba.
- [11] J.Libre; Perez-Chavela Ernesto. Limit cycles of class of second order differential equations, *Physics Letters A* 375 (2011) 1080-1083.
- [12] I. G. Malkin; Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations, Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit., Moscow, 1956 (in Russian).
- [13] L. Perko; *Differential Equations and Dynamical Systems*, third edition, Springer (2000).
- [14] Sheng Pingxing; Some proprieties of homogeneous vector fields, *Journal of Shanghai Univ.*, Vol. 1, no. 3, (1997), 191-195.
- [15] M. Roseau; *Vibrations non linéaire et théorie de la stabilité*, Springer Tracts Natur. Philos., vol. 8, Springer-Verlag, Berlin-NewYork, 1966 (in French)
- [16] J. A.Sanders, F. Verhulst; *Averaging methods in Nonlinear dynamical systems*, *Appl. Math. Sci.* 59, Springer.(1985).