



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.



Université Badji Mokhtar Annaba

Faculté de Technologie

Département de Génie mécanique

Spécialité : Énergétique

Mémoire

Mémoire Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

THEME

**Etude semi-analytique de l'écoulement d'un
nanofluide trihybride à travers une plaque plane**

Rédigé par : Rahim Dhoha

Encadrant : Sari Mohamed Rafik

Grade : Professeur UBMA

Devant le jury

Pr DIB Amar	Président	Université Badji Mokhtar - Annaba
Pr MECHIGHEL Farid	Examineur	Université Badji Mokhtar - Annaba
Pr SARI Mohamed Rafik	Rapporteur	Université Badji Mokhtar - Annaba

Année universitaire 2024-2025

Remerciement

Au terme de ce travail, il m'est difficile de trouver les mots justes pour exprimer toute ma gratitude envers ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'accomplissement de ce mémoire.

Avant tout, je rends grâce à Allah, source infinie de savoir, de force et de patience, qui m'a guidé et soutenu dans les moments de doute comme dans ceux de clarté. Sans Sa volonté, aucun de mes efforts n'aurait pu aboutir.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à mon encadrant, « Sari Mohamed Rafik », pour sa rigueur intellectuelle, son écoute bienveillante, et sa confiance. Son accompagnement ne s'est pas limité à une supervision académique ; il m'a permis de grandir dans ma manière de penser, de chercher et de douter avec lucidité. C'est un privilège d'avoir bénéficié de sa présence et de son expertise.

Je remercie également l'ensemble des enseignants qui m'ont transmis, au fil des années, bien plus que des connaissances : une manière d'aborder le monde avec curiosité, esprit critique et humilité.

À mes amis, et collègues de route « Aya, Moka, Yasmine et Lina », merci pour les échanges stimulants, les moments de partage et de soutien mutuel, si précieux dans un parcours souvent solitaire.

Et à mon père et ma mère, je dédie ces lignes avec une émotion particulière. Vos gestes silencieux, vos sacrifices, votre foi en moi – même lorsque je doutais – sont les racines profondes de chaque pas que j'ai pu faire. Rien ne serait possible sans l'amour simple et solide que vous m'offrez.

Ce mémoire est bien plus qu'un travail académique. Il est le fruit d'un cheminement intérieur, d'une quête de rigueur, de compréhension et, parfois, de dépassement de soi. À tous ceux qui m'ont accompagné, je dis du fond du cœur : merci.

Table des matières

Introduction générale.....	1
CHAPITRE I : Généralités sur la couche limite et notion de la MDF	
I.1 Notion de fluide	4
I.2 Définition d'un fluide	4
I.2.1 Fluide incompressible.....	4
I.2.2 Fluide compressible	4
I.2.3 Fluide parfait	4
I.2.4 Fluide réel.....	4
I.3 Propriétés des fluides.....	5
I.3.1 Masse volumique.....	5
I.3.2 Viscosité.....	5
I.4 Types des écoulements	6
I.4.1 Ecoulement parfaits.....	6
I.4.2 Ecoulement compressible	6
I.4.3 Ecoulement incompressible.....	6
I.4.4 Ecoulement stable	6
I.4.5 Écoulement instable.....	6
I.4.6 Écoulement non stationnaire	6
I.4.7 Écoulement stationnaire	6
I.5 Définition d'un nanofluide.....	7
I.5.1 Nanofluide hybride	7
I.5.2 Nanofluide trihybride.....	7
I.6 Théorie de la couche limite	7
I.6.1 Couche limite dynamique	8
I.6.2 Couche limite thermique	8
I.7 Définition de la couche limite.....	9
I.8 Description de la couche limite	10
I.9 Paramètres caractéristiques de la couche limite.....	11
I.9.1 Epaisseur de la couche limite δ	11
I.9.2 Epaisseur de déplacement δ_1	11

I.9.3 Epaisseur de quantité de mouvement	12
I.9.4 Le facteur de forme H	12
I.10 Applications de la théorie de la couche limite	12
I.10.1 Aérodynamique et transports	13
I.10.2 Transfert thermique	13
I.10.3 Génie chimique et procédés	13
I.10.4 Micro fluidique et MEMS	13
I.10.5 Applications aux nanofluides trihybrides	14
I.11 Avantages et limites de la théorie de la couche limite	14
I.11.1 Avantages de la théorie de la couche limite	14
I.11.2 Inconvénients et limites de la théorie de la couche limite	15
I.12 Définition de champ magnétique	15
I.12.1 Effet magnus	16
I.13 Introduction à la magnétohydrodynamique	17
I.13.1 Différentes modélisation de la MHD	18
I.13.2 Description d'un fluide conducteur	20
I.14 Définition de l'éthylène glycol	20
I.15 Applications de l'éthylène glycol	21
CHAPITRE II : Etude dynamique de l'écoulement d'un nanofluide trihybride à travers une plaque plane	
II.1 Formulation mathématique	23
CHAPITRE III: Méthode de décomposition d'Adomian et application	
III.1 Introduction	29
III.2 Principe général de la méthode	29
III.3 Polynômes d'Adomian	31
III.4 Application de la méthode ADM sur le problème étudié	33
CHAPITRE IV: Résultats et discussions	
IV.1 Introduction	38
IV.2 Profil des vitesses	39
IV.2.1 Ecoulement des nanofluides	39
IV.3 Comparaison	47

IV.3.1 Comparaison avec la méthode numérique RK4	47
<i>Conclusion générale</i>	55
Références Bibliographiques	60

Table des figures

Figure I.1: la couche limite dynamique et la couche limite thermique sur une paroi plane	8
Figure I.2 Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi.8	
Figure I.3 : Couche limite thermique sur une plaque plane.....	9
Figure I.4 Écoulement de couche limite sur une plaque plane.....	10
Figure I.5 Épaisseur conventionnelle de la couche limite.....	11
Figure I.6 Écoulement sur une plaque plane (a) pour un fluide parfait (b) pour un fluide réel.....	12
Figure I.7 Épaisseur de déplacement de quantité de mouvement de couche limite.....	12
Figure I.8 Rotor Flettner sur un navire.....	17
Figure I.9 Prototype d'éolienne à rotors de Flettner.....	18
Figure II.1 Géométrie de l'écoulement étudié (écoulement à travers une paroi plane).....	23
Figure IV-1 Effet du gradient de pression m sur la vitesse du nanofluide (cas d'un écoulement accéléré, $m > 0$).....	38
Figure IV-2 Effet du gradient de pression m sur la vitesse du nanofluide (cas d'un écoulement décéléré, $m < 0$).....	39
Figure IV.3 Effet du paramètre magnétique M sur la vitesse du nanofluide trihybride (écoulement accéléré, $m = 0.2$).....	41
Figure IV.4 Effet du paramètre magnétique M sur la vitesse du nanofluide trihybride (écoulement décéléré, $m = - 0.2$).....	42
Figure IV.5 Effet de la concentration des nanoparticules sur la distribution des vitesses (écoulement hydromagnétique accéléré).....	43
Figure IV.6 Effet de la concentration des nanoparticules sur la distribution des vitesses (écoulement hydromagnétique décéléré)	43
Figure IV.7 Effet de la concentration des nanoparticules sur l'évolution du coefficient $f''(0)$ (écoulement accéléré, $m > 0$).....	44
Figure IV.8 Effet de la concentration des nanoparticules sur l'évolution du coefficient $f''(0)$ (écoulement décéléré, $m < 0$).....	45
Figure IV.9 Effet du paramètre magnétique M sur l'évolution du coefficient $f''(0)$ (écoulement accéléré, $m > 0$)	45
Figure IV.10 Effet du paramètre magnétique M sur l'évolution du coefficient $f''(0)$ (écoulement décéléré, $m < 0$)	46

Liste des tableaux

Tableau IV-1 : Propriétés thermophysiques du fluide de base et des différentes nanoparticules.....	38
Tableau IV-2 : comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.01$, $M = 0.1$, $m = -0.3$).....	47
Tableau IV-3 comparaisons du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.01$, $M = 0.1$ et $m = 0.3$).....	48
Tableau IV-4 comparaisons du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.01$, $M = 0.1$ $m = 0.3$)	49
Tableau IV-5 comparaisons du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($M = 0.2$ $m = 0.3$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.02$)	49
Tableau IV-6 comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.03$, $M = 0.2$ $m = 0.3$).....	50
Tableau IV-7 comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, $M = 0$ $m = 0.05$).....	51
Tableau IV.8 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($M = 0$. $m = 0.1$, $\varphi_1 = 0.01$ et $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$).....	51
Tableau IV-9 comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = 0.01$ $\varphi_2 = 0.02$ $\varphi_3 = 0.03$, $M = 0.05$ $m = 0.2$).....	52
Tableau IV-10 comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($M = 0.05$ $m = -0.2$, $\varphi_1 = 0.01$ $\varphi_2 = 0.02$ $\varphi_3 = 0.03$).....	53
Tableau IV-11 comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($M = 0.05$ $m = -0.2$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$).....	53

Nomenclature

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Unité</i>
u_e	La vitesse libre (extérieure)	(m/s)
u	Composante de la vitesse dans la direction x	(m/s)
v	Composante de la vitesse dans la direction y	(m/s)
ρ	Masse volumique	(kg/m^3)
μ	Viscosité dynamique	$(kg/m.s)$
ν	Viscosité cinématique	(m^2/s)
η	Variable de similitude	$(-)$
δ	Épaisseur de la couche limite dynamique.	(m)
δ_*	Epaisseur de déplacement	(m)
θ	Epaisseur de quantité de mouvement	(m)
H	Facteur de forme	$(-)$
δ_3	Epaisseur d'énergie cinétique	(m)
C_f	Coefficient de frottement local	$(-)$
ψ	Fonction de courant	(m^2/s)
ϕ	Fraction des nanoparticules solides	$(-)$
x	Abscisse dans le sens de l'écoulement	(m)
y	Coordonnée normale à la plaque	(m)
f	Fonction de courant adimensionnelle	$(-)$
f'	Fonction de vitesse adimensionnelle	$(-)$
σ	Conductivité électrique	(S/m)
P	Partie linéaire	$(-)$
L	Opérateur inversible	$(-)$
N	Partie non linéaire	$(-)$
R	Résidu de l'opération linéaire	$(-)$
A_n	Polynôme d'Adomian	$(-)$

M	Paramètre magnétique adimensionnel $\frac{\sigma B_0^2}{\rho_f a_0}$	(—)
Re	Nombre de Reynolds $\frac{\rho u l}{\mu}$	(—)
B	Champ magnétique variable	(T)
B_0	Intensité du champ magnétique	(T)
m	Paramètre du gradient de pression	(—)

Indices et symboles inférieures

nf	Nanofluide	(—)
f	Fluide de base	(—)
s	Nanoparticule solide.	(—)
∞	Condition à l'infini	(—)

Introduction générale

L'étude expérimentale des écoulements de fluides incompressibles à nombres de Reynolds modérés ou élevés met en évidence la formation d'une couche limite à proximité des surfaces solides. Cette zone, où les effets visqueux sont prépondérants, se distingue du fluide extérieur supposé parfait (sans viscosité). C'est au sein de cette couche mince que s'établit un important gradient de vitesse, accompagné d'efforts de cisaillement, jouant un rôle central dans les mécanismes d'échange entre le fluide et la paroi. L'analyse de cette région est donc cruciale pour comprendre le comportement dynamique de l'écoulement.

Ce mémoire s'intéresse plus précisément à l'étude dynamique d'un écoulement de type Falkner-Skan d'un nanofluide trihybride électroconducteur, soumis à un champ magnétique transversal et à un gradient de pression, au voisinage d'une plaque plane. Le fluide étudié est constitué d'un mélange d'éthylène glycol comme base fluide, enrichi en nanoparticules de cuivre (Cu), d'oxyde de cuivre (CuO) et d'argent (Ag), formant ainsi un nanofluide trihybride. Ce type de fluide présente un grand intérêt dans les systèmes de transfert thermique et de contrôle des écoulements.

Pour résoudre les équations différentielles non linéaires issues de la modélisation de ce phénomène, nous avons adopté une approche semi-analytique basée sur la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), réputée pour sa capacité à traiter des problèmes complexes sans linéarisation préalable.

Les objectifs principaux de ce mémoire sont :

- D'établir un modèle mathématique rigoureux de l'écoulement étudié.
- De résoudre ce modèle à l'aide de la méthode semi-analytique ADM.
- D'analyser l'influence de divers paramètres physiques tels que l'intensité du champ magnétique (M), la fraction volumique des nanoparticules (ϕ), leur nature (Cu, CuO, Ag) et le paramètre du gradient de pression (m), sur la distribution de la vitesse et le coefficient de frottement au niveau de la paroi.

La structure de ce mémoire est la suivante :

- Le **chapitre 1** introduit les concepts fondamentaux de la mécanique des fluides, la théorie de la couche limite, et les propriétés des nanofluides, en insistant sur leurs méthodes de préparation et leurs propriétés thermophysiques.

- Le **chapitre 2** développe la formulation mathématique du problème étudié, à savoir l'écoulement bidimensionnel, stationnaire et visqueux d'un nanofluide trihybride électroconducteur, en présence d'un champ magnétique transversal et d'un gradient de pression.
- Le **chapitre 3** est consacré à la présentation des fondements mathématiques de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), utilisée pour résoudre les équations obtenues.
- Le **chapitre 4** expose et discute les résultats obtenus, en mettant en lumière les effets du paramètre magnétique, de la fraction volumique et du type de nanoparticules, ainsi que du gradient de pression. Une comparaison avec les résultats obtenus par la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est également présentée pour valider la fiabilité de l'approche ADM.

Enfin, le mémoire se conclut par une synthèse des résultats et des perspectives de recherche futures.

CHAPITRE I
*Généralités sur la couche limite et notion
de la MDF*

Chapitre I : Généralité sur la couche limite et notion de la MDF

I.1 Notion de fluide

Un fluide est un milieu matériel entièrement déformable. D'un point de vue mécanique, la définition d'un matériau est liée à sa déformation sous contraintes. Ainsi, un fluide est défini comme « quelque chose qui coule » sous des contraintes données. Même si une déformation importante se produit, elle n'entraînera pas de perte de sa cohésion intermoléculaire. En revanche, les solides (qu'ils soient indéformables, élastiques ou plastiques) ne s'écoulent pas sous pression. La déformation d'un solide augmente avec la contrainte appliquée et, si la déformation est importante, peut provoquer la rupture du solide. En bref, un fluide est un objet qui peut prendre n'importe quelle forme. [1]

I.2 Définition d'un fluide

Les fluides diffèrent des solides par leur capacité à se déformer. Dans un milieu fluide, les interactions entre les molécules sont plus faibles, ce qui entraîne des déformations. Ainsi, le corps fluide prendra la forme du récipient qui le contient. [2]

I.2.1 Fluide incompressible

Si le volume occupé par une certaine masse de fluide ne change pas avec la pression externe, le fluide est appelé fluide incompressible. La masse volumique $\rho (\frac{kg}{m^3})$ est une constante (eau, huile, etc.). [2]

I.2.2 Fluide compressible

Lorsque le volume occupé par une masse donnée de fluide varie avec la pression extérieure, le fluide est dit compressible. La masse volumique ρ (kg/m^3) est variable (eau, huile, etc.). [2]

I.2.3 Fluide parfait

Dans un fluide parfait, les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surfaces sur lesquelles elles agissent. [2]

I.2.4 Fluide réel

Dans un fluide, il y a des forces tangentielles élémentaires qui résistent au déplacement (fluide visqueux). Un fluide réel se caractérise par une viscosité non nulle [2]

I.3 Propriétés des fluides

Chaque fluide a des propriétés qui permettent de définir ses conditions physiques à un moment spécifique. Ces caractéristiques incluent :

I.3.1 Masse volumique

La masse volumique ρ d'un fluide est la masse de l'unité de volume. Elle est exprimée

En (kg/m^3)

$$\rho = \frac{m}{v}$$

m : Masse du fluide (kg)

v : Volume du fluide (m^3)

I.3.2 Viscosité

La viscosité est la caractéristique d'un fluide qui indique sa résistance au déplacement sous l'effet de la force de cisaillement générée par son mouvement. En réalité, tous les fluides possèdent une viscosité, ce qui signifie que le déplacement d'une couche de fluide par rapport à une autre est constamment entravé par un phénomène de frottement. [3]

I.3.2.1 Viscosité dynamique

Prenons en compte deux strates de fluide adjacentes séparées par une distance Δz . La force de résistance F qui agit à la frontière entre ces deux strates est contrariante au glissement d'un stratum sur l'autre. Elle est directement proportionnelle à la différence de vitesse des couches, soit Δv , et à leur surface A , et inversement proportionnelle à Δz . [3]

Le facteur de proportionnalité μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide qui s'écrit :

$$F = A\mu \frac{\Delta v}{\Delta z}$$

$$[\mu] = \text{M L}^{-1} \text{T}^{-1}$$

I.3.2.2 Viscosité cinématique

La viscosité cinématique exprime le rapport de la viscosité dynamique μ et de la masse volumique ρ

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

I.4 Types des écoulements

I.4.1 Ecoulement parfaits

Les études sur les écoulements de fluides non visqueux que nous qualifierons d'écoulement ne sont qu'une illusion intellectuelle. Toutefois, dans certaines zones d'un flux réel, on peut simuler le comportement du fluide réel en utilisant celui d'un fluide idéal. [4]

I.4.2 Ecoulement compressible

L'écoulement compressible fait référence au comportement des fluides dont la densité varie de manière notable sous l'effet des changements de pression. Ce phénomène, particulièrement présent dans les gaz à grande vitesse ou dans des environnements soumis à des pressions extrêmes, joue un rôle fondamental dans des domaines comme l'aéronautique, l'astronautique et la turbomachinerie. Une compréhension approfondie de ces mécanismes permet aux ingénieurs d'améliorer les performances et le rendement des systèmes, notamment dans la conception d'avions rapides, de fusées et de turbines. [4]

I.4.3 Ecoulement incompressible

On dit d'un écoulement qu'il est incompressible lorsque sa masse volumique reste constante tout au long du mouvement. Dans ce cas, la dérivée particulaire du champ scalaire de densité est nulle. [5]

I.4.4 Ecoulement stable

Un **écoulement de fluide est dit stable** lorsque la vitesse du fluide demeure constante en tout point de son trajet. On considère qu'un fluide présente un **écoulement stable** si les caractéristiques de son mouvement ne varient pas au cours d'une période de temps donnée. [6]

I.4.5 Écoulement instable

En cas d'**écoulement instable**, la vitesse du fluide peut varier d'un point à un autre le long de son trajet. [6]

I.4.6 Écoulement non stationnaire

On dit un écoulement non stationnaire si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps.

I.4.7 Écoulement stationnaire

La vitesse d'une particule de fluide dépend de sa position dans l'espace, indépendamment du temps, et peut être exprimée sous la forme : $v = f(x, y)$ pour un écoulement bidimensionnel.

I.5 Définition d'un nanofluide

Un **nanofluide** est un fluide de base (généralement de l'eau, de l'huile ou de l'éthylène glycol) auquel on ajoute une faible concentration de nanoparticules solides (métaux, oxydes métalliques, carbures, etc.) ayant des tailles typiques de 1 à 100 nm. L'ajout de ces nanoparticules améliore significativement la conductivité thermique du fluide, sans trop altérer sa viscosité, ce qui le rend utile pour plusieurs applications industrielles. [7]

I.5.1 Nanofluide hybride

Un **nanofluide hybride** est un nanofluide qui contient **deux types différents de nanoparticules** dispersées simultanément dans le fluide de base. L'objectif est de combiner les avantages thermiques et mécaniques de deux matériaux distincts pour améliorer les propriétés globales du fluide, comme la conductivité thermique, la stabilité et la capacité calorifique. [8]

I.5.2 Nanofluide trihybride

Un **nanofluide trihybride** est une évolution des concepts précédents, intégrant **trois types distincts de nanoparticules** dans un fluide porteur. Cette combinaison vise à exploiter les synergies entre différents matériaux pour obtenir des performances thermiques, mécaniques et optiques supérieures à celles des nanofluides mono- ou bi-hybrides. Les recherches sur les nanofluides trihybrides sont encore récentes, mais montrent un potentiel prometteur pour les systèmes thermiques à haute performance. [9]

I.6 Théorie de la couche limite

Le concept de la théorie de la couche limite (Figure I.1) a été introduit par Prandtl en 1904, qui a conçu et qui a donné l'idée d'une couche caractéristique des fluides dans la région juste près d'une frontière solide. Il a proposé que même pour une très faible viscosité, la condition d'adhérence devait être satisfaite à la limite solide (ce qui implique que la vitesse du fluide à une frontière solide soit la même que celle de la frontière elle-même [10]). Ce concept donne naissance à la mécanique des fluides moderne [11]. Un phénomène identique appelé couche limite thermique peut être également observée dans le cas d'un transfert de chaleur entre le fluide et le solide.

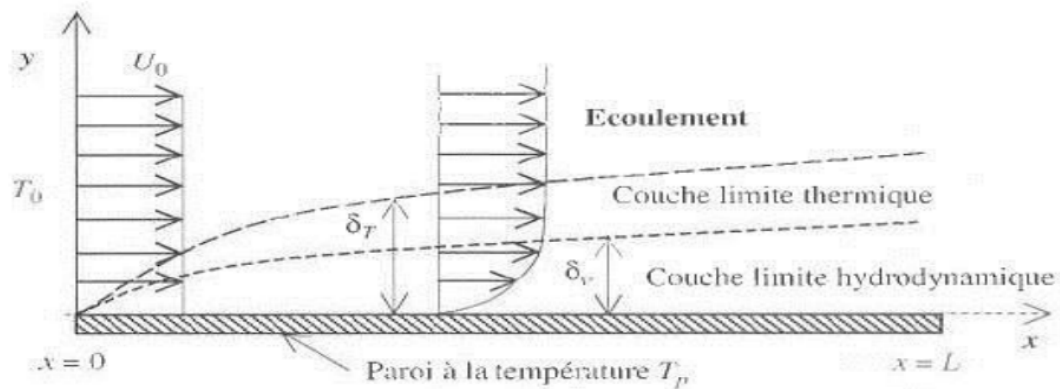


Figure I.1 la couche limite dynamique et la couche limite thermique sur une paroi plane

I.6.1 Couche limite dynamique

Dans cette couche (Figure I.2), des forces de frottement apparaissent et ralentissent l'écoulement, en particulier près de la paroi où la vitesse du fluide devient nulle. [12]

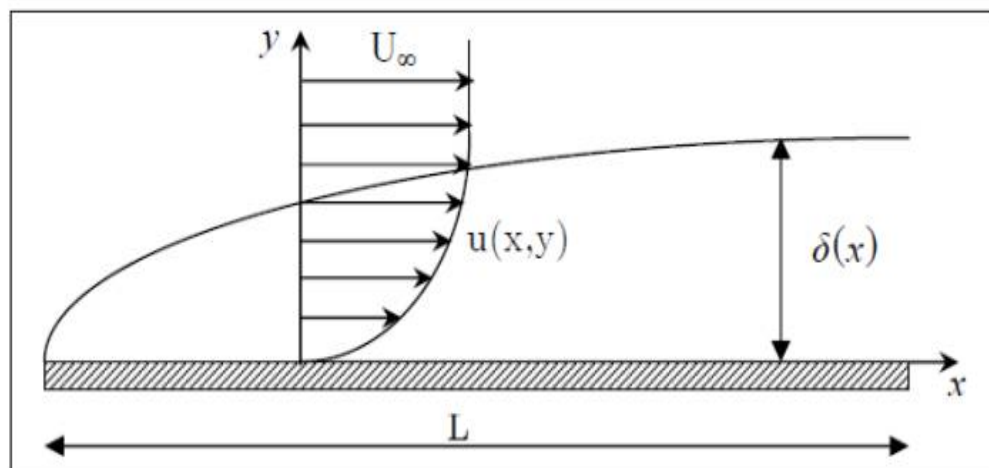


Figure I.2 Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi

I.6.2 Couche limite thermique

Lorsqu'un fluide à une température T_∞ s'écoule le long d'une paroi dont la température est T_p des **échanges de chaleur** se produisent (Figure I.3). Les particules du fluide se réchauffent ou se refroidissent au contact de la paroi, ce qui entraîne la formation d'un **gradient thermique** dans la zone proche de celle-ci. [12]

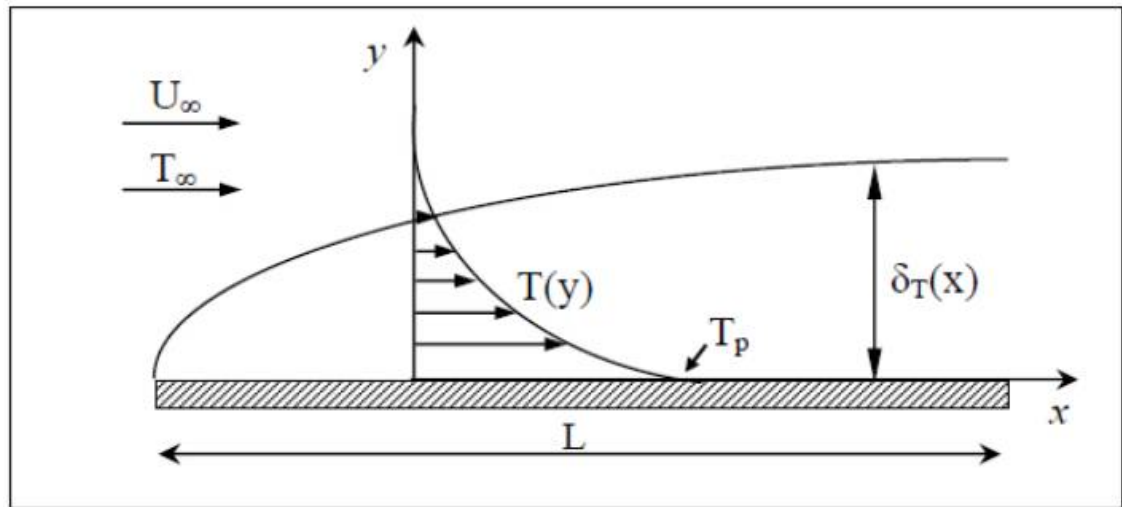


Figure I.3 Couche limite thermique sur une plaque plane [13]

I.7 Définition de la couche limite

La couche limite fait référence à la zone d'interface formée entre le fluide et la surface solide en raison de l'influence de la viscosité du fluide lorsque le fluide et la surface solide sont en mouvement relatif. Il joue un rôle essentiel en mécanique des fluides, notamment en aérodynamique, en dynamique des fluides, ainsi qu'en météorologie et en océanographie.

Cette région particulière de l'écoulement est caractérisée par le fait que les forces visqueuses y sont du même ordre de grandeur que les forces d'inertie, alors que ce n'est plus le cas à des distances plus grandes de la paroi. Dans ces régions éloignées, l'écoulement est appelé écoulement eulérien car les effets de viscosité deviennent négligeables.

En revanche, un fluide parfait, par définition, n'a ni viscosité (coefficient de Lamé nul) ni conduction thermique.

L'épaisseur de la couche limite est généralement définie comme la distance entre la paroi et le point où les effets visqueux ne sont plus significatifs :

$$U(\delta(x)) = 0.99U_e$$

Avec :

U_e : La vitesse uniforme de l'écoulement sans obstacle.

$\delta(x)$: L'épaisseur de la couche limite en fonction de x .

Le profil de vitesse au sein de la couche limite dépend de sa nature laminaire ou turbulente (**Figure I.4**). L'endroit où se produit la transition entre l'écoulement laminaire et l'écoulement turbulent dépend du nombre de Reynolds et de la géométrie de l'écoulement (profil) [14]

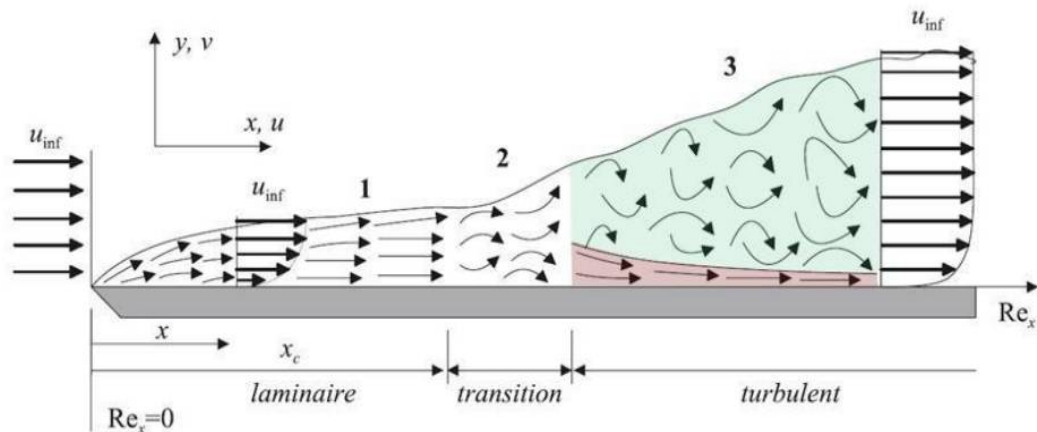


Figure I.4 Écoulement de couche limite sur une plaque plane

I.8 Description de la couche limite

Lorsqu'un fluide réel s'écoule le long d'une paroi fixe, la vitesse du fluide est nulle au contact de cette paroi. En revanche, loin de l'obstacle, la vitesse devient égale à celle de l'écoulement non perturbé. Ainsi, le long d'une ligne perpendiculaire à la paroi, la vitesse varie inévitablement de zéro jusqu'à une valeur maximale. Cette variation dépend de la viscosité du fluide, qui engendre des frottements entre les couches adjacentes : la couche la plus lente freine la plus rapide, tandis que celle-ci tend à accélérer la première.

Une viscosité élevée homogénéise les vitesses entre les couches du fluide. À l'inverse, dans un fluide faiblement visqueux, les couches interagissent moins entre elles : la vitesse propre à l'écoulement non perturbé persiste plus près de la paroi, et les variations de vitesse se concentrent dans une mince zone appelée couche limite.

Dans le cas d'un fluide très visqueux, il est nécessaire d'utiliser les équations complètes régissant l'écoulement des fluides visqueux. En revanche, pour un fluide peu visqueux, on peut simplifier l'analyse : des équations réduites peuvent être appliquées dans la couche limite, avec l'appui de résultats expérimentaux, tandis que les équations du fluide parfait s'appliquent en dehors de cette zone, fournissant ainsi les conditions aux limites du problème.

Ce n'est donc pas la viscosité seule qui détermine le comportement de l'écoulement, mais plutôt un paramètre sans dimension : le nombre de Reynolds. Ce dernier exprime le rapport entre les forces d'inertie et les forces de frottement. Il permet de prédire le comportement de l'écoulement : on peut, par exemple, obtenir des effets similaires à une viscosité plus élevée en réduisant la vitesse du fluide ou la taille de l'obstacle. [3]

I.9 Paramètres caractéristiques de la couche limite

I.9.1 Epaisseur de la couche limite δ

On définit conventionnellement l'épaisseur de la couche limite δ (Figure I.5) la distance à la paroi telle que :

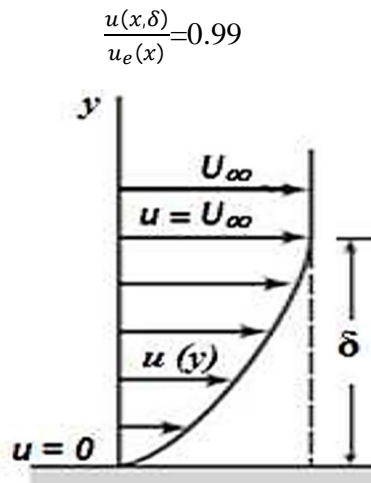


Figure I.5 Épaisseur conventionnelle de la couche limite

I.9.2 Epaisseur de déplacement δ_1

La diminution du débit massique à travers une section de la couche limite, comparée au cas d'un écoulement de fluide parfait et incompressible, est définie par l'épaisseur de déplacement δ_1 .

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy$$

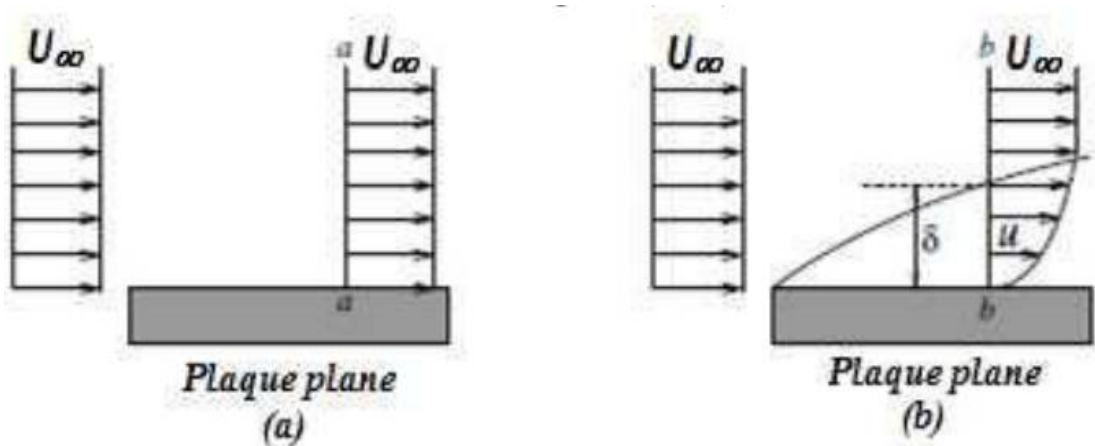


Figure I.6 Écoulement sur une plaque plane (a) pour un fluide parfait (b) pour un fluide réel

I.9.3 Epaisseur de quantité de mouvement

La perte de quantité de mouvement dans la couche limite (Figure I.7) par rapport à un écoulement de fluide parfait est caractérisée par l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 .

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{U}{U_e} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy$$

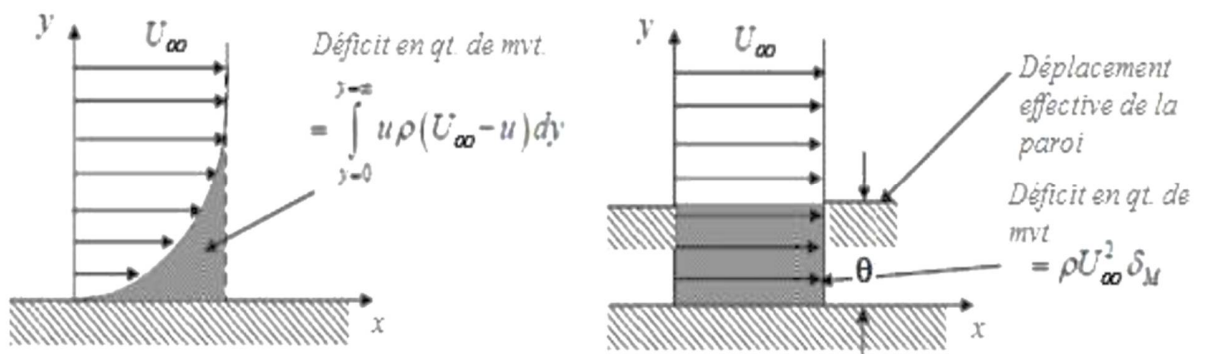


Figure I.7 Epaisseur de déplacement de quantité de mouvement de couche limite

I.9.4 Le facteur de forme H

On caractérise aussi le facteur de forme comme étant le quotient des deux derniers paramètres : $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, ce qui permet d'expliquer la progression de la couche limite. [15]

I.10 Applications de la théorie de la couche limite

La théorie de la couche limite, introduite par Ludwig Prandtl en 1904, constitue un fondement majeur en mécanique des fluides. Elle permet de simplifier l'étude des écoulements visqueux en décomposant le domaine d'écoulement en deux zones : une fine région proche de la

paroi, où les effets visqueux sont dominants (la couche limite), et une région extérieure, où l'écoulement peut être considéré comme parfait. Cette approche a révolutionné la compréhension des phénomènes de transfert et a ouvert la voie à de nombreuses applications dans l'ingénierie moderne :

I.10.1 Aérodynamique et transports

Concernant l'aéronautique, la connaissance de face à la théorie de la couche limite est d'une importance critique. Celle-ci permet d'estimer de manière fiable la traînée visqueuse et de prédire le décollement de la couche limite qui peut entraîner une perte de portance. De plus, il est également capital de connaître si la couche est laminaire ou turbulente, donc d'utiliser des mesures telles pour être en mesure d'optimiser l'envergure d'une aile et de diminuer la consommation d'énergie parmi les aéronefs. [16]

I.10.2 Transfert thermique

La couche limite thermique occupe un rôle important dans les échanges de chaleur entre une surface solide et un fluide. Cette épaisseur impacte le gradient de température et donc l'efficacité de l'échange thermique. La théorie dresse un modèle qui permet à ce qu'on y puisse lire une correspondance comme le nombre de Nusselt en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl. Elle se retrouve très couramment dans la conception des échangeurs de chaleur, des radiateurs, des systèmes de refroidissement industriel, [17]

I.10.3 Génie chimique et procédés

Dans les procédés de génie chimique, la couche limite de concentration affecte les mécanismes de transfert de masse, en particulier dans les systèmes multiphasiques. Elle intervient dans les opérations unitaires telles que l'absorption, l'extraction liquide-liquide ou la catalyse hétérogène. Une couche limite mince améliore la diffusion des espèces, ce qui est recherché dans les procédés à haute efficacité. [18]

I.10.4 Micro fluidique et MEMS

À l'échelle microscopique, notamment dans les dispositifs de micro fluidique et les systèmes micro-électromécaniques (MEMS), les effets visqueux prédominent. L'analyse de la couche limite devient alors indispensable pour prédire l'écoulement des fluides dans des canaux de dimensions micrométriques. Cela permet le développement de micropompes, de microcapteurs et de systèmes de refroidissement miniaturisés. [19]

I.10.5 Applications aux nanofluides trihybrides

Dans les recherches récentes, les nanofluides (et plus particulièrement les nanofluides trihybrides) sont étudiés pour leurs propriétés thermophysiques améliorées. L'écoulement de ces fluides sur des surfaces chauffées, telles que des plaques planes, nécessite une modélisation basée sur la théorie de la couche limite. Celle-ci permet de prédire le comportement thermique et hydrodynamique du fluide contenant plusieurs types de nanoparticules (par exemple : Cu-Al₂O₃-TiO₂). Les équations de la couche limite sont adaptées pour intégrer les effets combinés de conduction, convection et dispersion des particules. Ces études sont particulièrement pertinentes pour les applications dans le refroidissement électronique, les systèmes solaires thermiques et les échangeurs de chaleur compacts. [20]

I.11 Avantages et limites de la théorie de la couche limite

La théorie de la couche limite constitue une avancée majeure dans l'analyse des écoulements visqueux. Grâce à ses hypothèses simplificatrices, elle a permis de rendre abordable la résolution des équations complexes de la dynamique des fluides dans les régions proches des parois. Cependant, comme toute modélisation, elle présente des avantages mais également des limitations, particulièrement dans des cas complexes comme ceux impliquant des nanofluides trihybrides.

I.11.1 Avantages de la théorie de la couche limite

- **Simplification mathématique significative** : En négligeant certains termes des équations de Navier-Stokes dans la direction normale à la paroi, cette théorie permet de résoudre plus facilement les problèmes d'écoulement visqueux, tout en restant fidèle à la réalité physique dans de nombreux cas pratiques. [16]
- **Applications larges et robustes** : Elle s'applique à une grande variété de configurations industrielles : plaques planes, cylindres, ailes, conduites, etc., tant pour les écoulements laminaires que turbulents.
- **Prédictions précises pour les écoulements proches des surfaces** : Elle fournit des résultats fiables sur les profils de vitesse, le frottement pariétal et le transfert de chaleur en régime laminaire (Blasius, Pohlhausen, Falkner-Skan,).
- **Utilité dans le dimensionnement des systèmes** : Les résultats analytiques ou semi-analytiques basés sur cette théorie permettent de calculer des grandeurs pratiques comme

le coefficient de frottement, le nombre de Nusselt, etc., utiles pour la conception de dispositifs thermiques et hydrodynamiques.

I.11.2 Inconvénients et limites de la théorie de la couche limite

- **Validité restreinte à certaines conditions** : La théorie repose sur des hypothèses spécifiques (écoulement à grand nombre de Reynolds, géométrie simple, absence de recirculation), ce qui limite son application dans des configurations complexes ou avec des écoulements fortement tridimensionnels.
- **Difficulté à modéliser les régimes turbulents avec précision** : Bien que des modèles empiriques existent pour la turbulence, la description exacte de la couche limite turbulente reste un problème non résolu théoriquement. Les équations de Prandtl sont donc moins performantes en régime turbulent sans recours à des modèles additionnels. [16]
- **Néglige certains effets physiques complexes** : La théorie classique ne prend pas directement en compte les effets de variation de propriétés thermophysiques, les effets de glissement (slip) aux parois, ni les forces supplémentaires comme le magnétisme, la tension superficielle ou la diffusion thermophorétique, qui peuvent être significatifs dans le cas des nanofluides. [21]
- **Adaptation nécessaire pour les nanofluides trihybrides** : Les propriétés non homogènes et la complexité du comportement thermique des nanofluides contenant plusieurs types de nanoparticules nécessitent une reformulation de la théorie classique. L'introduction de termes supplémentaires dans les équations de la couche limite devient indispensable pour modéliser correctement les transferts thermiques et les interactions particules-fluide. [9]

I.12 Définition de champ magnétique

Le champ magnétique est une grandeur ayant le caractère d'un champ vectoriel, c'est-à-dire caractérisée par la donnée d'une norme, d'une direction et d'un sens, définie en tout point de l'espace et permanents.

La présence du champ magnétique se traduit par l'existence d'une force agissant sur les charges électriques en mouvement (force de Lorentz) et par divers effets affectant certains matériaux (diamagnétisme, paramagnétisme, ferromagnétisme, etc...). La grandeur qui détermine l'interaction entre un matériau et un champ magnétique et la susceptibilité magnétique.

Les différentes sources de champ magnétique sont les aimants permanents, le courant électrique (c'est-à-dire le déplacement d'ensemble de charges électriques), ainsi que la variation temporelle d'un champ électrique (par induction électromagnétique).[9]

I.12.1 Effet magnus

Phénomène naturel exploité par Norsepower est un principe dénommé << effet Magnus », du nom du physicien allemand Heinrich Gustav Magnus, lequel a été le premier à décrire mathématiquement en 1852 le courant d'air qui entoure un objet en rotation, comme une balle de tennis par exemple.

La force de portance de l'effet Magnus dans ce qu'on appelle aujourd'hui un rotor Flettner a été adoptée comme mode de propulsion principal par le Buckau, un navire à rotors qui a traversé l'Atlantique en 1926. Une partie de la paternité de cette technologie revient également à l'ingénieur Finlandais Sigurd Savonius qui, en 1924, a créé et donné son nom à un rotor doté d'un cylindre ouvert à l'écoulement de l'air.[22]

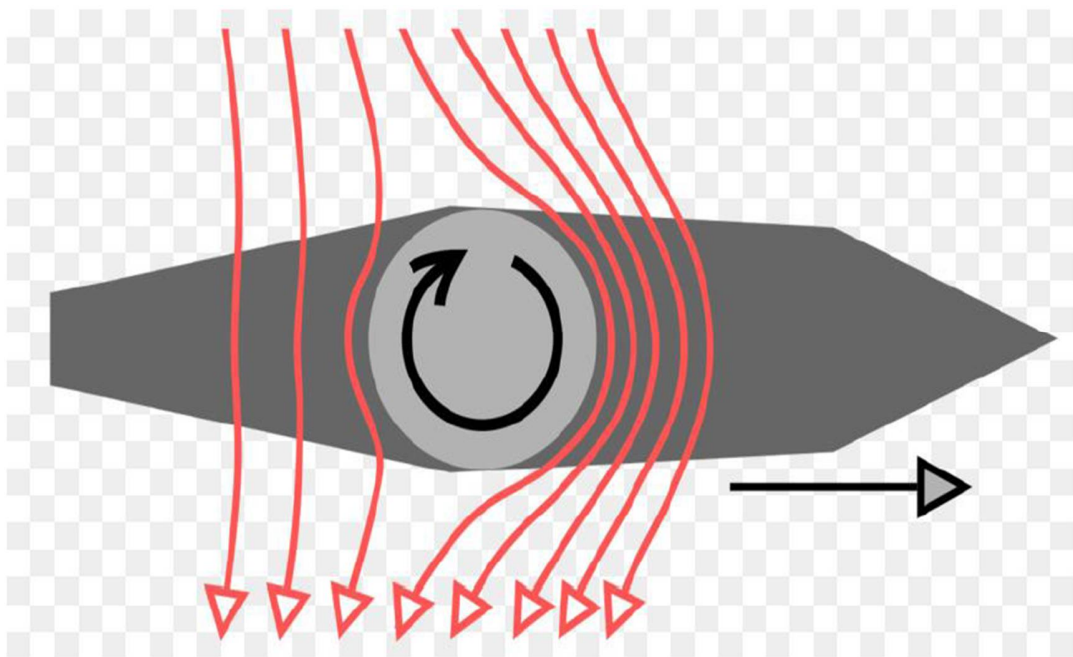


Figure I.8 Rotor Flettner sur un navire [22]

D'autre part, les éoliennes restent une application directe de l'effet Magnus; citons, entre autres, l'éolienne de Madaras et l'éolienne à rotors de Flettner. Ces éoliennes sont basées sur

l'utilisation de l'effet MAGNUS. Le système est constitué de 2 cylindres rotatifs, dès qu'il y a du vent, la rotation de chaque cylindre est assurée par un moteur à courant continu.



Figure I.9 Prototypé d'éolienne à rotors de Flettner

I.13 Introduction à la magnétohydrodynamique

La magnétohydrodynamique (MHD), également désignée sous le nom d'hydromagnétisme, est une branche de la physique qui étudie le comportement des fluides électroconducteurs en interaction avec un champ électromagnétique. Ces fluides, capables de transporter le courant électrique, présentent souvent aussi une bonne conductivité thermique. À l'inverse, les matériaux isolants, qui ne permettent pas le passage du courant, se distinguent généralement par leur faible capacité à conduire la chaleur. La MHD trouve des applications variées, notamment dans l'étude des plasmas, de l'eau de mer ou encore du noyau externe terrestre.

Le développement de cette discipline a connu un essor significatif durant la première moitié du XXe siècle, en particulier grâce aux travaux pionniers de Hannes Alfvén, dont les contributions aux phénomènes astrophysiques ont jeté les bases théoriques de la MHD moderne. Depuis, la MHD s'est imposée comme un cadre incontournable pour l'analyse de nombreux systèmes naturels et technologiques où les effets électromagnétiques sont non négligeables.

Pour qu'un modèle MHD tient compte de manière réaliste du comportement d'un fluide conducteur, il est essentiel que les propriétés physiques du milieu respectent les hypothèses fondamentales de la théorie. Parmi celles-ci, l'influence prédominante du champ magnétique sur la dynamique du fluide est centrale : les forces électriques – qu'elles soient de nature électromagnétique ou électrostatique – sont en général négligées, car le fluide est supposé localement neutre (bien que des courants électriques puissent y subsister). La MHD repose donc sur une extension des équations classiques de l'hydrodynamique, enrichies par les forces de Laplace, générées par l'interaction entre les courants électriques et le champ magnétique.

L'évolution du champ électromagnétique dans un tel système est régie par les équations de Maxwell, tandis que la loi d'Ohm généralisée permet de relier la densité de courant aux mouvements du fluide et au champ magnétique. Ce couplage permet de fermer le système d'équations et de modéliser de manière cohérente les phénomènes étudiés.

Dans le cadre de ce travail, l'accent sera mis sur un domaine spécifique de la MHD : l'étude de l'écoulement laminaire d'un nanofluide trihybride électroconducteur, sous l'effet combiné d'un champ magnétique transversal et d'un gradient de pression externe, en s'appuyant sur une modélisation mathématique rigoureuse et des méthodes de résolution semi-analytiques [22].

I.13.1 Différentes modélisation de la MHD

La magnétohydrodynamique (MHD) se décline en plusieurs modèles théoriques, choisis en fonction du niveau de complexité requis par le phénomène étudié. Parmi les formulations les plus répandues figurent les modèles dits idéal et résistif [22]. Le choix entre ces modèles repose principalement sur la valeur du nombre de Reynolds magnétique Rm , un paramètre qui évalue le rapport entre les effets de convection et ceux de diffusion magnétique dans un fluide conducteur.

Le modèle de **MHD idéale** s'applique aux régimes où Rm est élevé. Dans ce cadre, le fluide est supposé parfaitement conducteur, c'est-à-dire que la résistivité électrique est négligeable. Ce modèle, le plus simplifié, est particulièrement adapté à la modélisation des plasmas hautement ionisés rencontrés dans les milieux astrophysiques ou dans les dispositifs de confinement magnétique tels que les tokamaks. Il repose sur un ensemble d'équations comprenant l'équation de continuité, les équations de conservation de la quantité de mouvement, les équations de Maxwell (dans une forme simplifiée sans champ électrique), et les lois de la thermodynamique.

Le traitement du flux thermique s'appuie généralement sur des hypothèses adiabatiques ou isothermes. C'est cette version idéale de la MHD qui constitue le cadre théorique du présent travail.

Le modèle de **MHD résistive**, quant à lui, est adapté aux situations où le nombre de Reynolds magnétique est faible. Ici, la conductivité électrique n'est plus supposée infinie, et la résistance du fluide à la diffusion magnétique est prise en compte. Cela engendre des effets de diffusion électronique significatifs, pouvant entraîner des modifications de la structure topologique du champ magnétique, notamment la reconnexion des lignes de champ.

Au-delà de ce choix fondamental entre MHD idéale et résistive, il est également essentiel de considérer la viscosité du fluide, notamment à travers le **nombre de Hartmann**, qui exprime le rapport entre les forces magnétiques et les forces visqueuses dans le système. Ce paramètre joue un rôle clé dans la compréhension du comportement de l'écoulement dans des configurations confinées ou canalisées.

En fonction des phénomènes physiques supplémentaires à prendre en compte, les modèles de base de la MHD peuvent être enrichis pour mieux représenter les réalités expérimentales. Parmi ces extensions, on peut citer :

- **La MHD-Hall**, qui devient pertinente lorsque la longueur d'inertie des ions est comparable aux dimensions caractéristiques du système. Dans ce régime, le comportement différencié des ions et des électrons ne peut être négligé. L'inclusion de l'effet Hall dans la loi d'Ohm modifie l'équation d'induction du champ magnétique, introduisant une échelle spatiale spécifique et rendant le système non autosimilaire. Il est parfois aussi nécessaire d'y intégrer le gradient de pression électronique.
- **La MHD bi-fluide**, qui prolonge encore cette description en prenant en compte l'inertie des électrons. Ce modèle devient essentiel à des échelles où l'accélération des électrons influence significativement la dynamique du fluide, rompant l'hypothèse d'équilibre électrostatique.
- **La MHD de type Hartmann**, utilisée pour modéliser les écoulements visqueux dans des canaux soumis à un champ magnétique. Elle trouve des applications concrètes dans la conception de dispositifs tels que les tuyères magnétohydrodynamiques.

Ces diverses variantes permettent ainsi d'adapter la modélisation MHD aux exigences spécifiques des domaines d'application, qu'il s'agisse d'astrophysique, de fusion contrôlée, ou d'ingénierie des fluides complexes [23].

I.13.2 Description d'un fluide conducteur

Une part considérable de l'univers est constituée de matière à l'état fluide possédant des propriétés conductrices de l'électricité [23]. Ce phénomène ne se limite pas aux étoiles, véritables sphères de plasma ionisé, ni aux autres corps célestes d'intérêt astrophysique, qui semblent éloignés des préoccupations humaines. Il concerne également notre planète Terre, vaste structure métallique en majorité liquide en son noyau, dont la surface est recouverte en grande partie par des océans d'eau salée, elle-même un excellent conducteur électrique.

Dans le contexte plus immédiat de notre civilisation industrielle, les fluides conducteurs sont omniprésents. En effet, de nombreux matériaux métalliques utilisés dans les processus de fabrication passent par une phase liquide durant leur transformation. Ainsi, la conductivité électrique devient une caractéristique essentielle dans de nombreux procédés industriels [24].

I.14 Définition de l'éthylène glycol

Le glycol éthylène, connu sous le nom chimique de 1,2-éthanediol ($C_2H_6O_2$), est un liquide incolore, inodore et visqueux, appartenant à la catégorie des glycols. Il se caractérise par la présence de deux groupes hydroxyles (-OH) sur une chaîne carbonée de deux atomes, ce qui lui confère des propriétés de solvant polaire et de fluide caloporteur. Sa densité est d'environ 1,11 g/cm³, et son point d'ébullition élevé ($\approx 197^\circ C$) ainsi que sa faible pression de vapeur en font un composé stable dans des environnements thermiques à des températures modérées à élevées [24]. Sur le plan thermophysique, le glycol éthylène présente une bonne stabilité chimique, une viscosité supérieure à celle de l'eau, et une capacité calorifique qui en fait un fluide largement utilisé dans les applications de transfert thermique. Sa solubilité totale dans l'eau permet la formulation de mélanges binaires (eau-glycol éthylène) utilisés pour ajuster les propriétés thermiques selon les besoins de l'application. Dans le domaine des nanofluides, le glycol éthylène est souvent utilisé comme fluide de base pour la dispersion de nanoparticules solides (métaux, oxydes métalliques, carbures, etc.). Il contribue non seulement à améliorer la stabilité colloïdale de la suspension, mais aussi à réduire l'agglomération des nanoparticules grâce à sa polarité et sa viscosité [25]. Cette stabilité est essentielle dans les systèmes de transfert de chaleur intensifs, où les performances thermiques des nanofluides dépendent fortement de la qualité de la dispersion.[26]

I.15 Applications de l'éthylène glycol

L'éthylène glycol est largement utilisé dans divers domaines industriels en raison de ses propriétés thermophysiques stables, de sa solubilité dans l'eau, et de sa capacité à fonctionner à haute température. Sa principale application repose sur son rôle de fluide caloporteur, utilisé seul ou en mélange avec l'eau pour former des solutions antigel dans les circuits de transfert thermique.

Dans le secteur automobile, il est utilisé comme liquide de refroidissement dans les moteurs à combustion interne, grâce à son point d'ébullition élevé et sa capacité à éviter le gel à basse température [24]. En génie climatique, l'éthylène glycol entre dans la composition des circuits fermés de chauffage, ventilation et climatisation (HVAC), ainsi que dans les systèmes de géothermie pour le transport de la chaleur dans les pompes à chaleur.

Dans les applications industrielles, il est utilisé dans les échangeurs de chaleur, les systèmes de refroidissement de procédés chimiques, et les systèmes cryogéniques, où un contrôle thermique précis est essentiel. Sa compatibilité avec une large gamme de matériaux, combinée à sa stabilité chimique, en fait un fluide idéal pour une utilisation prolongée dans les systèmes fermés [26].

En recherche et développement, notamment dans le domaine des nanofluides, l'éthylène glycol est couramment choisi comme fluide de base pour la suspension de nanoparticules métalliques ou diélectriques. Son utilisation permet de maintenir la stabilité de la suspension tout en améliorant la conductivité thermique du fluide global, ce qui le rend adapté aux applications nécessitant une dissipation thermique efficace, comme les systèmes électroniques, les panneaux solaires, ou encore les échangeurs thermiques miniaturisés [25].

CHAPITRE II

Etude dynamique de l'écoulement d'un nanofluide trihybride à travers une p plane

Chapitre II : Etude du champ dynamique dans un écoulement de nanofluides trihybrides à travers une paroi plane

II.1 Formulation mathématique

Considérons un écoulement bidimensionnel, laminaire et stationnaire d'un **nanofluide visqueux, électriquement conducteur et incompressible** s'écoulant le long d'une plaque plane. Ce fluide est soumis à un **champ magnétique transversal** B , appliqué perpendiculairement à la surface de la plaque, soit selon l'axe y . Par ailleurs, l'écoulement est également affecté par un **gradient de pression axial**, agissant dans la direction de l'écoulement principal. Le mouvement de la couche limite est entraîné par un **écoulement uniforme**, dont la vitesse en dehors de la couche limite est notée u_e .

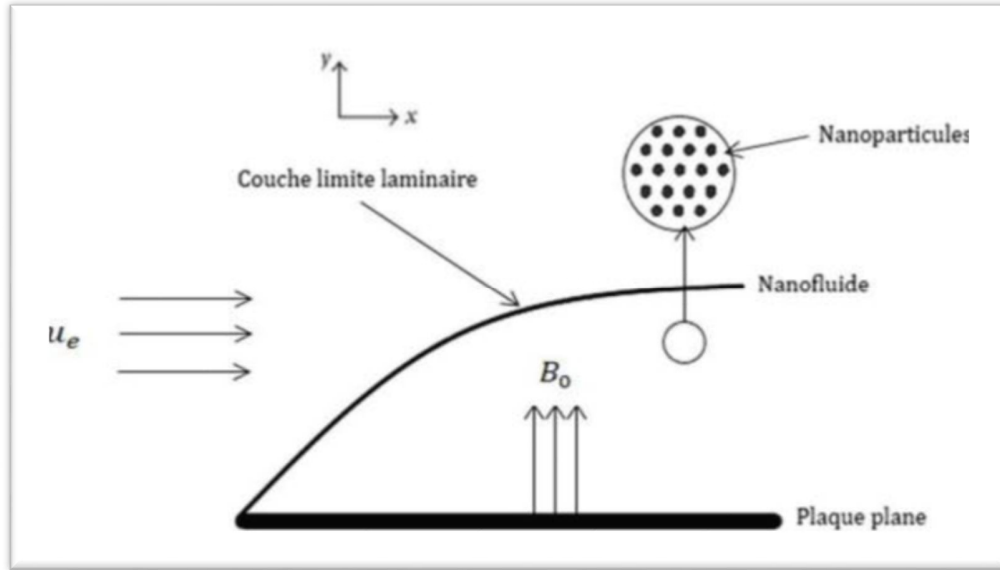


Figure II.1 Géométrie de l'écoulement étudié (écoulement à travers une paroi plane)

Compte tenu de ces hypothèses, **le système d'équations dynamiques régissant l'écoulement dans la couche limite** peut être formulé comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (II.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu_{thnf} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma_f}{\rho_{thnf}} B^2 (u_e - u) \quad (II.2)$$

Où u et v représentent respectivement les **composantes de la vitesse** selon les directions x (axiale) et y (normale). Les paramètres ν_{thnf} et ρ_{thnf} désignent respectivement la **viscosité cinématique** et la **masse volumique** du nanofluide trihybride, tandis que σ_f correspond à sa **conductivité électrique du fluide de base**, supposée constante dans l'ensemble du domaine d'écoulement

Le terme $\frac{\sigma_f}{\rho_{thnf}} B^2 (u_e - u)$ dans l'équation (II.2) représente la force de Lorentz, résultant de l'interaction entre le mouvement du fluide et le champ magnétique transversal appliqué. Étant donné que le nombre de Reynolds magnétique est supposé très faible, l'induction magnétique générée par le fluide en mouvement est négligée.

Les équations (II.1) et (II.2) doivent être complétées par les conditions aux limites suivantes :

$$u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0, u(x, \infty) = u_e \quad (\text{II.3})$$

Afin d'obtenir une solution auto-similaire des équations (II.1) et (II.2), en accord avec les conditions aux limites (II.3), on suppose que le champ magnétique appliqué et la vitesse libre de l'écoulement varient spatialement selon les lois suivantes :

$$u_e(x) = a_0 x^m, B(x) = B_0 x^{\frac{m}{2}}$$

Où B_0 et a_0 sont des constantes positives, et m est un paramètre de variation caractérisant l'écoulement.

Pour simplifier l'analyse et satisfaire l'équation de continuité automatiquement, il est utile d'introduire une fonction de courant $\psi(x; y)$, définie de sorte que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.4})$$

Grâce à l'introduction de la fonction de courant $\psi(x; y)$, l'**équation de continuité est automatiquement vérifiée**. En revanche, l'**équation de la quantité de mouvement** qui en découle fait apparaître des **dérivées partielles d'ordre élevé**, allant jusqu'au **troisième ordre**, ce qui complique son traitement analytique direct.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \sigma_{thnf} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\sigma_f}{\rho_{thnf}} B^2 (u_e - u) + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (\text{II.5})$$

Les trois conditions aux limites écrites pour ψ sont :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = u_e \quad (\text{II.6})$$

On peut mettre : $\frac{u}{u_e} = f'$: vitesse adimensionnelle.

Et on peut utiliser comme variable de similitude :

$$\eta = y \left(\frac{u_e}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.7})$$

Par ailleurs, si la **composante axiale de la vitesse** s'exprime sous la forme $u = u_e f'(\eta)$, où f' désigne la dérivée d'une fonction de similarité par rapport à la variable adimensionnée η , alors la **fonction de courant** associée doit être définie comme suit :

$$\psi(x; y) = (u_e x \nu)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \quad (\text{II.8})$$

On a :

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = a_0 x^m * m a_0 x^{m-1} = m \left(\frac{u_e^2}{x} \right) \quad (\text{II.9})$$

Et :

$$\frac{\sigma_{tnf}}{\rho_{tnf}} B^2 (u_e - u) = \frac{\nu_f B_0^2 x}{B \rho_f a_0} \frac{u_e^2}{x} (1 - f') \quad (\text{II.10})$$

On a également :

$$\nu_{tnf} = \frac{\mu_{tnf}}{\rho_{tnf}} \quad (\text{II.11})$$

On considère l'expression de la viscosité dynamique du nanofluide trihybride μ_{tnf} donnée par :

$$\mu_{tnf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi_1)^{2.5} \cdot (1 - \varphi_2)^{2.5} \cdot (1 - \varphi_3)^{2.5}}$$

Afin de simplifier l'écriture, on pose :

$$A = (1 - \varphi_1)^{2.5} \cdot (1 - \varphi_2)^{2.5} \cdot (1 - \varphi_3)^{2.5}$$

Dès lors, l'expression devient :

$$\mu_{tnf} = \frac{\mu_f}{A} \quad (\text{II.12})$$

La masse volumique du nanofluide du nanofluide trihybride est donnée par l'expression suivante :

$$\rho_{thnf} = \rho_f \left[(1 - \varphi_1) \left((1 - \varphi_2)(1 - \varphi_3) + \varphi_3 \frac{\rho_{s3}}{\rho_f} \right) + \varphi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \right] + \varphi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f}$$

Par ailleurs, pour faciliter la manipulation analytique, on pose :

$$B = \left[(1 - \varphi_1) \left((1 - \varphi_2)(1 - \varphi_3) + \varphi_3 \frac{\rho_{s3}}{\rho_f} \right) + \varphi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \right] + \varphi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f}$$

L'équation s'écrit alors plus simplement sous la forme :

$$\rho_{thnf} = \rho_f \cdot B \quad (\text{II.12})$$

- L'indice f désigne le fluide de base.
- L'indice S_1 désigne les nanoparticules solides (Cuivre, Cu).
- L'indice S_2 désigne les nanoparticules solides (Oxyde de cuivre, CuO).
- L'indice S_3 désigne les nanoparticules solides (Argent).
- L'indice $thnf$ désigne nanofluide trihybride.
- φ_1 : fraction volumique des nanoparticules 1 (Cu).
- φ_2 : fraction volumique des nanoparticules 2 (CuO).
- φ_3 : fraction volumique des nanoparticules 3 (Argent).

Substituons ces expressions dans l'équation (II.5), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_e^2}{x} f' \right) \left[m f' + \frac{1}{2} \eta (m - 1) f'' \right] \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_e v}{x} \right)^{\frac{1}{2}} ((m + 1) f + \eta f' (m - 1)) \right] \left[u_e f'' \left(\frac{u_e}{vx} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & = a_0 x^m m a_0 \frac{x^m}{x} + \frac{\mu_f}{\rho_f B} u_e f''' \frac{u_e}{vx} + \frac{v_f B_0^2 x}{B \rho_f a_0} \frac{u_e^2}{x} (1 - f') \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient l'équation gouvernant l'écoulement de la couche limite MHD stationnaire sur une plaque plane, en présence d'un gradient de pression axial, pour un nanofluide trihybride visqueux et incompressible. Elle s'écrit comme suit :

$$\frac{1}{AB} f''' + \frac{1}{2} (m + 1) f f'' + m [1 - (f')^2] + \frac{M}{B} (1 - f') = 0 \quad (\text{II.13})$$

Où :

$$M = \frac{v_f B_0^2 x}{\rho_f a_0}$$

M : est le paramètre magnétique adimensionnel.

Les conditions aux limites pour $f(\eta)$ sont obtenues à partir de celles définies pour la fonction de courant ψ

Donc on obtient :

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (\text{II.14})$$

Cas particuliers :

Si on prend $M = 0, \quad m = 0, \quad \varphi = 0$ l'équation (II.13) devient :

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (\text{II.15})$$

C'est l'équation de Blasius pour un écoulement classique.

CHAPITRE III :
*Méthode de décomposition d'Adomian et
Application*

Chapitre III : Méthode de décomposition d'Adomian et Application

III.1 Introduction

Pendant de nombreuses années, les formulations mathématiques utilisées pour modéliser les phénomènes physiques ont été principalement linéaires. Cette préférence s'expliquait par des raisons pratiques, notamment parce que les outils d'analyse les plus performants sont traditionnellement conçus pour le traitement de systèmes linéaires. Toutefois, ces approches présentent une limitation majeure : elles ne permettent pas de rendre compte de certaines propriétés non linéaires fondamentales, pourtant omniprésentes dans les phénomènes naturels.

Afin de traiter les équations non linéaires qui gouvernent la majorité des processus physiques réels, le recours aux méthodes numériques s'est imposé. Les approches classiques, telles que les méthodes de discrétisation et de linéarisation, sont parmi les plus anciennes et les plus couramment utilisées. Néanmoins, ces techniques peuvent altérer la structure intrinsèque du phénomène étudié.

Dans ce chapitre, nous adopterons la méthode de décomposition d'Adomian, qui se distingue par sa capacité à fournir des solutions plus fidèles à la réalité physique des modèles. Contrairement aux méthodes classiques, elle ne requiert ni discrétisation, ni linéarisation, ce qui permet de préserver la nature non linéaire des équations d'origine. Cela répond à un objectif fondamental de la modélisation physique : représenter les phénomènes sans dénaturer leur comportement réel.

La méthode de décomposition a été initialement introduite par le physicien américain George Adomian. Toutefois, c'est grâce aux travaux du professeur Yves Cherruault, directeur du laboratoire Medimat, que les fondements théoriques et les applications pratiques de cette méthode ont été solidement établis. [27]

III.2 Principe général de la méthode

La méthode de décomposition d'Adomian est une technique semi-analytique puissante utilisée pour la résolution d'équations différentielles, en particulier lorsqu'elles présentent des non-linéarités complexes. Elle repose sur l'idée de décomposer l'opérateur non linéaire en une série infinie, dont les termes — appelés polynômes d'Adomian — sont calculés de manière récursive.

Chapitre III : Méthode de décomposition d'Adomian et Application

Pour illustrer le principe fondamental de cette méthode, considérons l'équation fonctionnelle suivante :

$$G = g(x) \quad (\text{III.1})$$

Où g est une fonction donnée, et G désigne un **opérateur différentiel non linéaire** défini sur un espace de Hilbert H dans lui-même. Cet opérateur G peut contenir à la fois des **termes linéaires** et **non linéaires**, ce qui reflète la complexité des phénomènes modélisés

G = des termes linéaires + des termes non linéaires.

$$G = P + N \quad (\text{III.2})$$

Avec :

P : Partie linéaire ;

N : Partie non linéaire.

On décompose P en deux termes L et R , tel que : $P = L + R$

Où L : est un opérateur facilement inversible ;

R : est le reste de la partie linéaire P .

L'équation s'écrit sous la forme :

$$L(f) + R(f) + N(f) = g \quad (\text{III.3})$$

Soit L^{-1} opérateur inverse. A titre d'exemple, on prend L un opérateur différentiel d'ordre 1 on obtient :

$$L(f) = \frac{df}{dt}, L^{-1}(f) = \int_0^t dt \quad (\text{III.4})$$

En appliquant l'opérateur inverse L^{-1} à l'équation (III.3) on trouve :

$$L^{-1}L(f) = L^{-1}g - L^{-1}R(f) - L^{-1}N(f) \quad (\text{III.5})$$

$$L^{-1}L(f) = f - f(0) \quad (\text{III.6})$$

Alors :

$$f = f(0) + L^{-1}g - L^{-1}R(f) - L^{-1}N(f) \quad (\text{III.7})$$

On cherche la solution f sous la forme :

Chapitre III : Méthode de décomposition d'Adomian et Application

$$f = \sum_{i=0}^n f_i \quad (\text{III.8})$$

$$f = \sum_{i=0}^n f_i = f(0) + L^{-1}g - L^{-1}R(\sum_{i=0}^n f_i) - L^{-1}N(\sum_{i=0}^n f_i) \quad (\text{III.9})$$

La décomposition du terme non linéaire en séries donne :

$$N(f) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{III.10})$$

Où les A_n sont des polynômes qui dépendent de f_0, f_1, \dots , appelés les polynômes d'Adomian.

En utilisant les formules (III.9) et (III.10), on trouve :

$$\begin{aligned} f_0(x, t) &= f(0) + L^{-1}g \\ f_1(x, t) &= -L^{-1}R(f_0) - L^{-1}A_0 \\ f_2(x, t) &= -L^{-1}R(f_1) - L^{-1}A_1 \\ f_{n+1}(x, t) &= -L^{-1}R(f_n) - L^{-1}A_n \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Noté bien :

Si L est un opérateur différentiel d'ordre 2 c'est-à-dire :

$$L_{xx}(f) = \frac{\partial^2(f)}{\partial x^2}, L^{-1}_{xx}(f) = \int_0^x [\int_0^x (.) dx] dx \quad (\text{III.12})$$

On obtient :

$$L^{-1}L(f) = f - f(0) - f'(0)x \quad (\text{III.13})$$

Où $f(0), f'(0)$ sont données.

En général, si L est un opérateur différentiel d'ordre n :

$$L^{-1}L(f) = f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) \quad (\text{III.14})$$

Où $f(t_0), f'(t_0), f''(t_0), \dots$ sont données.

III.3 Polynômes d'Adomian

On sait que :

$$N(f) = N(\sum_{i=0}^n f_i) \quad (\text{III.15})$$

Chapitre III : Méthode de décomposition d'Adomian et Application

En écrivant (f) sous forme d'une série de polynômes spéciaux, appelés polynômes d'Adomian. On obtient donc :

$$N(f) = \sum_{i=0}^n A_i \quad (\text{III.16})$$

Les polynômes A_n sont donc les polynômes d'Adomian.

Pour obtenir les polynômes, on introduit le paramètre λ comme suit :

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i f_i = f + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \dots + \lambda^i f_i + \dots \quad (\text{III.17})$$

$$N(f(\lambda)) = \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots + \lambda^i A_i + \dots \quad (\text{III.18})$$

En utilisant les deux formules (III.17) et (III.18), il vient :

$$A_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{d\lambda} N(f(\lambda)) \right]_{\lambda=0}, \quad A_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d^2\lambda} N(f(\lambda)) \right]_{\lambda=0} \quad (\text{III.19})$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{d^3\lambda} N(f(\lambda)) \right]_{\lambda=0}, \dots, \quad A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d^n\lambda} N(f(\lambda)) \right]_{\lambda=0}$$

Noté bien :

Nous pouvons obtenir les polynômes d'Adomian en posant :

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i f_i, \quad N(f(\lambda)) = \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i \quad (\text{III.20})$$

En développant (λ) sous forme de puissances de λ et en comparant, on trouve que A_n représente le coefficient de λ^n

On suppose que : $N(f) = f^2$

$$A_0 = f_0^2$$

$$A_1 = 2f_0f_1$$

$$A_2 = f_1^2 + 2f_0f_2$$

$$A_3 = 2f_1f_2 + 2f_0f_3$$

$$A_4 = f_2^2 + 2f_1f_3 + 2f_0f_4$$

$$A_5 = 2f_2f_3 + 2f_1f_4 + 2f_0f_5$$

III.4 Application de la méthode ADM sur le problème étudié

Dans cette section, nous appliquons la méthode de décomposition d'Adomian aux équations non linéaires de la dynamique du problème de l'écoulement de couche limite laminaire MHD d'un nanofluides hybride avec présence d'un gradient de pression. En effet, pour résoudre le problème étudié en utilisant la méthode ADM, nous choisissons les opérateurs linéaires suivants :

L est un opérateur différentiel d'ordre 3, s'exprimant par :

$$L = \frac{d^3}{d\eta^3} \quad (\text{III.21})$$

Par application de (III.21) sur l'équation (II.13), on aura :

$$L_f + MA + mAB = -\frac{AB}{2}(m+1)ff'' + mf'^2 + \frac{M}{B}f' \quad (\text{III.21})$$

Considérons maintenant l'opérateur inverse L^{-1} :

$$L^{-1} = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (.) d\eta d\eta d\eta$$

L'application de L^{-1} sur (III.21) donne :

$$L^{-1}(Lf + MA + mAB) = L^{-1}\left(-\frac{AB}{2}(m+1)ff'' + mABf'^2 + MAf\right)$$

Alors :

$$f(\eta) = \sum_{i=0}^n f_i = f_0 + L^{-1}N(f) \quad (\text{III.22})$$

Avec :

$$Nf = -\frac{AB}{2}(m+1)ff'' + mABf'^2 + MAf$$

Et :

$$f_0 = -(MA + mAB) \frac{\eta^3}{6} + c_5 \frac{\eta^2}{2} + L^{-1}$$

$$c_5 = f''(0)$$

L'application de l'algorithme d'Adomian conduit donc aux équations suivantes :

Chapitre III : Méthode de décomposition d'Adomian et Application

$$A_0 = \frac{c5^2x^2}{2} + 0.05688086026479605c5x^3 + 0.0012132870991737204x^4 + c5^2x^2 \\ + 0.08532129039719408c5x^3 + 0.0018199306487605806x^4 + c5x \\ + 0.04266064519859704x^2$$

$$A_1 = 0.04057345738818163c5^2x^4 + 0.0025716078070318815c5x^5 \\ - 0.08229110529078046c5^3x^5 + 0.000036568816081909765x^6 \\ - 0.008723288332013664c5^2x^6 - 0.0002904515968757824c5x^7 \\ - 0.000003097713130420923x^8 + 0.04636966558649329c5^2x^4 \\ + 0.002967239777344478c5x^5 - 0.07481009571889133c5^3x^5 \\ + 0.000042194787786818956x^6 - 0.007659472681768095c5^2x^6 \\ - 0.0002541451472663096c5x^7 - 0.000002710498989118307x^8 \\ + 0.13910899675947988(0.16666666666666666c5x^3 \\ + 0.0035550537665497532x^4) \\ - 0.4488605743133479(0.041666666666666664c5^2x^4 \\ + 0.0028440430132398026c5x^5 + 0.00004044290330579068x^6) \\ - 0.22443028715667399(0.08333333333333333c5^2x^4 \\ + 0.004266064519859704c5x^5 + 0.00006066435495868602x^6)$$

.....

.....

.....

Avec :

A : Polynômes d'Adomian.

D'autre part, les termes de la solution (f_1, f_2, \dots, f_n) sont donnés comme suit :

Chapitre III : Méthode de décomposition d'Adomian et Application

$$\begin{aligned} f_1 = & 0.13910899675947988(0.041666666666666664c5x^4 \\ & + 0.0007110107533099506x^5) \\ & - 0.4488605743133479(0.008333333333333333c5^2x^5 \\ & + 0.0004740071688733004c5x^6 + 0.000005777557615112954x^7) \\ & - 0.22443028715667399(0.016666666666666666c5^2x^5 \\ & + 0.0007110107533099506c5x^6 + 0.000008666336422669431x^7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = & 0.13910899675947988(0.00019320693994372208c5x^6 \\ & + 0.14285714285714285(0.000016484665429691546 \\ & - 0.001246834928648189c5^2)x^7 - 0.000006648847814034803c5x^8 \\ & - 6.303203057200138 \times 10^{-8}x^9) \\ & - 0.4488605743133479(0.00019320693994372205c5^2x^7 \\ & - 0.125c5(-0.00006122875731028289 + 0.0019593120307328676c5^2)x^8 \\ & + 0.1111111111111111(6.530145728912458 \times 10^{-7} \\ & - 0.0001557730059288154c5^2)x^9 - 4.03404995660809 \times 10^{-7}c5x^{10} \\ & - 3.129003162041336 \times 10^{-9}x^{11}) \\ & - 0.22443028715667399(0.00022080793136425373c5^2x^7 \\ & - 0.125c5(-0.00007064856612724945 + 0.001781192755211698c5^2)x^8 \\ & + 0.1111111111111111(7.534783533360527 \times 10^{-7} \\ & - 0.00013677629788871597c5^2)x^9 - 3.529793712032078 \times 10^{-7}c5x^{10} \\ & - 2.737877766786168 \times 10^{-9}x^{11}) \end{aligned}$$

Les termes f_1 et f_2 correspondent aux deux premières itérations obtenues par la méthode de décomposition d'Adomian. Les termes suivants, notés f_3, f_4, \dots, f_n peuvent être déterminés selon le même procédé récursif.

La solution approchée du problème étudié est alors obtenue en additionnant les termes successifs de la série, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$f(\eta) = f_0 + f_1 + f_2 \dots \dots f_n \quad (\text{III.31})$$

Chapitre III : Méthode de décomposition d'Adomian et Application

Conformément à l'équation (III.31), il est important de souligner que la précision de la solution obtenue par la méthode ADM (Adomian Décomposition Method) augmente avec le nombre d'itérations n . Par ailleurs, la constante d'intégration c_5 est déterminée à partir des conditions aux limites imposées au problème.

CHAPITRE IV
Résultat et discussions

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Dans le présent mémoire, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'étude dynamique de l'écoulement d'un nanofluide trihybride autour d'une plaque plane. Plus précisément, une approche semi-analytique a été envisagée pour résoudre l'équation différentielle du troisième ordre décrivant le profil de vitesse de l'écoulement de couche limite laminaire, soumis à un champ magnétique externe et à un gradient de pression axial. Pour ce faire, nous avons adopté la célèbre méthode de décomposition d'Adomian (Adomian Decomposition Method), reconnue pour sa capacité à traiter les équations non linéaires sans recourir à la discrétisation ni à la linéarisation.

L'influence de plusieurs paramètres physiques, notamment le gradient de pression (m), la concentration en nanoparticules (ϕ) et le paramètre magnétique (ou nombre de Hartmann, M), a été analysée en ce qui concerne leur impact sur le profil de vitesse et le coefficient de frottement (C_f). Les résultats obtenus sont présentés dans les **Figures IV.1-IV.6** et les **Tableaux IV.2-IV.11** respectivement.

Tableau 0-1: Propriétés thermophysiques du fluide de base et des différentes nanoparticules.

<i>Propriétés thermophysiques du nanofluide</i>				
<i>Composantes du nanofluide</i>	EG-H ₂ O	Cu	CuO	Argent
<i>Masse volumique (Kg/m³)</i>	1063	8933	10500	6320

IV.2 Profil des vitesses

IV.2.1 Ecoulement des nanofluides

Dans cette section, nous nous intéressons à l'écoulement d'un **nanofluide trihybride**. Trois types de **nanoparticules solides** sont considérés, à savoir : le **cuivre (Cu)**, l'**oxyde de cuivre (CuO)** et l'**argent (Ag)**. Les **propriétés thermophysiques** de ces nanoparticules, nécessaires à la modélisation de l'écoulement, sont présentées dans le **tableau IV.1**

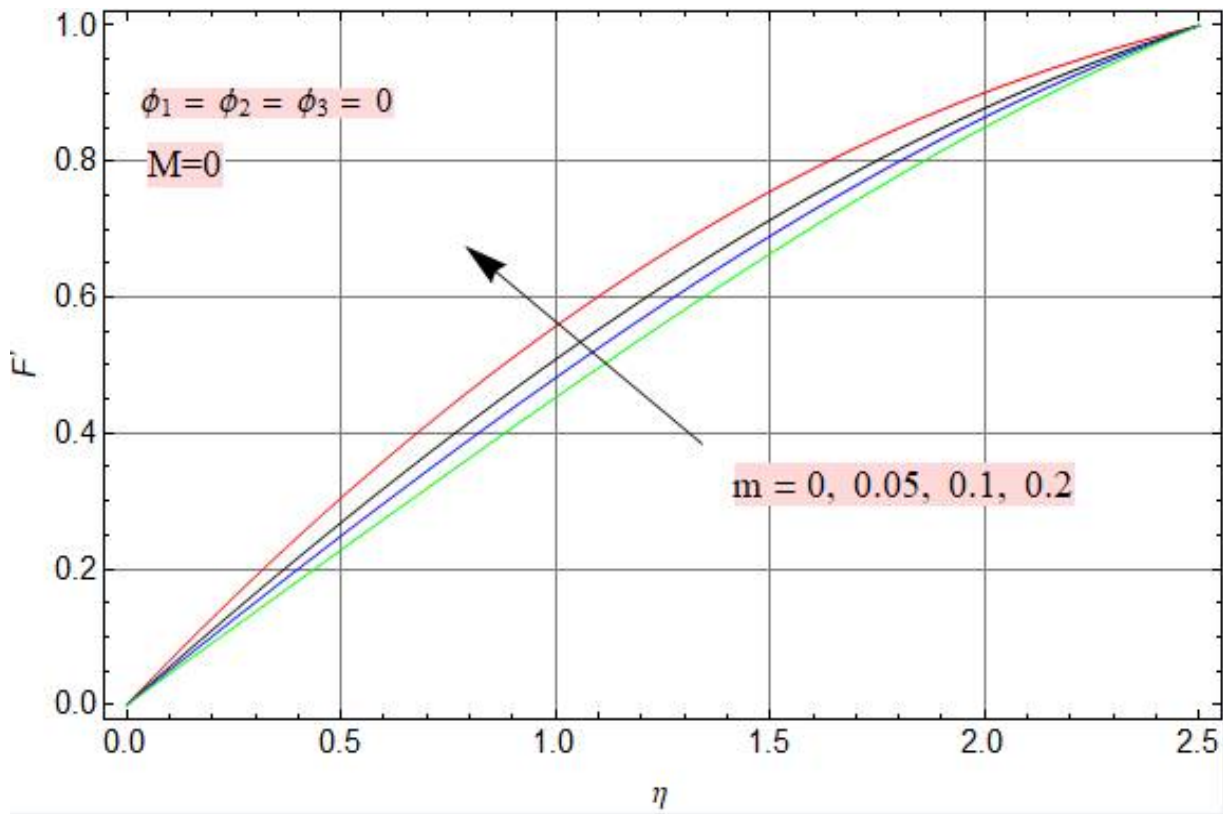


Figure IV.1 Effet du gradient de pression m sur la vitesse du nanofluide (cas d'un écoulement accéléré, $m>0$)

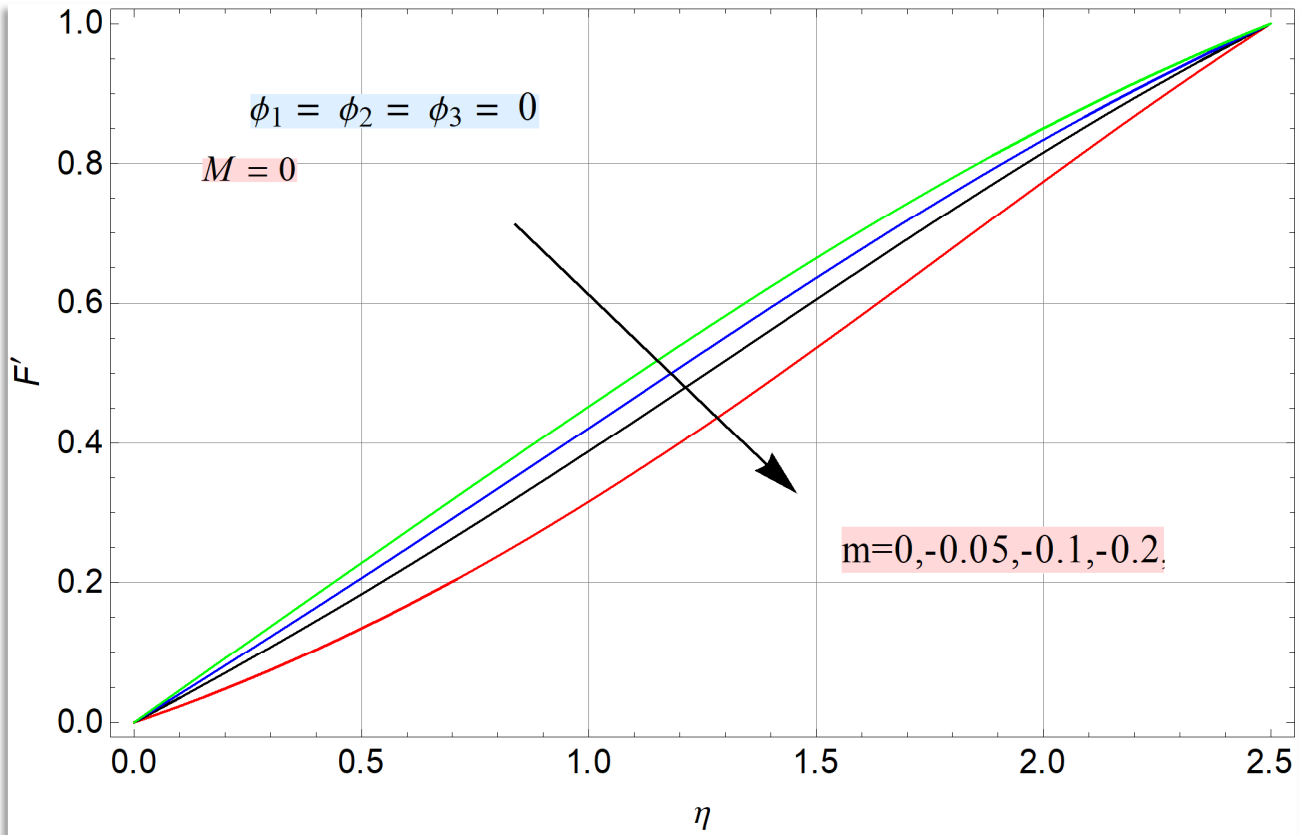


Figure IV.2 Effet du gradient de pression m sur la vitesse du nanofluide (cas d'un écoulement décéléré, $m < 0$)

Les Figures (IV.1) et (IV.2) visualisent l'évolution de la fonction f' , représentant la vitesse adimensionnée u_e , dans le cadre d'un écoulement de Falkner-Skan en absence d'un champ magnétique (M) appliqué à un nanofluide trihybride composé d'éthylène glycol-eau comme fluide de base, et de nanoparticules solides de cuivre (Cu), d'oxyde de cuivre (CuO) et d'argent (Ag). D'une manière générale, les résultats indiquent que la vitesse augmente de façon monotone depuis la paroi (où $f' = 0$) jusqu'à la frontière de la couche limite (où $f' = 1$), ce comportement étant observé pour toutes les configurations étudiées.

Dans le cas d'un écoulement **accéléré** ($m > 0$), illustré par la figure IV.1, on remarque que la vitesse du nanofluide augmente avec le paramètre m , ce qui exclut totalement le phénomène de retour d'écoulement et contribue à la stabilisation du profil de vitesse.

Pour le cas d'un écoulement **décéléré** ($m < 0$), **sans présence de champ magnétique** (Figure IV.2), bien que ce type de régime favorise généralement l'instabilité et le retour

d'écoulement. Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du gradient de pression conduit à la diminution de la vitesse, l'accroissement de l'épaisseur de la quantité de mouvement et par conséquent le phénomène de séparation est favorisée.

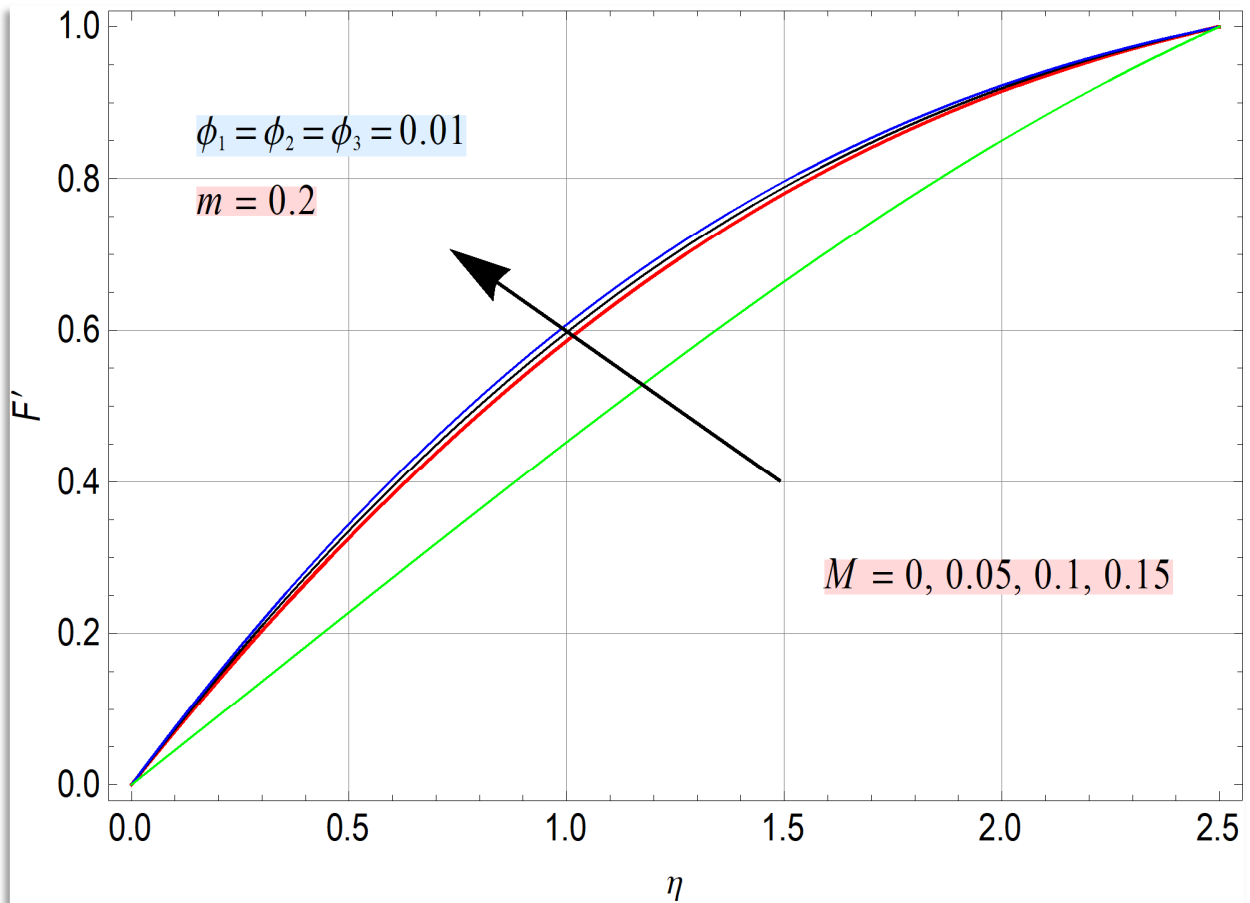


Figure IV.3 Effet du paramètre magnétique M sur la vitesse du nanofluide trihybride (écoulement accéléré, $m = 0.2$)

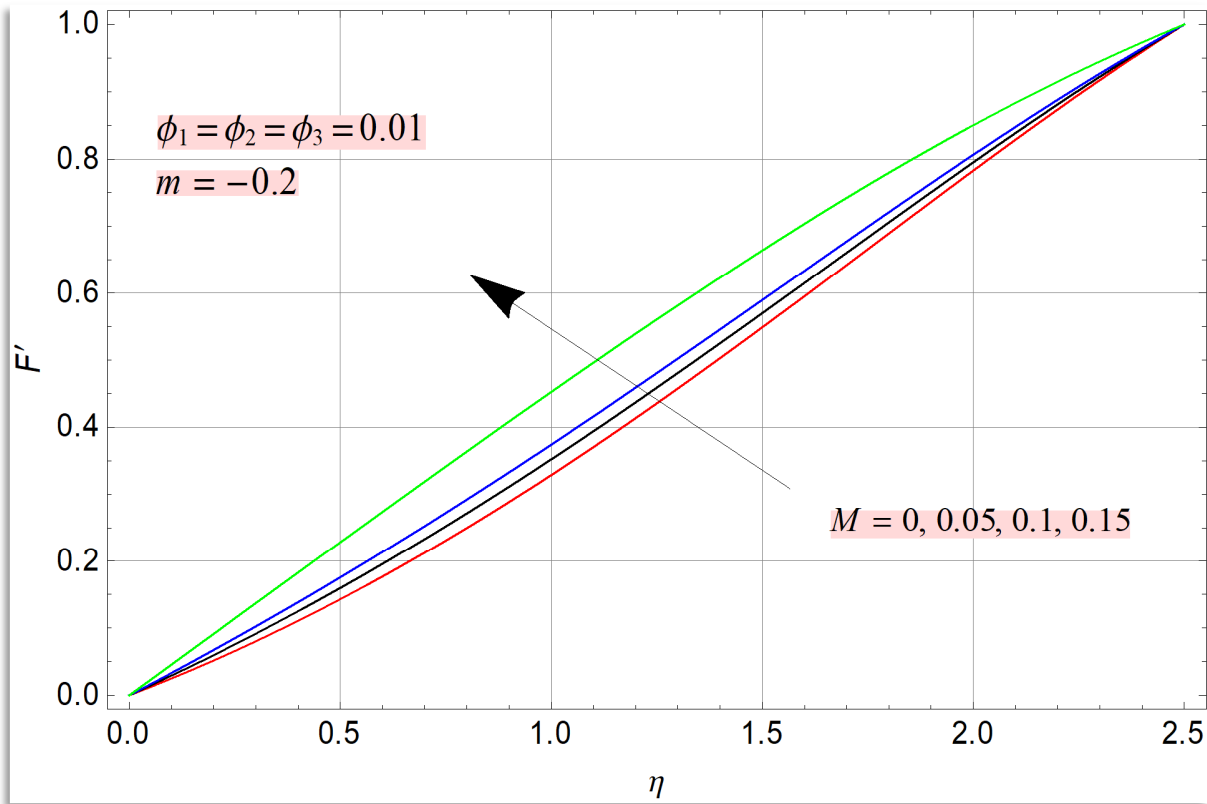


Figure IV.4 Effet du paramètre magnétique M sur la vitesse du nanofluide trihybride (écoulement décéléré, $m = -0.2$)

Selon la figure IV.3, il apparaît clairement que l'augmentation du paramètre magnétique M entraîne une croissance significative de la vitesse de l'écoulement. Ce comportement traduit une amélioration nette de la stabilité de l'écoulement sous l'effet du champ magnétique. De manière similaire, pour le cas d'un écoulement décéléré (Figure IV.4), la vitesse augmente également avec l'accroissement du paramètre M . Ce résultat confirme que le champ magnétique joue un rôle stabilisateur, en réduisant ou en éliminant les instabilités dans l'écoulement. Cela s'explique par la force de Lorentz, générée par le champ magnétique, qui s'oppose au mouvement du fluide et contribue ainsi à la stabilisation du profil de vitesse en éliminant entièrement le phénomène de retour d'écoulement. Dans ces conditions, l'application du champ magnétique empêche le décollement de la couche limite, et conduit ainsi à un écoulement plus stable et contrôlé.

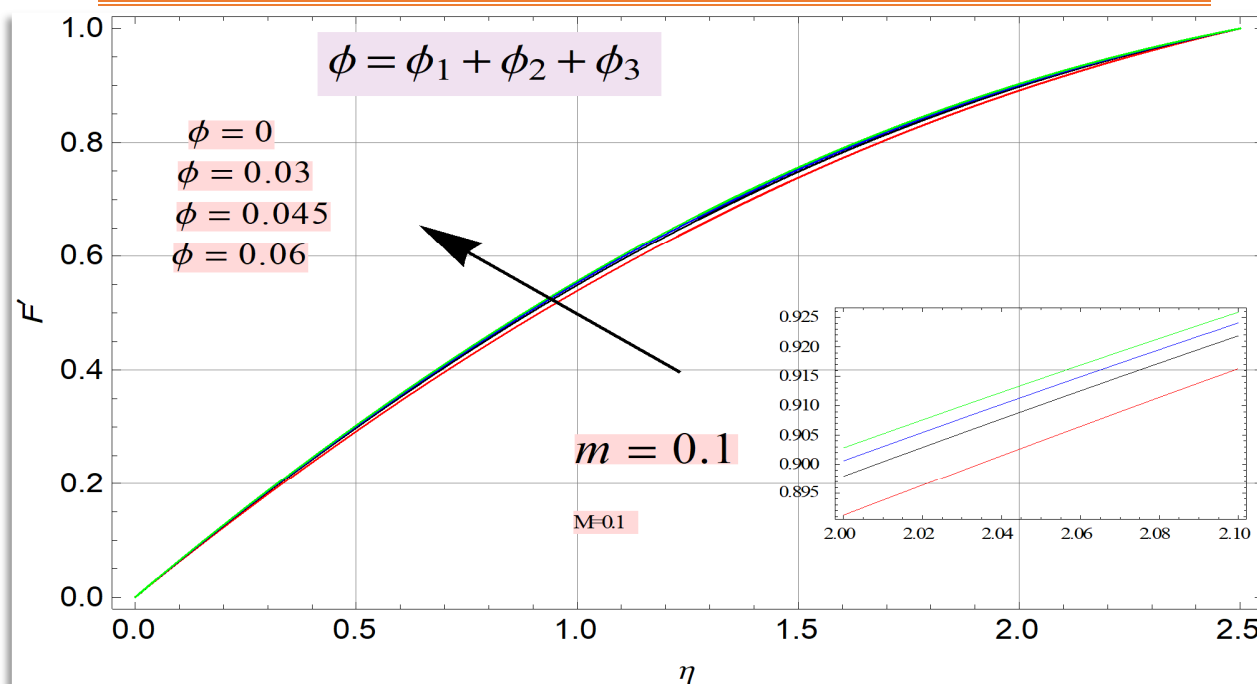


Figure IV.5 Effet de la concentration des nanoparticules sur la distribution des vitesses (écoulement hydromagnétique accéléré)

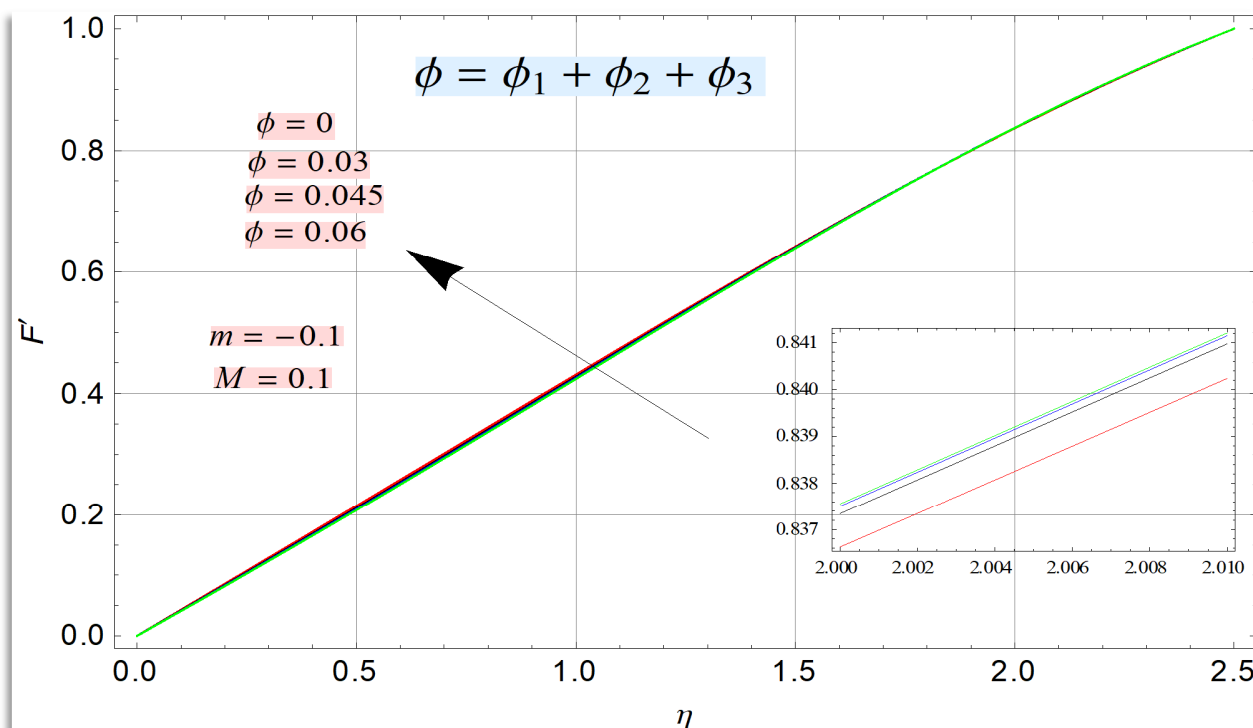


Figure IV.6 Effet de la concentration des nanoparticules sur la distribution des vitesses (écoulement hydromagnétique décéléré)

L'influence de la variation de la concentration des nanoparticules sur le profil de vitesse de l'écoulement du nanofluide trihybride est illustrée par les Figures IV.5 et IV.6, respectivement pour les cas d'un **écoulement accéléré** ($m = +0.1$) et d'un **écoulement décéléré** ($m = -0.1$). Les résultats indiquent que **l'augmentation de la concentration en nanoparticules entraîne une élévation notable de la vitesse** du nanofluide dans les deux cas d'écoulements considérés (accéléré et décéléré). Cette augmentation conduit à l'amincissement de la couche limite (épaisseur diminue) et par conséquent le phénomène de séparation est entièrement exclu donnant lieu à un écoulement plus stable.

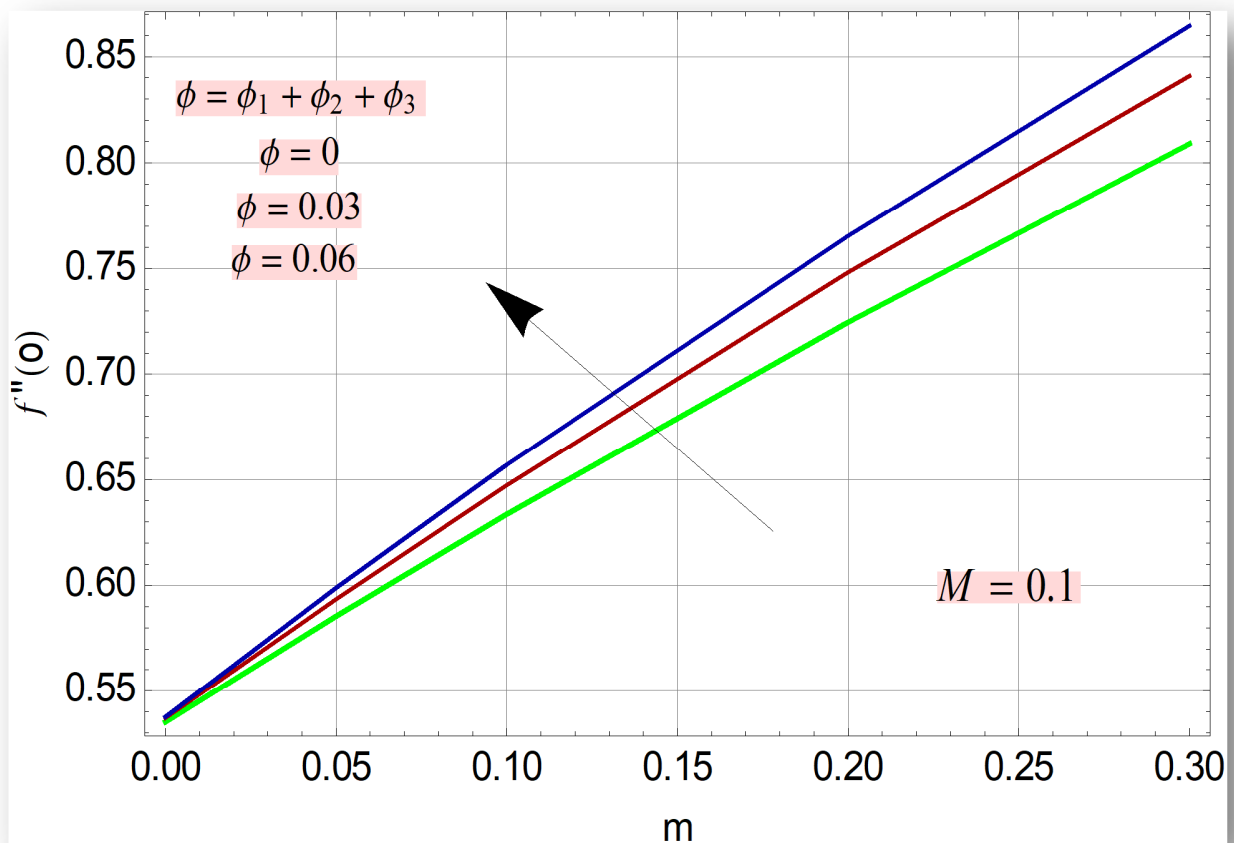


Figure IV.7 Effet de la concentration des nanoparticules sur l'évolution du coefficient $f''(0)$ (écoulement accéléré, $m > 0$)

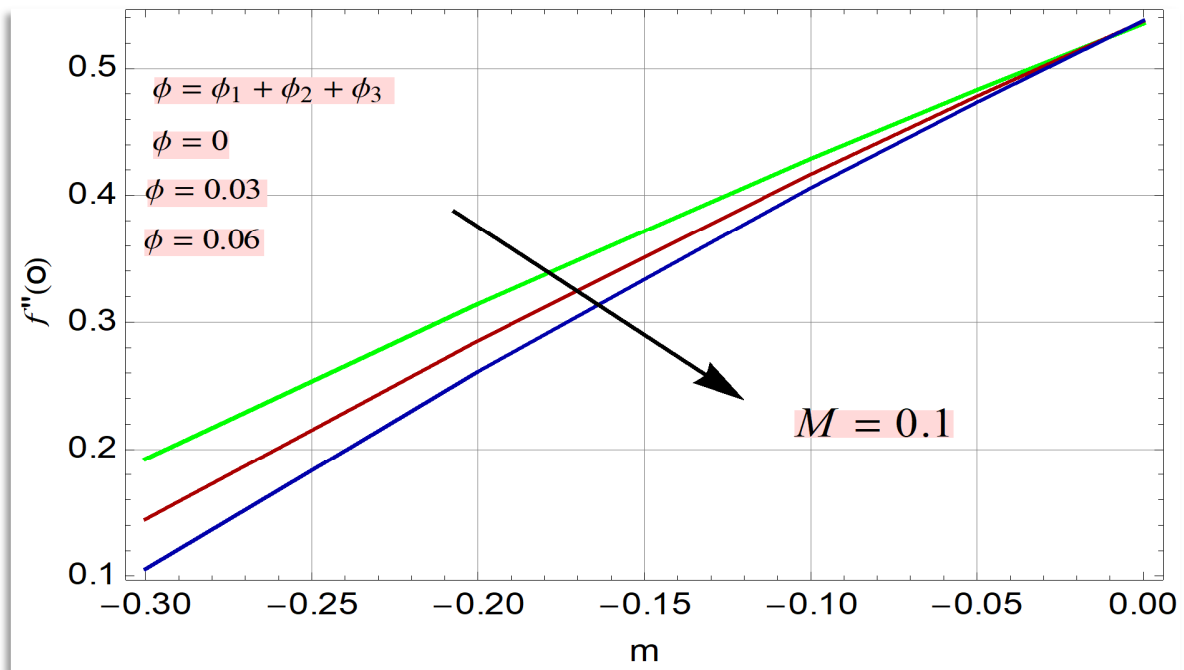


Figure IV.8 Effet de la concentration des nanoparticules sur l'évolution du coefficient $f''(0)$ (écoulement décéléré, $m < 0$)

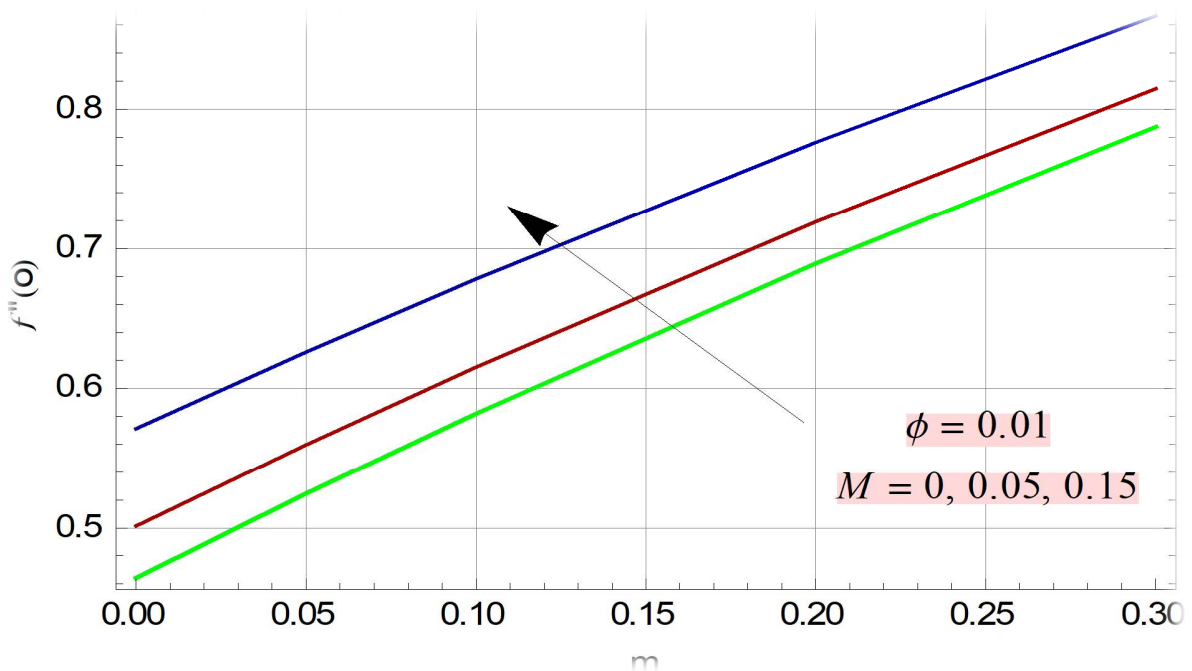


Figure IV.9 Effet du paramètre magnétique M sur l'évolution du coefficient $f''(0)$ (écoulement accéléré, $m > 0$)

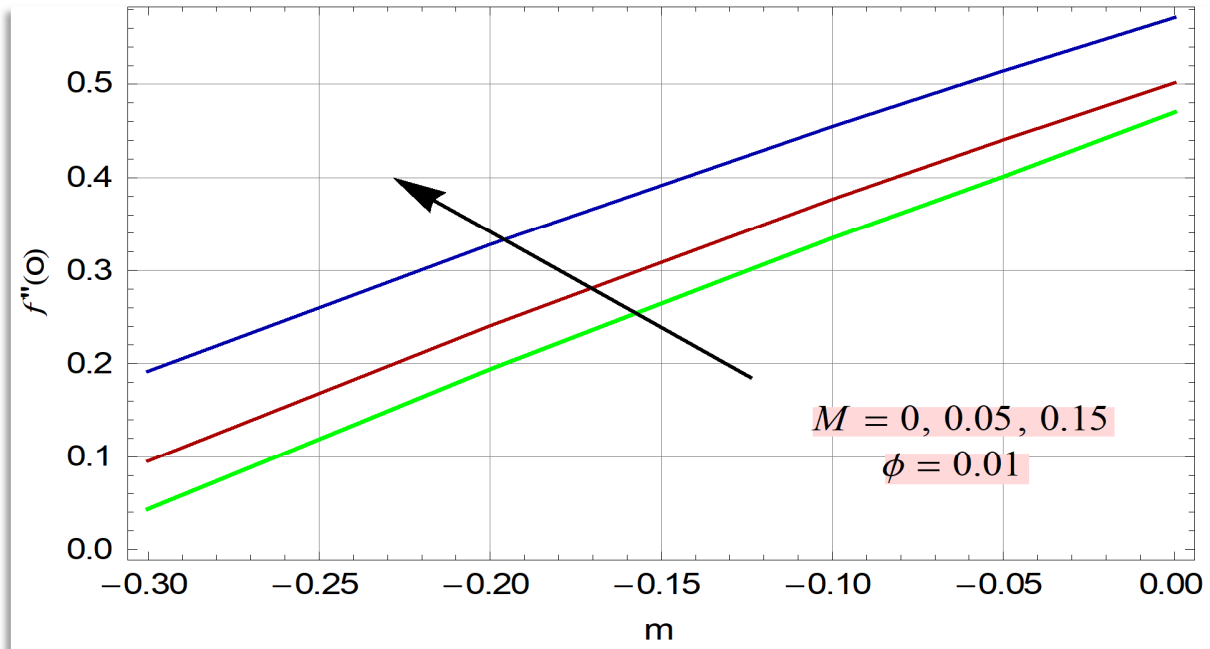


Figure IV.10 Effet du paramètre magnétique M sur l'évolution du coefficient $f''(0)$ (écoulement décéléré, $m < 0$)

Les Figures IV.7 et IV.8 illustrent l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la fraction volumique des nanoparticules pour un écoulement hydromagnétique accéléré ($m > 0$) et un autre décéléré ($m < 0$) respectivement. Pour un écoulement accéléré (Figure IV.7), les résultats indiquent que plus la concentration des nanoparticules augmente, plus le coefficient de frottement croît ou le phénomène de retour d'écoulement (décollement de la couche limite) est entièrement exclu. Par ailleurs, comme le montre la Figure IV.8, l'évolution de la constante associée révèle un comportement inverse. En effet, avec l'accroissement de m et ϕ , le coefficient de frottement décroît considérablement. Cette diminution représente un indice défavorable, car elle suggère une tendance accrue à la séparation de l'écoulement.

En revanche, comme visualisé par les Figures IV.9 et IV.10, une tendance différente est observée lorsque le paramètre magnétique M augmente : le coefficient de frottement (constante $f''(0)$) croît, ce qui constitue un signe favorable indiquant la réduction, voire la suppression, du phénomène de séparation. Il ressort donc clairement que la présence d'un champ magnétique exerce un effet

stabilisateur sur l'écoulement des nanofluides trihybrides, en améliorant sa cohérence et sa stabilité.

IV.3 Comparaison

IV.3.1 Comparaison avec la méthode numérique RK4

À des fins de validation, la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) a été utilisée comme référence pour vérifier la convergence des résultats obtenus par la méthode semi-analytique de décomposition d'Adomian (ADM). Le code associé à la méthode RK4 est intégré à la bibliothèque du logiciel Mathematica. Ainsi, une comparaison a été établie entre les valeurs de la vitesse du nanofluide en fonction du paramètre magnétique M , du gradient de pression m et de la fraction volumique des nanoparticules ϕ .

Les résultats, présentés dans les Tableaux IV.2-IV.11, mettent en évidence une bonne concordance entre les solutions obtenues par les deux méthodes. Cette concordance est confirmée par les valeurs acceptables de l'erreur absolue, calculée selon la formule suivante :

$$ERR = |f''_{ADM} - f''_{NUM}|$$

Tableau IV.2 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0.01$, $M = 0.1$, $m = -0.3$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	0	0
0.25	0.04385359720010529	0.04386883680919627	0.000015239609090979267
0.5	0.10312632498344898	0.10315682108259007	0.000030496099141089084
0.75	0.1778347425710765	0.1778804381615437	0.00004569559046718741
1	0.2676329770609189	0.26769361609647446	0.00006063903555558747
1.25	0.3715655508830564	0.3716402319221219	0.00007468103906554946
1.5	0.4878046188407734	0.4878918940829345	0.00008727524216106675
1.75	0.6134235022436877	0.613520839476764	0.00009733723307625564

Chapitre IV :

Résultats et discussions

2	0.7442839412078337	0.7443865824894182	0.00010264128158454788
2.25	0.8751318215353022	0.875223332740615	0.00009151120531281087
2.5	1	1	$7.383874178756855 \times 10^{-9}$

Tableau IV.3 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : $(\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.01, M = 0.1 \text{ et } m = 0.3)$

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	$2.710505431213761 \times 10^{-20}$	$2.710505431213761 \times 10^{-20}$
0.25	0.19699762749504024	0.19688933908802034	0.00010828840701990194
0.5	0.3682705304903454	0.3680533325792234	0.00021719791112201348
0.75	0.5149213611973368	0.5145941252717475	0.0003272359255892532
1	0.6382344862063506	0.6377954252883994	0.00043906091795120616
1.25	0.7398176888136105	0.7392644661205241	0.0005532226930864415
1.5	0.8216584141221072	0.8209897502791246	0.0006686638429825864
1.75	0.8860872843594443	0.8853118072447916	0.0007754771146526451
2	0.9356483498897177	0.9348173474437091	0.000831002446008533
2.25	0.9728790798613501	0.9721824609180251	0.0006966189433250669
2.5	1	1	$2.221215655850983 \times 10^{-8}$

Tableau IV.4 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.01$, $M = 0.1$ $m = 0.3$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	0	0
0.25	0.2069734600082458	0.20689028677751947	0.00008317323072631888
0.5	0.38367316713371785	0.38350591626392916	0.0001672508697886932
0.75	0.5323026102261899	0.5320494358920648	0.0002531743341250836
1	0.6551186712429341	0.6547766211808849	0.00034205006204923727
1.25	0.7545805054249306	0.7541458661194442	0.00043463930548637286
1.5	0.8333960068074815	0.8333960068074815	0.0005307123912895451
1.75	0.89447114939346511	0.8938495901145564	0.0006219038200946381
2	0.9407763245649323	0.9401054107258595	0.0006709138390728064
2.25	0.9751394394646183	0.9745786896057997	0.0005607498588185988
2.5	1	1	$5.825048554619627 \times 10^{-8}$

Tableau IV.5 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($M = 0.2$ $m = 0.3$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.02$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	$-2.71050543121376 \times 10^{-20}$	$2.710505431213761 \times 10^{-20}$
0.25	0.21123468400311685	0.2110901099785806	0.00014457402453621482
0.5	0.39114729788007907	0.3908566905189738	0.0002906073611052551
0.75	0.541852711824305	0.541852711824305	0.0004396025426722794
1	0.6655932648221397	0.6650000319605577	0.0005932328615819715

Chapitre IV :

Résultats et discussions

1.25	0.764904771077894	0.7641518613152833	0.0007529097626106651
1.5	0.8426587485156776	0.8417411730411501	0.0009175754745274212
1.75	0.9019842017713976	0.9009121116665075	0.0010720901048900666
2	0.9460807001039544	0.9449288120596706	0.0011518880442837887
2.25	0.9779401901079163	0.9769818448455458	0.0009583452623704858
2.5	1	1	$6.412929931531863 \times 10^{-8}$

Tableau IV.6 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.03$, $M = 0.2$ $m = 0.3$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	$2.710505431213761 \times 10^{-20}$	$2.710505431213761 \times 10^{-20}$
0.25	0.2143949029253113	0.213900840371796	0.0004940625535153065
0.5	0.39749991942512564	0.39582334592104906	0.0016765735040765728
0.75	0.5514623926629084	0.5477797304896364	0.0036826621732720666
1	0.6785605271252333	0.6719733839655156	0.0065871431597176455
1.25	0.7813706199077837	0.7709785547155223	0.010392065192261324
1.5	0.8628076783947016	0.8477817126973909	0.01502596569731074
1.75	0.9260421789277945	0.9056948047418467	0.020347374185947786
2	0.9743038151981984	0.9481723172005503	0.026131497997648134
2.25	1.0105878486038558	0.9785839797165606	0.03200386888729512
2.5	1.0372834112071367	1	0.03728335385932913

Tableau IV.7 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, $M = 0$ $m = 0.05$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	0	0
0.25	0.12611602865440136	0.1261827671992973	0.00006673854489594455
0.5	0.24886595451890944	0.24899916644991868	0.00013321193100923612
0.75	0.3676613300164476	0.36786023149163344	0.0001989014751858642
1	0.48159417432827856	0.48185675122934557	0.00026257690106701315
1.25	0.5895259204258245	0.5898489678942146	0.0003230474683900697
1.5	0.6902058106619661	0.6905840962011814	0.0003782855392153728
1.75	0.7824155168338649	0.7828386363197535	0.00042311948588857895
2	0.8651310335290461	0.86557016686696	0.0004391333379138995
2.25	0.9376941499308515	0.9380568467748376	0.0003626968439860434
2.5	1	1	$1.36169120312779 \times 10^{-7}$

Tableau IV.8 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($M = 0$. $m = 0.1$, $\varphi_1 = 0.01$ et $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	$4.065758146820641 \times 10^{-20}$	$4.065758146820641 \times 10^{-20}$
0.25	0.13923639423175174	0.13930534727237467	0.00006895304062293217
0.5	0.27167966045087455	0.27181755094857624	0.00013789049770168704
0.75	0.3967569967387644	0.3969625954051992	0.00020559866643476976

Chapitre IV :

Résultats et discussions

1	0.5136432227101874	0.5139150562155219	0.0002718335053345511
1.25	0.62139152064341	0.6217264275580806	0.0003349069146706407
1.5	0.7190807025265895	0.71947365019759	0.00039294767100050976
1.75	0.8059684083347043	0.8064088519391637	0.000440443604459384
2	0.8816357592790043	0.8820927255817859	0.0004569663027815807
2.25	0.9461140118559827	0.9464887239543868	0.00037471209840411746
2.5	1	1	$1.878631896712335 \times 10^{-7}$

Tableau IV.9 Ccomparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($\varphi_1 = 0.01$ $\varphi_2 = 0.02$ $\varphi_3 = 0.03$, $M = 0.05$ $m = 0.2$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	$5.421010862427522 \times 10^{-20}$	$5.421010862427522 \times 10^{-20}$
0.25	0.17650725480471097	0.17647213228128972	0.00003512252342124933
0.5	0.3352034757071604	0.33513326140028765	0.00007021430687276231
0.75	0.47608111993460855	0.475975938283927	0.00010518165068157392
1	0.5991032558866854	0.5989633946133066	0.00013986127337883847
1.25	0.7044312818736024	0.7042574393524433	0.00017384252115903998
1.5	0.7925994963428256	0.7923927781515372	0.00020671819128836866
1.75	0.8646116173177573	0.864374954150371	0.00023666316738624182
2	0.9219394769344826	0.9216849038238605	0.00025457311062215826
2.25	0.9664138186317487	0.9661921982097397	0.00022162042200901677
2.5	1	1	$2.699252066307167 \times 10^{-8}$

Tableau IV.10 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($M = 0.05$ $m = -0.2$, $\varphi_1 = 0.01$ $\varphi_2 = 0.02$ $\varphi_3 = 0.03$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	5.081112585501912 $\times 10^{-54}$	0	5.081112585501912 $\times 10^{-54}$
0.25	0.06772134295324712	0.060552079448394414	0.00716926350485271
0.5	0.14602703115415488	0.13380088070064516	0.012226150453509721
0.75	0.23464971600741907	0.2194619446085135	0.015187771398905564
1	0.33286194980957656	0.31674243129006646	0.0161195185195101
1.25	0.4393322853487151	0.42414331114900966	0.01518897419970544
1.5	0.5520126476330561	0.5392958408391272	0.012716806793928948
1.75	0.6680961327442547	0.6588861363253028	0.009209996418951927
2	0.7840898670019159	0.7787323807721193	0.005357486229796593
2.25	0.8960465731715774	0.8940630161944054	0.0019835569771720074
2.5	1	1	$1.829532159103308 \times 10^{-8}$

Tableau IV.11 Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas : ($M = 0.05$ $m = -0.2$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$)

η	RK4	f'_{ADM}	$E= f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0	1.35525271560688 $\times 10^{-20}$	$1.35525271560688 \times 10^{-20}$
0.25	0.07222918241017992	0.07167565749785382	0.0005535249123261032
0.5	0.15503459474883186	0.15279312099597803	0.0022414737528538287
0.75	0.24810385241644745	0.2431198693516833	0.004983983064764136
1	0.3506178416952528	0.3419809892249154	0.008636852470337408

Chapitre IV :**Résultats et discussions**

1.25	0.46110388626404025	0.4481354089471581	0.012968477316882165
1.5	0.5773280248237285	0.5596836076705929	0.017644417153135583
1.75	0.6962692351442854	0.6740377044965623	0.022231530647723097
2	0.8142228254587905	0.7879885869497538	0.026234238509036722
2.25	0.9270778569131203	0.8978956672528058	0.029182189660314495
2.5	1.0308169155857674	1	0.030816921752740645

Conclusion générale

Conclusion générale :

Ce travail a porté sur l'étude analytique et numérique de l'écoulement magnétodynamique (MHD) d'un nanofluide trihybride composé de nanoparticules de cuivre (Cu), d'oxyde de cuivre (CuO) et d'argent (Ag), dispersées dans un fluide de base à base d'éthylène glycol (EG), s'écoulant sur une plaque plane sous l'effet d'un gradient de pression. Cette étude est motivée par l'intérêt croissant porté aux nanofluides trihybrides dans les applications thermofluidiques avancées, où l'amélioration des propriétés de transport et la stabilité de l'écoulement sont primordiales.

Les principales conclusions que l'on peut tirer de cette étude sont :

- Le problème étudié a été formulé pour décrire l'écoulement bidimensionnel, incompressible, laminaire et stationnaire d'un nanofluide trihybride sous l'action d'un champ magnétique transverse et d'un gradient de pression. La modélisation mathématique a conduit à une équation différentielle non linéaire du troisième ordre, obtenue à partir des équations de Navier-Stokes simplifiées en utilisant les transformations de similarité appropriées.
- L'équation différentielle ordinaire du troisième ordre obtenue a été résolue par la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), offrant une solution semi-analytique précise sans linéarisation, discrétisation ni perturbation. Cette méthode permet de capturer les comportements complexes de l'écoulement avec une grande efficacité.
- Les résultats de la technique semi-analytique ADM ont été comparés à ceux de la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). La bonne concordance entre les deux approches confirme la fiabilité et la robustesse de la méthode semi-analytique employée.

Effets des principaux paramètres physiques :

L'analyse paramétrique a mis en évidence l'influence significative de la fraction volumique totale des nanoparticules trihybrides, du paramètre magnétique " M " (ou nombre de Hartmann), et du gradient de pression " m ". Il a été constaté que l'introduction du champ magnétique améliore la stabilité de l'écoulement en éliminant le phénomène de retour d'écoulement, tandis que l'augmentation de la concentration des nanoparticules améliore la vitesse de l'écoulement dans le

Conclusion générale

cas accéléré, mais peut accentuer le risque d'apparition du phénomène de séparation dans le cas d'un écoulement décéléré.

En conclusion, cette étude a permis de traiter efficacement le comportement complexe d'un écoulement MHD de nanofluide trihybride sur une plaque plane soumise à un gradient de pression. Les résultats obtenus confirment le rôle stabilisateur du champ magnétique et mettent en évidence les effets spécifiques du mélange Cu–CuO–Ag sur la dynamique du fluide. Ce travail ouvre des perspectives prometteuses pour des investigations futures, notamment sur les transferts thermiques dans les nanofluides trihybrides ou les effets couplés convection–conduction–radiation en présence de réactions chimiques ou de porosité du milieu.

Résumé

Dans ce mémoire, une attention particulière a été dédiée aux effets du champ magnétique transverse, du gradient de pression externe et de la fraction volumique des nanoparticules solides sur le comportement dynamique de la couche limite laminaire dans un écoulement d'un **nanofluide trihybride** le long d'une plaque plane. Le nanofluide considéré est une suspension de nanoparticules de cuivre (Cu), d'oxyde de cuivre (CuO) et d'argent (Ag) dans un fluide à base d'éthylène glycol (EG) choisi en raison de ses propriétés thermophysiques améliorées.

En appliquant les transformations de similarité appropriées, les équations différentielles partielles non linéaires régissant l'écoulement ont été réduites en une équation différentielle ordinaire non linéaire du troisième ordre. Celle-ci a été résolue analytiquement à l'aide de la **méthode de décomposition d'Adomian (ADM)**, une méthode semi-analytique puissante permettant d'obtenir des solutions précises sans recourir à la discrétisation.

L'étude met en évidence l'effet du **paramètre magnétique** ' M ', du **gradient de pression** ' m ', ainsi que de la **fraction volumique des nanoparticules trihybrides** sur le profil de vitesse $f'(\eta)$ et sur le **coefficient de frottement** caractérisé par la constante $f''(0)$. Les résultats, illustrés graphiquement, révèlent que la présence du champ magnétique améliore significativement la stabilité de l'écoulement, en réduisant notamment les risques de retour d'écoulement.

Afin de valider la fiabilité de la méthode ADM utilisée, une comparaison a été effectuée avec la méthode numérique de **Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)**. Les résultats montrent une excellente concordance entre les deux approches, confirmant l'efficacité et la précision de la méthode semi-analytique adoptée.

Abstract

In this investigation, a particular attention was dedicated to the effects of transverse magnetic field, external pressure gradient and nanoparticles volume fraction on the dynamic behavior of the laminar boundary layer of a **trihybrid nanofluid** flow over a flat plate. The fluid under consideration is a suspension of copper (Cu), copper oxide (CuO), and silver (Ag) nanoparticles dispersed in ethylene glycol (EG) as a base fluid chosen due to its enhanced thermophysical properties.

By applying appropriate similarity transformations, the governing nonlinear partial differential equations of the flow were reduced to a single third-order nonlinear ordinary differential equation. This equation was analytically solved using the **Adomian Decomposition Method (ADM)**, a powerful semi-analytical technique that provides accurate solutions without requiring discretization.

The study highlights the effects of the **magnetic parameter ‘M’**, the **pressure gradient parameter ‘m’**, and the **volume fraction of trihybrid nanoparticles** on the velocity profile $f'(\eta)$ and the **skin friction coefficient** characterized by the constant $f''(0)$. The graphically illustrated results show that the presence of a magnetic field significantly enhances the flow stability by reducing the risk of flow reversal.

To validate the reliability of the ADM approach, a comparison was made with the fourth-order **Runge-Kutta numerical method (RK4)**. The comparison revealed excellent agreement between the two methods, confirming the efficiency and accuracy of the adopted semi-analytical technique.

الملخص

يُعنى هذا البحث بدراسة التأثير المشترك للحقل المغناطيسي العرضي وتدرج الضغط الخارجي على السلوك الديناميكي لطبقة الحدود اللامستقرة لسريان نانوسائل ثلاثي الهجين على صفيحة مستوية. السائل المدروس هو تعليق لجزيئات نانوية من النحاس، وذلك نظراً لخواصه الحرارية الفيزيائية (EG) في سائل أساسه الإيثيلين غليكول (Ag) والفضة (CuO) وأكسيد النحاس (Cu) المحسنة.

من خلال تطبيق التحويلات التشابهية المناسبة، تم تبسيط معادلات التفاضل الجزئية اللاخطية التي تحكم السريان إلى معادلة تفاضلية عادية غير خطية من الرتبة الثالثة. وقد تم حل هذه المعادلة تحليلياً باستخدام طريقة تحليلية شبه عددية تُعرف بطريقة ، وهي طريقة فعالة تتيح الحصول على حلول دقيقة دون الحاجة إلى التجزئة العددية (ADM) التحلل لأدوميان.

، وكذلك نسبة الحجم للجزيئات النانوية mmm ، ومعامل تدرج الضغط MMM أبرز الدراسة تأثير كل من المعامل المغناطيسي أظهرت النتائج الممثلة بيانياً $f''(0)f'(0)f''(0)$ وعلى معامل الاحتكاك $f'(\eta)f(\eta)f'(\eta)$ ثلاثية الهجين على توزيع السرعة أن وجود المجال المغناطيسي يعزز بشكل ملحوظ من استقرار السريان، لا سيما من خلال تقليل احتمالية حدوث ارتداد في السريان.

(RK4) المستخدمة، تم إجراء مقارنة مع طريقة رانج-كوتا العددية من الرتبة الرابعة ADM وللتحقق من دقة وموثوقية طريقة وقد أظهرت هذه المقارنة تطابقاً ممتازاً بين الطريقتين، مما يؤكد فعالية ودقة النهج شبه التحليلي المعتمد.

Références Bibliographiques

- [1] KHENE S., Mécanique des fluides : Cours et exercices avec solutions, statique des fluides, tension superficielle, dynamique des fluides parfaits, dynamique des fluides visqueux newtoniens, mélanges binaires, polycopié de cours (université d'annaba), 2022.
- [2] BEN HAMOUDA. R, Notions de mécanique des fluides, Centre de Publication Universitaire, Tunisie, 2008. ISBN : 978-9973-37-494-3.
- [3]. SMAILI A., Etude expérimentale de la couche limite turbulente qui se développe à l'aval d'une manipulation combinée utilisation des lamelles minces et paroi rainurée, mémoire de Master, 1991, Université de Laval (Canada).
- [4] Ressource électronique : studysmarter, écoulement compressible, physique, chimie.
<https://www.studysmarter.fr/resumes/ingenierie/ingenierie-aerospatiale/ecoulement-Compressible/>
- [5] Ressource électronique : Superprof, apprendre la physique la chimie avec les meilleur (2019)
<https://www.superprof.fr/ressources/physique-chimie/physique-chimie-2nde/expressions-courantes-utilitaires.html>
- [6]. Ressource électronique: Les fluides
<https://lesfluides8sciences.weebly.com/types-deacutecoulement.html>.
- [7] CHOI S.U.S., EASTMAN J. A. (1995). Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. November 12-17, 1995, San Francisco, USA.
- [8] SUNDAR L. S. et al. (2016). Experimental investigation of the thermal conductivity and viscosity of nanodiamond-based hybrid nanofluids. International Communications in Heat and Mass Transfer, 76, 245–255.
- [9].KEBEDE G., TSEGAYE A., MULUGETA M. (2022). Numerical study of trihybrid nanofluid flow and heat transfer over a stretching surface. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 147(5), 12513–12527.
- [10] SINGH A, Studies on variation of boundary layer parameters on rough surfaces in turbulent boundary layer zone. Thèse de doctorat, National institute of technology Rourkela, 2015.

- [11] MOKRANI N., Simulation numérique par code fluent d'une couche limite contrôlée et non contrôlée sur un profil d'aile NACA 0012 à incidence de 18°. Mémoire de master. Université de Tizi Ouzou, Année : 2009/2010.
- [12] BENYAMMA T., BACI A., Influence de l'effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire sur une paroi lisse. Mémoire de master. Université Biskra, Année: 2017/2018.
- [13] NEMDILI S. Investigation numérique de l'écoulement turbulent et du transitoire de chaleur autour d'un élément cubique avec jet impactant. Thèse de doctorat. USTO d'Oran, 2015.
- [14] GUYON E., HULIN. P., PETIT L., Hydrodynamique physique, 3^{ème} édition, CNRS Editions (EDP Sciences), 2012.
- [15] BILLON.L., Génération et adaptation de maillage volume-couche limite dynamique pour les écoulements turbulents autour de géométries complexe. Thèse de doctorat. Université de Paris, 2016.
- [16]. WHITE F. M., 2011, Viscous Fluid Flow, 3rd edition, McGraw-Hill Education.
- [17] INCROPERA F. P., DEWITT D. P., BERGMAN T. L., LAVINE A. S, 2011, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 7th editions, Wiley.
- [18] GEANKOPLIS C. J., 2003, Transport Processes and Separation Process Principles, 4th edition, Prentice Hall Professional Technical Reference.
- [19] SQUIRES T. M., QUAKE S. R., 2005, Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale, Reviews of Modern Physics, 77(3), 977–1026.
- [20] NABWEY H. A., RASHAD A. M., KHAN W. A., EL-KABEIR S. M. M., ABDELNAEM S., 2023, Heat transfer in MHD flow of Carreau ternary-hybrid nanofluid over a curved surface stretched exponentially. Frontiers in Physics, 11, 1212715.
- [21]. BUONGIORNO J., 2006, Convective transport in nanofluids. Journal of Heat Transfer, 128(3), 240–250.
- [22] Kersalé. E. (2000), "Etude Analytique et numérique du développement d'instabilité MHD dans des structures d'accrétion- Ejection magnétisées". Thèse de Doctorat. Laboratoire d'Astrophysique Grenoble. UJF/CNRS, BP53.F-38041.
- [23] Ressource électronique : Magnétohydrodynamique
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Magn%C3%A9tohydrodynamique>
- [24] LIDE D. R., 2005, CRC Handbook of Chemistry and Physics, 6th edition, CRC Press.

- [25] EATSMAN J. A., CHOI S. U. S., LI S., YU W., THOMPSON L. J., 2001, Anomalously increased effective thermal conductivities of ethylene-glycol based nanofluids containing copper nanoparticles, *Appl. Phys. Lett.*, 78, 718–720.
- [26] SAID Z., SAJID M. U., REHMAN M. M., et al., 2022, A review on the performance of ethylene glycol-based nanofluids in thermal systems. *Journal of Molecular Liquids*, 351, 118682. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2022.118682>.
- [27] ADOMIAN G., *Nonlinear Stochastic systems theory and application in physics*, Kluwer Academic Publisher, 1989.