

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté : TECHNOLOGIE

Département : Electronique

Domaine : SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Filière : Télécommunications

Spécialité : Systèmes des Télécommunications

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème:

**Etude de la Statistique des rapports d'intensités diffractée
par une structure formée de surfaces rugueuses en
polarisation directe**

Présenté par : *BEN AMMAR Roumaissa et DELLOUM Imane*

Encadrant : *LAFIFI Saddek* Professeur *Badji Mokhtar Annaba*

Jury de Soutenance :

BOUKARI Karima	MCA	Badji Mokhtar Annaba	Président
LAFIFI Saddek	Professeur	Badji Mokhtar Annaba	Encadrant
BRIK Fatma	MCA	Badji Mokhtar Annaba	Examineur

Année Universitaire : 2023/2024

Remerciements



On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr LAFIFI Saddek, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa responsabilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury : Mme BOUKARI Karima et Mme BRIK fatima pour l'intérêt qu'ils ont acceptés d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs prépositions.

Dédicaces



Je dédie ce travail à ma mère, la source de tendresse et la lumière qui guide mes routes et qui m'emmène aux chemins de la réussite, pour tous ses sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

A mon père, que dieu ait son âme.

A mes chères frère et sœurs : khaled, amina, leila et sara

A mes papillons: miral et sadim

A ma chère binôme: Imane Delloum

à tout ce qui je connais sans exceptions.

Enfin, j'offre mes bénédictions à tous ceux qui m'ont soutenu dans l'accomplissement de ce travail.

Ben ammar Roumaissa

Dédicaces



Je dédie ce travail à ma mère, la source de tendresse et la lumière qui guide mes routes et qui m'emmène aux chemins de la réussite, pour tous ses sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

A mon père, que je le remercie énormément pour ses efforts, ses conseils et sa surveillance.

A mes chères frère et sœurs : Zaki, Samia, et Wafa.

A ma joie : Zeineb.

A ma chère binôme : Roumaïssa Ben ammar.

A tout ce qui je connais sans exceptions.

Enfin, j'offre mes bénédictions à tous ceux qui m'ont soutenu dans l'accomplissement de ce travail.

Delloum Imane

ملخص

أصبحت مشاكل انعراج الموجات الكهرومغناطيسية من خلال الهياكل المشوهة في السنوات الأخيرة موضوعا هاما من البحوث في الكهرومغناطيسية بفضل مجال واسع للتطبيق في البصريات المتكاملة، والنشر والاتصالات السلكية واللاسلكية. في هذه المذكرة، نحدد بنية مكونة من ثلاث طبقات مفصولة بسطحيتين مشوهتين عشوائيا كثافة الاحتمال لنسبة الشدة للمجالات المتناثرة في الاستقطاب المباشر للواجهات الخام الضعيفة الطول اللانهائي والتوزيعات الغوسية. وتبين لنا أن الكثافة الاحتمالية لنسبة الشدة هي دالة لمعلمتين فقط. بالنسبة لسطح زراعي مكون من طبقتين بنسبة رطوبة 15% و 20% على التوالي، تم تحليل تأثير ارتباط السطوح وتباين السطوح على الصفات الإحصائية المختلفة.

ABSTRACT

The problems of the scattering of electromagnetic waves through deformed structures have become in recent years an important topic of research in electromagnetism thanks to its wide field of application in integrated optics, propagation and telecommunications. In this Master's thesis, we determine for a structure formed by three layers separated by two randomly deformed interfaces the probability density of the intensities ratio of the scattered fields in direct polarizations for weakly rough interfaces of infinite length and the Gaussian heights distributions. We show that the probability density of the intensity ratio is a function of only two parameters. For an agricultural surface formed of two layers with a humidity rate of 15% and 20% respectively, the influence of the correlation of the interfaces and the anisotropy of the surfaces on the different statistical characters is analyzed.

RESUME

Les problèmes de la diffraction des ondes électromagnétiques à travers des structures déformées sont devenus au cours de ces dernières années un important thème de recherche en électromagnétisme grâce à son large domaine d'application en optique intégré, propagation et télécommunication. Dans ce mémoire, nous déterminons pour une structure formée de trois couches séparées par deux interfaces aléatoirement déformées la densité de probabilité du rapport des intensités des champs diffractés en polarisations directes pour des interfaces faiblement rugueuses de longueur infinie et des distributions des hauteurs gaussiennes. Nous montrons que la densité de probabilité du rapport des intensités est une fonction seulement de deux paramètres. Pour une surface agricole formée de deux couches avec un taux d'humidité de 15% et de 20% respectivement, l'influence de la corrélation des interfaces et l'anisotropie des surfaces sur les différents caractères statistiques est analysé.

Liste des figures

Figure I.1. Structure à deux couches non parallèles	05
Figure IV.1 Intensité incohérente dans les quatre polarisations en fonction de l'angle d'observation.	35
Figure IV.2. Pdf du module du champ diffracté dans les quatre polarisations	36
Figure IV.3. Pdf de l'intensité du champ diffracté dans les quatre polarisations	37
Figure IV.4. Pdf et Cdf du rapport des intensités du champ diffracté en polarisation directe dans les quatre configurations.	38

Liste des tableaux

Tableau IV.1. Moyenne et variance du module du champ diffracté dans les quatre polarisations	36
Tableau IV.2. Moyenne et variance de l'intensité diffracté dans les quatre polarisations	37
Tableau IV.3. Moyenne et variance du rapport des intensités en polarisation directe	38

SOMMAIRE

Introduction générale	3
-----------------------	---

Chapitre I : Champs diffractés par une structure bidimensionnelle rugueuse aléatoirement

I.1. Introduction	5
I.2. Présentation du problème	5
I.2.1. Description statistique des surfaces	5
I.2.2. Champ incident, champ diffracté et développements de Rayleigh	6
I.2.3. Conditions aux limites	9
I.3. Méthode de perturbation	12
I. 3.1. Considérations générales	12
I. 3.2. Résolution à l'ordre zéro	12
I.3.3. Résolution à l'ordre un	14

Chapitre II : Étude statistique des champs diffractés par une structure de trois couches 2D rugueuse

II.1. Intensité diffractée, intensité cohérente et intensité incohérente	18
II.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction	19
II.3. Comportements asymptotiques des variances, de la covariance et de l'intensité incohérente	22
II.4. Densités de probabilités	23
II.5. Comportements asymptotiques des densités de probabilité	25

Chapitre III : Propriétés statistiques des rapports des intensités diffractées

III.1. Introduction	27
III.2. Propriétés statistiques des rapports des intensités diffractées	27
III.2.1. La densité de probabilité conjointes des amplitudes de diffractions	30
III.2.2. Densité de probabilité du rapport des intensités	32

Chapitre IV : Résultats Numériques

IV.1. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur l'intensité incohérente	34
IV.2. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur les statistiques du module et de l'intensité	35
IV.3. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur le rapport des intensités en polarisation directe.	37
Conclusion générale	39
Références bibliographiques	40

INTRODUCTION GENERALE

Le problème de la diffraction d'une onde plane par une surface rugueuse bidimensionnelle est un important thème de recherche en électromagnétisme grâce à ses applications dans différents domaines : optique [1-2], télédétection [4], propagation et télécommunication [4-6]. Le but principal de notre étude est de déterminer les effets de la rugosité sur la diffraction de l'onde plane. La diffraction de l'onde à travers la structure rugueuse nécessite le recours aux conditions aux limites qui reste l'une des étapes les plus importantes et aucun problème ne peut y échapper.

Dans ce mémoire pour la même structure proposé dans [7], nous déterminons la densité de probabilité du rapport des intensités des champs diffractés en polarisations directes ($I_{d1}^{(hh)} / I_{d1}^{(vv)}$) pour des interfaces faiblement rugueuses de longueur infinie et des distributions des hauteurs gaussiennes. Des modèles approchés basé sur des études expérimentales ont étudié le rapport des coefficients bistatiques, mais ils ne donnent pas leur distribution statistique [8-9]. Nous montrons que la densité de probabilité du rapport des intensités est une fonction seulement de deux paramètres. Cette probabilité permet de caractériser la structure multicouche. Une telle étude est importante dans la caractérisation de la structure.

Dans le premier chapitre, nous commençons par présenter les propriétés statistiques des surfaces rugueuses et le rappel des expressions des champs diffractés et des conditions aux limites dans le cadre de l'hypothèse de Rayleigh [10-11]. Pour résoudre le problème nous présentons la méthode de perturbation conduisant aux expressions à l'ordre 1 des amplitudes des champs diffractés.

Le second chapitre porte sur les propriétés statistiques des amplitudes de diffraction et de l'intensité diffractée. Nous déterminons les lois de probabilités du module, de la phase et de l'intensité.

Dans le troisième chapitre, à partir des résultats obtenus dans chapitre trois nous déterminons les statistiques du rapport des intensités du champ diffracté à grande distance en fonction des propriétés électriques et des statistiques des deux interfaces du milieu stratifié.

Le chapitre quatre permet d'illustrer sur un exemple naturel les formules analytiques obtenues. La structure analysée représente une surface agricole formée de deux couches avec un taux d'humidité de 15% et de 20% respectivement, où les interfaces sont caractérisées par des fonctions de corrélation gaussienne analysée en bande L [13]. L'effet de la corrélation des interfaces et l'anisotropie des surfaces sur les différents caractères statistiques est analysé.

Chapitre I : Champs diffractés par une structure bidimensionnelle rugueuse

I.1. Introduction

I.2. Présentation du problème

I.2.1. Description statistique des surfaces

I.2.2. Champ incident et développements de Rayleigh

I.2.3. Conditions aux limites

I.3. Méthode de perturbation

I. 3.1. Considérations générales

I. 3.2. Résolution à l'ordre zéro

I.3.3. Résolution à l'ordre un

Chapitre I : Champs diffractés par une structure bidimensionnelle rugueuse aléatoirement

I.1. Introduction

Dans ce chapitre, on considère d'étudier le problème de la diffraction par une structure composée de trois couches bidimensionnelles rugueuse aléatoirement, on s'appuie sur une méthode asymptotique. La principale difficulté pour résoudre ce problème est la détermination des amplitudes de diffraction. La modélisation du signal électromagnétique diffracté par une telle structure passe nécessairement par une bonne description géométrique de la structure. Afin d'obtenir les expressions des champs diffractés, nous utilisons la méthode approchée de petite perturbation (SPM, Small Perturbation Method). Ces expressions nous conduisent, par la suite, au deuxième objectif, qui consiste à faire une étude statistique bien détaillée des champs diffractés.

I.2. Présentation du problème

I.2.1. Description statistique des surfaces

La géométrie du problème est représentée sur la figure 1. La structure est un empilement de deux interfaces non parallèles. Ces deux interfaces sont des plans aléatoirement déformés de dimensions $L \times L$ et séparés par une distance moyenne u_0 . La fonction $a_1(x, y)$ décrit la face supérieure et la fonction $a_2(x, y)$, la face inférieure.

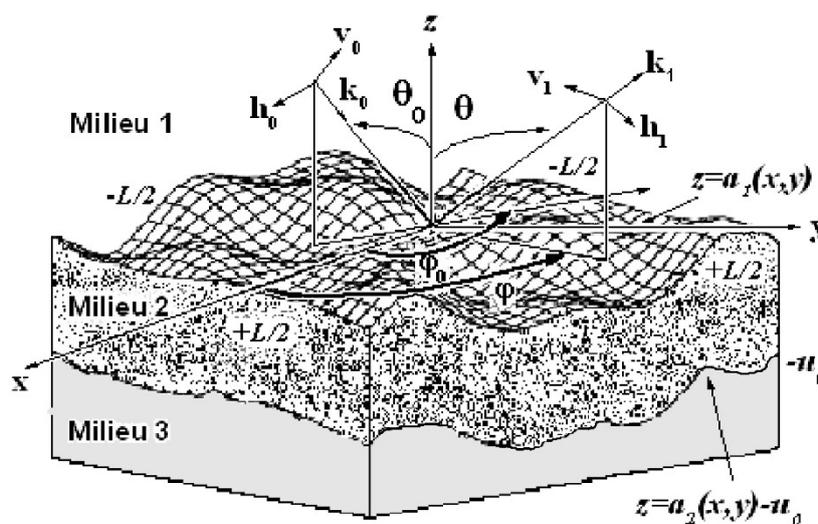


Figure I.1. Structure à deux couches non parallèles

Les fonctions décrivant les deux interfaces sont des processus aléatoires gaussiens centrés ($\langle a_{1,2}(x, y) \rangle = 0, \forall (x, y)$) et stationnaires à l'ordre 2. Par la suite, les crochets $\langle \rangle$ désignent l'espérance mathématique. Les deux fonctions aléatoires peuvent être corrélées ou non corrélées. Les fonctions aléatoires $a_1(x, y)$ et $a_2(x, y)$ peuvent être décrites à partir de relations de filtrage. Pour les applications, nous considérons le cas où les deux interfaces aléatoires présentent des fonctions de corrélation anisotropes. Nous avons les fonctions d'autocorrélation $R_{11,22}(x, y)$ et la fonction d'intercorrélation $R_{12}(x, y)$ suivantes :

$$\begin{aligned} R_{11,22}(x, y) &= \sigma_{1,2}^2 \exp \left[- \left(\frac{x^2}{l_{x1,2}^2} + \frac{y^2}{l_{y1,2}^2} \right) \right] \\ R_{12}(x, y) &= q \sigma_1 \sigma_2 2 \sqrt{\frac{l_{x1} l_{x2} l_{y1} l_{y2}}{(l_{x1}^2 + l_{x2}^2)(l_{y1}^2 + l_{y2}^2)}} \exp \left[- \left(\frac{2x^2}{l_{x1}^2 + l_{x2}^2} + \frac{2y^2}{l_{y1}^2 + l_{y2}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

$l_{x(1,2)}, l_{y(1,2)}$ représentent les longueurs de corrélation suivant x et y et déterminent l'anisotropie de la surface. La surface est isotrope si $l_{x(1,2)} = l_{y(1,2)}$ et anisotrope si $l_{x(1,2)} \neq l_{y(1,2)}$. $\sigma_{1,2}$ la hauteur quadratique. Les spectres associés aux deux interfaces sont eux-mêmes gaussiens avec :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{11,22}(\alpha, \beta) &= \sigma_{1,2}^2 l_{x1,2} l_{y1,2} \pi \exp \left(-\alpha^2 \frac{l_{x1,2}^2}{4} - \beta^2 \frac{l_{y1,2}^2}{4} \right) \\ \hat{R}_{12}(\alpha, \beta) &= q \sigma_1 \sigma_2 \pi \sqrt{l_{x1} l_{x2} l_{y1} l_{y2}} \exp \left[-\alpha^2 \frac{(l_{x1}^2 + l_{x2}^2)}{8} - \beta^2 \frac{(l_{y1}^2 + l_{y2}^2)}{8} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.2a})$$

où $\hat{g}(\alpha, \beta)$ représente la transformée de Fourier bidimensionnelle de $g(x, y)$.

Pour $q = 0$, les interfaces sont non corrélées. Elles sont totalement corrélées quand $q = 1$.

I.2.2. Champ incident, champ diffracté et développements de Rayleigh

Soit le repère cartésien $(Oxyz)$, muni d'une base orthonormée $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. La structure est éclairée par une onde plane de longueur d'onde λ . Son vecteur d'onde \mathbf{k}_0 est repéré dans l'espace par l'angle de site θ_0 par rapport à l'axe (Oz) et l'angle azimut φ_0 dans le plan (xOy) .

$$\mathbf{k}_0 = \alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y} - \gamma_0 \mathbf{z} \quad (\text{I.3})$$

Avec :

$$\alpha_0 = k_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0; \beta_0 = k_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0; \gamma_0 = k_1 \cos \theta_0; \chi_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}; k_1 = |\mathbf{k}_0| = 2\pi / \lambda \quad (\text{I.4})$$

On considère une dépendance temporelle en $\exp(j\omega t)$. Le milieu 1 est assimilé au vide. On note $Z_1 = 120\pi$ l'impédance du vide et $k_1 = 2\pi / \lambda$, le nombre d'onde. Par la suite, les grandeurs, $Z_{1,2,3}$ et $k_{1,2,3}$ désignent les impédances et les nombres d'onde des milieux 1, 2 et 3. Puisque l'onde incidente est une onde plane, \mathbf{k}_0 est perpendiculaire au champ incident, et nous pouvons décomposer le vecteur champ électrique incident \mathbf{E}_0 en deux vecteurs unités \mathbf{h}_0 et \mathbf{v}_0 dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Notons que $(\mathbf{v}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{k}_0 / k_1)$ est un système orthogonale. Les deux vecteurs \mathbf{h}_0 et \mathbf{v}_0 représentent la polarisation horizontale ($E_{//}$) et verticale ($H_{//}$) respectivement, avec :

$$\mathbf{h}_0 = \frac{\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{z}}{|\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{z}|} = \frac{1}{\chi_0} (\beta_0 \mathbf{x} - \alpha_0 \mathbf{y}) \quad (\text{I.5})$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_0 \wedge \frac{\mathbf{k}_0}{k_1} = \frac{\gamma_0}{k_1 \chi_0} (\alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y}) + \frac{\chi_0}{k_1} \mathbf{z} \quad (\text{I.6})$$

Sachant que l'expression du vecteur champs magnétique dans chaque milieu est donné par la relation :

$$\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{k_i Z_i} \wedge \mathbf{E}_i \quad (\text{I.7})$$

Les expressions du champ électrique et magnétique incident peuvent s'écrire :

$$\mathbf{E}_0 = (A_{0(h)} \mathbf{h}_0 + A_{0(v)} \mathbf{v}_0) \exp(-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{I.8})$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{Z_1} (-A_{0(h)} \mathbf{v}_0 + A_{0(v)} \mathbf{h}_0) \exp(-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{I.9})$$

Avec :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z} \quad (\text{I.10})$$

En polarisation horizontale (h) ou $E_{//}$, on a $A_{0(h)} \neq 0; A_{0(v)} = 0$ et en polarisation verticale (v) ou $H_{//}$ $A_{0(h)} = 0; A_{0(v)} \neq 0$.

Les champs diffractés dans les différents milieux s'expriment sous la forme de développements de Rayleigh. Dans le vide, le champ électrique et magnétique diffractés sont donnés sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{1(h)} \mathbf{h}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{v}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{I.11})$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4\pi^2 Z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{1(h)} \mathbf{v}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{h}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{I.12})$$

Dans le milieu 2, il faut considérer des ondes se déplaçant dans les sens $+z$ et $-z$:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(A_{2(h)}^- \mathbf{h}_2^- + A_{2(v)}^- \mathbf{v}_2^-) \exp(+j\mathbf{k}_2^- \cdot \mathbf{r}) \right. \\ \left. + (A_{2(h)}^+ \mathbf{h}_2^+ + A_{2(v)}^+ \mathbf{v}_2^+) \exp(-j\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r}) \right] d\alpha d\beta \quad (\text{I.13})$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi^2 Z_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(-A_{2(h)}^- \mathbf{v}_2^- + A_{2(v)}^- \mathbf{h}_2^-) \exp(+j\mathbf{k}_2^- \cdot \mathbf{r}) \right. \\ \left. + (-A_{2(h)}^+ \mathbf{v}_2^+ + A_{2(v)}^+ \mathbf{h}_2^+) \exp(-j\mathbf{k}_2^+ \cdot \mathbf{r}) \right] d\alpha d\beta \quad (\text{I.14})$$

Dans le milieu 3, le développement de Rayleigh ne fait intervenir que des ondes se déplaçant dans le sens $-z$ avec :

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{3(h)} \mathbf{h}_3^- + A_{3(v)} \mathbf{v}_3^-) \exp(+j\mathbf{k}_3^- \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{I.15})$$

$$\mathbf{H}_3 = \frac{1}{4\pi^2 Z_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{3(h)} \mathbf{v}_3^- + A_{3(v)} \mathbf{h}_3^-) \exp(+j\mathbf{k}_3^- \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{I.16})$$

Avec :

$$\mathbf{k}_i^\pm = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \pm \gamma_i \mathbf{z} \quad (\text{I.17})$$

$$\mathbf{h}_i^\pm = \frac{\mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{z}}{|\mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{z}|} = \frac{1}{\chi} (\beta \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}) \quad (\text{I.18})$$

$$\mathbf{v}_i^\pm = \mathbf{h}_i^\pm \wedge \frac{\mathbf{k}_i^\pm}{k_i} = \frac{\mp \gamma_i}{k_i \chi} (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) + \frac{\chi}{k_i} \mathbf{z} \quad (\text{I.19})$$

$$\text{et : } \chi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Notons que $(\mathbf{v}_i^\pm, \mathbf{h}_i^\pm, \mathbf{k}_i^\pm / k_i)$ est un système orthogonale. Les constantes de propagation γ_i ($i = 1, 2, 3$) présentent une partie imaginaire inférieure ou égale à zéro avec :

$$\gamma_i^2 + \beta^2 + \alpha^2 = k_i^2, \quad \text{Im}(\gamma_i) \leq 0 \quad (\text{I.20})$$

Les constantes de propagation γ_i associées à (α_0, β_0) sont notées $\gamma_{i0} = \gamma_i(\alpha_0, \beta_0)$ avec

$$\gamma_0 = \gamma_{10}.$$

L'hypothèse de Rayleigh s'accorde sur la validité des développements de Rayleigh en tout point de l'espace y compris sur les surfaces limites. Cette hypothèse permet d'écrire les conditions aux limites.

I.2.3. Conditions aux limites

Les inconnues du problèmes sont les amplitudes de diffraction $A_{1(h,v)}, A_{2(h,v)}^-, A_{2(h,v)}^+$ et $A_{3(h,v)}$ des développements de Rayleigh. Pour les calculer, nous utilisons les conditions aux limites sur les deux interfaces.

La continuité des champs électrique et magnétique tangentiels à l'interface supérieure $z = a_1(x, y)$ est exprimée par les deux relations suivantes :

$$\left[\mathbf{n}_1 \wedge (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \right]_{z=a_1(x,y)} = \left[\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{E}_2 \right]_{z=a_1(x,y)} \quad (\text{I.21})$$

$$\left[\mathbf{n}_1 \wedge (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1) \right]_{z=a_1(x,y)} = \left[\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{H}_2 \right]_{z=a_1(x,y)} \quad (\text{I.22})$$

La continuité des champs électrique et magnétique tangentiels à l'interface inférieure $z = a_2(x, y) - u_0$ conduit aux relations suivantes :

$$[\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{E}_2]_{z=a_2(x,y)-u_0} = [\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{E}_3]_{z=a_2(x,y)-u_0} \quad (\text{I.23})$$

$$[\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{H}_2]_{z=a_2(x,y)-u_0} = [\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{H}_3]_{z=a_2(x,y)-u_0} \quad (\text{I.24})$$

Avec $\mathbf{n}_{1,2}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface, et son expression s'écrit :

$$\mathbf{n}_{1,2} = \frac{-a_{1,2x}\mathbf{x} - a_{1,2y}\mathbf{y} + \mathbf{z}}{\sqrt{1 + a_{1,2x}^2 + a_{1,2y}^2}} \quad (\text{I.25})$$

et :

$$a_{1,2x} = \partial a_{1,2}(x, y) / \partial x ; a_{1,2y} = \partial a_{1,2}(x, y) / \partial y \quad (\text{I.26})$$

On a les deux produits vectoriels suivant :

$$\mathbf{n}_{1,2} \wedge \mathbf{h}_i^\pm = \frac{1}{\chi} [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{1,2x} + \beta a_{1,2y}) \mathbf{z}] \quad (\text{I.27})$$

$$\mathbf{n}_{1,2} \wedge \mathbf{v}_i^\pm = \frac{1}{k_i} \left[\left(\pm \frac{\gamma_i \beta}{\chi} - \chi a_{1,2y} \right) \mathbf{x} + \left(\mp \frac{\gamma_i \alpha}{\chi} + \chi a_{1,2x} \right) \mathbf{y} \mp \frac{\gamma_i}{\chi} (\alpha a_{1,2y} - \beta a_{1,2x}) \mathbf{z} \right] \quad (\text{I.28})$$

En remplaçant (I.11-I.16) et (I.27-I.28) dans les expressions des conditions aux limites (I.21-I.24), on obtient deux équations vectorielles pour chaque interface.

A l'interface $z = a_1(x, y)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\chi} [A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 a_1) + A_{1(h)} \exp(-j\gamma_1 a_1)] [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{1x} + \beta a_{1y}) \mathbf{z}] \right. \\
& + \frac{A_{0(v)}}{k_1} \left[-\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} + \chi a_{1y} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi a_{1x} \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_1}{\chi} (\alpha a_{1y} - \beta a_{1x}) \mathbf{z} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 a_1) \\
& + \left. \frac{A_{1(v)}}{k_1} \left[\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} - \chi a_{1y} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi a_{1x} \right) \mathbf{y} - \frac{\gamma_1}{\chi} (\alpha a_{1y} - \beta a_{1x}) \mathbf{z} \right] \exp(-j\gamma_1 a_1) \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (I.29) \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\chi} [A_{2(h)}^- \exp(+j\gamma_2 a_1) + A_{2(h)}^+ \exp(-j\gamma_2 a_1)] [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{1x} + \beta a_{1y}) \mathbf{z}] \right. \\
& + \frac{A_{2(v)}^-}{k_2} \left[\left(-\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} - \chi a_{1y} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi a_{1x} \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha a_{1y} - \beta a_{1x}) \mathbf{z} \right] \exp(+j\gamma_2 a_1) \\
& + \left. \frac{A_{2(v)}^+}{k_2} \left[\left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} - \chi a_{1y} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi a_{1x} \right) \mathbf{y} - \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha a_{1y} - \beta a_{1x}) \mathbf{z} \right] \exp(-j\gamma_2 a_1) \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{Z_1 \chi} [A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 a_1) + A_{1(v)} \exp(-j\gamma_1 a_1)] [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{1x} + \beta a_{1y}) \mathbf{z}] \right. \\
& - \frac{A_{0(h)}}{k_1 Z_1} \left[-\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} + \chi a_{1y} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi a_{1x} \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_1}{\chi} (\alpha a_{1y} - \beta a_{1x}) \mathbf{z} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 a_1) \\
& - \left. \frac{A_{1(h)}}{k_1 Z_1} \left[\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} - \chi a_{1y} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi a_{1x} \right) \mathbf{y} - \frac{\gamma_1}{\chi} (\alpha a_{1y} - \beta a_{1x}) \mathbf{z} \right] \exp(-j\gamma_1 a_1) \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (I.30) \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{Z_2 \chi} [A_{2(v)}^- \exp(+j\gamma_2 a_1) + A_{2(v)}^+ \exp(-j\gamma_2 a_1)] [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{1x} + \beta a_{1y}) \mathbf{z}] \right. \\
& - \frac{A_{2(h)}^-}{k_2 Z_2} \left[-\left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} + \chi a_{1y} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi a_{1x} \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha a_{1y} - \beta a_{1x}) \mathbf{z} \right] \exp(+j\gamma_2 a_1) \\
& - \left. \frac{A_{2(h)}^+}{k_2 Z_2} \left[\left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} - \chi a_{1y} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi a_{1x} \right) \mathbf{y} - \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha a_{1y} - \beta a_{1x}) \mathbf{z} \right] \exp(-j\gamma_2 a_1) \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned}$$

A l'interface $z = a_2(x, y) - u_0$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\chi} [A_{2(h)}^- \exp(+j\gamma_2 (a_2 - u_0)) + A_{2(h)}^+ \exp(-j\gamma_2 (a_2 - u_0))] [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{2x} + \beta a_{2y}) \mathbf{z}] \right. \\
& + \frac{A_{2(v)}^-}{k_2} \left[-\left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} + \chi a_{2y} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi a_{2x} \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha a_{2y} - \beta a_{2x}) \mathbf{z} \right] \exp(+j\gamma_2 (a_2 - u_0)) \\
& + \left. \frac{A_{2(v)}^+}{k_2} \left[\left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} - \chi a_{2y} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi a_{2x} \right) \mathbf{y} - \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha a_{2y} - \beta a_{2x}) \mathbf{z} \right] \exp(-j\gamma_2 (a_2 - u_0)) \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (I.31) \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{A_{3(h)}}{\chi} [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{2x} + \beta a_{2y}) \mathbf{z}] \exp(+j\gamma_3 (a_2 - u_0)) \right. \\
& + \left. \frac{A_{3(v)}}{k_3} \left[-\left(\frac{\gamma_3 \beta}{\chi} + \chi a_{2y} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_3 \alpha}{\chi} + \chi a_{2x} \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_3}{\chi} (\alpha a_{2y} - \beta a_{2x}) \mathbf{z} \right] \exp(+j\gamma_3 (a_2 - u_0)) \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{Z_2 \chi} \left\{ A_{2(v)}^- \exp[+j\gamma_2(a_2 - u_0)] + A_{2(v)}^+ \exp[-j\gamma_2(a_2 - u_0)] \right\} [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{2x} + \beta a_{2y}) \mathbf{z}] \right. \\
& - \frac{A_{2(h)}^-}{k_2 Z_2} \left[-\left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} + \chi a_{2y} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi a_{2x} \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha a_{2y} - \beta a_{2x}) \mathbf{z} \right] \exp[+j\gamma_2(a_2 - u_0)] \\
& \left. - \frac{A_{2(h)}^+}{k_2 Z_2} \left[\left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} - \chi a_{2y} \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi a_{2x} \right) \mathbf{y} - \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha a_{2y} - \beta a_{2x}) \mathbf{z} \right] \exp[-j\gamma_2(a_2 - u_0)] \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (I.32) \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{A_{3(v)}}{Z_3 \chi} [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{1x} + \beta a_{1y}) \mathbf{z}] \exp[+j\gamma_3(a_2 - u_0)] \right. \\
& \left. - \frac{A_{3(h)}}{k_3 Z_3} \left[-\left(\frac{\gamma_3 \beta}{\chi} + \chi a_{2y} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_3 \alpha}{\chi} + \chi a_{2x} \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_3}{\chi} (\alpha a_{2y} - \beta a_{2x}) \mathbf{z} \right] \exp[+j\gamma_3(a_2 - u_0)] \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned}$$

Les équations vectorielles (I.29)-(I.32), peuvent être écrite en tant que trois équations scalaires pour chaque équation vectorielle suivant les directions \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} . On note que les équations scalaires linéaires pour les directions \mathbf{x} et \mathbf{y} sont indépendantes, alors que les équations scalaires linéaires pour des directions \mathbf{z} ne sont pas indépendantes. Pour résoudre les équations scalaires linéaires et déterminer les expressions analytiques des amplitudes de diffraction $A_{1(h,v)}$, $A_{2(h,v)}^-$, $A_{2(h,v)}^+$ et $A_{3(h,v)}$, on utilise la méthode de perturbation.

I.3. Méthode de perturbation

I.3.1. Considérations générales

Lorsque les hauteurs quadratiques moyennes des interfaces sont faibles devant la longueur d'onde, une bonne approximation consiste à représenter les amplitudes de diffraction et les fonctions exponentielles par leur développement en séries entières

$$A_{i(h,v)}^\pm(\alpha, \beta) = \sum_p A_{i(h,v)}^{\pm(p)}(\alpha, \beta) ; \quad \exp[\pm j\gamma_i a_{1,2}(x, y)] = \sum_p \frac{[\pm j\gamma_i a_{1,2}(x, y)]^p}{p!} \quad (I.33)$$

I.3.2. Résolution à l'ordre zéro

A l'ordre zéro, les deux interfaces sont lisses. A partir des équations scalaires et le système d'équations (I.29-I.32) s'écrit sous la forme de deux systèmes d'équations linéaires séparés en polarisation horizontale (E//) et en polarisation verticale (H//) :

En polarisation horizontale (E//) :

$$A_{1(h)} - A_{2(h)}^+ - A_{2(h)}^- = -A_{0(h)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.34a})$$

$$\gamma_1 A_{1(h)} - \gamma_2 A_{2(h)}^+ + \gamma_2 A_{2(h)}^- = \gamma_1 A_{0(h)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.34b})$$

$$\exp(+j\gamma_2 u_0) A_{2(h)}^+ + \exp(-j\gamma_2 u_0) A_{2(h)}^- - \exp(-j\gamma_3 u_0) A_{3(h)} = 0 \quad (\text{I.34c})$$

$$\gamma_2 \exp(+j\gamma_2 u_0) A_{2(h)}^+ - \gamma_2 \exp(-j\gamma_2 u_0) A_{2(h)}^- + \gamma_3 \exp(-j\gamma_3 u_0) A_{3(h)} = 0 \quad (\text{I.34d})$$

En polarisation verticale ($H_{//}$) :

$$k_1 A_{1(v)} - k_2 A_{2(v)}^+ - k_2 A_{2(v)}^- = -k_1 A_{0(v)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.35a})$$

$$\frac{\gamma_1}{k_1} A_{1(v)} - \frac{\gamma_2}{k_2} A_{2(v)}^+ + \frac{\gamma_2}{k_2} A_{2(v)}^- = \frac{\gamma_1}{k_1} A_{0(v)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.35b})$$

$$k_2 \exp(+j\gamma_2 u_0) A_{2(v)}^+ + k_2 \exp(-j\gamma_2 u_0) A_{2(v)}^- - k_3 \exp(-j\gamma_3 u_0) A_{3(v)} = 0 \quad (\text{I.35c})$$

$$\frac{\gamma_2}{k_2} \exp(+j\gamma_2 u_0) A_{2(v)}^+ - \frac{\gamma_2}{k_2} \exp(-j\gamma_2 u_0) A_{2(v)}^- + \frac{\gamma_3}{k_3} \exp(-j\gamma_3 u_0) A_{3(v)} = 0 \quad (\text{I.35d})$$

La résolution de ces deux systèmes donne les amplitudes cohérentes à l'ordre zéro, soit :

En polarisation horizontale ($E_{//}$) :

$$A_{1(h)}^{(0)} = \frac{\gamma_2(\gamma_1 - \gamma_3)\cos(\gamma_2 u_0) + j(\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2)\sin(\gamma_2 u_0)}{r_h(\gamma)} A_{0(h)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.36a})$$

$$A_{2(h)}^{+(0)} = \frac{\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_3)\exp(-j\gamma_2 u_0)}{r_h(\gamma)} A_{0(h)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.36b})$$

$$A_{2(h)}^{-(0)} = \frac{\gamma_1(\gamma_2 + \gamma_3)\exp(+j\gamma_2 u_0)}{r_h(\gamma)} A_{0(h)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.36c})$$

$$A_{3(h)}^{(0)} = \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \exp(+j\gamma_3 u_0)}{r_h(\gamma)} A_{0(h)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.36d})$$

En polarisation verticale ($H_{//}$) :

$$A_{1(v)}^{(0)} = \frac{k_2^2 \gamma_2 (k_3^2 \gamma_1 - k_1^2 \gamma_3)\cos(\gamma_2 u_0) + j(\gamma_1 \gamma_3 k_2^4 - \gamma_2^2 k_1^2 k_3^2)\sin(\gamma_2 u_0)}{r_v(\gamma)} A_{0(v)}\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.37a})$$

$$A_{2(v)}^{+(0)} = \frac{k_1 k_2 \gamma_1 (\gamma_2 k_3^2 - \gamma_3 k_2^2) \exp(-j\gamma_2 u_0)}{r_v(\gamma)} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.37b})$$

$$A_{2(v)}^{-(0)} = \frac{k_1 k_2 \gamma_1 (\gamma_2 k_3^2 + \gamma_3 k_2^2) \exp(+j\gamma_2 u_0)}{r_v(\gamma)} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.37c})$$

$$A_{3(v)}^{(0)} = \frac{2\gamma_1 \gamma_2 k_1 k_3 k_2^2 \exp(+j\gamma_3 u_0)}{r_v(\gamma)} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{I.37d})$$

Avec :

$$r_h(\gamma) = \gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_3) \cos(\gamma_2 u_0) + j(\gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_3) \sin(\gamma_2 u_0) \quad (\text{I.38})$$

$$r_v(\gamma) = k_2^2 \gamma_2 (k_3^2 \gamma_1 + k_1^2 \gamma_3) \cos(\gamma_2 u_0) + j(k_1^2 k_3^2 \gamma_2^2 + k_2^4 \gamma_1 \gamma_3) \sin(\gamma_2 u_0) \quad (\text{I.39})$$

Notons que les solutions à l'ordre zéro représentent les amplitudes cohérentes du problème de la diffraction.

I.3.3. Résolution à l'ordre un

Le phénomène de diffraction est analysé au premier ordre de la perturbation et les solutions du problème représentent les amplitudes incohérentes. A partir des équations linéaires scalaires issues des équations vectorielles (I.29) -(I.32), les amplitudes à l'ordre un peuvent être séparé suivant la polarisation de l'onde diffractée en deux systèmes linéaires indépendants.

Tous calculs faits, nous trouvons pour l'amplitude de diffraction au-dessus de la surface :

$$\begin{aligned} A_{1(h)}^{(1)} &= A_{1(hh)}^{(1)} + A_{1(hv)}^{(1)} \\ A_{1(v)}^{(1)} &= A_{1(vh)}^{(1)} + A_{1(vv)}^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

Avec :

$$A_{1(hh)}^{(1)} = \frac{2j\gamma_{10} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma) r_h(\gamma_0)} \left\{ \begin{aligned} & \left[(k_1^2 - k_2^2) [\gamma_2 \cos(\gamma_2 u_0) + j\gamma_3 \sin(\gamma_2 u_0)] \times \right. \\ & \left. [\gamma_{20} \cos(\gamma_{20} u_0) + j\gamma_{30} \sin(\gamma_{20} u_0)] \widehat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right] \\ & + (k_2^2 - k_3^2) \gamma_2 \gamma_{20} \widehat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \end{aligned} \right\} A_{0(h)} \quad (\text{I.41})$$

$$A_{1(hv)}^{(1)} = \frac{2jk_1 \gamma_{10} \gamma_{20} \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma) r_v(\gamma_0)} \left\{ \begin{aligned} & \left[(k_1^2 - k_2^2) [\gamma_2 \cos(\gamma_2 u_0) + j\gamma_3 \sin(j\gamma_2 u_0)] \times \right. \\ & \left. [k_2^2 \gamma_{30} \cos(\gamma_{20} u_0) + jk_3^2 \gamma_{20} \sin(\gamma_{20} u_0)] \widehat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right] \\ & + (k_2^2 - k_3^2) k_2^2 \gamma_2 \gamma_{30} \widehat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \end{aligned} \right\} A_{0(v)} \quad (\text{I.42})$$

$$A_{1(vh)}^{(1)} = \frac{2jk_1\gamma_{10}\gamma_2 \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_v(\gamma)r_h(\gamma_0)} \left\{ \begin{array}{l} (k_1^2 - k_2^2) [k_2^2\gamma_3 \cos(\gamma_2 u_0) + jk_3^2\gamma_2 \sin(\gamma_2 u_0)] \times \\ [\gamma_{20} \cos(\gamma_{20} u_0) + j\gamma_{30} \sin(\gamma_{20} u_0)] \widehat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \\ + (k_2^2 - k_3^2) k_2^2 \gamma_{20} \gamma_3 \widehat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \end{array} \right\} A_{0(h)} \quad (I.43)$$

$$A_{1(vv)}^{(1)} = \frac{2j\gamma_{10}}{r_v(\gamma)r_v(\gamma_0)} \left(k_1^2 - k_2^2 \right) \left\{ \begin{array}{l} k_2^2 \chi \chi_0 [k_3^2 \gamma_2 \cos(\gamma_2 u_0) + jk_2^2 \gamma_3 \sin(\gamma_2 u_0)] \times \\ [k_3^2 \gamma_{20} \cos(\gamma_{20} u_0) + jk_2^2 \gamma_{30} \sin(\gamma_{20} u_0)] \\ - k_1^2 \gamma_2 \gamma_{20} \cos(\varphi - \varphi_0) [k_2^2 \gamma_3 \cos(\gamma_2 u_0) + jk_3^2 \gamma_2 \sin(\gamma_2 u_0)] \times \\ [k_2^2 \gamma_{30} \cos(\gamma_{20} u_0) + jk_2^2 \gamma_{20} \sin(\gamma_{20} u_0)] \\ + (k_2^2 - k_3^2) k_1^2 k_2^2 \gamma_{20} \gamma_2 [k_3^2 \chi \chi_0 - k_2^2 \gamma_{30} \gamma_3 \cos(\varphi - \varphi_0)] \widehat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \end{array} \right\} \widehat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) A_{0(v)} \quad (I.44)$$

Les amplitudes à l'ordre un dans le milieu 2 et 3.

Dans le milieu 2 :

$$A_{2(h)}^{\pm(1)} = A_{2(hh)}^{\pm(1)} + A_{2(hv)}^{\pm(1)} \quad (I.45)$$

Avec :

$$A_{2(hh)}^{+(1)} = \frac{j\gamma_{10} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma)r_h(\gamma_0)} \left\{ \begin{array}{l} (k_1^2 - k_2^2)(\gamma_2 - \gamma_3) \exp(-j\gamma_2 u_0) \times \\ [\gamma_{20} \cos(\gamma_{20} u_0) + j\gamma_{30} \sin(\gamma_{20} u_0)] \widehat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \\ + (k_2^2 - k_3^2) \gamma_{20} (\gamma_1 + \gamma_2) \widehat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \end{array} \right\} A_{0(h)} \quad (I.46)$$

$$A_{2(hv)}^{+(1)} = \frac{jk_1\gamma_{10}\gamma_{20} \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma)r_v(\gamma_0)} \left\{ \begin{array}{l} (k_1^2 - k_2^2)(\gamma_2 - \gamma_3) \exp(-j\gamma_2 u_0) \times \\ [k_2^2 \gamma_{30} \cos(\gamma_{20} u_0) + jk_3^2 \gamma_{20} \sin(\gamma_{20} u_0)] \widehat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \\ + k_2^2 (k_2^2 - k_3^2) \gamma_{30} (\gamma_1 + \gamma_2) \widehat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \end{array} \right\} A_{0(v)} \quad (I.47)$$

$$A_{2(hh)}^{-(1)} = \frac{j\gamma_{10} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma)r_h(\gamma_0)} \left\{ \begin{array}{l} (k_1^2 - k_2^2)(\gamma_2 + \gamma_3) \exp(+j\gamma_2 u_0) \times \\ [\gamma_{20} \cos(\gamma_{20} u_0) + j\gamma_{30} \sin(\gamma_{20} u_0)] \widehat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \\ - (k_2^2 - k_3^2) \gamma_{20} (\gamma_1 - \gamma_2) \widehat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \end{array} \right\} A_{0(h)} \quad (I.48)$$

$$A_{2(hv)}^{-(1)} = \frac{jk_1\gamma_{10}\gamma_{20} \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma)r_v(\gamma_0)} \left\{ \begin{array}{l} (k_1^2 - k_2^2)(\gamma_2 + \gamma_3) \exp(+j\gamma_2 u_0) \times \\ [k_2^2 \gamma_{30} \cos(\gamma_{20} u_0) + jk_3^2 \gamma_{20} \sin(\gamma_{20} u_0)] \widehat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \\ - k_2^2 (k_2^2 - k_3^2) \gamma_{30} (\gamma_1 - \gamma_2) \widehat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \end{array} \right\} A_{0(v)} \quad (I.49)$$

Dans le milieu 3 :

$$A_{3(h)}^{(1)} = A_{3(hh)}^{(1)} + A_{3(hv)}^{(1)} \quad (I.50)$$

Avec :

$$A_{3(hh)}^{(1)} = \frac{2j\gamma_{10} \cos(\varphi - \varphi_0) \exp(+j\gamma_3 u_0)}{r_h(\gamma) r_h(\gamma_0)} \times \left. \begin{aligned} & \left\{ \gamma_2 (k_1^2 - k_2^2) [\gamma_{20} \cos(\gamma_{20} u_0) + j\gamma_{30} \sin(\gamma_{20} u_0)] \hat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right\} \\ & \left\{ + \gamma_{20} (k_2^2 - k_3^2) [\gamma_2 \cos(\gamma_2 u_0) + j\gamma_1 \sin(\gamma_2 u_0)] \hat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right\} \end{aligned} \right\} A_{0(h)} \quad (I.51)$$

$$A_{3(hv)}^{(1)} = \frac{2jk_1\gamma_{10}\gamma_{20} \sin(\varphi - \varphi_0) \exp(+j\gamma_3 u_0)}{r_h(\gamma) r_v(\gamma_0)} \times \left. \begin{aligned} & \left\{ \gamma_2 (k_1^2 - k_2^2) [k_2^2 \gamma_{30} \cos(\gamma_{20} u_0) + jk_3^2 \gamma_{20} \sin(\gamma_{20} u_0)] \hat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right\} \\ & \left\{ + k_2^2 (k_2^2 - k_3^2) \gamma_{30} [\gamma_2 \cos(\gamma_2 u_0) + j\gamma_1 \sin(\gamma_2 u_0)] \hat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right\} \end{aligned} \right\} A_{0(v)} \quad (I.52)$$

et :

$$r_h(\gamma_0) = \gamma_{20} (\gamma_{10} + \gamma_{30}) \cos(\gamma_{20} u_0) + j(\gamma_{20}^2 + \gamma_{10}\gamma_{30}) \sin(\gamma_{20} u_0) \quad (I.53)$$

$$r_v(\gamma_0) = k_2^2 \gamma_{20} (k_3^2 \gamma_{10} + k_1^2 \gamma_{30}) \cos(\gamma_{20} u_0) + j(k_1^2 k_3^2 \gamma_{20}^2 + k_2^4 \gamma_{10} \gamma_{30}) \sin(\gamma_{20} u_0) \quad (I.54)$$

$\hat{a}_{1,2}(\alpha, \beta)$ est la transformées de Fourier bidimensionnelle de la fonctions $a_{1,2}(x, y)$ divisées par L :

$$\hat{a}_{1,2}(\alpha, \beta) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} a_{1,2}(x, y) \exp[j(\alpha x + \beta y)] dx dy \quad (I.55)$$

Chapitre II

Étude statistique des champs diffractés par une structure de trois couches 2D rugueuses

II.1. Intensité diffractée, intensité cohérente et intensité incohérente

II.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction

II.3. Comportements asymptotiques des variances, de la covariance et de l'intensité incohérente

II.4. Densités de probabilité

II.5. Comportements asymptotiques des densités de probabilité

Chapitre II : Étude statistique des champs diffractés par une structure de trois couches 2D rugueuses aléatoirement

II.1. Intensité diffractée, intensité cohérente et intensité incohérente

A grande distance, la dépendance angulaire du champ diffracté est donnée par le produit $A_{1(ba)}^{(1)}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi) \cos \theta$. Cette dépendance conduit au coefficient de diffusion bistatique $I_{d1}^{(ba)}(\theta, \varphi)$ qui est défini comme la densité angulaire de puissance diffractée sous la direction (θ, φ) avec θ son angle au zénith et φ son angle d'azimut divisée par la puissance incidente $P_0^{(a)}$. L'indice supérieur (a) donne la polarisation de l'onde incidente (h ou v) et (b) la polarisation de l'onde diffracté. A l'ordre 1 de la méthode des petites perturbations, nous obtenons :

$$I_{d1}^{(ba)}(\theta, \varphi) = \frac{\cos^2 \theta}{\lambda^2 \cos \theta_0} \left| A_{1(ba)}^{(1)}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi) \right|^2 \quad (\text{II.1})$$

$A_{1(ba)}^{(1)}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi)$ est une fonction aléatoire des angles d'observations (θ, φ) . Puisque $\langle a_1(x, y) \rangle = \langle a_2(x, y) \rangle = 0$, nous déduisons que l'amplitude de diffraction est une variable aléatoire centrée ($\langle A_{1(ba)}^{(1)}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi) \rangle = 0$) et que le champ cohérent et l'intensité cohérente sont nuls. Le coefficient bistatique moyen s'identifie donc à l'intensité incohérente avec :

$$\langle I_{d1}^{(ba)}(\theta, \varphi) \rangle = I_f^{(ba)}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\lambda^2 \cos \theta_0} \left[\langle R_{(ba)}^2(\alpha, \beta) \rangle + \langle I_{(ba)}^2(\alpha, \beta) \rangle \right] \quad (\text{II.2})$$

où : $-\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2$; $0 \leq \varphi \leq \pi$.

et : $R_{(ba)}(\alpha, \beta) = \text{Re}[A_{1(ba)}^{(1)}(\alpha, \beta)]$; $I_{(ba)}(\alpha, \beta) = \text{Im}[A_{1(ba)}^{(1)}(\alpha, \beta)]$; $\alpha = k_1 \sin \theta \cos \varphi$; $\beta = k_1 \sin \theta \sin \varphi$

II.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction

D'après (I.42-I.45), nous trouvons pour l'amplitude de diffraction au-dessus de la surface s'écrit :

$$A_{1(ba)}^{(1)}(\alpha, \beta) = K_{1(ba)} \hat{a}_1(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) + K_{2(ba)} \hat{a}_2(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \quad (\text{II.3})$$

D'après la relation (II.3), les parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction sont données sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} R_{(ba)}(\alpha, \beta) &= \text{Re}(K_{1(ba)}) \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] - \text{Im}(K_{1(ba)}) \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \\ &\quad + \text{Re}(K_{2(ba)} K_{(ba)}^{a_2}) \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] - \text{Im}(K_{2(ba)}) \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \\ I_{(ba)}(\alpha, \beta) &= \text{Im}(K_{1(ba)}) \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] + \text{Re}(K_{1(ba)}) \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \\ &\quad + \text{Im}(K_{2(ba)}) \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] + \text{Re}(K_{2(ba)}) \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha - \alpha_0 = k_1 (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0); \\ \xi &= \beta - \beta_0 = k_1 (\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Et

$$\begin{aligned} \text{Re}[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)] &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} a_{1,2}(x, y) \cos(\zeta x + \xi y) dx dy \\ \text{Im}[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)] &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \hat{a}_{1,2}(x, y) \sin(\zeta x + \xi y) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Les variances et la covariance des parties réelle et imaginaire de la fonction aléatoire $A_{1(ba)}^{(1)}(\alpha, \beta)$ dépendent des variances et des covariances associées aux différentes grandeurs $\text{Re}[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)]$ et $\text{Im}[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)]$. A partir de l'expression (II.4), nous obtenons les variances $\sigma_{R(ba)}^2$ et $\sigma_{I(ba)}^2$ et la covariance $\Gamma_{RI(ba)}$ des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
\sigma_{R(ba)}^2 &= \langle R_{(ba)}^2(\alpha, \beta) \rangle \\
&= \text{Re}^2(K_{1ba}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Im}^2(K_{1ba}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \rangle \\
&+ \text{Re}^2(K_{2ba}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Im}^2(K_{2ba}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\
&+ 2 \text{Re}(K_{1ba}) \text{Re}(K_{2ba}) \langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\
&+ 2 \text{Im}(K_{1ba}) \text{Im}(K_{2ba}) \langle \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\
&+ 2 \text{Im}(K_{1ba}) K_{2ba}^* \langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle
\end{aligned} \tag{II.7a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{I(ba)}^2 &= \langle I_{(ba)}^2(\alpha, \beta) \rangle \\
&= \text{Re}^2(K_{1ba}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Im}^2(K_{1ba}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \rangle \\
&+ \text{Re}^2(K_{2ba}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Im}^2(K_{2ba}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\
&+ 2 \text{Im}(K_{1ba}) \text{Im}(K_{2ba}) \langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\
&+ 2 \text{Re}(K_{1ba}) \text{Re}(K_{2ba}) \langle \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\
&+ 2 \text{Im}(K_{1ba}) K_{2ba}^* \langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle
\end{aligned} \tag{II.7b}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{RI(ba)} &= \langle R_{(ba)}(\alpha, \beta) I_{(ba)}(\alpha, \beta) \rangle \\
&= \text{Re}(K_{1ba}) \text{Im}(K_{1ba}) \left(\langle \text{Re}^2[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \rangle - \langle \text{Im}^2[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \rangle \right) \\
&+ \text{Re}(K_{2ba}) \text{Im}(K_{2ba}) \left(\langle \text{Re}^2[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle - \langle \text{Im}^2[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \right) \\
&+ \text{Im}(K_{1ba}) K_{2ba}^* \left(\begin{aligned} &\langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\ &- \langle \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{II.7c}$$

Les variances des parties réelle et imaginaire des transformées de Fourier $\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)$ se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\langle \text{Re}^2[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)] \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos(\zeta x + \xi y) R_{1,2}(x, y) dx dy \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \text{sinc}[\zeta(L - |x|)] \text{sinc}[\xi(L - |y|)] R_{1,2}(x, y) dx dy
\end{aligned} \tag{II.8a}$$

$$\begin{aligned}
\langle \text{Im}^2[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)] \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos(\zeta x + \xi y) R_{1,2}(x, y) dx dy \\
&- \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \text{sinc}[\zeta(L - |x|)] \text{sinc}[\xi(L - |y|)] R_{1,2}(x, y) dx dy
\end{aligned} \tag{II.8b}$$

où $\text{sinc}x = \sin x / x$. Nous pouvons par ailleurs montrer que $\text{Re}[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)]$ et $\text{Im}[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)]$ sont non corrélées :

$$\langle \text{Re}[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)] \rangle = 0 \quad (\text{II.8c})$$

Si les surfaces sont corrélées, les covariances associées à $\hat{a}_1(\zeta, \xi)$ et $\hat{a}_2(\zeta, \xi)$ sont non nulles avec :

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos(\zeta x + \xi y) R_{12}(x, y) dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \text{sinc}[\zeta(L - |x|)] \text{sinc}[\xi(L - |y|)] R_{12}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.8d})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos(\zeta x + \xi y) R_{12}(x, y) dx dy \\ &- \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \text{sinc}[\zeta(L - |x|)] \text{sinc}[\xi(L - |y|)] R_{12}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.8e})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle &= - \langle \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin(\zeta x + \xi y) R_{12}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.8f})$$

Pour une valeur du couple (α, β) donnée, les relations (II.7a) et (II.7b) montrent que les variables aléatoires $R_{(ba)}(\alpha, \beta)$ et $I_{(ba)}(\alpha, \beta)$ présentent, dans le cas général, des variances différentes. La relation (II.8c) indique que ces variables aléatoires sont corrélées quelle que soit l'état corrélé ou non corrélé des deux interfaces. En remplaçant (II.8a-II.8f) dans (II.2), nous montrons que l'intensité incohérente dépend aussi de la longueur L et des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélations :

$$I_{f1}^{(ba)}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta_0} \left(\int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \left[|K_{1(ba)}|^2 R_{11}(x, y) + |K_{2(ba)}|^2 R_{22}(x, y) \right] \cos(\zeta x + \xi y) dx dy \right. \\ \left. + \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) 2 \text{Re} \left\{ K_{1(ba)} K_{2(ba)}^* \exp[-j(\zeta x + \xi y)] \right\} R_{12}(x, y) dx dy \right) \quad (\text{II.9})$$

Sachant que $A_{1(hh)}^{(1)} = -A_{1(vv)}^{(1)}$ et $A_{1(hv)}^{(1)} = A_{1(vh)}^{(1)}$ pour $\theta = \theta_0 = 0$, l'intensité incohérente rétrodiffusée en incidence normale présente la même valeur en polarisation direct et croisée respectivement. Dans le cas de surfaces non corrélées, la fonction d'intercorrélacion est nulle et l'expression (II.9) de l'intensité incohérente se simplifie avec $R_{12}(x, y) = 0$.

II.3. Comportements asymptotiques des variances, de la covariance et de l'intensité incohérente

D'après (II.8a-b) et (II.8d-f), on démontre qu'en dehors de la réflexion spéculaire $(\zeta, \xi) \neq (0, 0)$ et pour $L \rightarrow +\infty$,

$$\langle \text{Re}^2[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)] \rangle = \langle \text{Im}^2[\hat{a}_{1,2}(\zeta, \xi)] \rangle = \frac{\hat{R}_{1,2}(\zeta, \xi)}{2} \quad (\text{II.10a})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle &= \langle \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\ &= \frac{\hat{R}_{12}(\zeta, \xi) + \hat{R}_{12}(-\zeta, -\xi)}{4} \end{aligned} \quad (\text{II.10b})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle &= - \langle \text{Im}[\hat{a}_1(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_2(\zeta, \xi)] \rangle \\ &= \frac{\hat{R}_{12}(\zeta, \xi) - \hat{R}_{12}(-\zeta, -\xi)}{4j} \end{aligned} \quad (\text{II.10c})$$

En substituant (II.10a) et (II.10b) dans (II.7a), (II.7b) et (II.7c), nous démontrons que pour des interfaces corrélées ou non corrélées, les variables aléatoires $R_{(ba)}(\alpha, \beta)$ et $I_{(ba)}(\alpha, \beta)$ sont non corrélées ($\Gamma_{RI(ba)} = 0$) pour $L \rightarrow +\infty$ et présente la même variance :

$$\sigma_{R(ba)}^2 = \sigma_{I(ba)}^2 = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &|K_{1(ba)}|^2 \hat{R}_{11}(\zeta, \xi) + |K_{2(ba)}|^2 \hat{R}_{22}(\zeta, \xi) \\ &+ K_{1(ba)}^* K_{2(ba)} \hat{R}_{12}(\zeta, \xi) + K_{1(ba)} K_{2(ba)}^* \hat{R}_{12}(-\zeta, -\xi) \end{aligned} \right] \quad (\text{II.11})$$

A partir de (II.9) et compte tenu de la symétrie hermitienne de la fonction $\hat{R}_{12}(\alpha, \beta)$, nous montrons que l'intensité incohérente s'exprime sous la forme suivante :

$$I_f^{(ba)}(\theta, \varphi) = \frac{|K_{1(ba)}|^2 \hat{R}_{11}(\zeta, \xi) + |K_{2(ba)}|^2 \hat{R}_{22}(\zeta, \xi)}{\lambda^2 \cos \theta_0} \cos^2 \theta + \frac{2 \operatorname{Re} [K_{1(ba)}^* K_{2(ba)} \hat{R}_{12}(\zeta, \xi)]}{\lambda^2 \cos \theta_0} \cos^2 \theta \quad (\text{II.12})$$

II.4. Densités de probabilité

Nous supposons que les densités de probabilité des hauteurs des deux interfaces sont des gaussiennes. Le caractère gaussien est conservé par opération linéaire. La transformée de Fourier est une opération linéaire donc les transformées de Fourier des fonctions aléatoires $a_1(x, y)$ et $a_2(x, y)$ sont aussi des processus gaussiens. La somme de deux processus gaussiens est un processus gaussien. En conséquence, les amplitudes de diffraction sont des processus gaussiens de la variable α et β . Les deux variables aléatoires centrées $R_{(ba)}(\alpha, \beta)$ et $I_{(ba)}(\alpha, \beta)$ sont, dans le cas général, corrélées et présentent des variances différentes. La densité de probabilité conjointe est donc donnée par l'expression suivante.

$$p_{RI}(x, y) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{(ba)}^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_{R(ba)}^2} - \frac{2\rho_{(ba)}xy}{\sigma_{R(ba)}\sigma_{I(ba)}} + \frac{y^2}{\sigma_{I(ba)}^2} \right) \right]}{2\pi\sigma_{R(ba)}\sigma_{I(ba)}\sqrt{(1-\rho_{(ba)}^2)}} \quad (\text{II.13})$$

où $\rho_{(ba)}$ est le coefficient de corrélation :

$$\rho_{(ba)} = \frac{\Gamma_{(ba)}}{\sigma_{R(ba)}\sigma_{I(ba)}} \quad (\text{II.14})$$

En passant en coordonnées polaires, nous obtenons la densité de probabilité conjointe des

variables aléatoires M et Ψ :

$$p_{M\Psi}(m, \phi) = mp_{RI}(m \cos \phi, m \cos \phi) \quad (\text{II.15})$$

En intégrant par rapport à ϕ , on obtient la densité de probabilité du module de l'amplitude définie pour $m \geq 0$:

$$p_{M(ba)}(m) = \frac{m}{\sigma_{R(ba)}\sigma_{I(ba)}\sqrt{1-\rho_{(ba)}^2}} \exp \left[-\frac{m^2}{4(1-\rho_{(ba)}^2)} \left(\frac{1}{\sigma_{R(ba)}^2} + \frac{1}{\sigma_{I(ba)}^2} \right) \right] \times I_0 \left[\frac{m^2}{4(1-\rho_{(ba)}^2)} \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_{R(ba)}^2} - \frac{1}{\sigma_{I(ba)}^2} \right)^2 + 4 \frac{\rho_{(ba)}^2}{\sigma_{R(ba)}^2 \sigma_{I(ba)}^2}} \right] \quad (\text{II.16})$$

où I_0 la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro. Pour des surfaces corrélées ou non corrélées, le module de l'amplitude de diffraction obéit donc à une loi de Hoyt. La densité de probabilité $p_{I_d}(w)$ de l'intensité diffractée se déduit de la densité de probabilité du module $p_M(m)$ par la relation suivante :

$$p_{I_d^{(ba)}}(w) = \frac{1}{2\sqrt{w \cos^2 \theta / \lambda \cos \theta_0}} p_M(\sqrt{w \lambda \cos \theta_0 / \cos^2 \theta}) \quad \text{avec } w \geq 0 \quad (\text{II.17})$$

La densité de probabilité de la phase est obtenue par intégration de $p_{M\Psi}(m, \phi)$ par rapport à m de 0 à $+\infty$.

$$p_{\Phi(ba)}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\rho_{(ba)}^2}}{\frac{\sigma_{I(ba)}}{\sigma_{R(ba)}} \cos^2 \phi - \rho_{(ba)} \sin 2\phi + \frac{\sigma_{R(ba)}}{\sigma_{I(ba)}} \sin^2 \phi} \quad (\text{II.18})$$

La phase est non uniforme sur $[-\pi; \pi]$.

II.5. Comportements asymptotiques des densités de probabilité

Si $L \rightarrow +\infty$, la covariance et le coefficient de corrélation sont nuls et les variances $\sigma_{R(ba)}^2$ et $\sigma_{I(ba)}^2$ sont égales. En conséquence, le module du champ diffracté à grande distance suit une loi de Rayleigh, l'intensité de diffraction suit une loi exponentielle et la phase est uniforme sur $[-\pi; \pi]$. Ce résultat est établi pour des interfaces corrélées ou non corrélées. La forme des densités de probabilité ne permet donc pas de différencier l'état corrélé de l'état non corrélé. De plus, on peut montrer que le champ diffracté par une simple interface obéit aux mêmes lois de probabilité que le champ diffracté par deux interfaces (seuls changent les paramètres de ces lois). La forme des densités de probabilité ne permet pas non plus de différencier la simple surface du milieu stratifié.

$$p_{M(ba)}(m) = \frac{m}{\sigma_{R(ba)}^2} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma_{R(ba)}^2}\right) \text{ pour } m \geq 0 \quad (\text{II.19})$$

$$p_{I_d^{(ba)}}(w) = \frac{\lambda^2 \cos \theta_0}{2\sigma_{R(ba)}^2 \cos^2 \theta} \exp\left(-\frac{w\lambda^2 \cos \theta_0}{2\sigma_{R(ba)}^2 \cos^2 \theta}\right) \text{ pour } w \geq 0 \quad (\text{II.20})$$

$$p_{\Phi(ba)}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \text{ pour } \phi \in [-\pi; \pi] \quad (\text{II.21})$$

Chapitre III. Propriétés statistiques des rapports des intensités diffractées

III.1. Introduction

III.2. Propriétés statistiques des rapports des intensités diffractées.

III.2.1. La densité de probabilité conjointes des amplitudes de diffractions

III.2.2. Densité de probabilité du rapport des intensités

Chapitre III. Propriétés statistiques des rapports des intensités diffractées

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, pour une structure à trois couches, nous déterminons la densité de probabilité du rapport des intensités des champs diffractés en polarisations directes ($I_{d1}^{(hh)} / I_{d1}^{(vv)}$) pour des interfaces faiblement rugueuses de longueur infinie et des distributions des hauteurs gaussiennes. Des modèles approchés basé sur des études expérimentales ont étudié le rapport des coefficients bistatiques, mais ils ne donnent pas les statistiques du rapport des intensités co-polaire. Nous montrons que la densité de probabilité du rapport des intensités est une fonction seulement de deux paramètres r et p_0 . Une telle étude est importante dans la caractérisation de la structure.

III.2. Propriétés statistiques des rapports des intensités diffractées.

III.2.1. La densité de probabilité conjointes des amplitudes de diffractions

Nous supposons que les densités de probabilité des hauteurs des deux interfaces sont des gaussiennes. Le caractère gaussien est conservé par opération linéaire. La transformée de Fourier est une opération linéaire donc les transformées de Fourier des fonctions aléatoires $a_i(x, y)$ sont aussi des processus gaussiens. La somme de deux processus gaussiens est un processus gaussien. En conséquence, les amplitudes de diffraction $A_{1(aa)}^{(1)}(\alpha, \beta)$ sont des processus gaussiens. Les parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction à l'ordre 1 sont données sous la forme suivante :

$$R_a(\alpha, \beta) = \text{Re}[A_{1,aa}^{(1)}(\alpha, \beta)] ; I_a(\alpha, \beta) = \text{Im}[A_{1,aa}^{(1)}(\alpha, \beta)] \quad (\text{III.1})$$

la lettre a désigne la polarisation ($a = h$ ou $a = v$). D'après la relation (II.4), la partie réelle et la partie imaginaire de l'amplitude diffractée sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
R_a(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^2 \operatorname{Re}(K_{i,aa}) \operatorname{Re}[\hat{a}_i(\alpha, \beta)] - \sum_{i=1}^2 \operatorname{Im}(K_{i,aa}) \operatorname{Im}[\hat{a}_i(\alpha, \beta)] \\
I_a(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^2 \operatorname{Im}(K_{i,aa}) \operatorname{Re}[\hat{a}_i(\alpha, \beta)] + \sum_{i=1}^2 \operatorname{Re}(K_{i,aa}) \operatorname{Im}[\hat{a}_i(\alpha, \beta)]
\end{aligned} \tag{III.2}$$

Comme les fonctions aléatoires $a_i(x, y)$ sont centrées ($\langle a_i(x, y) \rangle = 0$), les deux fonctions $R_a(\alpha, \beta)$ et $I_a(\alpha, \beta)$ sont centrées. Le crochet désigne la moyenne statistique. Pour α et β fixées, les variables aléatoires $R_h(\alpha, \beta)$, $R_v(\alpha, \beta)$, $I_h(\alpha, \beta)$ et $I_v(\alpha, \beta)$ obéissent à une densité de probabilité conjointe gaussienne :

$$p_{R_h I_h R_v I_v}(a, b, c, d) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(a, b, c, d)\Gamma^{-1}(a, b, c, d)^T\right] \tag{III.3}$$

Le symbole T désigne la transposée. Γ est la matrice covariance :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{R_h}^2 & \Gamma_{R_h I_h} & \Gamma_{R_h R_v} & \Gamma_{R_h I_v} \\ \Gamma_{R_h I_h} & \sigma_{I_h}^2 & \Gamma_{I_h R_v} & \Gamma_{I_h I_v} \\ \Gamma_{R_h R_v} & \Gamma_{I_h R_v} & \sigma_{R_v}^2 & \Gamma_{R_v I_v} \\ \Gamma_{R_h I_v} & \Gamma_{I_h I_v} & \Gamma_{R_h I_v} & \sigma_{I_v}^2 \end{pmatrix} \tag{III.4}$$

Pour une longueur de déformation L finie, la matrice de covariance est pleine. Dans la suite nous considérons une longueur de déformation infinie et nous déterminons les expressions analytiques des rapports des intensités. D'après les expressions (II.7), (II.8) et (II.11) quant $L \rightarrow +\infty$, les variances $\sigma_{R_a}^2(\alpha, \beta)$ et $\sigma_{I_a}^2(\alpha, \beta)$ de la partie real et imaginaire sont égales avec :

$$\begin{aligned}
\sigma_{R_a}^2(\alpha, \beta) &= \langle R_a^2(\alpha, \beta) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 |K_{i,aa}|^2 \hat{R}_{ii}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[K_{2,aa}^* K_{1,aa} \hat{R}_{21}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)]
\end{aligned} \tag{III.5}$$

De plus nous avons établis que pour une polarisation donnée, la partie réelle et la partie imaginaire sont non corrélées :

$$\Gamma_{R_h I_h} = \Gamma_{R_v I_v} = 0 \quad (\text{III.6})$$

A partir de (II.7), (II.8) et (II.11), nous trouvons les covariances $\Gamma_{R_h R_v}$, $\Gamma_{R_h I_v}$, $\Gamma_{I_h R_v}$ et $\Gamma_{I_h I_v}$ et nous démontrons que pour une longueur infinie les variables aléatoires $R_h(\alpha, \beta)$ et $I_h(\alpha, \beta)$ sont corrélées avec les variables $R_v(\alpha, \beta)$ et $I_v(\alpha, \beta)$ avec :

$$\begin{aligned} \Gamma_{R_h R_v}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \text{Re}[K_{i, hh}^* K_{i, vv}] \hat{R}_{ii}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Re}[(K_{2, hh}^* K_{1, vv} + K_{2, vv}^* K_{1, hh}) \hat{R}_{21}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)] \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{R_h I_v}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \text{Im}[K_{i, hh}^* K_{i, vv}] \hat{R}_{ii}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Im}[(K_{2, hh}^* K_{1, vv} + K_{2, vv}^* K_{1, hh}) \hat{R}_{21}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)] \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

$$\Gamma_{I_h I_v}(\alpha, \beta) = \Gamma_{R_h R_v}(\alpha, \beta) \quad (\text{III.9})$$

$$\Gamma_{I_h R_v}(\alpha, \beta) = -\Gamma_{R_h I_v}(\alpha, \beta) \quad (\text{III.10})$$

Quant $L \rightarrow +\infty$, la matrice de covariance ne dépend que de quatre paramètres ($\sigma_{R_h}^2$, $\sigma_{R_v}^2$, $\Gamma_{R_h R_v}$ et $\Gamma_{R_h I_v}$). En conséquence, la matrice inverse de la matrice de covariance est définie comme suit :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)}} \begin{pmatrix} \sigma_{R_v}^2 & 0 & -\Gamma_{R_h R_v} & -\Gamma_{R_h I_v} \\ 0 & \sigma_{R_v}^2 & \Gamma_{R_h I_v} & -\Gamma_{R_h R_v} \\ -\Gamma_{R_h R_v} & \Gamma_{R_h I_v} & \sigma_{R_h}^2 & 0 \\ -\Gamma_{R_h I_v} & -\Gamma_{R_h R_v} & 0 & \sigma_{R_h}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

où

$$\det(\Gamma) = \sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2 |1 - r^2| \quad (\text{III.12})$$

et

$$r = \sqrt{\frac{\Gamma_{R_h R_v}^2 + \Gamma_{R_h I_v}^2}{\sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2}} \quad (\text{III.13})$$

Le coefficient r est par définition supérieur ou égale à zéro. Suivant l'expression (III.13), si $r \leq 1$, les variances $\sigma_{R_h}^2$ et $\sigma_{R_v}^2$ et les covariances $\Gamma_{R_h R_v}$ et $\Gamma_{R_h I_v}$ satisfont la condition:

$$\Gamma_{R_h R_v}^2 + \Gamma_{R_h I_v}^2 - \sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2 \leq 0 \quad (\text{III.14})$$

Tous calculs fait, nous obtenons à partir de (III.5), (III.7) et (III.8) que la relation (III.14) et équivalent à :

$$|\hat{R}_{12}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)|^2 - \hat{R}_{11}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{R}_{22}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \leq 0 \quad (\text{III.15})$$

D'après (I.2b) et sachant que $0 \leq |q| \leq 1$, la relation (III.15) est vérifiée pour toutes α_0 , β_0 , α et β . En conséquence $0 \leq r \leq 1$.

En utilisant les coordonnées polaires, nous obtenons à partir des équations (III.3), (III.11), la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires M_h , Φ_h , M_v and Φ_v qui représente le module et la phase de $A_{1(hh)}^{(1)}(\alpha, \beta)$ and $A_{1(vv)}^{(1)}(\alpha, \beta)$, respectivement:

$$p_{M_h \Phi_h M_v \Phi_v}(m_h, \phi_h, m_v, \phi_v) = m_h m_v p_{R_h I_h R_v I_v}(m_h \cos \phi_h, m_h \sin \phi_h, m_v \cos \phi_v, m_v \sin \phi_v)$$

III.2.2. Densité de probabilité du rapport des intensités

La densité de probabilité conjointe des modules M_h et M_v se déduit de $p_{M_h \Phi_h M_v \Phi_v}$ par une double intégration :

$$p_{M_h M_v}(m_h, m_v) = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{m_h m_v}{4\pi^2 \sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left[-\frac{\sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2}{2\sqrt{\det(\Gamma)}} \left(\frac{m_h^2}{\sigma_{R_h}^2} - 2\zeta m_h m_v + \frac{m_v^2}{\sigma_{R_v}^2}\right)\right] d\phi_h d\phi_v$$

Où :

$$\zeta = \frac{\Gamma_{R_h R_v} \cos(\phi_h - \phi_v) - \Gamma_{R_h I_v} \sin(\phi_h - \phi_v)}{\sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2} \quad (\text{III.18a})$$

$$\det(\Gamma) = \sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2 |1 - r^2| \quad (\text{III.18b})$$

$$r = \sqrt{(\Gamma_{R_h R_v}^2 + \Gamma_{R_h I_v}^2) / \sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2} \quad (\text{III.18c})$$

$\sigma_{R_{(h,v)}}^2$, $\Gamma_{R_h R_v}$ et $\Gamma_{R_h I_v}$ représentent la variance et les covariances des parties réelles et imaginaires de l'amplitude de diffraction. En effectuant la double intégration (III.17), l'expression de la densité conjointe des modules devienne :

$$p_{M_h M_v}(m_h, m_v) = \frac{m_h m_v}{\sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2 (1 - r^2)} \exp\left[-\frac{1}{2(1 - r^2)} \left(\frac{m_h^2}{\sigma_{R_h}^2} + \frac{m_v^2}{\sigma_{R_v}^2}\right)\right] I_0\left[\frac{r m_h m_v}{\sigma_{R_h} \sigma_{R_v} (1 - r^2)}\right] \quad (\text{III.19})$$

où I_0 la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro.

D'après (3), les expressions des modules $M_{(h,v)}$ en fonctions des intensités $I_{d1}^{(hh, vv)}$ s'écrivent :

$$M_{(h,v)} = \sqrt{\frac{\lambda^2 \cos \theta_0}{\cos^2 \theta} I_{d1}^{(hh, vv)}} \quad (\text{III.20})$$

La densité de probabilité conjointe des variables aléatoires $I_{d1}^{(hh)}$ et $I_{d1}^{(vv)}$ s'écrit:

$$p_{I_{d1}^{(hh)} I_{d1}^{(vv)}}(w_h, w_v) = J(w_h, w_v) p_{M_h M_v}[m_h(w_h), m_v(w_v)] \quad (\text{III.21})$$

Avec :

$$J(w_h, w_v) = \frac{\lambda^4 \cos^2 \theta_0}{4 \cos^4 \theta} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2 \cos \theta_0}{\cos^2 \theta} I_{d1}^{(hh)}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2 \cos \theta_0}{\cos^2 \theta} I_{d1}^{(vv)}}}$$

$J(w_h, w_v)$ est le Jacobien de la transformation (III.20). Tous calculs fait, on obtient :

$$p_{I_{d1}^{(hh)}/I_{d1}^{(vv)}}(w_h, w_v) = \frac{\lambda^4 \cos^2 \theta_0 \exp\left[-\frac{\lambda^2 \cos \theta_0}{2 \cos^2 \theta (1-r^2)} \left(\frac{w_h}{\sigma_{R_h}^2} + \frac{w_v}{\sigma_{R_v}^2}\right)\right]}{4 \sigma_{R_h}^2 \sigma_{R_v}^2 (1-r^2) \cos^4 \theta} I_0\left[\frac{r \lambda^2 \cos \theta_0 \sqrt{w_h w_v}}{\cos^2 \theta \sigma_{R_h} \sigma_{R_v} (1-r^2)}\right] \quad (\text{III.22})$$

La densité de probabilité du rapport $I_{d1}^{(hh)} / I_{d1}^{(vv)}$ est donnée par :

$$p_{I_{d1}^{(hh)}/I_{d1}^{(vv)}}(v) = \int_0^{+\infty} w_v p_{I_{d1}^{(hh)}/I_{d1}^{(vv)}}(v w_v, w_v) dw_v \quad (\text{III.23})$$

Tous calculs fait, on obtient :

$$p_{I_{d1}^{(hh)}/I_{d1}^{(vv)}}(v) = \frac{p_0 (v + p_0) (1-r^2)}{[v^2 + 2vp_0(1-2r^2) + p_0^2]^{3/2}} \quad (\text{III.24})$$

avec :

$$p_0 = \frac{\sigma_{R_h}^2}{\sigma_{R_v}^2} = \frac{I_f^{(hh)}}{I_f^{(vv)}}; \quad p_{I_{d1}^{(hh)}/I_{d1}^{(vv)}}(0) = \frac{1-r^2}{p_0} \quad (\text{III.25})$$

La fonction de répartition est donnée par l'expression suivante :

$$F_{I_{d1}^{(hh)}/I_{d1}^{(vv)}}(v) = \int_0^v p_{I_{d1}^{(hh)}/I_{d1}^{(vv)}}(v') dv' = \frac{1}{2} + \frac{v - p_0}{2[v^2 + 2vp_0(1-2r^2) + p_0^2]^{1/2}} \quad (\text{III.26})$$

Chapitre IV. Résultats Numériques

IV.1. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur l'intensité incohérente

IV.2. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur les statistiques du module et de l'intensité

IV.3. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur le rapport des intensités en polarisation directe

Chapitre IV. Résultats Numériques

Pour toutes les simulations, la longueur d'onde est égale à 20 cm ce qui correspond à une fréquence en bande L de 1,5GHz. Les deux interfaces sont distantes de $u_0 = 0.35\lambda$. Elles sont caractérisées par des hauteurs quadratiques moyennes $\sigma_1 = 0.05\lambda$ et $\sigma_2 = 0.035\lambda$. Les permittivités relatives ε_{r2} et ε_{r3} des deux milieux sont fixées à $6.26 - 0.52j$ et $8.45 - 0.85j$. Ces permittivités correspondent à des sols agricoles présentant des taux d'humidité de 15% et 20% [13]. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie des surfaces sur le diagramme de diffusion moyen et sur la statistique des champs en module, en intensité et en rapport des intensités ont été étudié. Pour étudier l'effet de la corrélation et de l'anisotropie des interfaces, on considère les quatre cas possibles :

- Non corrélé anisotrope ($q = 0$, $l_{x1} = 0.2\lambda$, $l_{y1} = 0.25\lambda$, $l_{x2} = 0.25\lambda$, $l_{y2} = 0.5\lambda$).
- Corrélé anisotrope ($q = 1$, $l_{x1} = 0.2\lambda$, $l_{y1} = 0.25\lambda$, $l_{x2} = 0.25\lambda$, $l_{y2} = 0.5\lambda$).
- Non corrélé isotrope ($q = 0$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.2\lambda$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.25\lambda$).
- Corrélé isotrope ($q = 1$, $l_{x1} = l_{y1} = 0.2\lambda$, $l_{x2} = l_{y2} = 0.25\lambda$).

IV.1. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur l'intensité incohérente.

La figure IV.1. montre l'intensité incohérente en fonction de θ , en polarisations directes (hh), (vv) et croisées (vh) et (hv) dans le plan d'observation définit par : $\theta_0 = 30^\circ$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $\varphi = 30^\circ$. Dans les quatre cas l'effet de la corrélation des interfaces baisse les amplitudes des intensités alors que l'effet de l'anisotrope fait monter les intensités incohérentes. On remarque que les intensités incohérentes sont moins sensibles à l'effet de la corrélation par rapport à l'effet de l'anisotropie.

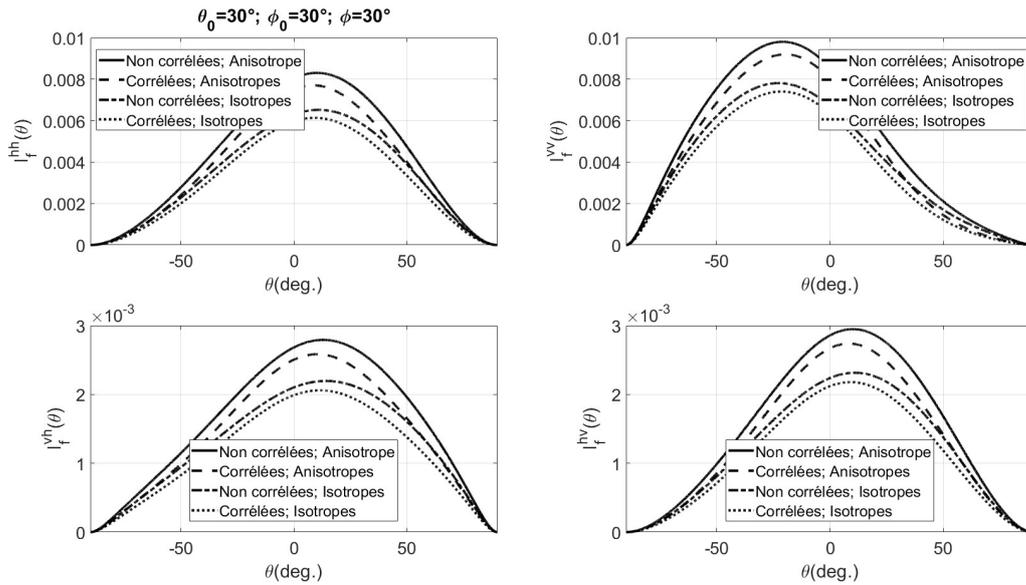


Figure IV.1 Intensité incohérente dans les quatre polarisations en fonction de l'angle d'observation θ .

IV.2. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur les statistiques du module et de l'intensité.

La figure IV.2, montre la densité de probabilité (Pdf, probability density function), du module, en polarisations directes (hh), (vv) et croisées (vh) et (hv) dans le plan d'observation défini par : $\theta_0 = 30^\circ$, $\theta_0 = 30^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$, $\varphi = 30^\circ$. Comme le montrent les courbes des figures IV.2, le passage d'une configuration à une autre parmi les quatre cas, les effets de la corrélation entre les surfaces et l'anisotropie des interfaces est très remarquables.

Le tableau IV.1, donne les valeurs de la moyenne et de la variance pour les quatre polarisations avec les quatre configurations. On remarque que les composantes vh et hv ont les mêmes caractéristiques statistiques.

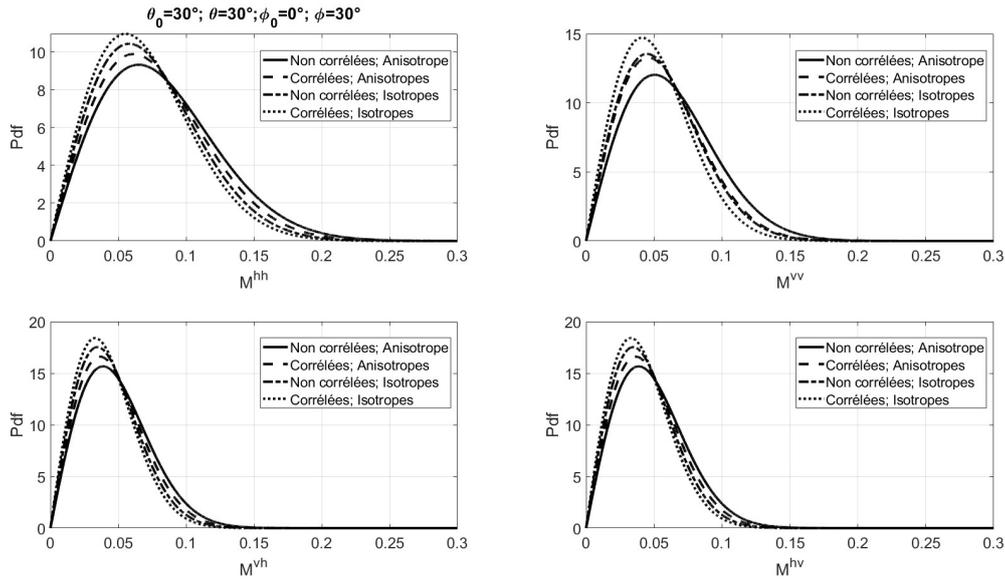


Figure IV.2. Pdf du module du champ diffracté dans les quatre polarisations

	Non corrélé Anisotrope	Corrélé Anisotrope	Non corrélé Isotrope	Corrélé Isotrope
$E[M^{hh}]$	8.15×10^{-2}	7.68×10^{-2}	7.28×10^{-2}	6.93×10^{-2}
$V[M^{hh}]$	1.81×10^{-3}	1.61×10^{-3}	1.45×10^{-3}	1.31×10^{-3}
$E[M^{vv}]$	6.32×10^{-2}	5.72×10^{-2}	5.61×10^{-2}	5.16×10^{-2}
$V[M^{vv}]$	1.09×10^{-3}	8.95×10^{-4}	8.60×10^{-4}	7.29×10^{-4}
$E[M^{vh}]$	4.85×10^{-2}	4.58×10^{-2}	4.34×10^{-2}	4.13×10^{-2}
$V[M^{vh}]$	6.44×10^{-4}	5.73×10^{-4}	5.14×10^{-4}	4.66×10^{-4}
$E[M^{hv}]$	4.85×10^{-2}	4.58×10^{-2}	4.34×10^{-2}	4.13×10^{-2}
$V[M^{hv}]$	6.44×10^{-4}	5.73×10^{-4}	5.14×10^{-4}	4.66×10^{-4}

Tableau IV.1. Moyenne et variance du module du champ diffracté dans les quatre polarisations

La figure IV.3, montre la densité de probabilité de l'intensité, en polarisations directes (hh), (vv) et croisées (vh) et (hv) dans le plan d'observation défini par : $\theta_0 = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\phi_0 = 0^\circ$, $\phi = 30^\circ$. Comme le montrent les courbes des figures 3, le passage d'une configuration à une autre parmi les quatre cas, les effets de la corrélation entre les surfaces et l'anisotropie des interfaces est très remarquable. Le tableau IV.2, donne les valeurs de la moyenne et de la variance pour les quatre polarisations avec les quatre configurations. On remarque que les composantes vh et hv ont les mêmes caractéristiques statistiques.

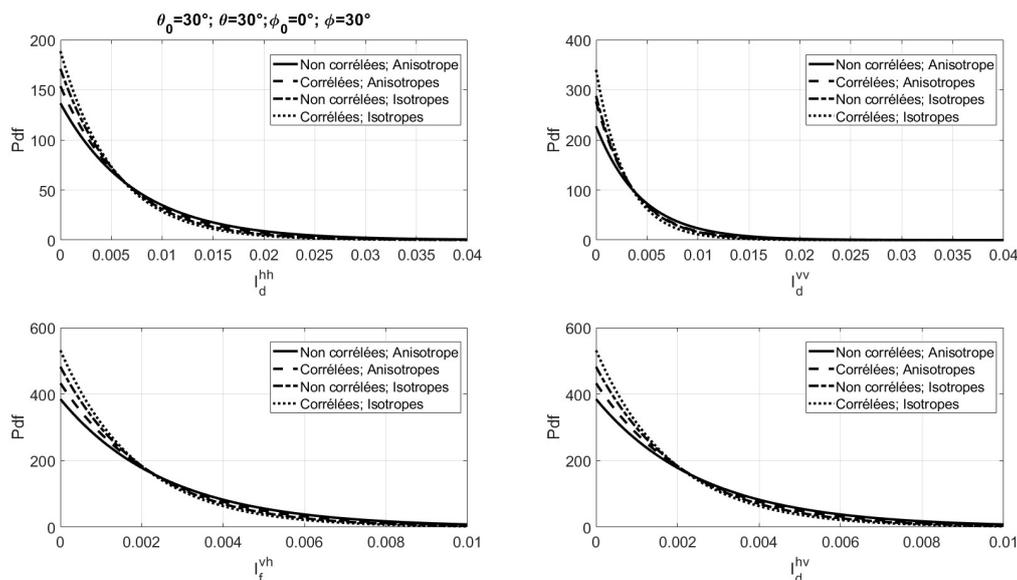


Figure IV.3. Pdf de l'intensité du champ diffracté dans les quatre polarisations

	Non corrélé Anisotrope	Corréllé Anisotrope	Non corrélé Isotrope	Corréllé Isotrope
$E[I^{hh}]$	7.32×10^{-3}	6.51×10^{-3}	5.85×10^{-3}	5.30×10^{-3}
$V[I^{hh}]$	5.36×10^{-5}	4.24×10^{-5}	3.42×10^{-5}	2.81×10^{-5}
$E[I^{vv}]$	4.40×10^{-3}	3.61×10^{-3}	3.47×10^{-3}	2.94×10^{-3}
$V[I^{vv}]$	1.94×10^{-5}	1.30×10^{-5}	1.21×10^{-5}	8.64×10^{-6}
$E[I^{fh}]$	2.60×10^{-3}	2.31×10^{-3}	2.07×10^{-3}	1.88×10^{-3}
$V[I^{fh}]$	6.75×10^{-6}	5.34×10^{-6}	4.30×10^{-6}	3.54×10^{-6}
$E[I^{hv}]$	2.60×10^{-3}	2.31×10^{-3}	2.07×10^{-3}	1.88×10^{-3}
$V[I^{hv}]$	6.75×10^{-6}	5.34×10^{-6}	4.30×10^{-6}	3.54×10^{-6}

Tableau IV.2. Moyenne et variance de l'intensité diffracté dans les quatre polarisations

IV.3. L'effet de la corrélation et de l'anisotropie sur le rapport des intensités en polarisation directe

La figure IV.4, montre la densité de probabilité (Pdf) et la fonction de répartition (Cdf, the cumulative density function) du rapport des intensités du champ diffracté en polarisation directe dans les quatre configurations. La densité de probabilité est plus grande dans le cas de deux interfaces corréllées par

rapport à celle non corrélées. Par contre l'effet de l'anisotropies fait baisser les valeurs maximales des densités de probabilité. D'une manière générale les effets de la corrélation entre les surfaces et l'anisotropies des interfaces est très remarquables. Le tableau IV.3, donne les valeurs de la moyenne du rapport des intensités en polarisation directe avec les quatre configurations. On remarque que les composantes vh et hv ont les mêmes caractéristiques statistiques.

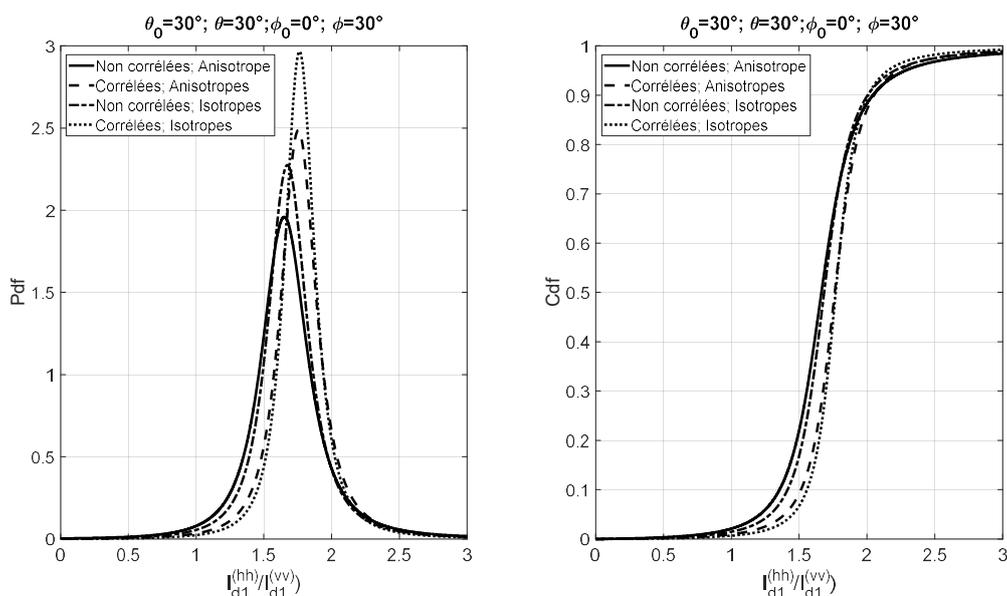


Figure IV.4. Pdf et Cdf du rapport des intensités du champ diffracté en polarisation directe dans les quatre configurations.

	Non corrélé Anisotrope	Corréllé Anisotrope	Non corrélé Isotrope	Corréllé Isotrope
$E[I^{hh} / I^{vv}]$	1.64	1.75	1.67	1.76
$V[I^{hh} / I^{vv}]$	1.37×10^{-1}	9.96×10^{-2}	1.10×10^{-1}	7.54×10^{-2}

Tableau IV.3. Moyenne et variance du rapport des intensités en polarisation directe

CONCLUSION GENERALE

Dans le but d'étudier d'une façon précise les caractéristiques statistiques et en particulier le rapport des intensités des champs diffractés en polarisation directe hh et vv par une double interface bidimensionnelle éclairée depuis l'air par une onde plane, nous avons utilisé le développement de Rayleigh et une méthode de perturbation.

En considérant les fonctions qui décrivent les deux interfaces comme fonctions perturbatrices, nous avons pu rechercher les solutions par une méthode de perturbation. Cette étude possède l'avantage d'être analytique. Elle permet ainsi de passer de manière continue du cas non perturbé (double interface lisse) au cas perturbé (double interface rugueuse).

Au premier ordre de perturbation, nous avons obtenu les expressions analytiques des amplitudes du champ diffracté dans l'air et par la suite les caractéristiques statistiques du module, de la phase, de l'intensité et du rapport des intensités de diffraction en polarisations directes ($I_{d1}^{(hh)} / I_{d1}^{(vv)}$) (densité de probabilité, fonction de répartition). Nous avons constaté que ces caractéristiques statistiques dépendent de deux paramètres r et p_0 . Ces deux paramètres dépendent d'une part des caractéristiques statistiques de la double interface et d'autre part des configurations électromagnétiques.

Dans la partie simulation, pour une structure naturelle représentée une surface agricole formée de deux couches avec un taux d'humidité de 15% et de 20% respectivement, l'influence de la corrélation des interfaces et l'anisotropie des surfaces sur les différents caractères statistiques est analysé.

Références Bibliographiques

- [1] C. Amra, G. Albrand, and P. Roche, "Theory and application of antiscattering single layers: antiscattering antireflection coatings," *Applied Optics*, vol. 25, pp. 2695-2702, 1986.
- [2] T. Germer, "Polarized light scattering by microroughness and small defects in dielectric layers," *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 18, pp. 1279-1288, 2001.
- [3] V. Wismann, M. Gade, W. Alpers, and H. Hauhnerfuss, "Radar signature of marine mineral oil spills measured by an airborne multi-radar," *International Journal of Remote Sensing*, Vol. 19, pp. 3607-23, 1998.
- [4] M. Saillard and G. Toso, "Electromagnetic scattering from bounded or infinite subsurface bodies," *Radio Science*, vol. 32, no. 4, pp. 1347-1360, 1997.
- [5] I. Ohlidal and F. Vizda, "Optical quantities of multilayer systems with correlated randomly rough boundaries," *Journal of Modern Optics*, vol. 46, pp. 2043-2062, 1999.
- [6] N. Pinel, N. Déchamps, C. Bourlier and J. Saillard, "Bistatic scattering from one-dimensional random rough homogeneous layers in the high-frequency limit with shadowing effect", *Waves in Random and Complex Media*, Vol. 17, No. 3, pp. 283-303, 2007.
- [7] S. Afifi and R. Dusséaux, "On the co-polarized phase difference of rough layered surfaces: Formulas derived from the small perturbation method," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, Vol. 59, no. 7, pp. 2607-2618, Jl. 2011.
- [8] Fawwaz T. Ulaby, Adib Nashashibi, Alaa El-Rouby, Eric S. Li, Roger D. De Roo, Kamal Sarabandi, Ronald J. Wellman, and H. Bruce Wallace, "95-Ghz scattering by terrain at near-grazing incidence," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol. 46, no. 1, pp. 1-13, Jan. 1998.
- [9] Y. Oh, K. Sarabandi, and F. T. Ulaby, "Semi-empirical model of the ensemble-averaged differential Mueller matrix for microwave backscattering from bare soil surfaces," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 40, no 6, pp. 1348-1355, Jun. 2002.
- [10] L. Rayleigh, *Theory of Sound*, Vol II, Dover, New York, 1945.

[11] S. Afifi, R. Dusséaux, and A. Berrouk, “Electromagnetic scattering from 3D layered structures with randomly rough interfaces: Analysis with the small perturbation method and the small slope approximation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 62, no. 10, pp. 5200–5208, Oct. 2014.

[12] S. Afifi, R. Dusséaux, R. de Oliveira, “Statistical distribution of the field scattered by rough layered interfaces: Formulae derived from the small perturbation method,” *Waves in Random and Complex Media*, Vol. 20, No. 1, February 2010, 1–22.