

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté : Science de l'ingénierie

Département : Génie mécanique

Domaine : Sciences et techniques

Spécialité : énergétique

## MEMOIRE DE MASTRE

PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTRE

### INTITULE

**Calcul des pressions et des contraintes lors de  
l'écoulement transitoire de fluide dans une conduite en  
cuivre**

Présente par : BOURAS Samir

DIRECTEUR DU MEMOIRE: DJEMILI Abdelouaheb

DEVANT LE JURY:

Président : SARI Rafik

Prof.

U. ANNABA

Expert : NEHAL Abdellaziz

MCA

U. ANNAAB

Année: 2022/2023

## Résumé :

Lors de l'écoulement transitoire d'un fluide dans une conduite en cuivre, il est essentiel de comprendre les variations de pression et de contrainte qui se produisent.

Ces calculs sont importants pour assurer la sécurité et l'efficacité du système.

Pour commencer, il est nécessaire de connaître les caractéristiques du fluide, telles que sa viscosité, sa densité et sa vitesse d'écoulement. Ces informations permettent de déterminer les paramètres nécessaires au calcul la pression et contraint et la vitesse., il faut prendre en compte les propriétés de la conduite en cuivre, notamment son diamètre, son épaisseur et ses caractéristiques mécaniques, ces données permettent de calculer la résistance de la conduite aux variations de pression et de contrainte, lorsque le fluide s'écoule dans la conduite, des variations de pression se produisent en raison des changements de vitesse, des obstacles ou des changements de direction.

Ces variations de pression peuvent être calculées à l'aide des lois de conservation de la masse et de l'énergie, telles que l'équation de Bernoulli.

Les contraintes dans la conduite en cuivre peuvent être déterminées à partir des variations de pression.

Les contraintes de traction et de compression sont calculées en utilisant les équations de la mécanique des fluides et les lois de comportement des matériaux.

Il est important de noter que l'écoulement transitoire peut entraîner des phénomènes tels que les ondes de pression et les chocs hydrauliques.

Ces phénomènes doivent être pris en compte lors du calcul des pressions et des contraintes, car ils peuvent avoir un impact significatif sur la performance et la durabilité du système.

En conclusion, le calcul des pressions et des contraintes lors de l'écoulement transitoire d'un fluide dans une conduite en cuivre est essentiel pour garantir la sécurité et l'efficacité du système.

-Détermination des propriétés du fluide

-Modélisation de l'écoulement

-Résolution numérique

-Calcul des pressions

-Calcul des contraintes

Utilisez la loi de Hooke pour calculer les contraintes dans la conduite en fonction des variations de pression.

Les contraintes peuvent être calculées à partir des équations de l'élasticité linéaire en utilisant les propriétés mécaniques du matériau, telles que le module d'élasticité et le coefficient de Poisson.

Il est important de noter que les calculs des pressions et des contraintes dans un écoulement transitoire de fluide sont généralement complexes et nécessitent des compétences en mécanique des fluides et en modélisation numérique.

# Remerciements

Avant tout je remercie Allah qui m'a donné le courage, la volonté, la patience et la capacité pour réaliser ce mode de travail.

Autermede  
cetravail, J'etiensàremercieretàexprimermagratitudeàtouteslespersonnesqui ontcontribuéàsaréalisation

Mesvifsremerciementsvontauxmembresdejuryquimefontlegrandhonneurd'évaluercetravail:

Monsieur **SARI Rafik** pour l'honneur qu'il m'a fait de présider ce jury.

Monsieur **NEHAL Abdellaziz** d'avoir accepté d'examiner cetravail.

Je remercie mon encadreur Monsieur **DJEMILI Abdelouaheb** docteur à l'Université Badji Mokhtar d'Annaba, de m'avoir accueillie et d'avoir accepté de diriger ce travail. Sa rigueur scientifique, sa disponibilité et ses qualités humaines m'ont profondément touchée.

Je remercie également les enseignants du département de génie mécanique pour leurs précieux Enseignements et tous les enseignants de l'université **Badji Mokhtar d'Annaba**.

Ensuite, je joins ces remerciements à tout le personnel de l'université de Annaba pour leur excellent accueil, leur orientation ainsi que leur soutien dans la construction de ce travail.

Enfin, mes remerciements iront à toutes les personnes dont l'empreinte restera dans ce dit travail plus encore dans ma mémoire, pour leurs conseils scientifiques, leurs aides, leurs talents, leurs motivations.

# *Dédicaces*

*C'est avec profonde gratitude et sincères mots, que je dédie ce travail de fin d'étude à tous ceux qui me sont chers.*

*A mon cher père.*

*L'école de mon enfance qui m'a inculqué le sens de la responsabilité, de l'optimisme et de la confiance en soi face aux difficultés de la vie.*

*A ma chère Mère.*

*La plus belle créature que Dieu a créée sur terre, à cette source de tendresse, de patience et de générosité qui n'a jamais cessé de formuler des prières à mon égard afin de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.*

*A toute ma famille.*

*A mon promoteur Mr Djemili Abdelouhab qui m'a aidé et m'a pris beaucoup de choses durant cette formation.*

*tion.*

*A tous mes amis de près et de loin.*

*Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.*

**Sommaire :**

<b>Résumé.....</b>	<b>1</b>
<b>Remerciements.....</b>	<b>4</b>
<b>Dédicace.....</b>	<b>10</b>
<b>Sommaire.....</b>	<b>11</b>
<b>Liste des figures.....</b>	<b>15</b>
<b>Nomenclature.....</b>	<b>17</b>
<b>Introduction.....</b>	<b>19</b>

**Chapitre I : Identification du problème physique**

I.1. Description:.....	21
I.2. Conduite principale .....	22
I.3. Les Vannes .....	23
I.3.1. Les types des vannes .....	24
I.2.1 Les technologies et fonctionnalités des vannes.....	25
I.2.2. Eléments constitues d'un vanne.....	25
I.3.1 Enveloppe ou corps de vanne.....	26
I.3.2 Les différences technologies d'obturateursent les savants.....	27

## Chapitre II : Description des écoulements transitoires en charge

II.1. Introduction.....	28
II.2. Types d'écoulements.....	29
II.2.1. Écoulement permanent.....	29
II.2.2. Écoulement non permanent.....	29
II.2.3. Écoulement uniforme.....	29
II.2.4. Écoulement non uniforme.....	29
II.3. Types des ondes.....	30
II.3.1. Ondes linéaires.....	30
II.3.2. Ondes non linéaires.....	30
II.4. Phénomène du coup de bélier.....	31
II.4.1. Définition.....	31
II.4.2. Causes du coup de bélier.....	31
II.4.3. Risques dus aux coups de bélier.....	32
a. Cas de surpression.....	32
b. Cas de dépression.....	32
C. Fatigue de la canalisation.....	32
II.5. Description des phénomènes physiques en jeu.....	33
II.5.1. État d'équilibre d'un système hydraulique.....	33
II.5.2. Coup de bélier de masse et coup de bélier d'onde.....	34
II.5.3. Perturbation de l'équilibre, effet sur les pressions.....	34

II.6. Valeur numérique du coup de bélier.....	35
II.6.1. Manœuvres rapides (formule de Joukovski) .....	36
II.6.2. Le cas de la fermeture lente d'une vanne de sectionnement.....	36
II.7. Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une tuyauterie .....	38
II.7.1. Cas d'arrêt brusque de la pompe.....	38
II.7.2. Cas de L'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite.....	39
II.9. Conclusion.....	42

### **Chapitre III: Formules de base pour le phénomène transitoire**

III.1 .Introduction.....	43
III.2. Formulation générale.....	44
III.2.1. Equation de conservation de la masse (ou de la continuité).....	44
III.2.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement.....	44
III.2.3. Equation de conservation de l'énergie.....	45
III .2. 4. Lois de comportement du fluide.....	45
III .2. 4.1. Lois de comportement mécanique.....	45
III .2. 4.2. Lois de comportement thermodynamique.....	46
III.2.5. Equation de comportement de la conduite.....	47
III.3. Equations simplifiées.....	48
III.3.1. Hypothèses.....	48
III.3.2. Equation de conservation de la masse ou équation de continuité .....	48
III.3.3. Equation de conservation de la quantité de mouvement ou équation dynamique.....	52
III.3.4. Equation de conservation de l'énergie.....	56
III.4. Forme réduite du système des équations de base.....	56

## Chapitre IV : Méthode de résolution

IV.1. Introduction .....	57
IV.1.1.Méthode des caractéristiques.....	58
IV.2. Modélisation mathématique de H et V le long du conduit.....	58
IV.2.1. Recherche des lignes caractéristiques .....	59
IV.2.2. Recherche de la relation de compatibilité.....	61
IV.3. Calcul de la hauteur de pression H et de la vitesse V aux points courants.....	62
IV.3.1. Critère de stabilité du schéma numérique.....	63
IV.3.2. Intégration des équations de compatibilité.....	64
IV.3.3. Calcul de H et V (intégration aux points courants) .....	64
IV.3.4. Calcul du terme de frottement.....	65
III.3.5 Détermination du coefficient de perte de charge linéaire .....	66
IV.4. Conditions aux limites.....	67
IV.5. Conditions initiales (régime initiale) .....	71
IV.6 Calcul du terme frottement.....	72

## Chapitre V : Application du model de calcule sur l'installation

V.1.Application du modèle de calcul sur l'installation.....	74
1) Configuration de l'installation de distribution hydraulique.....	74
2) les propriétés physiques de l'installation.....	75
V.1. Application et résultats de calcul.....	76
V.2.interpresentation des résultats. ....	77
<b>Conclusion.....</b>	<b>78</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>79</b>

## Liste des figures :

Figure I.1 : Conduite principale sortante du Barrage.....	23
Figure I.2 : Photo des points de jonction des conduites secondaires à la conduite principale....	23
Figure II.3: La vanne .....	24
Figure II.4:Vanne à l'extrémité de la conduite en cuire.....	25
Figure I.5 : Vanne à l'extrémité de la conduite en PRV.....	25
Figure I.6:Vanne papillon .....	26
Figure I.7 : Exemples de vannes industriels: vanne Manuela à piston (gauche) ET vanne automatique Papillon (droit).....	27
Figure II.1 : Suppression au niveau des canalisations.....	33
Figure II.2 : Dépression au niveau des canalisations.....	34
Figure II.4: Évolution de la pression le long de la conduite .....	41
Figure III.1 : Bilan de masse dans un tronçon de conduite .....	48
Figure III.2 : Contrainte latérale dans une conduite a paroi mince .....	50
Figure III.3 Bilan des forces exercées sur un tronçon de conduite (volume de contrôle).....	52
Figure IV.1 : Courbes caractéristiques .....	58
Figure IV.2 : Droites caractéristiques dans le plan (x,t) .....	60
Figure IV.3 : Points de discrétisation sur lesquels on effectue les calculs .....	62
Figure IV.4 : Schéma de discrétisation et droites caractéristiques .....	63
Figure IV.5 : Schéma numérique du point courant P .....	64
Figure IV.6 : les différents régimes d'écoulements.....	66
Figure IV.7 : nombre de Reynolds critique.....	66
Figure IV.8: pertes de charges.....	67
Figure IV.11 : Schéma numérique au niveau de l'extrémité avale .....	68

## Nomenclature

### Symboles Description

$C_f$  : vitesse de propagation des perturbations (fluide)

$C_m$  : vitesse de propagation d'ondes (matériau)

E : module d'élasticité du matériau, GPa

E : épaisseur, m

K : inverse du coefficient de compressibilité du fluide

L : longueur, m

N : nombre d'éléments

R : rayon, m

P : pression, Pa

S1 : temps réduit de relaxation du fluide

S2 : temps réduit de retard du fluide

Tf : contrainte de cisaillement pari 'étale, Pa

t : temps, s

u : vitesse de déplacement axiale, m.s<sup>-1</sup>

V : vitesse du fluide, m. s<sup>-1</sup>

X : distance, m

$\Psi(t)$  : fonction de relaxation

W(t) : fonction poids

$\tau$  : temps réduit

$\sigma$  : contrainte axiale, Pa

$\nu$  : coefficient de Poisson

$\rho$  : masse volumique du fluide, kg.m<sup>-3</sup>

$\rho_m$  : masse volumique du matériau, kg.m<sup>-3</sup>

$\mu_f$  : viscosité dynamique, kg. m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>

$\nu_f$  : viscosité cinématique,  $m^2 m^{-1}$

$\lambda_1$  : temps de relaxation, s

$\lambda_2$  : temps de retard, s

$\delta(t)$  : fonction de Dirac

## **Introduction Générale :**

Il est essentiel de pouvoir évaluer les pressions et les contraintes qui se produisent lorsqu'un fluide s'écoule de manière transitoire dans une conduite en cuivre. Ces calculs permettent d'assurer la sécurité et la fiabilité de la conduite, tout en optimisant sa conception.

Pour commencer, il est important de comprendre que l'écoulement transitoire se produit lorsque les conditions d'écoulement du fluide dans la conduite changent rapidement. Cela peut être dû à des variations brusques de la vitesse d'écoulement, de la pression d'entrée ou de la viscosité du fluide.

Pour calculer les pressions lors de l'écoulement transitoire, on utilise généralement les équations d'Euler, qui sont les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ces équations permettent de décrire comment la pression varie le long de la conduite en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

Quant aux contraintes dans la conduite en cuivre, elles peuvent être calculées à l'aide de la loi de Hooke, qui établit une relation entre la contrainte et la déformation du matériau. Étant donné que le cuivre est un matériau élastique linéaire, la contrainte est proportionnelle à la déformation. Cependant, il est important de noter que la contrainte maximale dans la conduite peut varier en fonction des conditions d'écoulement, telles que la pression et la vitesse du fluide.

Lors du calcul des pressions et des contraintes, plusieurs paramètres doivent être pris en compte, tels que le diamètre de la conduite, la rugosité de sa surface interne, les propriétés du fluide (comme sa viscosité), les conditions aux limites (pression d'entrée et de sortie), ainsi que les caractéristiques du matériau de la conduite (module d'élasticité, limite d'élasticité).

Pour obtenir des résultats précis, il est souvent nécessaire de recourir à des méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis, pour résoudre les équations complexes qui décrivent le comportement de l'écoulement et des contraintes dans la conduite

## **Chapitre I**

# **Identification du problème physique**

## I.1. Description:

Lorsqu'un fluide s'écoule temporairement dans une conduite en cuivre, il est essentiel de prendre en considération plusieurs aspects importants pour calculer les pressions et les contraintes. Voici quelques informations générales à prendre en compte :

- **Équations de conservation** : Pour déterminer les pressions et les contraintes, on utilise généralement les équations de conservation de la masse (équation de continuité) et de la quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes). Ces équations décrivent le comportement du fluide en termes de variations de pression, de vitesse et de viscosité.
- **Conditions aux limites** : Afin de résoudre les équations de conservation, il est nécessaire de spécifier les conditions appropriées aux limites. Cela peut inclure la pression à l'entrée et à la sortie de la conduite, la vitesse d'entrée, les pertes de charge, etc.
- **Propriétés du fluide et de la conduite** : Les propriétés physiques du fluide (densité, viscosité, compressibilité) ainsi que les caractéristiques de la conduite en cuivre (diamètre, rugosité, longueur) doivent être prises en compte dans les calculs. Ces propriétés influencent les pertes de charge, la viscosité du fluide et les contraintes générées.
- **Méthodes de résolution** : Pour résoudre les équations de conservation, des techniques numériques telles que les différences finies, les éléments finis ou les volumes finis sont généralement utilisées. Ces méthodes permettent de discrétiser l'écoulement dans la conduite en une grille de points et de résoudre les équations à chaque point.
- **Comportement transitoire** : L'écoulement transitoire se réfère aux variations de pression et de vitesse dans le temps. Il peut être provoqué par des changements brusques de débit, des ouvertures ou des fermetures rapides de vannes, etc. Dans ces cas, des phénomènes tels que les ondes de pression peuvent se produire, ce qui nécessite des techniques spécifiques pour modéliser le comportement transitoire du fluide.

Il est important de souligner que pour calculer précisément les pressions et les contraintes lors de l'écoulement transitoire d'un fluide dans une conduite en cuivre, il est nécessaire d'effectuer une analyse détaillée prenant en compte tous les aspects mentionnés ci-dessus. La complexité des calculs peut varier en fonction des conditions spécifiques de l'écoulement et des paramètres de la conduite en cuivre

## **I.2. Conduite principale:**

C'est une conduite de 1400 mm de diamètre et 436 m de longueur, placée horizontalement à 296 m, elle commence de la galerie rectangulaire et se termine à la sortie aval de la digue. La figure (2.5) montre une photo d'elle prise à l'intérieur de la galerie.



**Figure (I.1):** Conduite principale sortante du Barrage.



**Figure I.2:** Photo des points de jonction des conduites secondaires à la conduite principale

### **I.1. Les vannes :**

Elles permettent de maîtriser les écoulements dans le réseau, de mieux gérer celui-ci. Il existe plusieurs types de vannes qui satisfont à des besoins variés.



**Fig.I.3:**La vanne

Ceux-ci vous permettent de contrôler et de mieux gérer les flux de votre réseau. Il existe différents types de vannes pour répondre à différents besoins.

Il existe deux types de vannes d'isolement.

b) Vanne : Les robinets-vannes : Les robinets - vannes appareils de sectionnement pour isoler un tronçon de Conduite de petit diamètre.

- Les vannes de réduction de pression.
- Les vannes à clapets de non-retour.

Robinet - vanne d'isolement pour isoler la section

Un tuyau de petit diamètre.

- Détendeur.
- Vannes avec clapets anti-retour.

## I.2. Les types Vannes :

Les vannes d'isolement, on distingue deux types :

- Vanne à l'extrémité de la conduite en PRV
- Vanne papillon



**Figure (I.4):** Vanne à l'extrémité de la conduite en cuirve



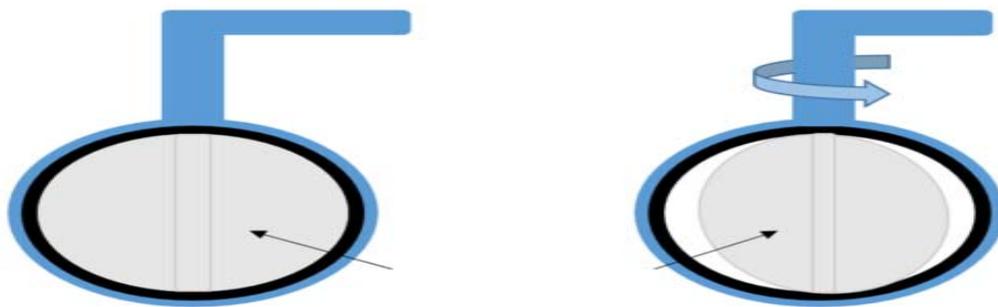
**Figure (I.5):** Vanne à l'extrémité de la conduite en PRV. **La source:** Google 2022.

## 2.1 Vanne papillon :

Vannes papillon : Vannes papillon, étranglements et dispositifs d'arrêt pour les gros diamètres (> 300 mm).

La fonction principale de la vanne à papillon est de contrôler l'écoulement des liquides à travers une section de tuyau. La partie la plus importante de la vanne est le disque de métal. Le papillon (disque) est monté sur une tige. Lorsque le clapet est fermé, il bloque le passage du fluide. Lorsque le clapet est complètement ouvert, le papillon se déplace d'un quart de tour. Le passage est alors libre, permettant au fluide de passer.

La vanne papillon est utilisée dans les industries chimiques, pharmaceutiques et alimentaires, pour interrompre l'écoulement.



**Fig.(I.6) :** Vanne papillon

## I. 2.2 Les technologies et fonctionnalités des vannes:

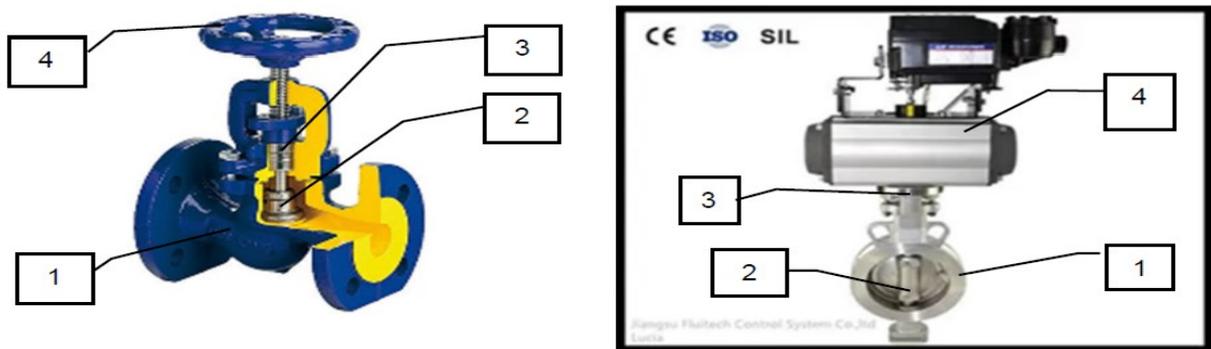
### 2.2.1 Elements constitues d'une vanne:

Une vanne est un appareil constitué d'une partie fixe (le corps) et d'une partie mobile (l'obturateur). La partie mobile permet d'ouvrir et de fermer une voie de passage afin de permettre ou d'empêcher la circulation d'un fluide.

Dans l'industrie, il existe de nombreux types de vannes qui dépendent des applications.

Cependant, elles sont toutes constituées des quatre parties principales suivantes :

1. l'enveloppe ou corps ;
2. l'obturateur ;
3. la transmission ou tige/axe ;
4. l'actionneur (manuel ou automatique) et son énergie d'activation



**Figure I.7:**Exemples de vannes industrielles: vanne Manuelle à piston (gauche) ET vanne automatique Papillon (droit)

### 3.2 Enveloppe (corps) de la vanne:

L'enveloppe, qui comporte le corps de vanne (1) et le chapeau (2), constitue l'interface fluide-ambiance extérieure. Des systèmes de raccordement permettent de la raccorder à la tuyauterie par soudage, boulonnage ou vissage, tels que des brides (3).

La voie ou le passage (4) désigne le volume par lequel le fluide transite du côté amont au côté aval de la vanne.

La portée ou le siège d'étanchéité (5) correspond au composant qui, une fois au contact de l'obturateur, empêche la circulation du fluide.

Le chapeau ou bonnet (2) désigne le composant qui vient sceller la vanne par le dessus. Il accueille le support sur lequel est monté l'actionneur, ainsi que la transmission et les éléments

d'étanchéité associés, et permet donc la manœuvre de la vanne en prévenant toute fuite vers l'extérieur. Certaines vannes sont munies d'une extension de chapeau afin d'éloigner la boîte à garniture de labridés du chapeau de sorte que la vanne soit adaptée aux températures extrêmes du procédé.



Source: <https://www.ramus-industrie.com/wp-content/uploads/2018/01/regulation-equilaur-en-coupe.jpg>

### 3.3 Les différences technologiques d'obturateurs sont les suivants:

- Vannes relatives
- Vannes à torment ou à Boisean
- Vannes Papillon
- Vane à excitation
- Vannes à translation
- Vannes à soupape
- Vannes à piston et vane à cage
- Vannes à opercula ou robinvane
- Vannes à opercula à siegesoblique

Les technologies de vannes dédiées à la sécurité sont généralement des vannes à quart de tour (papillon ou à boisseau sphérique).

Leurs principes de fonctionnement ainsi que leurs avantages et limites d'utilisation sont présentes à l'annexe 1.

**Chapitre II :**  
**Description des écoulements transitoires**  
**en charge**

## II.1. Description :

Les transitoires hydrauliques représentent une menace constante qui peut survenir à tout moment en raison des différentes opérations effectuées sur le réseau. Les régimes de fonctionnement transitoires entraînent des variations de pression très élevées ou très basses, avec des conséquences catastrophiques pour la survie des installations. Ils peuvent causer des dommages, tels que la détérioration des tuyaux, ce qui entraîne souvent des dépenses imprévues pour la réparation et la maintenance. Par conséquent, la recherche et l'expertise dans ce domaine revêtent une grande importance lors de la conception et de l'installation des réseaux, car ils permettent de prendre en compte ces aspects lors du choix des diamètres de conduite et de l'installation d'éléments pouvant atténuer les effets néfastes.

- La prévention des transitoires nécessite l'utilisation de gros diamètres et de parois épaisses, ce qui est toujours coûteux, mais offre une certaine protection contre les conséquences potentielles. Les transitoires sont des phénomènes complexes qui se produisent suite à des changements de débit. Selon leur masse, les fluides ont une vitesse constante qui leur confère une énergie cinétique pouvant être dissipée après leur passage dans le réseau. Selon le principe de conservation de l'énergie, cette énergie initiale ne disparaît pas rapidement, mais se transforme en énergie potentielle sous forme d'ondes de surpression et de vitesse, se propageant le long du tuyau à une vitesse dépendant de l'élasticité et de la compressibilité du matériau.
- Divers éléments du réseau hydraulique peuvent provoquer des fluctuations de débit et donc la survenue de conditions transitoires. Cela inclut des éléments tels que :
  - Les vannes, dont la gravité dépend des conditions de manœuvre (ouverture ou fermeture brusque, progressive, continue) et de la nature du réseau.
  - Les pompes et les turbines, qui génèrent des transitoires lors de leur démarrage, arrêt ou en cas de perte de puissance.
  - La géométrie du tuyau, qui provoque des transitoires en raison des changements de section le long du conduit.

Ainsi, l'étude des phénomènes de transitoires de l'écoulement sous pression vise à déterminer si la pression globale du système se situe dans les limites spécifiées après une perturbation du débit.

### **II.3. Types d'écoulements :**

#### **II.3.1. Écoulement permanent :**

Un écoulement de liquide est considéré comme stable si les propriétés et propriétés du liquide sont différentes.

Son hydraulique ne change pas avec le c'est à dire:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$V$  : Vitesse d'écoulement,

$P$  : La pression,

$\rho$  : Masse volumique.

#### **II.2.2. Écoulement non permanent:**

Un écoulement de liquide devient instable lorsque la vitesse ou la pression dans le liquide subit des changements. Cela peut se produire lorsque le fluide est en mouvement et que la vitesse ou le temps de remplissage ( $t$ ) varie à un point spécifique de l'espace ( $x$ ).

La pression d'écoulement instable dépend de quatre variables indépendantes : les coordonnées spatiales ( $x, y, z$ ) et le temps ( $t$ ) du point examiné.

On distingue deux types d'écoulements instables : les écoulements sous charge et les écoulements à surfaces libres. Ces instabilités ne sont pas nécessairement limitées à des dimensions spécifiques (1D, 2D ou 3D).

#### **II.2.3. Écoulement uniforme:**

Un écoulement est dit uniforme lorsque la vitesse du fluide à un instant donné, à une

Même direction et une même intensité en tous points de ce fluide c'est-à-dire :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

## II.2.4. Écoulement non uniforme:

Un écoulement est dit non uniforme si la vitesse du fluide varie d'une section à l'autre  
C'est-à-dire :

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$$

## II.2.5. Écoulement transitoire :

On appelle régime transitoire, un phénomène qui se manifeste entre deux régimes stationnaires, autrement dit c'est un écoulement varié, où les paramètres hydrauliques changent :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$$

Avec:

V: vitesse d'écoulement.

P : la pression.

Ce phénomène transitoire peut se manifester soit dans un canal à ciel ouvert ou bien dans une conduite en charge, par accroissement ou décroissement du débit.

On pourra citer quelques exemples d'écoulements transitoires dans le cas d'une conduite en charge:

- Écoulement dans les machines hydrauliques à puissance variable.
- Phénomène du coup de bélier.

Donc l'écoulement transitoire et un écoulement non permanent, dans notre travail nous nous intéresserons uniquement au phénomène du coup de bélier.

Même direction et une même intensité en tous points de ce fluide c'est-à-dire :

## II.3. Types d'ondes :

### II.3.1. Ondes linéaires :

Du point de vue physique, les ondes linéaires sont celles qui se propagent dans le fluide sans modifier les propriétés physiques locales (compressibilité, masse spécifique, conductivité, viscosité...). Voici quelques exemples de ces types d'ondes:

- Les ondes du son,
- Les ondes de lumière,
- les ondes électromagnétiques.

### **II.3.2. Ondes non-linéaires :**

Les ondes les propriétés de ce dernier. Non linéaires sont celles qui se propagent dans le fluide en provoquant des variations dans.

## **II.4. Phénomène du coup de bélier :**

### **II.4.1. Définition :**

Le coup de bélier étant un cas particulier du régime transitoire, est un phénomène oscillatoire qui se manifeste dans les conduites en charge à écoulement gravitaire ou par refoulement.

On entend aussi sous le terme « coup de bélier » un écoulement non permanent du liquide accompagné des variations pratiquement sensibles de la pression qui peuvent devenir dangereuses pour la tuyauterie. Ces variations résultent d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement.

C'est le nom que l'on donne à une onde de choc hydraulique, lorsqu'un liquide non compressible comme l'eau, est stoppé net dans une canalisation. Autrement dit, c'est l'arrêt brutal de la circulation de l'eau lorsqu'un robinet (ou tout autre appareil) se ferme [3].

### **II.4.2. Causes du coup de bélier :**

Le coup de bélier est un phénomène oscillatoire dont les causes les plus fréquentes sont les suivantes [3] :

- L'ouverture ou la fermeture des vannes dans les conduites en charge à écoulement gravitaire.
- La mise en marche ou l'arrêt des pompes dans les conduites en charge par refoulement.
- Le remplissage ou la vidange d'un système d'AEP.
- Modification de la vitesse d'une pompe.
- Une variation du niveau d'un réservoir à une extrémité du réseau.
- La disparition de l'alimentation électrique dans une station de pompage qui est la cause la plus répandue du coup de bélier.
- La mise en marche ou la modification de l'opération d'une turbine.
- Une modification de position de vanne.
- Des opérations incontrôlées.

### II.4.3. Risques dus aux coups de bélier :

Les effets des coups de bélier peuvent être nocifs. À mesure que les changements de paramètres (changements de pression et de débit dans le temps) deviennent plus importants, ils deviennent de plus en plus dangereux.

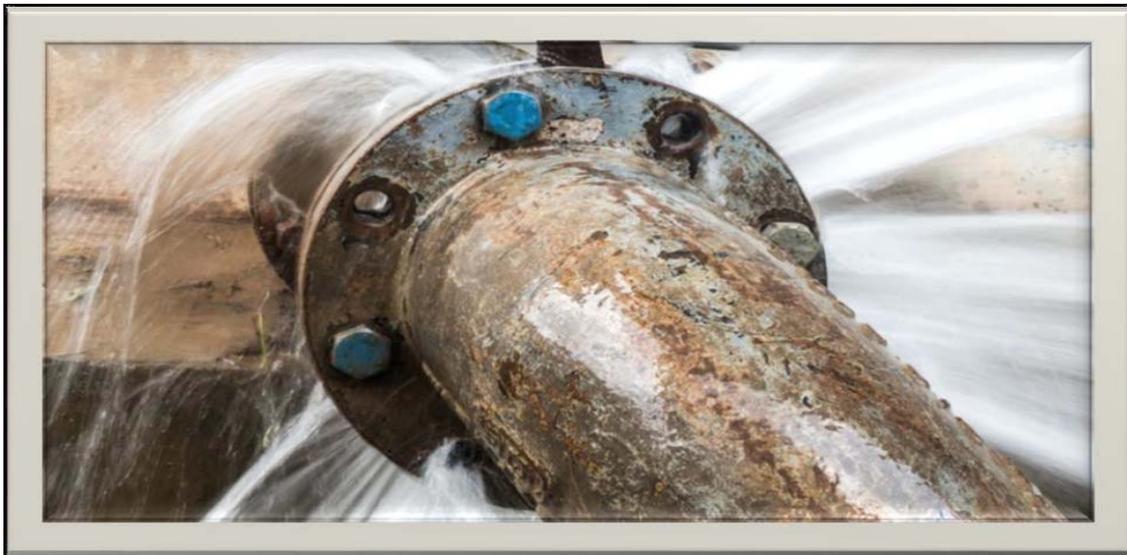
Ces phénomènes se produisant dans les conduites sous charge peuvent être dangereux si un fonctionnement brusque crée une pression négative ou positive. [38].

#### a. Cas de surpression :

Le coup de bélier est un phénomène oscillatoire qui se produit dans les conduites lorsque le régime transitoire se manifeste. Il peut se produire dans les conduites sous charge en écoulement gravitaire ou en refoulement.

Le terme "coup de bélier" fait également référence à un écoulement non permanent du liquide accompagné de variations de pression sensibles, pouvant devenir dangereuses pour la tuyauterie. Ces variations résultent d'une perturbation des conditions d'écoulement permanent.

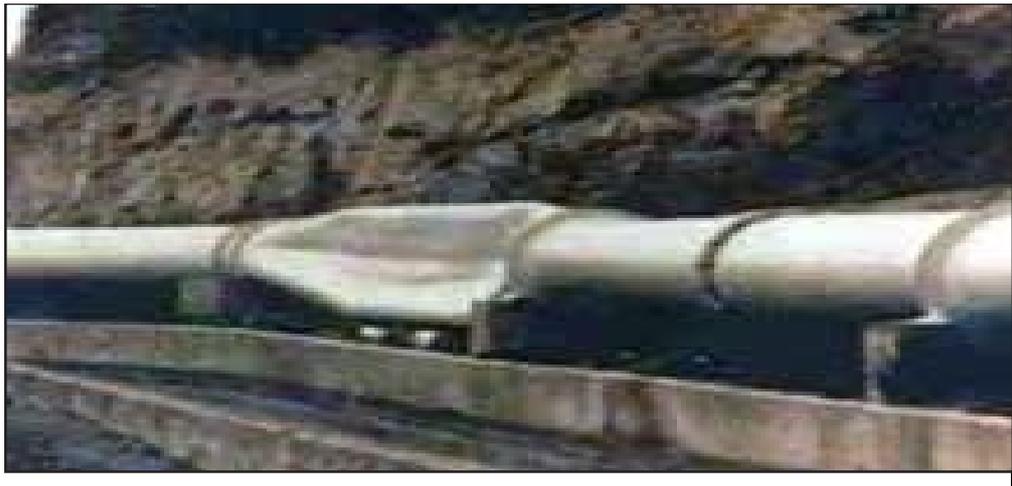
On utilise le terme "coup de bélier" pour décrire une onde de choc hydraulique qui se produit lorsqu'un liquide incompressible tel que l'eau est brusquement arrêté dans une canalisation. En d'autres termes, il s'agit de l'arrêt brutal de la circulation de l'eau lorsqu'un robinet (ou tout autre appareil) est fermé.



**Figure I.1:** Suppression au niveau des canalizations.  
**La source:** Google 2022.

### **b. Cas de dépression :**

C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par l'apparition d'une pression relative négative, à la suite d'un arrêt brusque d'une pompe ou d'une ouverture instantanée d'une vanne de sectionnement. Si cette pression devient inférieure à 10 mCE il se produit une poche de cavitation. Si le profil en long de la canalisation est déformable la canalisation peut être aplatie par implosion et les joints peuvent être aspirés. Le phénomène de cavitation une fois apparu peut provoquer la détérioration de la couche d'enduit intérieur du tuyau.



**Figure I.3:** Dépression au niveau des canalizations.

### **C. Fatigue de la canalisation :**

En régime transitoire les alternances des surpressions et dépressions qui sont une conséquence inévitable du phénomène provoquent la fatigue pour le matériau de la canalisation même si leur amplitude est faible.

## **II.5. Description des phénomènes physiques en jeu :**

### **II.5.1. État d'équilibre d'un système hydraulique**

Les transitoires hydrauliques se produisent lorsque l'équilibre des forces agissant sur le système change. L'équilibre permanent existe lorsqu'un liquide se déplace dans un tuyau et ce mouvement ne change pas dans le temps. En fait, il existe un équilibre entre l'énergie disponible (ou potentielle) et l'énergie produite par le mouvement (mouvement) et perdue par frottement, ce qui définit le mouvement perpétuel. Cette vision est macroscopique. En effet, on observe que la vitesse fluctue constamment autour de la valeur moyenne à des échelles plus petites. C'est une manifestation de turbulences. Pour les besoins de l'analyse effectuée ici, nous considérons

uniquement l'effet global moyenné dans le temps de la turbulence, notamment en ce qui concerne l'évaluation des forces de frottement en fonction des conditions d'écoulement.

### **II.5.2. Coup de bélier de masse et coup de bélier d'onde :**

Les variations de régime dans un système sous pression peuvent adopter deux phénomènes distincts qui sont le coup de bélier de masse et le coup de bélier d'onde.

Dans le coup de bélier de masse, la masse volumique du liquide reste quasiment constante, et les conduites peuvent être considérées comme étant indéformables.

Le coup de bélier d'onde est caractérisé par la propagation d'ondes, de surpression et de dépression, qui dépendent entre autre de l'élasticité de l'eau et de l'élasticité des conduites. Dans ce qui suit, nous examinerons avec plus d'attention le phénomène de coup de bélier d'onde car il entraîne des effets plus contraignants sur le matériel que le coup de bélier de masse.

### **II.5.3. Perturbation de l'équilibre, effet sur les pressions :**

Considérant une canalisation à débit de fluide en régime permanent, le niveau de pression est très raisonnable et inférieur à la pression hydrostatique à débit nul. Que se passe-t-il si le débit change avec le temps en raison d'une accélération ou d'une décélération pour une raison quelconque ? La réponse du physicien est basée sur les principes de la mécanique newtonienne. Compte tenu des pertes et violant la loi de conservation de l'énergie, un transfert d'énergie se produit entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique pour atteindre un nouvel équilibre.

Cette réponse, bien que rigoureuse, peut nous sembler bien sèche. Et vous pourriez vous demander comment cela s'applique au cas simple d'une masse d'eau qui circule dans un tuyau à l'état stationnaire et dont le mouvement est altéré. Il est basé sur le principe que dans les liquides l'énergie potentielle est convertie en énergie de pression, l'eau n'est pas complètement incompressible et les tuyaux permettent une déformation élastique.

## II.6. Valeur numérique du coup de bélier:

### II.6.1. Manœuvres rapides (formule de Joukovski):

Nous avons considéré, jusqu'à présent, une manœuvre instantanée, d'une durée  $T = 0$ ,

Ce qui est physiquement impossible.

Dans la réalité, la variation de débit, provoquée par l'arrêt d'une pompe par exemple, se fait en un temps  $T \neq 0$  et des ondes élémentaires sont engendrées, au fur et à mesure que s'opère l'arrêt.

Dans le cas d'une variation de débit rapide, temps d'annulation du débit inférieur au

Temps correspondant à l'allée et venue d'une onde élastique, on montre que [64] :

$$\Delta h = \pm \frac{c \Delta U}{g} \text{ Loi de Joukovski (II.1)}$$

### II.6.2. Le cas de la fermeture lente d'une vanne de sectionnement :

Lors de la fermeture rapide de la vanne de sectionnement, la valeur maximale du coup

De bélier était de.

$$\Delta h_{max} = \frac{cU}{g} [65].$$

Avec :

$U$  : vitesse moyenne de l'écoulement (m/s),

$C$  : vitesse de propagation (m/s),

$g$  : Accélération terrestre (m/s<sup>2</sup>).

Considérons une conduite horizontale "ab", de diamètre intérieur  $D$  de longueur  $L$

Alimentée en "a" par un réservoir à niveau constant (Figure (II.1)).

Soit temps  $t = 0$  et supposons qu'il passe encore après un temps

$\frac{2L}{c}$ , un débit  $q$  La valeur de la surpression et de la dépression due au coup de bélier est :

$$h = \frac{c}{gA} (Q_0 - q) \quad (\text{II.2})$$

Où : A e la section de la conduite (m2).

Supposons que le temps de fermeture de la vanne soit  $T = n \frac{2L}{c}$  et que pendant ce

Temps le débit varie linéairement.

Nous avons :  $Q_0 - q = \frac{Q_0}{n} (\text{II.3})$

$$Q_0 - q = Q_0 \frac{2L}{cT}$$

$$h = \frac{c}{gA} Q_0 \frac{2L}{cT} = \frac{2LQ_0}{gAT} (\text{II.4})$$

Finalement:  $h = \frac{2LU}{gT}$  c'est la formule dite de Michaud.

La formule de Joukovski ne s'applique que dans le cas de manœuvres rapides.

Remarquons que si, dans cette formule, on remplace par  $T = \frac{2L}{c}$

On retrouve la valeur

De coup de bélier par fermeture brusque.

En conclusion:

Si  $T < \frac{2L}{c}$ , le coup de bélier a pour valeur maximale  $h = \frac{cU}{g}$

Si  $T > \frac{2L}{c}$ , le coup de bélier est moins important et a pour valeur maximale  $h = \frac{2LU}{gT}$

## II.7. Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une

### Tuyauterie :

#### II.7.1. Cas d'arrêt brusque de la pompe:

Considérons donc un système, analogue à une situation de refoulement, où l'eau coule à une vitesse  $U$  pour alimenter un réservoir dont le niveau est gardé constant. Le phénomène

Peut-être décrit en quatre phases [41] :

1) Au temps  $t = 0$ , le débit à travers la pompe est brusquement interrompu.

Dès que la vanne à clapet en amont du système est fermée, l'énergie cinétique agit ainsi que le mouvement initial de l'eau tend à se produire car la vitesse d'écoulement s'annule près de la vanne, créant ainsi une dépression. Parfois, il faut la compenser par gain d'énergie potentielle. Il arrive que la partie fixe de la colonne d'eau soit tirée.

Cette énergie de retenue est convertie mécaniquement en énergie de déformation, réduisant le diamètre du tube. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que toute la conduite soit comprimée, ce qui prend un temps égal au rapport de la longueur "L" et de la vitesse de l'onde de déformation.

2) Lorsqu'un cyclone atteint un réservoir, il se dissipe car il y a une pression constante à cet endroit.

A ce moment, rien n'arrête la compression du tube, et celui-ci commence à reprendre sa forme d'origine près du réservoir. La déformation initiale du tube y étant directement liée, l'augmentation de volume qui en résulte amène le tube à se remplir à une vitesse égale à la vitesse initiale du fluide. Ce phénomène est le même que la durée du pas Ancien.

3) Au moment où l'ensemble du tuyau revient à sa forme d'origine, la vitesse de l'eau devrait s'annuler et la vanne devrait se fermer. Encore une fois, l'énergie cinétique doit être convertie en énergie potentielle, mais cette fois l'énergie de pression sera positive car l'inertie de l'eau tend à comprimer les parties immobiles de la colonne d'eau.

Cette surpression sollicite la conduite et la fait gonfler. La durée de cette phase est la même que la durée de la phase précédente car la vitesse de l'onde de contrainte C est constante.

4) L'excès d'eau dû à l'augmentation du volume du tuyau commencera à s'écouler.

Une rotation à 0 tr/min près du réservoir ramènera le tuyau à son diamètre d'origine. Lorsque cette étape est terminée, l'ensemble du tuyau est restauré dans son état d'origine et l'étape 1 peut être redémarrée.

Ce cycle mensuel  $T = \frac{2L}{C}$  se répéterait indéfiniment, s'il n'y avait pas

de frottement. Les effets du frottement agissent essentiellement sur l'amortissement de l'amplitude de la variation de pression.

### II.7.2. Cas d'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite

Dans le cas de l'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite, la Manœuvre d'une vanne à l'aval du système entraîne une surpression au voisinage de la Vanne semblable à celle observée à l'étape 3 du cas précédent. Le phénomène suit Alors les étapes 4, 1, et 2.

Au bout du temps  $t = \frac{L}{c}$  serait engendrée dans le réservoir une onde d'équilibre qui se propagerait jusqu'à la vanne, où elle arriverait dans le temps  $t = \frac{2L}{c}$  (Phase 4).

À ce moment-là prendrait naissance une onde de dépression, qui atteindrait le réservoir dans le temps  $t = \frac{3L}{c}$  (phase 1), suivie d'une onde d'équilibre, qui attendrait la vanne dans le temps  $t = \frac{4L}{c}$  semblable à la phase 2, et le phénomène recommencerait s'il n'y avait pas de frottement.

### II.8. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons vu comment s'évolue un régime transitoire après une manipulation de la pompe, ainsi que la description physique du phénomène du coup de bélier et les causes induisant le problème.

# Chapitre III

## Formules de base pour le phénomène transitoire

### III.1 Introduction:

Le chapitre 3 aborde les aspects théoriques liés au mouvement temporel. Pour étudier les transitoires dans les écoulements monophasiques sous pression, nous utilisons les équations établies par Saint-Venant, qui permettent de décrire les mouvements des liquides visqueux monophasiques. Ces équations sont basées sur les principes suivants :

- L'équation de continuité ou conservation de la masse.
- L'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation dynamique).

- L'équation de conservation de l'énergie.
- Les équations pour le comportement mécanique des liquides.
- Les équations pour le comportement thermodynamique des liquides.

Bien que l'eau soit souvent modélisée comme un fluide incompressible, les modèles utilisés pour les calculs hydrauliques non stationnaires doivent prendre en compte la faible compressibilité de l'eau et la flexibilité des conduites. En réalité, ce sont ces deux propriétés qui sont à l'origine des ondes de pression dans les conduites, communément appelées "coups de bélier".

[B. Greiveldinger. 2004].

### III.2. Formulation générale :

#### III.2.1. Equation de conservation de la masse (ou de la continuité) :

L'équation de continuité doit refléter le principe de conservation de la masse. L'augmentation de la masse de liquide contenue dans un volume donné dans une période de temps donnée doit être égale à la somme de la masse de liquide entrant dans ce volume moins la masse de liquide qui en sort. La forme différentielle de l'équation de continuité est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{III.1})$$

$\vec{V}$ : est le vecteur de vitesse.

$\rho$ : est la masse volumique.

En général, il n'y a ni apparition ni dissipation de fluide au cours du mouvement (le mouvement est dit conservatif).

#### III.2.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement :

**On considère une masse déterminée de fluide occupant au temps « t » un « V ».**

$$\frac{d}{dt} \int_0^V \rho \vec{V} dV = \sum \vec{F}_{ext} \quad (\text{III.2})$$

Où:

$\vec{V}$ : vitesse moyenne

V: volume de controle

$\sum \vec{F}_{ext}$  : represent les force exterieur

Sous forme :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{grad} P + \vec{f}_v$$

$\rho \frac{d\vec{V}}{dt}$ : représente la force d'inertie de masse.

$\rho \vec{F}$ : Représente la force de volume.

$\overrightarrow{grad} P$ : représente la force de pression. (III.3)

$\vec{f}_v$ : représente la force de viscosité.

### III.2.3. Equation de conservation de l'énergie :

Pour un système matériel quelconque effectuant une transformation entre deux états d'équilibre, l'équation d'énergie dans sa forme générale est écrite en étudiant le bilan d'énergie homogène dont la variation de l'énergie interne **E** et de l'énergie cinétique **K** soit égale au travail **W** et de la chaleur **Q**.

$$\Delta(\mathbf{E} + \mathbf{K}) = \Delta \mathbf{w} + \Delta \mathbf{Q} \quad \text{(III.4)}$$

### III .2. 4. Lois de comportement du fluide :

Toute modification locale des conditions d'écoulement du liquide dans la conduite (arrêt, actionnement d'une vanne...) provoque une discontinuité d'écoulement du liquide. Cela affecte directement les paramètres (P, V) et interrompt le débit de liquide en raison de l'élasticité du tuyau. Comme cette discontinuité se propage à une certaine vitesse, cette perturbation affecte directement le comportement de la canalisation.

#### III.2.4.1. Loi de comportement mécanique :

Les phénomènes mécaniques et thermodynamiques sont étroitement liés. On distingue alors les lois de comportement habituellement utilisées pour définir les fluides et les lois de comportement

thermodynamique moins spécifiques au type de milieu. D'autre part, l'expérience a montré que dans de nombreux cas, seuls les aspects mécaniques peuvent être conservés.

Les lois de comportement mécanique des liquides découlent des relations:

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\tau} - P\bar{I}$$

$$\bar{\tau} = \lambda(\text{div } V)\bar{I} + 2\mu\bar{\epsilon} \text{ (III.5)}$$

**Où:**

$\bar{\sigma}$  : est le tenseur des contraintes.

$\bar{\epsilon}$ : est le tenseur des taux de déformation.

$\bar{\tau}$ : est le tenseur des contraintes de viscosité.

$\lambda$  et  $\mu$  : sont de coefficients de viscosité.

L'équation (III.5) sera :

$$\bar{\sigma} = \lambda(\text{div } V)\bar{I} + 2\mu\bar{\epsilon} - P\bar{I} \text{ (III.6)}$$

### III.2.4.2. Loi de comportement thermodynamique :

Les changements rapides associés aux phénomènes de propagation des ondes peuvent être considérés comme isothermes.

Dans ces conditions le liquide se comporte essentiellement comme barotrope. La densité dépend essentiellement de la pression.

$$x = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \text{ (III.7)}$$

Où :

X : est le coefficient de compressibilité.

V : est le volume occupé par unité de masse.

La relation liant la masse volumique ( $\rho$ ) au volume ( $v$ ),  $\rho = \frac{1}{v}$ , nous permet d'écrire :

$$x = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \text{ (III.8)}$$

Le module d'élasticité du fluide « K » est l'inverse du coefficient de compressibilité isotherme « x » du fluide, dont on peut écrire ;

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{K} dP \text{ (III.9)}$$

Et

$$x = \frac{1}{K} \text{(III.10)}$$

Où :

K : est le module d'élasticité du fluide.

$\rho$ : est la masse volumique du fluide.

### III.2.5. Equation de comportement de la conduite :

Pour les matériaux élastiques et isotropes, en supposant qu'il n'y a pas de changement de température, la déformation subie par un tube cylindrique sous tension est donnée par:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr})] \text{(III.11)}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{rr})]$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})]$$

Où :

E : est le module d'élasticité (module de Young) de la conduite.

$\nu$ : est le coefficient de Poisson.

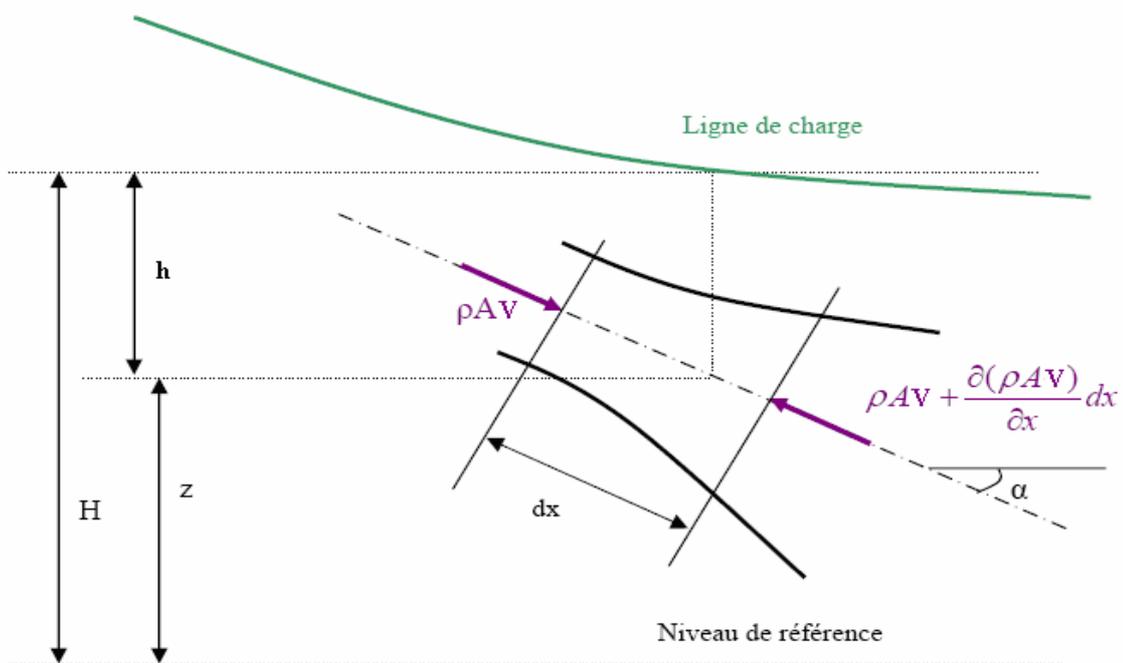
### III.3. Equations simplifiées :

#### III.3.1. Hypothèses :

- L'écoulement est considéré comme unidimensionnel.
- le problème est un problème de petites déformations.
- . On suppose que le problème est axisymétrique.
- Le fluide est supposé légèrement compressible.
- la conduite est supposé cylindrique circulaire, rectiligne et assimilée à une juxtaposition d'anneaux indépendants.
- La viscosité de l'eau est supposée constante.

### III.3.2. Equation de conservation de la masse ou équation de continuité :

Considérant un volume de fluide renfermé dans un tronçon de conduite (**Figure III.1**), on peut dire que la continuité s'exprime par l'égalité de la différence des masses entrantes et sortantes, et de la variation dans le volume de contrôle :



**Figure III.1** : Bilan de masse dans un tronçon de conduite

D'après les hypothèses l'écoulement est unidimensionnel, alors l'équation de la conservation la masse se réduit à :

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} = \rho AV - \left(\rho AV + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} dx\right) \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho AV)}{\partial x}\right) \quad (\text{III.13})$$

En explicitant les dérivées partielles spatiales et temporelles, ainsi qu'en regroupant les termes, on obtient :

$$A \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.14})$$

Et comme :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (\text{III.15})$$

Et

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{A} \left( V \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad (\text{III.16})$$

L'expression (III.14) prend la forme :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.17})$$

Exprimons ce qui se passe du point de vue de l'analyse des contraintes et déformations.

Le terme  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$  prend en compte la compressibilité du fluide.

Et  $\frac{1}{A} \frac{dA}{dt}$  est l'élasticité transversale de la conduite.

On suppose que la conduite est construite avec des joints de dilatations ce qui permet une Déformation longitudinale libre. Mathématiquement cette contrainte longitudinale s'écrit : Si on suppose que les déformations sont petites et proportionnelles aux contraintes, on peut écrire selon la **loi de Hooke**

On a :  $\rho = \int (A \cdot P)$  mais comme on suppose que les phénomènes thermiques liés à la dissipation mécanique ou aux échanges avec l'extérieur ( $A = \text{Cte}$ ) sont négligeables et que l'eau étant un fluide Baro trope, on considère.

La définition suivante de son module d'élasticité  $K$  est comme suit :

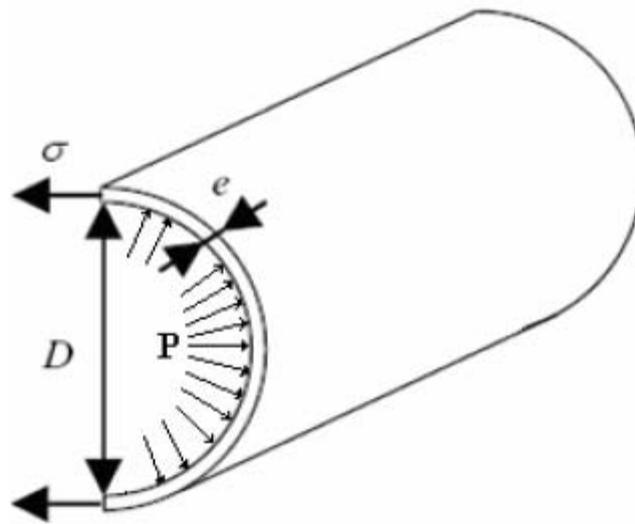
$$dP = K \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{III.18})$$

Selon la théorie de la résistance des matériaux, un tube hydraulique circulaire (qui est élastique et se déforme comme s'il était constitué d'anneaux indépendants, et est considéré comme

relativement mince afin de répartir uniformément la contrainte sur toute l'épaisseur)), la contrainte transversale est comme indiquée dans la figure III.2 est l'équation de fonctionnement suivante:

$$\sigma = \frac{PD}{2e}$$

Cette équation est utilisée pour exprimer la contrainte  $\sigma$  pour une différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur.



**Figure III.2 :** Contrainte latérale dans une conduite a paroi mince

En utilisant la définition de la déformation du matériau, à savoir :

$$d\varepsilon = \frac{dR}{R} \quad \text{(III.20)}$$

R étant le rayon hydraulique de la conduite.

Et en introduisant le module d'élasticité constant  $E_c$  du matériau, défini par :

$$\sigma = E_c \varepsilon \text{(III.21)}$$

Cette contrainte mécanique latérale s'explique comme :

$$d\sigma = E_c \frac{dR}{R} \text{(III.22)}$$

En combinant les expressions (III.19) et (III.22), sachant que  $da = 2\pi R dR$  et faisant l'hypothèse que l'épaisseur ( $e$ ) de la paroi est constante pendant le processus de déformation de la conduite, on aboutit à :

$$\frac{1}{R} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{eEc} \frac{dP}{dt} \quad (\text{III.23})$$

Ainsi, en combinant les équations (III.17), (III.18) et (III.23), on obtient l'expression suivante de l'équation de continuité :

$$\rho c^2 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{dP}{dt} = 0 \quad (\text{III.24})$$

Et comme la pression est fonction uniquement de  $x$  de  $t$ , on trouve :

$$\rho c^2 \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{dP}{dx} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

(III.25)

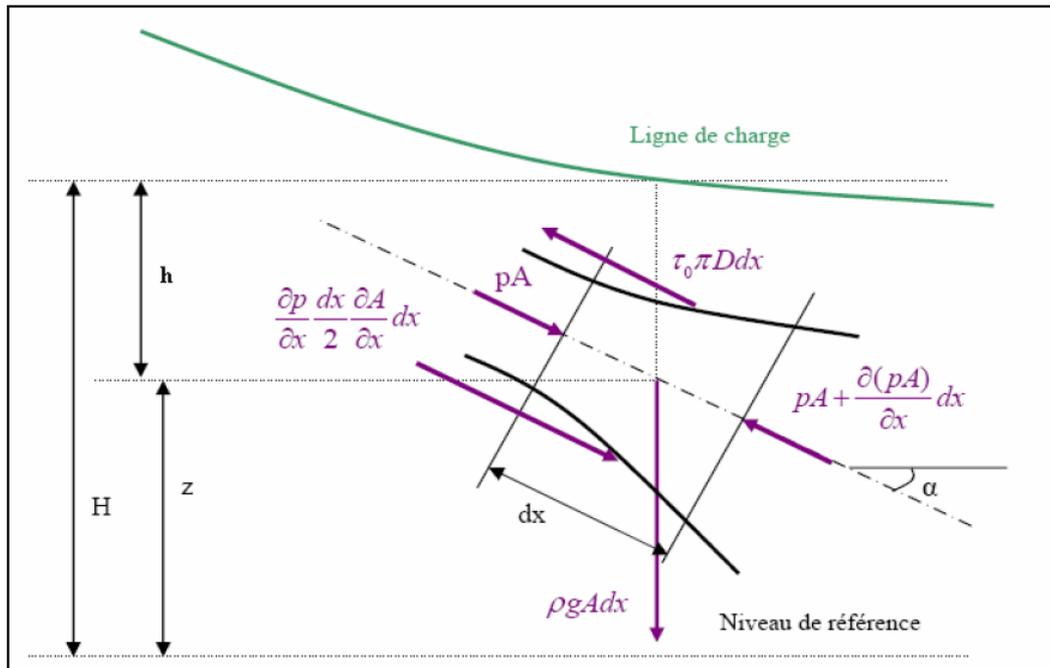
$C$  : est la vitesse de propagation de l'onde de pression, définie par Lorenzo Allievi comme étant égal à :

$$C = \sqrt{\frac{1}{\rho \left( \frac{1}{Ee} + \frac{D}{eEc} \right)}} \quad (\text{III.26})$$

### III.3.3. Equation de conservation de la quantité de mouvement ou équation dynamique :

#### Hypothèse :

Les hypothèses admises dans ce cas sont les mêmes qu'au point précédent à l'exception de la 3eme hypothèse, (Figure III.3) :



**Figure III.3 :** Bilan des forces exercées sur un tronçon de conduite (volume de contrôle).

Les forces prises en compte dans le bilan de quantité de mouvement sont :

- Les forces d'inertie.
- Les forces de pressions.
- Les forces de frottements visqueuses (Fr).
- La force de pesanteur en appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement au volume de contrôle :

$$\frac{d(mV)}{dt} = \sum xF_x \quad \text{(III.27)}$$

$$\rho A dx \frac{dV}{dt} = PA - PA + \frac{\partial(PA)}{\partial x} dx + \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \frac{\partial A}{\partial x} dx - \tau_0 \pi D dx - g \rho A dx \sin \alpha \quad (\text{III.28})$$

$PA - PA + \frac{\partial(PA)}{\partial x} dx + \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \frac{\partial A}{\partial x} dx$  : Sont des forces de pression normales et latérales.

$\tau_0 \pi D dx$  : Force de frottement.

Force de gravité.

$g \rho A dx \sin \alpha$  : Contrainte de la viscosité [N/m<sup>2</sup>].

$\alpha$  : Angle de la conduite.

D : Diamètre de la conduite [m].

A : Aire de section [m<sup>2</sup>]

$\rho$  : Masse volumique du fluide [kg/m<sup>3</sup>].

V : Vitesse du fluide [m/s].

En négligeant les termes de second ordre, on obtient immédiatement :

$$\frac{\partial P}{\partial x} A + \tau_0 \pi D + \rho g A \sin(\alpha) + \rho A \frac{dV}{dt} = 0 \quad (\text{III.29})$$

D'autre part, notre conduite est horizontale, donc le terme  $\rho g A \sin \alpha$  se réduit à zéro ( $\rho g A \sin(\alpha)$ ).

Notre équation prend la forme :

$$\rho \frac{dV}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} + 4 \frac{\tau_0}{D} = 0 \quad (\text{III.30})$$

- Les variables P, V,  $\rho$  dépendent uniquement des paramètres indépendants x et t.

- Exprimons les différentielles exactes des deux dernières équations sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial P}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{III.31})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{AD}{E.e} \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{AD}{E.e} \frac{\partial P}{\partial x} \end{array} \right. \quad (\text{III.32})$$

L'équation de la masse **(III.28)** développée comme suit :

$$\rho \frac{dA}{dt} + A \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho A \frac{\partial A}{\partial x} + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + AV \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{(III.33)}$$

En substituant **(III.22)**, **(III.23)**, **(III.24)** on aura :

$$\rho \left( \frac{AD}{E.e} \frac{\partial P}{\partial t} \right) + A \left( \frac{\sigma \partial P}{K \partial t} \right) + \rho V \left( \frac{AD}{E.e} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + AV \left( \frac{\rho \partial P}{K \partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} \left( \rho \frac{AD}{E.e} + \frac{A\rho}{K} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} V \left( \rho \frac{AD}{E.e} + \frac{A\rho}{K} \right) + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{(III.34)}$$

$$\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{E.e} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \rho V \frac{\partial P}{\partial x} \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{E.e} \right) + \rho \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{E.e} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

En divisant par  $\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{E.e} \right)$  on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{E.e} \right)} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{(III.35)}$$

Avec :  $a^2 = \frac{1}{\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{E.e} \right)}$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{E.e} \right)}}$$

Où :

**a** : La célérité de l'onde de pression (ou onde élastique en m/s).

**ρ** : La masse volumique de l'eau (1000 Kg/m<sup>3</sup>).

**K**: Le module d'élasticité du liquide ou compressibilité de l'eau (2070 MPa).

**D**: Le diamètre intérieur de la conduite (m).

**e** : L'épaisseur de la paroi (m).

**E<sub>c</sub>**: Module d'élasticité du matériau constituant la conduite (MPa).

Remarque :

Les deux facteurs essentiels qui interviennent dans la vitesse de propagation de l'onde de pression sont surtout la compressibilité de l'eau  $E_{eau}$  et l'élasticité du matériau constituant la conduite  $E_c$ .

Dans notre cas la vitesse du fluide est petite par rapport à la vitesse de propagation de l'onde donc on peut négliger le terme convectif.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

### III.3.4. Equation de conservation de l'énergie :

Les seules pertes de charges dues au frottement du fluide avec la paroi de la conduite, créent un échauffement. Cette quantité de chaleur produite reste toutefois négligeable devant la variation rapide du débit, l'évolution est considérée comme isotherme ( $dT=0$ ).

### III.4. Forme réduite du système des équations de base:

L'arrangement des équations de base nous conduit au système d'équation à résoudre :

$$\begin{cases} \rho \frac{dV}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} + 4 \frac{\tau_0}{D} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

En utilisant  $P=0$  notre système d'équations final se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{dV}{dt} + g \frac{\partial H}{\partial x} + 4 \frac{\tau_0}{\rho D} = 0 \end{cases} \quad \text{(III.36)}$$

**H** : La hauteur de pression.

**G** : L'accélération de la pesanteur.

Le système d'équation (III.36) est un système d'équation différentielle aux dérivées partielles du type hyperbolique.

**- Condition aux limites :**

Notre installation est assimilée à une conduite qui fuit, reliée à un réservoir par son extrémité amont, et à une vanne à fermeture rapide par son extrémité aval.

**- Conditions aux extrémités :**

Au niveau des extrémités de la conduite, la valeur de pression du fluide en amont et la valeur de la vitesse en aval de la conduite sont imposées.

**- Réservoir :**

Au niveau de cette extrémité, la pression est constante.

$$P = p_{\text{réservoir}} \quad (\text{III.37})$$

**- Vanne :**

La loi de fermeture de la vanne est exprimée par :

$$V = V_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) \quad (\text{III.38})$$

Où  $V_0$  : est la vitesse initiale du fluide.

$t_f$  : est le temps de fermeture de vanne.

# **Chapitre IV :**

# **Méthode de résolution**

## **IV1.Introduction :**

Le calcul des écoulements transitoire en charge (coup de bélier) par les méthodes numériques a beaucoup évolué dans les dernières années. Aujourd'hui, l'ingénieur concepteur n'effectue habituellement plus lui-même ce type d'analyse. En effet, la complexité des problèmes que l'on traite maintenant exige souvent l'utilisation de programmes sophistiqués de simulation. Donc, l'apparition des ordinateurs a favorisé le développement rapide de la modélisation mathématique et en conséquence la résolution des équations fondamentales des écoulements des fluides en régime transitoires par des méthodes numériques [Caudry, 1979] telles que :

- La méthode des caractéristiques (MC)
- La méthode des différences finies (MDF)

La MC est certainement la plus populaire et actuellement la plus utilisée. Les avantages de la MC sont une simulation correcte d'onde à front raide, une illustration simple de sa propagation, une programmation présentant peu de difficultés et une efficacité en termes de calcul.

La MDF peut entraîner soit des schémas explicites ou implicites. Ces derniers sont avantageux en termes de rapidité.

Pour la résolution de notre système d'équations différentielles aux dérivées partielles de type hyperbolique (III.36), nous avons choisi la méthode des caractéristiques couplée avec la méthode des différences finies.

### **IV.1.1 Méthode des caractéristiques :**

En mathématiques, la méthode des caractéristiques est une technique qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles hyperboliques. Particulièrement adaptée aux problèmes de transport, elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que l'hydraulique, la mécanique des fluides ou le transport des particules en suspension. Dans certains cas particuliers, la méthode des caractéristiques peut permettre la résolution purement analytique des EDF. Dans les cas les plus complexes rencontrés, par exemple en modélisation des systèmes hydrauliques, la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème de propagation des ondes dans les conduites en charge.

Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, la méthode des caractéristiques consiste à rechercher des courbes (appelées « lignes caractéristiques », ou plus simplement « caractéristiques ») le long desquelles l'EDP se réduit à une simple équation différentielle ordinaire (EDO). La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

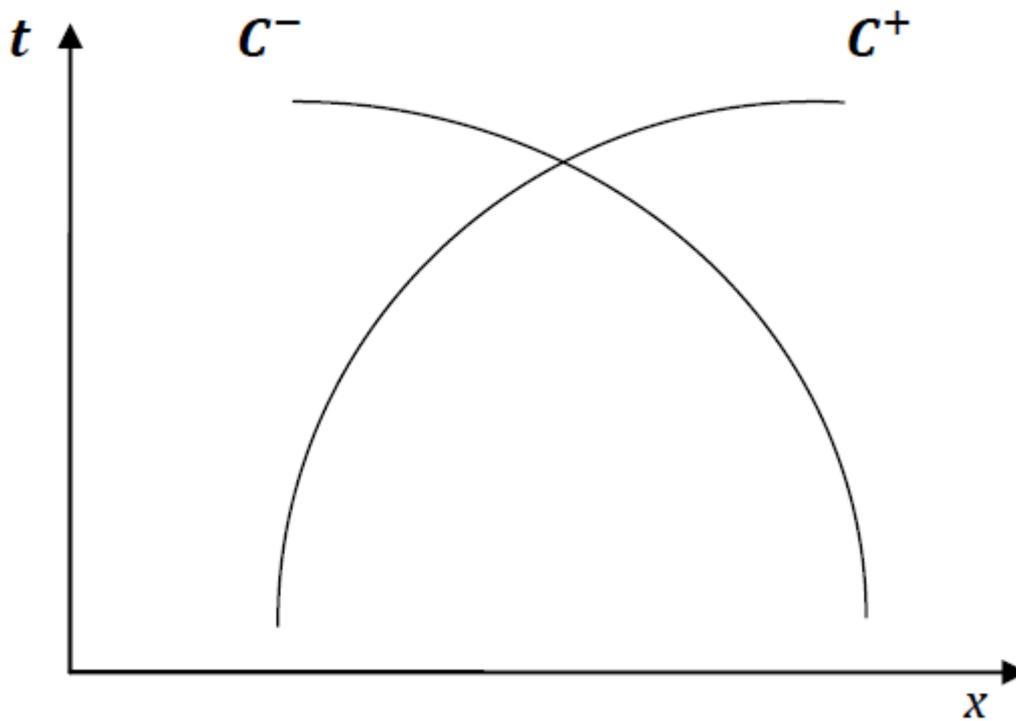
## **IV.2. Modélisation mathématique de H et V le long de la conduite :**

### **IV.2.1. Recherche des lignes caractéristiques :**

Notre système d'équations aux dérivées partielles traduit la variation des variables dépendantes  $H$  (hauteur de pression) et  $V$  (vitesse du fluide), qui sont des fonctions des variables indépendantes  $x = L$  (longueur de la conduite) et  $t$  (le temps). Dans un premier temps, en utilisant la méthode des caractéristiques, on doit transformer notre système d'équation aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires.

Le système d'équations **(III.36)**

Est un système d'équations différentiels aux dérivées partielles du type **hyperbolique** dont les directions caractéristiques peuvent être obtenues en considérant des fonctions **H** et **V** le long des courbes du plan **x, t** ou ces dérivés sont indéterminés.



**Figure IV.1 : Courbe caractéristiques.**

Le système d'équations différentielles aux dérivées partielles du type hyperbolique (III.36) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{dV}{dt} + g \frac{\partial H}{\partial x} = A \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Avec :  $\mathbf{A} = -\frac{4\tau_0}{\rho D}$  est le terme de frottement :

On rajoute les différences totales de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{V}$ :

$$\begin{cases} dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Le système d'équations devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = A \\ \frac{\partial H}{\partial x} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dx = dH \\ \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx = dV \end{array} \right. \quad (\text{IV.3})$$

On peut aussi arranger le système sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \frac{\partial H}{\partial t} + 0. \frac{\partial H}{\partial x} + 0. \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ 0. \frac{\partial H}{\partial t} + g. \frac{\partial H}{\partial x} + 1. \frac{\partial V}{\partial t} + 0. \frac{\partial V}{\partial x} = A \\ \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dx + 0. \frac{\partial V}{\partial t} dt + 0. \frac{\partial V}{\partial x} dx = dH \\ 0. \frac{\partial H}{\partial t} dt + 0. \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx = dV \end{array} \right. \quad (\text{IV.4})$$

En écrivant le système (IV.4) sous la forme matricielle ( $M \cdot X = B$ ) on aura :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{g} \\ 0 & g & 1 & 0 \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dH/dt \\ dH/dx \\ dV/dt \\ dV/dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ dH \\ dV \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Calcul du déterminant,  $\Delta$ , de la matrice  $M$  :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{g} \\ 0 & g & 1 & 0 \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix}$$

$$\Delta H = 1 \begin{bmatrix} g & 1 & 0 \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dt & dx \end{bmatrix} - 0 + 0 - \frac{a^2}{g} \begin{bmatrix} A & g & 1 \\ dt & dx & 0 \\ 0 & 0 & dt \end{bmatrix}$$

$$\Delta = -(dx^2 - 0) + a^2(dt - 0)$$

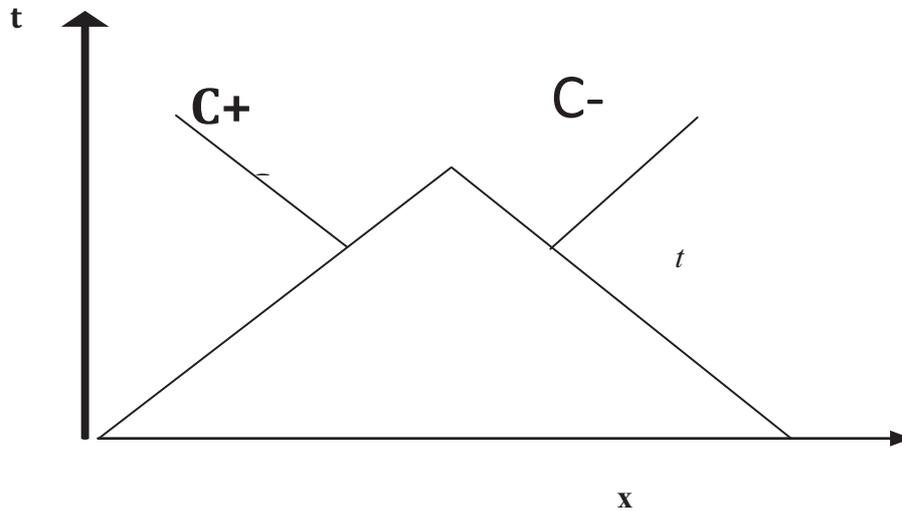
$$\Delta = a^2 dt^2 - dx^2$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 dt^2 - dx^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{dx^2}{dt^2}$$

$$\rightarrow dx = \pm a dt$$

$$\begin{cases} dx = +a dt \dots\dots\dots C^+ \\ dx = -a dt \dots\dots\dots C^- \end{cases} \text{(IV.7)}$$

$C^+$  et  $C^-$  Représentent les droites caractéristiques du système d'équations.



**Figure IV.2 :** Droites caractéristiques dans le plan (x, t)

#### IV.2.2. Recherche de la relation de compatibilité :

De façon analogue, les conditions  $(\Delta H_x; \Delta H_t; \Delta V_x; \Delta V_t) = 0$  nécessaires pour obtenir une solution éventuellement finie sont appelées « condition de compatibilité ». Le long des deux droites caractéristiques, les conditions de compatibilité sont

$$(\Delta H_x; \Delta H_t; \Delta V_x; \Delta V_t) = 0.$$

Il nous faut calculer les déterminants  $(\Delta H_x; \Delta H_t; \Delta V_x; \Delta V_t)$  pour qu'on trouve les relations de compatibilité.

Il est parfois suffisant de calculer un seul déterminant par le calcul du déterminant

$$\Delta H_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{g} \\ A & g & 1 & 0 \\ dH & dx & 0 & 0 \\ dV & 0 & dt & dx \end{bmatrix}$$

$$\Delta H_t = 0 \begin{bmatrix} g & 1 & 0 \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx \end{bmatrix} + 0 + 0 - \frac{a^2}{g} \begin{bmatrix} A & g & 1 \\ dH & dx & 0 \\ dV & 0 & dt \end{bmatrix}$$

$$\Delta H_t = \frac{-a^2}{g} [A(dxdt - 0) - g(dHdt) + gdV \cdot 0 + dH \cdot 0 - dx dV]$$

$$\Delta H_t = \frac{-a^2}{g} [(dxdt - gdHdt - dx dV)] \text{ (IV.8)}$$

$$\Delta H_t = 0$$

$$\Leftrightarrow Adxdt - gdHdt - dx dV = 0$$

$$Adx - gdH - \frac{dx}{dt} dV = 0$$

**Et**                    **comme**                    :

$$\begin{cases} dx = +adt \dots \dots C^+ \\ dx = -adt \dots \dots C^- \end{cases}$$

(IV.9)

L'équation (IV.9) devient donc comme suit :

$$\begin{cases} Adt - \frac{g}{a} dH - dV = 0 & \dots \dots C^+ \\ Adt + \frac{g}{a} dH - dV = 0 & \dots \dots C^- \end{cases} \text{ (IV.10)}$$

On divise sur  $dt$ , on obtient deux paires d'équation de compatibility suivant les lignes  $C^-$  et  $C^+$

$$\begin{cases} A - \frac{gdH}{adt} - \frac{dV}{dt} = 0 & \dots \dots C^+ \\ A + \frac{gdH}{adt} - \frac{dV}{dt} = 0 & \dots \dots C^- \end{cases} \text{ (IV.11)}$$

$$\text{Avec : } A = -\frac{4\tau_0}{\rho D}$$

**IV.3. Calcul de la hauteur de pression H et de la vitesse V aux points courants :**

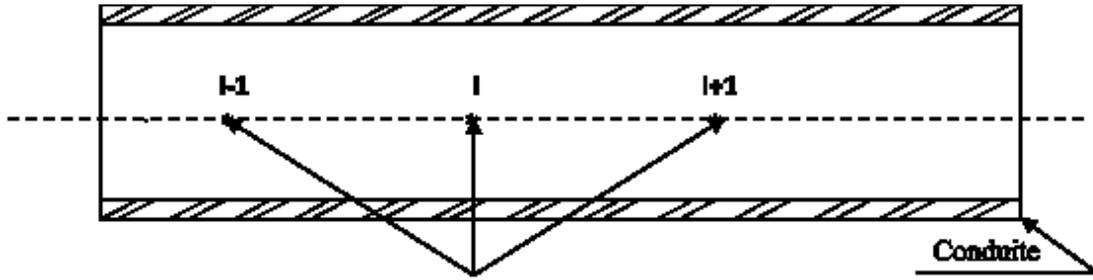


Figure IV.3 :Points de discrétisation sur lesquels on effectue les calculs.

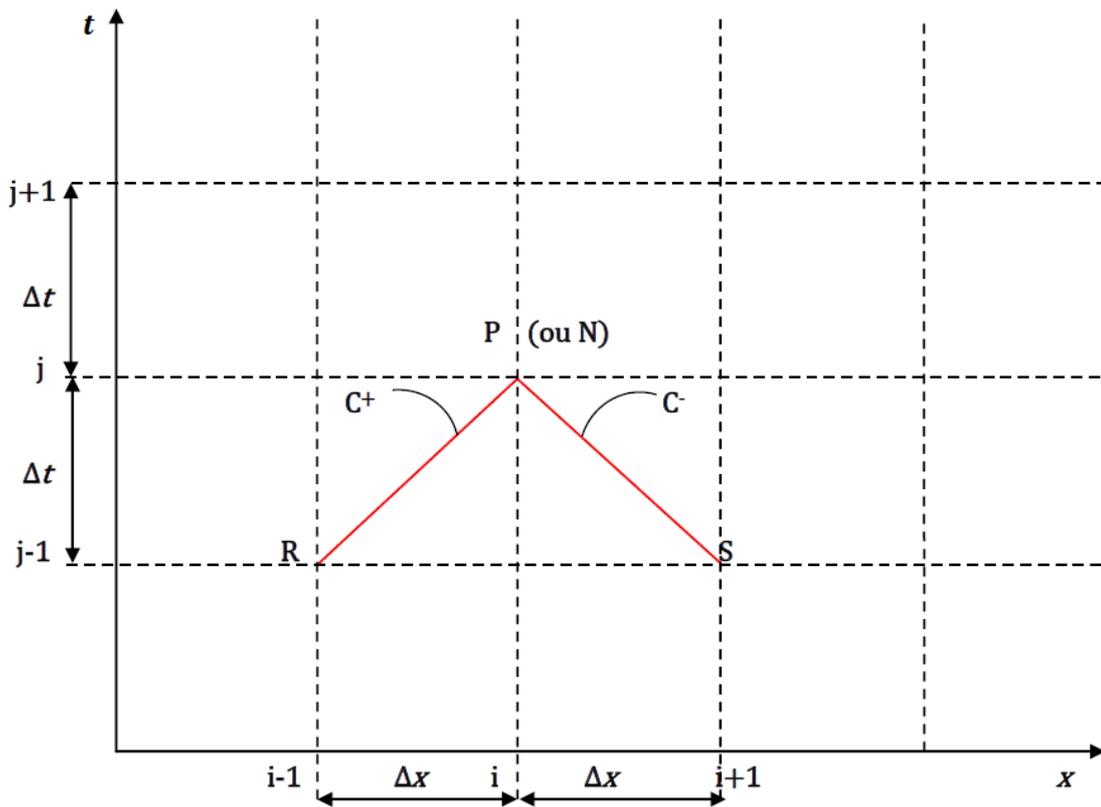


Figure IV.4 : Schéma de discrétisation et droites caractéristiques.

Le but étant de connaître à chaque instant :

- La hauteur de pression  $H$  (ou la pression)  $P = \rho gH$

➤ La vitesse de découlement  $V$  (ou le débit)  $qQ=VS$

Pour cela, on est conduit à résoudre numériquement et simultanément les relations (IV.10) pour chaque partie de la conduite.

Le schéma représenté sur la figure (IV.3), nous montre que le calcul de la hauteur de pression au point I à l'instant  $(t + \Delta t)$  se fait en fonction des points (I-1) et (I+1) et à l'instant  $(t)$  précédent.

Dans notre cas, nous avons utilisé le maillage régulier dans le plan  $(x, t)$  d'une division de la conduite en  $(N \text{ ou } P)$  tronçons  $(\Delta x)$  égaux, cela conduit aussi à des intervalles de temps  $(\Delta t)$  égaux.

Les points de discrétisation seront supposés suffisamment proches pour permettre d'écrire :

$$\int_{R,S}^N dV \pm \frac{g}{a} \int_{R,S}^N dH + \int_{R,S}^N \frac{4\tau_0}{\rho D} dt = 0 \quad (\text{IV. 12})$$

#### IV.3.1. Critère de stabilité du schéma numérique :

La condition de stabilité du schéma numérique est déterminée selon le critère de Courant-Friedrich, comme dans le cas des différences finies classique :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|\pm a|} \quad (\text{IV.13})$$

Ceci signifie que les point **R, S** soient compris entre (I+1) et (I-1).

Pour un maillage régulier, on adopte le cas suivant :

$$\Delta x = \pm \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{|\pm a|}$$

#### IV.3.2. Intégration des équations de compatibilité :

L'intégration des relations de compatibilité le long des droites caractéristiques donne :

a) le long de la droite caractéristique  $C^+$  :

$$\int_R^N dV + \frac{g}{A} \int_R^N dH + \int_R^N \frac{4\tau_0}{\rho D} dt = 0 \quad (\text{IV. 14})$$

b) le long de la droite caractéristique  $C^-$  :

$$\int_S^P dV - \frac{g}{a} \int_S^P dH - \int_S^P \frac{4\tau_0}{\rho D} dt = 0 \quad (\text{IV.15})$$

### IV.3.3. Calcul de H et V (intégration aux points courants) :

Au niveau du point courant:

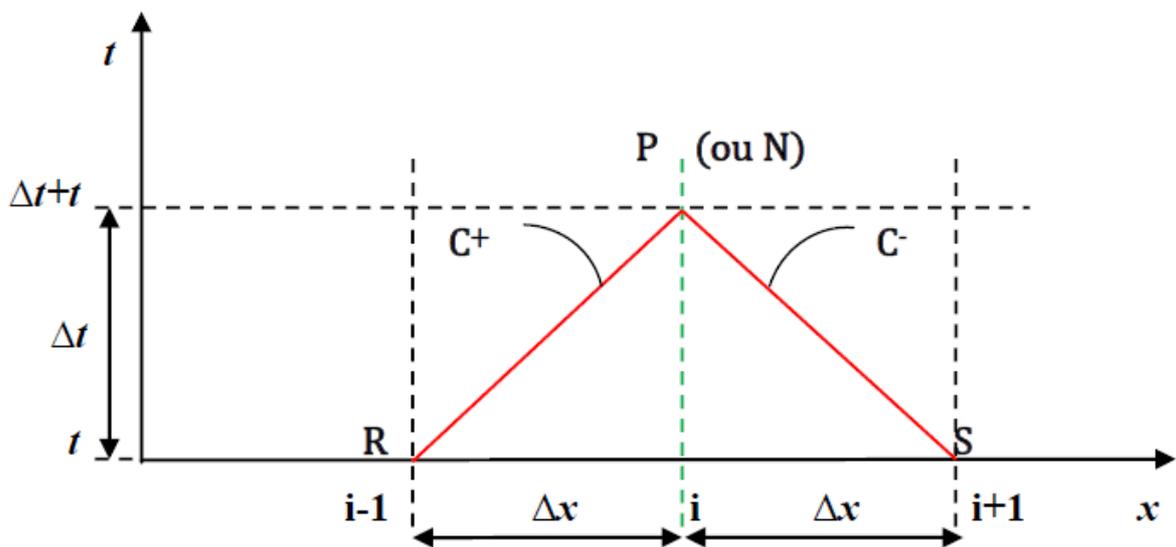


Figure IV.5 : Schéma numérique du point courant P.

Et comme la contrainte de viscosité (frottement) est déterminée par la relation :

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho V^2$$

$$\mathbf{C}^+ : (V_p - V_R) + \frac{1}{\rho a} (P_p - P_R) + \frac{\lambda}{2D} V_R |V_R| \Delta t = 0 \quad \text{(IV.16)}$$

$$\mathbf{C}^- : (V_p - V_s) - \frac{1}{\rho a} (P_p - P_s) + \frac{\lambda}{2D} V_s |V_s| \Delta t = 0 \quad \text{(IV.17)}$$

On multiplie deux équations fois ( $\rho a$ ) on obtient :

$$\mathbf{C}^+ : (V_p - V_R) \rho a + (P_p - P_R) + \frac{\lambda}{2D} \rho a V_R |V_R| \Delta t = 0$$

$$\mathbf{C}^- : (V_p - V_s) \rho a - (P_p - P_s) + \frac{\lambda}{2D} \rho a V_s |V_s| \Delta t = 0$$

Arrangement :

$$\mathbf{C}^+ : \rho a V_p + P_p = \rho a V_R + P_R - \rho a \frac{\lambda \Delta t}{2D} V_R |V_R| = CP$$

$$\mathbf{C}^- : \rho a V_p - P_p = \rho a V_s - P_s - \rho a \frac{\lambda \Delta t}{2D} V_s |V_s| = CM$$

On pose :  $\rho a = B$        $\eta \Delta t = dx$

On aura :

$$\mathbf{C}^+ : B V_p + P_p = B V_R + P_R - \rho \frac{\lambda}{2D} dx V_R |V_R| = CP \quad \text{(IV.18)}$$

$$\mathbf{C}^- : B V_p - P_p = B V_s - P_s - \rho \frac{\lambda}{2D} dx V_s |V_s| = CM \quad \text{(IV.19)}$$

$$(IV.17) - (IV.18) \Rightarrow 2P_p = CP - CM \Rightarrow P_p = \frac{CP - CM}{2} \quad \text{(IV.20)}$$

$$2B V_p = CP + CM \Rightarrow$$

$$V_p = \frac{CP + CM}{2} \quad \text{(IV.21)}$$

#### IV.3.4. Calcul du terme de frottement :

**A - La contrainte de viscosité (frottement) est déterminée par la relation suivante :**

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho V^2 \quad (\text{IV.22})$$

$\tau_0$  : est la contrainte de viscosité à un instant t,

$\lambda$  : est le coefficient de viscosité dynamique du fluide,

$\rho$  : est la masse volumique du fluide, et

$V$  : est la vitesse du fluide

## B - Formule de Blasius :

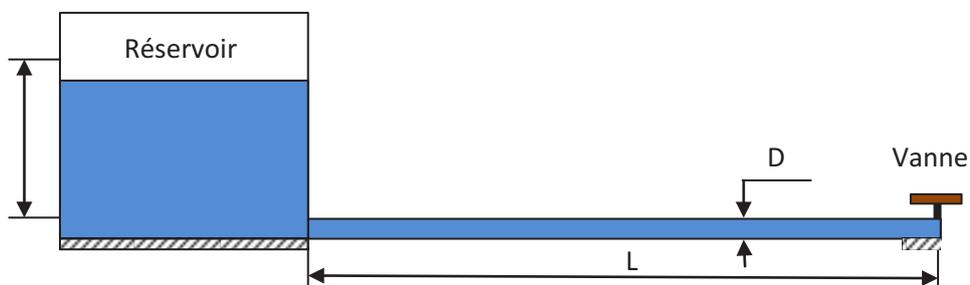
Pour un nombre de Reynolds  $Re < 10^5$

Turbulent lisse :  $10^4 < Re < 10^5$

Le coefficient de perte de charge

$$\lambda = 0.316 Re^{-0.25}$$

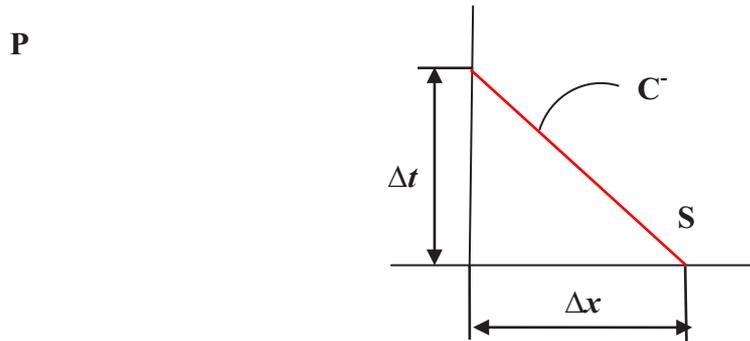
### IV.4. Conditions aux limites :



**Figure IV.6:**Schema de installation.

**1-Extrémité amont (réservoir) :**

En ce point, nous avons une seule équation qui est l'équation de compatibilité le long de la caractéristique  $C^-$ , il nous faut une autre équation c'est la condition imposée (la hauteur de pression au niveau du réservoir est supposée constante, comme le montre la **Figure IV.7**).



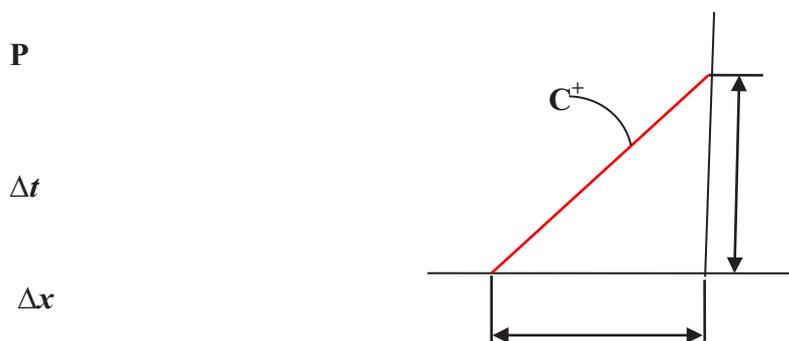
**Figure IV.7 :**Schéma numérique au niveau de l'extrémité amont.

$$H_p = H_{Resvoir}$$

$$C^-: (V_p - V_s) - \frac{g}{a} (H_p - H_s) + \frac{4}{\rho D} \tau_o \Delta t = 0 \quad \text{(IV. 23)}$$

**2- Extrémité aval (vanne) :**

Ici, on a une équation le long de la caractéristique  $C^+$ , et une autre équation imposée c'est la loi de fermeture de la vanne comme le montre la **Figure IV.8**.



**Figure IV.8 :** Schéma numérique au niveau de l'extrémité aval.

**IV.6. Conditions initiales (régime initiale) :**

Les conditions initiales sont les conditions du régime permanent avant la fermeture de la vanne située à l'extrémité avale de la conduite.

Le régime permanent est celui qui existe après la fin des phénomènes transitoires qui se produisent lors de la mise sous tension d'un circuit.

#### **IV.7. Conclusion:**

Ce chapitre qu'on vient de présenter est une définition et généralité sur les bases de la Mécanique des fluides.

Il comprend les écoulements, les propriétés et comportement des fluides, les pertes de Charges dans les conduites.

Les fluides sont caractérisés par les propriétés suivantes:

- La perte de charge
- La viscosité

Le comportement mécanique et les propriétés physiques des fluides sont différents. En effet, les Lois de la mécanique des fluides ne sont pas universelles.

# **Chapitre V**

## **Application du model de calcule sur l'installation**

## **V.1.Application du modèle de calcul sur l'installation**

### **1- introduction :**

Pour montrer l'effet du calcul des pressions lors de l'écoulement transitoire du fluide dans les canalisations en cuivre en calculant le module d'élasticité du matériau cuivre sur l'écoulement du fluide dans les canalisations, un code informatique écrit en langage FORTRAN a été développé, puis une simulation numérique a été effectuée.

Pour le matériau en cuivre haute densité utilisé dans les raccords hydrauliques, les résultats des calculs sont présentés dans les tableaux ci-dessous.

#### **1) Configuration de l'installation de distribution hydraulique**

L'installation hydraulique sur laquelle se portera l'application de notre étude est composée comme suit :

- Un réservoir en amont.
- Une vanne en aval.

#### **2) Le fluide utilisé**

Le fluide qu'on a utilisé est de l'eau qui possède les caractéristiques physiques suivantes :

### **Le fluide utilisé:**

Le fluide est de l'eau

- Un module d'élasticité  $K = 2.1 \text{ GPa}$
- Une masse volumique  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Une viscosité cinématique  $\nu = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

### 3) les propriétés physiques de l'installation :

Les propriétés physiques de l'installation sont les suivantes :

La conduite est en cuivre :

- Le module d'élasticité  $E = 117 \text{ GPa}$
- La longueur de la conduite  $L = 1000 \text{ m}$ .
- Le diamètre de la conduite  $D = 50 \text{ cm}$ .
- L'épaisseur de la conduite  $e = 0,001 \text{ m}$
- La hauteur de pression au réservoir  $H_0 = 40 \text{ m}$ .
- La vitesse initiale (du régime permanent)  $V_0 = 0.274239 \text{ m/s}$
- Le coefficient de perte de charge  $\lambda = 1.858 \cdot 10^{-2}$
- Le nombre de Reynolds  $Re = 83588.27$
- La vitesse de l'onde  $a = 1078.211 \text{ m/s}$
- **$dt = 9.27462 \cdot 10^{-2} \text{ s}$**
- **$T_{\text{onde}} = 2.9678795 \text{ s} (2L/a) \text{ s}$**
- **$T_{\text{periode}} = 5.9357 \text{ s} (2T_{\text{onde}} = 4L/a) \text{ s}$**
- **$T_{\text{max}} = 3T_{\text{onde}} = 15 \text{ s}$**
- **$j_{\text{max}} = 1617 (T_{\text{max}}/dt)$**

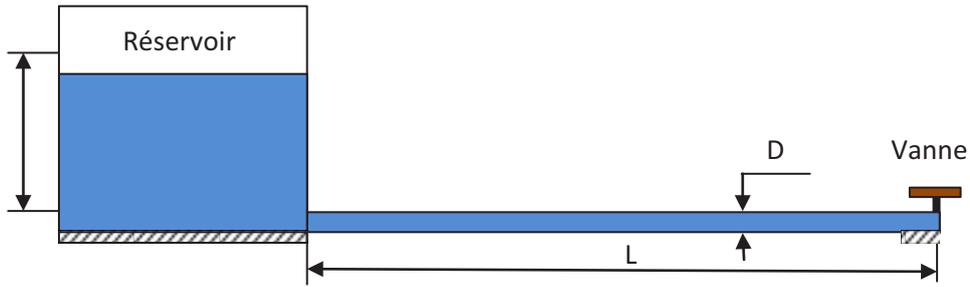
- les conditions initiales :

$$j=1$$

$$I=1, N_{\text{max}}$$

$$V_i = V_0$$

$$H_i = H_{\text{res}} - \lambda \frac{\Delta x v^2}{d 2g}$$



**Figure V.1** :Schéma de l'installation hydraulique (réservoir-conduite-vanne)

**V-2. Application et résultats de calcul :**



$L, D, E, e, H_{res}, a, g, D, \rho, T_{max}$



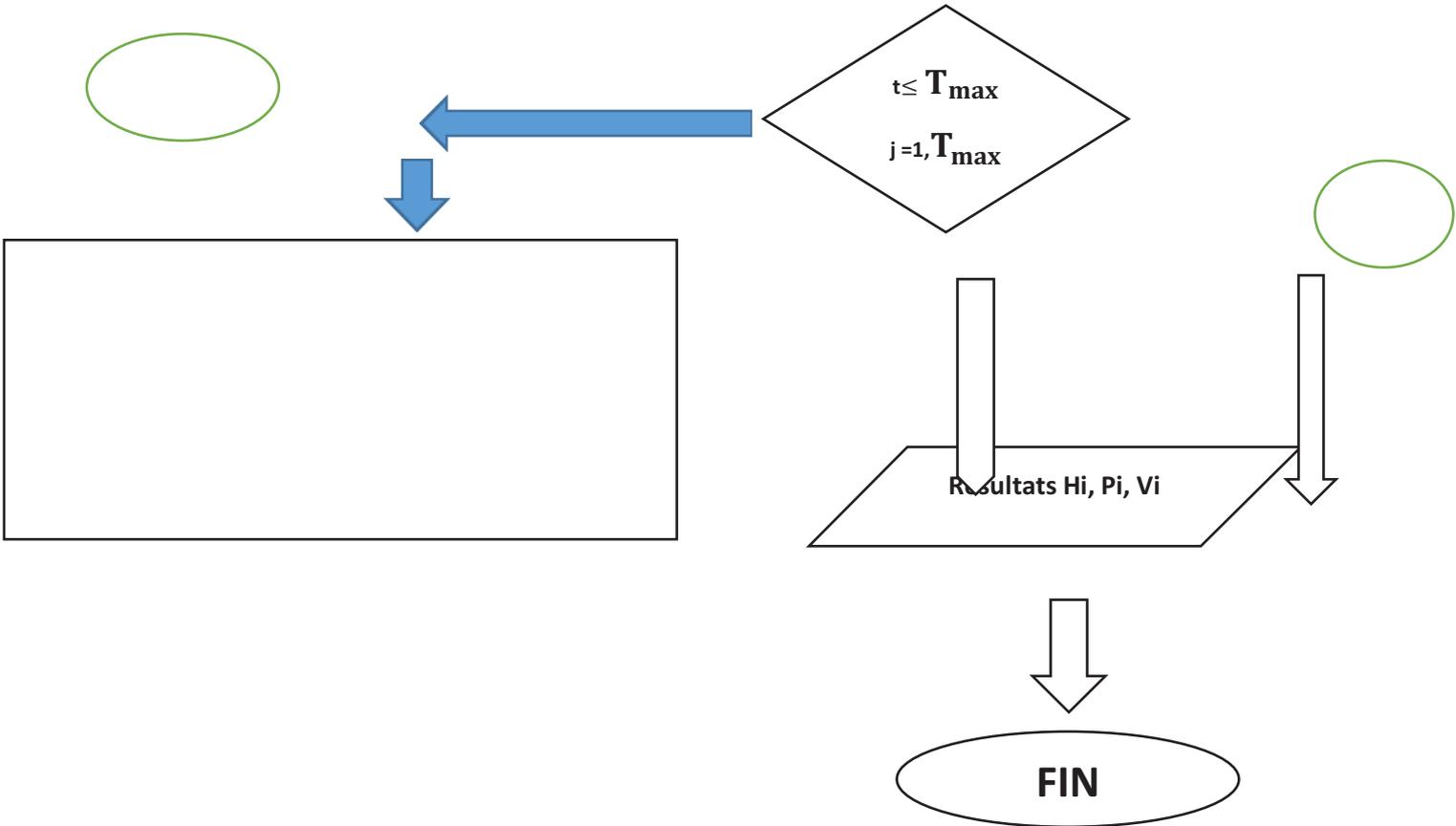
Choix de nombre discrétisation : n  
 Calcul du pas de l'espace :  $\Delta x = L/n$   
 Calcul du pas de temps :  $\Delta t = \Delta x/a$   
 N= 140 ; H= 40m ; L= 1000m ; D=50m



$$\lambda = 0.316 Re^{-0.25}$$



$$H_i = H_{\text{res}} - \lambda \frac{\Delta x v^2}{d 2g}$$



### **V.3.2. Cas de la conduite en cuivre :**

#### **V3.2.1. Calcul des paramètres physiques :**

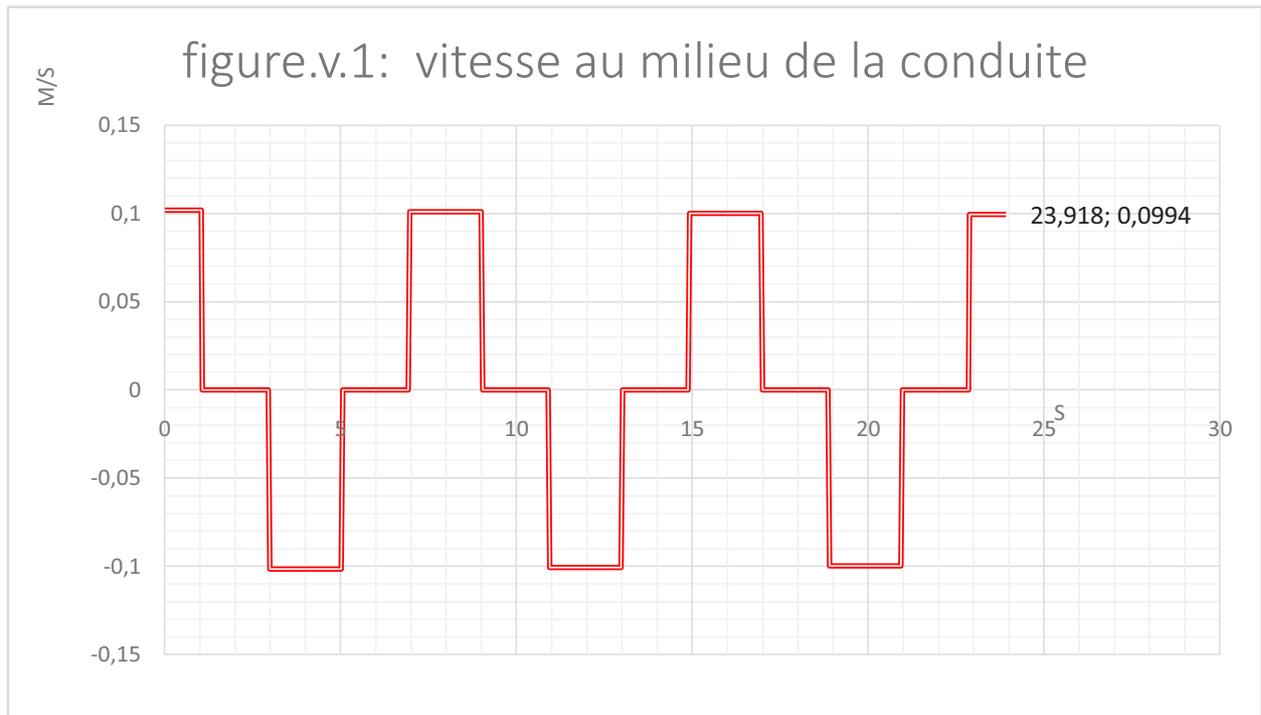
##### **1- Cas de la conduite en cuivre :**

$$dt = 9,246879 * 10^{-2} \quad a = 216,289200 \quad t_{\max} = 55,481270 \quad R_e = 84925,680000$$

$$\lambda = 1,851089 * 10^{-2} \quad V_0 = 2,830856 * 10^{-1} \quad dx = 20,000000$$

### **V.3.1. Inter présentation des résultats**

# 1-Lavitesse au milieu de la conduite:



Sur la fig.v.1, on Donne l'évolution de la vitesse du fluide au milieu du conduit.

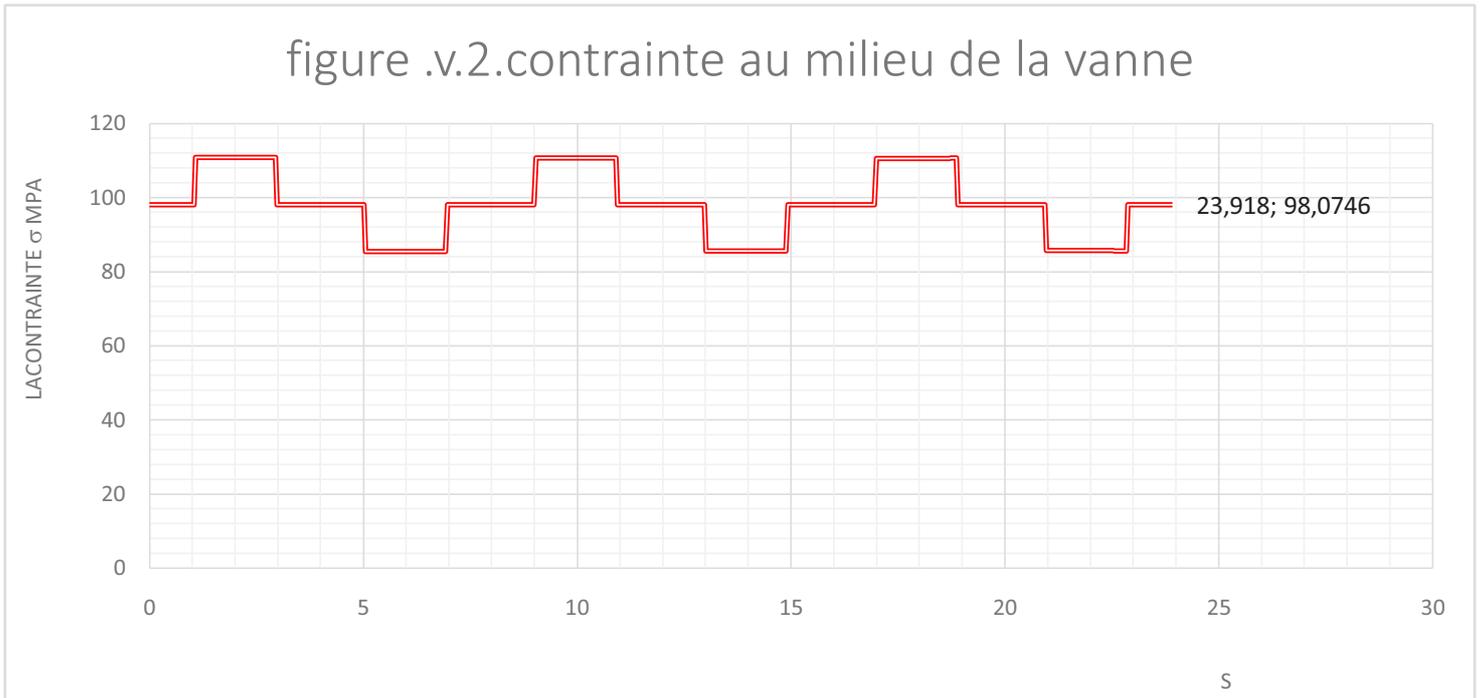
Il montre une courbe sous la forme suivante, qui est une vitesse en fonction du temps:

On voit qu'a une temps  $t=0s$ , la vitesse décollement du fluide est  $V=0.10m/s$ .

Puis a continué sous la forme d'une ligne parallèle jusqu'à un moment de  $t=1.03 s$

Puis diminue jusqu'à  $t=0s$ .

## 2- la contrainte au milieu de la conduite :



Sur la figure.v.2, est une courbe graphique donnant une valeur de pression au milieu de la conduite.

Il montre une courbe sous la forme suivante, qui est la contrainte en fonction du temps:

On voit qu'a une temps  $t=0$  s, la contrainte décollement du fluide est

$\sigma=98.04$  MPa.

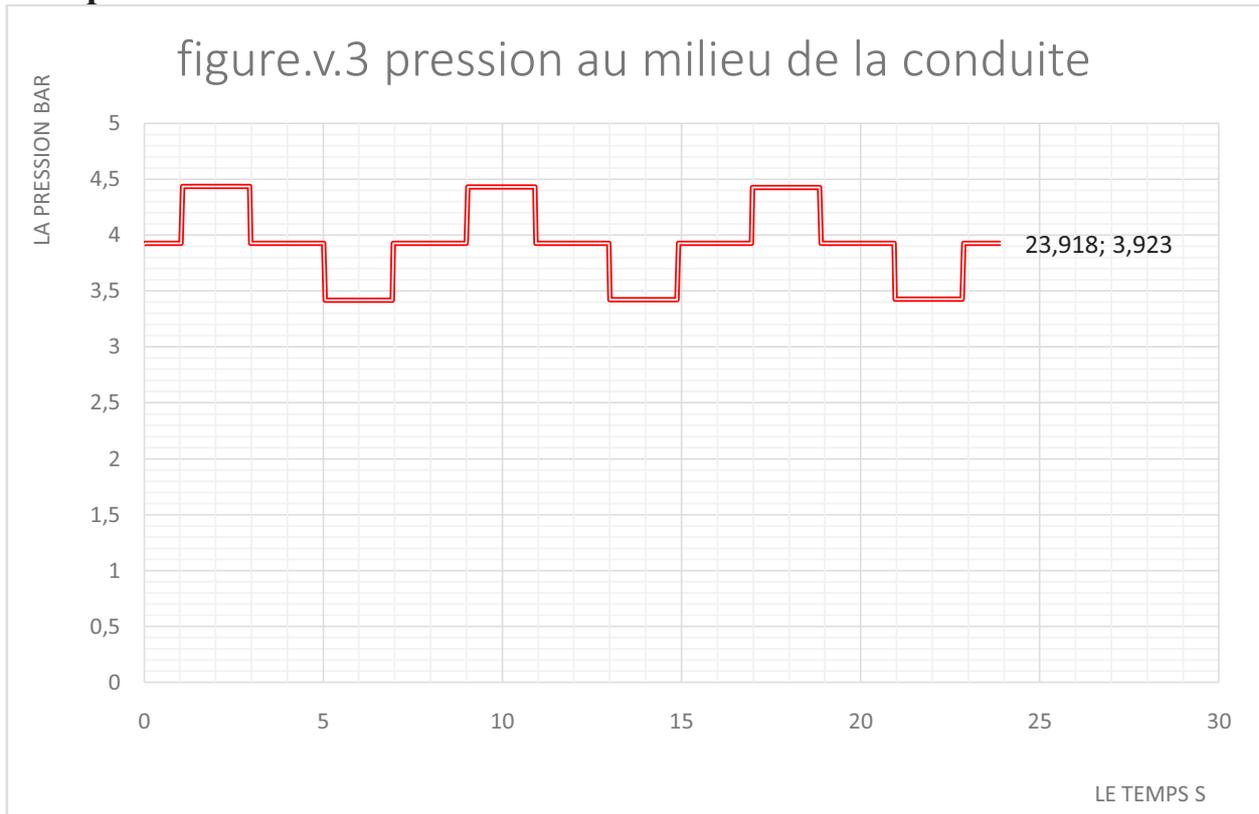
Puis a continué sous la forme d'une ligne parallèle jusqu'à un moment de  $t=1$  s

Puis elle augmente jusqu'à une valeur maximale  $\sigma =110,86$  MPa .

On observe également avec une augmentation de la tension

$\Delta\sigma= 12.82$  MPa.

### 3- la pression au milieu de la conduite :



Sur la figure.V.3, nous voyons une courbe graphique de la valeur de pression au milieu du canal.

Il montre une courbe sous la forme suivante, qui est la pression en fonction du temps:

On voit qu'à un temps  $t=0$  s, la contrainte décollement du fluide est  $P=3,92$  bar.

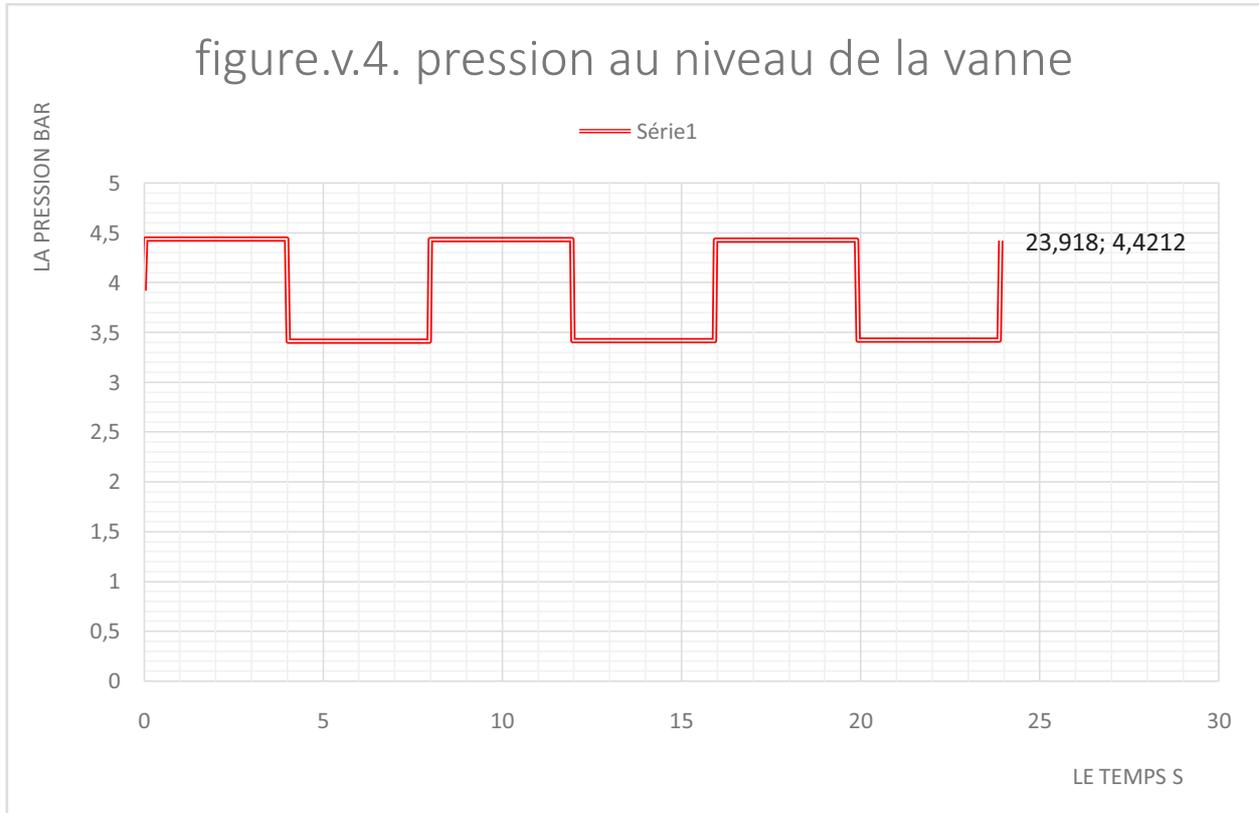
Puis a continué sous la forme d'une ligne parallèle jusqu'à un moment de  $t=1$  s

Puis elle augmente jusqu'à une valeur maximale  $P= 4,43$ bar.

On observe également avec une augmentation de la tension

$\Delta P =0.51$  bar.

#### 4- La pression au niveau de la vanne :



Sur la figure .v.4, est une courbe graphique donnant une valeur de pression au niveau de la conduite.

Il montre une courbe sous la forme suivante, qui est une pression en fonction du temps:

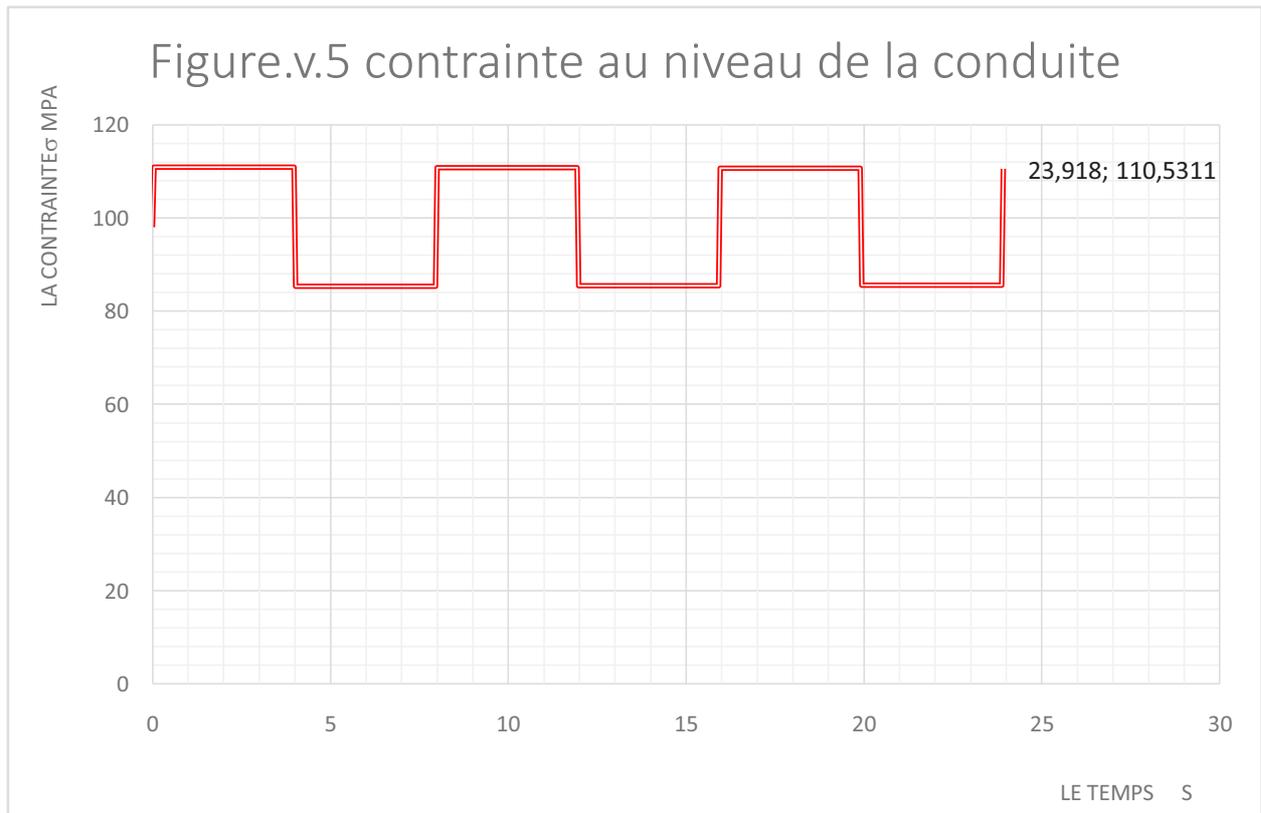
On voit qu'à un temps  $t=0$  s, la vitesse décollement du fluide est  $P=3.92$  bar.

Puis elle a augmenté jusqu'à une valeur maximale  $P= 4.43$  bar et  $t=0,3$  s.

Puis a continué sous la forme d'une ligne parallèle jusqu'à un moment de  $t=4,25$  s

Puis diminue jusqu'à  $P=3.41$  bar.

## 5-La contrainte au niveau de la vanne:



Sur la figure .v.5, est une courbe graphique donnant une valeur de contrainte au niveau de la conduite.

Il montre une courbe sous la forme suivante, qui est une vitesse en fonction du temps:

On voit qu'à un temps  $t=0$  s, la vitesse décollement du fluide est  $\sigma=98,04$  MPa.

Puis elle a augmenté jusqu'à une valeur maximale  $\sigma=110,85$  MPa et  $t=0,19$  s.

### **V.4. Conclusion:**

Dans cette étude, nous avons développé un système d'équations pour décrire l'écoulement transitoire d'un fluide dans une conduite. La résolution de ces équations différentielles partielles de type hyperbolique a été réalisée en combinant la méthode des caractéristiques avec la méthode des différences finies.

En appliquant ce modèle à une installation hydraulique, nous avons obtenu des résultats mettant en évidence l'influence du matériau (notamment son module d'élasticité) sur les paramètres d'écoulement tels que la pression et les débits, en présence d'une fuite dans une conduite en cuivre.

D'un point de vue pratique, il est important d'enregistrer l'évolution temporelle de la pression en un point spécifique de la conduite, par exemple à l'extrémité aval. Cela permet de réaliser des économies en termes de détection et de localisation des fuites dans un système de conduites.

Les vannes jouent un rôle essentiel dans les installations industrielles ou domestiques pour l'isolation et la sécurité du système de conduites. La détermination du type d'écoulement à partir de la vitesse, de la pression, de la masse volumique et de la viscosité permet de calculer le coefficient de frottement et d'estimer les pertes de charge présentes dans la conduite.

Le phénomène du coup de bélier est un problème hydraulique indésirable qui peut causer d'importants dommages aux installations. Pour protéger ces installations, des mesures peuvent être prises, telles que l'installation d'un amortisseur de pression, de soupapes de sécurité et la régulation du débit.

Nous avons également constaté que les contraintes jouent un rôle crucial dans l'influence sur une conduite. En effet, lorsque celle-ci est soumise à des contraintes, cela peut affecter sa performance, sa durabilité et sa capacité à résister aux charges appliquées.

## **Bibliographies:**

- [1]. Cheong, L.C. Unaccounted for water and the economics of leak detection. Proceedings of the 18th International Water Supply Congress and Exhibition, 15-31 mai 1991, Copenhague, publié dans Water Supply, 9, 3&4, IR1.1, 1991.
- [2]. AWWA. Water audits and leak detection. Manual of Water Supply Practices No. M36, American Water Works Association, 1990.
- [3]. Hunaidi, O, Chu, W., Wang, A., et Guan, W. Detecting leaks in plastic pipes. Journal AWWA, 92, 2, 82-94, American Water Works Association, 2000.
- [4]. B. SALAH, A. KETTAB, B. MASSOUH, B. MBANGANGOYE " Célérité de l'onde de coup de bélineras les réseaux enterrés, revue la houille blanche, n°/4, 2001.
- [6]. 46.M. Meunier. Les coups de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression. Édition DOUND 1980.
- [5]. J. Michaud. « Coup de bélier dans les conduites; étude des moyens employés pour en atténuer les effets. » Bulletin de la Soc. Vaudoise des Ing. Et Architectes, Lausanne 1878.
- [7]. [Http ://www.solutionsbyharper.com/page.asp ? Page ID=6275](http://www.solutionsbyharper.com/page.asp?PageID=6275).
- [8]. [Http ://www.kirsner.org /pages/forensicResAlt.html](http://www.kirsner.org/pages/forensicResAlt.html).
- [9]. [Http : //www.ksb.com/ksb-en/Products-and-Services/waste-water/water-hammer](http://www.ksb.com/ksb-en/Products-and-Services/waste-water/water-hammer).
- [10]. M.MEUNIER "Le coup de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression"ENGREF, PARIS 1980.
- [11]. RIADH BENHAMOUDA: Notions de mécanique des fluides.
- [12]. Différences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides-RISSER Laurent-4 février 2006.
- [13]. Fluid Transients-[Benjamin Wylie-Vector L. Streeter]-McCaw-Hill International Book Company.
- [14]. Méthodes numériques pour les EDP instationnaires : Différences Finies et Volumes Finis Notes pour le cours de base M2-Mathématiques de la modélisation (2014). B. Després-15 juillet 2014.
- [15]. E.HADJ TAIEB: Transient analysis for leak detection in pipe with fluid structure interaction.
- Fluid Transients Wiles and Strette