

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR- ANNABA UNIVERSITY



جامعة باجي مختار – عنابــــــــــــــــة

Faculté : TECHNOLOGIE
Département : GENIE MECANIQUE
Domaine : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Filière : GENIE MECANIQUE
Spécialité : Construction mécanique

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master
Thème:

**ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES
FISSUREES ET RENFORCEES PAR DES MATERIAUX
COMPOSITES.**

Présenté par : *Debbah Mohamed*

Encadrant : TEKILI SABIHA

Jury de Soutenance :

CHELIA AZZEDDINE	UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA	Président
TEKILI SABIHA	UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA	Encadrant
KHEIREDDINE LAMRI	UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA	Examineur

Année Universitaire : 2022/2023

SOMMAIRE

Table des matières

CHAPITRE I :

I.1 INTRODUCTION :	1
I.2 Généralité :	1
I.3 Problématique :	1
I.4 Objectifs :	1
I.5 Méthodologie et contenu du mémoire :	1

CHAPITRE II : Pathologies des structures métalliques

Dégradation des matériaux.

II.1 introduction :	4
a) La fatigue associée à un grand nombre de cycles :	4
b) La fatigue plastique associée à un petit nombre de cycles:	4
II.2. Pathologies et principales causes des désordres affectant les structures :	4
II.2.1 Dégradation des matériaux :	4
II.2.2 Erreurs matérielles :	5
II.2.2.1 Au bureau d'études :	5
II.2.2.2 Erreur d'échantillonnage :	5
II.2.2.3 Causes accidentelles :	5
II.2.3 Actions anormales :	5
II.2.4 Ignorance :	6
II.2.5 Erreurs sur les actions :	6
II.2.5.1 Au niveau de l'exécution :	6
II.2.6 Erreurs de conception ou d'études:	6
II.2.6.1 Défauts des soudures :	6
II.2.6.2 Corrosion :	7
II.3 Phénomène de fatigue :	7
II.4 Types de sollicitations en fatigue :	7
II.4.1 Sollicitations axiales (Traction/Compression) :	8
II.4.2 Flexion :	8
II.4.3 Torsion :	8
II.5 Essai de fatigues :	9
II.6 Principe de l'essai de fatigue :	10
II.7 diagramme de Wöhler :	10

II.8. Mécanisme de Fatigue :.....	11
II .9 Fissures sur les éléments :	12
II . 9.1 Amorçage des Fissures de Fatigue :	12
II .9.2 Propagation de fissure :.....	13
II.9.3 la phase de rupture :.....	14
II.10 ZONE PLASTIQUE A FOND DE FISSURE :.....	15
II.11 CONCENTRATION DES CONTRAINTES PRES D'UN DEFAUT :	18
II.12 DESCRIPTION DU CHAMP DES CONTRAINTES A L'EXTREMITE D'UNE FISSURE A L'AIDE DU FACTEUR D'INTENSITE DES CONTRAINTES :	20
II.13 Conclusion :.....	23
CHAPITRE III :Généralités sur les matériaux composites	
III.1 Introduction :	26
III.2 Définition d'un matériau composite :.....	26
III.2 Classification des matériaux :.....	27
III.3 Pourquoi les matériaux composites ?.....	28
III.4 Les constituants d'un matériau composite :	28
III.4.1 Les matrices (résines) :.....	29
III.4.1.1 Les résines thermodurcissables :.....	29
III.4.1.2 Les résines thermoplastiques :.....	30
III.4.1.3 Les résines thermostables :.....	30
III.4.2 Les renforts :	30
III.4.2.1 Les fibres de verre :.....	31
III.4.2.2 Les fibres de carbone :	33
III.4.2.3 Les fibres d'aramides :.....	34
III.4.2.4 Les fibres céramiques :.....	35
III.4.3 Charges et les additifs :.....	36
III.4.3.1 les charges :	36
III.4.3.2 Les additifs :	37
III.5 Architecture des matériaux composites :	37
III.5.1 Stratifiés :	37
III.5.1.1 Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels :.....	38
III.5.1.2 Structure générale d'un stratifié :	39
III.5.2 Composites sandwiches :.....	39
III.6 Conclusion :.....	42
Chapitre VI : Modélisation des matériaux composite	
VI.1 Introduction :.....	44
VI.2 Mécanique des milieux continus :.....	44

VI.3 Mécanique de composite unidirectionnel :	48
VI.3.1 Relations contraintes-déformations :	48
VI.3.2 Module d'élasticité équivalent :	51
Chapitre V : Etudes des contraintes des poutres fissurée par la méthode des éléments finis	
GÉNÉRALITES SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS :	54
V.1 Introduction :	54
V .1.1 Définitions de la méthode des éléments fini :	54
V .1.2 Etapes de la méthode des éléments finis :	55
V.1.3 Principes de la MEF :	55
V .2 Conclusion :	56
Modélisation des éléments finis (Poutre-Plaque) par la MEF :	56
V .3 Introduction :	56
V .3.1 Vibration libre des poutres renforcées par matériaux composites :	57
Modélisation des éléments finis pour la flexion des plaques :	64
V .4 Concepts de base pour la flexion des plaques par la MEF :	64
V.4.1 Matrice de rigidité d'un élément plaque à modèles en déplacement :	67
V .5 Conclusion :	69
Chapitre IV : Applications et résultats	
IV.1 Applications :	68
IV.2 Résultats par Matlab :	81
CONCLUSION GENERALE.....	83

REMERCIEMENTS :

Un projet mené à bien n'est pas que reflet d'un travail personnel, c'est l'harmonie de plusieurs contribution, Qu'elle soit matérielles, financées, morales ou bien spirituelles ; elles s'assemblent pour donner vie à l'accomplissement d'un rêve.

Je remercie Dieu le tout puissant, qui, par sa miséricorde, ma donné la force et la patience d'arriver a concrétiser mon projet.

Je remercier aussi ma famille, laquelle par sa patience, son soutien et ces encouragements ma permis de tenir bon même dans les situations difficiles.

*Je tiens à remercier aussi fortement Madame « **Tekili Sabiha** » pour son aide et sa disponibilité et les conseils qu'elle n'a cessé de me prodiguer pour l'aboutissement de ce projet, qu'elle y trouve ici ma profonde gratitude et toute m reconnaissance et mon respect.*

Mes tiens à remerciement vont Egalement aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté a notre recherche en acceptant d'examiner ce travaille de l'enrichir par leurs propositions .

Enfin, je tiens également à remercier mes amis ; Proches allies dans ce combat que représente une jeunesse passé a essayer atteindre les objectifs qui me tiennent a cœur.

Listes des tableaux

Tableau III-1 : Classification des matériaux composites	Error! Bookmark not defined.
Tableau III-2 : pourquoi les matériaux composites	Error! Bookmark not defined.
Tableau III-3 : Caractéristiques mécaniques sur composites.....	Error! Bookmark not defined.
Tableau III-4 : Caractéristiques des fibres de carbone et de verre E.....	Error! Bookmark not defined.
Tableau III-5 : caractéristiques mécaniques des fibres céramiques	38
Tableau IV-1 : résultats contrainte / position.	77
Tableau IV-2 : résultats contrainte / position.	79
Tableau IV-4 : caractéristiques mécaniques	Error! Bookmark not defined.
Tableau IV-5 : résultats contrainte / position.	Error! Bookmark not defined.

Listes des figures

CHAPITRE II

Figure II -1 : Fissuration à chaud.	7
Figure II-2: Sollicitations axiales (Traction/Compression)	8
Figure II-3 : Flexion	8
Figure II-4 : Torsion	9
Figure II-5 : Essai de fatigues	9
Figure II-6 : Allure de la courbe de Wöhler	11
Figure II-7 : Courbe d'endurance de Wöhler (A) et nombre de cycles d'amorçage (B)...	Error! Bookmark not defined.
Figure II -8 A) Amorçage de microfissures (intrusions et extrusions). B) formation d'une fissure principale	Error! Bookmark not defined.
Figure II-9 : c) Phénomène d'intrusion et d'extrusion.	14
Figure II -10 : Coupe micrographique montrant les deux stades de propagation Des fissures de fatigue initiées à la surface d'une éprouvette d'aluminium pur, écroui (x 300)	14
Figure II-11 : Comparaison des diagrammes charge-déplacement.	15
Figure II -12 : Aspect général d'une surface de rupture après défaillance due à un phénomène de fatigue.....	16
Figure II-13 Répartition des contraintes élastiques et élasto plastiques dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité.....	17
Figure II -14 : Contours des zones plastiques en mode I, prévus par les critères de Mises (trait continu) et de Tresca (trait pointillé) en contraintes planes (CP) et en déformations planes (DP).	19
Figure II-15 : défaut elliptique dans une plaque infinie.	19
Figure II-16 : Définition des axes (x,y) et des coordonnées (r,θ) au voisinage de l'extrémité	

d'une fissure.....	22
Figure II -17 : Définition des modes de sollicitation.....	22

CHAPITRE III

Figure III-1 matériau composite.....	Error! Bookmark not defined.
Figure III - 2 les constituants d'un matériau composites.....	Error! Bookmark not defined.
Figure III-3 Classification des matrices.....	Error! Bookmark not defined.
Figure III-4 Les différents types de renfort de base.	Error! Bookmark not defined.
Figure III-5 Fibre de verre.	Error! Bookmark not defined.
Figure III-6 Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage	Error! Bookmark not defined.
Figure III-7 Fibre de carbone.	Error! Bookmark not defined.
Figure III-8 Fibre d'Aramide.....	Error! Bookmark not defined.
Figure III-9 constitution d'un stratifié	Error! Bookmark not defined.
Figure III-10 Représentation d'un stratifié	41
Figure III-11 Poutre sollicitée en flexion.....	42
Figure III -12 Matériaux sandwiches à âmes pleines	43
Figure III -13 Matériaux sandwiches à âmes creuses.....	44
Figure III-14 Quelques types de nid d'abeille	44

CHAPITRE VI

Figure VI.1 Etat de contraintes.	47
Figure VI.2 Matériau composite unidirectionnel.	50
Figure VI.3 Etat complet de contraintes dans le repère local.	52
Figure VI.4 Élément de composite et orientation des fibres	54
Figure VI.5 Plan de contrainte de l'élément composite dans la direction x	55

Chapitre V

Figure V.1 Principe d'analyse par la MEF.	Error! Bookmark not defined.
Figure V.2 Élément de poutre.	Error! Bookmark not defined.
Figure V.3 Flexion cylindrique d'une poutre.....	Error! Bookmark not defined.
Figure V.4 Renforcement sur les deux côtés de la poutre (sandwich). ...	Error! Bookmark not defined.
Figure V.5 Tronçon de poutre élémentaire.	Error! Bookmark not defined.
Figure V.6 Plaque représentée dans le plan x - y	68
Figure V.7 Discrétisation de la demie plaque par MEF.	Error! Bookmark not defined.

Figure V.8 Elément plaque quadrangulaire à quatre nœuds.**Error! Bookmark not defined.**

Chapitre IV

Figure IV-1 : poutre en acier	77
Figure IV-2 poutre fissurée.	78
Figure IV-3 : poutre fissurée par MC.....	81
Figure IV- 4 : Déplacement pour poutre fissurée	83
Figure IV- 5 : Déplacement pour poutre fissurée renforcée.....	84
Figure IV-6 :Code sous matlab	84

Résumé :

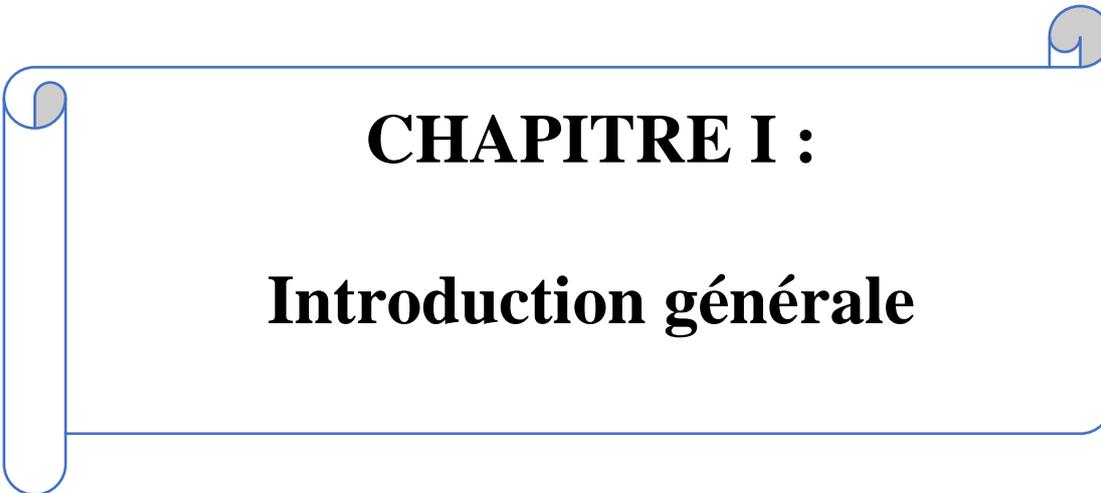
Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs. Ceux-ci veulent toujours des matériaux plus performants, plus économiques et qui durent plus longtemps. Récemment, les matériaux composites (Polymère Renforcé de Fibres) PRF sont utilisés pour le renforcement des structures métalliques. Les PRF sont utilisés soit dans le but de réparer ou de renforcer la structure et comparer leur performance à la fatigue, Dans ce mémoire nous allons faire l'étude de Renforcement des structures fissurées par matériaux composites en utilisant les équation de la mécanique des milieux continue et la méthode des éléments fins en utilisant le logiciel MATLAB qui a été utilisée pour déterminer les paramètres de rigidité des couches composite et le calcul des contraintes et la comparaison sur différents ca , puis on clôture par une conclusion générale.

Motsclés:poutres–compositesPRF–renforcement– MATLAB

ملخص

ويخضع تطوير مواد جديدة لاحتياجات المستعملين. إنهم يريدون دائمًا مواد أكثر كفاءة واقتصاديًا وتستمر لفترة أطول. في الأونة الأخيرة، تم استخدام المواد المركبة (PRF البوليمر المقوى بالألياف) لتعزيز الهياكل المعدنية. تُستخدم أطر النتائج الاستراتيجية إما لإصلاح الهيكل أو تقويته ومقارنة أدائها بالإرهاق، في هذه المذكرة، سندرس تعزيز الهياكل بواسطة المواد المركبة باستخدام معادلات ميكانيكية لي ميكانيك المواد ومقاومتها باعتماد على برنامج MATLAB لي حساب الإجهادات و مرونة جميع طبقات في كل الحالات، ونختتمها بي خلاصة عامة.

الكلمات الرئيسية:روافد - مركبات- PRF تعزيز-MATLAB



CHAPITRE I :
Introduction générale

I.INTRODUCTION GENERALE :

I.1. Généralité :

Les poutres renforcées par matériaux composites sont largement utilisées dans les structures de construction civiles, mécaniques, l'aéronautique et l'aérospatiale grâce à leurs propriétés spécifiques (Matériau à coefficient de dilatation nul, Rigidité, faible sensibilité à la fatigue). la creation des fissures est un phénomène inévitable dans le domaine de la construction.

Le renforcement des structures fissurées par matériaux composites a pour but de réparer et de mettre en conformité des structures existantes.

La fissuration d'une structure mécanique est un phénomène naturel cependant l'élargissement de ce dernier va créer plusieurs problèmes et aura une influence sur le rendement de cette structure

I.2. Problématique :

La propagation des fissures est un fait dangereux qui va engendrer soit une baisse de la fonctionnalité Mécanique ou bien une rupture brusque, es que cette structure peut être réparé

Ou Réutilisez ?

I.3 Objectifs :

L'objet de notre travail est l'analyse du comportement statique renforcé par matériaux composites. Etudes des déplacements et des contraintes par la MEF.

I.4 Méthodologie et contenu du mémoire :

Ce mémoire comporte six chapitres :

Le premier chapitre nous avons présenté une conclusion générale.

Le deuxième chapitre est une définition de la pathologie des structures métalliques et du phénomène de la fatigue avec ces causes dans la zone de rupture avec la concentration des contraintes

Le Troisième chapitre est une présentation d'une manière générale des matériaux composites, de leurs différents composants, de leurs caractéristiques. Les principales propriétés des matériaux constitutifs des composites sont données avec plus de détail, telle que les l'architectures des matrices et des fibres du matériau composite.

Dans le quatrième chapitre nous résumons la théorie des stratifiés avec différents ordres qui est basée sur les équations des déplacements, des déformations et des contraintes pour décrire le

comportement des matériaux composites. Une approche appropriée pour les poutres renforcée par matériaux composites est utilisée pour prendre en compte le couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion.

Dans le cinquième chapitre trois codes sous Matlab ont été élaboré pour l'étude et l'analyse des contraintes des poutres sollicitées par flexions pures en appuis simples, le premier cas pour une poutre en acier le deuxième cas poutre en acier fissurée et le troisième cas est celui d'une poutre en acier fissurée et renforcée par matériaux composites.

Enfin une conclusion générale et recommandations sont présentées à la fin de ce Mémoire.



CHAPITRE II :
Pathologie des structures
métalliques

II.1 introduction :

L'expérience industrielle montre que la défaillance des composants ou des structures des machines en fonctionnement normal est le plus souvent due à la fatigue. Ceci est particulièrement insidieux car il masque le caractère du progrès. Ceci est d'autant plus grave que la fissuration par fatigue conduit souvent à des ruptures brutales, qui conduisent à des accidents.

La fatigue fait référence au comportement des matériaux sous des cycles répétés de contrainte ou de déformation. D'où une rupture progressive. Ce comportement est commun à tous les matériaux : métaux, plastiques, caoutchouc, béton.

Deux grandes catégories de comportements dus à la fatigue peuvent être identifiées :

a) La fatigue associée à un grand nombre de cycles :

C'est la plus fréquente, entraînant des niveaux de contrainte nettement inférieurs à la contrainte d'écoulement du matériau. La rupture se produit sans aucune déformation permanente et la déformation se produit dans les limites du domaine élastique.

b) La fatigue plastique associée à un petit nombre de cycles :

C'est celle que l'on rencontre lors du cintrage et du déroulement de fils métalliques. Les déformations imposées à la pièce sont telles qu'à chaque cycle de chargement la pièce subit une déformation permanente. La fatigue plastique n'est tolérable que dans certaines conditions bien contrôlées.

II.2. Pathologies et principales causes des désordres affectant les structures :

Les structures mécaniques sont dimensionnées pour une durée de vie moyenne. Toutefois, Plusieurs types de désordres viennent réduire cette durée de vie prévisionnelle. Il existe un grand nombre de pathologies dans les ouvrages métalliques dont les origines peuvent être

Mécaniques, physico-chimiques, accidentelles ou encore liées aux erreurs de calcul, de conception, de réalisation ou de fabrication.

II.2.1 Dégradation des matériaux :

Les propriétés physiques et, plus particulièrement, le comportement mécanique des aciers sont susceptibles de se dégrader en fonction des conditions d'environnement définies par la localisation géographique de l'ouvrage. Les principales causes de vieillissement sont liées aux phénomènes suivants.

II.2.2 Erreurs matérielles :

II.2.2.1 Au bureau d'études :

Ces erreurs sont les erreurs les plus fréquentes. Les erreurs que l'on trouve dans les coupes ou les chiffres sont mal présentés et en ligne les cotes sont mal implantées. Et on remarque ces erreurs lors de l'exécution en raison de l'incompatibilité qu'elles entraînent. Ce sont, par exemple, des erreurs d'opération, d'écriture de formules, etc.

Par exemple, sur les valeurs des caractéristiques des matériaux, les hypothèses de site, de charges d'utilisation. Les conséquences des deux derniers types sont souvent plus graves que les erreurs de dessin, car elles peuvent donner l'illusion d'une sécurité qui n'est pas atteinte en réalité (contraintes minimisées...).

II.2.2.2 Erreur d'échantillonnage :

Ces erreurs sont relativement rares. Elles se produisent principalement lors de l'utilisation de profils creux présentant des variations d'épaisseur pour les mêmes dimensions extérieures. Dans ces cas, les diminutions des coefficients de sécurité sont plus faibles que dans le cas précédent en raison des faibles variations des caractéristiques dimensionnelles.

II.2.2.3 Causes accidentelles :

On peut ranger dans cette catégorie les actions imprévisibles, donc par définition non prévues, pendant la durée de vie de la structure.

II.2.3 Actions anormales :

Le principe même de ces actions n'est pas pris en compte dans la détermination des éléments de la construction puisqu'elles lui imposent des fonctions pour lesquelles elle n'a jamais été prévue. C'est le cas par exemple :

- des explosions (gaz, bombes, etc.) ;
- des chocs anormaux ;
- d'un incendie (si la tenue au feu n'est pas prévue) ;
- des inondations ;
- d'un séisme (si la protection antisismique n'est pas prévue) ;
- des éruptions volcaniques ;
- des dégâts miniers, etc.

II.2.4 Ignorance :

Le défaut de connaissance total ou partiel reste la cause la plus fréquente des désordres. La méconnaissance des effets des actions sur les structures entraîne des conséquences qui peuvent être graves sur leur tenue **I.2.5. Au niveau du projet.** Les erreurs dues à l'ignorance au niveau du projet ont des conséquences d'importance variable qui peuvent aller de la simple déformation imprévue au sinistre grave. On peut les classer sous les rubriques suivantes.

II.2.5 Erreurs sur les actions :

Elles sont dues à une interprétation erronée des effets de celles-ci, à une prise en compte d'hypothèses, de charges et de leur mode d'action ne correspondant pas à la réalité. On peut rattacher à ce type d'erreur l'oubli de prise en compte de modifications intervenues au cours de l'étude.

II.2.5.1 Au niveau de l'exécution :

Les causes de désordres, à ce point de vue, peuvent se ramener à deux types :

- ✓ L'existence de vices cachés dans les matériaux ;
- ✓ Les conséquences imprévues de la mise en œuvre des matériaux, par exemple le chauffage en cours de soudage qui modifie la texture, donc les caractéristiques de l'acier, l'effet d'entaille de certains outils qui réduit la résistance des pièces, etc.

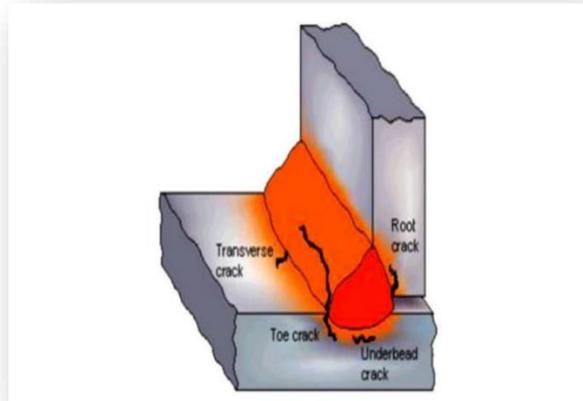
II.2.6 Erreurs de conception ou d'études :

II.2.6.1 Défauts des soudures :

Les défauts métallurgiques de soudage sont :

Fissuration à chaud :

La fissuration à chaud est causée par l'action des contraintes de retrait lorsque le métal est encore très chaud après le soudage et que sa ductilité est insuffisante. Elle apparaît donc sans délai et se manifeste sous forme de fissures longitudinales, localisées le plus souvent dans la partie centrale de la zone de métal fondu. Pour l'éviter : composition chimique du métal fondu (mélange de métal de base et de métal d'apport) : les teneurs en soufre et en phosphore doivent être suffisamment faibles, la largeur du cordon doit être suffisante par rapport à sa profondeur (rapport recommandé usuellement supérieur à 0,7).

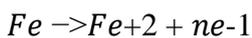


FigureII-1 : Fissuration à chaud.

II.2.6.2 Corrosion :

La corrosion est une réaction inter faciale irréversible d'un matériau avec son environnement, qui implique une consommation du matériau ou une dissolution dans le matériau d'une composante de l'environnement.

L'acier est un alliage métallique constitué principalement de fer et de carbone (entre 0,02 et 2% en masse). La corrosion de l'acier désigne communément l'oxydation du fer métallique au degré 0 d'oxydation par l'environnement. Les oxydants de l'environnement sont entre autres le dioxygène de l'air, l'eau et d'autres acides présents selon le degré de pollution.



Ce phénomène est influencé par de nombreux facteurs cinétiques tels que l'humidité, la température de la pièce métallique ou l'acidité du milieu.

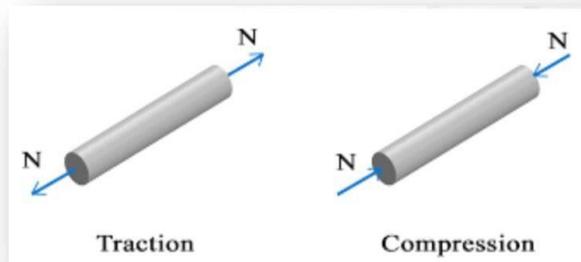
II.3 Phénomène de fatigue :

Il est vital pour les structures des avions et de nombreux autres domaines (roulements, engrenages, arbres de transmission, etc.). Une roue déséquilibrée est un exemple de phénomène de fatigue du système qui peut être amplifié par des effets de résonance. Après un certain nombre de cycles ou d'allers-retours, à des efforts bien inférieurs aux limites usuelles (R_r et R_e) du matériau, des fissures peuvent apparaître. Le chargement dynamique à cause variable entraîne des changements cycliques de contrainte et donc une rupture par fatigue qui endommage parfois de nombreux bâtiments et structures.

II.4 Types de sollicitations en fatigue :

II.4.1 Sollicitations axiales (Traction/Compression) :

Une pièce est sollicitée en traction simple (en compression) lorsqu'elle est soumise à deux forces axiales directement opposées, appliquées au centre des surfaces extrêmes, qui tendent à l'allonger (à la raccourcir) .



FigureII-2 : Sollicitations axiales (Traction/Compression)

II.4.2 Flexion :

En physique, la flexion est la déformation d'un objet sous l'action d'une charge. Elle se traduit par une courbure. Dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher ses deux extrémités. Dans le cas d'une plaque, elle tend à rapprocher deux points diamétralement opposés sous l'action.



FigureII-3 : Flexion

II.4.3 Torsion :

La torsion est la contrainte subie par un objet soumis à une paire de forces opposées agissant sur des plans parallèles, dont l'élément réduit est le moment agissant sur l'axe de la poutre.



Figure II-4:Torsion.

II.5 Essai de fatigues :

Un essai de fatigue est un type d'essai mécanique effectué en appliquant une charge cyclique à un spécimen ou à une structure. Ces tests sont utilisés pour générer des données sur la résistance à la fatigue, la croissance des fissures, identifier les emplacements critiques ou démontrer la sécurité des structures susceptibles d'être sensibles à la fatigue. Les tests de fatigue conviennent à une gamme de composants allant des petits échantillons aux tests de structures à l'échelle 1/ 1 telles que les automobiles et les avions.



FigureII-5 : Essai de fatigues .

Essai de fatigue IABG d'une aile d'Airbus A380. L'aile a subi un total de 47 500 essais en vol, soit 2,5 fois le nombre de vols opérationnels en 25 ans. Simulée sur un banc d'essai de fatigue, chaque vol de 16 heures dure 11 minutes.

Les essais de fatigue des éprouvettes sont généralement effectués à l'aide de machines servo-hydrauliques capables d'appliquer des charges cycliques variables de grande amplitude. Les tests

d'amplitude constante peuvent également être effectués avec des oscillateurs plus simples. La durée de vie en fatigue d'une éprouvette est le nombre de cycles nécessaires à la rupture de l'éprouvette.

II.6 Principe de l'essai de fatigue :

On entend par fatigue ou endommagement par fatigue la modification des propriétés des matériaux consécutive à l'application de cycles d'effets dont la répétition peut conduire à la rupture des pièces constituées avec ces matériaux.

Les contraintes seront par l'amplitude maximale atteinte au cours d'un cycle, σ , par la valeur moyenne de la contrainte σ_m et par le rapport de la contrainte minimale à la contrainte maximale $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$.

Et par le rapport de la contrainte minimale à la contrainte maximale $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$.

- - alternée symétrique $\sigma_m = 0$ $R = -1$
- - alternée dissymétrique $0 < \sigma_m < \sigma_a$ $-1 < R < 0$
- - répétée $\sigma_m = \sigma_a$ $R = 0$
- - ondulée $\sigma_m > \sigma_a$ $0 < R < 1$

Les déformations interviennent éventuellement dans le cas de la fatigue plastique.

En général, la fatigue se produit sans déformation plastique d'ensemble mais avec une déformation plastique très localisée d'abord autour des défauts, à fond d'entaille ou en surface, ensuite à l'extrémité de la fissure une fois que celle-ci s'est formée. Il en résulte que la mesure de cette déformation est extrêmement difficile.

La durée de vie est généralement mesurée par le nombre de cycles à la rupture N . L'exécution de n cycles ($n < N$) entraîne un certain endommagement de la pièce qu'il est important de chiffrer car il détermine sa capacité de vie résiduelle et donc peut indiquer s'il faut ou non remplacer la pièce pour éviter un accident.

On appelle endurance la capacité de résistance à la fatigue des pièces et des assemblages.

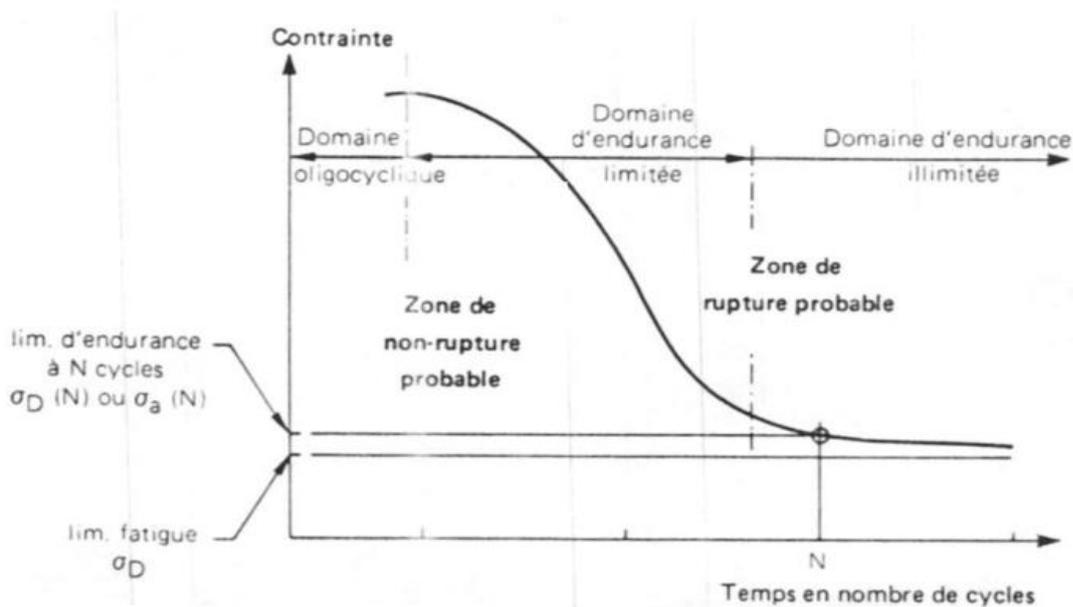
Les détails constructifs ont été classés selon leur résistance en nombre de cycles à variation de contrainte donnée. Ces courbes sont référencées par rapport à la résistance à 2 millions de cycles.

II.7 diagramme de Wöhler :

(Courbe « S.N » dans les pays anglo-saxon (Sterss - Numbers of cycles)) : Cette courbe représente la variation d'une des contraintes dynamiques précitées en fonction du nombre de cycles à rupture (reporté sur échelle logarithmique)

Cette courbe partage le plan de coordonnées en trois domaines :

- 1- Domaine de la fatigue Oligo cyclique, ruptures surviennent après un petit nombre de cycle $N \leq 105$ cycles.
- 2- Domaine d'endurance limitée ($N > 105$ cycles) les ruptures surviennent systématiquement après un nombre de cycles croissants avec la décroissance des contraintes.
- 3- Domaine d'endurance illimitée où les ruptures ne se produisent pas avant un nombre de cycles supérieur à la durée de vie envisagée de la pièce. Entre les deux derniers domaines la courbe de Wöhler présente un coude plus ou moins prononcé compris entre 106 et 107 cycles.

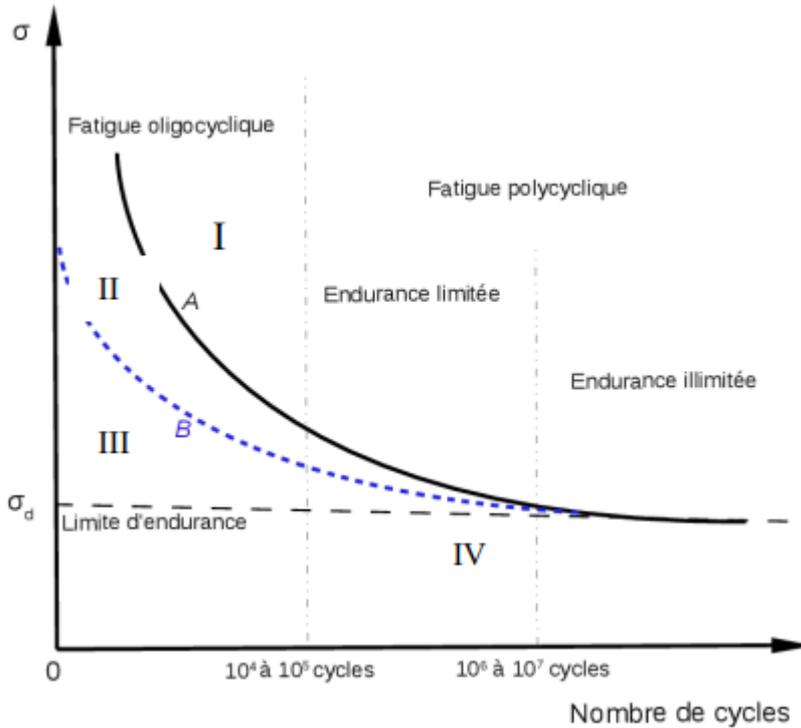


FigureII-6 : Allure de la courbe de Wöhler

II.8. Mécanisme de Fatigue :

Les étapes principales de la ruine par fatigue d'un assemblage sont l'amorçage de fissures (si des défauts ne sont pas déjà présents dans le matériau), la propagation de fissures et la rupture finale. On peut distinguer sur la courbe de Wöhler ci-dessous les zones suivantes : La courbe A séparant les deux zones, la zone I correspond à des conditions de rupture des éprouvettes ; la zone inférieure IV correspond au cas des éprouvettes non rompues. Dans le domaine intermédiaire compris entre la courbe A et la limite d'endurance, on distingue deux sous zones, la zone III correspond à l'amorçage d'une fissure alors que la zone II est associée à la propagation de cette fissure, le

nombre de cycles correspondant étant NP. Il existe d'autres indicateurs de l'endommagement par fatigue, autres que l'amorçage et la propagation des fissures, c'est la résistivité électrique ou la thermographie infrarouge a permis d'obtenir des résultats satisfaisants



FigureII-7 : Courbe d'endurance de Wöhler (A) et nombre de cycles d'amorçage (B)

II.9 Fissures sur les éléments :

L'endommagement en fatigue d'un élément de structure fait suite aux sollicitations cycliques variables auxquelles est soumis l'élément. Pour toute structure, l'endommagement en fatigue est caractérisé par trois grandes étapes: l'amorçage de la fissure, sa propagation, et la rupture complète de l'élément. La part de chacune de ces étapes sur la durée de vie totale de la structure va alors dépendre de nombreux paramètres intrinsèques (matériau, géométrie) et extrinsèques (mode de sollicitation, intensité du chargement).

II.9.1 Amorçage des Fissures de Fatigue :

Depuis les observations sur la microscopie optique en 1903 par Ewing et Humphery, l'amorçage des fissures de fatigue a été étudié de façon détaillée. Dans les années 70, les articles de Thompson et Wadrorth, Laird et Duquette avaient permis de faire la synthèse des travaux consacrés à ce sujet. Forsyth en 1951 et For 1953 ont montrer que l'endommagement et de nature essentiellement

superficielle. Sur la surface polie des éprouvettes, on observe l'apparition de relief liés à la formation de bandes des déformations localisées dites bandes persistantes. Ces bandes se forment dans les plans de glissement facile orientés de telle sorte que la cisssion résolue soit maximale. La topographie de la surface se traduit par la formation d'intrusions et d'extrusions.

L'amorçage de la fissure peut représenter 80 à 90% de la durée de vie de la structure. La germination et la croissance de multiples micro-fissures, coalescence, aboutissant à la formation d'une macro-fissure. Toute discontinuité de surface favorise cette germination (piqûres de corrosion, entailles, congés de raccordement, usinages, inclusions de surface).

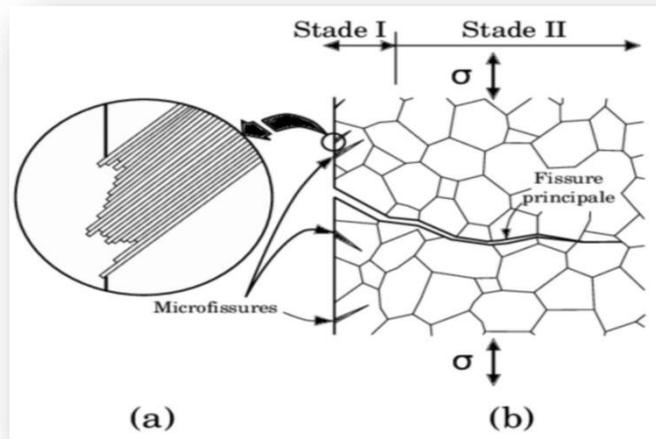
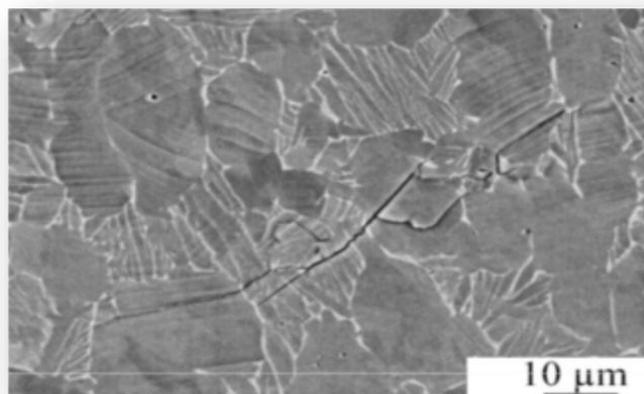


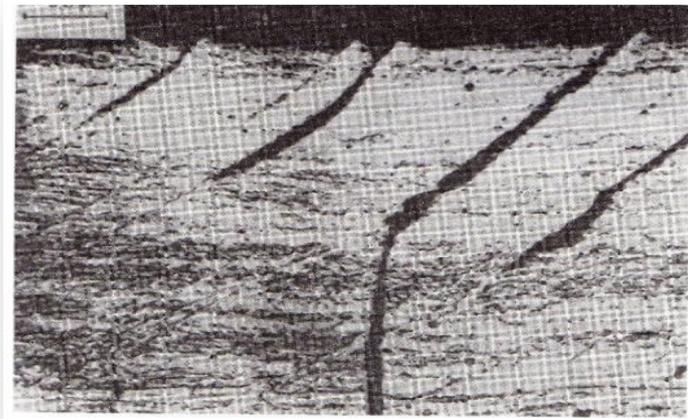
Figure II -8 A)Amorçage de microfissures(intrusions et extrusions). **B)** formation d'une fissure principale



FigureII-9 : c) Phénomène d'intrusion et d'extrusion.

II.9.2 Propagation de fissure :

On constate que, dans un premier stade (stade I), les microfissures formées soit dans le prolongement d'une intrusion, soit dans un creux le long d'une ligne de glissement, selon le matériau, progressent en restant dans le plan de glissement initial où elles sont apparues .



FigureII -10 : Coupe micrographique montrant les deux stades de propagation Des fissures de fatigue initiées à la surface d'une éprouvette d'aluminium pur, écroui (x 300)

A une certaine profondeur qui dépend surtout de la dimension des grains, on observe un changement de direction et, lors du franchissement des joints, les fissures quittent le plan de la scission maximale pour le plan de la contrainte normale de tension maximale (stade II). Ceci est la conséquence du changement de régime des contraintes car le rapport des contraintes de cisaillement aux contraintes de traction diminue progressivement de la périphérie vers le centre par suite de la présence de contraintes résiduelle superficielle. En effet, un faible niveau de contrainte favorise le développement du stade I tandis que l'élévation de la contrainte moyenne favorise le stade II.

II.9.3 la phase de rupture :

La rupture d'un matériau peut être fragile sans déformation plastique ou au contraire avec déformation plastique importante (rupture ductile). On remarque que P_c est le point de rupture d'un matériau fragile qui est dans la limite d'élasticité comme le montre la figure I.8 qui est à gauche mais la figure à droite montre le point de rupture P_c d'un matériau ductile qui est dans le domaine plastique (écoulement de la matière).

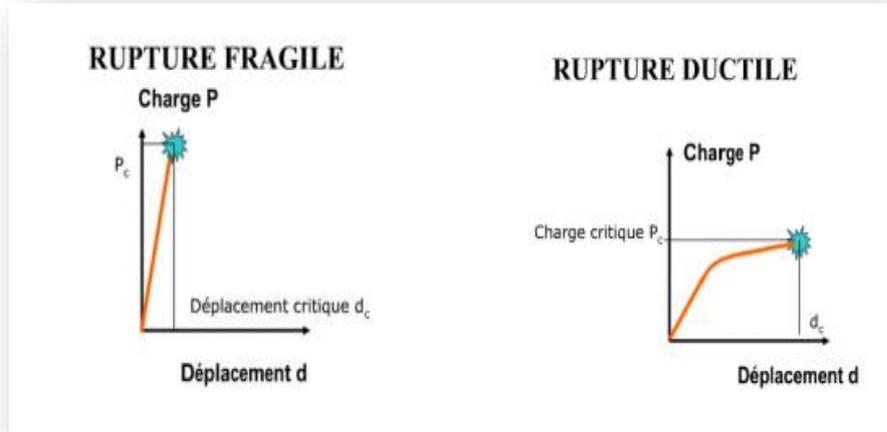
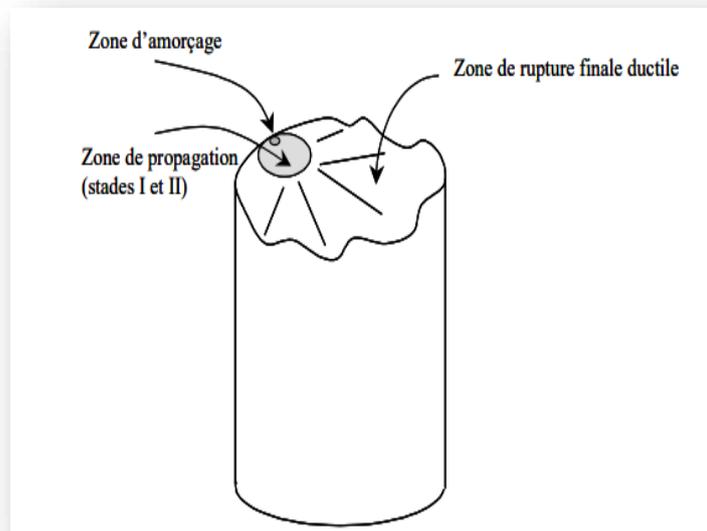


Figure II-11 : Comparaison des diagrammes charge-déplacement.

Lorsque la section portante, qui se réduit à mesure que la fissure progresse, ne peut plus supporter le chargement appliqué, la pièce rompt, généralement de manière ductile. La surface de rupture comporte donc une zone d'amorçage (sur une piqûre de corrosion, un gros précipité, une entaille sévère, etc....), une zone de propagation par fatigue et une zone de rupture ductile finale (FigureII-12).



FigureII-12 : Aspect général d'une surface de rupture après défaillance due à un phénomène de fatigue.

II.10 ZONE PLASTIQUE A FOND DE FISSURE :

La mécanique linéaire de rupture (MLR) prédit des contraintes infinies à l'extrémité d'une fissure aiguë (singularité en $1/r$). Mais dans les matériaux réels, les contraintes à l'extrémité d'une fissure restent finies car le rayon à fond de fissure n'est pas nul. Ces contraintes dépassent la limite d'élasticité du matériau et la déformation plastique qui en résulte, conduit à une relaxation des contraintes à l'extrémité de la fissure.

La MLR devient progressivement imprécise à mesure que la taille de la zone plastifiée qui se forme à l'extrémité de la fissure, devient importante. Des corrections simples à la MLR sont proposées lorsque cette taille reste raisonnable. Au-delà d'une certaine plastification, le FIC K_I n'est plus adapté à la description des champs des contraintes et des déplacements à l'extrémité de la fissure. On utilise alors d'autres paramètres dont l'étude fera l'objet du chapitre MNLR.

Il est important de connaître la taille de la zone plastique à fond de fissure, compte tenu des limites d'application de la MLR. Cette taille peut être estimée par deux méthodes : l'approche d'Irwin et celle de Dugdale-Barenblatt. Les deux approches conduisent à des corrections simples du FIC.

Le terme de zone plastique est usuellement utilisé pour les métaux. On l'utilisera par la suite, dans un sens plus général, pour caractériser une zone de déformations inélastiques (métaux, polymères...).

Approche d'Irwin :

Dans le plan d'une fissure et en aval de l'extrémité de celle-ci, la contrainte normale σ_y lorsque la sollicitation est en mode I par exemple (relation I4 avec $\theta=0$), est donnée par :

$$\sigma_y = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Irwin considère, en première approximation, que la frontière entre zones élastique et plastique correspond au lieu des points où les contraintes atteignent la limite d'élasticité du matériau.

Pour déterminer le rayon r_E où cette frontière coupe le plan d'une fissure en contraintes planes, on écrit alors $\sigma_y = \sigma_E$ où σ_E est la limite d'élasticité en traction simple, ce qui conduit à :

$$r_E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_E} \right)^2$$

La longueur r_E est indiquée sur la figure III.6. On tronque tout simplement le champ des contraintes à $\sigma_y = \sigma_E$, en faisant l'hypothèse que le comportement du matériau est élastique plastique parfait.

Cette analyse fait cependant abstraction des forces non transmises représentées par l'aire hachurée de la figure III. 6. Pour tenir compte de ces forces, il convient d'assurer l'équilibre entre les deux

répartitions (élastique et élasto-plastique) des contraintes. La taille r_P de la zone plastique doit être donc plus grande que r_E . L'équilibre des forces entre les deux configurations conduit à (Figure II-13).

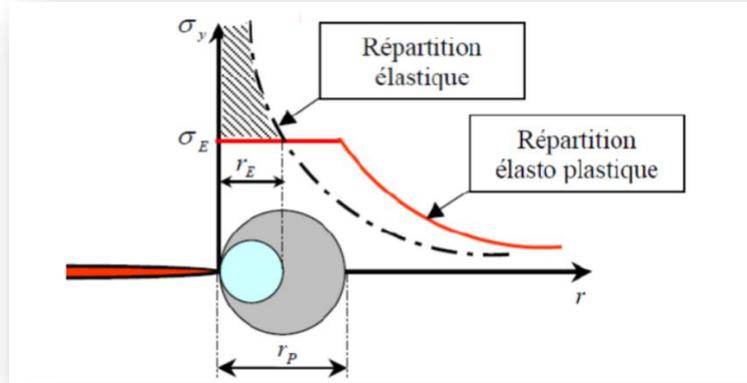


Figure II-13 Répartition des contraintes élastiques et élasto plastiques dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité.

$$\int_0^{\infty} \sigma_y dr = \sigma_E r_P + \int_{r_E}^{\infty} \sigma_y dr \Rightarrow \sigma_E r_P = \int_0^{r_E} \sigma_y dr$$

Soit, compte tenu de l'expression de σ_y :

$$r_P = \frac{1}{\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_E} \right)^2 = 2r_E$$

La distribution des contraintes dans la répartition élasto plastique pour $r > r_P$ (figure III. 6) est obtenue par une translation sur la distance r_E de la répartition élastique. Irwin rend compte de cette translation en définissant un FIC effectif obtenu en augmentant la longueur de fissure de r_E . Ce qui revient à considérer non pas la longueur réelle a de la fissure mais une longueur effective $a_{eff} = a + r_E$

Ainsi dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie chargée en mode I, le FIC sans correction $K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$, devient après correction :

$$k_{eff} = \sigma^\infty \sqrt{\pi(a + r_E)} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_E} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

La distribution des contraintes dans la répartition élasto plastique pour $r > r_P$ (figure III. 6) est obtenue par une translation sur la distance r_E de la répartition élastique. Irwin rend compte de cette

translation en définissant un FIC effectif obtenu en augmentant la longueur de fissure de rE . Ce qui revient à considérer non pas la longueur réelle a de la fissure mais une longueur effective $a_{eff} = a+rE$

Ainsi dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie chargée en mode I, le FIC sans correction $KI = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a}$, devient après correction :

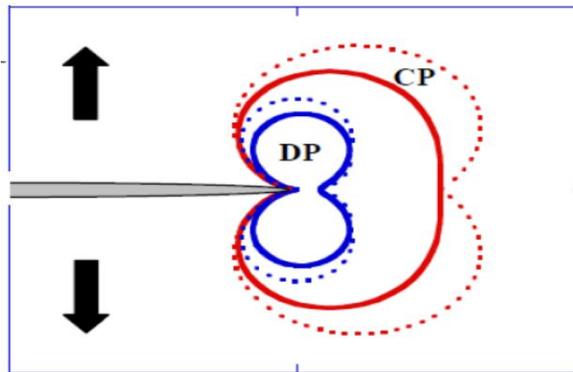
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_E^2$$

Von Mises

Tressa

$$Max(\sigma_i - \sigma_j) = \sigma_E$$

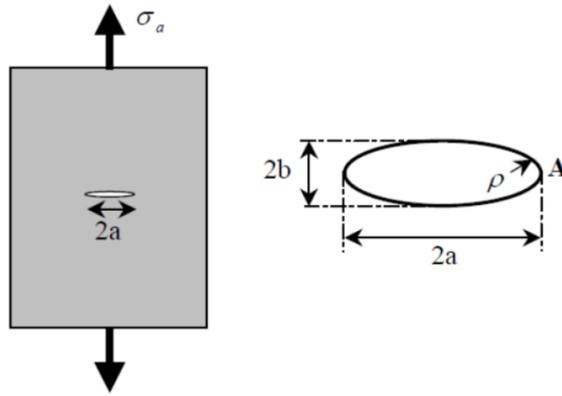
$$\frac{rp^2}{\frac{1}{2\pi} \left[\frac{k_I}{\sigma_E} \right]^2}$$



FigureII-14 : Contours des zones plastiques en mode I,
Prévus par les critères de Mises (trait continu) et de Tressa (trait pointillé),
En contraintes planes (CP) et en déformations planes (DP).

II.11 CONCENTRATION DES CONTRAINTES PRES D'UN DEFAUT :

Si on considère un défaut de forme elliptique de longueur $2a$ et de rayon à fond d'entaille ρ (Figure), la contrainte locale à l'extrémité A est :



FigureII-15 : défaut elliptique dans une plaque infinie.

$$\sigma_L(A) = \sigma_a \left(1 + \frac{2a}{b}\right) = \sigma_a \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$$

Dans le cas entaille très aiguë. $\rho \ll a$ et on a alors :

$$\sigma_L(A) \approx 2\sigma_a \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

Le facteur amplifiant la contrainte est le rapport appelé facteur de concentration de contrainte

$$k_T = 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

Le facteur de concentration de contrainte k_T peut devenir très grand pour des entailles aiguës telles que des fissures.

Si on prend par exemple le rayon à fond d'entaille ρ de l'ordre d'une distance inter atomique, la contrainte locale devient :

$$\sigma_L(A) \approx 2\sigma_a \sqrt{\frac{a}{r_0}}$$

En comparant les relations II.9 et II.13 ($\sigma_L(A) = \sigma_C$), il apparaît que la contrainte de rupture par clivage σ_a (macroscopique) mesurée expérimentalement est donnée par :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{4a}}$$

En considérant l'expression de l'énergie de création de surface

$$\gamma_s = \frac{Er_0}{100} \text{ on a :}$$

$$\sigma_a = \frac{E}{20} \sqrt{\frac{\rho}{a}}$$

Si le rapport $\sqrt{(\rho/a)}$ est suffisamment petit, on obtient des valeurs de la contrainte de rupture par clivage σ_a comparables aux résultats expérimentaux. □ a

La relation II.14 est une estimation de la contrainte de rupture expérimentale par clivage car l'hypothèse de milieu continu n'est plus valable lorsqu'on se place à l'échelle atomique. Des simulations numériques où les liaisons entre atomes sont modélisées par des ressorts non linéaires, montrent que cette contrainte de rupture par clivage est de la forme

$$\sigma_a = \alpha \sqrt{\frac{E\gamma_s}{a}}$$

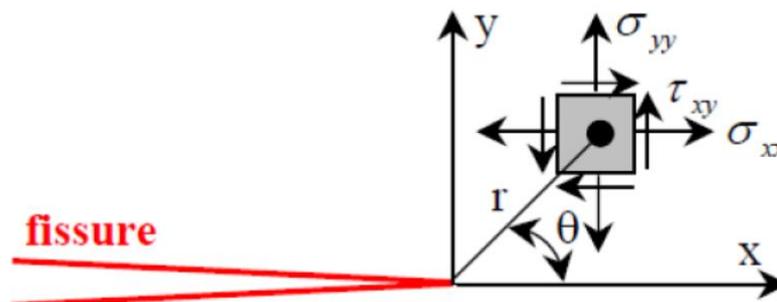
Où α est une constante, proche de 1, qui dépend de la rigidité des ressorts simulant les liaisons atomiques ($\alpha = 1/2$).

II.12 DESCRIPTION DU CHAMP DES CONTRAINTES A L'EXTREMITÉ D'UNE FISSURE A L'AIDE DU FACTEUR D'INTENSITE DES CONTRAINTES :

La forme générale du champ des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau dont le comportement est élastique et linéaire est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}(\theta)$$

La forme générale du champ des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau dont le comportement est élastique et linéaire est de la forme :



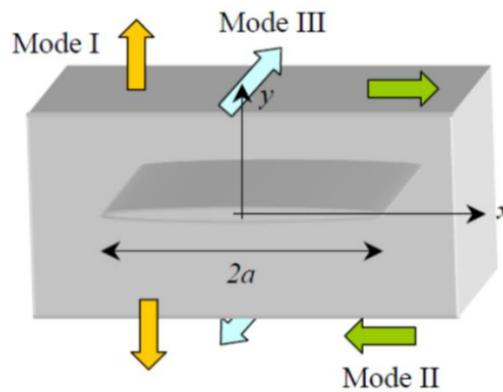
FigureII-16 : Définition des axes (x,y) et des coordonnées (r,θ)

Au voisinage de l'extrémité d'une fissure.

Au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$, c'est à dire lorsque $r \rightarrow 0$ elles tendent vers l'infini comme $1/\sqrt{r}$. Les autres termes d'ordre plus élevé de la relation II.24 sont alors négligeables. La zone la plus critique est donc le voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure et on ne considère alors que les termes en $1/\sqrt{r}$, autrement dit que les champs de contraintes asymptotiques qui sont donc de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

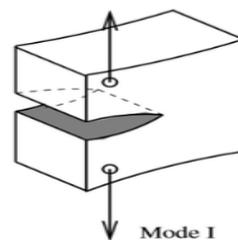
Ces champs asymptotiques peuvent être décrits à l'aide de l'approche de Westergaard (annexe A). Selon le mode de sollicitation considéré - mode I, II ou III : figure II.17 - ils s'expriment à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes KI, KII ou KIII :



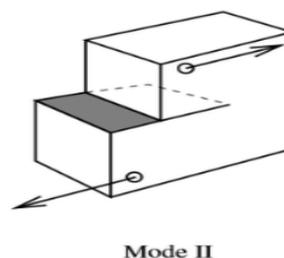
FigureII-17 : Définition des modes de sollicitation.

En mode I (ouverture)

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$



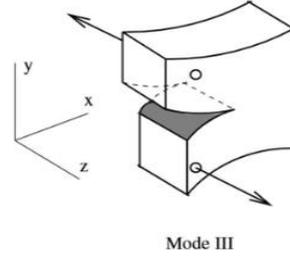
En mode II (glissement dans le plan)



$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases}$$

En mode III (glissement anti plan)

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \frac{k_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{k_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases}$$



Remarque : Lorsque la structure fissurée est sollicitée dans les 3 modes simultanément, on a en appliquant le principe de superposition en élasticité linéaire :

$$\sigma_{ij}(total) = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}$$

Considérons maintenant le mode I seul par exemple. Lorsque $\theta=0$, c'est à dire lorsqu'on se place dans le plan de la fissure, au voisinage immédiat et en aval de l'extrémité de celle-ci, on a d'après les relations

$$\sigma_{xx}(\theta = 0) = \sigma_{yy}(\theta = 0) = \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Le facteur d'intensité de contrainte soumis par la flexion est donné par la relation suivante :

$$k_I^{(M)} = f_M \left(\frac{a}{w} \right) \frac{6M}{Bw^2} \sqrt{\pi a}$$

Le facteur de correction est donné dans le tableau d'après le cas 5.

Le facteur d'intensité de contrainte soumis par la traction est donné par la relation suivante :

$$k_I^{(P)} = f_P \left(\frac{a}{w} \right) \frac{P}{Bw} \sqrt{\pi a}$$

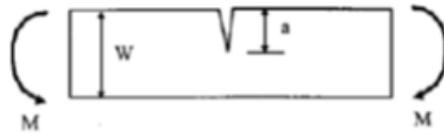
Les facteurs de corrections peuvent être calculés par les relations analytiques avec $\alpha = aW /$

$$f_M \left(\frac{a}{w} \right) = 1.122 - 1.4\alpha + 7.33\alpha^2 - 13.08\alpha^3 + 14\alpha^4$$

$$f_P \left(\frac{a}{w} \right) = 1.12 - 0.23\alpha + 10.55\alpha^2 - 21.72\alpha^3 + 30.39\alpha^4$$

tableau d'après le cas 5.

- Fissure de bord dans une poutre de largeur B soumise à :



$$k_I = f\left(\frac{a}{w}\right) \sigma \sqrt{\pi a} \quad \text{WHERE } \sigma = \frac{6M}{Bw^2}$$

a/w	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(a/w)$	1.044	1.055	1.125	1.275	1.500	1.915

II.13 Conclusion :

À partir d'une enquête et des analyses complètes des défaillances structurelles ci-dessus, nous pouvons tirer les conclusions générales suivantes :

- La plupart des fractures étaient principalement cassantes dans le sens où elles étaient accompagnées de très peu de déformation plastique, bien que les structures soient faites de matériaux à comportement ductile à température ambiante.
- La plupart des défaillances fragiles se sont produites à basse température.
- Habituellement, la contrainte nominale dans la structure était bien inférieure à la limite d'élasticité du matériau au moment de la rupture.
- La plupart des défaillances sont dues à des discontinuités structurelles, notamment des trous, des encoches, des entailles aiguës, etc.
- L'origine de la plupart des défaillances, à l'exclusion de celles dues à une mauvaise conception, était des défauts et des défauts préexistants, tels que des fissures accidentellement introduites dans la structure. Dans de nombreux cas, les défauts qui ont déclenché la fracture ont été clairement identifiés.
- Les structures qui étaient sensibles à la rupture fragile ont été principalement constituées de matériaux à haute résistance qui ont une faible ténacité à l'entaille ou de la fissure (capacité du matériau à résister à des charges en présence d'entailles ou des fissures).
- Fracture se propageant généralement à des vitesses élevées qui, pour les structures en acier, étaient de l'ordre de 1000 m/s. Les vitesses observées dans ces fissures étaient une fraction des ondes sonores longitudinales dans le milieu.

On distingue deux catégories de rupture des structures :

- soit une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure

- soit l'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue.

Dans le premier cas, le risque de rupture peut être évité dès lors que la structure est bien dimensionnée avec un choix de matériaux adaptés et que les chargements sont correctement évalués.

Dans le deuxième cas, la prévention de la rupture est plus délicate. Lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours car la mise en œuvre de nouvelles techniques, bien qu'elle procure des avantages, conduit inévitablement à des problèmes potentiels.

Pour cela, il faut d'une part comprendre l'origine physique des ruptures, afin de pouvoir optimiser les matériaux pour une application donnée, et d'autre part savoir modéliser la rupture afin de dimensionner les structures. Les modèles de rupture pourront être assez différents selon le type de matériau et selon les vitesses de sollicitation.

A decorative frame with rounded corners and a scroll-like effect on the left and right sides, containing the chapter title.

Chapitre III : Généralités sur les matériaux composites

III.1 Introduction :

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs (constructeurs). Ceux-ci veulent toujours des matériaux plus performants, plus économiques et qui durent plus longtemps. Les chercheurs sont le plus souvent amenés à optimiser les solutions déjà utilisées, mais dans certains cas, ils doivent complètement repenser le problème et envisager de " nouveaux matériaux ". En effet, on ne découvre plus de nouveaux matériaux, mais on crée plutôt des nouvelles associations de matériaux. L'un des résultats de cette association est l'aboutissement à un matériau composite, qui fait le sujet de notre étude.

III.2 Définition d'un matériau composite :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes. Leur association est complémentaire et permet d'aboutir à un matériau dont les performances recherchées seront supérieures à celles des composants pris séparément. Un matériau composite est constitué dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue, appelée renfort ou matériau renforçant, est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue, appelée matrice.

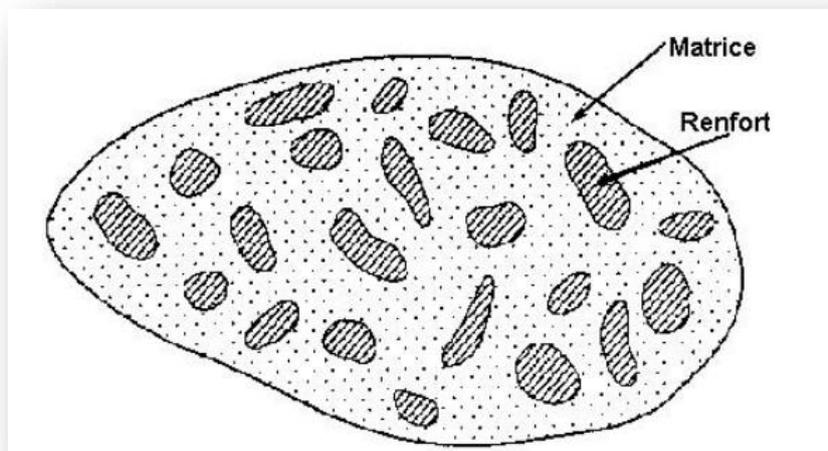


Figure III-1 matériau composite.

III.2 Classification des matériaux :

Les matériaux composites peuvent être classés suivant la forme des renforts ou suivant la nature des constituants, cette classification dans tableau (III- 1)

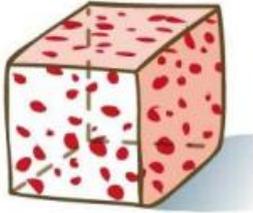
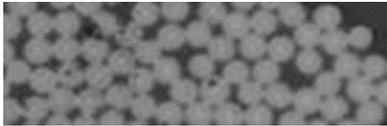
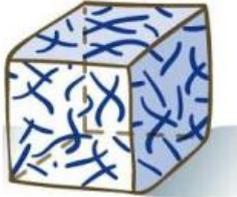
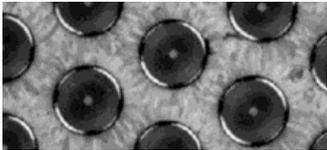
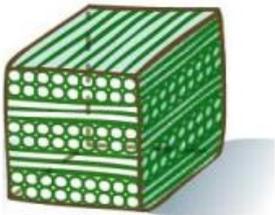
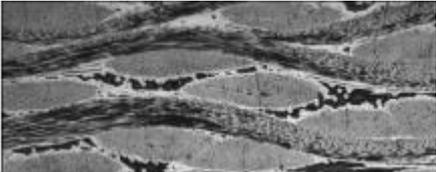
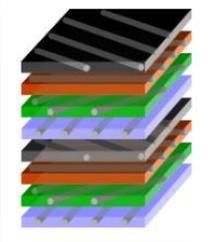
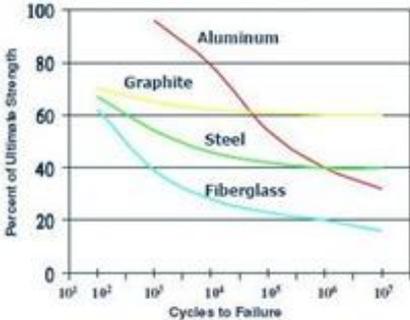
Forme des renforts	Nature des constituants
<p>Inclusion</p>  <p>Distribution aléatoire des renforts.</p>	<p>Composites à matrice organique</p> <p>Fibres céramiques (Carbone, Verre)</p> <p>Fibres organiques (Kevlar)</p> <p>Fibres métalliques (Bore, Aluminium)</p> 
<p>Renforts fibres courtes</p>  <p>Distribution et orientation aléatoire des renforts</p>	<p>Composites à matrice métallique</p> <p>Fibres céramiques (Sic)</p> <p>Fibres métalliques (Bore)</p> 
<p>Renforts fibres longues</p>  <p>Stratifiées tissés</p>	<p>Composites à matrice céramique</p> <p>Fibres céramiques (Sic)</p> 

Tableau III-1 Classification des matériaux composites.

III.3 Pourquoi les matériaux composites ?

Utilisation des matériaux composites principalement pour réduire la masse des structures due à leur excellent rapport : masse / rigidité /résistance, voir tableau (III- 2)

Matériaux au (juste) besoin	Obtention de propriétés spécifiques																																								
<p>✓ Rigidité : Pourcentage de fibre Choix des constituants</p> <p>✓ Anisotropie : Orientation des fibres</p> 	<p>✓ Propriétés spécifiques: Matériau à coefficient de dilatation nul</p> 																																								
<p>Matériau multifonctionnel</p> <p>Matériaux sandwichs</p>  <p>Fonctionnalités :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Acoustique - Conductivité - Résistance au feu - Instrumentatio 	<p>Faible sensibilité à la fatigue pour les matériaux Carbone/Epoxy</p>  <table border="1"> <caption>Approximate data from the fatigue graph</caption> <thead> <tr> <th>Cycles to Failure</th> <th>Aluminum (%)</th> <th>Graphite (%)</th> <th>Steel (%)</th> <th>Fiberglass (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10¹</td> <td>~95</td> <td>~70</td> <td>~65</td> <td>~60</td> </tr> <tr> <td>10²</td> <td>~85</td> <td>~65</td> <td>~55</td> <td>~45</td> </tr> <tr> <td>10³</td> <td>~75</td> <td>~60</td> <td>~45</td> <td>~35</td> </tr> <tr> <td>10⁴</td> <td>~65</td> <td>~55</td> <td>~35</td> <td>~25</td> </tr> <tr> <td>10⁵</td> <td>~55</td> <td>~50</td> <td>~25</td> <td>~15</td> </tr> <tr> <td>10⁶</td> <td>~45</td> <td>~45</td> <td>~15</td> <td>~10</td> </tr> <tr> <td>10⁷</td> <td>~35</td> <td>~40</td> <td>~10</td> <td>~5</td> </tr> </tbody> </table>	Cycles to Failure	Aluminum (%)	Graphite (%)	Steel (%)	Fiberglass (%)	10 ¹	~95	~70	~65	~60	10 ²	~85	~65	~55	~45	10 ³	~75	~60	~45	~35	10 ⁴	~65	~55	~35	~25	10 ⁵	~55	~50	~25	~15	10 ⁶	~45	~45	~15	~10	10 ⁷	~35	~40	~10	~5
Cycles to Failure	Aluminum (%)	Graphite (%)	Steel (%)	Fiberglass (%)																																					
10 ¹	~95	~70	~65	~60																																					
10 ²	~85	~65	~55	~45																																					
10 ³	~75	~60	~45	~35																																					
10 ⁴	~65	~55	~35	~25																																					
10 ⁵	~55	~50	~25	~15																																					
10 ⁶	~45	~45	~15	~10																																					
10 ⁷	~35	~40	~10	~5																																					

TableauIII-2 pourquoi les matériaux composites.

III.4 Les constituants d'un matériau composite :

Les principaux constituants sont le renfort et la matrice. Le renfort a pour rôle d'apporter au matériau

composite ses performances mécaniques élevées. La matrice qu'on appelle aussi liant, son rôle est de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de Protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

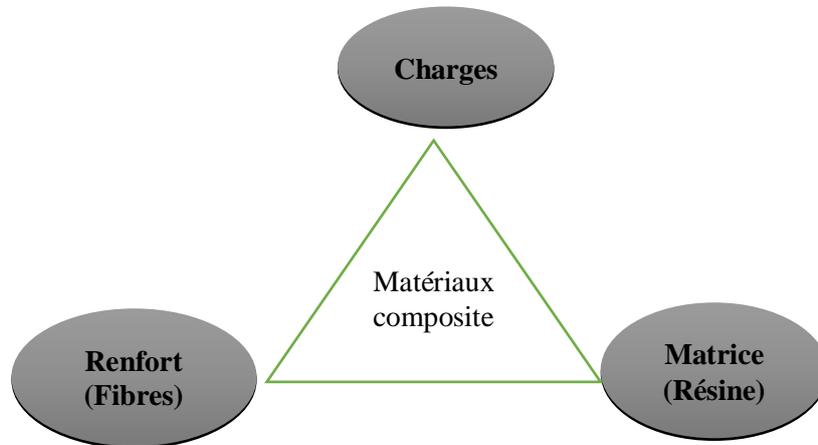


Figure III- 2 les constituants d'un matériau composites.

III.4.1 Les matrices (résines) :

Le rôle de la matrice est principalement de lier les fibres, mais aussi, d'assurer une Répartition spatiale est homogène du renfort. D'un point de vue mécanique, la matrice Transmet et répartie les efforts extérieurs vers le renfort. D'un autre côté, elle apporte à la Structure une tenue chimique et donner la forme désirée au produit, (figureIII-3).

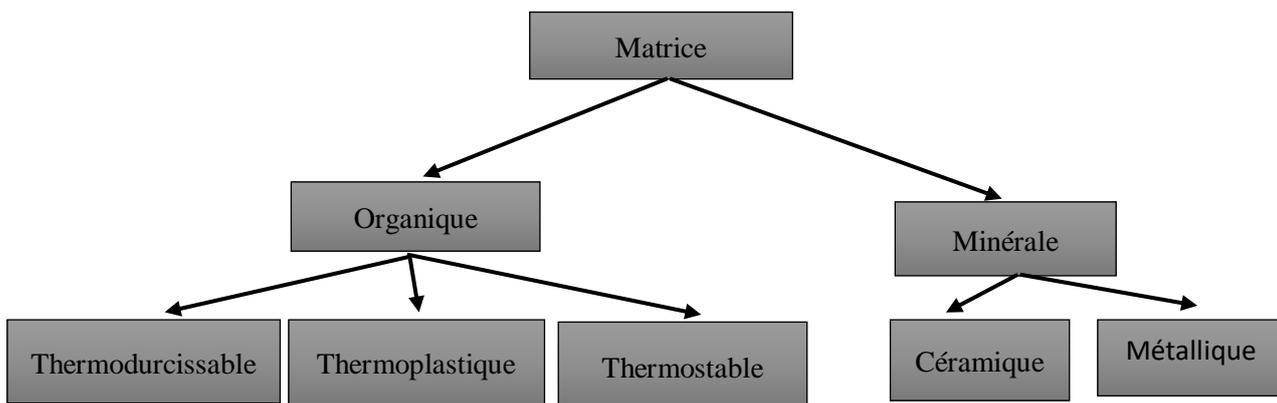


Figure III-3 Classification des matrices.

III.4.1.1 Les résines thermodurcissables :

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme depolymère non réticulé en

suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, lesrésines de condensation (phénoliques, aminoplastes, furaniques) et les résines époxy sontdes résines Thermodurcissables.

III.4.1.2 Les résines thermoplastiques :

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sontdures et solides qui nécessitent une transformation à très haute température. Lespolychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène,polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont descaractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible.

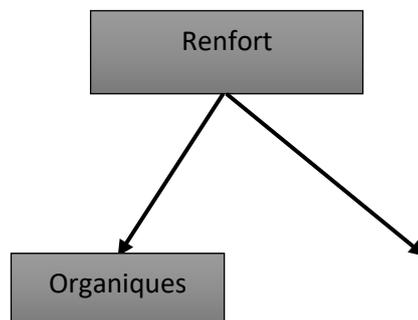
III.4.1.3 Les résines thermostables :

La thermo-stabilité représente la capacité d'un matériau à conserver ses propriétésPhysiques et chimiques lors d'une élévation de température. Les contraintes imposées parL'industrie aérospatiale ont généré un fort intérêt pour ces matériaux capables de résister à de très hautes températures en particulier les matériaux composites.

III.4.2 Les renforts :

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre De fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la Structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : Linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus Complexes, tissage tri directionnel ou plus).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure(III-4)



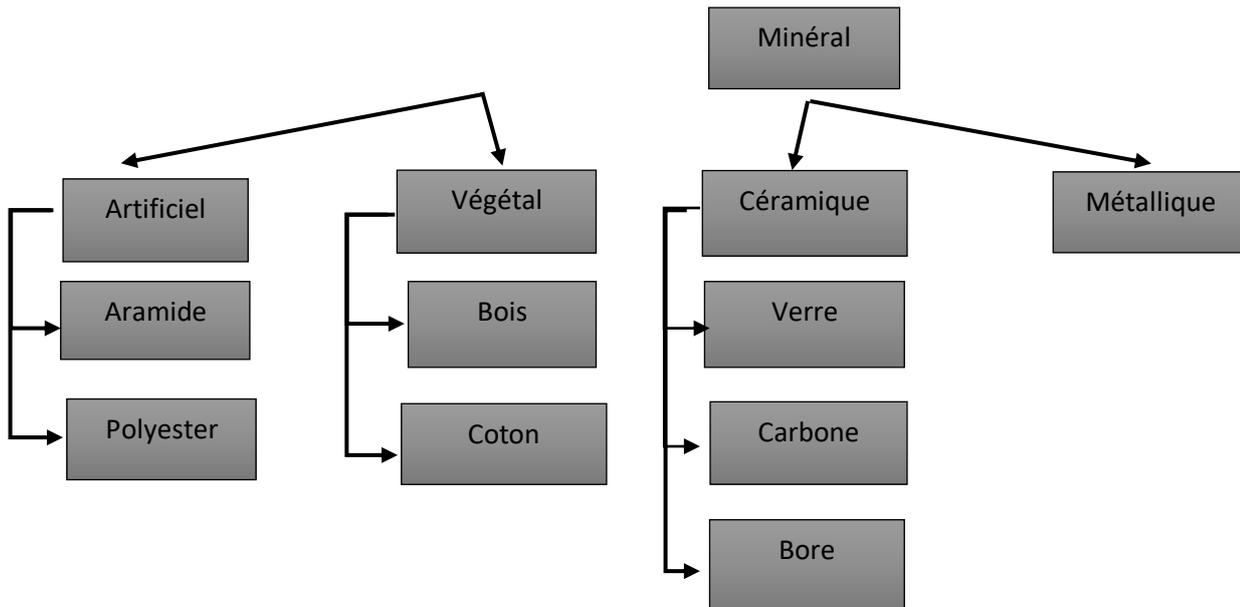


Figure III-4 Les différents types de renfort de base.

III.4.2.1 Les fibres de verre :

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de Bore).

On distingue trois types de fibres :

- E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- R : pour les composites hautes performances ;
- D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).



FigureIII-5 Fibre de verre.

III.4.2.1.1 Ensimage des fibres de verre :

Les filaments de verre issus de la filière ne peuvent pas être utilisés directement pour diverses raisons :

- L'absence de cohésion entre les filaments, qui s'oppose à la constitution de fils
 - La sensibilité du verre à l'abrasion, conduisant à une détérioration lors des manipulations postérieures au fibrage
 - La sensibilité à l'attaque de l'eau
 - La création de charges électrostatiques consécutives aux divers frottements
- Pour remédier à ces défauts, on réalise à la sortie de la filière une opération dite d'ensimage de composition complexe. À la lumière des défauts évoqués ci-dessus, les diverses fonctions de l'ensimage sont :

- Établir une certaine cohésion entre les filaments.
- Donner une plus ou moins grande raideur aux fils.
- Protéger les filaments contre l'abrasion.
- Éviter l'apparition de charges électrostatiques.
- Faciliter l'immersion des filaments par la résine.

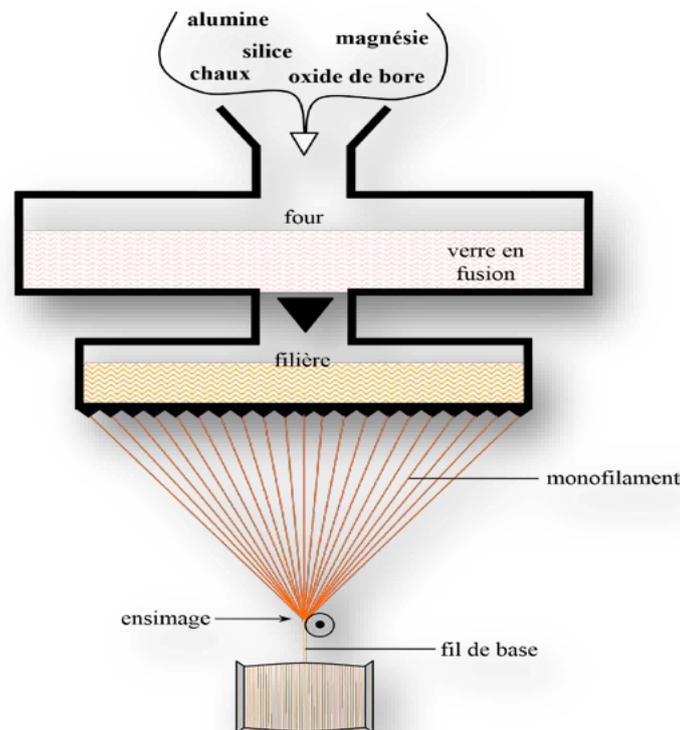


Figure III-6 Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage permettant la fabrication des fibres de verre.

III.4.2.1.2 Propriétés mécaniques des fibres de verre :

Ce sont en fait les propriétés mécaniques des fibres de verre de renforcement qui sont à l'origine du

considérable développement des composites dans tous les domaines industriels. Si le verre en masse est symbole de fragilité, fibré sous forme de filaments de très faible diamètre, eux-mêmes associés parallèlement sous forme de fils, il est doué d'une résistance supérieure à celle des meilleurs aciers connus. Néanmoins, sauf rares exceptions, les fibres de verre textile ne sont pas conçues pour travailler nues ; leurs propriétés à ce stade sont sensibles à la dégradation (par exemple à l'abrasion).

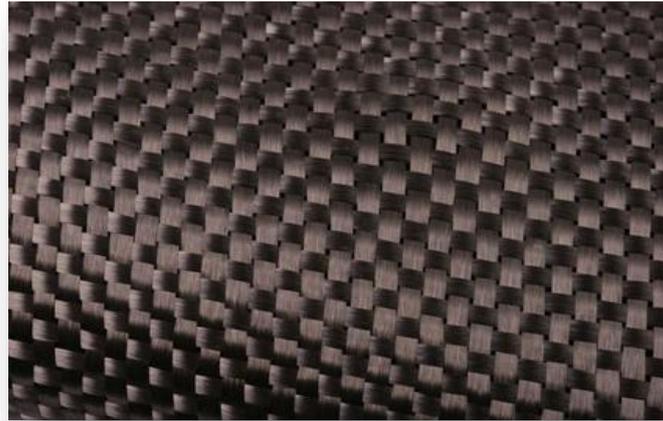
Contraintes et allongement mesurés sur composites unidirectionnels		
	Verre E	Verre R
Contrainte à la rupture en Traction (MPa)	2400 à 2600	3000 à 3600
Taux d'allongement à la Rupture en traction (%)	3	4

Tableau III-3 Caractéristiques mécaniques sur composites.

III.4.2.2 Les fibres de carbone :

C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- Fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ;
- Fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.



FigureIII-7 Fibre de carbone.

III.4.2.2.1 Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone :

Les composites à fibres de carbone et matrice de carbone à haut tenue thermique utilisée dans les tuyères, les disques de frein parce qu'elles se distinguent en plus par une excellente tenue à température, jusqu'à 1500°C environ.

Caractéristiques	Carbone HR	Carbone HM	Carbone THM	Carbone HM(brai)
Masse volumique ρ (kg / m ³)	1750	1810	1950	2000
Diamètre μm	5-7	5-7	5-7	12
Module de Young E_f (Gpa)	220	400	600	380
Module spécifique E_f/ρ (MNm/kg)	120	210	310	190
Contrainte à la rupture σ_{fu} (Mpa)	3000-3500	2800	2000	2000-2400
Contrainte spécifique σ_{fu} (kNm/kg)	1710-2860	1550	1030	1000-1200

TableauIII-4 Caractéristiques des fibres de carbone et de verre E.

III.4.2.3 Les fibres d'aramides :

Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- Les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;

- Les fibres haut module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

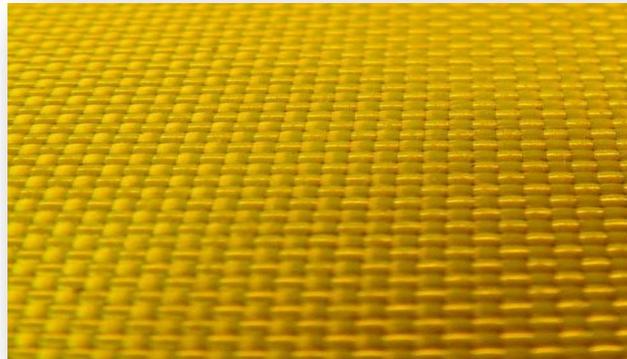


Figure III-8 Fibre d'Aramide.

III.4.2.3.1 Caractéristiques mécaniques des fibres d'aramides :

Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- D'une adhérence moyenne entre matrice et fibres,
- D'un prix encore trop élevé : le prix de base est encore de l'ordre de 40 \$/kg et de 160 \$/kg pour la nouvelle fibre Zylon (PBO).

La production mondiale de fibres d'aramide atteint 40.000 tonnes/an, dont seulement 4.000 tonnes sont utilisées dans les composites.

Malgré leur résistance mécanique en traction, elles résistent mal en compression et dans le sens normal à l'axe de la fibre. De ce fait, elles sont noyées dans une matrice où sont mélangées d'autres fibres pour améliorer la tenue au choc d'une structure composite

III.4.2.4 Les fibres céramiques :

Les matériaux composites de type céramique sont souvent constitués de renforts et de matrices en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. On retrouve ces fibres dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs. Quelques exemples de fibres céramiques :

- les fibres de Carbure de Silicium.
- les fibres de Bor.

III.4.2.4.1 Caractéristiques mécaniques des fibres céramiques :

Les caractéristiques mécaniques des fibres céramiques sont reportées dans le tableau (III-5)

Caractéristiques	Bore	Bore + B4C	Sic
Masse volumique ρ kgm ³	2600	2 600	3 000
Diamètre μ m	100–150	100–150	100–150
Module d'Young E Gpa	430	430	410
Module spécifique E/ρ MNm/kg	165	165	140
Contrainte à la rupture σ fu Mpa Contrainte	3800	4 000	3 900
spécifique σ fu/ ρ KNm/kg	1 460	1 540	1 300

Tableau III-5 caractéristiques mécaniques des fibres céramiques.

III.4.3 Charges et les additifs :

III.4.3.1 les charges :

❖ Charges renforcâtes :

L'objet de l'incorporation de charges renforcâtes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en :

- Charges sphériques.
- Charges non sphériques.

❖ Charges non renforcâtes :

Les charges non renforçâtes ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines en Conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines.

Parmi ces classes on trouve :

- Charges de faible coût.
- Charges ignifugeantes.
- Charges conductrices et antistatiques¹⁰.

III.4.3.2 Les additifs :

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- Lubrifiants et agents de démoulage.
- Pigments et colorants.
- Agents anti-retrait.
- Agents anti-ultraviolets.

III.5 Architecture des matériaux composites :

L'ensemble des procédés de lise en œuvres montre la prépondérance d'une conception

Des pièces en matériaux composites :

-par surfaces : plaques ou coques

-par stratification de couches successives

Ce concept justifie l'importance qui sera donné par la suite à l'étude des matériaux

Composites considérés sous la forme de plaque ou coque, constituées de couches

Différentes (ou non), les coques peuvent être modélisées comme un ensemble de

Plaques, et leur étude sera déduites des études de plaques.

Ainsi nous mettons en évidence l'importance des architectures générales des matériaux

Composites pour leurs conceptions ainsi que leurs modes d'élaborations, et nous allons

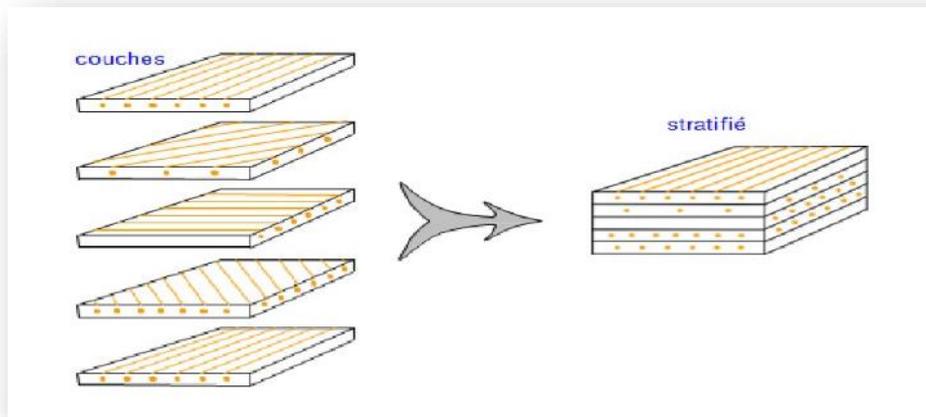
Développer par la suite ces différentes architectures.

III.5.1 Stratifiés :

Les stratifiés sont constitués de couches successives de renforts qu'on appelle le plus

Souvent les plis, imprégnés de résine.

Nous allons examiner les différents types de ces stratifiés.



FigureIII-9 constitution d'un stratifié.

III.5.1.1 Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels :

C'est le modèle de base auquel tous les types de stratifiés lui sont ramenés en étude Type. Ils sont constitués de couches de fils ou de tissus unidirectionnels dont la direction Est décalé en chaque couches Leurs désignations de fait selon le code suivant :

- Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle

Que fait la direction des fibres avec l'axe de référence

- Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents
- Les couches successives de mêmes orientations sont désignées par un même indice

Numérique

- Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à une autre et des par

Anthèses indique le début et la fin du code

Et on va citer quelques exemples :

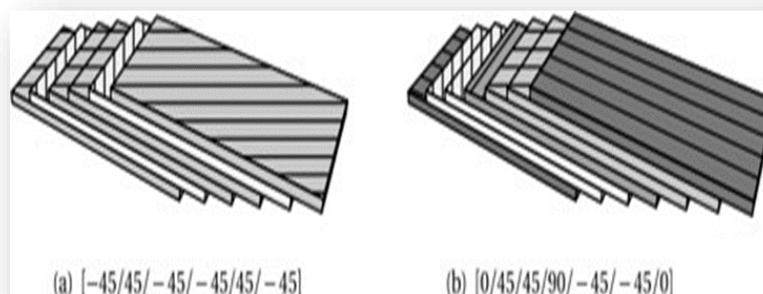


Figure III-10 Représentation d'un stratifié.

III.5.1.2 Structure générale d'un stratifié :

Dans le cas général, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifiés, Mats, tissus, fibres de verre, fibres de carbone, etc. Chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau Composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé :

- Les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la

Direction des fibres ;

- Les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones

Comprimées :

- Une stratification croisée sera sensible au délaminage interlaminaire ;
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour

Avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

Enfin, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement Une bonne planéité du stratifié après démoulage.

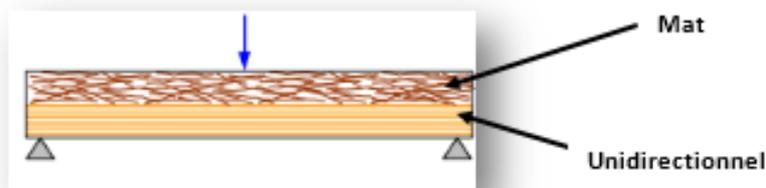


Figure III-11 Poutre sollicitée en flexion.

III.5.2 Composites sandwichs :

Le principe du technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un Matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux "feuilles", appelées peaux, possédant de bonnes caractéristiques en traction. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité.

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse Minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, Corrosion, prix, etc.) .

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

- ❖ Pour les âmes pleines (Figure III-12) :
 - Le balsa ou bois cellulaire ;
 - Diverses mousses cellulaires ;
 - Des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses

Syntactiques ; etc. ;

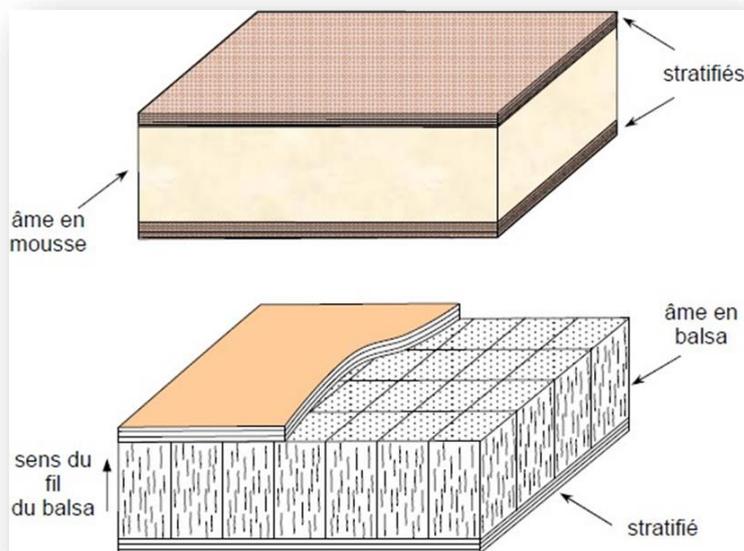


Figure III-12 Matériaux sandwichs à âmes pleines .

- ❖ Pour les âmes creuses (Figure III-13), essentiellement nid d'abeilles et profilés :
 - Des alliages métalliques légers ;
 - Du papier kraft (enduit ou non de résine) ;
 - Du papier polyamide, type papier Nomex; etc.;

Des âmes mixtes peuvent être utilisées.

Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou des feuilles D'alliages légers.

Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à

Avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts
Entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles
Avec les matériaux en présence

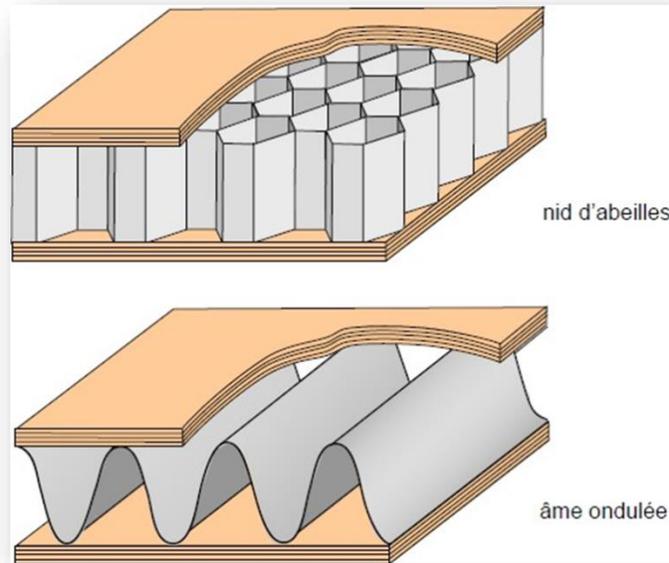


Figure III-13 Matériaux sandwiches à âmes creuses.

La figure suivant (Figure III-14) illustre quelques types de nid d'abeille utilisés dans les
Structuresaéronautique

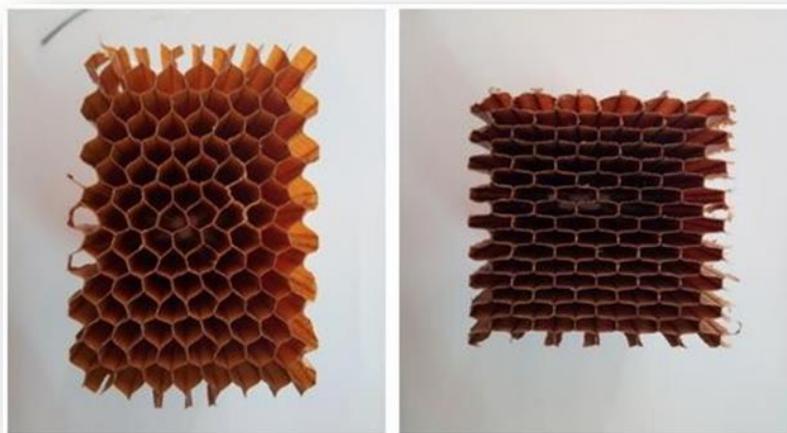


Figure III-14 Quelques types de nid d'abeille.

III.6 Conclusion :

Les matériaux composites (Polymère Renforcé de Fibres) PRF sont utilisés pour le renforcement des structures métalliques. Les PRF sont utilisés soit dans le but de réparer ou de renforcer la structure et comparer leur performance à la fatigue. Dans ce mémoire, l'étude des vibrations libres des poutres métalliques renforcées par les PRF a été réalisée par une méthode analytique en utilisant l'approximation modale et par la méthode des éléments finis (MEF) avec différentes conditions aux limites. Le comportement statique et dynamique des poutres métalliques renforcées par PRF a été analysé analytiquement. La théorie de poutre classique (CBT) a été utilisée pour déterminer les paramètres de rigidité des couches composites. Une étude paramétrique a été menée sur diverses configurations de la poutre renforcée afin d'analyser l'effet des différents paramètres. Les résultats obtenus dans ce travail montrent que les PRF offrent une alternative prometteuse pour le renforcement des structures métalliques. En outre ils améliorent le comportement statique et dynamique de structures telles que la réduction des vibrations et l'augmentation de l'amortissement des structures.



**Chapitre VI :
Modélisation des matériaux
composite**

VI.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est de présenter un résumé de la théorie classiques des composites. Cependant pour les lecteurs intéressés par plus de détails, ils peuvent consulter les ouvrages de [17 - 19], et de [38 - 39]. Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons les notions de base de la théorie d'élasticité nous introduisons les lois constitutives qui décrivent le comportement des matériaux définies comme des relations entre les composants du tenseur des déplacements, du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes. La seconde partie décrit le comportement du composite unidirectionnel.

Une approche appropriée pour les poutres composites est utilisée pour prendre en compte le couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion. Cette méthode nous permet de redéfinir les paramètres de rigidité par des paramètres de rigidité équivalente utilisés dans ce document. Finalement, la dernière partie de ce chapitre décrit l'analyse des stratifiées utilisés dans le renforcement des poutres.

VI.2 Mécanique des milieux continus :

Pour les lecteurs intéressés par plus de détails, ils peuvent consulter l'ouvrage. L'état de contrainte est défini par la relation suivante (FigVI.1) :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Où i indique la direction de la contrainte et j indique la direction de la normale.

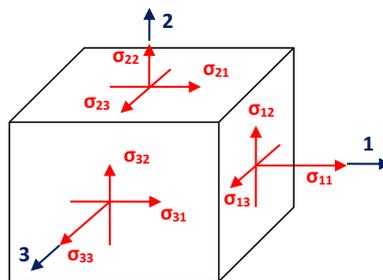


Figure VI.1 Etat de contraintes.

A l'équilibre on aura le tenseur de contrainte suivant :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ Sym & & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

L'état de déformation est défini de façon similaire à l'état de contrainte :

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ Sym & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ Sym & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La déformation linéaire et angulaire sont définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les équations de compatibilité sont comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &= 0 \quad i \neq j \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad i \neq j \neq k \end{aligned} \quad (2.4)$$

La relation entre les contraintes et les déformations est donnée par la loi de Hooke généralisée :

$$\{\sigma\} = [C] \times \{\varepsilon\} \quad (2.5)$$

Où $\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{32} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{21}\}^T$,

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{32} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{21}\}^T$

Et [C] est la matrice de rigidité donnée par la relation suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ C_{2111} & C_{2122} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{2121} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Et inversement :

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1} \{\sigma\} = [S] \{\sigma\}$$

Où $[S] = [C]^{-1}$ est la matrice de souplesse ou de flexibilité.

A l'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 \\ \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5 \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6 \end{array} \right. \quad \text{Et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_6 \end{array} \right.$$

La relation (2.5) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Si le matériau ne possédant aucune propriété de symétrie il est appelé matériau **triclinique** c'est le cas le plus général.

Pour le cas particulier:

Le matériau **unidirectionnel** comporte comme un matériau orthotrope qui possède 3 plans de

symétrie perpendiculaire deux à deux, ayant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse (Fig. 2.2) avec $C_{22} = C_{33}, C_{12} = C_{13}$ et $C_{55} = C_{66}$:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

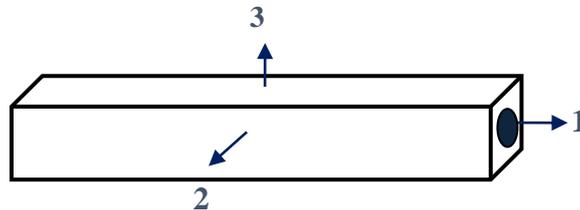


Figure VI.2 Matériau composite unidirectionnel.

Un **matériau est isotrope** si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence.

L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations

$$C_{22} = C_{11} \quad C_{23} = C_{12} \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) :$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Un matériau isotrope est caractérisé par deux constantes d'élasticité indépendantes C_{11} et C_{12} qui sont exprimés par les **coefficients de Lamé** λ et μ :

$$C_{12} = \lambda Et \quad \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu$$

D'où

$$C_{11} = \lambda + 2\mu$$

Le **coefficient de Poisson** du matériau est

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Il y a deux coefficients élastiques fondamentaux indépendants E et ν et les relations suivantes :

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu, (2.10)$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} (2.11)$$

VI.3 Mécanique de composite unidirectionnel :

VI.3.1 Relations contraintes-déformations :

L'état complet de contraintes dans le repère local (1,2) d'un pli est représenté par la Figure VI.3 Ainsi les propriétés mécaniques du pli ont été mesurées dans ce repère local.

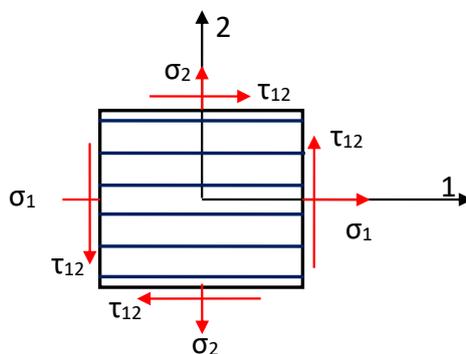


Figure VI.3Etat complet de contraintes dans le repère local.

Les équations de transformation relatives aux contraintes sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \times \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Où [T] est la matrice de changement de repère :

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Les équations de transformation relatives aux déformations sont tout à fait similaires à celles des contraintes

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Afin d'obtenir directement γ_{xy} il faut remplacer T(θ) par T'(θ) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T'(\theta)] \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

1

$$[T'(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations d'un pli soumis à un état complet de contraintes dans le repère local (1,2), sont définies par l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 = \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Où les constantes de la matrice Q sont données par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \\ Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = Q_{21} \\ Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} = G_{12} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Dans le repère globale (x, y) les relations entre les contraintes et les déformations sont données par la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

La matrice \bar{Q} est déduite par intermédiaire de la matrice de rigidité dans le repère local Q en tenant compte de la rotation des axes avec un angle θ (Figure VI.4).

L'angle de rotation des systèmes d'axes θ est considéré comme positif lorsqu'il faut tourner dans le sens trigonométrique pour passer de l'axe x vers l'axe 1.

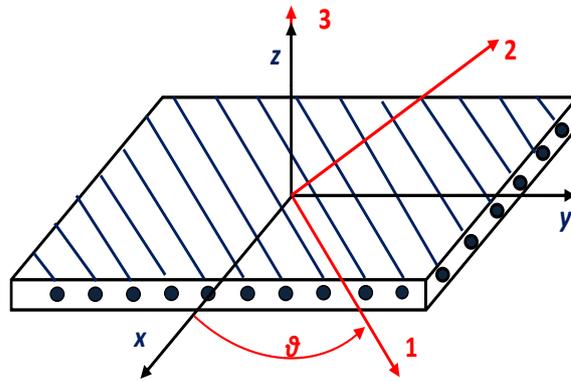


Figure VI.4Élément de composite et orientation des fibres.

La matrice \bar{Q} est calculée comme suit :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = [T(\theta)]^{-1} \times [Q] \times [T'(\theta)] \quad (2.20)$$

Les éléments de la matrice \bar{Q} sont déterminés par les équations suivantes :

$$\bar{Q} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{22} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

VI.3.2 Module d'élasticité équivalent :

Le module d'élasticité suivant la direction ox (Figure VI.5) est

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

Cette équation donne:

$$E_x = \frac{1}{\frac{1}{E_1} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_2} \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (2.22)$$

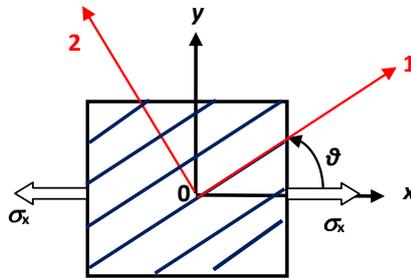


Figure VI.5 Plan de contrainte de l'élément composite dans la direction x

En substituant $\theta = \theta + 90^\circ$ dans l'expression précédente, on obtient :

$$E_y = \frac{1}{\frac{1}{E_1} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_2} \cos^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (2.23)$$

- Coefficients de Poisson équivalent

$$v_{xy} = E_x \left(\frac{\nu_{12}}{E_1} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \quad (2.24)$$

De façon similaire, on obtient

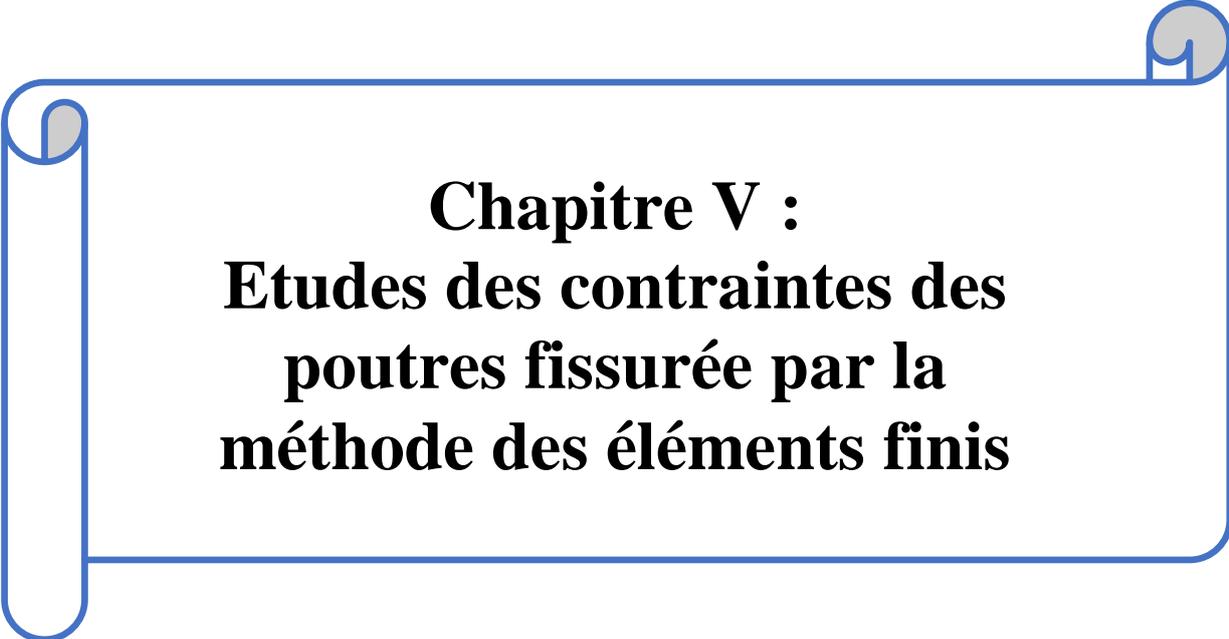
$$v_{yx} = E_y \left(\frac{\nu_{21}}{E_2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \quad (2.25)$$

- *Module de rigidité G_{xy} équivalent*

$$G_{xy} = \frac{1}{2 \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{12}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \quad (2.26)$$

VI.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous expliquons la théorie classiques des composites et les notions de base de la théorie d'élasticités ; d'où on tire les *Modules d'élasticités équivalentes* , E_x , *Module de rigidité G_{xy} équivalent* et le *Coefficients de Poisson équivalent* à partir des équations de transformation relatives aux contraintes.



Chapitre V :
Etudes des contraintes des
poutres fissurée par la
méthode des éléments finis

GÉNÉRALITES SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS :

V.1 Introduction :

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées dans une large variété de problèmes d'ingénieries. Tout au début cette méthode était développée pour étudier les structures complexes

V .1.1 Définitions de la méthode des éléments fini :

La méthode éléments finis est une procédure numérique pour analyser les structures et les milieux continue. Habituellement le problème adressé est compliqué à résoudre d'une manière satisfaisante par des méthodes analytiques classiques.

Les problèmes qui étaient précédemment tout à fait insurmontables sont maintenant résolus par habitude. Les procédures des éléments finies sont employées dans la conception des bâtiments, des moteurs de chaleur de moteurs électriques, des fuselages des bateaux et du vaisseau spatial.

Le procédé de la méthode des éléments finis produit beaucoup d'équations algébriques simultanées, qui sont produites et résolues sur un ordinateur numérique.

Les calculs des éléments finis sont exécutés sur l'ordinateur personnel. Cependant, les erreurs ont diminué en traitant plus d'équations. Et les résultats assez précis pour la technologie sont parcourables à un coût raisonnable.

La méthode des éléments finis a commencé comme méthode d'analyse des contraintes.

Le problème peut concerner des analyses des contraintes, la conduction de la chaleur, Ou n'importe lequel de plusieurs autres secteurs.

Aujourd'hui les éléments finis sont également employés pour analyser des problèmes du transfert

thermique, champs de lubrification de flux de fluide, électriques et magnétiques et beaucoup d'autres.

V .1.2 Etapes de la méthode des éléments finis :

Dans diverses applications précitées, les éléments finis perdent leur signification physique d'éléments structuraux : la méthode des éléments finis est considérée comme un outil de Mathématiques appliquées destiné à résoudre les équations différentielles.

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines. (Figure 1.2).
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires.
- Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.
- introduction des conditions aux limites essentielles et résolution ;
- Évaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, déplacements...).
- Jugement de manière critique les résultats obtenus.

V.1.3 Principes de la MEF :

La M.E.F est basée sur une idée simple qui consiste à subdiviser (discrétiser) une forme Complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de formes géométriques simples (éléments finis) interconnectés en des points appelés noeud:

- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.
- La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.
- Les noeuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

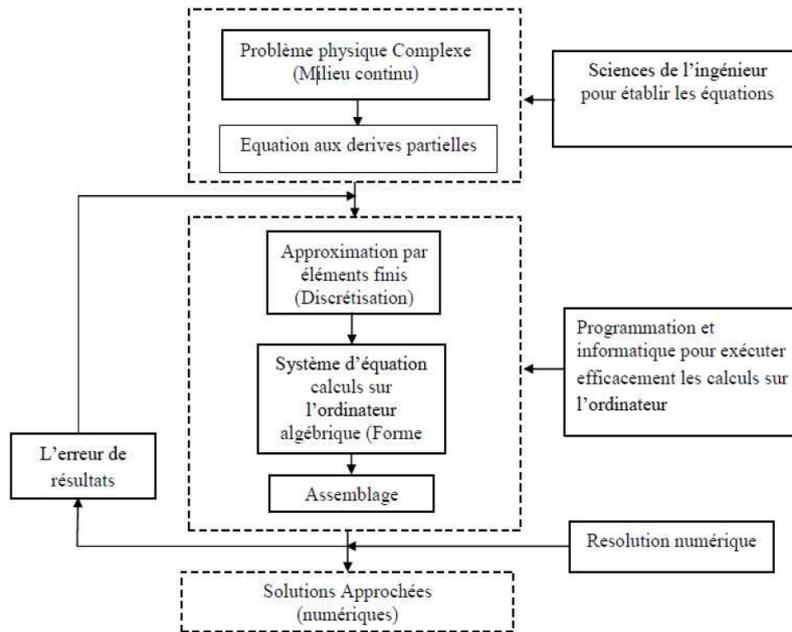


Figure V.1 Principe d'analyse par la MEF.

V .2 Conclusion :

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base : la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée.

Notre objet dans ce chapitre est de donner un aperçu sur la méthode des éléments finis.

V.3 Modélisation des éléments finis (Poutre-Plaque) par la MEF :

V .3.1 Introduction :

Dans cette partie, nous commencerons par décrire les concepts élémentaires du comportement et de la théorie en flexion des poutres et des plaques. L'élément de plaque est l'un des éléments structurels les plus importants éléments et est utilisé pour modéliser et analyser des structures telles que récipients sous pression, cheminées et pièces automobiles. Il existe un grand nombre de formulations d'éléments de flexion de plaques. Une plaque peut être considérée comme l'extension bidimensionnelle d'une poutre en flexion simple. Les plaques et les poutres supportent des charges transversales ou perpendiculaires à leur plan et par action de flexion. Une poutre a une seule résistance de moment de flexion, tandis qu'une plaque résiste à la flexion autour de deux axes et présente un moment de torsion. Une plaque est un solide tridimensionnel de forme plane dont deux des dimensions sont prépondérantes devant la troisième (la normale).

Il existe un très grand nombre d'éléments finis plaques et coques. Nous ne nous intéressons ici qu'à ceux qui sont nécessaires à la compréhension du reste de ce cours.

V.3.2 Vibration libre des poutres renforcées par matériaux composites :

La théorie des poutres considère, en effet que la longueur L est très grande devant l'épaisseur h et la largeur b de la poutre (Fig. 3.1).

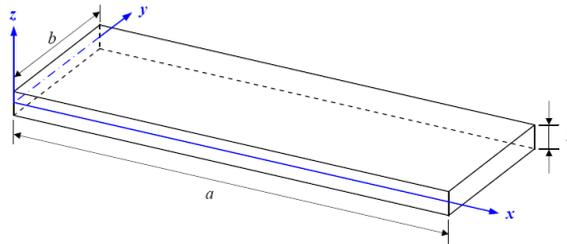


Figure V.2 Elément de poutre.

Pour une flexion cylindrique simple avec un moment fléchissant et un effort tranchant associé on se place dans l'hypothèse suivante: les sections droites des poutres restent droites (Figure V.3) au cours de la déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli).

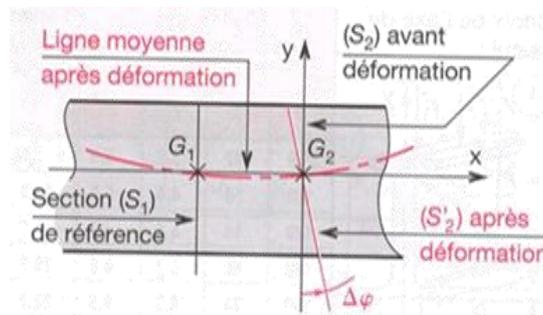


Figure V.3 Flexion cylindrique d'une poutre.

Dans le cas des poutres renforcées en matériaux composites la poutre droite de section (A) est constituée par un empilement de matériaux de différentes épaisseurs. L'analyse vibratoire du mouvement transverse libre de la poutre composite homogénéisée est étudiée, d'après l'hypothèse Euler-Bernoulli.

Nous considérons une poutre sur deux appuis simples renforcée par des manteaux composites Figure V.4.

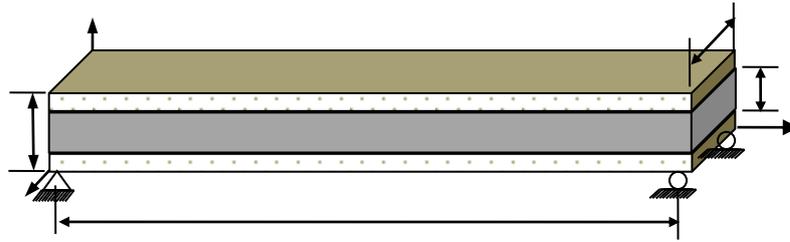


Figure V.4 Renforcement sur les deux côtés de la poutre (sandwich).

Hypothèses :

- on considère le cas de petits mouvements harmoniques autour d'une position d'équilibre.
- pas de glissement, ni séparation entre deux couches voisines.
- la discontinuité à l'interface entre les couches due à l'effet de Poisson, est négligeable.
- la rigidité flexionnelle est constante.
- les sections planes avant déformation restent planes après déformation.
- l'effet de l'effort tranchant est négligé.

Les équations d'équilibre exprimées à travers l'étude d'une tranche de poutre (Figure V.5) restent vérifiées à chaque instant et sont strictement les mêmes que celles des poutres homogènes isotropes, puisque leur démonstration ne fait pas intervenir les propriétés des matériaux .L'équation d'équilibre dynamique peut être retrouvée pour une poutre isotrope en vibrations libres en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique à un élément infinitésimal de la poutre.

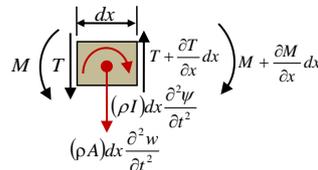


Figure V.5 Tronçon de poutre élémentaire.

L'équation de mouvement fait intervenir de nombreux paramètres : la flexion de la fibre neutre au point d'abscisse x à l'instant t notée y ; l'effort tranchant T ainsi que l'effort extérieur par unité de longueur T_{ex} ; en régime libre l'effort extérieur est nul; le moment fléchissant M ; l'angle de rotation de l'axe neutre ψ . Cependant, si le calcul des fréquences naturelles de la poutre est fonction de ses propriétés mécaniques, il est par contre indépendant des forces excitatrices mises en jeu. Ce qui nous permet donc de faire cette étude dans le domaine des vibrations libres.

L'équation d'équilibre dynamique nous conduit aux deux équations suivantes :

$$\sum F_{/y} = -T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) - \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum M_{/o} = -M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + T \frac{dx}{2} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} - \rho I dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.2)$$

Après simplification on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + T = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

En utilisant les relations classiques de la résistance des matériaux on obtient,

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.5)$$

$$\psi - \frac{T}{\alpha GA} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (3.6)$$

Dans les cas usuels, certains termes de ces équations peuvent être négligés; il s'agit de $(\rho I) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)$ qui représente l'effet d'inertie en rotation et de $T/\alpha(GA)$ qui représente l'effet de cisaillement.

Une fois ces simplifications opérées, on dit que l'on résout le problème d'une poutre d'Euler-Bernoulli. Après élimination entre T , M et ψ on obtient $\partial M / \partial x = -T$, donc :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \quad (3.7)$$

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

En égalisant l'équation (3.3) et (3.7) on aura l'équation dynamique de la poutre:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (3.9)$$

Avec $m_l = \rho A$, on obtient [19] :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3.10)$$

Afin de calculer la flèche d'une poutre en stratifié de matériaux composites, il est nécessaire d'établir une formulation homogène, c'est-à-dire, les relations de comportement sont identiques celles des poutres homogènes isotropes. Cette approche d'homogénéisation est basée sur les caractéristiques physiques équivalentes.

Par analogie, l'équation dynamique du mouvement libre équation (3.10) d'une poutre multicouche homogénéisée, peut être exprimée en fonction des propriétés physicomécaniques équivalentes en utilisant l'approche d'homogénéisation :

$$(E_{xx}I)_{\text{éq}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_l)_{\text{éq}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3.11)$$

Le moment d'inertie

$$I = b \int_{y_{i-1}}^{y_i} y^2 dy,$$

Où y_i et y_{i-1} sont les coordonnées supérieure et inférieure du pli (i).

Le paramètre d'équivalence $(E_{xx}I)_{\text{éq}}$, est déterminé, en supposant un collage parfait au niveau des différentes interfaces d'après :

$$E_{xx}I = \sum_{k=1}^N E_k b \int_{y_{i-1}}^{y_i} y^2 dy, \quad (3.12)$$

Après intégration, on obtient [19]:

$$E_{xx}I = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_p} b E_i (y_i^3 - y_{i-1}^3), \quad (3.13)$$

La rigidité équivalente pour la poutre composite revêtue sur les deux côtés (sandwich), représenté sur la Fig. 3.3, peut être écrite comme suit :

$$E_{xx}I = \frac{2b}{3} [E_c h^3 + E_f (H^3 - h^3)] \quad (3.14)$$

Où E_c et E_f sont le module d'élasticité du cœur et des faces de la poutre, respectivement.

Le module d'élasticité des faces, E_f le long de l'axe de la poutre est exprimé comme suit :

$$E_f = \frac{1}{E_{11}} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_{22}} \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (3.15)$$

Où E_{11} , E_{22} , G_{12} et ν_{12} sont les propriétés mécaniques le long des directions de stratifiés.

L'angle θ est l'angle entre la direction principale des stratifiés et l'axe de la poutre.

Les propriétés mécaniques E_{11} , E_{22} , G_{12} et ν_{12} du stratifié composite unidirectionnel de fibres continus sont calculées avec l'utilisation de la règle de mélange (Matrice + Fibre).

Les modules de cisaillement des fibres et de la matrice sont calculés d'après :

$$G_{fibre} = \frac{E_{fibre}}{2(1 + \nu_{fibre})} \quad (3.16)$$

$$G_{matrice} = \frac{E_{matrice}}{2(1 + \nu_{matrice})} \quad (3.17)$$

Où E_{fibre} , $E_{matrice}$, ν_{fibre} et $\nu_{matrice}$ représente le module d'Young et le coefficient de Poisson des fibres et de la matrice respectivement.

Le comportement mécanique des matériaux composites dépend de plusieurs facteurs: le type de fibres, la fraction volumique de fibres et le type de matrice.

Dans les matériaux composites, les fibres reprennent principalement les efforts dans la direction des fibres. La matrice, quant à elle, transfère les contraintes aux fibres, et les protège. La résistance et le module de Young des fibres sont plus importants par rapport à ceux de la matrice, le comportement mécanique des matériaux composites est donc piloté par les propriétés mécaniques des fibres et la quantité de fibres (fraction volumique).

. Propriétés mécaniques de matériaux composites

Les propriétés mécaniques de matériaux composites peuvent être estimées selon la loi de Halpin-Tsai :

$$E_f = E_{fib}V_{fib} + E_m V_m$$

$$f_f \approx f_{fib}V_{fib} + f_m V_m$$

Avec

$$V_{fib} + V_m = 1$$

Où la fraction volumique V_{fib} typique est de l'ordre de 0,6 – 0,65.

E_f Est le module d'Young du matériau composite dans la direction des fibres,

E_{fib} , module d'Young des fibres,

E_m Module d'Young de la matrice,

V_{fib} Fraction volumique de fibres,

V_m Fraction volumique de la matrice,

f_f Résistance en traction du matériau composite,

f_{fib} Résistance en traction des fibres,

f_m Résistance en traction de la matrice,

La fraction volumique de matrice est donnée par :

$$V_{matrice} = 1 - V_{fibre} \quad (3.18)$$

Où V_{fibre} est la fraction volumique des fibres.

En utilisant la Loi de mélange on peut calculer les propriétés mécaniques du stratifié :

✓ Module d'Young longitudinal :

$$E_{11} = E_{fibre}V_{fibre} + E_{matrice}V_{matrice} \quad (3.19)$$

✓ Module d'Young transverse :

$$E_{22} = \frac{E_{matrice}}{\left(1 + \left(\frac{E_{matrice}}{E_{fibre}} - 1\right)V_{fibre}\right)} \quad (3.20)$$

✓ Module de cisaillement :

$$G_{12} = \frac{1}{\left(\frac{V_{\text{fibre}}}{G_{\text{fibre}}} + \frac{V_{\text{matrice}}}{G_{\text{matrice}}} \right)} \quad (3.21)$$

✓ Coefficient de Poisson ν_{12} :

$$\nu_{12} = \nu_{\text{matrice}} V_{\text{matrice}} + \nu_{\text{fibre}} V_{\text{fibre}} \quad (3.22)$$

✓ Coefficient de Poisson ν_{21} :

$$\nu_{21} = \nu_{12st} \frac{E_{2st}}{E_{1st}} \quad (3.23)$$

De même, la masse équivalente par unité de longueur peut être calculée comme suit :

$$m_l = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i, \quad (3.24)$$

La section transversale du pli (couche) est

$$A_i = b \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy,$$

D'où

$$m_l = \sum_{i=1}^N b \rho_i \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy, \quad (3.24)$$

Après intégration, on aura :

$$m_l = \sum_{i=1}^N b \rho_i (y_i - y_{i-1}), \quad (3.25)$$

Où m_l est la masse par unité de longueur de la poutre, et b est la largeur de la poutre et ρ_i est la densité de la couche i -Ième. Ici, y_i est la distance entre l'axe neutre de la poutre et la couche i .

Pour une poutre sandwich (fig.3.3), l'équation (3.25) devient :

$$m_l = 2b[\rho_c h + \rho_f (H - h)], \quad (3.26)$$

Où ρ_c et ρ_f sont les densités du noyau et des faces de la poutre, respectivement.

La densité du stratifiée (faces) est donnée par la loi des mélanges :

$$\rho_{st} = \rho_{lf} = \rho_{fibre} V_{fibre} + \rho_{matrice} V_{matrice} \quad (3.27)$$

Où ρ_{fibre} et $\rho_{matrice}$ sont la densité de la fibre et de la matrice, respectivement.

V.4. Modélisation des éléments finis pour la flexion des plaques :

V.4.1 Concepts de base pour la flexion des plaques par la MEF :

Nous considérerons la théorie classique des plaques minces ou Kirchhoff théorie des plaques. La plaque mince représentée dans le plan x - y et d'épaisseurs e dans la direction z (Fig V.6).

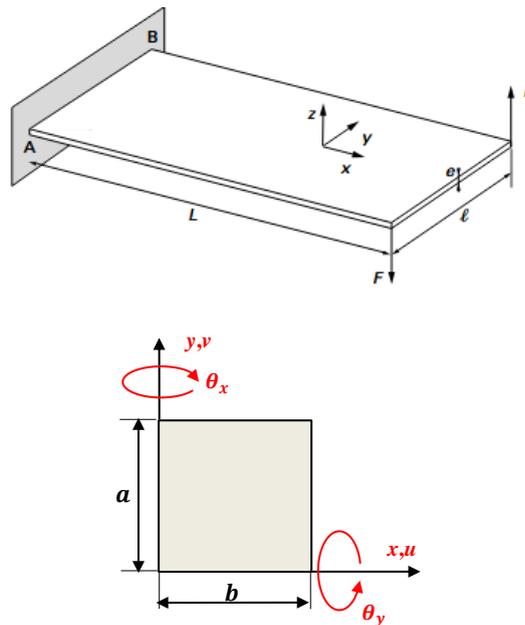


Figure V.6 Plaque représentée dans le plan x - y

Comme pour les poutres, il existe deux types d'hypothèses cinématiques pour les poutres.

- la cinématique de MIDLIN/HENCKY/REISSNER dont le principe de base est les segments droits avant déformation restent droits après déformation
- la cinématique de KIRCHHOFF/LOVE dont le principe de base est les segments droits avant déformation restent droits et normaux à la surface moyenne après déformation. Comme pour les poutres, les deux théories de plaques se distinguent par la prise en compte ou non du cisaillement transversal. Les deux modes de déformation indépendants sont :
 - mode de tension : déplacements u et v (déplacements de membrane),
 - mode de flexion : déplacement w (déplacement hors plan (flèche)) et rotations θ_x et θ_y (rotation de la normale).

Le champ de déplacement supposé pour une plaque épaisse (épaisseur h) est défini comme

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_x \\ z\theta_y \\ w_0 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

où θ_x, θ_y sont les rotations de la normale au plan médian par rapport aux axes y et x , respectivement

Les déformations peuvent être regroupées en trois catégories :

– déformation de membrane :

$$\varepsilon_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

– déformation de cisaillement transversal

$$\varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

– déformation de flexion (courbures) :

$$\{\chi_f\} = \begin{Bmatrix} \chi_{f1} \\ \chi_{f2} \\ 2\chi_{f12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Dans les plaques, les contraintes sont représentées par les efforts intérieurs:

– efforts intérieurs de membrane, efforts dans le plan moyen par unité de longueur :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (6.5)$$

– efforts intérieurs de flexion, moments dans le plan moyen par unité de longueur :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (6.6)$$

– efforts intérieurs de cisaillement transversal, efforts tranchants dans le planmoyen par unité de longueur :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (6.7)$$

Ces efforts intérieurs, sont liés aux déformations par la relation de comportement élastique. Ces relations sont :

– **comportement en membrane :**

$$\{N\} = [D_m]\{\varepsilon_m\} \quad (6.8)$$

avec

$$[D_m] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ est appelé raideur en membrane

– **comportement en flexion :**

$$\{M\} = [D_f]\{\chi_f\} \quad (6.10)$$

Avec

$$[D_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est appelé raideur en flexion

– **comportement en cisaillement transverse :**

$$\{Q\} = [D_c]\{\gamma\} \quad (6.12)$$

Avec

$$[D_c] = Gh\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

($K = Gh\alpha$, est appelé raideur en cisaillement, paramètre α , également appelé facteur de correction de cisaillement, peut être pris égal à 5/6).

V.4.2 Matrice de rigidité d'un élément plaque à modèles en déplacement :

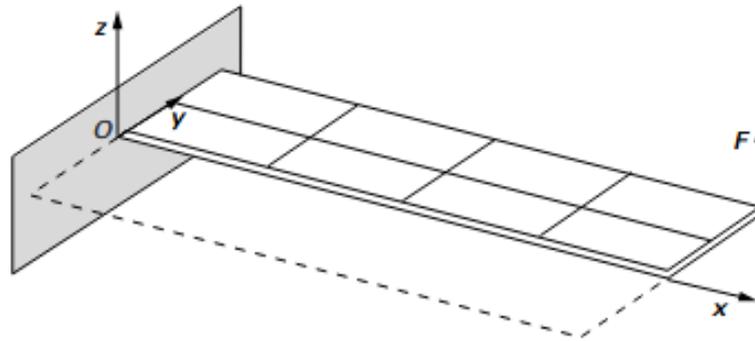


Figure V.7 Discrétisation de la demie plaque par MEF.

Les déplacements généralisés sont interpolés indépendamment en utilisant les mêmes fonctions de forme :

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) w_i \\
 \theta_x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_{xi} \\
 \theta_y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_{yi}
 \end{aligned} \quad (6.14)$$

ou

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta) w_1 + N_2(\xi, \eta) w_2 + N_3(\xi, \eta) w_3 + N_4(\xi, \eta) w_4 \\
 \theta_x(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta) \theta_{x1} + N_2(\xi, \eta) \theta_{x2} + N_3(\xi, \eta) \theta_{x3} + N_4(\xi, \eta) \theta_{x4} \\
 \theta_y(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta) \theta_{y1} + N_2(\xi, \eta) \theta_{y2} + N_3(\xi, \eta) \theta_{y3} + N_4(\xi, \eta) \theta_{y4}
 \end{aligned}$$

où $N_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions de forme d'un élément Q4 bilinéaire à quatre nœuds (Figure V.8) et on peut utiliser une approximation linéaire :

$$N(\xi, \eta) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta$$

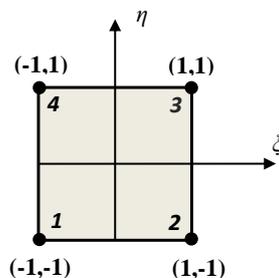


Figure V.8 Élément plaque quadrangulaire à quatre nœuds.

Les déformations sont définies comme

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_f\} &= z[B_f]\{d^e\} \\ \{\varepsilon_c\} &= [B_c]\{d^e\} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Les matrices déformation-déplacement pour les contributions de flexion et de cisaillement sont obtenues par dérivation des fonctions de forme par

$$\{\varepsilon_f\} = z \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

et

$$\{\varepsilon_c\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

On obtient alors l'énergie de déformation de la plaque

$$E_d = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon_f\}^T [D_f] \{\varepsilon_f\} + \alpha \{\varepsilon_c\}^T [D_c] \{\varepsilon_c\} \right) dV \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} E_d &= \frac{1}{2} \{d^e\}^T \int_{\Omega^e} \int_z z [B_f]^T [D_f] z [B_f] dz d\Omega^e \{d^e\} \\ &+ \frac{\alpha}{2} \{d^e\}^T \int_{\Omega^e} \int_z [B_c]^T [D_c] [B_c] dz d\Omega^e \{d^e\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

La matrice de rigidité de la plaque Mindlin est alors obtenue :

$$[k^e] = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega^e} [B_f]^T [D_f] [B_f] d\Omega^e + \alpha h \int_{\Omega^e} [B_c]^T [D_c] [B_c] d\Omega^e \quad (6.20)$$

La matrice de rigidité de la plaque Mindlin en coordonnées locales est :

$$[k^e] = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_f]^T [D_f] [B_f] |J| d\xi d\eta + \alpha h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_c]^T [D_c] [B_c] |J| d\xi d\eta \quad (6.21)$$

où $|J|$ est le déterminant de la matrice jacobienne.

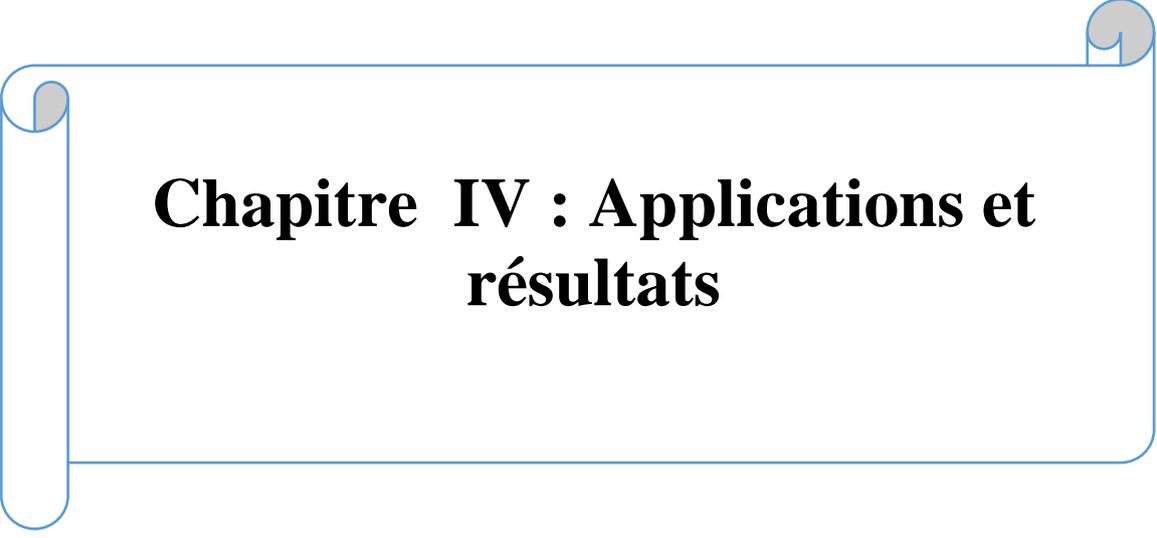
Le vecteur des forces nodales équivalentes aux forces réparties P est défini comme suit :

$$\{f^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N\{P\} |J| d\xi d\eta \quad (6.22)$$

La matrice de rigidité et les intégrales du vecteur de force sont calculées par l'intégration.

V .5 Conclusion :

Dans ce chapitre on a étudié le comportement d'un matériau composite et on a démontré que leurs propriétés varient fortement en fonction des fibres et résine utilisée ainsi que les directions de ces fibres. la température influence inévitablement les propriétés amortissantes de la structures et devrait être pris en compte dans la modélisation.



Chapitre IV : Applications et résultats

IV. Applications :

IV.1 Etude des contraintes :

Afin de valider l'approche numérique et l'analyse des poutres fissurées et renforcées par MC en utilisant la méthode des éléments finis sous MATLAB, on a réalisé 3 programmes pour le premier CAS-1 étude des contraintes d'une poutre en acier soumise à une force verticale P, le second programme pour CAS-2 pour étude des contraintes d'une poutre en acier fissurée ,par contre le troisième programme est établi pour l'étude des contraintes d'une poutre en acier fissurée et renforcée par MC.

1^{er} cas :

Une poutre en acier de longueur 18 cm et de largeur 0.05 cm et hauteur de 0.09 cm.Soumis à une force $P=1,N$ au milieu de la poutre Les propriétés mécaniques de l'acier sont : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 206 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.3$.

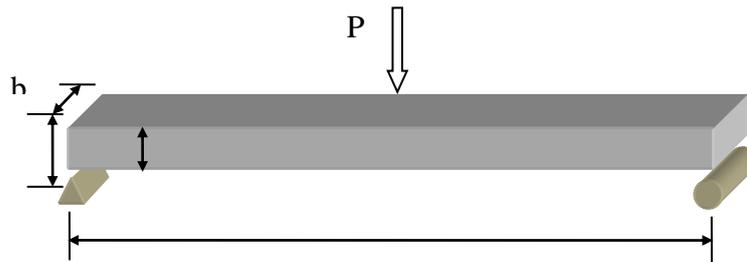


Fig. IV.1 poutre en acier

Les figures ci-dessous représentent les contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} , des 3 couches des poutres en acier

Analyse analytique du problème de flexion :

Dans cette partie nous allons calculé les efforts tranchants, les moments et les contraintes d'une poutre sur deux appuis simples sollicitée par une charge concentrée au milieu de la poutre (fig. en utilisant la méthode analytique.

Calculer la contrainte normale maximale dans une poutre rectangulaire ayant une base de **0.5 cm** et une hauteur de **0.9 cm** :

$$\sigma_f = \frac{M}{S}$$

M: Moment de flexion maximum (valeur absolue) $M = 0.45N.m$

S: Module de section =

$$S = \frac{I}{y}$$

y: Distance de l'axe neutre à l'extrémité la plus éloignée de la section.

I: Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre.

$$I_f = \frac{bh^3}{12}$$

$$S = \frac{I}{y} = \frac{bh^2}{6} = \frac{0.005 * 0.009^2}{6} = 0.067e - 6$$

$$\sigma_f = \frac{M}{S} = \frac{0.45}{0.067e - 6} = 6.7e + 6$$

et étant soumise à un moment de flexion maximal de $\sigma_y = 6.7 \text{ e}+6 \text{ Nm}$

Résultats numériques :

Les contraintes normales dans la direction y le long de la poutre sont donnés par le programme Matlab illustré par la Figure IV-2.

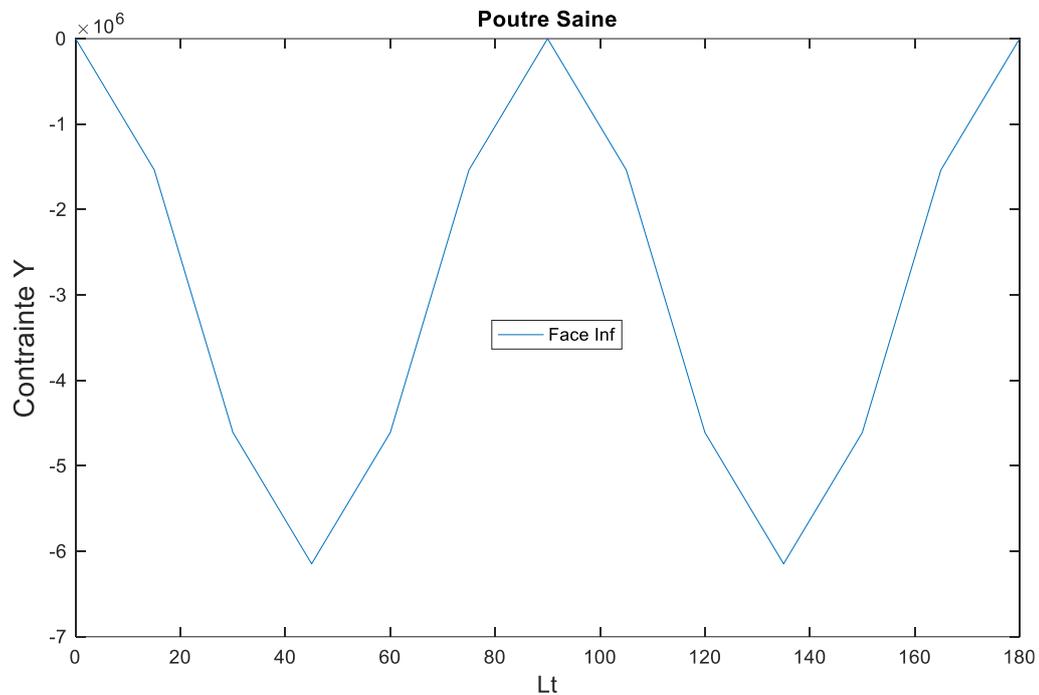


Figure IV-2 : contrainte Y pour une poutre en acier.

Validation des résultats

La validation des résultats numériques sont comparés avec les résultats analytiques d'où on obtient l'erreur comme suit :

$$Erreur = \sigma_y^{Analy} - \sigma_y^{Num}$$

$$Erreur = \frac{|6.7 * 10^7 - 6.4 * 10^7|}{6.7 * 10^7} * 100 = 4.47 \%$$

Vu que l'erreur est de l'ordre de 4.47 % très faible on peut conclure que notre programme Matlab est validé c'est-à-dire les résultats de notre programmes sont correctes.

2^{ème} cas

Etude des contraintes pour une poutre en acier fissurée au milieu de la poutre, la longueur de la fissure est de 1 cm et sa profondeur a= 0.005cm.

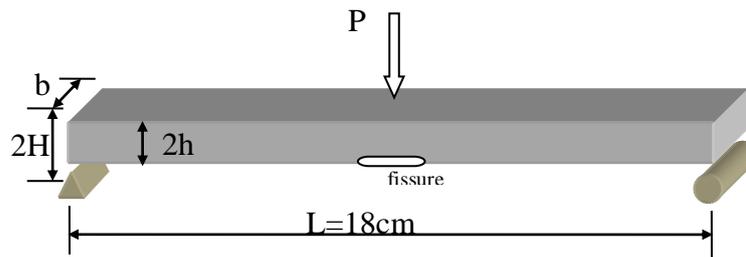


Fig. IV.3 poutre en acier fissurée

Les résultats numériques, les contraintes σ_x^{Num} , σ_y^{Num} et τ_{xy}^{Num} de la poutre fissurée sont donnés par les figures *Figure IV-4.a*, *Figure IV-4.b* et *Figure IV-4.c*, respectivement.

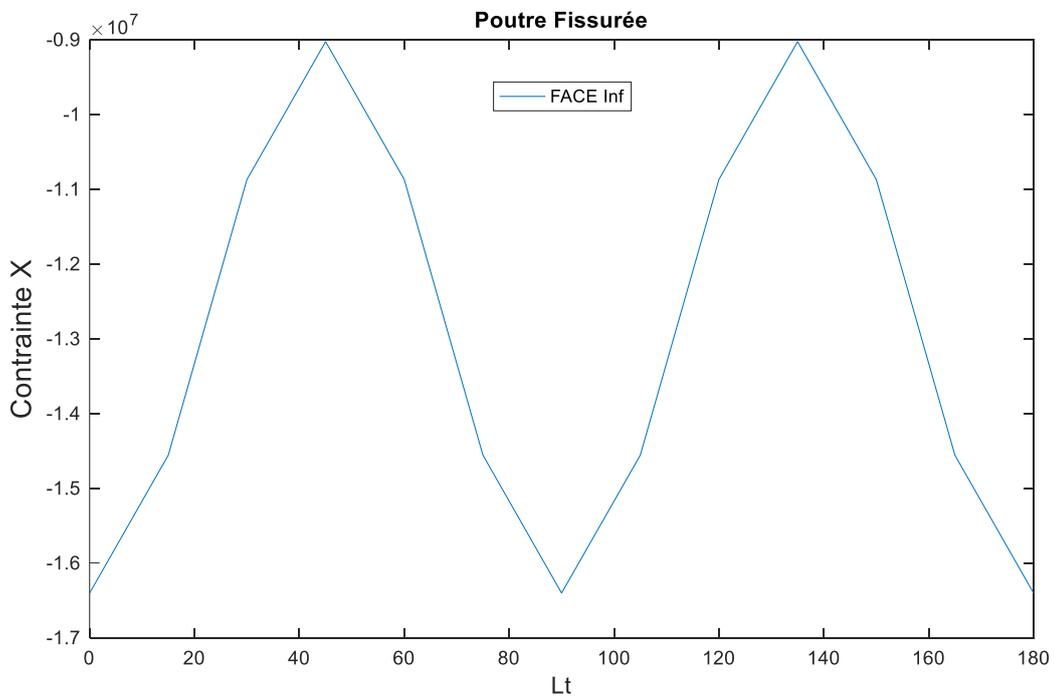


Figure IV-4.a : contrainte σ_x^{Num} de la poutre en acier fissurée.

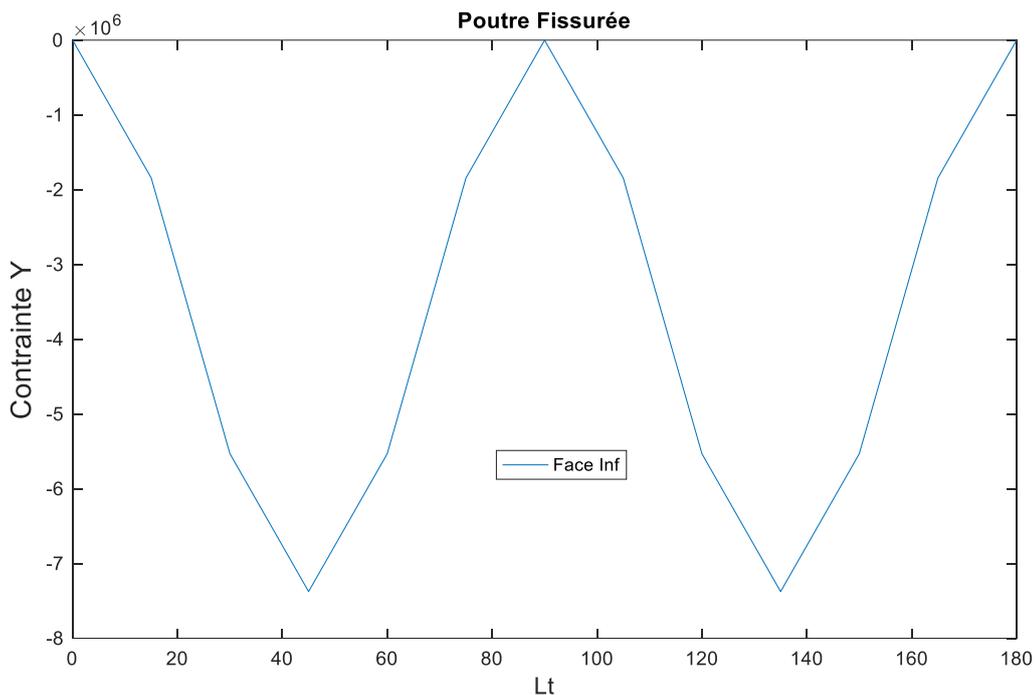


Figure IV-4 .b Contrainte σ_y^{Num} de la poutre en acier fissurée.

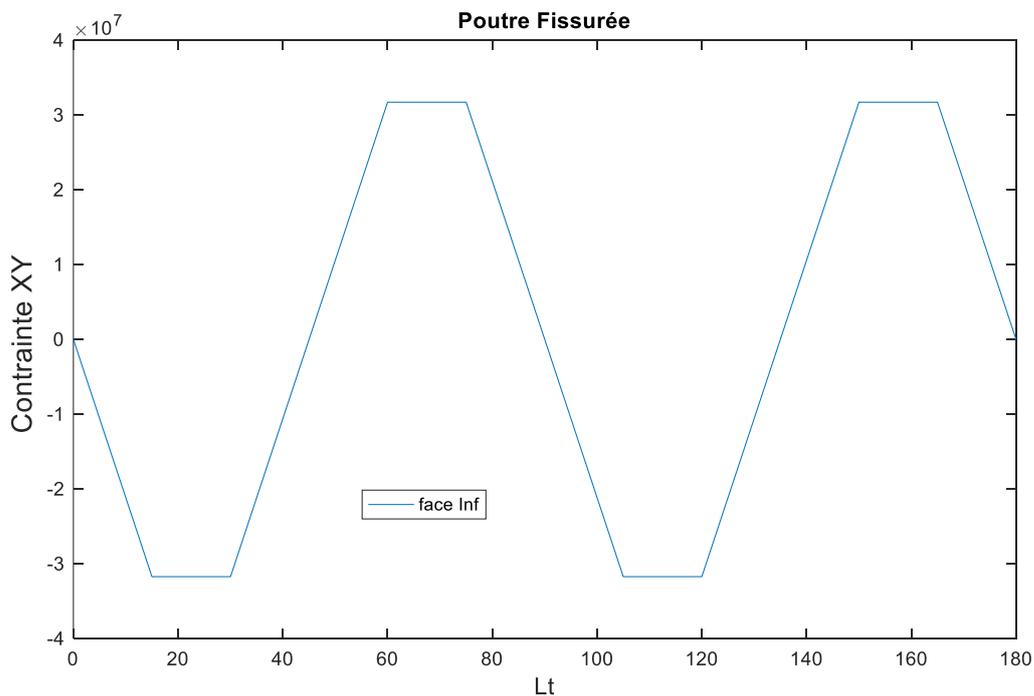


Figure IV-4.c : contrainte τ_{xy}^{Num} de la poutre en acier fissurée.

On constate une nette augmentation dans les contraintes σ_x^{Num} et τ_{xy}^{Num} pour le cas fissurée et surtout au milieu de la poutre, cette augmentation est de $0.29 * e + 7$ Pa pour σ_x^{Num} et de $0.65 * e + 7$ Pa. Ce qui est évident.

Tableau IV-1 : resultats contrainte normale σ_x^{Num} position

Contraintes $\sigma_x^{Num} * e + 7$	x (mm)	40	90	140
Poutre saine		-0.7	-1.35	-0.8
Poutre fissurée		-0.92	-1.64	-0.95

Tableau IV-2 : resultats contrainte tangentielle τ_{xy}^{Num} position.

contraintes $\tau_{xy}^{Num} * e + 7$	x (mm)	40	90	140
Poutre saine		-1	0.2	0.7
Poutre fissurée		-1.2	0.85	-0.8

On constate une nette augmentation dans la contrainte σ_y^{Num} pour le cas fissurée pour les deux cas 40mm et 140 mm cette augmentation est environ $1.2 * e + 6$ Pa. Parcontre au milieu elle est nulle car pour la flexion pure au centre de la flèche l'angle de déformation est nul.

Tableau IV-3 : resultats contrainte normale σ_y^{Num} / position.

contraintes $\sigma_y^{Num} * e + 6$	x (mm)	40	90	140
Poutre saine		-5.6	0	-5.8
Poutre fissurée		-6.8	0	-6.9

3^{eme} cas :(Fig. IV.5)

Etude des contraintes pour une poutre en acier fissurée et revêtu par une couche de matériau composite en carbone/epoxy .



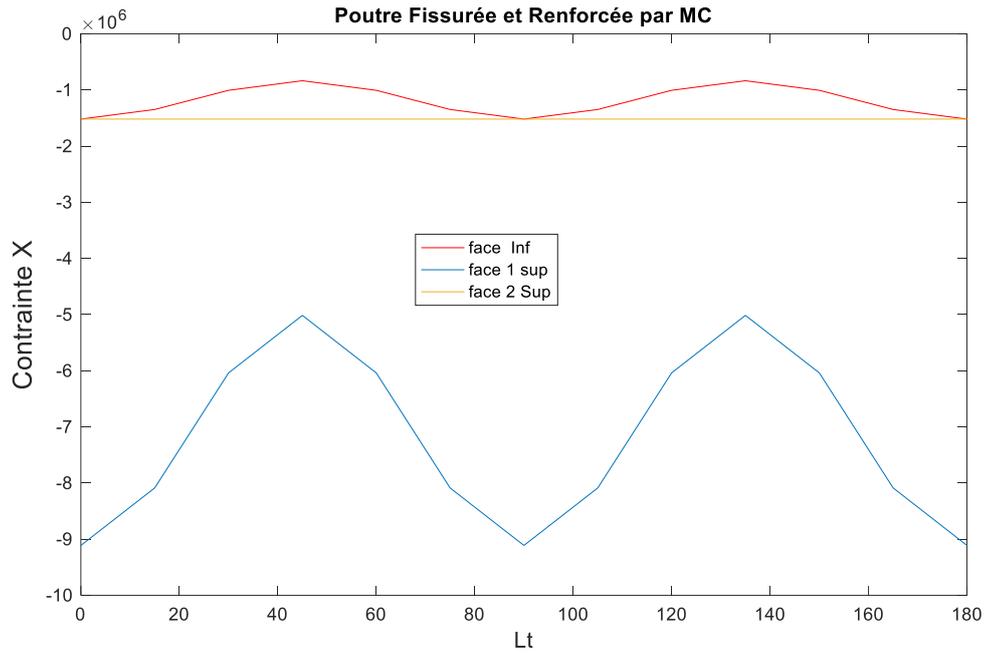
Fig. IV.5 poutre en acier renforcée

Les propriétés du matériau composite sont définies dans le Tableau IV-4:

Tableau IV-4: caractéristiques mécaniques

Modules élastique	Carbone/époxyde
E_{11} (GPa)	177
E_{22} (GPa)	10.8
G_{12} (GPa)	76
ν_{12}	0.207
ρ (kg/m ³)	1600

Les figures ci-dessous représentent les contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} , des 3 couches des poutres stratifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un taux de renforcement de 2%. Les figures ci-dessous représentent les contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} , des 3 couches d'une poutre en acier fissurée et renforcée par MC au milieu de la poutre.



IV-6 .a : : Contrainte (X) de la poutre fissurée et renforcée par MC

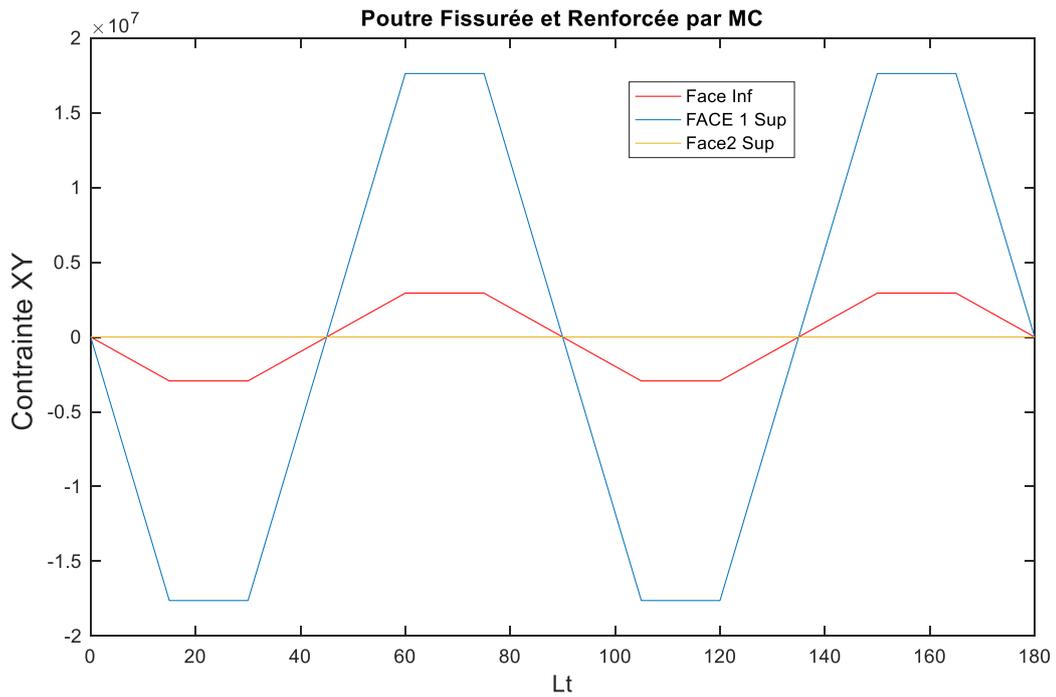


Figure IV-6 .b : : Contrainte (X Y) de la poutre en acier fissurée et renforcée par MC

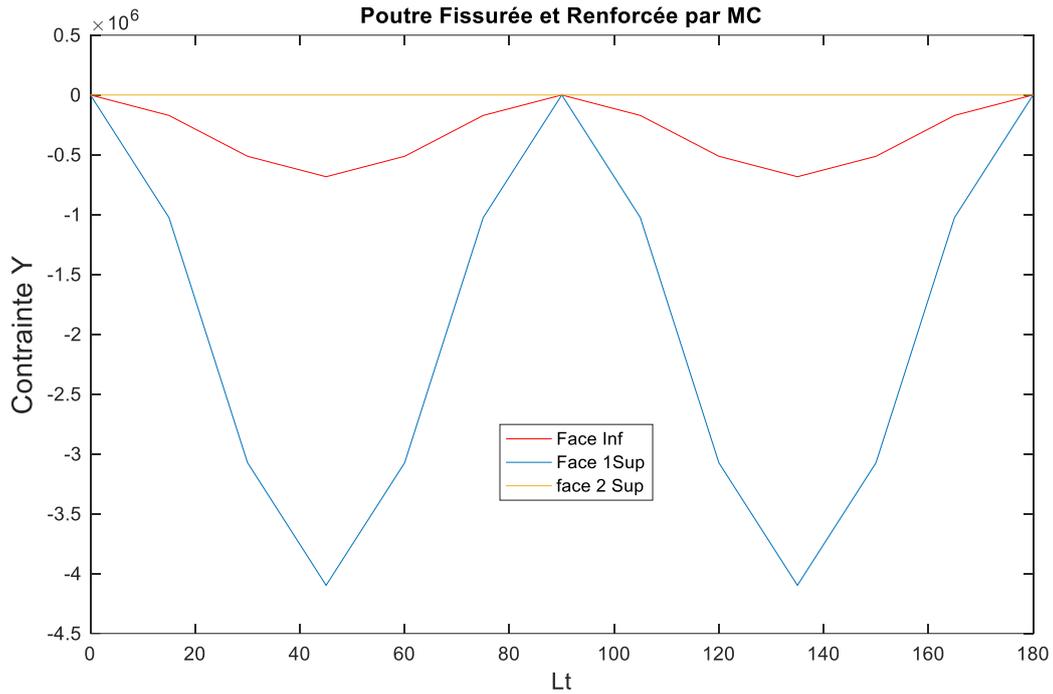


Figure IV-6.c contrainte Y de la poutre en acier fissurée renforcée.

Le renforcement des poutres fissurées par matériau composite a un effet sur le comportement mécanique des poutres sollicitées, cela est constaté dans les (Tableau (IV -2., IV-3 , IV-4) .

Tableau IV-2 : resultats contrainte normale σ_x^{Num} / position

x (mm)	0	40	90	140	180
contraintes $\sigma_x^{Num} * e + 7$					
Poutre saine	-1.35	-0.7	-1.35	-0.8	-1.35
Poutre fissurée	-0.01	-0.92	-1.64	-0.95	-1.64
Poutre fissurée renforcée	--9	--6.7	--9	--6.7	-9

Tableau IV-4 : resultats contrainte normale σ_y^{Num} / position.

x (mm)	0	40	90	140	180
contraintes $\sigma_y^{Num} * e + 6$					
Poutre saine	0	-5.6	0	-5.8	0
Poutre fissurée	0	-6.8	0	-6.9	0
Poutre fissurée renforcée	0	-3.55	0	-3.55	0

Tableau IV-3 : resultats contrainte tangentielle τ_{xy}^{Num} / position.

x (mm)	0	40	90	140	180
contraintes $\tau_{xy}^{Num} * e + 7$					
Poutre saine	0	-1	0.2	0.7	0
Poutre fissurée	0	-1.2	0.85	-0.8	0
Poutre fissurée renforcée	0	-0.59	0.01	0.59	0

On remarque que le taux de variation de contrainte de cisaillement τ_{xy} est de $-2.65 * 10^7$ MPa et pour la poutre fissurée est de $-3.2 * 10^7$ mpa avec un rapport en pourcentage entre les deux contraintes maximale 35.84% et quand on renforce la poutre fissurée par matériau composite la contrainte maximale devient $-1.7 * 10^7$ mpa et le rapport en pourcentage diminue et donne 20.75%.

IV.2 Conclusion :

Un code de calcul a été élaboré permettant de donner une étude paramétrique des contraintes et des déplacements en fonction de l'orientation des fibres et le nombre de plis ainsi des différents types de matériaux composites. Le renforcement par MC a amélioré le comportement en cisaillement de la poutre fissurée.

Annexe : Aperçu Code sous matlab

The screenshot displays the MATLAB R2016b environment. The main window shows a script editor with the following code:

```

217 epsi0kap0=E*(-1)*nm;
218
219 epsi0=epsi0kap0(1:3);
220
221
222 kap0=epsi0kap0(4:6);
223
224 % Les contraintes au niveau supérieur "s" et inférieur du premier pli "i" :
225 % fissure Kkf
226 kkf=0.2;
227
228 % CONTRAINTES DANS LE REPERE GLOBAL X-Y
229 sigma_xy_1s=qb1*(epsi0+z0*kap0); sigma_xy_1i=qb1*(epsi0+z1*kap0);
230 sigma_xy_2s=qb2*(epsi0+z1*kap0); sigma_xy_2i=qb2*(epsi0+z2*kap0);
231
232
233 % FISSURES CONTRAINTES DANS LE REPERE GLOBAL X-Y
234 sigma_xy_1sF=qb1*(epsi0+z0*kap0); sigma_xy_1iF=qb1*(epsi0+z1*kap0);
235 sigma_xy_2sF=qb2*(epsi0+z1*kap0); sigma_xy_2iF=qb2*(epsi0+z2*kap0);
236
237
238 % CONTRAINTES DANS LE REPERE LOCAL 1-2
239 sigma_12_1s=ttheta1*sigma_xy_1s; sigma_12_1i=ttheta1*sigma_xy_1i;
240 sigma_12_2s=ttheta2*sigma_xy_2s; sigma_12_2i=ttheta2*sigma_xy_2i;
241
242
243 X(jj)=THETACOMP;
244 %
245 SIGX_xy_1i(jj)=sigma_xy_1i(1);
246 SIGY_xy_1i(jj)=sigma_xy_1i(2);
247 SIGXY_xy_1i(jj)=sigma_xy_1i(3);
248 %
249 SIGX_xy_1s(jj)=sigma_xy_1s(1)*0.1356;
250 SIGY_xy_1s(jj)=sigma_xy_1s(2)*0.1356;
    
```

The workspace window on the right shows the following variables and their values:

Name	Value
A	[1.7459e+07 5.0661e+...
ans	1x13 double
Ap	[2.5000e-07 -7.2500e-...
B	[-6.9877e+03 -2.0264...
b1	0.0500
Bp	[4.6875e-04 -1.3594e-...
D	[3.7268 1.0808 2.8947...
DE	0.0427
deltatheta	15
Dp	[1.1719 -0.3398 -3.329...
E	6x6 double
e1m1	2.9900e+10
e1m2	2.0000e+10
E1St	2.9900e+10
e1m1	5.8500e+09
e2m2	2.0000e+10
E2St	5.8500e+09
Eacier	0.0032
EAcier	2.0000e+10
Ecomp	8.0000e-04
Ef	1.6000e+11
Env	6x6 double
Em	3.4500e+09
epsi0	[0.1172 -0.0340 -3.329...
epsi0kap0	[0.1172 -0.0340 -3.329...
g	9.8100
g12m1	2.4500e+09
g12m2	7.7000e+10
G12St	2.4500e+09
Gacier	7.7000e+10
Gf	6.6667e+10
Gm	1.3269e+09
Hdows	0.0040
hacier	0.0432
hcomp	8.0000e-04
i	3

Conclusion Générale

Le projet de fin d'étude est l'étape clôturant les années de formation de Master en construction mécanique, c'est sa chance de mettre en évidence ses connaissances et ses capacités théoriques dans un sujet réel et pratique touchant plusieurs domaines des sciences de l'ingénieur tels que la résistance des matériaux, la mécanique des milieux continus, la rhéologie des matériaux et la méthode des éléments finis.

Ce projet de Fin d'études nous a permis de découvrir les diverses spécificités liées à la construction mécanique et l'utilisation des outils informatiques pour la modélisation et l'analyse de cette structure mécanique.

Cependant, il était un peu difficile d'interpréter certaines règles techniques de calcul et de Vérification, mais ceci a été clarifié durant Notre stage pratique en fréquentant des gens Expérimentés et mon encadreur.

Ce PFE est l'objet d'une excellente synthèse de tout ce que On a appris le long de Notre Cours à université de Badji Mokhtar et aussi, une occasion d'initier le milieu professionnel.

On espère que ce modeste travail où on a proposé un code de calcul qui permet de donner une étude paramétrique des contraintes et des déplacements en fonction de l'orientation des fibres et le nombre de plis ainsi des différents types de matériaux composites, va contribuer à consolider les connaissances dans ce domaine et permettra aux promotions futures d'avoir un appui documentaire très utile.

Recommandations :

- Étudier d'autres types de matériaux renforcés par Matériaux Composites.
- Etude dynamique des poutres fissurées.

Bibliographie :

- **Frédéric Laurin, Les composites–De l’élaboration du matériau aux performances des structures, Aussois 2011.**
- **NedriKadda, Analyse de la vibration libre des plaques composites sur fondation élastique, Thèse de Doctorat de l’université DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 04/11/2015.**
- **ROUAM Kamila, « Elaboration, caractérisation mécanique et hygrothermique d’un stratifié renforcé par des fibres naturelles », Mémoire de Magister l’universite M’HAMED BOUGARA – BOUMERDES ; 2013/2014.**
- **«Glossaire des matériaux composites» - carma –Actualisation octobre 2006.**
- **Laurent gormet, « Généralités sur les matériaux composites », ECN, Centre Nantes 2008.**
- **Charewicz A. et Daniel I.M.,« Damage Mechanisms and accumulation in graphite epoxy Laminates ». Composite Materials fatigue and fracture», ASTM STP 907, pp. 274-297, 1986.**
- **Abdelmadjid Si Salem, « Développement d’une poutre en béton-composite : analyse expérimentale et modélisation »Thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri de Tizi- Ouzou, 2016.**
- **All content followingthis page wasuploaded by Laurent Gornet on 06 September 2016.**
- **J. LUYCKX,"Fibres de carbone," Techniques de l’Ingénieur, vol. A2210**
- **Jean-Marie Berthelot, ‘Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures’, 5e édition, Le Mans, avril 2012.**
- **D.Guillon« fibres de verre renforcement » .**
- **AMARI Belkacem02/10/2014 ; Identification des défauts de délaminage dans des Structures en matériaux composites multicouches.**
- **BERTHELOT J.M ; « Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structure ». Masson , 1992.**
- **Dossier créé avec la collaboration de " dossier pedamateriaux composites 1".**
- **Jean-Marie Berthelot, ‘Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures’, 5e édition, Le Mans, avril 2012.**
- **Jean-M Berthelot mécanique et analyse des structure 5°édition 2012 Lavoisier Paris IBBN : 978-2-7430-14507.**
- **J.-M. Berthelot, Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse.**
- **[Hamelin, 2002].**