



Faculté : TECHNOLOGIE  
Département : ELECTRONIQUE  
Domaine : SCIENCES ET TECHNIQUES  
Filière : Automatique.  
Spécialité : Automatique et système.

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master  
Thème :

**Étude et simulation de la commande optimale stochastique**

Présenté par : Naamane Alaa eddine / Hami Mohamed Reda

Encadrant : *Saidi Mohamed Larbi / Grade professeur / Université UBM Annaba*

### Jury de Soutenance :

Arbaoui Faycal	prof	UBM Annaba	Président
Saidi Mohamed Larbi	prof	UBM Annaba	Encadrant
Nom et prénom	Grade	Université	Co-encadrant
Lakel rabeH	prof	UBM Annaba	Examineur
Nom et prénom	Grade	Université	Deuxième examineur / Membre invité

Année Universitaire : 2021/2022

# Table des matières

Remercîment	
Dédicace	
Introduction générale	

## Chapitre I : Commande optimale

I.1 Introduction	1
I.2 Définition	1
I.3 Position du problème	1
I.4 Principe d'optimalité de Bellman	1
I.5 Principe du minimum de Pontriaguine	2
I.6 Equation d'Euler-Lagrange	3
I.7 Commande bang-bang	3
I.8 Commande Linéaire Quadratique	4
I.8.1 Système continu	4
I.8.1.1 Commande LQ à horizon fini	4
I.8.1.2 Commande LQ à horizon infini	5
I.8.1.3 Choix de pondération	5
I.8.2 Système discret	6
I.8.2.1 Commande LQ à horizon fini	6
I.8.2.2 Commande LQ à horizon infini	7
I.9 Exemple d'Application	8
I.9.1 cas continu	8
I.9.1.1 Application sur un moteur à courant continu	8
a. Modélisation mathématique	8
b. Paramètres de la machine utilisée	9
c. l'Application de la commande à la machine CC	9
d. Les résultats de simulation	10
I.9.2 Cas discret	11
I.9.2.1 Application sur le même exemple	11
a. les résultats de simulation	11
I.10 Conclusion	13

## Chapitre II : Observateurs (Reconstructeur d'état)

II.1 Introduction	14
II.2 l'estimateur	14
II.3 Observateur	14
II.3.1 Définition	15
II.3.2 La notion d'observabilité	15
II.3.3 Principe de fonctionnement	15
II.3.4 L'observateur de luenberger	16
II.4 Le filtre de Kalman	17

II.4.1 Définition .....	17
II.4.2 Domaines d'utilisation .....	17
II.4.3 Principe du filtre .....	17
II.4.4 Critère de Kalman .....	18
II.4.5 Avantages et Inconvénients du filtre de Kalman .....	18
A. Avantages.....	18
B. Inconvénient .....	18
II.4.6 Les limites.....	18
II.4.7 Présentation du filtre de Kalman.....	19
II.4.7.1 Formulation linéaire .....	19
II.4.7.2 Formulation linéaire .....	19
II.4.8 Fonctionnement du filtre de Kalman .....	20
II.4.9 Algorithme du filtre de Kalman .....	21
II.4.10 stabilité du filtre .....	21
II.4.11 Application du filtre de Kalman sur un MCC .....	22
II.5 Conclusion .....	25

### **Chapitre III : Commande Optimale stochastique**

III.1 Introduction .....	27
III.2 Définition .....	27
III.3 Formulation .....	27
III.4 Théorème de séparation .....	27
III.5 Structure de la commande LQG.....	28
III.6 Choix des pondérations .....	28
III.6.1 Généralités.....	28
III.6.2 Réglage de l'estimateur d'état .....	28
III.6.3 Loop Transfer Recovery.....	29
III.7 Commande LQG à temps discret.....	29
III.8 Application sur une pendule inversible .....	30
III.8.1 Description du Système.....	30
III.8.2 Modélisation du système .....	30
III.8.3 Représentation d'état du système .....	30
III.8.4 Les données numériques du système .....	31
III.8.5 Les résultats.....	31
III.9 Conclusion .....	32

Conclusion générale

Références et bibliographies

# Remerciement

Nous remercions avant tout ALLAH, qui nous a donné la force et le courage pour achever ce travail.

On tient à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de la rédaction de ce mémoire.

On voudrait dans un premier temps remercier, notre encadreur de mémoire M. SAIDI, professeur d'automatique à l'UBMA, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

On tient à témoigner toute notre reconnaissance à nos parents respectifs, pour leur soutien constant et leurs encouragements.

On adresse nos sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leur parole, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques qui ont guidé notre réflexion et ont accepté de nous rencontrer et de répondre à nos questions, durant nos recherches. On remercie également toute l'équipe pédagogique de l'UBMA. Et les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail.

# Dédicace

**Je dédie ce travail à :**

*Celle qui sont la plus chers au monde, mes parents, à qui je n'arriverai jamais à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance, pour son amour son soutien tout au long de mes études afin de faire de moi ce que je suis aujourd'hui, que **DIEU** les protège toujours.*

*A mes collègues et mes amis.*

*A toutes la famille.*

*A tous ceux qui me sont chers.*

*Naamane Alaa Eddine*

*Hami Mohamed Reda*

---

# **Introduction générale**

---

# Introduction générale

Les problèmes de commande optimale se posent au quotidien : comment arriver au plus vite à destination, comment minimiser la consommation Pour un système dynamique donnée et dont les équations sont connues.

Le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée par le calcul des variations depuis le 19ème siècle.

L'une des principales applications de commande optimale était sur les lanceurs Apollo dans les années 1960. Il convient toutefois de noter que les difficultés posées par de tels problèmes sont loin d'être entièrement résolues, comme en témoignent les conférences consacrées à la commande optimale de contrôle dans les conférences automatisées. Par conséquent, la commande optimale reste l'objet de recherches actuelles.

Dans une première partie nous nous intéresserons à la commande optimale initialement proposée et au cas des systèmes déterministe.

Dans une deuxième partie, on s'intéressera davantage aux Reconstructeur d'état (Observateurs) qui nous indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.

Ensuite, nous nous intéresserons à la commande optimale stochastique (LQG), qui permet la synthèse de correcteurs dynamiques pour des systèmes dont les états ne sont que partiellement mesurés.

Enfin, on va voir des simulations sur chaque partie pour avoir une idée sur comment fonctionne ces commandes.

---

**CHAPITRE I :**

---

**Commande optimale**

---

### **I.1. Introduction :**

En automatique, durant les deux dernières décennies plusieurs travaux ont été menés afin d'étudier la robustesse des systèmes. Toutes les techniques développées permettent une approche de la commande qui garantit un fonctionnement satisfaisant d'un processus indépendamment des incertitudes susceptibles d'agir soit au niveau du processus lui-même ou bien au niveau de son évolution. [1]

Ce chapitre est consacré à des généralités sur la commande optimale et .

### **I.2. Définition :**

La commande optimale est une théorie qui permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance ; c'est-à-dire, un problème de calcul des variations, éventuellement sous des contraintes pouvant porter sur la commande ou sur l'état du système.

La commande optimale peut être utilisée dans beaucoup d'applications telles que :

- Régulation de la température d'une pièce ou d'un four en utilisant le minimum d'énergie.
- Problème de poursuite : on souhaite que la sortie du système suive le mieux possible la consigne désirée ou prévue. Il s'agit dans ce cas de déterminer la commande qui minimise l'énergie de poursuite.

### **I.3. Position du problème :**

- Soit un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (\text{I.1})$$

Avec une condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , où  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ .

- Soit un critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (\text{I.2})$$

Le problème de la commande optimale consiste à trouver la commande  $\tilde{u}$  minimisant  $J(x_0, t_0, u)$  :

$$\tilde{u} = \min_{u \in U} J(x_0, t_0, u) \quad (\text{I.3})$$

Et la valeur optimale du critère est  $\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u})$ .

### **I.4. Principe d'optimalité de Bellman :**

La trajectoire optimale sur  $[t_0, t_f]$  est  $\tilde{u}$  et le critère optimal :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u \in [t_0, t_f]} J(x_0, t_0, u) \quad (\text{I.4})$$

Soit  $t \in [t_0, t_f]$ . Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur  $[t_0, t_f]$  contient la trajectoire optimale sur  $[t_0, t]$  avec comme condition initiale  $x_1 = x(t_1)$ . Autrement dit :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u|_{[t_0, t_1]}, x_1} \left( \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_1) \right) \quad (\text{I.5})$$

Bien que les développements suivants ne s'appuient pas directement sur ce principe, mais sur le principe du maximum, ce principe est un résultat classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la littérature.

Il permet d'obtenir une solution optimale en découpant l'intervalle et en résolvant un problème récursif.

### **I.5. Principe du minimum de Pontriaguine :**

Le principe du minimum de Pontriaguine [3][2] est ici brièvement énoncé.

Le critère de performance :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (\text{I.6})$$

On définit l'hamiltonien du système :

$$H(x, u, \rho, t) = \phi(x, u, t) + \rho^T f(x, u, t) \quad (\text{I.7})$$

où  $\rho$  est appelé vecteur d'état-adjoint.

Le principe du minimum de Pontriaguine énonce que la trajectoire optimale minimise l'hamiltonien du système. Autrement dit :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\rho}) \leq H(\tilde{x}, u, \tilde{\rho}) \quad \forall u \in U \quad (\text{I.8})$$

L'extrémité de la solution conduit à un jeu d'équations, appelées équation canoniques de Hamilton, qui régissent les dynamiques de l'état d'une part et de l'état adjoint d'autre part :

– état

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \dot{x}$$

– état adjoint

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\rho}$$

Les équations provenant des conditions dites terminales, en  $t_0$  d'une part et en  $t_f$  d'autre part sont appelées équations de transversalité :

– à l'origine

$$\left( -H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t_0} \right) \delta t_0 + \left( \rho(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} \right)^T \delta x_0 = 0$$

– à l'arrivée

$$\left( H(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \left( -\rho(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial x_f} \right)^T \delta x_f = 0$$

Si l'ensemble des commandes admissibles est ouvert (pas de contraintes de saturation sur la commande  $u$ ), on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t) = 0$$

Si  $H$  n'est pas une fonction explicite de temps, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

**Démonstration :**

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \dot{u} + \left(\frac{\partial H}{\partial \rho}\right)^T \dot{\rho} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{\rho}^T \dot{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \dot{u} + f^T \dot{\rho} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Comme  $\dot{x} = f$  et  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  alors  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

### **I.6. Equation d'Euler-Lagrange :**

L'équation d'Euler-Lagrange [2][4], bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum. En notant  $T$ , l'énergie cinétique et  $U$  l'énergie potentielle d'un système mécanique, le principe de moindre action énoncé par Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt \quad (\text{I.9})$$

Notons  $q$  les coordonnées généralisées du système. Soit  $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$  le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \quad (\text{I.10})$$

On considère un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors simplement :

$$\dot{q} = u \quad (\text{I.11})$$

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + \rho^T \dot{q} \quad (\text{I.12})$$

et le principe du minimum donne les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{\rho} \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \rho = 0 \quad (\text{I.14})$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en remplaçant  $\dot{\rho}$  grâce à la première, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (\text{I.15})$$

### **I.7. Commande bang-bang :**

Il s'agit des commandes à temps minimal avec des contraintes intervalle sur les commandes.

La commande optimale est alors toujours égale au maximum ou au minimal.

**Exemple illustratif :**

- Système linéaire à une entrée  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $x(t_0) = x_0$ .
- Cout  $J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$  (temps minimal).
- Contrainte sur l'entrée  $-1 \leq u(t) \leq 1$ .

- Contrainte sur l'état final  $x(t_f) = 0$ .
- Temps final libre (toujours le cas pour un temps minimal).

## **I.8. Commande Linéaire Quadratique :**

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour (linear quadratic regulator). Le système est linéaire et la commande est quadratique. La commande optimale est un retour d'état [2].

### **I.8.1 Systèmes continus :**

#### **I.8.1.1 Commande LQ à horizon fini :**

Soit le problème de commande optimale du système :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{I.16})$$

Avec le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) dt \quad (\text{I.17})$$

Les matrices  $Q$ ,  $R$  et  $S$  étant symétriques avec  $Q$  et  $S \geq 0$  et  $R > 0$ .

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x, u, \rho, t) = \rho^T A x + \rho^T B u + \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) \quad (\text{I.18})$$

L'hamiltonien, vérifie les conditions suivantes :

- Equation d'état adjointe :

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \rho(t) - Q x(t) \quad (\text{I.19})$$

- Condition de transversalité :

$$\rho(t_f) = S x_f \quad (\text{I.20})$$

- Absence de contraintes sur la commande :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T \rho(t) + R u(t) = 0 \quad (\text{I.21})$$

On déduit :

$$u(t) = -R^{-1} B^T \rho(t) \quad (\text{I.22})$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1} B^T \rho(t) \quad (\text{I.23})$$

Les équations (I.19) et (I.23) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé système Hamiltonien :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1} B^T \rho(t) \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (\text{I.24})$$

Ecrivons  $\rho(t) = F(t)x(t)$ , comme nous y provoque l'éq (I.20), donc, d'après l'éq (I.20), la condition finale  $\rho(t_f) = S x_f$  est une relation linéaire entre la valeur finale de l'adjoint  $\rho$  et l'état final  $x_f$  alors on peut supposer que :

$$\rho(t) = F(t)x(t) \quad (\text{I.25})$$

Avec

$$F(t_f) = S$$

De l'équation (19), on peut écrire :

$$\dot{\rho} = -(A^T F + Q)x \quad (\text{I.26})$$

Avec  $\dot{\rho} = \dot{F}x + F\dot{x}$  et l'équation d'état (16) du système, l'équation (26) s'écrit :

$$(\dot{F} + FA + A^T F - FBR^{-1}B^T F + Q)x = 0 \quad (\text{I.27})$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de Riccati suivante :

$$\dot{F} + FA + A^T F - FBR^{-1}B^T F + Q = 0 \quad (\text{I.28})$$

Avec la condition finale  $F(t_f) = S$

On montre que la condition :

$$x^T(\dot{F} + FA + A^T F - FBR^{-1}B^T F + Q)x = 0 \quad (\text{I.29})$$

S'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(x^T F x) + x^T Q x + u^T R u = 0 \quad (\text{I.30})$$

Le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) dt \quad (\text{I.31})$$

S'écrit alors :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}\left(x_f^T S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(x^T F x) dx\right) \quad (\text{I.32})$$

Soit, avec la condition de transversalité  $S = F(t_f)$  :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_0^T F(t_0)x_0 \quad (\text{I.33})$$

Le minimum du critère est donc :

$$\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2}x_0^T F(t_0)x_0 \quad (\text{I.34})$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état  $u = -K(t)x$ , avec  $K(t)$  est un gain stationnaire donné par :

$$K(t) = -R^{-1}B^T F \quad (\text{I.35})$$

### **I.8.1.2 Commande LQ à horizon infini :**

Le critère à minimiser s'écrit :

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) dt \quad (\text{I.36})$$

Ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant  $t$  (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un  $K(t)$  tel que les valeurs propres de  $A - BK$  soient à partie réelle négative). Le cout final n'apparaît pas dans le critère car l'état tend à l'infini vers zéro si le système bouclé est stable.

Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique  $u = -Kx$  où  $K$  est exprimé par l'équation (I.35) et où  $F$  vérifie l'équation algébrique de Riccati :

$$FA + A^T F - FBR^{-1}B^T F + Q = 0 \quad (\text{I.37})$$

### **I.8.1.3 Choix de pondérations :**

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations  $Q$  et  $R$  par un même scalaire laisse inchangé le gain  $K$ . En effet, soit  $P$  solution de (I.37) et soit le

nouveau problème basé sur les pondérations  $\hat{Q} = \lambda Q$  et  $\hat{R} = \lambda R$ . On vérifie que  $\hat{F} = \lambda F$  est solution de l'équation de Riccati correspondante. En effet :

$$\hat{K} = -\hat{R}^{-1}B^T F = -R^{-1}B^T F = K \quad (\text{I.38})$$

Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Ainsi, on se ramène au choix de  $n$  scalaires pour l'état et de  $p$  scalaires pour la commande. Voici une méthode simple de choix et de modification des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

- Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
- Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice  $Q$  par un scalaire  $\lambda$  (accélération avec  $\lambda > 1$  et décélération avec  $\lambda < 1$ ), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
- Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de  $Q$  correspondant aux premiers.
- Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de  $R$  leur correspondant.

Les étapes 2, 3 et 4 peuvent être répétées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier des charges.

## **I.8.2 Système discret :**

### **I.8.2.1 Commande LQ à horizon fini :**

- **Formulation du problème :**

Soit le système dynamique à temps discret défini par :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (\text{I.39})$$

Avec la condition initiale  $x(0) = x_0$  et cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \quad (\text{I.40})$$

Ce problème est plus simple que celui à temps continu car il s'agit ici d'un problème dont les inconnues sont les  $n+1$  valeurs de  $u(k)$  et non plus une fonction du temps. Il s'agit d'une minimisation de (I.40) sous les contraintes (I.39). Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = \sum_{k=0}^{k=n} \left( \frac{1}{2} x^T(k)Qx(k) + \frac{1}{2} u^T(k)Ru(k) + \rho^T(k+1)(-x(k+1) + Ax(k) + Bu(k)) \right) \quad (\text{I.41})$$

Et la solution optimale vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial u(k)} = R(k)u(k) + B^T(k)\rho(k+1) = 0 \quad (\text{I.42})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x(k)} = Q(k)x(k) - \rho(k) + A^T(k)\rho(k+1) = 0 \quad (\text{I.43})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho(k+1)} = -x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k) = 0 \quad (\text{I.44})$$

L'équation de la commande (I.42) donne :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)\rho(k+1) \quad (\text{I.45})$$

La dernière commande  $u(n)$  n'a aucun effet sur l'évolution du système sur l'horizon considéré ; sa valeur optimale est donc nulle :

$$u(n) = 0 \quad (\text{I.46})$$

On a ainsi d'après (I.42) :

$$\rho(n+1) = 0 \quad (\text{I.47})$$

Et d'après l'équation adjointe (I.43) :

$$\rho(n) = Q(n)x(n) \quad (\text{I.48})$$

Il s'agit d'un problème aux deux bouts : une condition initiale est disponible pour l'état alors que c'est une condition finale qui est disponible pour l'état adjoint. Ainsi, la résolution du problème doit se faire pour l'ensemble de la trajectoire, ce qui peut représenter une charge de calcul élevée dans le cas d'un horizon  $n$  élevé.

- **Formulation sous forme d'équation de Riccati :**

Les équations précédentes peuvent être résolues directement en  $x$  et  $\rho$ . On peut aussi adopter la démarche suivante, basé sur un changement de variable suivant pour la variable adjointe :

$$\rho(k) = F(k)x(k) \quad (\text{I.49})$$

Où  $F(k)$  est une matrice qu'il faudra déterminer ;  $F(n) = Q(n)$ . La commande  $u(k)$  vérifie alors :

$$R(k)u(k) = -B^T(k)F(k+1)x(k+1) \quad (\text{I.50})$$

$$= -B^T(k)F(k+1)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \quad (\text{I.51})$$

Et peut donc s'écrire :

$$u(k) = -K(k)x(k) \quad (\text{I.52})$$

Avec :

$$K(k) = \tilde{R}^{-1}(k)B^T(k)F(k+1)A(k) \quad (\text{I.53})$$

Où :

$$\tilde{R}(k) = R(k) + B^T(k)F(k+1)B(k) \quad (\text{I.54})$$

Il reste maintenant à déterminer la matrice  $F(k)$ . Partant de (I.43), on obtient :

$$F(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)F(k+1)x(k+1) \quad (\text{I.55})$$

$$= Q(k)x(k) + A^T(k)F(k+1)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \quad (\text{I.56})$$

En utilisant (I.52), l'équation ci-dessus se réécrit :

$$F(k)x(k) = \left( Q(k) + A^T(k)F(k+1)(A(k) - B(k)K(k)) \right) x(k) \quad (\text{I.57})$$

Comme cette équation doit être vérifiée pour tout  $x(k)$ , il est nécessaire que :

$$F(k) = Q(k) + A^T(k)F(k+1)(A(k) - B(k)K(k)) \quad (\text{I.58})$$

Ce qui s'écrit l'équation de Riccati suivante :

$$F(k) = Q(k) + A^T(k)F(k+1)A(k)$$

$$- A^T(k)F(k+1)B(k)(R(k) + B^T(k)F(k+1)B(k))^{-1}B^T(k)F(k+1)A(k) \quad (\text{I.59})$$

Sa condition finale est  $F(n) = Q(n)$  et sa résolution se fait donc à rebours.

### **I.8.2.2 Commande LQ à horizon infini :**

Cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \quad (\text{I.60})$$

Il s'agit du critère précédent où  $n$  tend vers l'infini.

On peut montrer alors que pour un système LTI le gain du retour d'état est constant. Il s'écrit :

$$K = (R + B^T F B)^{-1} B^T F A \quad (\text{I.61})$$

Où  $F$  est solution de l'équation algébrique de Riccati discrète :

$$F = Q + A^T (F - F B (R + B^T F B)^{-1} B^T F) A \quad (\text{I.62})$$

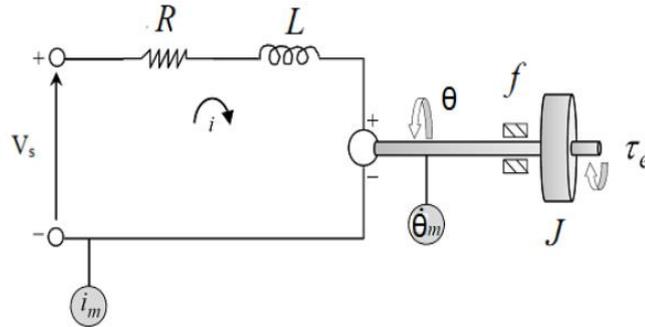
La résolution de cette équation non linéaire n'est pas triviale. Des algorithmes sont disponibles dans les Toolboxes du logiciel Matlab.

## **I.9. Exemple d'Application :**

### **I.9.1 Cas continu :**

#### **I.9.1.1 Application sur un moteur à courant continu :**

Soit un moteur à courant continu (MCC) dont le schéma technologique est donné par la figure I.1.



**Figure I.1 :** Schéma Technologique d'un MCC

Ce moteur est composé de deux parties : une partie électrique et une partie mécanique.

- **La partie électrique :** correspond à un circuit  $RL$  composé d'une source de tension  $V_s$ , une résistance électrique  $R$ , et une inductance  $L$ .
- **La partie mécanique :** est représentée par l'inertie du rotor  $J$ , de la force de frottement visqueux  $f$ . Le transfert d'énergie entre les parties électrique et mécanique est représenté par une constante  $K_e$  qui décrit la force contre électromotrice. Quant à l'architecture d'instrumentation du système, elle est composée d'un capteur de courant  $i_m$ .

#### **a. Modélisation mathématique :**

La modélisation de partie électrique et en se basant sur la loi des mailles, l'équation suivante est obtenue :

$$V_s = R i(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + e(t) \quad (\text{I.63})$$

$e(t)$  représente la force électromotrice (FEM).

La modélisation de partie mécanique en rotation est décrite par l'équation (dynamique) de l'équilibre suivante :

$$J \frac{d}{dt} \dot{\theta} = T(t) - f \dot{\theta}(t) \quad (\text{I.64})$$

$T$  représente le couple électromécanique.

La loi de Lenz permet de décrire la force électromotrice et le couple électromécanique. Ses derniers sont exprimés par :

$$\begin{cases} e(t) = K_e \dot{\theta}(t) \\ T(t) = K_T i(t) \end{cases} \quad (\text{I.65})$$

Par conséquent, à partir des équations (I. 63), (I.64) et (I.65), le modèle mathématique du MCC est donné par l'ensemble d'équation différentielle ordinaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i(t) = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{K_e}{L} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{L} V_s \\ \frac{d}{dt} \dot{\theta} = \frac{K_T}{J} i(t) - \frac{f}{J} \dot{\theta}(t) \end{cases} \quad (\text{I.66})$$

L'équation (I.66) peut être représenté par la forme matricielle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I.67})$$

$x$  représente le vecteur d'état,  $u$  est le vecteur des entrées et  $y$  est le vecteur de sortie.

Le modèle d'état du MCC sachant :  $i$  et  $\dot{\theta}$  sont les variables d'état,  $V_s$  est la variable d'entrée.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -R/L & -K_e/J \\ K_T/L & -f/J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix} V_s \\ y &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} i \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.68})$$

### **b. Paramètres de la machine utilisée :**

- Résistance de l'induit  $R = 1,5 \Omega$ .
- Inductance de l'induit  $L = 0.022 H$ .
- Inertie du rotor  $J = 0.00177 \text{ kg.m}^2$ .
- Coefficient de frottement  $f = 0.3068 \text{ N.m.s}$
- La force contre électromotrice  $K_e = 2.37$ .
- Le couple électromécanique  $K_t = 2.37$ .

### **c. L'Application de la commande à la machine CC**

Pour modéliser le MCC sous Matlab, la représentation d'états du MCC déduite à partir des équations différentielles ordinaires donnée par L'Eq (65) est utilisée où les matrices A, B, C, D du système sont :

$$A = \begin{pmatrix} -R/L & -K_e/J \\ K_T/L & -f/J \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix}; C = (0 \quad 1); D = 0$$

Nous allons appliquer la commande LQR pour asservir la vitesse du moteur CC.

Nous avons choisi les pondérations suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1.$$

On vas calculer le gain K sous matlab avec la commande suivante :

$$[K, F, Vp] = \text{lqr}(A, B, Q, R).$$

Et le vecteur gain K :

$$K = [1.05 \quad 0.0552].$$

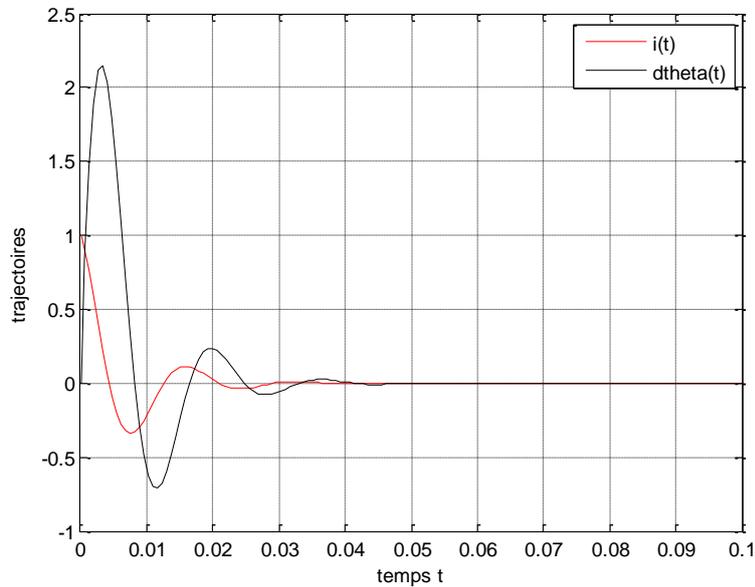
Et la loi de commande est donnée par :

$$u = -K * x.$$

$$u = -1.05 * i(t) - 0.0552 * \dot{\theta}(t).$$

**d. Les résultats de simulation :**

• **Les graphes d'états :**

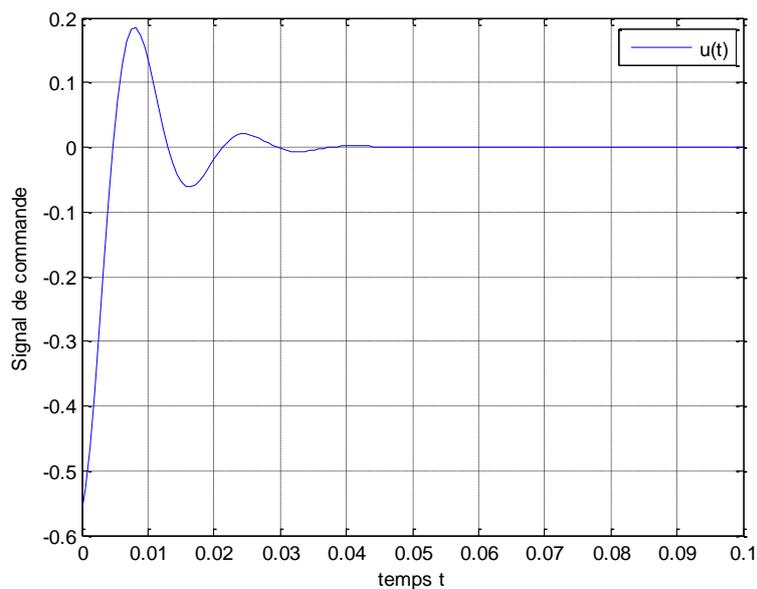


**Figure I.2:** les trajectoires  $i(t)$  et  $\dot{\theta}(t)$

**Commentaire sur la figure I.2:**

On remarque dans la figure (I.2) les graphes d'états du système converge tous les deux vers l'état de repo donc, le système est en repo et ça à partir de  $t \approx 0.05s$ .

• **Signal de commande :**



**Figure I.3 :** le signal de commande  $u(t)$

### Commentaire sur la figure (I.3) :

Le but est atteint car le system est ramener aussi rapidement que possible, l'état à sa valeur d'équilibre 0

### I.9.2 Cas discret :

#### I.9.2.1 Application sur le même exemple :

Pour modéliser le MCC en discret sous Matlab, il faut discrétiser le système et on peut utiliser la commande suivante :

$$[Ad, Bd, Cd, Dd] = c2dm(A, B, C, D, Ts, 'zoh').$$

Où, on peut utiliser les équations suivantes :

$$A_d = e^{AT_e},$$

$$B_d = \left( \int_{\tau=0}^{T_e} e^{A\tau} d\tau \right) B = A^{-1}(A_d - I)B, \text{ si } A \text{ est régulière.}$$

$$C_d = C,$$

$$D_d = D,$$

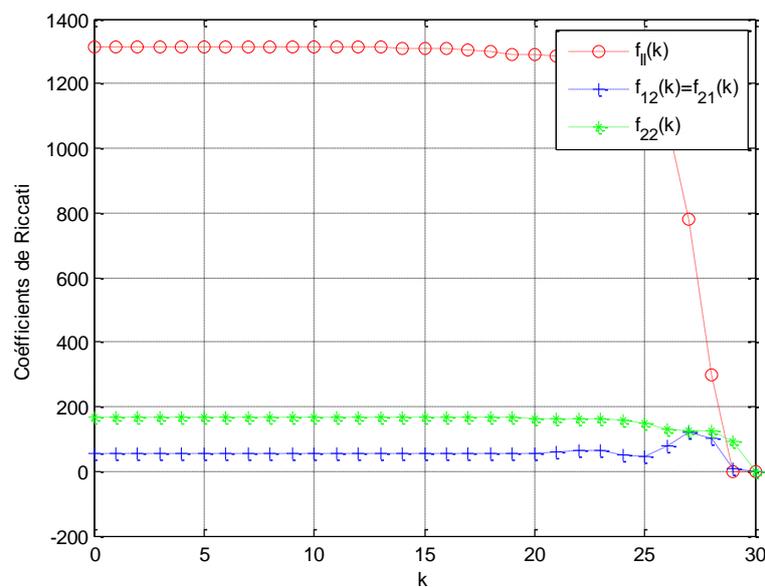
$$Q_d = \int_{\tau=0}^{T_e} e^{A\tau} Q e^{A^T\tau} d\tau,$$

$$R_d = \frac{1}{T_e} R,$$

Et  $T_s$  est le temps d'échantillonnage,[5]

#### a. Les résultats de simulation :

- Les coefficients de Riccati :



**Figure I.4:** les coefficients de Riccati  $f_{11}(k)$  et  $f_{22}(k)$  et  $f_{21}(k) = f_{12}(k)$

### Commentaire sur Figure I.4 :

La solution de l'équation est arrivée à son but de la commande car on remarque l'obtention de des 3 variables de la matrice symétrique F : f1 et f2 et f3, on remarque après une période d'échantillonnage ils restent dans le régime permanent sauf dans la partie finale chaque une des trois tend vers le zéro

- Les graphes d'états :

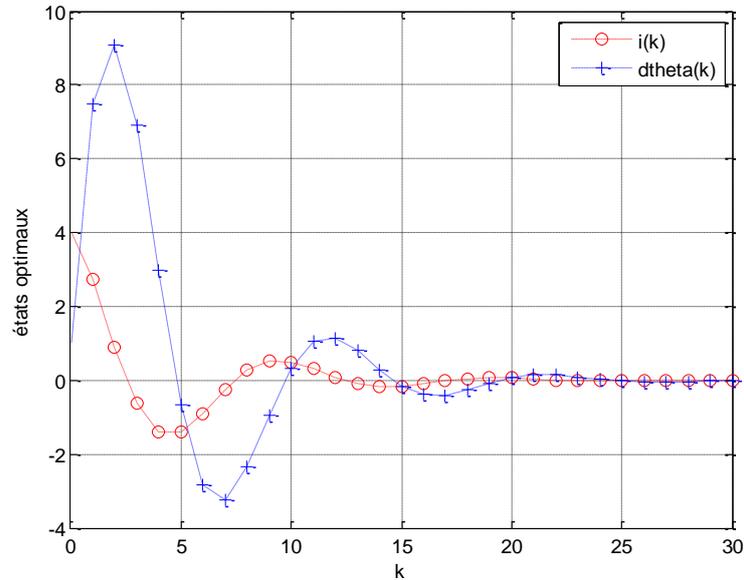


Figure I.5: les trajectoires  $i(k)$  et  $\dot{\theta}(k)$

### Commentaire sur Figure I.5 :

On remarque les graphes d'états du system converge tous les deux vers l'état de repo donc, Le system est en repo et ça à partir de l'échantillon  $k \approx 25$ .

- Signal de commande  $u(k)$ :

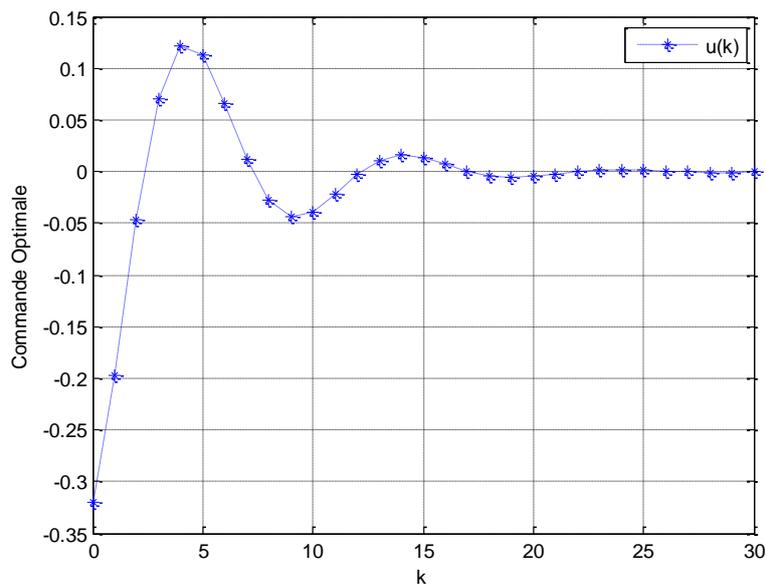


Figure I.3 : le signal de commande  $u(k)$

### **Commentaire sur Figure I.5 :**

Le but est atteint car le system est ramener aussi rapidement que possible, l'état à sa valeur d'équilibre 0

### **I.10. Conclusion :**

Dans ce chapitre, le concept de commande optimale a été introduit et expliqué. Le point traité se rapporte sur la formulation mathématique du problème de commande optimale, illustré par un exemple simple.

La résolution du problème de commande optimale revient à résoudre un problème d'optimisation dynamique où les variables de décisions sont en fonction du temps.

---

**CHAPITRE II :**

---

**Observateurs  
(Reconstructeur d'état)**

---

## **II.1 Introduction :**

Le contrôleur LQR optimal du premier chapitre repose sur des mesures à l'état complet du système. Cependant, les mesures à l'état complet peuvent être soit d'un coût prohibitif, soit d'un point de vue technologique. Impossible à obtenir, en particulier pour les systèmes de grande dimension. Le calcul la charge de la collecte et du traitement des mesures de l'état complet peut également introduire des retards qui limiteront les performances robustes.

Au lieu de mesurer l'état complet  $x$ , il peut être possible d'estimer l'état à partir des mesures bruyantes  $y$ . En fait, l'estimation à l'état complet est mathématiquement possible tant que la paire  $(A, C)$  sont observables. Le filtre de Kalman [22, 23, 24] est l'estimateur à l'état complet le plus couramment utilisé, car il équilibre d'une manière optimale les effets concurrents du bruit de mesure, des perturbations et de l'incertitude du modèle. Comme cela va être montré dans la section suivante, il est possible d'utiliser l'estimation de l'état complet à partir d'un filtre de Kalman en conjonction avec la loi de rétroaction LQR optimale à l'état complet.

## **II.2 L'estimateur :**

Un estimateur est défini comme un système dynamique dans lequel ses grandeurs d'état sont des estimations des variables d'état d'un autre système, par exemple, une machine électrique. Principalement, il y a deux façons de réaliser un estimateur : en boucle ouverte ou en boucle fermée. La différence entre ces deux méthodes est basée sur l'existence, ou non, d'un terme de correction, lié à l'erreur d'estimation, utilisé pour affiner la réponse de l'estimateur. Un estimateur en boucle fermée est connu sous le nom d'observateur.

Les estimateurs, de par leur principe, sont sensibles aux variations paramétriques. L'utilisation d'un observateur améliore la robustesse des estimations vis-à-vis des variations paramétriques et des bruits de mesure. La performance d'un observateur est liée souvent à une augmentation de sa complexité. Il faudra donc trouver un compromis afin de satisfaire une bonne précision des estimations sans trop pénaliser le temps de calcul.

Sous l'hypothèse de linéarité du modèle du processus, la structure de base de l'estimateur est toujours la même, mais sa réalisation dépendra du contexte choisi : continu ou discret, déterministe ou stochastique. [6]

## **II.3 Observateurs :**

### **II.3.1 Définition :**

Un observateur est un capteur logiciel (ou software) utilisé pour la reconstruction état du système à partir des entrées et des sorties mesurées. Les entrées d'un observateur sont les entrées et les sorties du système physique. Par contre les sorties d'un observateur sont les états estimés (Figure 1.1) ou reconstruits. [7]

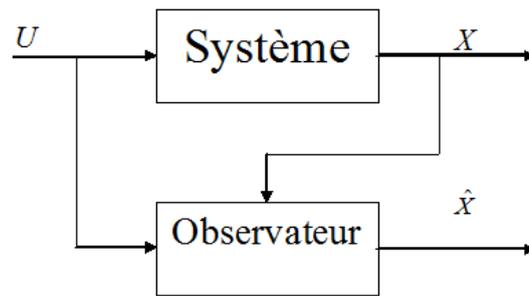


Figure II.1 : Synoptique système-observateur

### II.3.2 La notion d'observabilité :

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état d'un système, qui nous indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.

### II.3.3 Principe de fonctionnement :

La structure de l'observateur est indiquée sur la figure 1.2 Elle fait intervenir tout d'abord un estimateur fonctionnant en boucle ouverte qui est caractérisé par la même dynamique que celle du système.

La structure fonctionnant en boucle fermée obtenue par l'introduction d'une matrice de gains  $L$  permet d'imposer la dynamique propre à cet observateur.

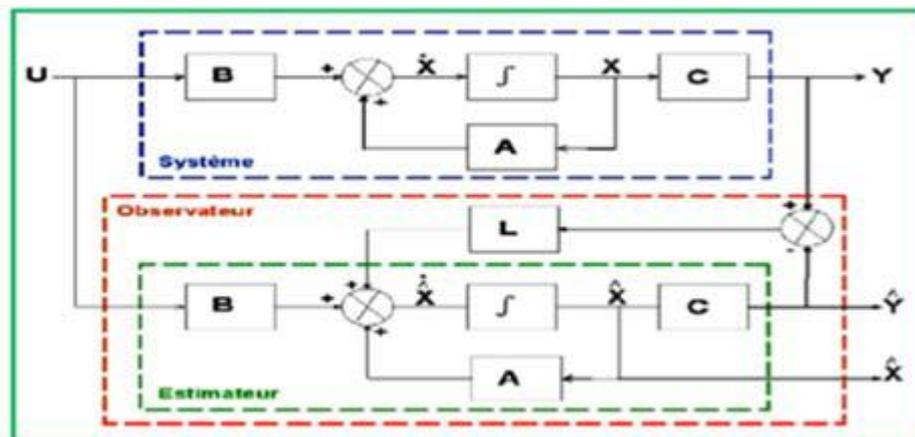


Figure II.2 : Observateur d'état d'un système

- Les différentes grandeurs mentionnées sur la figure représentent respectivement :
  - Un vecteur d'entrée  $U$  du système réel et de l'observateur.
  - Un vecteur d'état  $X$  constitué des grandeurs à observer et un vecteur de sortie  $Y$  dont les composantes sont mesurables.
  - $L$  est appelé le gain de l'observateur.

- Le dernier vecteur est comparé au vecteur équivalent donné par l'observateur pour assurer le fonctionnement en boucle fermée. [8]

### II.3.4 L'observateur de luenberger :

La structure de la représentation d'état commune pour un système continu linéaire à coefficients constants LTI (Linéaire à Temps Invariant) est donnée par l'équation d'état suivante :

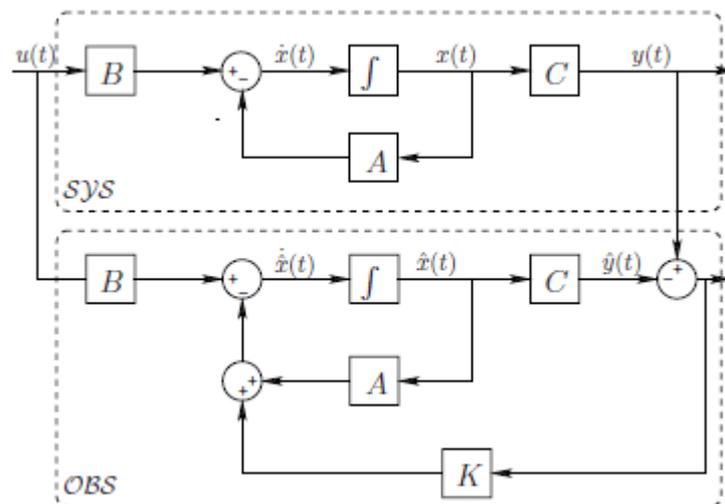
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec  $x \in R^n$  et  $y \in R^l$ , représentent respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du système dynamique.  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$  et  $C \in R^{l \times n}$  représentent les matrices constantes connues du système dynamique.  $U(t) \in R^m$  Est le vecteur d'entrée du système dynamique.

La théorie de l'observation de Luenberger utilise les techniques de placement de pôles.

L'observateur proposé (Figure II.3) est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$



**Figure II.3 :** Structure de l'observateur de Luenberger

Il s'appelle observateur de Luenberger (asymptotique), avec  $\hat{x}(t)$  l'estimé de  $x(t)$  et  $K \in R^{n \times l}$  est un gain à choisir tel que :  $\forall x(0), \hat{x}(0) \in R^n, \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$ .

Introduisons  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , l'erreur entre l'état réel  $x(t)$  et la prédiction  $\hat{x}(t)$ .

Nous avons :  $\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$ , et donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  pour toute valeur initial  $e(0)$  si et seulement si la matrice  $A - KC$  est Hurwitz, c.à.d les valeurs propres de  $(A - KC)$  sont strictement négatives.

Construire un observateur asymptotique revient donc à déterminer une matrice de gain  $K$  telle que  $(A - KC)$  soit Hurwitz.

Il suffit alors de choisir le gain  $K$  de telle sorte que les valeurs propres de la matrice  $A - KC$  soient strictement négatives, c'est-à-dire, elle est stable. Le choix de la matrice  $K$  a une influence sur la vitesse de convergence de l'erreur  $e(t)$ .

## **II.4 Le filtre de Kalman :**

### **II.4.1- Définition :**

Le filtre de Kalman est un outil mathématique qui peut être employé pour résoudre des problèmes stochastiques d'estimations à partir des mesures bruitées issues des capteurs.

Cette méthode a fait l'objet de nombreuses recherches et applications, particulièrement dans le domaine de la navigation autonome ou assistée. Son succès s'est multiplié d'une part par les progrès considérables des calculateurs et d'autre part par la simplicité et la robustesse du filtre lui-même. Ce filtre est essentiellement un ensemble d'équations mathématiques qui réalisent à chaque itération deux phases (la prédiction et la correction).

Pour chaque pas de calcul, le vecteur d'état est calculé selon un modèle d'évolution (étape de prédiction), et il est corrigé en fonction des mesures du système (étape de correction). Comme mentionné précédemment, cet estimateur est récursif [9]. Cela signifie que pour estimer l'état courant, seul l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires. L'historique des observations et des estimations n'est ainsi pas requis. Il est à noter aussi que le filtre de Kalman est limité aux systèmes linéaires.

### **II.4.2- Domaines d'utilisation :**

Le filtre de Kalman est un outil de traitement utilisé dans une large gamme de domaines technologiques tels que le traitement du signal, l'automatique le radar et les systèmes de communication. Il est également de plus en plus utilisé en dehors du domaine du traitement du signal, par exemple en météorologie et en océanographie, en finance et en navigation.

Le filtre de Kalman peut également être utilisé dans les situations où nous voulons lisser filtrer ou prédire les états d'un système dynamique et linéaire, suivant la quantité d'informations disponibles. [10]

### **II.4.3- Principe du filtre :**

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif. Cela signifie que pour estimer l'état courant d'un système, l'estimation de l'état précédent et des mesures actuelles sont nécessaires. Le principe d'un tel filtre repose sur un modèle à variables d'état basé sur deux équations [11] :

- L'équation récursive de modélisation du processus aléatoire  $x(k)$  (vecteur d'état) discret, dite équation d'état ou équation de transition.
- L'équation d'observation (ou équation de mesure) du processus  $y(k)$  (vecteur de mesure).

L'objectif est de déterminer une estimation récursive des  $x(k)$  à partir des mesure  $y(k)$  et du modèle de génération du processus.

#### **II.4.4- Critère de Kalman :**

La théorie de l'observation de Kalman nécessite, quant à elle, la résolution d'une équation de Riccati. Kalman utilise les propriétés statistiques des bruits  $w$  et  $v$  et propose la structure d'observateur suivante :

$$\hat{x} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (\text{II.3})$$

En minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $F = E[e(t)e(t)^T]$  avec  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , on obtient l'expression du gain de l'observateur :

$$K = FC^T V^{-1}$$

Où  $F$  est une matrice constante définie positive qui représente la covariance de l'erreur d'estimation.

En régime permanent, est la solution positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$AF + FA^T - FC^T V^{-1} CF + MWM^T = 0 \quad (\text{II.4})$$

On peut vérifier que la positivité de  $F$  implique la stabilité du filtre, ce qui permet éventuellement de conserver pour  $K$  sa valeur en régime permanent.

#### **II.4.5- Avantages et Inconvénients du filtre de Kalman :**

##### **A. Avantages :**

- La procuration de l'erreur de prédiction qui présente en soit un indicateur de précision.
- Son algorithme travaille dans le domaine temporel avec une nature récursive et dispose d'un estimateur optimal dans le sens des moindres carrés.
- Un autre aspect de son optimalité est l'incorporation de toute l'information disponible sur le système, les mesures et les erreurs, dans un opérateur adaptatif qui est recalé à chaque fois qu'une nouvelle mesure devient disponible.
- Le gros avantage de la méthode est de fournir à chaque itération une estimation des matrices de covariance d'erreur de mesure et d'analyse. Il faut toutefois initialiser correctement ces matrices à l'instant  $(t_0)$ , et avoir une estimation des matrices de covariance d'erreur modèle et d'erreur d'observation.

##### **B. Inconvénients :**

- Le filtre de Kalman a été développé seulement pour les modèles linéaires gaussiens.
- L'hypothèse des bruits gaussiens n'est pas essentielle pour le fonctionnement du filtre de Kalman, ce dernier approche la densité de l'état sachant l'observation (densité conditionnelle) par une densité gaussienne, déterminée par sa moyenne et sa matrice de covariance. La non linéarité du modèle peut entraîner la multimodalité de la loi conditionnelle de l'état, et ainsi rend le filtre de Kalman inadapté.

#### **II.4.6- Les limites :**

Le filtrage de Kalman est une méthode d'estimation et de prédiction puissante prenant en compte la modélisation du système. Néanmoins, ce filtre n'est pas forcément l'outil à

appliquer dans tous les cas [12]. En effet, le système doit être modélisé assez précisément afin d'obtenir un filtre efficace. Le problème provient du fait que certains systèmes sont difficilement modélisables et encore moins linéaires. Dans le cas où la modélisation est trop approximative, le filtre n'est pas assez performant et l'erreur des estimations ne convergera pas assez rapidement provoquant alors un temps de calcul trop important.

Pour pallier au problème des systèmes non linéaires un filtre de Kalman étendu a été développé et permet de prendre en compte une modélisation non linéaire. Néanmoins, cette technique a quelques défauts.

- En premier lieu, la covariance de l'erreur ne converge pas obligatoirement.

En effet, si le passage d'une estimation à une autre tend à sortir de la zone de linéarité, alors le modèle linéarisé n'est plus valable et il est possible que le filtre diverge.

- Le second défaut est son coût calculatoire plus important. En effet, de nouvelles matrices coûteuses rentrent en jeu, ce qui peut être une limite à son utilisation.

Une autre limite importante d'une telle méthode est que le filtre de Kalman permet de prendre en compte uniquement un modèle de bruit gaussien. Cette restriction limite donc l'utilisation du filtre de Kalman.

Le filtre de Kalman est donc une méthode d'estimation intéressante, mais qui n'est utilisable que lorsque l'on peut décrire assez précisément notre système. S'il est impossible de trouver une modélisation correcte du système, il est préférable de se tourner vers d'autres méthodes.

## **II.4.7- Présentation du filtre de Kalman :**

### **II.4.7.1 - Formulation linéaire :**

Les équations de base du filtre de Kalman sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k & w_k \rightarrow N(0, Q_k) \\ y_k = H_k x_k + v_k & v_k \rightarrow N(0, R_k) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Avec :

$x_k$  : Vecteur d'état à l'instant  $k$  qui inclut les quantités à estimer, de taille  $n \times 1$ .

$A_k$  : Matrice de transition. Elle décrit l'évolution du vecteur d'état de l'instant  $k - 1$  à l'instant  $k$ , de taille  $n \times n$ .

$B_k$  : Matrice de commande à l'instant  $k$ , dépend de la modélisation du système.

$H_k$  : Matrice d'observation (mesure). Elle est en fait le lien entre les paramètres du système et les mesures de taille  $m \times n$ .

$u_k$  : Vecteur représentant les commandes appliquées au système à l'instant  $k$ .

$w_k$  : Bruit de modélisation lié à l'incertitude que l'on a sur le modèle de processus.

$Q_k$  : Matrice de variances-covariances du bruit de processus à l'instant  $k$ .

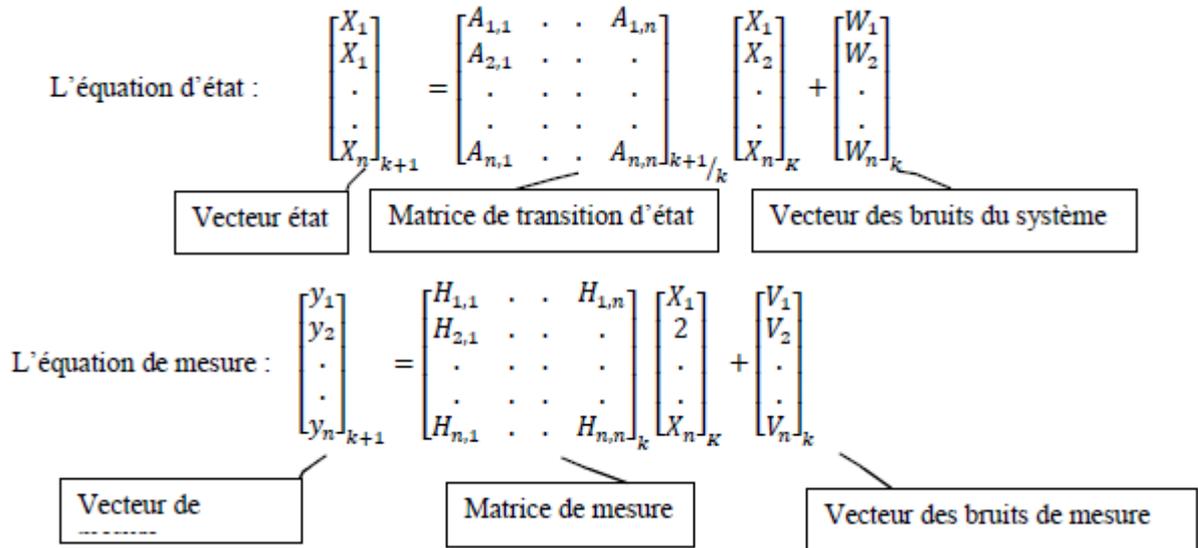
$y_k$  : Vecteur de mesure à l'instant  $k$ , de taille  $m \times 1$ .

$v_k$  : Bruit de mesure, de taille  $m \times 1$ .

$R_k$  : Matrice de variances-covariances du bruit de mesure à l'instant  $k$ .

### **II.4.7.2 - Formulation matricielle :**

Les équations de base du filtre de Kalman sont traduites sous forme des matrices réduites :



### II.4.8 Fonctionnement du filtre de Kalman :

L'estimation optimale consiste à trouver la meilleure estimation  $\hat{x}_k$  de l'état  $x_k$  en minimisant un critère qui est la variance de l'erreur d'estimation :

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (\text{II.6})$$

Le filtrage de Kalman comporte deux phases distinctes : Prédiction et mise à jour (correction). La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation courante. Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

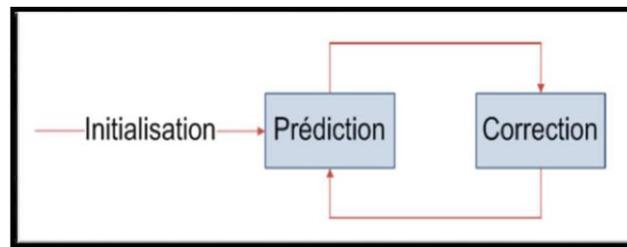


Figure II.4 : Les étapes du filtre de Kalman

- **La phase de prédiction :**

On se place à l'instant  $k$ . A cet instant, on dispose d'une estimation initiale fondée sur la connaissance du processus et des mesures jusqu'à l'instant précédent, c'est-à-dire  $k - 1$ . Cette estimation est appelée estimation à priori.

Si on notera  $\hat{x}_{k/k-1}$  l'estimation d'état à priori, donc l'erreur à priori est donnée par :

$$e_{k/k-1} = x_k - \hat{x}_{k/k-1} \quad (\text{II.7})$$

Les équations de la : correction sont :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} + B_{k-1} u_{k-1} \\ P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

- **La phase de mise à jour (correction) :**

Nous allons, maintenant, utiliser la mesure  $y_k$  pour corriger l'estimation à priori  $\hat{x}_{k/k-1}$  et obtenir l'estimation à posteriori  $\hat{x}_{k/k}$

L'erreur à posteriori est :

$$e_{k/k} = x_k - \hat{x}_{k/k} \quad (\text{II.9})$$

Les équations de la phase de correction sont :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \\ P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$I$  : est la matrice identité de même taille que  $P_{k/k-1}$ .

Gain de Kalman optimal :

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (\text{II.11})$$

#### **II.4.9 Algorithme du filtre de Kalman :**

On base sur les cinq équations fondamentales de filtre, Les différentes étapes du calcul sont les suivantes :

##### **1. Initialisation (conditions initiales) :**

Lors de l'exécution de l'algorithme il est nécessaire d'initialiser les grandeurs suivantes :

- Le Vecteur d'état initial,
- La Matrice de covariance d'erreur associée au vecteur d'état initial,
- La Matrice de covariance des bruits du système,
- La Matrice de covariance des bruits de mesures,
- La Matrice de transition d'état,
- La Matrice de mesure

##### **2. Calcul de l'estimé $\hat{x}_{k/k-1}$ et de la matrice de covariance $P_{k/k-1}$ à partir des mesures disponibles à l'instant $k - 1$ :**

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} + B_{k-1} u_{k-1} \\ P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{cases}$$

##### **3. Calcul du gain de Kalman :**

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$

##### **4. Mise à jour de l'estimation :**

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1})$$

##### **5. Calcul de la matrice de covariance de l'erreur :**

$$c = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \quad (\text{II.12})$$

##### **6. Préparation du pas suivant :**

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k \\ P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + Q_k \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

#### **II.4.10 Stabilité du filtre :**

Un filtre optimal n'est pas automatiquement stable donc sa stabilité doit être prouvée.

On dit qu'il y a divergence du filtre, quand l'estimation qu'il nous fournit est entachée d'erreurs qui deviennent de plus en plus importantes. Le filtre devient alors instable et donc insatisfaisant. Le critère de convergence est donné par la matrice de covariance  $P_k$  (plus précisément par sa trace) qui doit être définie positive et minimale à la fin de la dernière itération. Elle doit donc converger vers le zéro au fur et à mesure que l'on avance dans le calcul sans pour autant lui être inférieure. [9]

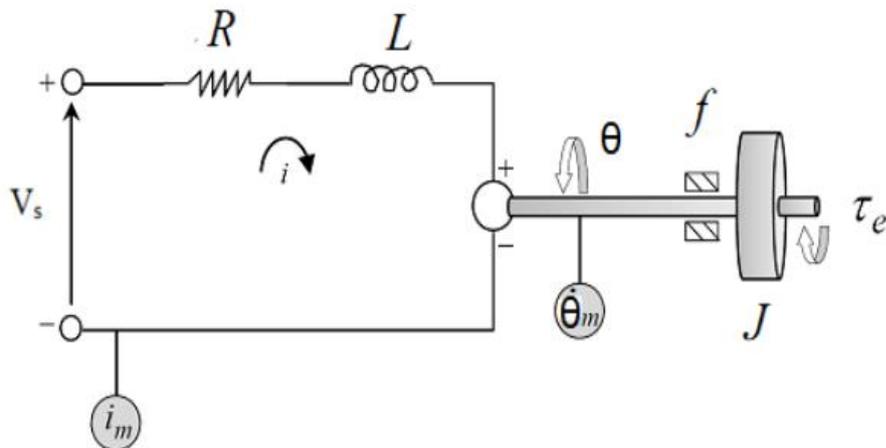
Les problèmes de stabilité du filtre sont reliés à la connaissance exacte des matrices  $P_0, F_k, H_k, Q$  et  $R$  et se traduisent par le fait que l'algorithme donne l'état erroné qui peut bien fonctionner à travers quelques données, mais qui n'est plus optimal pour longtemps. A ce moment,  $P_k$  ne mesure plus exactement la variance de l'erreur de l'estimation, et on assiste à une progression de l'erreur de l'estimation du vecteur  $x_k$  dans le temps.

Ce problème peut être dû au fait que le modèle a été utilisé d'une manière erronée pouvant être engendrée par une mauvaise estimation des paramètres, comme ça peut être le résultat d'une simplification du modèle lui-même qui gère la dynamique du système. Il peut être accentué, quand les termes de bruit dans l'équation d'état du système, ou celle de mesure deviennent trop petits. Dans ce cas, la covariance de l'erreur devient tellement petite que le gain devienne lui aussi petit et par conséquent, les observations qui viennent au fur et à mesure, ont un effet minime sur l'estimation.

#### **II.4.11 Application du filtre de Kalman sur un MCC :**

##### **i. Description d'un moteur à courant continu :**

Soit un moteur à courant continu (MCC) dont le schéma technologique est donné par la figure 1.1.



**FigureII.5 :** Schéma Technologique d'un MCC

Ce moteur est composé de deux parties : une partie électrique et une partie mécanique.

**La partie électrique :** correspond à un circuit  $RL$  composé d'une source de tension  $V_s$ , une résistance électrique  $R$ , et une inductance  $L$ .

**La partie mécanique :** est représentée par l'inertie du rotor  $J$ , de la force de frottement visqueux  $f$ . Le transfert d'énergie entre les parties électrique et mécanique est représenté par une constante  $K_e$  qui décrit la force contre électromotrice.

Quant à l'architecture d'instrumentation du système, elle est composée d'un capteur de courant  $i_m$ .

## ii. Modélisation mathématique :

La modélisation de partie électrique et en se basant sur la loi des mailles, l'équation suivante est obtenue :

$$V_s = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + e(t) \quad (\text{II.14})$$

$e(t)$  Représente la force électromotrice (FEM).

La modélisation de partie mécanique en rotation est décrite par l'équation (dynamique) de l'équilibre suivante :

$$J \frac{d}{dt} \dot{\theta} = T(t) - f \dot{\theta}(t) \quad (\text{II.15})$$

$T$  Représente le couple électromécanique.

La loi de Lenz permet de décrire la force électromotrice et le couple électromécanique. Ses derniers sont exprimés par :

$$\begin{cases} e(t) = K_e \dot{\theta}(t) \\ T(t) = K_T i(t) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Par conséquent, à partir des équations (62), (63) et (64), le modèle mathématique du MCC est donné par l'ensemble d'équation différentielle ordinaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i(t) = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{K_e}{L} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{L} V_s \\ \frac{d}{dt} \dot{\theta} = \frac{K_T}{J} i(t) - \frac{f}{J} \dot{\theta}(t) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

L'équation (65) peut être représenté par la forme matricielle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

$x$  Représente le vecteur d'état,  $u$  est le vecteur des entrées et  $y$  est le vecteur de sortie.

Le modèle d'état du MCC sachant :  $i$  et  $\dot{\theta}$  sont les variables d'état,  $V_s$  est la variable d'entrée.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{i} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -R/L & -K_e/J \\ K_T/L & -f/J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix} V_s \\ y &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} i \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

$i$  Représente le courant et  $\dot{\theta}$  représente la vitesse.

## iii. Paramètres de la machine utilisée :

- Résistance de l'induit  $R = 2,581 \Omega$ .
- Inductance de l'induit  $L = 0.028 H$ .
- Inertie du rotor  $J = 0.02215 kg.m^2$ .
- Coefficient de frottement  $f = 0.002953 N.m.s$
- La force contre électromotrice  $K_e = 1.0113$ .
- Le couple électromécanique  $K_t = 1.0113$ .

## iv. Application du filtre du Kalman sur un MCC :

Pour l'application, nous écrirons le modèle de la MCC comme:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + v \end{cases}$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -K_e/J \\ K_T/L & -f/J \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} i(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La variance du bruit de mesure est prise égale à 0.1.

Pour le calcul du filtre de Kalman sous Matlab nous utiliserons la commande :

$$[Kf, P, E] = lqe (A, W, C, W, V)$$

Où

$$Kf = (lqr (A^{\wedge}, C', W, V))'$$

Avec  $W = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $V = 0.1$ .

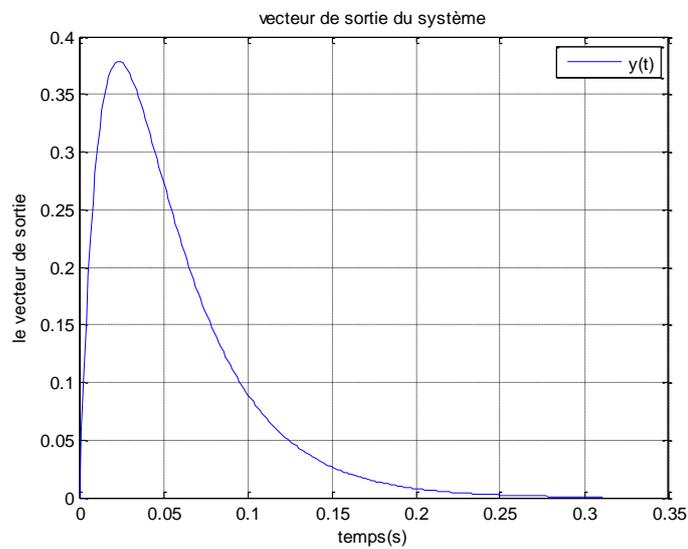
Donne le vecteur de gain de Kalman :

$$Kf = \begin{bmatrix} -0.0108 \\ 0.0399 \end{bmatrix}$$

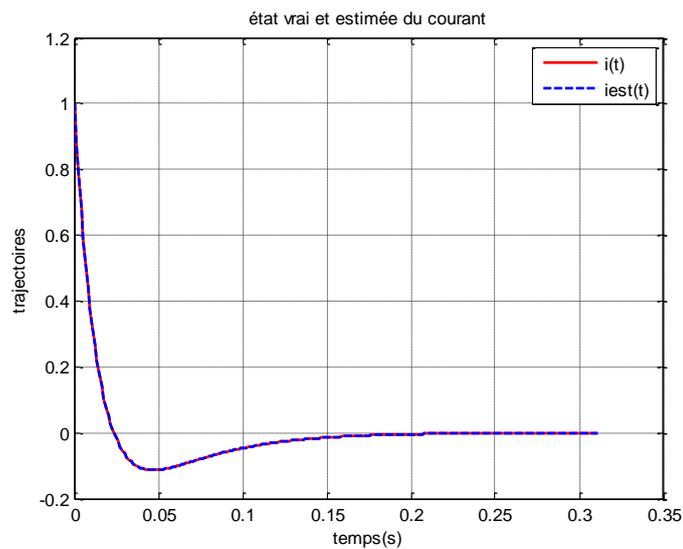
Et les valeurs propres du filtre de Kalman :

$$E = \begin{bmatrix} -67.8025 \\ -24.5492 \end{bmatrix}.$$

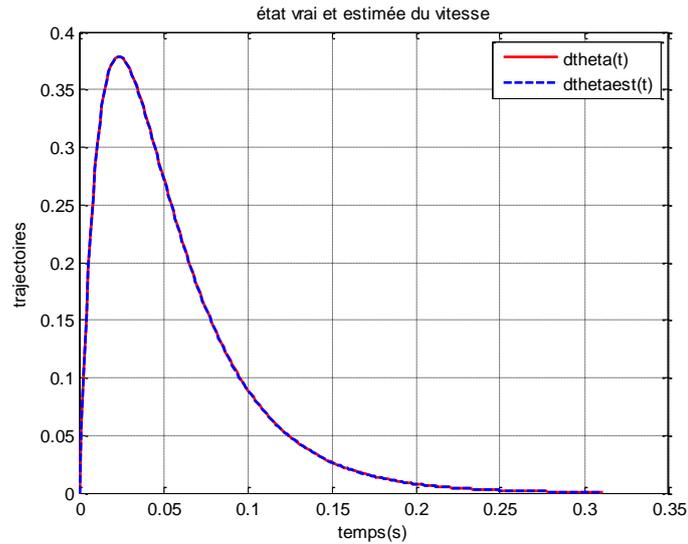
**v. Les résultats :**



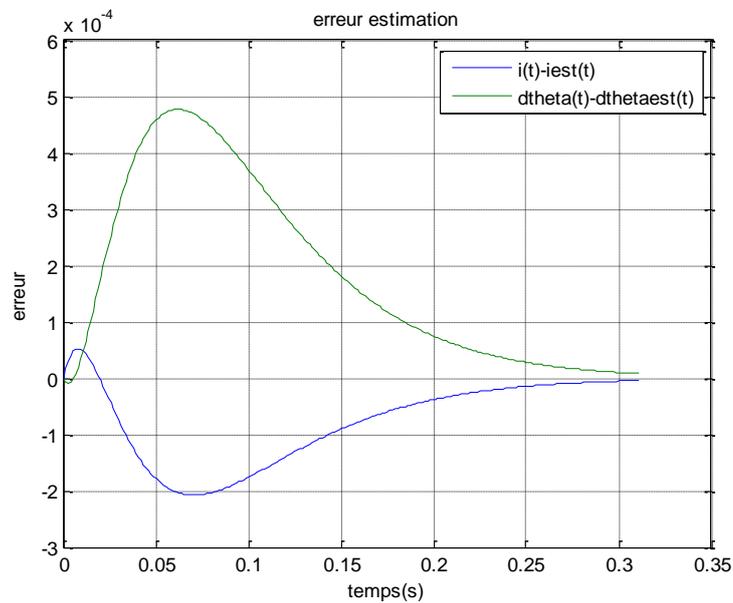
**Figure II.6 :** le vecteur de sortie.



**Figure II.7 :** Estimation du courant.



**Figure II.8 :** Estimation de la vitesse.



**Figure II.9 :** l'erreur d'estimation.

**Commentaire :**

Les courbes de l'estimation du courant et l'estimation de la vitesse sont très proches des courbes réelles. Ceci montre l'efficacité du filtre de Kalman dans la reconstruction d'état.

**II.5 Conclusion :**

A défaut de disponibilité de capteurs pour réaliser des mesures sur les systèmes linéaires déterministes, l'utilisation de l'observateur de Luenberger est très souhaitable.

La synthèse de ce type d'observateur est basée sur l'utilisation des techniques de placement des pôles.

Le filtre de Kalman est un outil essentiel pour les ingénieurs pour résoudre les problèmes de filtrage. C'est une version moderne et probabiliste de la méthode des

moindres carres, le filtre de Kalman concerne essentiellement les systèmes stochastique linéaires.

On considère que le modèle est linéaire, avec un bruit additif Gaussien et l'observation est une fonction linéaire de l'état entachée d'un bruit additif gaussien.

Le filtre de Kalman est un algorithme d'équations récurrentes optimales qui sont faciles à utiliser en calcul automatique et dont les deux équations de base regroupent toute l'information disponible.

---

# **CHAPITRE III**

---

## **Commande Optimale Stochastique**

---

### **III.1 Introduction :**

Par rapport à la commande LQ, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Développée au début de la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariables. De ce fait, elle a connu un grand succès comme en témoigne les nombreuses publications sur le sujet. Depuis la fin du 20<sup>ème</sup> siècle, la commande  $H_\infty$  apparaît comme un sérieux concurrent pour l'asservissement robuste des systèmes multivariables. Néanmoins, la commande LQG n'en demeure pas moins un standard industriel.

### **III.2 Définition :**

La Commande linéaire quadratique gaussienne dite commande LQG est une méthode qui permet de calculer le gain d'une commande par retour d'état dans un souci particulier de réduire les bruits blancs, et aussi réunit un contrôleur LQ (Linéaire Quadratique) et un estimateur de Kalman pouvant être calculé indépendamment suivant le principe de séparation. La commande LQ garantit une certaine robustesse de la boucle fermée, ce qui n'est pas le cas de la boucle LQG.

### **III.3 Formulation :**

Soit le système dynamique stochastique d'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v \\ y = Cx + w \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où le bruit d'état  $v$  et le bruit de mesure  $w$  sont des bruits blancs centrés de variance  $E\{vv^T\} = V \geq 0$  et  $E\{ww^T\} = W \geq 0$ . Le problème LQG consiste en la minimisation du critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{t_f} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \right\} \quad (\text{III.2})$$

Où  $Q \geq 0$  et  $R > 0$ . Du fait des entrées de bruit  $v$  et  $w$ , les grandeurs  $u$  et  $x$  sont des grandeurs stochastiques. Comme critère, il est ainsi naturel de s'intéresser à l'espérance d'une intégrale. Comme pour la commande LQ, il est possible de considérer des critères à temps fini

### **III.4 Théorème de séparation :**

La solution de ce problème de commande optimale de processus stochastique est bien connue sous le nom de théorème de séparation. Ce théorème énonce que la solution du problème est composée de deux parties :

- un observateur de Kalman permettant de donner l'estimée  $\hat{x}$  et  $x$  qui est non biaisée et à variance minimale,
- la commande par retour d'état  $u = -K\hat{x}$  à appliquer à  $\hat{x}$  où  $K$  est calculé en considérant le problème LQ correspondant (en enlevant  $v$  et  $w$  de l'équation d'état et  $E$  dans le critère).

Ce théorème est intéressant dans la mesure où il donne la solution du problème complet comme étant la réunion des solutions de deux problèmes plus simples et déjà résolus : celui de la commande LQ et celui de l'estimation de Kalman. Pour une démonstration de ce théorème. [13][14]

### **III.5 Structure de la commande LQG :**

L'estimée optimale  $\hat{x}$  est donnée par l'observateur d'équation d'état :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (\text{III.3})$$

où le gain de Kalman est :

$$L = FC^T W^{-1} \quad (\text{III.4})$$

avec F la solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$FA^T + AF - FC^T W^{-1} CF + V = 0 \quad (\text{III.5})$$

La commande étant donnée par  $u = -K\hat{x}$ , on peut réécrire les équations de la commande d'entrée y et de sortie u :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly \\ u = -K\hat{x} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Le suivi d'une consigne  $y^*$  se fera par la loi de commande  $u = C(s)(y^* - y)$  où la fonction de transfert du correcteur est :

$$C(s) = K(sI - A + BK + LC)^{-1}L \quad (\text{III.7})$$

Ses équations d'état sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + L\epsilon \\ u = -K\hat{x} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

où  $\epsilon = y^* - y$ . Notons que ce correcteur LTI a le même ordre que le processus.

### **III.6 Choix des pondérations :**

#### **III.6.1 Généralités :**

Le réglage du correcteur LQG nécessite la donnée de quatre matrices de pondération : Q et R pour le retour d'état ; V et W pour l'estimateur. La méthode de réglage la plus simple repose sur un réglage séparé : régler V et W de sorte que l'état soit 'bien' reconstruit et régler Q et R pour avoir un 'bon' retour d'état. Si les dynamiques de la régulation sont relativement lentes devant celles de l'observation, on peut supposer que l'état est parfaitement connu du point de vue du retour d'état et la commande sera robuste (marge de module égale à 1). Si cette hypothèse n'est pas respectée, et ce sera le cas dès que vous souhaitez obtenir un régulateur avec des dynamiques élevées, la robustesse n'est plus assurée. La méthode de réglage des pondérations Q et R du retour d'état vue au paragraphe précédent reste valable. Abordons la question du réglage de l'estimateur avant de présenter les méthodes de recouvrement du gain destinées à rendre robuste la commande LQG.

#### **III.6.2 Réglage de l'estimateur d'état :**

L'estimateur d'état s'appuie sur la commande u et sur la mesure y du système pour donner l'estimée de l'état la plus plausible, compte-tenu des incertitudes et bruits affectant le modèle et la mesure.

Une première approche du réglage du filtre concerne le cas où l'hypothèse de départ sur le modèle est respectée ; c'est-à-dire que le seul défaut du modèle est d'être affecté par des

signaux stochastiques blancs. Dans ce cas, le réglage se fera directement par une évaluation des variances des bruits.

Evaluer le bruit de mesure  $w$  en observant  $y$  est direct ; ce qui n'est pas le cas du bruit d'état  $v$ . Ce bruit peut être attribué à la commande  $u$  en choisissant  $V = BV_uB^T$ , avec  $V_u$  la variance du bruit de mesure.

Cependant, la principale source de bruit d'état d'un modèle provient généralement des erreurs de modélisation qui sont déterministes et non stochastiques. Néanmoins ces erreurs de modélisation sont généralement mal connues et il n'est pas aberrant d'en tenir compte globalement grâce à un terme stochastique. La validation du filtre de Kalman peut alors se faire en simulation en introduisant des erreurs sur le modèle telles que des variations sur ses paramètres.

### **III.6.3 Loop Transfert Recovery :**

La présence d'un observateur fait que les propriétés de robustesse du correcteur LQ ne sont plus valables [15]. Les méthodes de Loop Transfert Recovery (LTR ou en Français recouvrement du transfert de la boucle) consistent à modifier les conditions de la synthèse afin de se rapprocher du transfert qui serait obtenu avec un retour d'état LQ. Si ce transfert est obtenu, la robustesse est alors assurée. Depuis les premiers travaux de Doyle et Stein en 1981 [16], de nombreux travaux ont été menés sur ce sujet [17, 18, 19]. C'est cette première approche qui est présentée ici ; elle est également présentée dans [20]. Elle a l'inconvénient de ne pas convenir aux systèmes à déphasage non-minimal. Des travaux ultérieurs se sont attachés à ce type de système [21].

La méthode de recouvrement repose sur l'écriture de la matrice de covariance  $V$  de la forme :

$$V = V_0 + q^2BB^T \quad (\text{III.9})$$

On montre que le gain de la boucle ouverte  $C(s)G(s)$  tend vers  $K(sI - A)^{-1}B$ , celui du régulateur LQ, lorsque  $q$  tend vers l'infini. Ainsi, à partir d'un correcteur initial reposant sur les pondérations  $V_0$  et  $W$ , on augmente petit-à-petit  $q$  jusqu'à obtenir la robustesse suffisante.

Une approche duale consiste à retoucher le gain du retour d'état en choisissant la matrice de pondération  $Q$  de la forme :

$$Q = Q_0 + q^2C^TC \quad (\text{III.10})$$

La méthode reste la même : on augmente  $q$  jusqu'à obtenir la robustesse désirée. Dans tous les cas, l'augmentation de la robustesse se fait au détriment des performances et un compromis doit être trouvé.

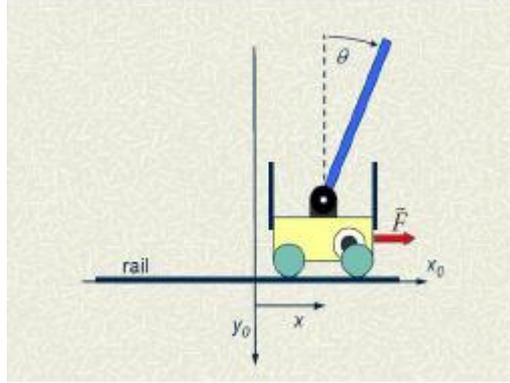
### **III.7 Commande LQG à temps discret :**

A l'image de la commande LQG à temps continu, la version à temps discret consiste en la combinaison d'un filtre de Kalman à temps discret et d'un retour d'état. La méthode LTR s'applique également.

### III.8 Application sur une pendule inversible :

#### III.8.1 Description du système :

Le système auquel on va s'intéresser est le système mécanique représenté par la figure suivante :



**Figure1.1 :** Schéma de l'ensemble pendule-chariot.

Il s'agit d'un système composé d'un chariot et d'un pendule.

Le but de cette application consiste à asservir la position du chariot tout en maintenant le pendule inversé dans sa position verticale.

#### III.8.2 Modélisation du système :

L'ensemble chariot-pendule peut se mettre sous la forme de deux équations différentielles non linéaires suivantes :

$$\left(\frac{ml^2}{4} + J\right) \ddot{\theta} + \frac{ml}{2} (\ddot{x} \cos(\theta) - g \sin(\theta)) = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$(M + m)\ddot{x} + \frac{ml}{2} (\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) = F(t) \quad (\text{III.12})$$

Si on se limite aux petites variations de  $\theta$  autour du point de fonctionnement  $\theta_0 = 0$ , correspondant à la position verticale de la barre, on peut écrire :  $\{\cos(\theta) \approx 1, \sin(\theta) \approx \theta\}$  et on peut également simplifier l'expression suivante :  $\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \approx \ddot{\theta}$

On obtient donc l'équation linéarisé suivante :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + \frac{ml}{2} \ddot{\theta} = F(t) \\ \left(\frac{ml^2}{4} + J\right) \ddot{\theta} + \frac{ml}{2} (\ddot{x} - g\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

#### III.8.3 Représentation d'état du système :

– L'équation d'état du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{M} & \frac{m*g}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-s*d}{M*l} & \frac{s*(m+M)*g}{M*l} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{s*l}{M*l} \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

En utilisant le vecteur d'état défini comme suit :  $x = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ , avec la sortie  $y = Cx$ .

### III.8.4 Les données numériques du système :

- Longueur du pendule  $l = 2 \text{ m}$
- La masse du pendule  $m = 1 \text{ kg}$
- La masse du chariot  $M = 5 \text{ kg}$
- Accélération de la pesanteur  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$
- Pendule position haute  $s = 1$ .

La matrice de covariance des bruits du système est prise égale à

$$W = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} \text{ Et la matrice de covariance des bruits de mesures est prise égale à } V = 0.0002$$

### III.8.5 Les résultats :

- Les trajectoires :

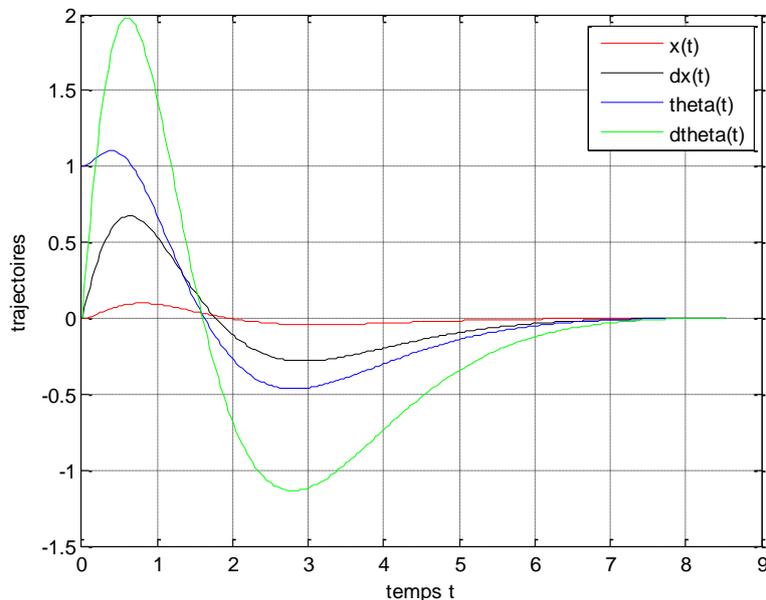
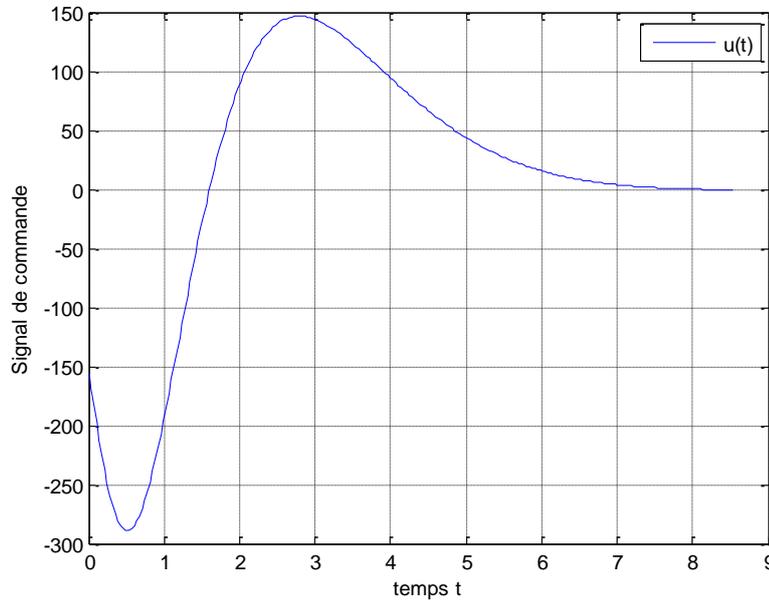


Figure III.1 : Estimation d'état

- **Commentaire :**

On remarque dans la figure (III.1) les graphes d'états du système converge tous les deux vers l'état de repo donc, le système est en repo et ça à partir de  $t \approx 9s$ .

- **Le signal de commande :**



**Figure III.2 :** le signal de commande LQG

- **Commentaire :**

Le but est atteint car le system est ramener aussi rapidement que possible, l'état à sa valeur d'équilibre 0.

### **III.9 Conclusion :**

la commande LQR dont les paramètres de synthèse sont les matrices de pondérations Q et R qui peuvent être choisies symétriques ou diagonales, appuyée d'un estimateur de Kalman on obtient la seconde commande qui est la commande LQG (principe de séparation).

---

# **Conclusion générale**

---

# Conclusion générale

En premier lieu nous nous sommes penchés sur la commande optimale dans une forme générale, et dans une seconde partie aux commandes linéaires LQR dont nous avons présentés principalement les propriétés structurelles.

En second lieu, nous avons présenté deux types d'observateurs le premier celui du filtre de kalman qui est une technique d'estimation d'état utilisable dans les milieux bruités et le second celui de luenberger qui est aussi est une estimation d'état mais pencher vers les systèmes linéaires déterministes que l'on ne peut pas utiliser dans les systèmes linéaires stochastique.

La commande LQR dont les paramètres de synthèse sont les matrices de pondérations  $Q$  et  $R$  qui peuvent être choisies symétriques ou diagonales, appuyée d'un estimateur de Kalman on obtient la seconde commande qui est la commande LQG (principe de séparation).

# Références et bibliographies

- [1] A. Maldi, Cours de commande optimale – Décembre 2015
- [2] A. P. Sage and C. C. White, Optimum Systems Control, Prentice Hall, 1977.
- [3] L. Pontriaguine, V. Boltianski, G. Gamkrelidze, and E. Michtchenko, Théorie Mathématique des Processus Optimaux, Moscou : Mir, 1974.
- [4] H. Bourles, Optimisation et Commande Optimale, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1996.
- [5] Raymond DeCarlo: Linear Systems: A State Variable Approach with Numerical Implementation, Prentice Hall, NJ, 1989.
- [6] Briki.b et Senouci.A, Diagnostic De Défaut Par Un Observateur Non Linéaire, 2018, p9-11.
- [7] BENMOUSSA.S, « Introduction à la conception d'un système de diagnostic : méthodes à base de modèle », Université Badji Mokhtar Annaba, octobre 2016.
- [8] Kendouci.Kh, Analyse et commande des systèmes linéaires continus dans l'espace d'état, 2000, p57.
- [9] Harkat.S Application du Filtre de Kalman sur la variabilité pluviométrique dans le bassin versant de Chellif » Algérie, Université de Chlef, 2016, 188pp.
- [10] Transaction of the ASME- Journal of Basic Engineering, 82 (series D): 35-45.
- [11] Kalman.R.E. (1960). A New Approach to linear Filtering and Prediction Problems.
- [12] Dennis Wackerly, William Mendenhall et Richard.L. Schaeffer, Mathematical Statistics with applications, Brooks Cole, 2008, 7e éd., 922 p.
- [13] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Optimal Control - Linear Quadratic Methods, Prentice Hall, 1989.
- [14] M. H. A. Davis, Linear Estimation and Stochastic Control, Chapman and Hall, 1977.
- [15] J. C. Doyle and G. Stein, « Robustness with observers », IEEE Trans. Autom. Control.
- [16] J. C. Doyle and G. Stein, « Multivariable feedback design : Concepts for a classical modern synthesis », IEEE Trans. Autom. Control, vol. 26, no. 1, 1981.
- [17] J. B. Moore and L. Xia, « Loop recovery and robust state estimate feedback design »,IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 32, no. 6, 1987.

- [18] G. Stein and M. Athans, «The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design », IEEE Trans. Autom. Control, vol. 32, no. 2, 1987.
- [19] J. D. Birdwell and A. J. Laub, «Balanced singular values for lqg/ltr design », International Journal of Control, vol. 45, no. 3, 1987.
- [20] G. Duc, Robustesse des Systèmes Linéaires Multivariables, \_Ecole Supérieure d'Electricité, 1994.
- [21] Z. Zhang and J. Freudenberg, "Loop transfert recovery for nonminimal phase plants," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 35, no. 5, 1990.
- [22] Rudolph Emil Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Fluids Engineering, 82(1):35–45, 1960.
- [23] Greg Welch and Gary Bishop. An introduction to the Kalman filter, 1995.
- [24] Mohinder S. Grewal. Kalman filtering. In International Encyclopedia of Statistical Science, pages 705–708. Springer, 2011.