

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA  
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté : de TECHNOLOGIE

Département : Electronique

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Télécommunications

Spécialité : Réseaux et Télécommunications.

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème :

**Etude des pertes par rayonnement d'un guide à parois rugueuses**

Présenté par : *AMARA MADI Loubna et KHROUF Amina*

Encadrant : *LAFIFI Saddek*

Professeur

*Badji Mokhtar annaba*

### Jury de Soutenance :

Mr: SAOUCHI Kaddour	Prof	Badji Mokhtar annaba	Président
Mr: LAFIFI Saddek	Prof	Badji Mokhtar annaba	Encadrant
Mr: KADDECHE Mohamed	Prof	Badji Mokhtar annaba	Examineur

Année Universitaire : 2021/2022

## **Remerciements**

*Avant de débiter ce modeste travail, il nous est particulièrement agréable d'exprimer nos gratitudes et nos remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.*

*Au début nos remerciements vont en particulier à « **Dieu** », le tout puissant, qui nous a donné la force et le courage pour poursuivre nos études.*

*Cette mémoire n'aurait pas pu être réalisée sans la contribution de nombreuses personnes que nous tiens à remercier par ces quelques lignes.*

*On tient à exprimer toute notre reconnaissance et notre gratitude à notre encadrant le professeur « **SADDEK LAFIFI** » d'avoir accepté de diriger ce travail, sans ses orientations et ses précieux conseils, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.*

*Nous profitons de l'occasion pour remercier vivement les membres de jury*

*Monsieur le professeur **SAOUCHI Kaddour** et  
Monsieur le professeur **KADDECHE Mohamed**  
pour avoir accepté de juger notre travail.*



# *Dédicace*

*En premier lieu je remercie « Allah », mon créateur pour m'avoir donné la force pour accomplir ce travail.*

*Je dédie ce travail comme preuve de respect, de gratitude, et de reconnaissance à :*

*Mes chers parents : Qui n'ont jamais cessé de m'encourager et me conseiller. Ils m'ont aidé beaucoup tout en long de mon chemin, grâce à leur amour, leur compréhension et leur patience sans jamais me quitter des yeux ni baisser les bras et leur soutien moral et matériel, je ne saurais jamais traduire ce que je sens vraiment envers eux.*

*Mes frères : Nulle dédicace ne pourrait exprimer ma profonde affection et mon immense gratitude pour tous les encouragements et soutiens qu'ils ont consentis à mon égard.*

*Une dédicace spéciale pour ma chérie d'amour et ma sœur MANEL, je suis très heureuse de t'avoir dans ma vie.*

*Tu es la seule personne sur qui j'ai toujours pu compter et je t'aime plus chaque année qui passe.*

*Mon binôme et ma sœur KHROUF AMINA.*

*Mes amis : Pour leur compagnie et bons moments passés ensemble*





# *Dédicace*

*Grace à Dieu le tout puissant, j'ai achevé la réalisation de ce modeste travail que je tien très chaleureusement à le dédier à :*

*Ma grande mère Aicha Biya qui nous as quitté le 02/02/2022, puisse dieu l'accueillir dans son infini miséricorde.*

*A mon père l'épaule solide, l'œil attentif compréhensif et la personne la plus digne de mon estime et de mon respect*

*Aucun dédicace ne saurait exprimer mes sentiments, que dieu te préserve et te procure santé et longue vie*

*A ma mère , tu m'as donné la vie , la tendresse et le courage pour réussir .*

*Tout ce que je peux t'offrir ne pourra exprimer l'amour et la reconnaissance que je te porte.*

*En témoignage, je t'offre ce modeste travail pour te remercier pour tes sacrifices et pour l'affection dont tu m'as toujours entourée*

*A mon frère ANIS*

*et ma soeur CHAHD*

*A mon cher binôme ma copine intime LOUBNA*

*A tout ma famille*

*Je vous Remercie tous*



### Abstract

The problems of the propagation of electromagnetic waves through deformed structures have become in recent years an important research topic in electromagnetism thanks to its wide field of application in integrated optics, propagation and telecommunications. The problem is motivated by the need to obtain a detailed statistical description of the radiation phenomena. This type of information is particularly important in the design of devices for optical communication systems. The problem consists in characterizing the radiated wave knowing the shape of the deformation of the radiating guide. As we are in the case of a randomly deformed double interface, we are interested in the statistical study (calculation of mean value, variance and probability density) of the radiated fields knowing the statistical characteristics of the walls of the guide.

### Résumé

Les problèmes de la propagation des ondes électromagnétiques à travers des structures déformées sont devenus au cours de ces dernières années un important thème de recherche en électromagnétisme grâce à son large domaine d'application en optique intégré, propagation et télécommunication. Le problème est motivé par la nécessité d'obtenir une description statistique détaillée des phénomènes de rayonnement. Ce type d'information est en particulier important dans la conception des dispositifs pour les systèmes de communication optiques. Le problème consiste à caractériser l'onde rayonnée connaissant l'allure de la déformation du guide rayonnant. Comme on est dans le cas d'une double interface déformée aléatoirement, on s'intéresse à l'étude statistique (calcul de valeur moyenne, de variance et de densité de probabilité) des champs rayonnés connaissant les caractéristiques statistiques des parois du guide.

### ملخص

أصبحت مشاكل انتشار الموجات الكهرومغناطيسية من خلال الهياكل المشوهة في السنوات الأخيرة موضوعًا بحثيًا مهمًا في الكهرومغناطيسية بفضل مجال تطبيقها الواسع في البصريات المتكاملة والانتشار والاتصالات السلكية واللاسلكية. إن الدافع وراء المشكلة هو الحاجة إلى الحصول على وصف إحصائي مفصل لظاهرة الإشعاع. هذا النوع من المعلومات مهم بشكل خاص في تصميم الأجهزة لأنظمة الاتصالات البصرية. تكمن المشكلة في توصيف الموجة المشعة مع معرفة شكل تشوه الدليل المشع. نظرًا لأننا في حالة السطح البيني المزدوج المشوه عشوائيًا، فإننا مهتمون بالدراسة الإحصائية (حساب القيمة المتوسطة والتباين وكثافة الاحتمال) للمجالات المشعة مع معرفة الخصائص الإحصائية لجدران الدليل.

## Liste de figures

Figure 1: mode de propagation à l'intérieur d'un guide plan.	11
Figure 2: Géométrie d'un guide d'onde planaire et parfaitement lisse	14
Figure 3: Guide asymétrique à parois rugueuses non parallèles.	15
Figure 4 : les graphes de dispersion d'un guide diélectrique lisse	45
Figure 5: coefficients de perte en fonction de la longueur de déformation	46
Figure 6: Densité de probabilité de l'intensité de rayonnement pour différentes longueurs de déformation Polarisation $E_{//}$	47
Figure 7: Densité de probabilité de l'intensité de rayonnement pour différentes longueurs de déformation Polarisation $H_{//}$	47

---

## *Liste des symboles*

$\vec{E}$  : Représente le champ électrique [Volts/m].

$\vec{B}$  : L'induction (densité du flux) magnétique [Tesla].

$\vec{D}$  : Excitation (densité du déplacement) électrique [Coulombs/m<sup>2</sup>].

$\vec{H}$  : Le champ magnétique [Ampère/m].

$\vec{J}$  : La densité du courant [Ampère/m<sup>2</sup>].

$\rho$  : La densité de charge électrique [C/m<sup>3</sup>].

$\epsilon$  : la permittivité

$\mu$  : la perméabilité

$n$  : l'indice de réfraction

$\omega$  : pulsation

$Z_0$  : l'impédance du vide

$\lambda_0$  : la longueur d'ondes dans le vide

$\Delta$  : le Laplacien vectoriel

$\vec{n}$  : la normale à l'interface

$R_{aa}(x)$  et  $R_{bb}(x)$  : les fonctions d'autocorrélation

$R_{ab}(x)$  : la fonction d'intercorrélacion

$Q$  : paramètre de corrélation

$N^x$  : la composante du vecteur de Poynting

$P_{(1,3)}$  : la densité de probabilité

$\sigma_{(1,3)}^2$  : la variance

$\Gamma_{(1,3)}$  : la covariance

$F_{\eta,1,3}$  : la fonction de répartition

$\rho_{(1,3)}$  : le coefficient de corrélation

$p_M(m)$  : la densité de probabilité du module

---

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	2
------------------------------	---

## *Chapitre I : les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique*

I.1. Introduction	5
I.2. Les équations de Maxwell	5
I.3. Les équations de propagation	8
I.4. Les équations de continuité	12

## *Chapitre II : Etude de rayonnement dans un guide à parois rugueuses*

II.1. Introduction	14
II.2. Présentation de problème	14
II.3. Caractérisation des interfaces rugueuses	15
II.4. Expression des composantes des champs	17
II.5. Les conditions aux limites	19
II.6. Méthode de petites perturbations "SPM" (Small Perturbation Method)	20
II.7. Calcul énergétique	27

## *Chapitre III : Etude statistique de l'intensité de rayonnement*

III.1. Introduction	32
III.2. Caractéristiques statistiques	32

## *Chapitre IV : Simulation*

IV.1. Introduction.	44
IV.2. Equation de dispersion.	44
IV.3. Le coefficient de pertes.	45
IV.4. La densité de probabilité	47
<b>Conclusion générale.</b>	48
<b><i>Bibliographies.</i></b>	49

# INTRODUCTION GENERALE

Le guide d'onde optique est un des fondements du développement de l'optique intégrée dans divers domaines, comme la communication optique, le traitement du signal optique, ou l'informatique optique. Il s'applique dans des fonctions de couplage, de modulation, de multiplexage, d'amplification...etc. Généralement un guide optique est défini comme une structure permettant de confiner et de guider la lumière. Etant donné que la théorie de guides d'ondes est présentée dans des nombreux ouvrages [1,2]

Dans ce mémoire, nous présentons une étude statistique de l'intensité de rayonnement due à la déformation aléatoire des deux parois d'un guide diélectrique asymétrique. Ces interfaces séparent trois milieux de permittivités différentes et sont caractérisées par des distributions des hauteurs gaussiennes et des fonctions de corrélation exponentielles. Les interfaces sont définies comme des perturbations de longueur finie du plan. Les fonctions aléatoires décrivant les interfaces peuvent être corrélées ou non. Ce travail est motivé par la nécessité d'obtenir une description statistique détaillée des phénomènes de rayonnement. Ce type d'information est en particulier important dans la conception des dispositifs pour les systèmes de communication optiques et dans l'optique intégrée.

Comme la surface est en réalité rugueuse, il y a une infinité de rayonnements émergents dans toutes les directions, chacun transportant une fraction de la puissance transmise. Il y a alors rayonnement de l'onde de propagation par les deux interfaces du guide. Pour calculer le rayonnement des ondes EM de propagation par une surface rugueuse séparant deux milieux homogènes, on va distinguer les méthodes "rigoureuses" des méthodes "approximées". En adoptant le développement de Rayleigh, nous déterminons par une méthode de perturbation à l'ordre 1 les propriétés statistiques de l'intensité de rayonnement.

Dans le premier chapitre, nous présentons les fondations de la théorie électromagnétique de lumière édifiée en 1873 par "James C. Maxwell", nous dérivons l'équation d'onde à partir des équations de Maxwell dans un milieu diélectrique. La notion de vecteur complexe en régime harmonique est introduite pour faciliter le traitement mathématique. Nous rappelons les notions de base concernant la propagation et au mode de production des ondes électromagnétiques dans un guide d'onde plan [3,4].

Le second chapitre sera consacré à l'étude de l'intensité de rayonnement issu de la géométrie d'un guide à parois rugueuses non parallèles, la description du problème et

l'introduction des notions de la géométrie de guide utile dans ce manuscrit. Lorsque la forme de la surface est quelconque (surfaces rugueuses) cela augmente considérablement la difficulté du problème de perte d'énergie par rayonnement.

Nous présentons les propriétés statistiques des interfaces rugueuses et rappelons les expressions des champs rayonnés, nous appliquons par la suite les conditions aux limites dans les deux modes de polarisation TE (transverse électrique) et TM (transverse magnétique)[5], pour résoudre les équations différentielles, nous utilisons le développement de Rayleigh [6-9] qui consiste à supposer que l'onde dans les différents milieux est formée par une somme d'ondes progressives planes (guidées) et évanescentes (rayonnées). Si la hauteur moyenne de la déformation est faible par rapport à la longueur d'onde, la méthode de petite perturbation [10-14] nous permet d'obtenir les expressions à l'ordre 1 des amplitudes des champs rayonnés à l'extérieur du guide par les deux parois rugueuses et les expressions des champs à l'intérieur du guide (modes guidés).

Les calculs énergétiques de puissance transmise et rayonnée à partir de vecteurs de Poyting, nous donnent l'expression analytique de l'intensité de rayonnement ainsi le coefficient de pertes en fonction de la longueur d'onde et l'angle d'incidence.

Le troisième chapitre est consacré à une description statistique complète des phénomènes de rayonnement et déterminons les expressions analytiques de la moyenne, de la variance et de la densité de probabilité de l'intensité rayonnée pour des guides à parois corrélées ou non.

Le quatrième chapitre permet d'illustrer sur quelques exemples les formules analytiques obtenues. Le calcul des amplitudes rayonnées nous aide à simuler, à l'aide de logiciel Matlab, le coefficient de pertes en fonction de l'angle d'incidence et de la longueur de déformation aux interface de guide.

# **Chapitre I :**

## **Les équations de maxwell dans un milieu diélectrique**

### **I.1. Introduction**

### **I.2. Equations de Maxwell**

### **I.3. Equations de propagation**

### **I.4. Equations de continuité**

## Chapitre I : les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique

### I.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de poser les fondements de l'électromagnétisme qui permettront la compréhension des phénomènes observés sur des structures de l'optique guidée, les bases de l'électromagnétisme et la notion de propagation d'onde.

La propagation des ondes est un domaine de la physique s'intéressant aux déplacements des ondes électromagnétiques dans les milieux. On distingue généralement deux catégories de propagation des ondes [4].

La propagation dans l'espace libre (vide, air, milieu massif comme le verre, etc.)

La propagation guidée (fibre optique, guide d'onde, etc.)

Nous allons dans un premier temps, passer en revue les équations de Maxwell. En effet, les équations de Maxwell permettent de prédire l'existence d'une onde électromagnétique. Celle-ci nous permettons d'obtenir l'équation de la propagation des ondes pour un milieu diélectrique infini. Nous envisagerons ensuite le cas d'une discontinuité dans le milieu de propagation.

### I.2. Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell étant considérées comme les équations de base sur lesquelles on peut construire l'électromagnétisme, cette description classique est la plus utilisée pour expliquer la propagation de la lumière. L'étude des guides d'ondes diélectriques requière une bonne connaissance de ces équations. D'après la théorie de Maxwell, un champ électromagnétique est défini par son champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et un champ magnétique  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  ces deux grandeurs vectorielles dépendent de la position  $\vec{r}$  et temps  $t$ . Son évolution spatio-temporelles qui sont régies par quatre équations fondamentales, leur forme dans l'espace libre est:

L'équation de Maxwell Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

L'équation de Maxwell Ampère

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

L'équation de Maxwell Gauss

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{I.3})$$

L'équation de Maxwell flux magnétique

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{I.4})$$

Avec:

$\vec{E}$  Représente le champ électrique [Volts/m].

$\vec{B}$  L'induction (densité du flux) magnétique [Tesla].

$\vec{D}$  Excitation (densité du déplacement) électrique [Coulombs/m<sup>2</sup>].

$\vec{H}$  Le champ magnétique [Ampère/m].

$\vec{J}$  La densité du courant [Ampère/m<sup>2</sup>].

$\rho$  La densité de charge électrique [C/m<sup>3</sup>].

Les deux équations (I.1) et (I.4) sont dites "équations de Maxwell sans termes de source", les termes de sources sont les densités de charge et de courant,  $\rho$  et  $\vec{J}$ .

#### ▪ Les relations de constitution

Néanmoins, pour résoudre les équations de Maxwell précédentes qui sont couplées et différentielles, il est nécessaire d'établir une relation additionnelle entre les vecteurs  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$ ,  $\vec{J}$  et  $\vec{E}$  et les vecteurs  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$ . Ces relations s'appellent les relations de constitutives, et dépendent de propriétés électrique et magnétique du milieu considéré, pour un milieu *homogène* (les propriétés du milieu sont les mêmes en toute points de l'espace), *isotrope* (les propriétés physiques du milieu sont les même dans toute les directions de l'espace) et *linéaire* (un milieu où les relation de constitution sont linéaires en fonction de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ ) les équations de constitution s'écrivent :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (I.5)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Les grandeurs  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des constantes indépendantes de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , sont respectivement, la permittivité, la perméabilité et la conductivité.

Toutes ces équations sont valables à tous les milieux, si on est dans le vide quand les ondes électromagnétiques peuvent se propager sans aucun support matériel on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 \\ \mu &= \mu_0 \\ \sigma &= 0 \end{aligned} \quad (I.6)$$

Pour un milieu diélectrique isotrope et sans perte, que nous considérons lorsque nous étudierons les guides d'ondes, ces constantes sont définies par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon / \varepsilon_0 = n^2 \\ \mu_r &= \mu / \mu_0 \\ \sigma &= 0 \end{aligned} \quad (I.7)$$

Où  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité dans le vide,  $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité relative. Le terme  $n$  représente l'indice de réfraction ou simplement l'indice optique du milieu. Chaque milieu transparent est caractérisé par l'indice de milieu  $n$  qui est un nombre sans dimension et sans unité. Cet indice est toujours supérieur ou égal à 1 (dans le vide  $n = 1$ ).

Ainsi, pour un milieu diélectrique isotrope, sans charge, sans perte et non magnétique, que nous allons considérer dans ce qui suit, les équations de Maxwell et les relations de constitution peuvent s'écrire comme présentées ci-dessus :

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (I.8)$$

$$\overline{\text{rot}} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (I.9)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (I.10)$$

$$\text{div} \vec{D} = \varepsilon \text{div} \vec{E} = 0 \quad (I.11)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{I.12})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E} \quad (\text{I.13})$$

Les équations précédentes étant linéaires, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  peuvent être vue chacun comme une superposition de modes harmoniques avec une pulsation  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \vec{E} \exp(j \omega t) \\ \vec{H}(t) &= \vec{H} \exp(j \omega t) \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

Où  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont les vecteurs complexes qui ne dépendent que des coordonnées spatiales. Dans le cas particulier de champs à variation temporelle sinusoïdale nous pouvons réécrire les équations de Maxwell pour un milieu diélectrique d'indice de réfraction  $n$ , nous remplaçons le dérivé par rapport au temps par le terme  $j \omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= j \omega \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= j \omega \vec{H} \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Donc :

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -j \omega \mu_0 \vec{H} = -j k_0 Z_0 \vec{H} \quad (\text{I.16})$$

$$\overline{\text{rot}} \vec{H} = j \omega \varepsilon_0 n^2 \vec{E} = j k_0 \frac{n^2}{Z_0} \vec{E} \quad (\text{I.17})$$

Avec :  $Z_0$  représente l'impédance du vide ( $120\pi = 377 \Omega$ ).

Noter que l'impédance d'onde dans un guide est le rapport entre les composantes transverses du champ électrique et du champ magnétique :

$$Z = |E / H| = \sqrt{\mu / \varepsilon}$$

Et  $k_0 = 2\pi / \lambda_0$  le nombre d'onde où  $\lambda_0$  est la longueur d'ondes dans le vide.

### I.3. Les équations de propagation

Les équations de Maxwell décrites précédemment (I.16) et (I.17), ne sont pas faciles à résoudre car elles forment un système d'équations couplées. Cependant, à partir de ces dernières, nous pouvons construire un nouveau système d'équations qui est plus facile à

analyser car les équations sont découplées, c'est-à-dire que chacune d'elles ne fait intervenir qu'un champ électrique ou magnétique ( $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$ ), appelées les équations d'ondes qui sont donc très utiles pour résoudre des problèmes de conditions aux limites.

Pour trouver les équations d'ondes, on peut transformer les équations de Maxwell appliquant à un guide diélectrique homogène, isotrope et sans charge ( $\rho = 0$  et  $\vec{J} = 0$ ). On part de l'équation (I.8) :

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Formons  $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{E})$ , en rappelant d'une part l'identité :

$$\overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} = \overline{\text{grad}} \text{div} - \Delta$$

Et d'autre part la possibilité de permuter l'ordre des dérivations :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial(\overline{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

Donc, on obtient :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{E}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\overline{\text{rot}}(\partial \vec{B} / \partial t) = -\partial / \partial t(\overline{\text{rot}} \vec{B})$$

En remplaçant (I.9), (I.12) et (I.13) on trouve :

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On résulte que l'équation de propagation propre au champ électrique  $\vec{E}$  dans un guide diélectrique est de la forme :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.18})$$

De la même manière, formons

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial(\overline{\text{rot}} \vec{E})}{\partial t}$$

Nous trouvons l'équation de propagation propre au champ magnétique  $\vec{H}$  dans un guide diélectrique :

$$\Delta \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.19})$$

On notera qu'en l'absence de charges et de courants pour un milieu homogène et isotrope, les champs sont régis par deux équations aux dérivées partielles (I.18) et (I.19) qui ont la même structure :

$$\Delta \vec{F} - \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.20})$$

Où  $\Delta$  représente le Laplacien vectoriel.

D'après l'équation (I.15). On peut remplacer les dérivées par rapport au temps par le facteur  $j\omega$ , donc on peut écrire :

$$\Delta \vec{F} + k^2 \vec{F} = 0 \quad (\text{I.21})$$

L'équation (I.21) implique que l'équation de propagation suivra l'équation de Helmholtz qui prend l'onde plane uniforme comme solution élémentaire [5], où le nombre d'onde  $k$  dans un milieu diélectrique peut être exprimé en fonction du vecteur d'onde dans le vide,  $k_0$ , de la manière suivante :

$$k = n \frac{\omega}{c} = nk_0$$

Et la vitesse de la lumière (ou célérité) dans le vide notée  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  est une constante physique qui est égale à la vitesse de la lumière dans le vide  $3.10^8$  m/s.

#### ▪ Mode dans les guides d'ondes

Un mode désigne une onde qui se propage dans un guide. A l'inverse de l'onde plane en espace libre, il peut exister de nombreux modes qui se propagent dans un guide d'onde à la même fréquence. Chaque mode présente une configuration propre des champs électrique et magnétique et dans un guide parfait.

Les équations de propagation montrent que  $\vec{E}_z$  et  $\vec{H}_z$  sont deux solutions différentes de la même équation aux dérivées partielles. Si aucun des conditions aux limites ne fait simultanément intervenir  $\vec{E}_z$  et  $\vec{H}_z$  il n'y a plus aucune relation entre ces deux composantes et on peut annuler librement l'une ou l'autre, obtenant ainsi dans le milieu de guide diélectrique

deux familles de modes de propagation: mode de transverse électrique et mode de transverse magnétique.

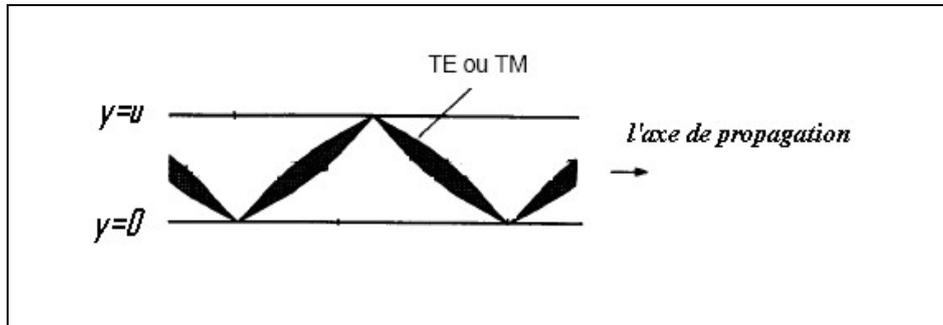


Figure 1: mode de propagation à l'intérieur d'un guide plan.

La figure 1 montre schématiquement le trajet des « rayons » pour un mode donné à l'intérieur d'un guide plan. Ce trajet est constitué d'une succession de ligne brisée (parcours en zigzag) dans le plan ( $yox$ ), ou plan d'incidence, l'onde étant réfléchi sur les conducteurs situés en  $y = 0$  et  $y = u$ .

- ✓ On appelle mode transversal électrique un champ électromagnétique dans le guide pour lequel  $E_{0z} \neq 0$ . Le champ  $\vec{E}$  est alors perpendiculaire à la direction de propagation, donc transversal ; d'où le nom qui est donné à ce mode.
- ✓ On appelle mode transversal magnétique un champ électromagnétique dans le guide pour lequel  $H_{0z} \neq 0$ . Le champ  $\vec{H}$  est alors perpendiculaire à la direction de propagation, donc transversal.

Après cette démonstration des modes, on peut remplacer le champ  $\vec{F}$  dans l'équation (I.21):

$$\text{En mode (TE)} \quad \left\{ \vec{F}(x, y) = \vec{E}_z(x, y) \right.$$

$$\text{En mode (TM)} \quad \left\{ \vec{F}(x, y) = Z \vec{H}_z(x, y) \right.$$

Z l'impédance de milieu considéré.

Le calcul du champ électromagnétique d'un guide d'onde revient alors à résoudre l'équation d'onde sous certaines conditions aux limites.

#### I.4. Les équations de continuité :

On sait que les équations aux dérivées partielles ne peuvent pas entièrement définir le champ, il faut la compléter par des conditions aux limites convenables ou de raccordement qui en rendant la solution unique et qui puissent se déduire de la physique du phénomène étudié. Il faudra pour chaque mode que la composante tangentielle du champ électrique soit nulle à la surface du conducteur. Cette condition aux limites à la surface des conducteurs, peut être assurée pour deux ensembles de modes de polarisation rectiligne (la direction de polarisation est définie par rapport au plan d'incidence). On a un premier ensemble très simple de conditions aux limites liées aux surfaces des discontinuités entre deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$  :

La continuité de la composante normale du courant de déplacement électrique :

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

La continuité de la composante tangentielle du champ de déplacement électrique :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0$$

La continuité de la composante normale de la densité de flux magnétique :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique :

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = 0$$

Où  $\vec{n}$  est la normale à l'interface, dirigé de milieu 1 vers milieu 2 perpendiculairement à la surface.

## **Chapitre II : Etude de rayonnement dans un guide à parois rugueuses**

### **II.1. Introduction**

### **II.2. Présentation de problème**

### **II.3. Caractérisation des interfaces rugueuses**

### **II.4. Expression des composantes des champs**

### **II.5. Conditions aux limites**

### **II.6. Méthode de perturbation "SPM" (Small Perturbation Method)**

#### **II.6.1. Considérations générales**

#### **II.6.2. Perturbation à l'ordre zéro**

#### **II.6.3. Perturbation à l'ordre 1**

#### **II.6.4. Expression des champs**

### **II.7. Calcul énergétique**

#### **II.7.1. Puissance transmise**

#### **II.7.2. L'intensité de rayonnement**

#### **II.7.3. Cas particulier**

## Chapitre II : Etude de rayonnement dans un guide à parois rugueuses

### II.1. Introduction

Dans le cadre de notre étude et lorsque les systèmes réels n'ont évidemment pas la régularité géométrique parfaite, une petite modification de la géométrie de la section droite n'as pas trop de conséquence ; par contre les irrégularités au niveau des surfaces vont entraîner un nouveau phénomène, le rayonnement. Le présent chapitre traite le comportement de la lumière aux interfaces diélectriques rugueuses, nous cherchons à comprendre le phénomène de rayonnement issu d'un guide diélectrique à parois rugueuses. La déformation est limitée dans l'espace pour qu'une représentation en intégrale de Fourier soit possible.

Connaissant les caractéristiques statistiques des déformations des parois du guide, notre but est d'étudier statiquement l'intensité de rayonnement. Lorsque les amplitudes moyennes des déformations sont faibles devant la longueur d'onde une bonne approximation consiste à chercher les solutions du problème par une méthode de perturbation.

### II.2. Présentation de problème

Supposons qu'on veut transmettre un rayon lumineux par un guide d'ondes planaire et parfaitement lisse de trois couches (Figure2), d'indice de réfraction est différent dans chaque milieu (1, 2, 3), il faut que l'indice de milieu 2 soit supérieur à l'indice de milieu 1 et 3 pour avoir un guidage de lumière par réflexion successive. Dans ce cas on peut concevoir des rayons se propageant en zigzag dans la couche intérieure [6]. Le champ transmis se décompose en un champ rayonné à l'extérieur du guide (évanescents, faible qui s'annule en s'éloignant du guide) et une somme de modes guidés à l'intérieur. Une telle structure ne supporte que des modes guidés car à l'extérieur de ce guide planaire les ondes rayonnées sont considérées comme ondes évanescentes.

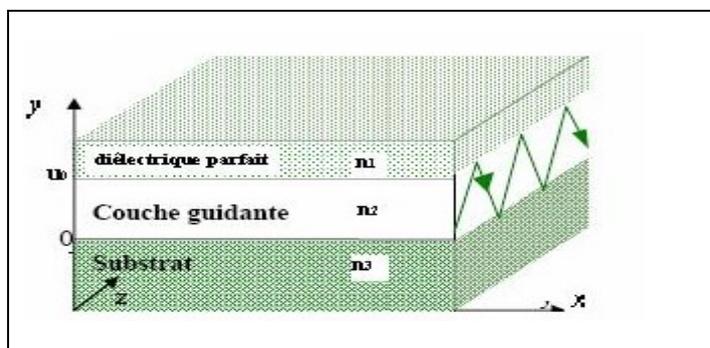


Figure 2: géométrie d'un guide d'onde planaire et parfaitement lisse

Lorsque ce dernier possède des rugosités au niveau de ces deux interfaces, un rayonnement à l'extérieur devient possible et les rayons lumineux circulant dans le diélectrique sont réfléchis irrégulièrement. Certains rayons arrivent avec un angle d'incidence tel qu'ils donnent naissance à un changement de mode, tandis que d'autres s'échappent dans le vide pour les angles d'incidences dépassant l'angle critique de réflexion totale. Dans ce moment-là, le mode incident perd une partie de sa puissance à cause de pertes par rayonnement liée à la déformation aperiodique de la géométrie de guide étudié.

### II.3. Caractérisation des interfaces rugueuses :

La géométrie du problème est représentée sur la Figure 3. Un guide diélectrique asymétrique a parois rugueuses non parallèles. Ces deux interfaces sont des plans aléatoirement déformés de  $-L/2$  à  $+L/2$  et séparés par une distance  $u_0$ . La fonction  $a(x)$  décrit la face inférieure et la fonction  $b(x)$ , la face supérieure. Le milieu  $i(i=1,3)$  est un diélectrique avec ou sans pertes.

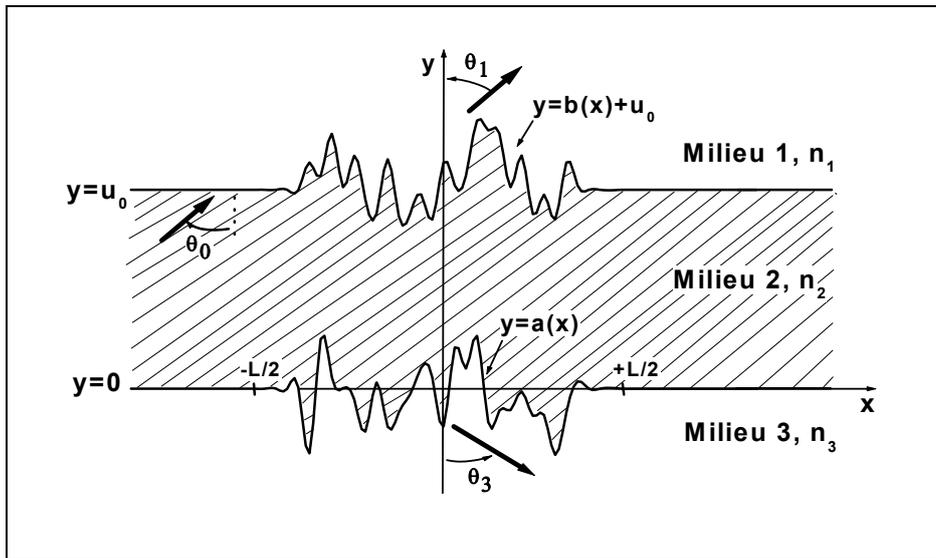


Figure 3: Guide asymétrique à parois rugueuses non parallèles.

Le milieu 1 : est un diélectrique d'indice optique réel  $n_1$  on note :  $\epsilon_{r1}$  la permittivité diélectrique relative avec  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$ , le nombre d'onde  $k_1 = n_1 k_0$ , l'impédance dans ce milieu  $Z_1 = Z_0 / n_1$ .

Dans ce milieu, les ondes sont rayonnées ou diffusées dans toutes les directions.

*Le milieu 2* : est un diélectrique d'indice optique  $n_2$ ,  $\varepsilon_{r2}$  la permittivité diélectrique relative avec  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$ , le nombre d'onde  $k_2 = n_2 k_0$ , l'impédance dans ce milieu  $Z_2 = Z_0 / n_2$ .

Dans ce milieu, les ondes électromagnétiques propagent à l'intérieur du guide déformé de façon guidée.

*Le milieu 3* : est un diélectrique d'indice optique  $n_3$  et  $\varepsilon_{r3}$  la permittivité diélectrique relative avec  $n_3 = \sqrt{\varepsilon_{r3}}$ , le nombre d'onde  $k_3 = n_3 k_0$ , l'impédance dans ce milieu  $Z_3 = Z_0 / n_3$  et similaire au milieu 1, les ondes dans ce milieu sont rayonnées.

Les fonctions décrivant les deux interfaces sont des processus aléatoires gaussiens centrés ( $\langle a(x) \rangle = \langle b(x) \rangle = 0, \forall x$ ) et stationnaires à l'ordre 2. Par la suite, les crochets  $\langle \rangle$  désignent l'espérance mathématique. Les deux fonctions aléatoires peuvent d'être corrélées ou non corrélées.

Pour les applications, nous considérons le cas où les deux interfaces aléatoires présentent des fonctions de corrélation gaussienne. Dans le cas, nous avons les fonctions d'autocorrélation  $R_{aa}(x)$  et  $R_{bb}(x)$  et la fonction d'intercorrélation  $R_{ab}(x)$  suivantes :

$$\begin{aligned} R_{aa}(x) &= \sigma_a^2 \exp\left(-\frac{x^2}{l_a^2}\right) \\ R_{bb}(x) &= \sigma_b^2 \exp\left(-\frac{x^2}{l_b^2}\right) \\ R_{ab}(x) &= q\sigma_a\sigma_b \frac{2l_a l_b}{l_a^2 + l_b^2} \exp\left[-\frac{2x^2}{l_a^2 + l_b^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Les hauteurs quadratiques moyennes des deux interfaces sont notées  $\sigma_{a,b}$  et les longueurs corrélation  $l_{a,b}$ . Le paramètre de corrélation  $q$  est compris entre 0 et 1. Si  $q = 0$ , les surfaces sont non corrélées avec  $R_{ab}(x) = 0$ , et si  $q = 1$ , les surfaces sont parfaitement corrélées. Dans le cas exponentiel, les spectres et l'interspectre s'écrivent (la densité spectrale):

$$\begin{aligned} \hat{R}_{aa}(\alpha) &= \sigma_a^2 l_a \sqrt{\pi} \exp[-\alpha^2 \frac{l_a^2}{4}] \\ \hat{R}_{bb}(\alpha) &= \sigma_b^2 l_b \sqrt{\pi} \exp[-\alpha^2 \frac{l_b^2}{4}] \\ \hat{R}_{ab}(\alpha) &= q\sigma_a\sigma_b \sqrt{\pi l_a l_b} \exp[-\alpha^2 \frac{(l_a^2 + l_b^2)}{8}] \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Les densités spectrales de puissance sont des fonctions paires et la TF de la fonction d'inter corrélation présente la symétrie hermitienne :

$$\hat{R}_{ab}(-\alpha) = \hat{R}_{ab}(\alpha)^* \quad (\text{II.3})$$

Où le symbole " \* " désigne le complexe conjugué

#### II.4. Expression des composantes des champs

Avons d'écrire les expressions des champs, une représentation de développement de Rayleigh sera nécessaire.

- **Le développement de Rayleigh :**

La principale difficulté à la résolution du problème de rayonnement est la détermination des amplitudes, une hypothèse très féconde a été introduite par Rayleigh à la fin de XIX<sup>ème</sup> siècle, consiste à supposer que le développement de Rayleigh est valable sur les interfaces. Il peut ainsi être utilisé pour vérifier les conditions aux limites ce qui est suffisant pour déterminer les amplitudes des champs et résoudre complètement le problème de rayonnement par les structures rugueuses [7,8].

Si l'équation de propagation est de la forme :

$$\Delta \bar{F}(x, y) + k^2 \bar{F}(x, y) = 0 \quad (\text{II.4})$$

En appliquant une transformation de Fourier (TF) sur la variable  $x$ , nous obtenons le développement de Rayleigh qui est donné par :

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\beta, y) \exp[-j(\beta x + \chi y)] d\beta \quad (\text{II.5})$$

Avec :  $\chi^2 + \beta^2 = k^2$  ou  $k^2 = \omega^2/c^2$ ,  $\beta = k^2 \sin \theta$  et  $\chi = k \cos \theta$ .

Cette formule est exacte pour tous les problèmes d'optique, et nous remarquons que celle-ci est une superposition d'ondes, alors deux cas se présentent :

- Solution propagative si :  $\beta < \frac{\omega}{c}$  alors  $\chi$  est réel.
- Solution évanescente si :  $\beta > \frac{\omega}{c}$  alors  $\chi$  est imaginaire pur et l'onde n'est plus propagative, c'est une onde dite évanescente à décroissance exponentielle.

Les champs dans les différents milieux s'expriment sous la forme de développements de Rayleigh, dans ce qui suit les fonctions  $A_1, A_2^-, A_2^+$  et  $A_3$  représentent respectivement les amplitudes des milieux 1, 2 et 3. Ce sont les inconnues du problème.

Dans le milieu 1, le champ rayonné :

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\beta) \exp(-j(\beta x + \chi_1 y)) d\beta = \begin{cases} E_z(x, y) & \text{E//} \\ ZH_z(x, y) & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

$$\text{Avec : } \chi_1^2 + \beta^2 = k_1^2, \quad \text{Im}(\chi_1) \leq 0 \quad \text{et} \quad \chi_1(\beta_0) = -j\tilde{x}_{10} = -j\sqrt{\beta_0^2 - k_1^2}.$$

Dans le milieu 2, le champ de propagation :

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_2^{(-)}(\beta) \exp(-j(\beta x - \chi_2 y)) + A_2^{(+)}(\beta) \exp(-j(\beta x + \chi_2 y))) d\beta = \begin{cases} E_{2z}(x, y) & \text{E//} \\ Z_2 H_{2z}(x, y) & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{Avec : } \chi_2^2 + \beta^2 = k_2^2, \quad \text{Im}(\chi_2) \leq 0 \quad \text{et} \quad \chi_2(\beta_0) = \chi_{20}$$

Dans le milieu 3, le champ rayonné :

$$F_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_3(\beta) \exp(-j(\beta x - \chi_3 y)) d\beta = \begin{cases} E_{3z}(x, y) & \text{E//} \\ Z_3 H_{3z}(x, y) & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

$$\text{Avec : } \chi_3^2 + \beta^2 = k_3^2, \quad \text{Im}(\chi_3) \leq 0 \quad \text{et} \quad \chi_3(\beta_0) = -j\tilde{x}_{30} = -j\sqrt{\beta_0^2 - k_3^2}$$

Les expressions des composantes électriques et magnétiques se déduisent par les relations suivantes :

$$\text{Mode TE} \quad \begin{cases} H_x(x, y) = -\frac{1}{jkZ} \frac{\partial F}{\partial y} \\ H_y(x, y) = \frac{1}{jkZ} \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases} \quad \text{E//} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{Mode TM} \quad \begin{cases} E_x(x, y) = \frac{1}{jk} \frac{\partial F}{\partial y} \\ E_y(x, y) = -\frac{1}{jk} \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases} \quad \text{H//} \quad (\text{II.10})$$

## II.5. Les conditions aux limites

Les conditions aux limites sur les parois du guide pour les deux modes de propagation sont : le premier est l'égalité de champ et le deuxième est l'égalité du dérivé de champ par rapport à la normale.

Nous pouvons maintenant traduire les conditions aux limites à l'interface supérieure  $y = b(x) + u_0$  :

Mode TE :

$$\square \quad [F_{1z}(x, y)]_{y=b(x)+u_0} = [F_{2z}(x, y)]_{y=b(x)+u_0} \quad (\text{II.11})$$

$$\square \quad \left[ \frac{\partial F_{1z}(x, y)}{\partial n} \right]_{y=b(x)+u_0} = \left[ \frac{\partial F_{2z}(x, y)}{\partial n} \right]_{y=b(x)+u_0} \quad (\text{II.12})$$

Avec  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normale en  $M$  à une surface  $S$  décrite par la relation  $f(x, y, z) = 0$  dans un système de coordonnées  $(x, y, z)$ , exprimer comme :

$$\vec{n}_m = \frac{\overline{\text{grad}f}}{\|\overline{\text{grad}f}\|} (M) \quad (\text{II.13})$$

$$\text{Alors : } \frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla = \frac{\overline{\text{grad}f}}{\|\overline{\text{grad}f}\|} \cdot \nabla = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{Dans notre cas : } f = y - (b(x) + u_0) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\text{D'ou : } \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{Et} \quad \dot{b}(x) = \frac{\partial b(x)}{\partial x} \quad (\text{II.14})$$

On remplace (II.14) dans (II.12):

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) F_{1z}(x, y) \Big|_{y=b(x)+u_0} = \left( \frac{\partial}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) F_{2z}(x, y) \Big|_{y=b(x)+u_0} \quad (\text{II.15})$$

On résulte que les conditions aux limites appliquant à l'interface  $y = b(x) + u_0$  sont :

En mode TE:

$$F_{1z}(x, b(x) + u_0) = F_{2z}(x, b(x) + u_0) \quad (\text{II.16a})$$

$$\left[ \frac{\partial F_1}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_1}{\partial x} \right]_{y=b(x)+u_0} = \left[ \frac{\partial F_2}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]_{y=b(x)+u_0} \quad (\text{II.16b})$$

En mode TM:

$$\frac{F_1(x, b(x) + u_0)}{Z_1} = \frac{F_2(x, b(x) + u_0)}{Z_2} \quad (\text{II.17a})$$

$$n_2 \left[ \frac{\partial F_1}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_1}{\partial x} \right]_{y=b(x)+u_0} = n_1 \left[ \frac{\partial F_2}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]_{y=b(x)+u_0} \quad (\text{II.17b})$$

Raccordement à l'interface inférieur  $y = a(x)$  et par le même raisonnement des conditions précédentes :

En mode TE :

$$F_{2z}(x, a(x)) = F_{3z}(x, a(x)) \quad (\text{II.18a})$$

$$\left[ \frac{\partial F_2}{\partial y} - \dot{a}(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]_{y=a(x)} = \left[ \frac{\partial F_3}{\partial y} - \dot{a}(x) \frac{\partial F_3}{\partial x} \right]_{y=a(x)} \quad (\text{II.18a})$$

En mode TM :

$$\frac{F_2(x, a(x))}{Z_2} = \frac{F_3(x, a(x))}{Z_3} \quad (\text{II.19a})$$

$$n_3 \left[ \frac{\partial F_2}{\partial y} - \dot{a}(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]_{y=a(x)} = n_2 \left[ \frac{\partial F_3}{\partial y} - \dot{a}(x) \frac{\partial F_3}{\partial x} \right]_{y=a(x)} \quad (\text{II.19b})$$

## II.6. Méthode de perturbation "SPM" (Small Perturbation Method)

L'étude de la propagation dans des structures n'ayant pas de solutions analytiques exactes des équations de Maxwell requièrent alors l'emploi de méthode numérique et/ou de méthode semi analytique permettant de contourner le problème des conditions aux limites non résolubles. Ainsi, diverses techniques d'analyse ont été développées [14,15].

Nous présentons ici une méthode parmi les différents possibles à savoir la méthode de petites perturbations ou SPM (*Small Perturbation Method*). L'objectif est de calculer les

amplitudes inconnues ( $A_1, A_2^-, A_2^+$  et  $A_3$ ) des développements de Rayleigh. Le choix de cette méthode a été motivé par le fait qu'elle est devenue courante dans le domaine de l'optique intégrée.

### II.6.1. Considérations générales

Pour déterminer les expressions analytiques des amplitudes des champs à partir des équations de continuité, on utilise une méthode de perturbation. Lorsque les hauteurs quadratiques moyennes des interfaces sont faibles devant la longueur d'onde, une bonne approximation consiste à représenter les amplitudes de diffraction et les fonctions exponentielles par leurs développements en séries entières.

$$A(\beta) = \sum_{pq} A^{(pq)}(\beta)$$

$$\exp(\pm j\chi a(x)) = \sum_q \frac{(\pm j\chi a(x))^q}{q!}; \quad \exp(\pm j\chi b(x)) = \sum_q \frac{(\pm j\chi b(x))^q}{q!} \quad (\text{II.20})$$

Le terme  $A^{(pq)}(\beta)$  est proportionnel au produit  $v_a^p v_b^q$  où  $v_a = k\sigma_a$  et  $v_b = k\sigma_b$ .

Les deux termes,  $p$  et  $q$ , définissent la perturbation :

- A l'ordre zéro :  $p=0$  et  $q=0$ .
- A l'ordre un : pour la perturbation à l'interface inférieure  $p=1$  et  $q=0$  et pour la perturbation à l'interface supérieure  $p=0$  et  $q=1$ .

### II.6.2. Perturbation à l'ordre zéro

A l'ordre zéro, le guide est parfait et ne rayonne pas et les deux fonctions pour les interfaces sont nul ( $a(x)=0, b(x)=0$ ). A partir des conditions aux limites, on trouve un système de quatre équations avec quatre amplitudes inconnues :

$$\begin{cases} A_2^{(-,00)}(\beta) + A_2^{(+,00)}(\beta) - A_3^{(00)}(\beta) = 0 \\ j\chi_2 A_2^{(-,00)}(\beta) - j\chi_2 A_2^{(+,00)}(\beta) - j\chi_3 A_3^{(00)}(\beta) = 0 \\ A_1^{(00)}(\beta) \exp(-j\chi_1 u_0) - A_2^{(-,00)}(\beta) \exp(+j\chi_2 u_0) - A_2^{(+,00)}(\beta) \exp(-j\chi_2 u_0) = 0 \\ -\chi_1 A_1^{(00)}(\beta) \exp(-j\chi_1 u_0) - \chi_2 A_2^{(-,00)}(\beta) \exp(+j\chi_2 u_0) + \chi_2 A_2^{(+,00)}(\beta) \exp(-j\chi_2 u_0) = 0 \end{cases}$$

Ce système est facile à résoudre. Par l'utilisation de quelque application mathématique qui définit la condition de l'existence de la solution du système linéaire, on obtient l'équation de dispersion qui définit la gamme des longueurs d'ondes qui peuvent se propager dans le

guide planaire en fonction de la géométrie et des caractéristiques physiques de ce dernier. Pour les deux types de mode, on trouve :

$$\operatorname{tg}(\chi_{20}u_0) = \frac{e_1^2(\tilde{x}_{10}/\chi_{20}) + e_3^2(\tilde{x}_{30}/\chi_{20})}{1 - e_1^2 e_3^2 (\tilde{x}_{10}/\chi_{20})(\tilde{x}_{30}/\chi_{20})} \quad (\text{II.21})$$

Avec :  $\tilde{x}_{10} = \sqrt{\beta_0^2 - k_1^2}$ ;  $\chi_{20} = \sqrt{k_2^2 - \beta_0^2}$ ;  $\tilde{x}_{30} = \sqrt{\beta_0^2 - k_3^2}$ ;  $\beta_0 = k_2 \sin \theta_0$

Après calculs, on trouve :

Dans le *milieu 1*, les ondes sont évanescentes avec :

$$A_1^{00}(\beta) = e_1 \cos(\chi_{20}u_0 - \varphi_0) e^{-\tilde{x}_{10}u_0} \delta(\beta - \beta_0)$$

Dans le *milieu 2*, on obtient l'onde guidée avec :

$$A_2^{(-,00)}(\beta) = \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \delta(\beta - \beta_0) \quad ; \quad A_2^{(+,00)}(\beta) = \frac{1}{2} e^{+j\varphi_0} \delta(\beta - \beta_0)$$

Dans le *milieu 3*, les ondes sont évanescentes avec :

$$A_3^{00}(\beta) = e_3 \cos \varphi_0 \delta(\beta - \beta_0)$$

On note :

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + e_3^4 (\tilde{x}_{30}^2 / \chi_{20}^2)}} \quad ; \quad \cos(\chi_{20}u_0 - \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + e_1^4 (\tilde{x}_{10}^2 / \chi_{20}^2)}}$$

Les deux polarisations sont distinguées par les coefficients :

$$e_1 = \begin{cases} 1 & E_{//} \\ n_2 / n_1 & H_{//} \end{cases} \quad e_3 = \begin{cases} 1 & E_{//} \\ n_2 / n_3 & H_{//} \end{cases}$$

### II.6.3. Perturbation à l'ordre 1

A l'ordre un, le guide possède une déformation asymétrique. Alors, l'analyse de phénomène de rayonnement est possible dans ce cas, les fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$  ne sont pas

nuls. On cherche la solution des conditions aux limites (II.16) à (II.19) au premier ordre de perturbation suivant les deux paramètres  $\nu_a$  et  $\nu_b$  caractérisant les deux interfaces.

On trouve les systèmes suivants :

Pour le mode TE :

$$\begin{cases} A_2^{(-,10)}(\beta) + A_2^{(+,10)}(\beta) - A_3^{(10)}(\beta) = 0 \\ j\chi_2 A_2^{(-,10)}(\beta) - j\chi_2 A_2^{(+,10)}(\beta) - j\chi_3 A_3^{(10)}(\beta) = (\chi_{20}^2 + \hat{\chi}_{30}^2) \cos \varphi_0 \hat{\alpha}(\beta - \beta_0) \\ A_1^{(10)}(\beta) \exp(-j\chi_1 u_0) - A_2^{(-,10)}(\beta) \exp(+j\chi_2 u_0) - A_2^{(+,10)}(\beta) \exp(-j\chi_2 u_0) = 0 \\ -\chi_1 A_1^{(10)}(\beta) \exp(-j\chi_1 u_0) - \chi_2 A_2^{(-,10)}(\beta) \exp(+j\chi_2 u_0) + \chi_2 A_2^{(+,10)}(\beta) \exp(-j\chi_2 u_0) = 0 \end{cases}$$

Pour le mode TM :

$$\begin{cases} n_2 A_2^{(-,10)}(\beta) + n_2 A_2^{(+,10)}(\beta) - n_3 A_3^{(10)}(\beta) = (n_3^2 - n_2^2) \hat{\chi}_{30} \frac{n_2}{n_3} \cos \varphi_0 \hat{\alpha}(\beta - \beta_0) \\ \chi_2 n_3 A_2^{(+,10)}(\beta) - \chi_2 n_3 A_2^{(-,10)}(\beta) + \chi_3 n_2 A_3^{(10)}(\beta) = j \frac{n_2^2 - n_3^2}{n_3} \beta \beta_0 \cos \varphi_0 \hat{\alpha}(\beta - \beta_0) \\ n_1 A_1^{(10)}(\beta) \exp(-j\chi_1 u_0) - n_2 A_2^{(-,10)}(\beta) \exp(+j\chi_2 u_0) - n_2 A_2^{(+,10)}(\beta) \exp(-j\chi_2 u_0) = 0 \\ \chi_1 n_2 A_1^{(10)}(\beta) \exp(-j\chi_1 u_0) + \chi_2 n_1 A_2^{(-,10)}(\beta) \exp(+j\chi_2 u_0) - \chi_2 n_1 A_2^{(+,10)}(\beta) \exp(-j\chi_2 u_0) = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre les deux systèmes linéaires des deux modes TE et TM, on utilise un logiciel mathématique symbolique adapté à ce genre de problème qui est Maple.

Tous calculs faits, nous trouvons pour l'amplitude des champs dans chaque milieu :

$$\begin{aligned} A_{1,3}^{(1)}(\beta) &= K_{a(1,3)} \hat{a}(\beta - \beta_0) + K_{b(1,3)} \hat{b}(\beta - \beta_0) \\ A_2^{(\pm,1)}(\beta) &= K_{a(2)}^\pm \hat{a}(\beta - \beta_0) + K_{b(2)}^\pm \hat{b}(\beta - \beta_0) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

$\hat{a}(\beta)$  et  $\hat{b}(\beta)$  sont les transformées de Fourier des fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$  divisées par  $\sqrt{L}$  :

$$\hat{a}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} a(x) \exp(j\beta x) dx \quad ; \quad \hat{b}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} b(x) \exp(j\beta x) dx$$

Les coefficients  $K_{a(1,3)}$ ,  $K_{b(1,3)}$ ,  $K_{a(2)}^\pm$  et  $K_{b(2)}^\pm$  dépendent de la polarisation.

- Pour la perturbation à l'ordre (10) à la surface inférieure:  $a(x) \neq 0$  et  $b(x) = 0$  :

Dans le milieu 1 (ondes de rayonnement)

$$K_{a(1)} = \begin{cases} \frac{j\chi_2(k_2^2 - k_3^2)\cos\varphi_0}{r_E(\beta)} \exp(+j\chi_1 u_0) & \text{E//} \\ \frac{n_1 n_2 \chi_2 \left( \frac{n_2^2}{n_3^2} \chi_3 \bar{x}_{30} - j\beta\beta_0 \right) (n_3^2 - n_2^2) \cos\varphi_0}{r_H(\beta)} \exp(+j\chi_1 u_0) & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Dans le milieu 2 (ondes guidées)

$$K_{a(2)}^{(+)} = \begin{cases} \frac{j(\chi_2 + \chi_1)(k_2^2 - k_3^2)\cos\varphi_0}{2r_E(\beta)} \exp(+j\chi_2 u_0) & \text{E//} \\ \frac{(n_1^2 \chi_2 + n_2^2 \chi_1)(n_3^2 - n_2^2) \left( \frac{n_2^2}{n_3^2} \chi_3 \bar{x}_{30} - j\beta\beta_0 \right) \cos\varphi_0}{2r_H(\beta)} \exp(+j\chi_2 u_0) & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

$$K_{a(2)}^{(-)} = \begin{cases} \frac{j(\chi_2 - \chi_1)(k_2^2 - k_3^2)\cos\varphi_0}{2r_E(\beta)} \exp(-j\chi_2 u_0) & \text{E//} \\ \frac{(n_1^2 \chi_2 - n_2^2 \chi_1)(n_3^2 - n_2^2) \left( \frac{n_2^2}{n_3^2} \chi_3 \bar{x}_{30} - j\beta\beta_0 \right) \cos\varphi_0}{2r_H(\beta)} \exp(-j\chi_2 u_0) & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Dans le milieu 3 (ondes de rayonnement)

$$K_{a(3)} = \begin{cases} \frac{j(\chi_2 \cos\chi_2 u_0 + j\chi_1 \sin\chi_2 u_0)(k_2^2 - k_3^2)\cos\varphi}{r_E(\beta)} & \text{E//} \\ \frac{n_2 \left( \begin{array}{l} n_2^2 \chi_1 (\beta\beta_0 \sin(\beta_2 u_0) - \chi_2 \bar{x}_{30} \cos(\beta_2 u_0)) \\ -j n_1^2 \chi_2 (\beta\beta_0 \cos(\beta_2 u_0) + \chi_2 \bar{x}_{30} \sin(\beta_2 u_0)) \end{array} \right) (n_3^2 - n_2^2)}{r_H(\beta)} \cos\varphi_0 & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

- Pour perturbation à l'ordre (01) à la surface supérieur,  $a(x) = 0$  et  $b(x) \neq 0$  :

Dans le milieu 1 (ondes de rayonnement)

$$K_{b(1)} = \begin{cases} \frac{j(k_1^2 - k_2^2)(j\chi_3 \sin\chi_2 u_0 + \chi_2 \cos\chi_2 u_0)}{r_E(\beta)} \exp(+j\chi_1 u_0) \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0) & \text{E//} \\ \frac{\frac{n_2}{n_1} \left( \begin{array}{l} n_2^2 \chi_3 (\chi_2 \bar{x}_{10} \cos\chi_2 u_0 - \beta\beta_0 \sin\chi_2 u_0) \\ +j n_3^2 \chi_2 (\beta\beta_0 \cos\chi_2 u_0 + \chi_2 \bar{x}_{10} \sin\chi_2 u_0) \end{array} \right) (n_1^2 - n_2^2) \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0)}{r_H(\beta)} \exp(+j\chi_1 u_0) & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

Dans le milieu 2 (ondes guidées)

$$K_{b(2)}^{(+)} = \begin{cases} \frac{j(k_1^2 - k_2^2)(\chi_2 - \chi_3) \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0)}{2r_E(\beta)} & \text{E//} \\ \frac{(n_2^2 \chi_3 - n_3^2 \chi_2) \left( \frac{n_2^2}{n_1^2} \chi_1 \hat{x}_{10} - j n_1^2 \beta \beta_0 \right) (n_1^2 - n_2^2) \cos(\chi_{20} u_0 - \varphi_0)}{2r_H(\beta)} & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

$$K_{b(2)}^{(-)} = \begin{cases} \frac{j(k_1^2 - k_2^2)(\chi_2 + \chi_3) \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0)}{2r_E(\beta)} & \text{E//} \\ \frac{(n_2^2 \chi_3 + n_3^2 \chi_2) \left( -\frac{n_2^2}{n_1^2} \chi_1 \hat{x}_{10} + j n_1^2 \beta \beta_0 \right) (n_1^2 - n_2^2) \cos(\chi_{20} u_0 - \varphi_0)}{2r_H(\beta)} & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

Dans le milieu 3 (ondes de rayonnement)

$$K_{b(3)} = \begin{cases} \frac{j(k_1^2 - k_2^2) \chi_2 \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0)}{r_E(\beta)} & \text{E//} \\ \frac{n_2 n_3 \chi_2 \left( -\frac{n_2^2}{n_1^2} \chi_1 \hat{x}_{10} + j n_1^2 \beta \beta_0 \right) (n_1^2 - n_2^2) \cos(\chi_{20} u_0 - \varphi_0)}{r_H(\beta)} & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$$\begin{cases} r_E(\beta) = \chi_2 (\chi_1 + \chi_3) \cos \chi_2 u_0 + j (\chi_1 \chi_3 + \chi_2^2) \sin \chi_2 u_0 \\ r_H(\beta) = n_2^2 \chi_2 (n_1^2 \chi_3 + n_2^2 n_3^2 \chi_1) \cos(\chi_2 u_0) + j (n_1^2 n_3^2 \chi_2^2 + n_2^4 \chi_1 \chi_3) \sin(\chi_2 u_0) \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

## II.6.4. Expression des champs

Dans le milieu 1 (ondes de rayonnement) :

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\beta) \exp(-j(\beta x + \chi_1 y)) d\beta = \begin{cases} E_z(x, y) & \text{E//} \\ ZH_z(x, y) & \text{H//} \end{cases}$$

Mode TE :

$$F_1^1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{j\chi_2(k_2^2 - k_3^2) \cos \varphi_0}{r_E(\beta)} \hat{a}(\beta - \beta_0) + \frac{j(k_1^2 - k_2^2)(\chi_2 \cos \chi_2 u_0 + j\chi_3 \sin \chi_2 u_0) \cos(\chi_{20} u_0 - \varphi_0)}{r_E(\beta)} \hat{b}(\beta - \beta_0) \right) \exp(-j(\beta x + \chi_1(y - u_0))) d\beta$$

Mode TM :

$$F_1^1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{n_1 n_2 \chi_2 \left( \frac{n_2^2}{n_3^2} \chi_3 \tilde{x}_{30} - j \beta \beta_0 \right) (n_3^2 - n_2^2) \cos \varphi_0}{r_H(\beta)} \hat{a}(\beta - \beta_0) \right. \\ \left. + \frac{\frac{n_2}{n_1} \left( n_2^2 \chi_3 (\chi_2 \tilde{x}_{10} \cos \chi_2 u_0 - \beta \beta_0 \sin \chi_2 u_0) \right)}{n_1 \left( + j n_3^2 \chi_2 (\beta \beta_0 \cos \chi_2 u_0 + \chi_2 \tilde{x}_{10} \sin \chi_2 u_0) \right)} (n_1^2 - n_2^2) \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0) \hat{b}(\beta - \beta_0)}{r_H(\beta)} \right) \exp(-j(\beta x + \chi_1(y - u_0))) d\beta$$

Dans le milieu 2 (ondes guidées) :

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( A_2^{(-)}(\beta) \exp(-j(\beta x - \chi_2 y)) + A_2^{(+)}(\beta) \exp(-j(\beta x + \chi_2 y)) \right) d\beta = \begin{cases} E_{2z}(x, y) & E// \\ Z_2 H_{2z}(x, y) & H// \end{cases}$$

Mode TE :

$$F_2^1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \chi_1 \sin \chi_2 (y - u_0) + j \chi_2 \cos \chi_2 (y - u_0) \right) \frac{(k_2^2 - k_3^2)}{r_E(\beta)} \cos \varphi_0 \hat{a}(\beta - \beta_0) \right. \\ \left. + \left( -\chi_3 \sin \chi_2 y + j \chi_2 \cos \chi_2 y \right) \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{r_E(\beta)} \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0) \hat{b}(\beta - \beta_0) \right) \exp(-j\beta x) d\beta$$

Mode TM :

$$F_2^1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( n_1^2 \chi_2 \cos \chi_2 (y - u_0) - j n_2^2 \chi_1 \sin \chi_2 (y - u_0) \right) \frac{\left( \frac{n_2^2}{n_3^2} \chi_3 \tilde{x}_{30} - j \beta \beta_0 \right)}{r_H(\beta)} (n_3^2 - n_2^2) \cos \varphi_0 \hat{a}(\beta - \beta_0) \right. \\ \left. + \left( n_3^2 \chi_2 \cos \chi_2 y + j n_2^2 \chi_3 \sin \chi_2 y \right) \frac{\left( \frac{n_2^2}{n_1^2} \chi_1 \tilde{x}_{10} - j n_1^2 \beta \beta_0 \right)}{r_H(\beta)} (n_2^2 - n_1^2) \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0) \hat{b}(\beta - \beta_0) \right) \exp(-j\beta x) d\beta$$

Dans le milieu 3 (ondes de rayonnement):

$$F_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_3(\beta) \exp(-j(\beta x - \chi_3 y)) d\beta = \begin{cases} E_{3z}(x, y) & E// \\ Z_3 H_{2z}(x, y) & H// \end{cases}$$

Mode TE :

$$F_3^1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{j(\chi_2 \cos \chi_2 u_0 + j \chi_1 \sin \chi_2 u_0)(k_2^2 - k_3^2) \cos \varphi}{r_E(\beta)} \hat{a}(\beta - \beta_0) \right. \\ \left. + \frac{j(k_1^2 - k_2^2) \chi_2 \cos(\chi_2 u_0 - \varphi_0)}{r_E(\beta)} \hat{b}(\beta - \beta_0) \right) \exp(-j(\beta x - \chi_3 y)) d\beta$$

Mode TM :

$$F_3^1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\frac{n_2}{n_3} \left( n_2^2 \chi_1 (\beta \beta_0 \sin(\beta_2 u_0) - \chi_2 \tilde{x}_{30} \cos(\beta_2 u_0)) \right)}{r_H(\beta)} (n_3^2 - n_2^2) \cos \varphi_0 \right. \\ \left. + \frac{n_2 n_3 \chi_2 \left( \frac{n_2^2}{n_1^2} \chi_1 \tilde{x}_{10} - j n_1^2 \beta \beta_0 \right) (n_2^2 - n_1^2) \cos(\chi_{20} u_0 - \varphi_0)}{r_H(\beta)} \hat{b}(\beta - \beta_0) \right) \exp(-j(\beta x - \chi_3 y)) d\beta$$

## II.7. Calcul énergétique

### II.7.1. Puissance transmise

Le rôle d'un guide d'onde est toujours de transmettre une certaine énergie de son entrée à sa sortie, qui est donnée par le vecteur de Poynting réel. Alors, la puissance transmise est calculée à partir de la composante  $N^x$  du vecteur de Poynting complexe. La moyenne de ce vecteur en fonction des amplitudes complexes de champs prend la forme :

$$\overline{N^x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E_y H_z^* - E_z H_y^*] \quad (\text{II.32})$$

Suivant les expressions (II.9) et (II.10), pour les deux types de modes on trouve :

$$\overline{N^x} = \frac{\beta_0}{2kZ} |F(x, y)|^2 \quad (\text{II.33})$$

La puissance moyenne transmise par unité de largeur du guide est définie par :

$$P_t = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{N^x} dy dz \quad (\text{II.34})$$

Tout calcul fait, nous trouvons :

$$P_t = \frac{\beta_0}{4kZ} \left[ u_0 + e_1^2 \frac{1}{\tilde{x}_{10}} \frac{1 + (\tilde{x}_{10}^2 / \chi_{20}^2)}{1 + e_1^4 (\tilde{x}_{10}^2 / \chi_{20}^2)} + e_3^2 \frac{1}{\tilde{x}_{30}} \frac{1 + (\tilde{x}_{30}^2 / \chi_{20}^2)}{1 + e_3^4 (\tilde{x}_{30}^2 / \chi_{20}^2)} \right] \quad (\text{II.35})$$

### II.7.2. L'intensité de rayonnement

La composante  $N^y$  du vecteur de Poynting permet de déterminer la puissance rayonnée. L'expression de la valeur moyenne de la composante  $\overline{N^y}$  est donnée par l'expression :

$$\bar{N}^y = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E_z H_x^* - E_x H_z^*] \quad (\text{II.36})$$

Suivant les expressions (II.9) et (II.10), pour les deux types de polarisation, l'expression de la valeur moyenne de la composante  $\bar{N}^y$  est la même. Elle est donnée par :

$$\bar{N}^y(x, y) = \frac{1}{2kZ} \operatorname{Re} \left( jF(x, y) \frac{\partial F(x, y)^*}{\partial y} \right) \quad (\text{II.37})$$

La puissance rayonnée par unité de largeur est :

$$P_r = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^y dx dz = \frac{1}{2kZ} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} jF(x, y) \frac{\partial F(x, y)^*}{\partial y} dx \quad (\text{II.38})$$

Suivant le théorème de Parseval, on peut écrire :

$$P_r = \frac{1}{2kZ} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} j\hat{F}(\beta, y) \frac{\partial \hat{F}(\beta, y)^*}{\partial y} d\beta \quad (\text{II.39})$$

Avec  $\hat{F}(\beta, y)$  la transformée de Fourier de  $F(x, y)$ . Le rayonnement est provoqué par les ondes réelles dans le milieu 1 et le milieu 3 qui seules transportent de la puissance à l'infini d'où les termes en  $y$  se simplifient dans l'expression (II.39).

$$P_{r1,3} = \frac{1}{2k_{1,3}Z_{1,3}} \int_{-k_{1,3}}^{+k_{1,3}} \chi_{1,3} |A_{1,3}^{(1)}(\beta)|^2 d\beta = \frac{k_{1,3}}{2Z_{1,3}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \theta_{1,3} |A_{1,3}^{(1)}(\theta_{1,3})|^2 d\theta_{1,3} \quad (\text{II.40})$$

L'intégrand de l'intégrale (II.40) représente la densité angulaire de puissance rayonnée  $I_{r1,3}(\beta_{1,3})$ .

$$I_{r1,3}(\beta_{1,3}) = \frac{1}{2k_{1,3}Z_{1,3}} |A_{1,3}(\beta_{1,3})|^2 \chi_{1,3}^2 \quad (\text{II.41})$$

On définit une quantité dite "intensité de rayonnement" par le rapport de la densité angulaire de puissance rayonnée à l'extérieur du guide dans la direction  $\theta_{1,3}$  ( $\beta_{1,3} = k_{1,3} \sin \theta_{1,3}$ ) à la puissance transmise divisée par la largeur du guide :

$$\eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) = \frac{I_{r1,3}(\beta_{1,3})}{LP_t} \quad (\text{II.42})$$

Au premier ordre de perturbation, on trouve l'expression suivante :

$$\eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) = \mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) \left( \text{Re}^2 A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) + \text{Im}^2 A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) \right) \quad (\text{II.43})$$

Avec :

$$\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) = \frac{\chi_{1,3}^2}{2Lk_{1,3}Z_{1,3}P_l} \quad (\text{II.44})$$

### II.7.3. Cas particulier

Dans le cas d'un guide où les deux parois sont parallèles ( $\hat{a}(\beta - \beta_0) = \hat{b}(\beta - \beta_0)$ ) avec un milieu 1 vide ( $n_1 = 1$ ) et un milieu 3 infiniment conducteur ( $n_3 \rightarrow -j\infty$ ) et à partir des expressions (II.21)-(II.29), on obtient l'amplitude du champ rayonnée dans le milieu 1 :

$$K_1^{(1)} = \begin{cases} j \frac{k_1^2 (1 - n_2^2) \sin \chi_2 u_0 \sin(\chi_2 u_0) + \chi_2 \chi_{20} \exp(+j\chi_1 u_0)}{\chi_1 \sin \chi_2 u_0 - j\chi_2 \cos u_0} & \text{E//} \\ n_2 \left( (1 - n_2^2) \cos(\chi_2 u_0) (\beta \beta_0 \cos(\chi_2 u_0) + \chi_2 \tilde{x}_{10} \sin(\chi_2 u_0)) + (k_2^2 - \beta \beta_0) \right) \exp(+j\chi_1 u_0) & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Et l'amplitude du champ guidé dans le milieu 2 :

$$K_2^{(+,1)} = \begin{cases} \frac{k_1^2 (n_2^2 - 1) \sin(\chi_2 u_0) + j\chi_2 (\chi_2 + \chi_1) \exp(+j\chi_2 u_0)}{2(\chi_1 \sin \chi_2 u_0 - j\chi_2 \cos u_0)} & \text{E//} \\ \frac{(1 - n_2^2) (\beta \beta_0 + jn_2^2 \chi_1 \tilde{x}_{10}) \cos(\chi_2 u_0) + (k_2^2 - \beta \beta_0) \left( 1 + n_2^2 \frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \exp(+j\chi_2 u_0)}{2(\chi_2 \sin(\chi_2 u_0) - jn_2^2 \chi_1 \cos(\chi_2 u_0))} & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

$$K_2^{(+,1)} = \begin{cases} \frac{k_1^2 (n_2^2 - 1) \sin(\chi_2 u_0) + j\chi_2 (\chi_2 + \chi_1) \exp(+j\chi_2 u_0)}{2(\chi_1 \sin \chi_2 u_0 - j\chi_2 \cos u_0)} & \text{E//} \\ \frac{(1 - n_2^2) (\beta \beta_0 + jn_2^2 \chi_1 \tilde{x}_{10}) \cos(\chi_2 u_0) + (k_2^2 - \beta \beta_0) \left( 1 + n_2^2 \frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \exp(+j\chi_2 u_0)}{2(\chi_2 \sin(\chi_2 u_0) - jn_2^2 \chi_1 \cos(\chi_2 u_0))} & \text{H//} \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

Dans le cas où les interfaces ont la même fonction d'autocorrélation et sont non corrélées ( $\hat{R}_{ab} = 0$ ) et pour des milieux 1 et 3 identiques avec  $n_1 = n_3$  proche de  $n_2$ , la moyenne statistique de l'intensité totale de rayonnement en polarisation E// s'écrit :

$$\langle \eta_t \rangle = \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \chi_{20}^2 \hat{x}_{10}}{k_2 \sin \theta \left( 1 + \frac{\hat{x}_{10} u_0}{2} \right)} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R_{aa} (k_1 \sin \theta - k_2 \sin \theta_0) d\theta \quad (\text{II.48})$$

En polarisation H// s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \eta_t \rangle = & \frac{(n_2^2 - n_1^2) \beta_0 \chi_{20}^2 \hat{x}_{10}}{2n_0^5 k_0^2 \left( 1 + \frac{\hat{x}_{10} u_0}{2n_2^2 n_1^2} \frac{(n_1^4 \chi_{20}^2 - n_1^2 \hat{x}_{10}^2)}{\chi_{20}^2 + \hat{x}_{10}^2} \right)} \\ & \times \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \beta^2 \left( 1 + \frac{n_2^4 \chi_1^2}{n_1^4 \chi_2^2} \right) \left( 1 + \frac{\chi_2^2 \hat{x}_{10}^2}{\beta^2 \beta_0^2} \right) \hat{R}_{aa} (k_1 \sin \theta - k_2 \sin \theta_0) d\theta \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

## **Chapitre III : Etude statistique de l'intensité de rayonnement**

### **III.1. Introduction**

### **III.2. Caractéristiques statistiques**

#### **III.2.1. Valeur moyenne de l'intensité de rayonnement**

#### **III.2.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude du champ rayonné**

#### **III.2.3. Densité de probabilité de l'intensité de rayonnement**

#### **III.2.4. Fonction de répartition de l'intensité de rayonnement**

## Chapitre III : Etude statistique de l'intensité de rayonnement

### III.1. Introduction

L'étude statistique de l'intensité de rayonnement par la géométrie de guide étudié, nous oblige de bien comprendre les caractéristiques statistiques de cette intensité. Dans l'hypothèse de distribution des hauteurs gaussiennes, nous essayons de déterminer les expressions analytiques de la densité de probabilité  $P_{(1,3)}$ , la variance  $\sigma_{(1,3)}^2$ , la covariance  $\Gamma_{(1,3)}$  et enfin la fonction de répartition  $F_{\eta_r,1,3}$  de l'intensité de rayonnement à partir des expressions de l'amplitude du champ rayonné obtenus dans le chapitre précédent.

### III.2. Caractéristiques statistiques

#### III.2.1. Valeur moyenne de l'intensité de rayonnement

En tenant compte de l'expression (II.43), la moyenne statistique de l'intensité de rayonnement est donnée par :

$$\langle \eta_{r,1,3}(\beta_{1,3}) \rangle = \mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) \left( \langle \text{Re}^2 A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) \rangle + \langle \text{Im}^2 A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) \rangle \right) \quad (\text{III.1})$$

#### III.2.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude du champ rayonné

D'après la relation (II.22), l'amplitude des ondes rayonnées s'écrit :

$$A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) = K_{a(1,3)}(\beta_{1,3}) \hat{a}(\beta_{1,3} - \beta_0) + K_{b(1,3)}(\beta_{1,3}) \hat{b}(\beta_{1,3} - \beta_0) \quad (\text{III.2})$$

Les terme  $A_{1,3}(\beta_{1,3})$ ,  $K_{a(1,3)}(\beta_{1,3})$ ,  $K_{b(1,3)}(\beta_{1,3})$ ,  $\hat{a}(\beta_{1,3} - \beta_0)$  et  $\hat{b}(\beta_{1,3} - \beta_0)$  sont des nombres complexes s'écrit sous la forme générale comme une somme de partie réelle et imaginaire :

On a :

$$A_{1,3}(\beta_{1,3}) = \text{Re}[A_{1,3}(\beta_{1,3})] + j \text{Im}[A_{1,3}(\beta_{1,3})] \quad (\text{III.3})$$

D'après (III.2) et (III.3), on a :

$$\begin{aligned} \text{Re}[A_{1,3}(\beta_{1,3})] + j \text{Im}[A_{1,3}(\beta_{1,3})] &= [\text{Re}K_{a(1,3)} + j \text{Im}K_{a(1,3)}][\text{Re}\hat{a}(\beta_{1,3} - \beta_0) + j \text{Im}\hat{a}(\beta_{1,3} - \beta_0)] + \\ &[\text{Re}K_{b(1,3)} + j \text{Im}K_{b(1,3)}][\text{Re}\hat{b}(\beta_{1,3} - \beta_0) + j \text{Im}\hat{b}(\beta_{1,3} - \beta_0)] \end{aligned}$$

Ainsi les parties réelle et imaginaire de l'amplitude de rayonnement sont données sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Re}[A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3})] &= \text{Re}(K_{a(1,3)})\text{Re}[\hat{a}(\gamma)] - \text{Im}(K_{a(1,3)})\text{Im}[\hat{a}(\gamma)] + \text{Re}(K_{b(1,3)})\text{Re}[\hat{b}(\gamma)] - \text{Im}(K_{b(1,3)})\text{Im}[\hat{b}(\gamma)] \\ \text{Im}[A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3})] &= \text{Im}(K_{a(1,3)})\text{Re}[\hat{a}(\gamma)] + \text{Re}(K_{a(1,3)})\text{Im}[\hat{a}(\gamma)] + \text{Im}(K_{b(1,3)})\text{Re}[\hat{b}(\gamma)] + \text{Re}(K_{b(1,3)})\text{Im}[\hat{b}(\gamma)] \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Où :

$$\gamma_{1,3} = \beta_{1,3} - \beta_0 = k_{1,3} \sin \theta_{1,3} - k_2 \sin \theta_0 \quad (\text{III.5})$$

Et:

$$\text{Re}[\hat{c}(\gamma)] = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} c(x) \cos(\gamma x) dx \quad ; \quad \text{Im}[\hat{c}(\gamma)] = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} c(x) \sin(\gamma x) dx \quad (\text{III.6})$$

Pour la suite,  $\hat{c}(\gamma)$  et  $c(x)$  représentent indifféremment  $\hat{a}(\gamma)$  et  $a(x)$  ou  $\hat{b}(\gamma)$  et  $b(x)$ . Les variances et la covariance des parties réelle et imaginaire de la fonction aléatoire  $A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3})$  dépendent des variances et des covariances associées aux différentes grandeurs  $\text{Re}[\hat{c}(\gamma)]$  et  $\text{Im}[\hat{c}(\gamma)]$ .

Nous rappelons que l'équation de la variance de la partie réelle et imaginaire est de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{R(1,3)}^2 &= E[\text{Re}^2 A_{1,3}(\beta_{1,3})] - E[\text{Re} A_{1,3}(\beta_{1,3})]^2 \\ \sigma_{I(1,3)}^2 &= E[\text{Im}^2 A_{1,3}(\beta_{1,3})] - E[\text{Im} A_{1,3}(\beta_{1,3})]^2 \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Signalons que  $\langle \hat{a} \rangle$  et  $\langle \hat{b} \rangle$  sont nulles car ils sont centrée, donc  $E[\text{Re}A_{1,3}(\beta_{1,3})]^2$  et  $E[\text{Im}A_{1,3}(\beta_{1,3})]^2$  sont aussi nulles.

Alors:

$$\begin{aligned} \sigma_{R(1,3)}^2 &= E[\text{Re}^2 A_{1,3}(\beta_{1,3})] = \langle \text{Re}^2 A_{1,3}(\beta_{1,3}) \rangle \\ \sigma_{I(1,3)}^2 &= E[\text{Im}^2 A_{1,3}(\beta_{1,3})] = \langle \text{Im}^2 A_{1,3}(\beta_{1,3}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

A partir de l'expression (III.2) et (III.8), nous obtenons les variances  $\sigma_{R(1,3)}^2$  et  $\sigma_{I(1,3)}^2$  et la covariance  $\Gamma_{RI(1,3)}$  des parties réelle et imaginaire de l'amplitude des champs rayonnés sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
\sigma_{R(1,3)}^2 = \langle \text{Re}^2[A_{1,3}^{(1)}(\beta)] \rangle &= \text{Re}^2(K_{a(1,3)}) \langle \text{Re}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle + \text{Im}^2(K_{b(1,3)}) \langle \text{Im}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle \\
&+ \text{Re}^2(K_{b(1,3)}) \langle \text{Re}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle + \text{Im}^2(K_{b(1,3)}) \langle \text{Im}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\
&+ 2 \text{Re}(K_{a(1,3)}) \text{Re}(K_{b(1,3)}) \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\
&+ 2 \text{Im}(K_{a(1,3)}) \text{Im}(K_{b(1,3)}) \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\
&+ 2 \text{Im}(K_{a(1,3)}) K_{b(1,3)}^* \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle
\end{aligned} \tag{III.9}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{I(1,3)}^2 = \langle \text{Im}^2[A_{1,3}^{(1)}(\beta)] \rangle &= \text{Re}^2(K_{a(1,3)}) \langle \text{Im}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle + \text{Im}^2(K_{a(1,3)}) \langle \text{Re}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle \\
&+ \text{Re}^2(K_{b(1,3)}) \langle \text{Im}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle + \text{Im}^2(K_{b(1,3)}) \langle \text{Re}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\
&+ 2 \text{Im}(K_{a(1,3)}) \text{Im}(K_{b(1,3)}) \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\
&+ 2 \text{Re}(K_{a(1,3)}) \text{Re}(K_{b(1,3)}) \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\
&+ 2 \text{Im}(K_{a(1,3)}) K_{b(1,3)}^* \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle
\end{aligned} \tag{III.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{RI(1,3)} = \langle \text{Re}[A_{1,3}^{(1)}(\beta)] \text{Im}[A_{1,3}^{(1)}(\beta)] \rangle &= \text{Re}(K_{a(1,3)}) \text{Im}(K_{a(1,3)}) (\langle \text{Re}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle - \langle \text{Im}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle) \\
&+ \text{Re}(K_{b(1,3)}) \text{Im}(K_{b(1,3)}) (\langle \text{Re}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle - \langle \text{Im}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle)
\end{aligned} \tag{III.11}$$

Pour trouver les variances des parties réelle et imaginaires des transformées de Fourier  $\hat{a}(\gamma)$  et  $\hat{b}(\gamma)$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{Ra}^2 = \langle \text{Re}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle &= \frac{1}{L} \left\langle \left( \int_{-L/2}^{L/2} a(x) \cos(\gamma x) dx \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \langle a(x) a(x') \rangle \cos(\gamma x) \cos(\gamma x') dx dx' \\
\sigma_{Ia}^2 = \langle \text{Im}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle &= \frac{1}{L} \left\langle \left( \int_{-L/2}^{L/2} a(x) \sin(\gamma x) dx \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \langle a(x) a(x') \rangle \sin(\gamma x) \sin(\gamma x') dx dx'
\end{aligned}$$

Avec :  $\gamma = \beta - \beta_0$

On a :

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma x) \cos(\gamma x') &= \frac{1}{2} (\cos \gamma(x' - x) + \cos \gamma(x' + x)) \\
\sin(\gamma x) \sin(\gamma x') &= \frac{1}{2} (\cos \gamma(x' - x) - \cos \gamma(x' + x))
\end{aligned} \tag{III.12}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \langle a(x) a(x') \rangle [\cos \gamma(x' - x) + \cos \gamma(x' + x)] dx dx' \\
\sigma_{Ia}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \langle a(x) a(x') \rangle [\cos \gamma(x' - x) - \cos \gamma(x' + x)] dx dx'
\end{aligned} \tag{III.13}$$

On pose :  $x' - x = \kappa$  ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \langle a(x) a(x + \kappa) \rangle [\cos \gamma \kappa + \cos \gamma (2x + \kappa)] dx d\kappa \\ \sigma_{Ia}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\kappa-L/2}^{\kappa+L/2} \langle a(x) a(x + \kappa) \rangle [\cos \gamma \kappa - \cos \gamma (2x + \kappa)] dx d\kappa\end{aligned}\quad (\text{III.14})$$

En se rappelant que  $a(x)$  est nulle en dehors de l'intervalle  $[-L/2, +L/2]$ , et en supposant que la largeur des zones de transition entre les zones planes et la zone modulée de la surface est petite devant la largeur de la surface (pour assurer la continuité des dérivées première et seconde),  $\langle a(x) a(x + \kappa) \rangle$  peut être remplacée par la fonction d'autocorrélation  $R_{aa}(\kappa)$  pour  $\kappa \in [-L, +L]$ . Cette quantité s'annulant ailleurs, nous intervertissons l'ordre des intégrations, il vient pour la variance de la partie réelle:

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa \int_{-\kappa-L/2}^{L/2} dx d\kappa + \frac{1}{2L} \int_0^L R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa \int_{-L/2}^{-\kappa+L/2} dx d\kappa + \\ &+ \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 R_{aa}(\kappa) \int_{-\kappa-L/2}^{L/2} \cos \gamma (2x + \kappa) dx d\kappa + \frac{1}{2L} \int_0^L R_{aa}(\kappa) \int_{-L/2}^{-\kappa+L/2} \cos \gamma (2x + \kappa) dx d\kappa\end{aligned}$$

Où encore :

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^0 \left(1 + \frac{\kappa}{L}\right) R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa d\kappa + \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \frac{\kappa}{L}\right) R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa d\kappa + \\ &+ \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 R_{aa}(\kappa) \left[ \frac{\sin \gamma (2x + \kappa)}{2\gamma} \right]_{-\kappa-L/2}^{L/2} d\kappa + \frac{1}{2L} \int_0^L R_{aa}(\kappa) \left[ \frac{\sin \gamma (2x + \kappa)}{2\gamma} \right]_{-L/2}^{-\kappa+L/2} d\kappa\end{aligned}$$

D'où :

$$\sigma_{Ra}^2 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa d\kappa + \frac{1}{2L} \int_{-L}^0 R_{aa}(\kappa) \left[ \frac{\sin \gamma (L + \kappa)}{\gamma} \right] d\kappa + \frac{1}{2L} \int_0^L R_{aa}(\kappa) \left[ \frac{\sin \gamma (L - \kappa)}{\gamma} \right] d\kappa$$

Où encore :

$$\sigma_{Ra}^2 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa d\kappa + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L R_{aa}(\kappa) \left[ \frac{\sin \gamma (L - |\kappa|)}{\gamma} \right] d\kappa$$

Finalement :

$$\sigma_{Ra}^2 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa d\kappa + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) \text{sinc} \gamma (L - |\kappa|) R_{aa}(\kappa) d\kappa \quad (\text{III.15a})$$

$$\sigma_{Ia}^2 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa d\kappa - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) \text{sinc} \gamma (L - |\kappa|) R_{aa}(\kappa) d\kappa \quad (\text{III.15b})$$

De façon générale on peut écrire pour les deux interfaces du guide:

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}^2(\hat{c}(\gamma)) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|k|}{L}\right) \cos \gamma x R_{cc}(k) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|k|}{L}\right) \text{sinc} \gamma (L - |k|) R_{cc}(k) dk \\ \langle \text{Im}^2(\hat{c}(\gamma)) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|k|}{L}\right) \cos \gamma x R_{cc}(k) dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|k|}{L}\right) \text{sinc} \gamma (L - |k|) R_{cc}(k) dk \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Avec le même raisonnement pour les variances  $\sigma_{Rb}^2$  et  $\sigma_{lb}^2$  et les covariance  $\langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle$ ,  $\langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle$ ,  $\langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle$  associées à  $\hat{a}(\gamma)$  et  $\hat{b}(\gamma)$  sont non nulles si les surfaces sont corrélées on trouve les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos \gamma x R_{ab}(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}(\gamma(L - |x|)) R_{ab}(x) dx \\ \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos \gamma x R_{ab}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}(\gamma(L - |x|)) R_{ab}(x) dx \\ \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle &= - \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \sin(\gamma x) R_{ab}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Où  $\text{sinc} x = \sin x / x$ . Nous pouvons par ailleurs montrer que  $\text{Re}[\hat{c}(\gamma)]$  et  $\text{Im}[\hat{c}(\gamma)]$  sont non corrélées :

$$\langle \text{Re}(\hat{c}(\gamma)) \text{Im}(\hat{c}(\gamma)) \rangle = 0 \quad (\text{III.18})$$

Pour une valeur de  $\beta$  donnée, les relations (III.9) à (III.11) montrent que les variables aléatoires  $\text{Re}[A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3})]$  et  $\text{Im}[A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3})]$  présentent, dans le cas général, des variances différentes et la relation (III.6) indique que ces variables aléatoires sont corrélées quelle que soit l'état corrélé ou non corrélé des deux interfaces. En remplaçant (III.9-III.18) dans (III.1), nous montrons que l'intensité moyenne de rayonnement dépend aussi de la longueur  $L$  et des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélations :

$$\begin{aligned} \langle \eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) \rangle &= \mathcal{A}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left[ |K_{a(1,3)}|^2 R_{aa}(x) + |K_{b(1,3)}|^2 R_{bb}(x) \right] \cos(\gamma x) dx \\ &+ \mathcal{A}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) 2 \text{Re}[K_{a(1,3)} K_{a(1,3)}^* \exp(-j\gamma x)] R_{ab}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Dans le cas de surfaces non corrélées, la fonction d'intercorrélation est nulle et l'expression (III.19) de la valeur moyenne de l'intensité de rayonnement se simplifie avec  $R_{ab}(x) = 0$ .

On démontre que pour  $L \rightarrow +\infty$ ,

$$\langle \eta_{r,1,3}(\beta_{1,3}) \rangle = \mathcal{G}(\beta_{1,3}, \beta_0) \left[ |K_{a(1,3)}|^2 \hat{R}_{aa}(\gamma) + |K_{b(1,3)}|^2 \hat{R}_{bb}(\gamma) + 2\text{Re}(K_{a(1,3)}^* K_{b(1,3)} \hat{R}_{ab}(\gamma)) \right] \quad (\text{III.20})$$

### III.2.3. Densité de probabilité de l'intensité de rayonnement

Nous supposons que les densités de probabilité des hauteurs des deux interfaces sont des gaussiennes. Le caractère gaussien est conservé par opération linéaire. La transformée de Fourier est une opération linéaire donc les transformées de Fourier des fonctions aléatoires  $a(x)$  et  $b(x)$  sont aussi des processus gaussiens. La somme de deux processus gaussiens est un processus gaussien. En conséquence, les amplitudes de rayonnement sont des processus gaussiens de la variable  $\beta$ . Les deux variables aléatoires centrées  $\text{Re}[A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3})]$  et  $\text{Im}[A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3})]$  sont, dans le cas général, corrélées et présentent des variances différentes. La densité de probabilité conjointe est donc donnée par l'expression suivante :

$$p_{RI(1,3)}(x, y) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_{R(1,3)}^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_{R(1,3)}\sigma_{I(1,3)}} + \frac{y^2}{\sigma_{I(1,3)}^2}\right)\right]}{2\pi\sigma_{R(1,3)}\sigma_{I(1,3)}\sqrt{1-\rho^2}} \quad (\text{III.21})$$

Où  $\rho_{(1,3)}$  est le coefficient de corrélation :

$$\rho_{(1,3)} = \frac{\Gamma_{RI(1,3)}}{\sigma_{R(1,3)}\sigma_{I(1,3)}} \quad (\text{III.22})$$

L'expression de l'intensité de rayonnement est obtenue en fonction des parties réelle et imaginaire de  $A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3})$  :

$$\eta_{r,1,3}(\beta_{1,3}) = \mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) \left( \text{Re}^2 A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) + \text{Im}^2 A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) \right) \quad (\text{III.23})$$

En passant en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \text{Re} A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) &= M \cos \Psi \\ \text{Im} A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) &= M \sin \Psi \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Où :

$$M = \sqrt{\frac{\eta_{r,1,3}(\beta_{1,3})}{\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)}} \geq 0 \quad (\text{III.25})$$

Et  $-\pi \leq \Psi < \pi$ , nous obtenons la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires  $M$  et  $\Psi$  [14] :

$$p_{M\Psi}(m, \phi) = m p_{R_I}(m \cos \psi, m \sin \psi) \quad (\text{III.26})$$

On a :

$$p_{M\Psi}(m, \phi) = \frac{m}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{m^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\cos^2\phi}{\sigma_R^2} - 2\rho\frac{\cos\phi\sin\phi}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\sin^2\phi}{\sigma_I^2}\right)\right] \quad (\text{III.27})$$

En intégrant par rapport à  $\phi$ , on obtient la densité de probabilité du module de l'amplitude :

$$p_M(m) = \int_{-\pi}^{+\pi} p_{M\Psi}(m, \phi) d\phi \quad (\text{III.28})$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2\phi}{\sigma_R^2} - 2\rho\frac{\cos\phi\sin\phi}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\sin^2\phi}{\sigma_I^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2}\right) + \frac{\cos 2\phi}{2}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right) - \rho\frac{\sin 2\phi}{\sigma_R\sigma_I} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos 2\phi\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right) - \sin 2\phi\frac{2\rho}{\sigma_R\sigma_I}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}} (\cos 2\phi\cos\xi - \sin 2\phi\sin\xi) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}} \cos(2\phi + \xi) \end{aligned}$$

Avec:

$$\cos\xi = \frac{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}}}; \sin\xi = \frac{\frac{2\rho}{\sigma_R\sigma_I}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}}}$$

$$p_{M\Psi}(m, \phi) = \frac{m}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{m^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\cos^2\phi}{\sigma_R^2} - 2\rho\frac{\cos\phi\sin\phi}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\sin^2\phi}{\sigma_I^2}\right)\right]$$

$$p_{M\psi}(m, \phi) = \frac{m}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{m^2}{4(1-\rho^2)}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2}\right)\right] \\ \times \exp\left[-\frac{m^2}{4(1-\rho^2)}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}} \cos(2\phi + \xi)\right]$$

D'où :

$$p_M(m) = \frac{m}{\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{m^2}{4(1-\rho^2)}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2}\right)\right] \times I_0\left[\frac{m^2}{4(1-\rho^2)}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}}\right] \quad (\text{III.29})$$

Avec :

$$I_0\left[\frac{m^2}{4(1-\rho^2)}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left[-\frac{m^2}{4(1-\rho^2)}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}} \cos(2\phi + \xi)\right] d\phi$$

La densité du module est donnée par l'expression :

$$p_M(m) = \frac{m}{\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{m^2}{4(1-\rho^2)}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2}\right)\right] \times I_0\left[\frac{m^2}{4(1-\rho^2)}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}}\right]$$

On a :

$$\eta_{r,1,3}(\beta_{1,3}) = \mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) \left[ \text{Re}^2 A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) + \text{Im}^2 A_{1,3}^{(1)}(\beta_{1,3}) \right] = \mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) M_{(1,3)}^2$$

La densité de probabilité  $p_{\eta_{r,1,3}}(w)$  de l'intensité de rayonnement se déduit de la densité de probabilité du module  $p_M(m)$  par la relation suivante :

$$p_{\eta_{r,1,3}}(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)} p_M(\sqrt{w/\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)}) \quad \text{Avec } w \geq 0 \quad (\text{III.30})$$

Après quelques calculs, on obtient pour  $w \geq 0$  :

$$p_{\eta_{r,1,3}}(w) = \frac{\exp\left[-\frac{w}{4\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)(1-\rho^2)}\left(\frac{1}{\sigma_{R(1,3)}^2} + \frac{1}{\sigma_{I(1,3)}^2}\right)\right]}{2\sigma_{R(1,3)}\sigma_{I(1,3)}\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)\sqrt{1-\rho^2}} I_0\left[\frac{w}{4\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)(1-\rho^2)}\sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}}\right] \quad (\text{III.31})$$

Où  $I_0$  la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro.

La densité de probabilité de la phase est obtenue par intégration de  $p_{M\psi}(m, \phi)$  par rapport à  $m$  de 0 à  $+\infty$ .

$$\begin{aligned}
 p_{\psi}(\phi) &= \int_0^{+\infty} p_{M\psi}(m, \phi) dm = \int_0^{+\infty} \frac{m}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{m^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\cos^2\phi}{\sigma_R^2} - 2\rho\frac{\cos\phi\sin\phi}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\sin^2\phi}{\sigma_I^2}\right)\right] dm \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\exp\left[-\frac{m^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\cos^2\phi}{\sigma_R^2} - 2\rho\frac{\cos\phi\sin\phi}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\sin^2\phi}{\sigma_I^2}\right)\right]}{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\cos^2\phi}{\sigma_R^2} - 2\rho\frac{\cos\phi\sin\phi}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\sin^2\phi}{\sigma_I^2}\right)} \Bigg|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_I} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\left(\frac{\cos^2\phi}{\sigma_R^2} - 2\rho\frac{\cos\phi\sin\phi}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\sin^2\phi}{\sigma_I^2}\right)}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$p_{\phi(1,3)}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\rho_{(1,3)}^2}}{\frac{\sigma_{I(1,3)}}{\sigma_{R(1,3)}} \cos^2\phi - \rho \sin 2\phi + \frac{\sigma_{R(1,3)}}{\sigma_{I(1,3)}} \sin^2\phi} \quad (\text{III.32})$$

Nous pouvons en déduire les moments d'ordre un et deux de l'intensité de rayonnement, tous calculs faits nous trouvons :

$$\langle \eta_{r,1,3} \rangle = \mathfrak{A}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) (\sigma_{R(1,3)}^2 + \sigma_{I(1,3)}^2) \quad (\text{III.33})$$

$$\langle \eta_{r,1,3}^2(\beta_{1,3}) \rangle = \mathfrak{A}_{1,3}^2(\beta_{1,3}, \beta_0) (3\sigma_{R(1,3)}^4 + 3\sigma_{I(1,3)}^4 + 2(1+2\rho_{(1,3)}^2)\sigma_{R(1,3)}^2\sigma_{I(1,3)}^2) \quad (\text{III.34})$$

$$\sigma_{\eta_{r,1,3}}(\beta_{1,3}) = \mathfrak{A}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0) \sqrt{2(\sigma_{R(1,3)}^4 + \sigma_{I(1,3)}^4 + 2\rho_{(1,3)}^2\sigma_{R(1,3)}^2\sigma_{I(1,3)}^2)} \quad (\text{III.35})$$

À notre connaissance, les méthodes courantes de perturbation sont limitées au calcul de la moyenne statistique de l'intensité de rayonnement. Dans l'hypothèse de distribution des hauteurs gaussiennes, nous déterminons les expressions analytiques de la densité de probabilité, de la moyenne, de la variance et la fonction de répartition de l'intensité de rayonnement pour chaque direction d'observation. À notre connaissance, les formules (III.31-III.35) représentent un résultat original pour l'analyse des guides d'ondes diélectriques à parois rugueuses.

Dans le cas où  $L \rightarrow \infty$ , la covariance et le coefficient de corrélation sont nuls et les variances  $s_{R(1,3)}^2$  et  $s_{I(1,3)}^2$  sont égales.

$$\sigma_{R(1,3)}^2 = \sigma_{I(1,3)}^2 = \frac{1}{2} \left[ |K_{a(1,3)}|^2 \hat{R}_{aa}(\gamma) + |K_{b(1,3)}|^2 \hat{R}_{bb}(\gamma) + 2 \operatorname{Re} \left( K_{a(1,3)}^* K_{b(1,3)} \hat{R}_{ab}(\gamma) \right) \right] \quad (\text{III.36})$$

En conséquence, pour des interfaces non corrélées et corrélées, l'intensité de rayonnement obéit alors à une loi classique exponentielle,

$$p_{\eta_{r1,3}}(w) = \frac{1}{2\sigma_{R(1,3)}^2 \mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)} \exp \left[ -\frac{w}{2\sigma_{R(1,3)}^2 \mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)} \right] \quad \text{avec } w \geq 0 \quad (\text{III.37})$$

Que nous pouvons encore écrire sous la forme suivante

$$p_{\eta_{r1,3}}(w) = \frac{1}{\langle \eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) \rangle} \exp \left( -\frac{w}{\langle \eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) \rangle} \right) \quad \text{avec } w \geq 0 \quad (\text{III.38})$$

Les moments de cette distribution sont donnés par la formule suivante :

$$\langle \eta_{r1,3}^q(\beta_{1,3}) \rangle = \langle \eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) \rangle^q \quad (\text{III.39})$$

Nous pouvons en déduire le moment d'ordre deux, la variance et l'écart type de l'intensité de rayonnement par les relations :

$$\langle \eta_{r1,3}^2(\beta_{1,3}) \rangle = 2 \langle \eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) \rangle^2; \quad \sigma_{\eta_{r1,3}}^2(\beta_{1,3}) = \langle \eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) \rangle^2; \quad \sigma_{\eta_{r1,3}}(\beta_{1,3}) = \langle \eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) \rangle \quad (\text{III.40})$$

### III.2.4. Fonction de répartition de l'intensité de rayonnement

On obtient la fonction de répartition à partir de l'expression suivante :

$$F_{\eta_{r1,3}}(w) = \operatorname{Pr} ob \left[ \eta_{r1,3}(\beta_{1,3}) < w \right] = \int_0^w p_{\eta_{r1,3}}(w) dw \quad \text{pour } w \geq 0 \quad (\text{III.41})$$

En remplaçant l'équation (III.31) dans l'équation (III.41), et en intégrant par rapport à  $w$ , on obtient:

$$F_{\eta_{r,1,3}}(w) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi\sigma_{R(1,3)}\sigma_{I(1,3)}} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{w}{4\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)(1-\rho^2)} \zeta(\phi) \right] \right\} \zeta^{-1}(\phi) d\phi \quad \text{pour } w \geq 0 \quad (\text{III.42})$$

Avec :

$$\zeta(\phi) = \left( \frac{1}{\sigma_{R(1,3)}^2} + \frac{1}{\sigma_{I(1,3)}^2} \right) + \cos(2\phi + \xi) \sqrt{\left( \frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2} \right)^2 + 4 \frac{\rho^2}{\sigma_R^2 \sigma_I^2}} \quad (\text{III.43})$$

Dans le cas où  $L \rightarrow \infty$ , la covariance et le coefficient de corrélation sont nuls et les variances  $s_{R(1,3)}^2$  et  $s_{I(1,3)}^2$  sont égales. Dans ce cas, on aura la fonction de répartition d'une distribution classique exponentielle :

$$F_{\eta_{r,1,3}}(w) = 1 - \exp \left[ -\frac{w}{2\sigma_{R(1,3)}^2 \mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)} \right] \quad \text{pour } w \geq 0 \quad (\text{III.44})$$

Dans quelques applications (par exemple dans le cas où les pertes ne sont pas tolérées à partir d'un certain seuil  $\eta_{rs}$ ) il est intéressant de connaître la probabilité pour que l'intensité de rayonnement dépasse le seuil  $\eta_{rs}$ . Cette probabilité est calculée comme suit :

$$P(\eta_{r,1,3} > \eta_{rs}) = \int_{\eta_{rs}}^{+\infty} p_{\eta_{r,1,3}}(w) dw = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi\sigma_{R(1,3)}\sigma_{I(1,3)}} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \exp \left[ -\frac{\eta_{rs}}{4\mathcal{G}_{1,3}(\beta_{1,3}, \beta_0)(1-\rho^2)} \zeta(\phi) \right] \right\} \zeta^{-1}(\phi) d\phi \quad (\text{III.45})$$

Ainsi dans le cas où  $L \rightarrow \infty$ , la probabilité de dépasser le seuil  $\eta_{rs}$  décroît exponentiellement avec le rapport  $\eta_{rs}$  à la valeur moyenne  $\langle \eta_{r,1,3}(\beta_{1,3}) \rangle$ .

$$P(\eta_{r,1,3} > \eta_{rs}) = \exp \left[ -\frac{\eta_{rs}}{\langle \eta_{r,1,3}(\beta_{1,3}) \rangle} \right] \quad (\text{III.46})$$

### III.2.5. Conclusion

Ce chapitre a été l'objet de l'étude des caractéristiques statistiques des interfaces du guide déformé basé sur le principe de calculer la valeur moyenne de l'intensité de rayonnement qui devrait utiliser pour notre simulation dans le chapitre suivant.

## **Chapitre IV : Simulation**

**IV.1. Introduction**

**IV.2. Equation de dispersion**

**IV.3. Coefficient de perte**

**IV.4. Densité de probabilité**

## Chapitre IV : Simulation

### IV.1. Introduction

A la lumière de ce qui précède, nous avons réussi à calculer les amplitudes rayonnées sous certaines conditions aux limites entre le milieu intérieur et extérieur du guide à parois rugueuses. Ces calculs nous a permis de simuler numériquement le coefficient de pertes en fonction des différents paramètres : l'angle d'incidence et la longueur de déformation du guide. La modélisation, écrite sous *Matlab*, consiste à prendre en compte le calcul de l'intensité de rayonnement et la valeur moyenne du coefficient de pertes dans le milieu 1. Nous avons commencé le calcul des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation gaussienne d'après les expressions (II.1), puis nous sommes passés au calcul de l'amplitude des champs rayonnées dans le milieu 1 d'après l'expression (III.19). Nous disposons alors d'un programme permettant de calculer numériquement le coefficient de perte pour les deux modes de polarisation : TE et TM et ainsi de prévoir l'influence de la longueur de rugosité et l'angle d'incidence du guide déformé à 3 couches sur le coefficient de perte et sur sa densité de probabilité.

### IV.2. Equation de dispersion

Comme nous avons déjà vue, si le guide optique est lisse et ne possède pas des rugosités aux niveaux d'interfaces on observe le phénomène de dispersion qui définit la gamme des longueurs d'onde qui peuvent se propager dans le guide planaire en fonction de la géométrie et des caractéristiques électrique de ce dernier. D'après l'expression (II.21), on peut tirer l'équation de dispersion qui présente une relation entre l'épaisseur du guide et l'angle d'incidence dans les deux modes de polarisation.

Tous calculs fait, on trouve l'équation de dispersion avec  $n$  représente l'indice de l'harmonique :

$$\chi_{20} u_0 = \arctan e_1^2 (\tilde{x}_{10} / \chi_{20}) + \arctan e_3^2 (\tilde{x}_{30} / \chi_{20}) + n\pi \quad (\text{IV.1})$$

Sachant que :  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\chi_{20} = k_2 \cos \theta_0$ ,  $\beta_0 = k_2 \sin \theta_0$ , donc:

En mode TE :

$$u_0 = \left[ \arctan (\tilde{x}_{10} / \chi_{20}) + \arctan (\tilde{x}_{30} / \chi_{20}) + n\pi \right] / \chi_{20} \quad (\text{IV.2})$$

En mode TM :

$$u_0 = \left[ \arctan (n_2/n_1)^2 (\tilde{x}_{10} / \chi_{20}) + \arctan (n_2/n_3)^2 (\tilde{x}_{30} / \chi_{20}) + n\pi \right] / \chi_{20} \quad (\text{IV.3})$$

A chaque valeur de l'angle  $\theta_0$  compris entre l'angle critique de réflexion totale  $\theta_c$  et  $\pi/2$ , est associée un trajet particulier de l'onde. Chaque trajet de l'onde dans le guide est appelé mode de propagation. On a donc un nombre fini de modes guidés. Pour chaque mode fondamentales TE ou TM, on peut extraire l'épaisseur correspondant à un angle incident fixe.

La figure 4 présente les graphes de dispersions à l'intérieur du guide, pour l'indice de réfraction des trois milieu  $n_1=1$ ,  $n_2=2.6$  et  $n_3=1.47$ , on trouve l'angle critique  $\theta_c = \arcsin(n_3/n_2) = 34.43^\circ$  avec une épaisseur de guide en mode TE:  $u_0/\lambda = 0.03455$  et  $0.09532$  en mode TM.

Pour une valeur choisie de l'angle  $\theta_0$  par exemple  $\theta_0 = 45^\circ$ , on trouve l'épaisseur convenable par rapport à la longueur d'onde  $u_0/\lambda = 0.1073$  on mode TE et  $0.2145$  on mode TM pour le mode fondamentale  $n=0$ .

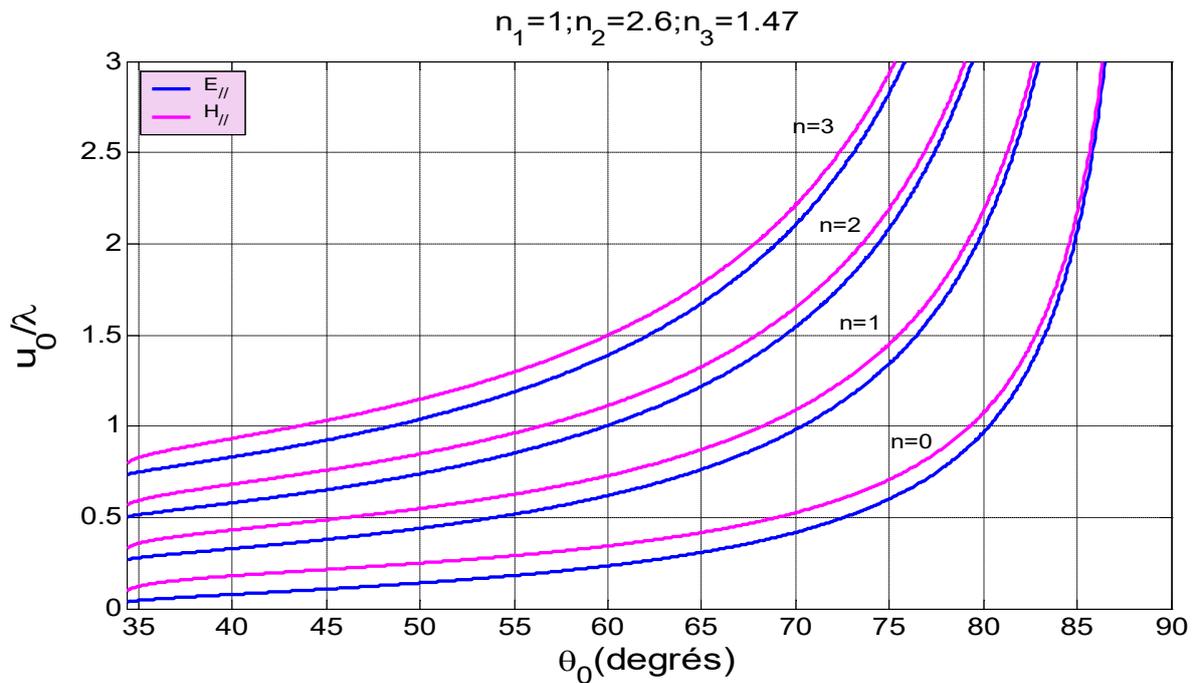


Figure 4 : les graphes de dispersion d'un guide diélectrique lisse

(—) Mode TE, (—) Mode TM ;  $n$  l'indice de l'harmonique

### IV.3. Le coefficient de perte

Les courbes de la figure 5 représentent la moyenne statistique du coefficient de perte  $\langle \eta_i, \lambda \rangle$  en fonction de la longueur normalisée  $L/\lambda$  du guide pour deux angles  $\theta = 60^\circ$  et  $\theta = -60^\circ$  pour les deux polarisations  $E_{//}$  et  $H_{//}$ . Les parois du guide sont non corrélées ( $q = 0$ ).

Les indices optiques  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  des trois milieux sont fixés à 1, 2.6 et 1.47 respectivement. Le guide diélectrique est caractérisé par un angle d'incidence  $\theta_0$  fixé à  $45^\circ$  ( $0.7854rad$ ), la longueur d'onde  $\lambda=1$  et d'hauteurs quadratiques moyennes pour les deux interfaces  $\sigma_a = 0.035\lambda$ ,  $\sigma_b = 0.25\lambda$  et les longueurs de corrélation  $l_a = 0.25\lambda, l_b = 0.2\lambda$ .

Pour la valeur de  $\theta = 60^\circ$  ou  $\theta = -60^\circ$  les courbes obtenues présentent un comportement oscillant dont la période dépend de l'angle d'observation. Les oscillations qui passent par un maximum et un minimum diminuent lorsque la longueur du guide augmente. Par exemple pour  $\theta = 60^\circ$  et avec longueur  $L/\lambda = 0.33$  on peut tirer la valeur maximale du coefficient de perte pour la polarisation  $E_{//}$   $\langle \eta_{r,1max} \rangle = 0.1259$  et pour la polarisation  $H_{//}$   $\langle \eta_{r,1max} \rangle = 0.3703$ . Pour  $L \rightarrow +\infty$ , qui représente les droites horizontales  $\langle \eta_{r,1}(\theta = +60) \cdot \lambda \rangle$  est égale à 0.0622 en mode  $E_{//}$  et à 0.1941 en mode  $H_{//}$  tandis que  $\langle \eta_{r,1}(\theta = -60) \cdot \lambda \rangle$  est égale à 0.0115 en mode  $E_{//}$  et 0.0422 en mode  $H_{//}$ . Ces valeurs sont atteintes avec une erreur relative inférieure à 10% à partir de  $L_0 = 3.2\lambda$  pour un angle d'observation  $\theta = +60^\circ$  et à partir de  $L_0 = 3.6\lambda$  pour un angle d'observation  $\theta = -60^\circ$ . D'après ces valeurs, on constate que les pertes par rugosité sont plus importantes en mode TM qu'en mode TE.

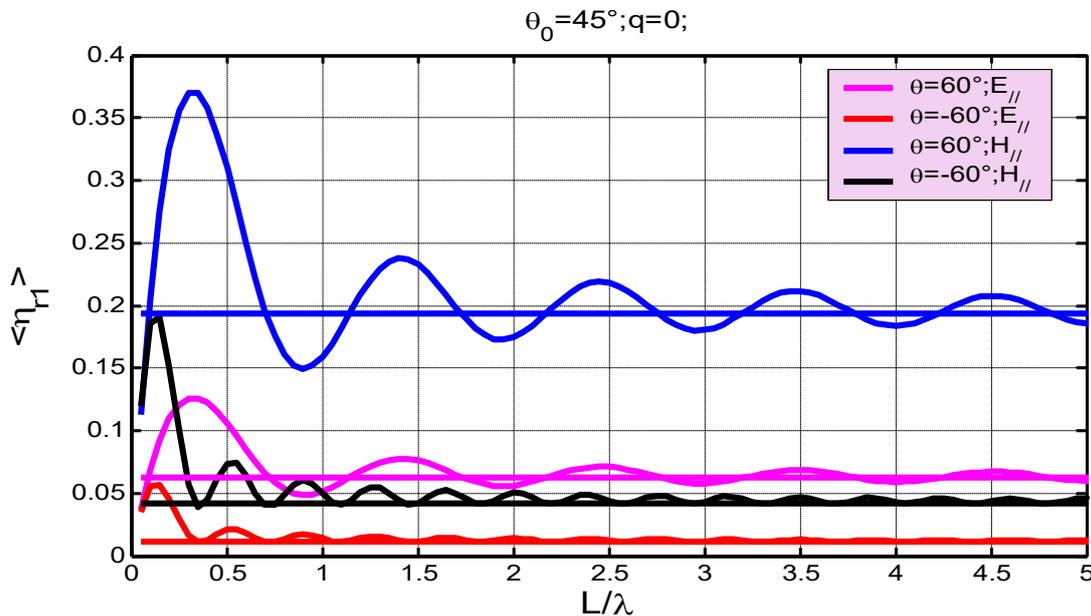


Figure 5: coefficients de perte en fonction de la longueur de déformation

$\theta = 60^\circ$  : (—) Mode TE, (—) Mode TM

$\theta = -60^\circ$  : (—) Mode TE, (—) Mode TM

#### IV.4. La densité de probabilité

Les figures 6 et 7 donnent la densité de probabilités de l'intensité de rayonnement dans la direction  $\theta = 60^\circ$  respectivement en polarisation  $E_{//}$  et  $H_{//}$  pour différentes longueurs

( $L = 0.07\lambda, L = 0.1\lambda, L = 0.2\lambda$ ). Les deux parois sont non corrélées ( $q = 0$ ). L'angle  $\theta_0$  est fixé à  $45^\circ$  et les indices optiques  $n_1, n_2$  et  $n_3$  sont égaux à 1, 2.6 et 1.47. Les lois de probabilités sont données par l'équation (III.38). En remarque qu'en augmentant la longueur  $L$  de la partie rugueuse du guide, pour les deux type de mode TE et TM, la densité de probabilité tend vers la loi exponentielle.

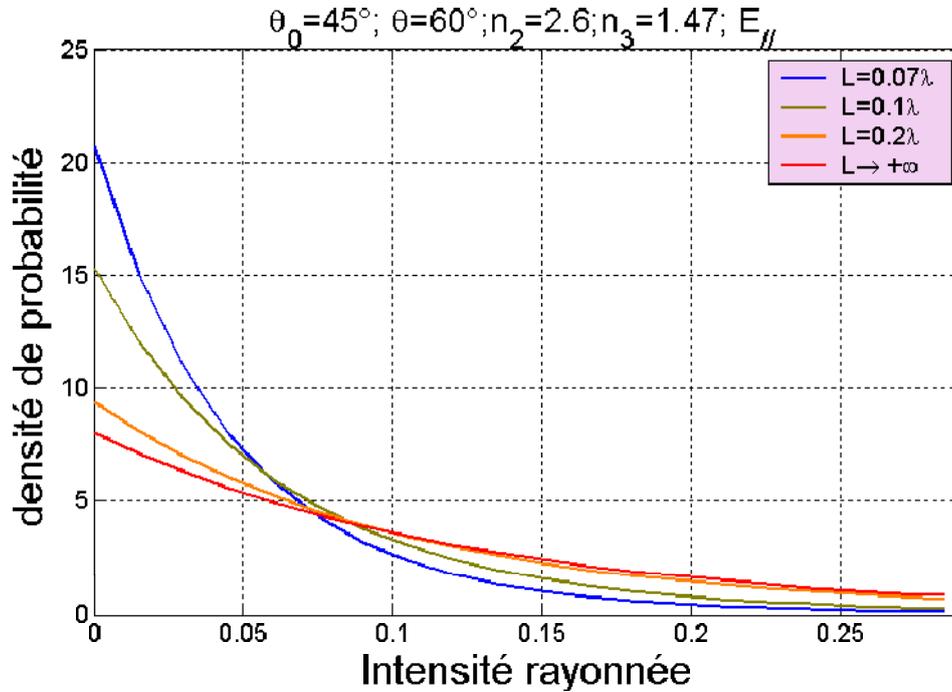


Figure 6: Densité de probabilité de l'intensité de rayonnement pour différentes longueurs de déformation, Polarisation  $E_{//}$

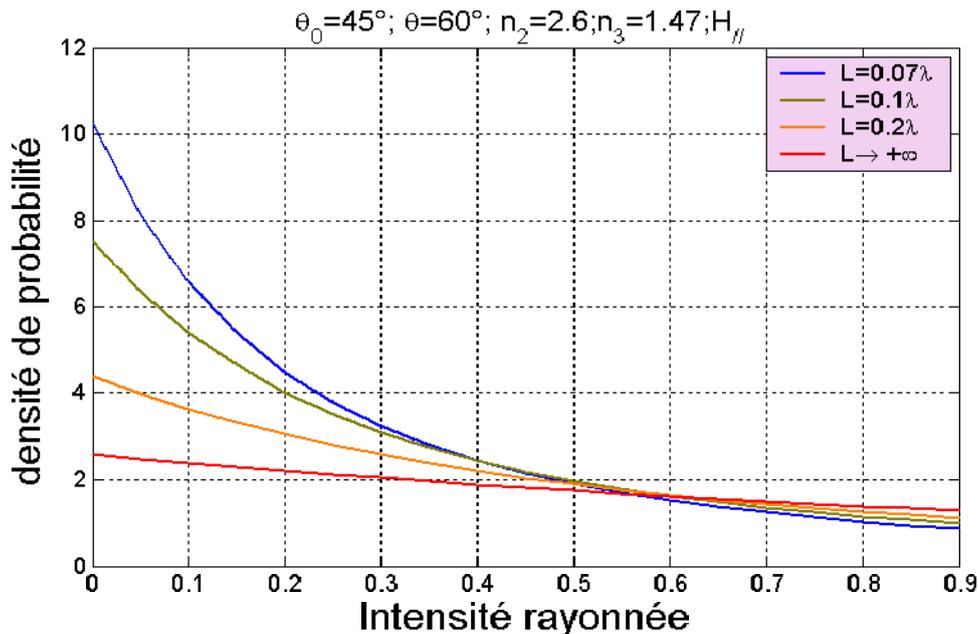


Figure 7: Densité de probabilité de l'intensité de rayonnement pour différentes longueurs de déformation, Polarisation  $H_{//}$

## CONCLUSION GENERALE

Dans le but d'étudier d'une façon précise le problème des pertes par rayonnement dans un guide déformé aléatoirement, nous avons d'abord utilisé les équations de Maxwell classique pour déterminer l'équation d'onde ce qui permet d'écrire de manière analytiquement simple les conditions aux limites de la propagation des ondes par un guide à parois rugueuses pour les deux modes de polarisation.

L'application de l'hypothèse de Rayleigh et l'hypothèse de Fourier ont l'avantage d'exprimer les expressions des champs et ainsi les amplitudes rayonnées et guidées dans les trois milieux de guide. Nous avons pu rechercher les solutions de l'équation de propagation par une méthode de perturbations dans l'ordre zéro (interface lisse) et dans l'ordre un (interface rugueuse). Les solutions obtenues, au premier ordre de perturbations, sont d'autant plus exactes que la hauteur de la rugosité est faible devant la longueur d'onde.

Nous avons étudié la moyenne statistique de l'intensité totale rayonnée, la moyenne statistique et la loi de probabilité de l'intensité rayonnée dans une direction d'observation donnée en fonction de la longueur d'onde du guide et d'un paramètre de mélange qui définit la corrélation entre les deux parois. Dans le cas où les distributions des hauteurs des deux parois sont des gaussiennes, nous montrons que les parties réelles et imaginaires des amplitudes du champ rayonné sont des variables aléatoires Gaussiennes centrées, corrélées et de variances différentes. La loi de probabilité de l'intensité rayonnée dans une direction donnée se déduit de la loi de probabilité conjointe des parties réelle et imaginaire de l'amplitude du champ rayonné dans cette direction. La loi de probabilité dépend de la longueur du guide et tend asymptotiquement vers la loi exponentielle pour des guides à parois corrélées ou non corrélées.

Pour les applications numériques, nous avons considéré des fonctions de corrélation gaussienne. Nous avons démontré que le coefficient de pertes est obtenus par une distribution classique à décroissance exponentielle lorsque la longueur de déformation tend vers l'infini et que les pertes en mode TM sont plus importantes qu'en mode TE.

Enfin, l'étude de rayonnement par un guide rugueux que nous avons présenté est très intéressante dans la résolution des problèmes optique dans les dispositifs de communication et de télécommunications.

## *Bibliographies*

- [1] **D.L.Lee**, "Electromagnetic principals of integrated optics" Wiley publisher 1986.
- [2] **D .Mzrcus**, " Theory of dielectric waveguides and fibres", Clarendon oxford.
- [3] **Jean-Michel courty** "Electromagnétisme et optique" 15 mars 2005 version 0.2.
- [4] **F.Bernardot** "Introduction à l'optique guidée", université Paris-7, Maîtrise de physique 2000-2004 Version 1-26 dec2009.
- [5] **Marta SZACHOWICZ**, thèse de doctorat "réalisation et études spectroscopie de guide d'ondes" .université Claude BERNARD, 22juin 2006.
- [6] **R.F. Millar**, "The Rayleigh hypothesis and a related least-squares solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers", Radio Sci., Vol. 8, 785-796, 1973.
- [7] **C. Baudier, R. Dusséaux**, "Scattering of an E// -polarized plane wave by one-dimensional rough surfaces: numerical applicability domain of a Rayleigh method in the far- field zone", J. Electromagn. Waves Appl., 2001.
- [8] **Julien Laverdant** "Etude en champ proche optique des exaltations électromagnétiques sur des structures granulaires d'or et d'argent", laboratoire de magnétisme et d'optique de Versailles 2003-2004.
- [9] **Scarmozzino R , Gopinath A, Pregla R , Helfert S** "Numerical techniques for modeling guided-wave photonic devices" ,IEEE journal of selected topics in quantum electronics, 2000.
- [10] **G.R. Jin, J. Harari, L. Joannes, J.P. Vilcot and D. Decoster**, "Numerical analysis of the radiation losses due to surface roughness in integrated optics devices," IEEE Photonics Technology Letters, Vol 8, No 9, 1202-1204, 1996.
- [11] **S. Afifi**, "Propagation et diffraction d'une onde électromagnétique dans des structures apériodiques," Ph. D. Dissertation, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France,1986.
- [12] **S. Afifi, R. Dusséaux** "Statistical study of the radiation losses due to surface roughness for a dielectric slab deposited on a metal substrate". Optics Communications 281 (2008) 4663–4670.
- [13] **S. Afifi, R. Dusséaux, R. de Oliveira**, "Statistical distribution of the field scattered by rough layered interfaces: Formulae derived from the small perturbation method, " Waves in Random and Complex Media, Vol. 20, No. 1, February 2010, 1–22.
- [14] **S. Afifi, R. Dusséaux**, "Statistical study of radiation loss from planar optical waveguides: The curvilinear coordinate method and the small perturbation method" J. Opt. Soc. Am. A, 27, 1171-1184 (2010).